



v-CONULL VE v-KAMA FDK UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

ŞEYDA SEZGEK

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
AĞUSTOS - 2023**

ν –CONULL VE ν –KAMA FDK UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

ŞEYDA SEZGEK

ORCID ID: 0000-0001-9035-3114

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. İLHAN DAĞADUR
ORCID ID: 0000-0001-6223-6543**

**MERSİN
AĞUSTOS - 2023**

ÖZET

ν – CONULL VE ν – KAMA FDK UZAYLARI

Bu tez çalışmasında $\nu \in \{p, bp, r, c\}$ olmak üzere çift indisli diziler için ν – yakınsaklık kavramı göz önüne alınarak (kuvvetli) ν – conull ve (zayıf) ν – kama (wedge) FDK uzayları tanımlandı. Diğer taraftan, Bennett (1974) tarafından yapılan çalışmaya ilişkin sonuçlar (kuvvetli) ν – conull ve (zayıf) ν – kama (wedge) FDK uzayları için incelendi. Ayrıca bu tür uzayların topolojik yapısı ile içermeye (inclusion) dönüşümlerinin kompaktlığı arasındaki ilişki kuruldu. Diğer yandan, bu uzaylara ilişkin çeşitli karakterizasyonlar elde edildi. Son olarak ise (kuvvetli) ν – conull ve (zayıf) ν – kama (wedge) FDK uzaylarının toplanabilirlik alanlarındaki önemli bazı uygulamalar verildi.

Anahtar Kelimeler: Çift indisli dizi uzayları, ν – conull FDK uzayı, ν – kama FDK uzayı, ν – yakınsaklık

Danışman: Prof. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı Mersin.



ABSTRACT

ν – CONULL AND ν – WEDGE FDK SPACES

In this thesis, considering the concept of ν – convergence for double sequences, (strong) ν – conull and (weak) ν – wedge FDK spaces for $\nu \in \{p, bp, r, c\}$ are defined. On the other hand, the results of Bennett (1974) are analysed for (strong) ν – conull and (weak) ν – wedge FDK spaces. Moreover, the relation between the topological structure of such spaces and the compactness of inclusion maps is established. On the other hand, various characterizations of these spaces were obtained. Finally, some important applications of (strong) ν – conull and (weak) ν – wedge FDK spaces in the field of summability are given.

Keywords: Double sequence spaces, ν – conull FDK space, ν – wedge FDK space, ν – convergence

Advisor: Prof. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin University, Department of Mathematics, Mersin.



TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgi birikimiyle yolumu aydınlatan ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. İlhan Dağadur'a çok teşekkür ederim.

Tez izleme komitesi jürilerim Sayın Prof. Dr. Hatice Nedret Özgen ve Sayın Prof. Dr. Abdulcabbar Sönmez'e gösterdikleri yakın ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Sevgisini her zaman en derinden hissettiren, hayatım boyunca beni cesaretlendiren annem Gülay Sezgek'e, aldığım her kararı destekleyen, her zaman güvende hissettiren babam Mehmet Sezgek'e, yaşamım boyunca bana ilham veren canım kardeşlerim Kübra Sezgek ve Esra Özak'a sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde olumlu tavırlarıyla beni aydınlatan başta Mehtap Sözen olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Temel Kavramlar ve Gösterimler	4
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	14
4.1. ν – Kama FDK Uzayları	14
4.2. ν – Conull FDK Uzayları	24
4.3. Seçkin Alt Uzaylar	36
4.4. Matris Alanlarının Seçkin Alt Uzayları	43
4.5. Toplanabilirlik Alanlarına Uygulamalar	47
4.6. Mutlak Toplanabilirlik Alanlarının Bazı Özellikleri	52
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}^2$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
w	Tüm reel ya da kompleks terimli diziler uzayı
ϕ	Sonlu dizilerin kümesi
c	Yakınsak diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
l	Mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
bv	Sınırlı salınımlı diziler uzayı
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
Y_A	A matrisinin bir Y dizi uzayındaki toplanabilirlik alanı
Ω	Tüm çift indisli diziler uzayı
Φ	Çift indisli sonlu diziler uzayı
$\mathcal{M}_u$	Çift indisli sınırlı diziler uzayı
$\mathcal{C}_v$	v – yakınsak çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{C}_{v0}$	Sıfıra v – yakınsak çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{C}_{vA}$	Bir A matrisinin v – toplanabilirlik alanı
$\mathcal{L}_u$	Mutlak yakınsak seri oluşturan çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{BV}$	Sınırlı salınımlı çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{BV}_0$	Sıfıra yakınsak sınırlı salınımlı çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{BS}$	Kısmi toplamaları sınırlı çift indisli diziler uzayı
$\mathcal{CS}_v$	v – yakınsak seri oluşturan çift indisli diziler uzayı
e	Çift indisli birim dizi
e_k	k – ıncı satırı 1 diğer satırları 0 olan dizi
e^l	l – nci sütunu 1 kalan sütunları 0 olan dizi
δ^{kl}	(k, l) – nci terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi
$x^{(mn)}$	Bir x çift indisli dizisinin (mn) – nci kesiti
E'	E uzayın sürekli duali
E^α	$:= \left\{ x = (x_{kl}) : \sum_{k,l=1}^{\infty, \infty} x_{kl} y_{kl} < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\}$
$E^{\beta(v)}$	$:= \left\{ x = (x_{kl}) : v - \sum_{k,l=1}^{\infty, \infty} x_{kl} y_{kl} < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\}$
E^γ	$:= \left\{ x = (x_{kl}) : \sup_{m,n} \left \sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl} y_{kl} \right < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\}$
E^f	$:= \left\{ \left(f(\delta^{kl}) \right) : \forall f \in E' \right\}$
$P_{mn}(x)$	$:= x_{mn}$
$r_{kl}(x)$	$:= x_{kl} $

$q_n(y)$	
$q(y)$	$:= \sup_n \left \overline{\lim}_m y_{mn} \right $
$S^{(2)}$	$: \Omega \rightarrow \Omega, \left(S^{(2)} x \right)_{mn} := \sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl}$
$\left(S^{(2)} \right)^{-1}$	$: \Omega \rightarrow \Omega, \left(\left(S^{(2)} x \right)^{-1} \right)_{mn} := x_{mn} - x_{m-1,n} - x_{m,n-1} + x_{m-1,n-1}$
Ax	$(Ax)_{mn}$, x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi
$\Omega_A^{(\nu)}$	$:= \left\{ x \in \Omega : \forall m, n \in \mathbb{N}, [Ax]_{mn} := \nu - \sum_{k,l} a_{mkl} x_{kl} \text{ mevcut} \right\}$
$E_A^{(\nu)}$	A matrisinin bir E çift indisli dizi uzayındaki ν -toplantabilirlik alanı
$\zeta_A^{(k,l)}$	A matrisinin (k, l) -nci sütunu
$\xi_A^{(m,n)}$	A matrisinin (m, n) -nci satırı
$z^{-1}.E$	$:= \{x : x.z \in E\}$
$z^{-1}.E_A^{(\nu)}$	$:= E_{A.z}^{(\nu)} = \{x : x.z \in E_A^{(\nu)}\}$
$m (s, t) $	$:= \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} x_{kl} < \infty \right\}$
$M (s, t) $	$:= \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n} \sum_{\substack{i=s_m+1 \\ j=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} x_{ij} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} < \infty \right\}$
$S_E^{(\nu)}$	$:= S^{(\nu)}(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : x = \nu - \sum_{k,l} x_{kl} \delta^{kl} \right\}$
$W_E^{(\nu)}$	$:= W^{(\nu)}(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', f(x) = \nu - \sum_{k,l} x_{kl} f(\delta^{kl}) \right\}$
B_E^+	$:= B^+(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', (x_{kl} f(\delta^{kl})) \in \mathcal{BS} \right\}$
B_E	$:= B_E^+ \cap E$
$F_E^{(\nu)+}$	$:= F^{(\nu)+}(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', (x_{kl} f(\delta^{kl})) \in \mathcal{CS}_\nu \right\}$
$F_E^{(\nu)}$	$:= F_E^{(\nu)+} \cap E$
$I_A^{(2)}$	$:= \left\{ x \in \mathcal{L}_{uA} : \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} \text{ yakınsak} \right\}$
$\left(\Lambda_A^{(2)} \right)^\perp$	$:= \left\{ x \in I_A : \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} = \sum_A x \right\}$
$I_A^{(2)}(f)$	$:= \left\{ x \in \mathcal{L}_{uA} : \sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl} \text{ yakınsak} \right\}$

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp(f)$	$:=\left\{x \in I_A: \sum_{k, l} f\left(\delta^{k l}\right) x_{k l}=f(x)\right\}$



1. GİRİŞ

Matematiksel analiz içinde önemli bir yer tutan toplanabilme yöntemleri oldukça eski bir geçmişe sahiptir. İlk olarak Wilansky (1949) matrisler için conull ve coregüler sınıflandırması yapmış ve Snyder (1965) bu sınıflandırmayı FK-uzaylarına aktarmıştır. Ayrıca Bennett (1974) kama (wedge) uzay kavramını tanımlamış ve conull FK-uzayları ile ilişkisini ortaya koymuştur. Bu çalışmaların bir devamı olarak da İnce (2000) Cesàro conull ve Dağadur (2002) C_λ – conull kavramlarını inşa ederek çeşitli karakterizasyonlar vermişlerdir.

1896 yılında ise Pringsheim (1896) tarafından çift indisli diziler ve bu diziler için iyi bilinen Pringsheim yakınsaklık kavramı tanımlanmış olup 1932 yılında Agnew (1932) tarafından çift indisli dizilerin toplanabilirliği incelenmiştir. Ayrıca 1965 yılında Bromwich (1965) tarafından çift indisli dizi uzayları çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Çift indisli diziler için yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarının bir genişlemesi ise 1991 yılında Moricz (1991) tarafından verilmiştir. Diğer taraftan ise Zeltser (2001, 2002 ve 2009) yapmış olduğu çalışmalarda çift indisli dizi uzayları için konservatif matris metotlarını ele alıp FDK ve BDK uzayları için önemli bazı karakterizasyonlar vermiştir.

Bu tez çalışmasında ise Bennett (1974) tarafından yapılan çalışma göz önüne alınarak ν – yakınsaklık kavramı $\nu \in \{p, bp, r, c\}$ olmak üzere (kuvvetli) ν – conull ve (zayıf) ν – kama (wedge) FDK uzayları tanımlanmış ve bu tür uzayların yapısı ile içerme (inclusion) dönüşümlerinin kompaktlığı arasındaki ilişki kurulmuş ve çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca seçkin alt uzaylara ilişkin çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak ise toplanabilirlik alanlarının FDK topolojisi göz önüne alınıp ν – conull ve ν – kama (wedge) FDK uzaylarının toplanabilme alanlarına ilişkin bazı uygulamaları verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Toplanabilme yöntemleri matematiksel analizde önemli bir yer tutar ve oldukça eski bir geçmişe sahiptir. İlk olarak Wilansky (1959, 1978, 1984) matrisleri conull ve coregüler olarak sınıflandırmış ve Snyder (1965) bu sınıflandırmayı FK-uzaylarına (koordinat fonksiyonelleri sürekli Fréchet uzayı) aktarmıştır. Bennett (1974) ise FK-uzayları ve uygulamalarına ilişkin çeşitli karakterizasyonlar vermiştir. Ardından İnce (2000, 2006) Cesàro conull ve Dağadur (2002, 2003, 2006, 2008) C_λ – conull uzay kavramlarını tanımlayarak çeşitli karakterizasyonlar vermişlerdir.

Bilinen tek indisli dizilerin aksine çift indisli dizilerde birçok yakınsaklık kavramı vardır. En çok çalışılanı ise Pringsheim yakınsaklıktır. Pringsheim (1897) çift indisli diziler için sıkça çalışılan Pringsheim anlamındaki yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Agnew (1932) çift indisli dizilerin toplanabilirliği ve Hill (1940) çift indisli dizilerin perfectliği ile ilgili çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Çift indisli dizi uzayları üzerinde ilk olarak Bromwich (1965) çalışmış ve sonraki çalışmalar için yol gösterici olmuştur. Moricz ve Rhoades (1988) ise kuvvetli regüler toplanabilir matrisleri ve hemen hemen yakınsak çift indisli dizileri ele almış ve önemli karakterizasyonlar vermiştir. Daha sonra Móricz (1991) yakınsak ve sıfıra yakınsak çift indisli dizi uzaylarını incelemiş ve bu uzaylar üzerindeki normları vermiştir. Başarır ve Sonalcan (1999) çeşitli çift indisli dizi uzayları tanımlayarak bu uzayların topolojik yapısını incelemiştir.

Toplanabilme metotları ile ilgili olarak Przybylski (1977) ve Boos, Leiger ve Zeller (1997) çift indisli diziler için e –, be – ve c – yakınsaklık kavramlarını tanımlamış, bu yakınsama çeşitlerinin topolojik yapılarını çalışmışlardır. Aynı zamanda Boos, Leiger ve Zeller (1997) Pringsheim anlamında yakınsak diziler uzayının kendi doğal topolojisinde metrikleşebilir olmadığını göstermiş ve bu uzayın LFDK- topolojisini vermiştir.

Milovidov ve Povolotskii (1991) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve sınırlı salınımlı çift indisli dizi uzayları tanımlamış ve bu uzayların $\beta(\nu)$ – duallerini vermiştir. Yeşilkayagil ve Başar (2021) ise bu dizi uzaylarının BDK ve $AK(\nu)$ uzayı olup olmadıklarını belirlemiştir. Gökhan ve Çolak (2004, 2005) kısmi toplamlar dizisi sınırlı, sınırlı salınımlı, Pringsheim anlamında yakınsak ve regüler yakınsak çift indisli dizi uzayları üzerinde çalışmış ve bu uzayların α – ve $\beta(\nu)$ – duallerini vermiştir. Başar ve Sever (2009) $\mathcal{L}_q$ dizi uzayını tanımlamış ve dualleri üzerine çalışmıştır.

Zeltser (2001, 2002, 2009) çift indisli dizi uzayları için konservatif matris metotlarını, matris dönüşümlerini, FDK ve BDK uzaylarının topolojik yapısını ve bu uzayların dualleri ile toplanabilirlik alanlarındaki uygulamalarına ilişkin önemli sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca çift indisli seriler için Pringsheim yoğunluğundaki yakınsaklık kavramını ele alarak önemli sonuçlar vermiştir. Böylece toplanabilme teorisi açısından incelenen özellikler fonksiyonel analiz açısından da incelenmeye başlanmıştır. Bu ise ilgili alanın önemini arttırmıştır. Böylece toplanabilme teorisinde incelenen

kavramlar fonksiyonel analizde de incelenmeye başlanmıştır. Bu da bu alanın daha çok önem kazanmasını sağlamıştır. Bu nedenle bu tez konusunun çalışılması analiz ve fonksiyonlar teorisi açısından önem arz etmektedir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Tanım 3.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve X boştan farklı bir cümle olmak üzere

$$x: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X, (k, l) = x_{kl}$$

şeklinde tanımlanan x fonksiyonuna X değerli çift indisli bir dizi denir.

Bu çalışma boyunca Ω ile tüm reel ya da kompleks terimli çift indisli dizilerin uzayı gösterilecektir. Bu uzay koordinatsal toplam ve skaler çarpım işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Ω uzayının herhangi bir vektör alt uzayına çift indisli dizi uzayı denir.

(δ^{kl}) dizisi

$$\delta_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1, & (i, j) = (k, l) \\ 0, & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

olmak üzere $e = \sum \delta^{kl}$ ile çift indisli birim diziyi, $e_k = \sum_l \delta^{kl}$ ile k -ncı satırı 1 diğer satırları 0 olan diziyi ve $e^l = \sum_k \delta^{kl}$ ile l -nci sütunu 1 diğer sütunları 0 olan diziyi göstereceğiz. Ayrıca tüm çift indisli sonlu dizilerin sınıfı

$$\Phi := \text{span}\{e^{kl} : k, l \in \mathbb{N}\} = \left\{ x \in \Omega : \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2 / [1, N_0]^2 : x_{kl} = 0 \right\}$$

olmak üzere

$$\Phi_1 := \Phi \cup \{e\}$$

biçiminde tanımlanır.

Her $x = (x_{kl})$ çift indisli dizisinin (mn) -nci kesiti

$$x^{(mn)} := \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n x_{kl} \delta^{kl} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

dir.

Tanım 3.1.2. $x = (x_{kl})$ çift indisli bir dizi olmak üzere eğer $\sup_{k,l \in \mathbb{N}} |x_{kl}| < \infty$ ise bu durumda $x = (x_{kl})$ dizisine sınırlıdır denir (Móricz ve Rhoades, 1988). Sınırlı çift indisli dizilerin uzayı

$$\mathcal{M}_u := \left\{ x \in \Omega : \|x\|_\infty := \sup_{k,l} |x_{kl}| < \infty \right\}$$

olup bu uzay $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Çift indisli dizilerde birçok yakınsaklık kavramı mevcut olup en yaygın kullanılan yakınsaklık kavramları ise Pringsheim yakınsaklık, sınırlı yakınsaklık ve regüler yakınsaklıktır. Çift indisli dizilerin yakınsaklığı ile ilgili en bilinen tanım ise Pringsheim yakınsaklık tanımıdır.

Tanım 3.1.3. $x = (x_{kl})$ çift indisli bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki her $k, l \geq N$ için $|x_{kl} - L| < \varepsilon$ ise bu diziye L değerine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir ve $p - \lim x_{kl} = L$ biçiminde gösterilir (Pringsheim, 1900). Tüm Pringsheim yakınsak çift indisli dizilerin uzayı

$$\mathcal{C}_p = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \geq N \quad |x_{kl} - L| < \varepsilon \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Diğer yandan $p - \lim x_{kl} = 0$ olacak şekilde tüm $x = (x_{kl})$ çift indisli dizilerin uzayı ise $\mathcal{C}_{p0}$ ile gösterilir. $\mathcal{C}_p$ uzayı çift indisli dizilerin koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile bir lineer uzay olup $\|x\|_{\mathcal{C}_p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k,l \geq N} |x_{kl}|$ yarı normu ile de bir tam uzaydır. $\mathcal{C}_p$ ve $\mathcal{C}_{p0}$ dizi uzaylarının topolojik yapısı sebebi ile bu uzaylar için bir norm tanımlanamaz (Móricz, 1991).

Pringsheim yakınsak her dizi sınırlı değildir. Eğer $x = (x_{kl})$ dizisi Pringsheim yakınsak ve aynı zamanda $\sup_{k,l \in \mathbb{N}} |x_{kl}| < \infty$ ise bu diziye sınırlı yakınsak dizi denir. Sınırlı yakınsak diziler uzayı $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u = \mathcal{C}_{bp}$ ile gösterilir. Eğer $x = (x_{kl})$ dizisi Pringsheim yakınsak olmak üzere her $l \in \mathbb{N}$ için $\lim_k x_{kl}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_l x_{kl}$ limitleri mevcut ise bu diziye regüler yakınsak dizi denir. Regüler yakınsak diziler uzayı ise $\mathcal{C}_r$ ile gösterilir. Bu uzaylar arasında $\mathcal{C}_r \subset \mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{C}_p$ içerme bağıntısı mevcuttur. Ayrıca $c -$ yakınsaklık

$$\mathcal{C}_c := \left\{ x \in \Omega : c\text{-}\lim x_{kl} := \lim_l \lim_k x_{kl} \text{ mevcut} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. ν herhangi bir yakınsaklık kavramı olmak üzere ν -yakınsak dizilerin uzayı $\mathcal{C}_\nu$ ve sıfıra ν -yakınsak dizilerin uzayı $\mathcal{C}_{\nu 0}$ ile gösterilir. Diğer taraftan $\nu \in \{p, bp, r\}$ için $\{\delta^{kl}, e, e_k, e^l; k, l \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathcal{C}_\nu$ uzayının ve $\nu = c$ için $\{\delta^{kl}, e, e^l; k, l \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathcal{C}_c$ uzayının birer alt uzayıdır. $\mathcal{C}_r, \mathcal{C}_{r0}, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_{bp0}, \mathcal{M}_u$ uzayları $\|\cdot\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.4. $x = (x_{kl})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sup_{i,j \geq 0} \left| \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=i}^{i+m} \sum_{l=j}^{j+n} x_{kl} - \lambda \right| = 0$$

ise yani, (x_{kl}) dizisinin herhangi bir $D = \{(k, l) : i \leq k \leq i+m, j \leq l \leq j+n\}$ dikdörtgensel bölgesinde alınan ortalama değeri i ve j için bir λ sayısına düzgün yakınsak ise $x = (x_{kl})$ dizisine λ sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Moricz ve Rhoades, 1988).

Şimdi ise aşağıda bazı bilinen dizi uzaylarını verelim. $\nu \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}_\nu &:= \left\{ x \in \Omega : \nu - \sum_{k,l} x_{kl} < \infty \right\}, \\ \mathcal{L}_u &:= \left\{ x \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl}| < \infty \right\}, \\ \mathcal{L}_\varphi &:= \left\{ x \in \mathcal{L}_u : (x_{kl})_k, (x_{kl})_l \in \varphi \right\}, \\ \mathcal{M}_p &:= \left\{ x \in \Omega : \lim_n \sup_{k,l \geq n} |x_{kl}| < \infty \right\}, \\ \mathcal{BV} &:= \left\{ x \in \Omega : \|x\|_{\mathcal{BV}} := \sum_{k,l} |x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}| < \infty \right\} \\ \mathcal{BV}_0 &:= \left\{ x \in \mathcal{BV} : \forall l, \lim_k x_{kl} = 0 \text{ ve } \forall k, \lim_l x_{kl} = 0 \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{BS} := \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n} \left| \sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl} \right| < \infty \right\}$$

dir.

Tanım 3.1.5. E lineer bir topolojik vektör uzayı olsun. E nin sürekli duali E' olmak üzere $E \subset \Omega$ uzayının α -, $\beta(v)$ -, γ - ve f -dualleri ise

$$\begin{aligned} E^\alpha &:= \left\{ x = (x_{kl}) : \sum_{k,l=1}^{\infty} |x_{kl} y_{kl}| < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\}, \\ E^{\beta(v)} &:= \left\{ x = (x_{kl}) : v - \sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl} y_{kl} < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\}, \\ E^\gamma &:= \left\{ x = (x_{kl}) : \sup_{m,n} \left| \sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl} y_{kl} \right| < \infty, \forall y = (y_{kl}) \in E \right\} \end{aligned}$$

ve

$$E^f := \left\{ (f(\delta^{kl})) : \forall f \in E' \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.1.6. $E \subset \Omega$ olsun. Bu durumda

$$\{(u_{kl}) \in \Omega : \exists (x_{kl}) \in E \ni \forall k, l \in \mathbb{N}, |u_{kl}| \leq |x_{kl}|\} \subset E$$

ise E uzayına normal (solid) uzay denir. Eğer E bir solid uzay ise $E^\alpha = E^{\beta(v)} = E^\gamma$ eşitliği sağlanır (Başar ve Sever, 2009).

Tanım 3.1.7. $E \subset \Omega$ olsun. Eğer $E^{\alpha\alpha} = E$ ise bu durumda E uzayına perfect uzay denir.

Her perfect uzay bir solid uzaydır. Örneğin $\Phi^\alpha = \Omega$, $\Omega^\alpha = \Phi$, $\mathcal{M}_u^\alpha = \mathcal{C}_{bp}^\alpha = \mathcal{L}_u$ ve $\mathcal{L}_u^\alpha = \mathcal{M}_u$ olduğundan Φ , Ω , $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{M}_u$ uzayları birer perfect uzay olup dolayısıyla solid uzaylardır. Karşıt olarak, solid uzaylar her zaman perfect değildir. Örneğin, $\mathcal{C}_{bp0}$ uzayı solid olup $\mathcal{C}_{bp0}^{\alpha\alpha} = \mathcal{M}_u$ olduğundan perfect değildir (Zeltser, 1998).

Tanım 3.1.8. E uzayı Ω vektör uzayının bir alt uzayı olmak üzere eğer $r_{kl} : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x_{kl}|$ ($k, l \in \mathbb{N}$) yarı normu sürekli ise bu durumda E uzayına bir DK (double K) uzayı denir. Bir DK-uzayı

Fréchet topolojisine sahip ise böyle bir uzaya FDK (double FK) uzayı denir. Ayrıca normlu bir FDK-uzayına ise BDK (double BK) uzayı denir.

$\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_r$ dizi uzayları $\|\cdot\|_\infty$ normu ile birer BDK-uzayıdır. Ayrıca $\mathcal{C}_c$ uzayı da $\{q, q_n : n \in \mathbb{N}\}$ yarı norm ailesi ile bir FDK uzayıdır. Burada

$$q_n(y) := \sup_m |y_{mn}| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{ve} \quad q(y) := \sup_n \left| \overline{\lim}_m y_{mn} \right|$$

olarak tanımlanır.

(E, τ) bir lokal konveks uzay olsun. Eğer E uzayı $E_\mu \subset E_{\mu+1}$ olacak şekildeki E_μ FDK uzaylarının bir dizisinin birleşimi ve τ topolojisi $i : E_\mu \rightarrow E$ içermeye dönüşümüne göre E üzerindeki lokal konveks indüktif limit topolojisi ise (E, τ) uzayına LFDK-uzayı denir. Kısaca $E = \bigcup_{\mu \in \mathbb{N}} E_\mu$ şeklinde ifade edilir. $\mathcal{C}_p$ uzayı bir LFDK-uzayı olup $\mathcal{C}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{bp}^n$ şeklinde ifade edilir. Burada

$$\mathcal{M}_{bp}^n = \left\{ x \in \mathcal{M}_p : \|x\|_\infty^n := \sup_{k, l \geq n} |x_{kl}| < \infty \right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{C}_{bp}^n := \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_{bp}^n$$

olup $\{\|\cdot\|_\infty^n\} \cup \{r_{kl} : k, l \in \mathbb{N}\}$ yarı norm ailesi $\mathcal{M}_{bp}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) üzerinde bir FDK topolojisi tanımlar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{C}_{bp}^n$ uzayı $\mathcal{M}_{bp}^n$ FDK uzayında kapalıdır. Ayrıca $\mathcal{C}_p$ LFDK-uzayı da $\mathcal{M}_p$ LFDK-uzayında kapalıdır (Boos vd., 1997).

Her (E, τ_E) DK-uzayının bir K-uzayına topolojik izomorf olduğu düşünülebilir. Bunu görmek için $\{p : p \in \mathcal{P}\}$ yarı norm ailesi ile bir τ_E DK-topolojisi tanımlansın. Ayrıca $F = \mathcal{T}(E)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \Omega &\rightarrow w \\ x &\rightarrow (z_i) := \left(\chi_{\psi^{-1}(i)} \right) \end{aligned}$$

ve $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ birebir örten dönüşümü

$$\begin{aligned}
\psi[(1,1)] &= 1 \\
\psi[(1,2)] &= 2, \quad \psi[(2,2)] = 3, \quad \psi[(2,1)] = 4, \\
&\vdots \\
\psi[(1,n)] &= (n-1)^2 + 1, \quad \psi[(2,n)] = (n-1)^2 + 2, \dots, \\
\psi[(n,n)] &= (n-1)^2 + n, \quad \psi[(n,n)] = n^2 - n + 2, \dots, \\
\psi[(n,1)] &= n^2, \dots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$p(x) := p(T^{-1}(x)) \quad (x \in F, \quad p \in \mathcal{P})$$

ile tanımlı $\{p : p \in \mathcal{P}\}$ yarı norm ailesi de F üzerinde τ_F , K-topolojisini üretir. Sonuç olarak (E, τ_E) ile (F, τ_F) uzayları topolojik izomorftur.

E çift indisli bir dizi uzayı olmak üzere $\mathcal{T}(E)$ bir ayrılabilir FK-uzayı ise E uzayına ayrılabilir FDK uzayı denir. $\mathcal{M}_u = T^{-1}(I_\infty)$ ayrılabilir olmayan bir BDK uzayıdır (Zeltser vd., 2002).

Tanım 3.1.9. $E \subset \Omega$ ve $x \in E$ olsun. Eğer $x = \nu - \sum_{k,l} x_{kl} \delta^{kl}$ ise x elemanı $AK(\nu)$ özelliğine sahiptir denir. Eğer E nin her elemanı $AK(\nu)$ özelliğine sahip ise o zaman E uzayına $AK(\nu)$ uzayıdır denir (Zeltser, 2001). Eğer Φ uzayı E de yoğun ise bu durumda E uzayına bir $AD(\nu)$ -uzayıdır denir. E uzayı Φ yi içeren bir FDK uzayı olsun. Her $x \in E$ için $(x^{(mn)})$ dizisi E de sınırlı bir cümle ise E uzayına bir AB uzayı denir.

Teorem 3.1.10. $\mathcal{C}_\nu$ bir FDK-uzayı ve τ topolojisi ise $\{t_r : r \in \mathbb{N}\}$ yarı norm ailesi ile tanımlansın. Bu durumda her $u \in \Omega$ için $\{r_{kl} : k, l \in \mathbb{N}\} \cup \{t_k \circ U : k \in \mathbb{N}\}$ yarı norm ailesi $\{u\}^{\beta(\nu)}$ çift indisli dizi uzayı üzerinde bir FDK-topolojisi tanımlar. Burada

$$U(x) = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{kl} x_{kl} \right)_{m,n} \quad \left(x \in \{u\}^{\beta(\nu)} \right)$$

dır (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.11. $\mathcal{C}_\nu$ bir FDK-uzayı olmak üzere ν -lim fonksiyonu $\mathcal{C}_\nu$ uzayı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer E bir $AK(\nu)$ -FDK uzayı ise bu durumda her $f \in E'$ için

$$f(x) = \nu - \sum_{k,l} u_{kl} x_{kl} \quad (x \in E)$$

olacak şekilde $u \in E^{\beta(\nu)}$ vardır (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.12. $\mathcal{C}_p$ uzayındaki her f lineer fonksiyoneli $f(x) = \gamma l$ formunda olup burada γ kompleks bir sayı olmak üzere $p - \lim_{k,l \rightarrow \infty} x_{kl} = l$ ve $\|f\| = |\gamma|$ dir (Moricz, 1991).

Tanım 3.1.13. $A = (a_{mnkl})$, $m, n, k, l = 1, 2, \dots$, reel ya da kompleks terimli dört boyutlu sonsuz bir matris ve

$$\Omega_A^{(\nu)} := \left\{ x \in \Omega : \forall m, n \in \mathbb{N}, [Ax]_{mn} := \nu - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \text{ mevcut} \right\}$$

olmak üzere

$$A : \Omega_A^{(\nu)} \rightarrow \Omega, x \mapsto Ax := ([Ax]_{mn})_{m,n}$$

dönüşümüne x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir (Boos vd., 1997).

$X, Y \subset \Omega$ olmak üzere her $x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise bu durumda .. matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. (X, Y) ile X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfı gösterilir (Robison, 1926).

Dört boyutlu bir A matrisinin bir X çift indisli dizi uzayındaki ν -toplanabilirlik alanı

$$X_A^{(\nu)} := \left\{ x \in \Omega_A^{(\nu)} : Ax \in X \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.14. $\mathcal{C}_\nu$ bir FDK-uzayı ve $\mathcal{C}_\nu$ uzayının FDK topolojisini oluşturan yarı norm ailesi $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris ve E bir FDK uzayı öyle ki FDK topolojisini oluşturan yarı norm ailesi ise $\{\eta_k : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu takdirde

- i. $E_A^{(\nu)}$ bir FDK-uzayı olup FDK topolojisini oluşturan yarı norm ailesi $\{r_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{t_r \circ A_{mn} : r, m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_r \circ A : r \in \mathbb{N}\}$ şeklindedir. Burada

$$A_{mn}(x) := \left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^t a_{mnkl} x_{kl} \right)_{s,t} \quad (x \in E_A^{(\nu)})$$

olarak tanımlanır.

- ii. $(E_A^{(\nu)})'$ topolojik duali

$$f(x) = g(x) + h(Ax) \quad (x \in E_A^{(\nu)})$$

formundaki lineer fonksiyonellerden oluşur. Burada $g \in (\Omega_A^{(\nu)})'$ ve $h \in E'$ dir (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.15. E bir LFDK uzayı ve $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olmak üzere $\Omega_A^{(\nu)}$ bir LFDK uzayı olsun. Bu durumda $E_A^{(\nu)}$ uzayı da bir LFDK uzayıdır (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.16. $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris ve $\nu \in \{r, c\}$ olsun. Bu durumda $\Omega_A^{(\nu)}$ uzayı AK (ν) -FDK uzayıdır. Özel olarak, $f \in (\Omega_A^{(\nu)})'$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \Omega_A^{(\nu)}$ ve $u \in (\Omega_A^{(\nu)})^{\beta(\nu)}$ için

$$f(x) = \nu - \sum_{k,l} u_{kl} x_{kl}$$

olmasıdır (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.17. Herhangi bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun grafiği $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ şeklinde olup $G_f \subset X \times Y$ dir. Eğer G_f kapalı ise f fonksiyonu kapalı grafiğe sahiptir denir. Eğer X, Y Fréchet uzayları olmak üzere f lineer ve kapalı grafiğe sahip ise bu durumda f süreklidir (Dunford ve Schwartz, 1957).

Teorem 3.1.18. (Hahn Banach Teoremi) S bir X vektör uzayının alt uzayı ve S üzerinde $f = 0$ olması X üzerinde $f = 0$ olmasını gerektirirse $x \in \overline{S}$ dir (Dunford ve Schwartz, 1957).

Teorem 3.1.19. $X \supset \Phi$ olmak üzere X bir FDK uzayı olsun. Bu durumda $X^f = (\overline{\Phi})^f$ dir (Wilansky, 1984).

Teorem 3.1.20. X ve Y birer FK-uzayı olsun. Eğer $X \subset Y$ ise $X^f \supset Y^f$ dir. Ayrıca X uzayı Y içinde kapalı ise $X^f = Y^f$ dir (Wilansky, 1984).

Sonuç 3.1.21. Y herhangi bir FDK uzayı olmak üzere $Y \supset \mathcal{BV}_0 \Leftrightarrow Y^f \subset \mathcal{BV}_0^f = \mathcal{BS}$ dir.

Buradan açıkça görülür ki $A \in (\mathcal{BV}_0 : Y)$ olması için gerek ve yeter şart A nın kolonları Y ye ait ve her $g \in Y'$ için $\{g(a^{kl})\} \in \mathcal{BS}$ olmasıdır.

Teorem 3.1.22. $((X_n, \tau_n))$ FK-uzaylarının bir dizisi olsun. Bu durumda $X := \bigcap_n X_n$ uzayı

$$x^\alpha \rightarrow 0(\tau) \Leftrightarrow x^\alpha \rightarrow 0(\tau_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

bağıntısı ile tanımlanan $\tau := \sup \tau_n$ topolojisi ile bir FK-uzayıdır.

(X, τ) FK-uzayının X' topolojik duali

$$f \in X' \Leftrightarrow \exists X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_m} \text{ ve } \exists g_{n_i} \in X_{n_i}' \quad (i = 1, 2, \dots, m) : f = \sum_{i=1}^m g_{n_i} \Big|_X$$

dir (Wilansky, 1984).

Teorem 3.1.23. H_1 ve H_2 lokal konveks uzaylar olsun. Bu durumda X ($H = H_1$) FK-uzayı $\mathcal{P}_X$ yarı norm ailesi ve Y ($H = H_2$) FK-uzayı $\mathcal{P}_Y$ yarı norm ailesi ile verilsin. Eğer $T : X \rightarrow H_2$ sürekli bir lineer dönüşüm ise bu durumda aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

- i. $Y_T := \{x \in X : T(x) \in Y\}$ uzayı bir FK-uzayı olup topolojisi $\mathcal{P}_T := \mathcal{P}_X \cup \{q \circ T : q \in \mathcal{P}_Y\}$ yarı norm ailesi ile tanımlanır ve $T : Y_T \rightarrow Y$, $x \mapsto T(x)$ dönüşümü süreklidir.
- ii. Y_T uzayının topolojik duali aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

$$f \in Y_T' \Leftrightarrow \exists g \in X' \text{ ve } \exists h \in Y' : f(x) = g(x) + h(T(x)) \quad (x \in Y_T)$$

- iii. X ve Y ayrılabilir ise Y_T uzayı da ayrılabilirdir (Zeltser, 2001).

Teorem 3.1.24. Y bir FK-uzayı ve A bir matris olsun. Bu durumda Y_A bir FK-uzayıdır. Ayrıca $x \in Y_A$, $\alpha \in w_A^\beta$, $g \in Y'$ olmak üzere

$$f \in Y_A' \Leftrightarrow f(x) = \alpha x + g(Ax)$$

dır (Wilansky, 1984).

Teorem 3.1.25. Y bir FK-uzayı ve z bir dizi olsun. Bu durumda $X := z^{-1}.Y = \{x : x.z \in Y\}$ olmak üzere X bir FK-uzayı olup $x \in X$, $\alpha \in \phi$, $g \in Y'$ için

$$f \in X' \Leftrightarrow f(x) = \alpha x + g(z.x)$$

dır (Wilansky, 1984).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ν –Kama FDK Uzayları

Lemma 4.1.1. $z^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ için $m, n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \frac{z_{ij}^{(mn)}}{z_{ij}} = 0$$

limiti mevcuttur. Ayrıca herhangi bir çift indisli z dizisi için $z^\alpha \subseteq \bigcap_{m, n=1}^{\infty, \infty} \{z^{(mn)}\}^\alpha$ dir.

İspat. $z^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) olsun. $1 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots$, $1 = j_0 < j_1 < j_2 < \dots$ olacak şekildeki $\{i_k\}$ ve $\{j_l\}$ herhangi pozitif tamsayı dizileri için $i \geq i_k$, $j \geq j_l$ ($k, l = 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$\max_{\substack{1 \leq m \leq k \\ 1 \leq n \leq l}} |z_{ij}^{(mn)}| < \frac{1}{4^{kl}}$$

eşitsizliği gerçeklensin. Ayrıca $i_k \leq i < i_{k+1}$, $j_l \leq j < j_{l+1}$ ($k, l = 0, 1, 2, \dots$) olacak şekilde $z \in \Omega$ çift indisli dizisi için

$$z_{ij} = \frac{1}{2^{kl}}$$

olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ olur. Diğer taraftan $i \geq i_k$, $j \geq j_l$ olmak üzere herhangi sabit m, n sayıları için

$$\left| \frac{z_{ij}^{(mn)}}{z_{ij}} \right| < \frac{1}{2^{kl}}$$

olup $\lim_{i, j \rightarrow \infty} \frac{z_{ij}^{(mn)}}{z_{ij}} = 0$ elde edilir.

Şimdi ise $x \in Z^\alpha$ olsun. Bu durumda $\sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} |x_{ij} z_{ij}| < \infty$ olup $m, n = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} |x_{ij} z_{ij}^{(mn)}| &< \sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} |x_{ij} z_{ij}| \frac{1}{2^{kl}} \\ &< \frac{1}{2^{kl}} \sum_{i,j=1}^{\infty,\infty} |x_{ij} z_{ij}| < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in \bigcap_{m,n=1}^{\infty,\infty} \{z^{(mn)}\}^\alpha$ olup ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.2. $E \supset \Phi$ bir FDK-AK(ν) uzayı olsun. Bu takdirde E nin bir K alt kümesinin rölatif kompakt olması için gerek ve yeter şart K nın koordinatsal sınırlı ve K üzerinde $\nu - \lim x^{(mn)} = x$ yakınsamasının düzgün olmasıdır.

İspat. “ K nın elemanlarının her $\{x^{(kl)}\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir” önermesini ispat etmeliyiz. Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ ve q , E üzerinde sürekli bir yarı norm olsun. Ayrıca $x^{(mn)} \rightarrow x$ ve K koordinatsal sınırlı olduğundan pozitif m_0, n_0 tamsayıları için

$$\sup_{k,l} q\left(x_{kl} - x_{kl}^{(m_0 n_0)}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Diğer yandan $\{x_{kl}^{(m_0 n_0)}\}$ dizisi E nin bir $m_0 n_0$ –boyutlu alt uzayında sınırlı bir dizi olduğundan yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu alt diziye ise $\{y_{kl}^{(m_0 n_0)}\}$ olarak alalım. Böylece $i, k \geq k_0$ ve $j, l \geq l_0$ için

$$q\left(y_{ij}^{(m_0 n_0)} - y_{kl}^{(m_0 n_0)}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

elde edilir. O halde üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 q\left(y^{(ij)} - y^{(kl)}\right) &= q\left(y_{ij}^{(m_0 n_0)} - y^{(ij)} - y_{ij}^{(m_0 n_0)} + y_{kl}^{(m_0 n_0)} - y^{(kl)} - y_{kl}^{(m_0 n_0)}\right) \\
 &< q\left(y_{ij}^{(m_0 n_0)} - y^{(ij)}\right) + q\left(y_{ij}^{(m_0 n_0)} - y_{kl}^{(m_0 n_0)}\right) + q\left(y^{(kl)} - y_{kl}^{(m_0 n_0)}\right) \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

olup $\{y^{(kl)}\}$ dizisi $\{x^{(kl)}\}$ dizisinin bir Cauchy alt dizisidir.

Tanım 4.1.3. (E, τ) , Φ uzayını içeren bir FDK uzayı olsun. Eğer $\delta^{kl} \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) ise (E, τ) uzayına ν -kama FDK uzayı (double ν -kama FK-uzayı) denir.

Tanım 4.1.4. (E, τ) , Φ uzayını içeren bir FDK uzayı olsun. Eğer $\delta^{kl} \rightarrow 0$ (zayıf) ($m, n \rightarrow \infty$) ise (E, τ) uzayına zayıf ν -kama FDK uzayı (double zayıf ν -kama FK-uzayı) denir.

$s = (s_m)$ ve $t = (t_n)$ negatif olmayan tamsayıların $s_1 = 0, t_1 = 0$ olacak şekilde kesin artan iki dizisi olsun. Bu durumda

$$m|(s, t)| := \left\{ x \in \Omega : \sup_{m, n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} |x_{kl}| < \infty \right\}$$

dizi uzayı

$$x \rightarrow \|x\| = \sup_{m, n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} |x_{kl}|$$

normu ile bir BDK uzayıdır. Ayrıca $m|(s, t)|$ uzayı bir solid uzayıdır.

Teorem 4.1.5. (E, τ) bir FDK uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. E bir ν -kama FDK uzayıdır.
- ii. Herhangi $z \in \mathcal{C}_{\nu 0}$ için $z^\alpha \subseteq E$ dir.
- iii. Herhangi s, t dizileri için $E \supset m|(s, t)|$ ve $I : m|(s, t)| \rightarrow E$ içerme dönüşümü kompaktır.
- iv. $E \supset \mathcal{L}_\varphi$ ve $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içerme dönüşümü kompaktır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) E bir ν -kama FDK uzayı ve $\{q_{mn}\}$, τ üzerinde tanımlı yarı normların bir ailesi olsun. Bu durumda $m, n, i, j = 1, 2, \dots$ için

$$z_{ij}^{(mn)} = q_{mn}(\delta^{ij}) \quad (4.1.)$$

olup E bir ν -kama FDK uzayı olduğundan $z^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ dır. Ayrıca $y \in \bigcap_{m,n=1}^{\infty, \infty} \{z^{(mn)}\}^\alpha$ olsun. Bu takdirde $\forall m, n$ için $\sum_{i,j} |y_{ij} z_{ij}^{(mn)}| < \infty$ olup (4.1) den

$$\sum_{i,j} |y_{ij} q_{mn}(\delta^{ij})| = \sum_{i,j} q_{mn}(y_{ij} \delta^{ij}) < \infty$$

elde edilir. E tam olduğundan $\sum_{i,j} y_{ij} \delta^{ij}$ serisi (E, τ) uzayında yakınsaktır. Serinin yakınsadığı değere x diyelim. O halde $y^{(mn)} \rightarrow x$ olacaktır. Böylece $y_{kl}^{(mn)} \rightarrow x_{kl}$ olup her k, l için $y_{kl}^{(mn)} \rightarrow y_{kl}$ olduğundan $x = y$ olup $\bigcap_{m,n=1}^{\infty, \infty} \{z^{(mn)}\}^\alpha \subseteq E$ elde edilir.

(ii $\Rightarrow$ iii) $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ olmak üzere $z^\alpha \subseteq E$ olsun. Bu durumda $s_1 = t_1 = 0$ olmak üzere kesin artan $(s_m), (t_n)$ dizileri için $i \geq s_m, j \geq t_n$ ve $m, n \geq 2$ olmak üzere

$$|z_{ij}| \leq \frac{1}{2^{mn}}$$

eşitsizliği gerçeklensin. Bu takdirde i, j, u, v pozitif tamsayıları için $i \leq j, u \leq v$ ve $x \in m|(s, t)|$ olduğunda

$$\begin{aligned} \sup_{j,v} \sum_{\substack{k=s_i+1 \\ l=t_u+1}}^{s_{j+1}, t_{v+1}} |x_{kl} z_{kl}| &= \sup_{j,v} \sum_{m=i, n=u}^{j,v} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} |x_{kl} z_{kl}| \\ &\leq \|x\| \sum_{m=i, n=u}^{j,v} \frac{1}{2^{mn}} < \infty \end{aligned}$$

olup $x \in z^\alpha$ dır. Hipotezden ise $m|(s, t)| \subseteq z^\alpha \subseteq E$ elde edilir.

Şimdi $K \subset m|(s, t)|$ ve $\forall x \in K$ için $\|x\| \leq M$ olsun. Bu durumda $s_u < m \leq s_{u+1}$ ve

$t_v < n \leq t_{v+1}$ için

$$\sum_{k=m, l=n}^{\infty, \infty} |x_{kl} z_{kl}| \leq \sum_{i=u, j=v}^{\infty, \infty} \sum_{\substack{k=s_i+1 \\ l=t_j+1}}^{s_{i+1}, t_{j+1}} |x_{kl} z_{kl}| \leq M \sum_{i=u, j=v}^{\infty, \infty} \frac{1}{2^{ij}}$$

elde edilir. Böylece $x^{(mn)} \rightarrow x$ (z^α nın topolojisinde) ve K da düzgündür. Ayrıca $z^\alpha \subseteq E$ olduğundan $x^{(mn)} \rightarrow x$ (τ topolojisinde) ve $x \in K$ da düzgündür. Dolayısıyla $I: (m|(s, t)|, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \tau)$ içirme dönüşümü kompakttır.

(iii $\Rightarrow$ iv) $E \supset m|(s, t)|$ ve $I: (m|(s, t)|, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \tau)$ içirme dönüşümü kompakt olsun. Bu durumda her zaman $\mathcal{L}_\varphi \subset m|(s, t)|$ olduğundan $I: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow m|(s, t)|$ içirme dönüşümü süreklidir. Hipotezden $\mathcal{L}_\varphi \subset m|(s, t)| \subset E$ ve $I: (m|(s, t)|, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \tau)$ dönüşümü kompakt olduğundan $I: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içirme dönüşümü kompakttır.

(iv $\Rightarrow$ i) $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ ve $I: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içirme dönüşümü kompakt olsun. Bu takdirde $A = \{\delta^{kl}: k, l = 1, 2, \dots\}$ cümlesi $\mathcal{L}_\varphi$ uzayının sınırlı bir alt cümlesidir. $I: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içirme dönüşümü kompakt olduğundan $I(A) = A$ cümlesi E uzayında rölatif kompakttır. O halde A üzerindeki koordinatsal yakınsaklık topolojisi ile τ topolojisi çakışıkır. Bu durumda $r_{mn}(x) = |x_{mn}|$, $m, n = 1, 2, \dots$ yarı normlarının oluşturduğu koordinatsal yakınsaklık topolojisine göre

$$r_{mn}(\delta^{kl}) = \begin{cases} 1, & (k, l) = (m, n) \\ 0, & (k, l) \neq (m, n) \end{cases}$$

olup $r_{mn}(\delta^{kl}) \rightarrow 0, (k, l \rightarrow \infty)$ olduğundan (E, τ) uzayında $\delta^{kl} \rightarrow 0, (k, l \rightarrow \infty)$ dır. Böylece E bir ν -kama FDK uzayıdır.

Sonuç 4.1.6. E bir ν -kama FDK uzayı hemen hemen yakınsak olmayan sınırlı bir dizi içerir.

İspat. E bir ν -kama FDK uzayı olsun. Teorem 4.1.5 den $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ olup $z^\alpha \subseteq E$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

dizisine yeterli sayıda sıfır eklenerek z^α da hemen hemen yakınsak olmayan sınırlı bir dizi oluşturmak mümkündür.

Sonuç 4.1.7.

- i. Tüm p – kama FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{L}_\varphi$ dir.
- ii. $\nu \in \{bp, r\}$ olmak üzere tüm ν – kama FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{L}_u$ dir.

İspat. Teorem 4.1.5 den E bir ν – kama FDK uzayı olduğundan

$$\cap E = \cap \{z^\alpha : z \in \mathcal{C}_{\nu_0}\} = \mathcal{C}_{\nu_0}^\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_u, & \nu \in \{bp, r\} \\ \mathcal{L}_\varphi, & \nu = p \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.8. $E = m|(s, t)|$ olsun. Bu durumda $\tau(E, E^\alpha)$ bir ν – kama FDK uzayıdır.

İspat. $E = m|(s, t)|$ ve $0 = s_1 < s_2 < \dots$, $0 = j_1 < j_2 < \dots$ olsun. Bu durumda kabul edelim ki $(E, \tau(E, E^\alpha))$ bir ν – kama FDK uzayı olmasın. Bu takdirde sıfırın herhangi bir $\tau(E, E^\alpha)$ – komşuluğu V olmak üzere $\{i_k\}$, $\{j_l\} \in \mathbb{N}$ artan dizileri için $\delta^{i_k j_l} \notin V$ ($k, l \geq 1$) elde edilir. Diğer

yandan $s_1 < i_1 \leq s_2 < i_2 \leq s_3 < \dots$ ve $t_1 < j_1 \leq t_2 < j_2 \leq t_3 < \dots$ olacak şekilde $\{i_k\}$ ve $\{j_l\}$ dizilerinin birer alt dizisini seçelim. Ayrıca $x \in \Omega$ olmak üzere x dizisi

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i = i_k, j = j_l, k, l \geq 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa bu durumda $x \in E$ olup $\|x\| = 1$ olur. E solid uzay olduğundan $\tau(E, E^\alpha)$ da

$$\sum_{k,l \geq 1} \delta^{i_k j_l} = x \text{ dır (Kamthan ve Gupta, 1980). Bu nedenle her } k, l \text{ için } \delta^{i_k j_l} \in V \text{ olup bu ise kabulümüz}$$

ile çelişir. O halde $\tau(E, E^\alpha)$ bir ν -kama FDK uzayıdır.

Şimdi ise bazı sonuçların ispatında kullanacağımız önemli bir dönüşümü tanımlayalım.

Tanım 4.1.9. $S^{(2)} : \Omega \rightarrow \Omega$ birebir örten dönüşümü

$$(S^{(2)}x) := \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{11} + x_{12}, & \dots \\ x_{11} + x_{21}, & x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \sum_{k=1, l=1}^{m,n} x_{kl}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olmak üzere bu dönüşümün tersi;

$$((S^{(2)})^{-1}x) := \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12} - x_{11}, & \dots \\ x_{21} - x_{11}, & x_{22} - x_{12} - x_{21} + x_{11}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & x_{mn} - x_{m-1,n} - x_{m,n-1} + x_{m-1,n-1}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olup $(S^{(2)})^{-1} : \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{BS}$ biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.1.10. $(\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0))$ uzayı bir ν -kama FDK uzayıdır.

İspat. İspat için $(\mathcal{M}_u, \tau(\mathcal{M}_u, \mathcal{L}_u))$ uzayının $(\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0))$ uzayına topolojik olarak izomorfik olduğu gösterilirse istenilen sonuç elde edilir. $S^{(2)}$ örten fonksiyonu için $(S^{(2)})^{-1} : \mathcal{M}_u \rightarrow \mathcal{BS}$ olup herhangi bir $y \in \mathcal{BV}_0$ dizisi için $u \in \mathcal{L}_u$ dizisi $u_{ij} = y_{ij} - y_{i,j+1} - y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1}$ biçiminde verilsin. Bu durumda $x \in \mathcal{M}_u$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle (S^{(2)})^{-1}(x), y \right\rangle &= \sum_{i,j \geq 1} (x_{ij} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}) y_{ij} \\ &= \sum_{i,j \geq 1} (y_{ij} - y_{i+1,j} - y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}) x_{ij} \\ &= \sum_{i,j \geq 1} u_{ij} x_{ij} = \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

olup $(S^{(2)})^{-1} : (\mathcal{M}_u, \sigma(\mathcal{M}_u, \mathcal{L}_u)) \rightarrow (\mathcal{BS}, \sigma(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0))$ dönüşümü sürekli olduğundan $(S^{(2)})^{-1}$ dönüşümü $\tau(\mathcal{M}_u, \mathcal{L}_u) - \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0)$ süreklidir. $S^{(2)} : (\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0)) \rightarrow (\mathcal{M}_u, \tau(\mathcal{M}_u, \mathcal{L}_u))$ dönüşümünün sürekliliği ise benzer olarak gösterilebilir.

$$e - e^{(mn)} = \sum_{\substack{k=m+1 \\ l=n+1}}^{\infty, \infty} \delta^{kl} + \sum_{\substack{k=1 \\ l=n+1}}^{m, \infty} \delta^{kl} + \sum_{\substack{k=m+1 \\ l=1}}^{\infty, n} \delta^{kl}$$

olduğundan $(S^{(2)})^{-1}$ dönüşümü

$$\begin{aligned} (S^{(2)})^{-1}(e - e^{(mn)}) &= (S^{(2)})^{-1} \left(\sum_{\substack{k=m+1 \\ l=n+1}}^{\infty, \infty} \delta^{kl} + \sum_{\substack{k=1 \\ l=n+1}}^{m, \infty} \delta^{kl} + \sum_{\substack{k=m+1 \\ l=1}}^{\infty, n} \delta^{kl} \right) \\ &= (S^{(2)})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & & 1 & 1 & \ddots & \\ & & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \\ &= \delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\mathcal{M}_u$ solid dizi uzayı olduğundan $e^{(mn)} \rightarrow e(\tau(\mathcal{M}_u, \mathcal{L}_u))$ olup $\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1} \rightarrow 0$ $\tau(\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0))$ olur.

Teorem 4.1.11. (E, τ) ayrılabilir bir FDK uzayı ve $\mathcal{BS} \subset E$ olsun. Bu durumda (E, τ) bir ν -kama FDK-uzayıdır.

İspat. İlk olarak

$$F : \mathcal{L}_u \rightarrow \mathcal{BV}_0$$

$$x \mapsto F(x) = \left\{ \sum_{(i,j) \geq (m,n)} x_{ij} \right\}$$

örten fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi ise $x \in \mathcal{L}_u$ ve $y \in \mathcal{BS}$ olmak üzere $u \in \mathcal{M}_u$ dizisi

$u_n = \sum_{i,j=1}^{m,n} y_{ij}$ şeklinde verilsin. Böylece

$$\begin{aligned} \langle F(x), y \rangle &= y_{11} \sum_{(i,j) \geq (1,1)} x_{ij} + y_{12} \sum_{(i,j) \geq (1,2)} x_{ij} + y_{13} \sum_{(i,j) \geq (1,3)} x_{ij} + \cdots \\ &\quad + y_{21} \sum_{(i,j) \geq (2,1)} x_{ij} + y_{22} \sum_{(i,j) \geq (2,2)} x_{ij} + \cdots \\ &\quad \vdots \\ &\quad + y_{m1} \sum_{(i,j) \geq (m,1)} x_{ij} + y_{m2} \sum_{(i,j) \geq (m,2)} x_{ij} + \cdots + y_{mn} \sum_{(i,j) \geq (m,n)} x_{ij} \\ &\quad + y_{m1} \sum_{(i,j) \geq (m,1)} x_{ij} + y_{m2} \sum_{(i,j) \geq (m,2)} x_{ij} + \cdots + y_{mn} \sum_{(i,j) \geq (m,n)} x_{ij} \\ &= y_{11} (x_{11} + x_{12} + x_{21} + \cdots) + y_{12} (x_{12} + x_{22} + \cdots) + \cdots \\ &\quad + y_{21} (x_{21} + x_{22} + \cdots) + \cdots \\ &\quad \vdots \\ &\quad + y_{mn} (x_{mn} + x_{m+1,n} + x_{m,n+1} + \cdots) + \cdots \\ &\quad \vdots \\ &= x_{11}y_{11} + x_{12}(y_{11} + y_{12}) + \cdots + x_{mn}(y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{mn}) + \cdots \\ &= \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

olup F fonksiyonu $\sigma(\mathcal{L}_u, \mathcal{M}_u) - \sigma(\mathcal{BV}_0, \mathcal{BS})$ süreklidir. Diğer taraftan, $F^{-1} : \mathcal{BV}_0 \rightarrow \mathcal{L}_u$ olmak üzere

$$F^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & x_{mn} - x_{m,n+1} - x_{m+1,n} + x_{m+1,n+1} & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dönüşümünün de $\sigma(\mathcal{BV}_0, \mathcal{BS}) - \sigma(\mathcal{L}_u, \mathcal{M}_u)$ sürekli olduğu benzer biçimde görülür. Dolayısıyla $\mathcal{M}_u$ solid dizi uzayı olduğundan $\mathcal{BV}_0$ uzayı $\sigma(\mathcal{BV}_0, \mathcal{BS})$ -dizisel tamdır. Ayrıca $I : (\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0)) \rightarrow (E, \tau)$ grafiği kapalıdır ve I dönüşümü $\tau(\mathcal{BV}_0, \mathcal{BS}) - \tau$ sürekli dir. $(\mathcal{BS}, \tau(\mathcal{BS}, \mathcal{BV}_0))$ uzayı ise bir ν -kama FDK uzayı olduğundan (E, τ) uzayı da bir ν -kama FDK uzayı olur.

Teorem 4.1.12. (E, τ) bir FDK uzayı ve $E^f \subset \mathcal{BS}$ olsun. Bu durumda E bir zayıf ν -kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ ve $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içerme dönüşümü zayıf kompakt olmasıdır.

İspat. (E, τ) bir zayıf ν -kama FDK uzayı olsun. Bu durumda τ topolojisinde $\delta^{kl} \rightarrow 0$ (zayıf) $(k, l \rightarrow \infty)$ dir, yani $\forall f \in E'$ için $f(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ $(k, l \rightarrow \infty)$ olur. $E^f \subset \mathcal{BS}$ olduğundan $\{f(\delta^{kl})\} \in \mathcal{M}_u$ olup $\{\delta^{kl}\}$ zayıf sınırlıdır. Zayıf sınırlılık sınırlılığa denk olduğundan $\{\delta^{kl}\}$ sınırlıdır. Dolayısıyla $E^f \subset \mathcal{M}_u = \mathcal{L}_u^f \subset \mathcal{L}_\varphi^f \Rightarrow \mathcal{L}_\varphi \subset E$ olup $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ olduğundan $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içerme dönüşümü sürekli dir. Böylece $\forall f \in E'$ ve $x \in \mathcal{L}_\varphi$ için

$$f(x) = f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl} \delta^{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl} f(\delta^{kl})$$

elde edilir. E zayıf ν -kama FDK uzayı olduğundan $\{f(\delta^{kl})\} \in \mathcal{C}_{\nu 0}$ olup $I : \sigma(\mathcal{L}_\varphi, \mathcal{C}_{\nu 0}) \rightarrow \sigma(E, E')$ dönüşümü sürekli dir. $\mathcal{L}_\varphi$ üzerinde $\{x : x \in \mathcal{L}_\varphi, \|x\| \leq 1\}$ birim küresi kompakttır (Robertson and Robertson, 1964).

Karşıt olarak, $\mathcal{L}_\varphi$ uzayındaki birim küre E uzayında da $\sigma(E, E')$ (rölatif) kompakttır. O halde $\sigma(E, E')$ topolojisinde $\delta^{kl} \rightarrow 0$ $(k, l \rightarrow \infty)$ olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.13.

- i. Tüm zayıf p – kama FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{L}_\varphi$ dir.
- ii. $\nu \in \{bp, r\}$ olmak üzere tüm zayıf ν – kama FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{L}_u$ dir.

İspat. Teorem 4.2.7 den $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ olup Teorem 4.1.5 den $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ için z^α bir ν – kama FDK uzayı olup Tanım 4.1.4. ten zayıf ν – kama FDK uzayıdır. Böylece

$$\cap E = \cap \{z^\alpha : z \in \mathcal{C}_{\nu_0}\} = \mathcal{C}_{\nu_0}^\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_u, & \nu \in \{bp, r\} \\ \mathcal{L}_\varphi, & \nu = p \end{cases}$$

elde edilir.

4.2. ν – Conull FDK Uzayları

Tanım 4.2.1. (E, τ) , Φ_1 uzayını içeren bir FDK uzayı olsun. Eğer $e^{(mn)} \rightarrow e$ (zayıf) $(m, n \rightarrow \infty)$ ise yani; her $f \in E'$ için

$$f(e) = \nu - \lim_{m,n} \sum_{k,l=1}^{m,n} f(\delta^{kl})$$

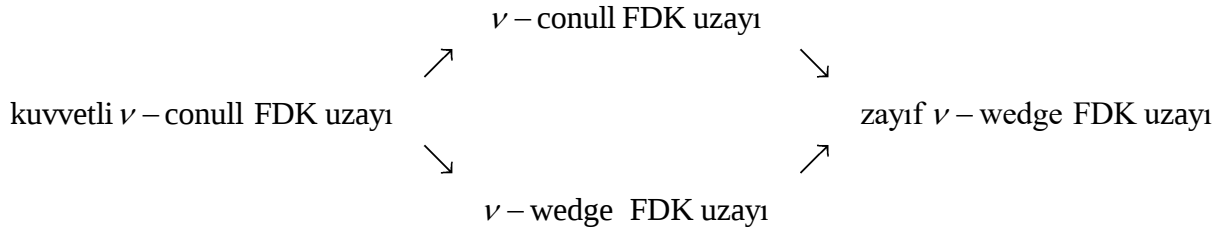
oluyorsa (E, τ) uzayına bir ν – conull FDK uzayı (double ν – conull FK-uzayı) denir.

Tanım 4.2.2. (E, τ) , Φ_1 uzayını içeren bir FDK uzayı olsun. Eğer $e^{(mn)} \rightarrow e$ $(m, n \rightarrow \infty)$ ise yani;

$$e = \nu - \lim_{m,n} \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}$$

ise (E, τ) uzayına kuvvetli ν – conull FDK uzayı (double kuvvetli ν – conull FK-uzayı) denir.

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında



bağıntısı gerçekleşir.

Her kuvvetli ν -conull FDK uzayının ν -conull FDK uzayı olduğu ve her ν -kama FDK uzayının zayıf ν -kama FDK uzayı olduğu açık olduğundan sadece E uzayının kuvvetli ν -conull FDK uzayı olması durumunda E uzayının ν -kama FDK uzayı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki (E, τ) kuvvetli ν -conull FDK uzayı ve q , E üzerinde sürekli bir yarı norm olsun. Bu durumda tanımdan $e^{(kl)} \rightarrow e$ ($k, l \rightarrow \infty$) olup $q(e^{(kl)} - e) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) elde edilir. Şimdi ise

$$\begin{aligned} \delta^{kl} &= e^{(k,l)} - e^{(k-1,l-1)} - \sum_{j=1}^{l-1} \delta^{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta^{il} \\ &= e^{(k,l)} - e^{(k-1,l-1)} - \sum_{j=1}^{l-1} \delta^{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta^{il} + e^{(k-1,l-1)} - e^{(k-1,l-1)} \\ &= e^{(k,l)} - e^{(k,l-1)} - e^{(k-1,l)} + e^{(k-1,l-1)} + e - e + e - e \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} q(\delta^{kl}) &= q(e^{(k,l)} - e^{(k,l-1)} - e^{(k-1,l)} + e^{(k-1,l-1)} + e - e + e - e) \\ &\leq q(e^{(k,l)} - e) + q(e^{(k,l-1)} - e) + q(e^{(k-1,l)} - e) + q(e^{(k-1,l-1)} - e) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $q(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olduğundan (E, τ) bir ν -kama FDK uzayıdır.

Teorem 4.2.3. (E, τ) uzayının kuvvetli ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $(S^{(2)})^{-1}(E)$ uzayının ν -kama FDK uzayı olmasıdır.

İspat. (E, τ) kuvvetli ν -conull FDK uzayı olsun. Bu durumda τ topolojisini veren yarı norm ailesi $\{P_{mn}\}$ olmak üzere $(S^{(2)})^{-1}(E)$ uzayını FDK uzayı yapan topoloji

$$q_{mn}(x) := P_{mn}(S^{(2)}(x)) \quad (4.2.)$$

olmak üzere $\{q_{mn}\}$ yarı norm ailesi ile verilir.

E kuvvetli ν -conull FDK uzayı olduğundan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $P_{mn}(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0$ dir.

Ayrıca

$$(S^{(2)})^{-1}(e - e^{(mn)}) = \delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}$$

olup (4.2.) den

$$q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) = P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ olduğundan

$q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ elde edilir. Dolayısıyla $(S^{(2)})^{-1}(E)$ uzayının topolojisine göre $(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ olup $\delta^{m+1,n+1} \rightarrow 0$ elde edilir. Buradan ise $(S^{(2)})^{-1}(E)$ bir ν -kama FDK uzayıdır.

$(S^{(2)})^{-1}(E)$ bir ν -kama FDK uzayı olsun. Bu durumda her $m, n \in \mathbb{N}$ için $q_{mn}(\delta^{m,n}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ olup $q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ elde edilir. Böylece

$$q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) = P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right)$$

olduğundan $P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ elde edilir. Dolayısıyla E kuvvetli ν -conull FDK uzayıdır.

Teorem 4.2.4. (E, τ) uzayının ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $(S^{(2)})^{-1}(E)$ uzayının zayıf ν -kama FDK uzayı olmasıdır.

İspat. (E, τ) ν -conull FDK uzayı ve τ topolojisi Teorem 4.2.9 deki gibi olsun. Bu durumda

$$q_{mn}(x) := P_{mn}(S^{(2)}(x)) \quad \text{ve} \quad (S^{(2)})^{-1}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) = \delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1} \quad \text{olduğundan}$$

$$q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) = P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) \text{ elde edilir. } E \text{ } \nu\text{-conull FDK uzayı olduğundan}$$

$$P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0 \text{ (zayıf) } (m, n \rightarrow \infty) \text{ olup } \delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1} \rightarrow 0 \text{ (zayıf) } (m, n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\delta^{m+1,n+1} \rightarrow 0$ (zayıf) $(m, n \rightarrow \infty)$ olup $(S^{(2)})^{-1}(E)$ zayıf ν -kama FDK uzayıdır.

$(S^{(2)})^{-1}(E)$ bir ν -kama FDK uzayı olsun. Bu durumda her $m, n \in \mathbb{N}$ için $q_{mn}(\delta^{m,n}) \rightarrow 0$ (zayıf) $(m, n \rightarrow \infty)$ olup $q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) \rightarrow 0$ (zayıf) $(m, n \rightarrow \infty)$ elde edilir. Böylece

$$q_{mn}(\delta^{m+1,1} + \delta^{1,n+1} - \delta^{m+1,n+1}) = P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right)$$

olduğundan $P_{mn}\left(e - \sum_{k,l=1}^{m,n} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0$ (zayıf) $(m, n \rightarrow \infty)$ elde edilir. Dolayısıyla E ν -conull FDK uzayıdır.

Teorem 4.2.5. (E, τ) FDK uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. (E, τ) bir kuvvetli ν -conull FDK-uzayıdır.
- ii. $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ için $S^{(2)}(z^\alpha) \subseteq E$ dir.
- iii. Herhangi s, t dizileri için $M|(s, t)| \subseteq E$ ve $I : M|(s, t)| \rightarrow E$ içermeye dönüşümü kompakttır.
- iv. $E \supset \mathcal{BV}(\varphi)$ ve $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ içermeye dönüşümü kompakttır.

Burada $M|(s, t)| = \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n} \sum_{i=S_m+1}^{S_{m+1}, t_{n+1}} |x_{ij} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}| < \infty \right\}$ ve $x \in \mathcal{BV}(\varphi)$ dizisi ise

$a, b, c, d, f, g, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(x_{kl}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} & b & b & \dots \\ x_{21} & \ddots & & x_{2l} & g & g & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & & \dots \\ x_{k1} & x_{k1} & \dots & x_{kl} & h & h & \dots \\ a & d & & f & c & c & \dots \\ a & d & & f & c & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) E kuvvetli ν -conull FDK uzayı ise $(S^{(2)})^{-1}(E)$ uzayı da ν -kama FDK uzayıdır.

Böylece $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ olmak üzere $z^\alpha \subseteq (S^{(2)})^{-1}(E)$ olup $S^{(2)}(z^\alpha) \subseteq S^{(2)}((S^{(2)})^{-1}(E)) = E$ elde edilir.

(ii $\Rightarrow$ iii) $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ ve $S^{(2)}(z^\alpha) \subseteq E$ olsun. Bu durumda $z^\alpha \subseteq (S^{(2)})^{-1}(E)$ olacağından

$m|(s, t)| \subseteq z^\alpha \subseteq (S^{(2)})^{-1}(E)$ olup $I : m|(s, t)| \rightarrow (S^{(2)})^{-1}(E)$ içirme dönüşümü kompakttır.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S^{(2)}(m|(s, t)|) &= \{S^{(2)}(x) : x \in m|(s, t)|\} \\ &= \left\{ S^{(2)}(x) : \sup_{m, n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} |x_{kl}| < \infty \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega : \sup_{m, n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} \left| \left((S^{(2)})^{-1}(y) \right)_{kl} \right| < \infty, y_{00} = y_{01} = y_{10} = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega : \sup_{m, n} \sum_{\substack{k=s_m+1 \\ l=t_n+1}}^{s_{m+1}, t_{n+1}} |y_{kl} - y_{k-1, l} - y_{k, l-1} + y_{k-1, l-1}| < \infty, y_{00} = y_{01} = y_{10} = 0 \right\} \\ &= M|(s, t)| \end{aligned}$$

olup $M|(s, t)| = S^{(2)}(m|(s, t)|) \subseteq E$ ve $i = S^{(2)} \circ I \circ (S^{(2)})^{-1} : M|(s, t)| \rightarrow E$ içirme dönüşümü

kompakttır.

(iii $\Rightarrow$ iv) Herhangi s, t dizileri için $\mathcal{BV}(\varphi) \subset S^{(2)}(m|(s, t)|)$ olup hipotezden ise $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E$ elde edilir. Böylece $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow S^{(2)}(m|(s, t)|)$ içermeye dönüşümü sürekli olduğundan $I : S^{(2)}(m|(s, t)|) \rightarrow E$ içermeye dönüşümü kompaktır.

(iv $\Rightarrow$ i) $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E$ ve $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ içermeye dönüşümü kompakt olsun. Dolayısıyla $A = \{e - e^{(mn)} : m, n = 1, 2, \dots\}$ cümlesi $\mathcal{BV}(\varphi)$ uzayının sınırlı bir alt cümlesidir. O halde $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ içermeye dönüşümü kompakt olduğundan $I(A) = A$ cümlesi E uzayında rölatif kompaktır. Böylece A üzerindeki koordinatsal yakınsaklık topolojisi ile τ topolojisi çakışmıştır. Bu durumda $r_{mn}(x) = |x_{mn}|$ ($m, n = 1, 2, \dots$) yarı normlarının oluşturduğu koordinatsal yakınsaklık topolojisine göre

$$r_{kl}(e - e^{(mn)}) = \begin{cases} 0, & (k, l) < (m, n) \\ 1, & (k, l) \geq (m, n) \end{cases}$$

olup $r_{kl}(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0, (m, n \rightarrow \infty)$ olduğundan (E, τ) uzayında $e - e^{(mn)} \rightarrow 0, (m, n \rightarrow \infty)$ dir.

Dolayısıyla E kuvvetli ν -conull FDK uzayıdır.

Sonuç 4.2.6.

- i. Bütün kuvvetli p -conull FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{BV}(\varphi)$ uzayıdır.
- ii. $\nu \in \{bp, r\}$ olmak üzere bütün kuvvetli ν -conull FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{BV}$ uzayıdır.

İspat. $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ için $S^{(2)}(z^\alpha)$ kuvvetli ν -conull FDK uzayı olup

$$\bigcap \{S^{(2)}(z^\alpha) : z \in \mathcal{C}_{\nu_0}\} = S^{(2)}\left(\bigcap \{z^\alpha : z \in \mathcal{C}_{\nu_0}\}\right) = S^{(2)}(\mathcal{C}_{\nu_0}^\alpha) = \begin{cases} S^{(2)}(\mathcal{L}_\varphi) = \mathcal{BV}(\varphi), & \nu = p \\ S^{(2)}(\mathcal{L}_u) = \mathcal{BV}, & \nu \in \{bp, r\} \end{cases}$$

elde edilir. Burada hemen belirtelim ki

$$\begin{aligned}
 S^{(2)}(\mathcal{L}_\varphi) &= \{S^{(2)}(x) : x \in \mathcal{L}_\varphi\} \\
 &= \{S^{(2)}(x) : \sum |x_{kl}| < \infty, (x_{kl})_k \in \varphi, (x_{kl})_l \in \varphi\} \\
 &= \left\{x : \sum \left| \left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_{kl} \right| < \infty, \left(\left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_{kl} \right)_k \in \varphi, \left(\left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_{kl} \right)_l \in \varphi \right\} \\
 &:= \mathcal{BV}(\varphi)
 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\forall l \in \mathbb{N}$ için $\left(\left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_{kl} \right)_k \in \varphi$ şartını sağlayan dizileri aşağıdaki biçimde verebiliriz.

$$\left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_k = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12} - x_{11}, & \dots \\ x_{21} - x_{11}, & x_{22} - x_{12} - x_{21} + x_{11}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ & x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}, & \ddots \end{pmatrix}_k \in \varphi.$$

Bu ise her bir sütun için satır dizilerinin sonlu olması demektir. Bu şart ise aşağıdaki sistemi oluşturur.

$$\begin{aligned}
 (x_{11}, x_{21} - x_{11}, x_{31} - x_{21}, \dots, x_{k1} - x_{k-1,1}, \dots) &\in \varphi, \\
 (x_{12} - x_{11}, x_{22} - x_{12} - x_{21} + x_{11}, x_{32} - x_{22} - x_{31} + x_{21}, \dots, x_{k2} - x_{k-1,2} - x_{k1} + x_{k-1,1}, \dots) &\in \varphi, \\
 &\vdots \\
 (x_{1l} - x_{1,l-1}, x_{2l} - x_{1l} - x_{2,l-1} + x_{1,l-1}, x_{3l} - x_{2l} - x_{3,l-1} + x_{2,l-1}, \dots, x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}, \dots)_k &\in \varphi.
 \end{aligned}$$

Buradan ise

$$\exists k_1, \forall k > k_1 : x_{k1} - x_{k-1,1} = 0 \Leftrightarrow x_{k1} = x_{k-1,1} \quad (4.3.)$$

olup (4.3.) ten

$$\exists k_2, \forall k > k_2 : x_{k2} - x_{k-1,2} - x_{k1} + x_{k-1,1} = 0 \Leftrightarrow x_{k2} = x_{k-1,2}$$

olacağından

$$\exists k_t, \forall k > k_t : x_{kt} - x_{k-1,t} - x_{k,t-1} + x_{k-1,t-1} = 0 \Leftrightarrow x_{kt} = x_{k-1,t}$$

elde edilir. Böylece $\forall l \in \mathbb{N}$ için $(x_{kl})_k$ dizisinin terimleri belli bir terimden sonra sabittir. Dolayısıyla aynı adımlar $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left(\left((S^{(2)})^{-1}(x) \right)_{kl} \right)_l \in \varphi$ için uygulanırsa

$$\exists l_1, \forall l > l_1 : x_{1l} - x_{1,l-1} = 0 \Leftrightarrow x_{1l} = x_{1,l-1} \quad (4.4.)$$

olup (4.4.) ten

$$\exists l_2, \forall l > l_2 : x_{2l} - x_{1l} - x_{2,l-1} + x_{1,l-1} = 0 \Leftrightarrow x_{2l} = x_{2,l-1}$$

olacağından

$$\exists l_s, \forall l > l_s : x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1} = 0 \Leftrightarrow x_{kl} = x_{k,l-1}$$

elde edilir. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_{kl})_l$ dizisinin terimleri belli bir terimden sonra sabit olup $x \in \mathcal{BV}(\varphi)$ elde edilir.

Teorem 4.2.7. E uzayının ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E$ ve $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ içerme dönüşümünün zayıf kompakt olmasıdır.

İspat. E ν -conull FDK uzayı olsun. Bu durumda $(S^{(2)})^{-1}(E)$ zayıf ν -kama FDK uzayıdır. $S^{(2)}$ birebir ve üzerine olduğundan $(S^{(2)})^{-1}(E) = E$ zayıf ν -kama FDK uzayıdır. O halde $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ olup $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içerme dönüşümü kompakttır. Buradan $\mathcal{BV}(\varphi) = S^{(2)}(\mathcal{L}_\varphi) \subset S^{(2)}(E) = E$ olup $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E$ elde edilir. Böylece $I : \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ içerme dönüşümü zayıf kompakttır.

Karşıt olarak, $\mathcal{BV}(\varphi) \supset \mathcal{L}_\varphi$ olduğundan hipotezden $\mathcal{L}_\varphi \subset E$ elde ederiz. Dolayısıyla $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow \mathcal{BV}(\varphi)$ dönüşümü sürekli olup $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ içerme dönüşümü zayıf kompakttır. O halde E zayıf ν -kama FDK uzayıdır. Böylece $(S^{(2)})^{-1}(E) = E$ bir ν -conull FDK uzayıdır.

Sonuç 4.2.8.

- i. Bütün p – conull FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{BV}(\varphi)$ uzayıdır.
- ii. $\nu \in \{bp, r\}$ olmak üzere bütün ν – onull FDK uzaylarının arakesiti $\mathcal{BV}$ uzayıdır.

İspat. E bir ν – conull FDK uzayı olsun. $z \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ için $S^{(2)}(z^\alpha)$ kuvvetli ν – conull FDK uzayı olduğundan $S^{(2)}(z^\alpha)$ ν – conull FDK uzayıdır. Böylece

$$\bigcap \left\{ S^{(2)}(z^\alpha) : z \in \mathcal{C}_{\nu_0} \right\} = S^{(2)}(\mathcal{C}_{\nu_0}^\alpha) = \begin{cases} S^{(2)}(\mathcal{L}_\varphi) = \mathcal{BV}(\varphi), & \nu = p \\ S^{(2)}(\mathcal{L}_u) = \mathcal{BV}, & \nu \in \{bp, r\} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.9. X ve Y , $X \subset Y$ olacak şekilde iki FDK uzayı olsun. Bu durumda

- i. Eğer X , ν – kama (ν – conull) FDK uzayı ise bu durumda Y de ν – kama (ν – conull) FDK uzayıdır.
- ii. Eğer Y , ν – kama (ν – conull) FDK uzayı ve X , Y de kapalı ise bu durumda X de ν – kama (ν – conull) FDK uzayıdır.
- iii. ν – kama (ν – conull) FDK uzaylarının sayılabilir arakesiti de bir ν – kama (ν – conull) FDK uzayıdır.

İspat. Teorem 4.2.9. ün ispatı Teorem 3.1.22. ve Teorem 3.1.23. ten kolayca elde edilir.

Teorem 4.2.10. E bir ν – kama FDK uzayı olsun. Bu durumda E uzayı sınırlı salınımlı olmayan bir sıfır dizisi içerir.

İspat. E nin topolojisi $\{q_{mn}\}$ yarı norm ailesi ile verilsin. $m, n = 1, 2, \dots$ ve $x \in E$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |x_{mn}| &\leq q_{mn}(x) \leq q_{m+1,n}(x) \leq q_{m+1,n+1}(x) \\ |x_{mn}| &\leq q_{mn}(x) \leq q_{m,n+1}(x) \leq q_{m+1,n+1}(x). \end{aligned} \quad (4.5.)$$

şartları gerçeklensin. Bu durumda $\mathcal{C}_p$ dizi uzayı bir ν – kama FDK uzayı değildir. O halde Teorem 4.2.9(i) den $\mathcal{C}_p \cap E$ uzayı da bir ν – kama FDK uzayı değildir. Böylece Teorem 4.2.9 (ii) den $\mathcal{C}_p \cap E$ uzayı E uzayında kapalı değildir. Ayrıca $\mathcal{C}_{p_0}$ ile $\mathcal{C}_p$ eş boyutlu olduğundan $\mathcal{C}_{p_0} \cap E$ uzayı da E

uzayında kapalı değildir. Bu takdirde $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ ve m, n pozitif tamsayıları için $q_{mn}(x) < \varepsilon$ ve $\|x\|_\infty = \eta$ olacak şekilde $x \in \mathcal{C}_{p_0} \cap E$ vardır. Gerçekten, eğer $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ için $\|x\|_\infty = \eta$ ise $x \in \mathcal{C}_{p_0} \cap E$ ve $q_{mn}(x) < \varepsilon$ olup sıfırdan farklı bir $x \in \mathcal{C}_{p_0} \cap E$ dizisi için

$$q_{mn}\left(\frac{\eta x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \varepsilon$$

dır. Böylece her $x \in \mathcal{C}_{p_0} \cap E$ için

$$\|x\|_\infty \leq \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) q_{mn}(x)$$

olduğundan $\mathcal{C}_{p_0} \cap E$ dir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Eğer $\varepsilon = \varepsilon_{11} = \frac{1}{2^4}$, $\eta = \eta_{11} = 1$ ve $m = m_1 = 1$, $n = n_1 = 1$ alınırsa $x^{(11)}$ elde edilir.

Şimdi $k > 1$, $l > 1$ olsun. $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ ve $n_1, n_2, \dots, n_{l-1}$ için $x^{(11)}, \dots, x^{(k-1, l-1)}$ seçildiğini kabul edelim. Bu durumda $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2^{(k+1)(l+1)}}$ ve $\eta_{kl} = \frac{1}{kl}$ olup $m_k > m_{k-1}$ ve $n_l > n_{l-1}$ alınırsa $i \geq m_k$, $j \geq n_l$, $1 \leq s < k$, $1 \leq t < l$ olmak üzere

$$|x_{ij}^{(st)}| \leq \frac{1}{2^{(k+1)(l+1)}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eğer $x^{(kl)} \in \mathcal{C}_{p_0} \cap E$ seçilirse bu takdirde

$$q_{m_k n_l}(x^{(kl)}) < \varepsilon_{kl} \text{ ve } \|x^{(kl)}\|_\infty = \eta_{kl} \quad (4.6.)$$

elde edilir ki (4.5.) ten

$$\begin{aligned} q_{11}(x^{(kl)}) &\leq q_{21}(x^{(kl)}) \leq \dots \leq q_{kl}(x^{(kl)}) < \frac{1}{2^{(k+1)(l+1)}} \\ q_{11}(x^{(kl)}) &\leq q_{12}(x^{(kl)}) \leq \dots \leq q_{kl}(x^{(kl)}) < \frac{1}{2^{(k+1)(l+1)}} \end{aligned}$$

olacak şekilde $\mathcal{C}_{p_0} \cap E$ nin elemanlarının bir (x_{kl}) dizisi bulunur.

Şimdi ise $x = \sum_{k,l=1}^{\infty, \infty} x^{(kl)}$ serisi E de yakınsak olduğundan eğer $x \in \mathcal{C}_{p0} \setminus \mathcal{BV}$ olduğu gösterilirse

ispat tamamlanır. $u, v = 1, 2, \dots, m_s \leq i \leq m_{s+1}$ ve $n_t \leq j \leq n_{t+1}$ için

$$\left| x_{ij}^{(st)} \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{2^{(u+1)(v+1)}}, & s < u, t < v \\ \frac{1}{uv}, & (s, t) = (u, v) \\ \frac{1}{2^{(s+1)(t+1)}}, & s > u, t > v \end{cases} \quad (4.7.)$$

olup

$$\left| x_{ij} \right| \leq \sum_{s,t=1}^{\infty, \infty} \left| x_{ij}^{(st)} \right| \leq \sum_{s,t=1}^{u-1, v-1} \frac{1}{2^{(u+1)(v+1)}} + \frac{1}{uv} + \sum_{\substack{s=u+1 \\ t=v+1}}^{\infty, \infty} \frac{1}{2^{(s+1)(t+1)}} \rightarrow 0 \quad (u, v \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece $x \in \mathcal{C}_{p0}$ dır.

Her u, v pozitif tamsayıları için $k_u \in (m_u, m_{u+1})$, $l_v \in (n_v, n_{v+1})$ mevcut olup $\left| x_{k_u l_v}^{(uv)} \right| = \frac{1}{uv}$ olduğundan ve (4.7.) den

$$\left| x_{k_u l_v} \right| \geq \frac{1}{uv} - \sum_{s,t=1}^{u-1, v-1} \frac{1}{2^{(u+1)(v+1)}} - \sum_{\substack{s=u+1 \\ t=v+1}}^{\infty, \infty} \frac{1}{2^{(s+1)(t+1)}} = \frac{1}{uv} - \frac{(u-1)(v-1)+1}{2^{(u+1)(v+1)}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.6.) ve (4.7.) den

$$\left| x_{m_u n_v} \right| \geq \sum_{s,t=1}^{u-1, v-1} \frac{1}{2^{(u+1)(v+1)}} + \frac{1}{2^{(u+1)(v+1)}} + \sum_{\substack{s=u+1 \\ t=v+1}}^{\infty, \infty} \frac{1}{2^{(s+1)(t+1)}} = \frac{(u-1)(v-1)+2}{2^{(u+1)(v+1)}}$$

elde edilir. x dizisinin bir y alt dizisi

$$y_{uv} = \begin{cases} x_{m_u n_v} & u \text{ ve } v \text{ tek} \\ x_{k_u l_v} & u \text{ veya } v \text{ çift} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlansın. O halde $y \notin \mathcal{BV}$ dir. Buradan ise $x \notin \mathcal{BV}$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.11. E bir FDK uzayı olsun. Eğer $\mathcal{C}_p \cap E$, E de kapalı değilse $\mathcal{M}_u \cap E$ uzayı $\mathcal{M}_u$ uzayının ayrılabilir olmayan bir alt uzayıdır.

İspat. Teorem 4.2.16 dan $(m, n) \neq (k, l)$ olmak üzere $\mathcal{M}_u \cap E$ üzerinde $\|x^{(mn)} - x^{(kl)}\| > 1$ şartını sağlayan noktaların sayılabilir olmayan bir $\{x^{(mn)}\}$ ailesinin varlığını göstermek mümkündür. Bu ise teoremi ispatlar.

Sonuç 4.2.12. E bir ν -conull FDK uzayı ise $\mathcal{M}_u \cap E$ uzayı $\mathcal{M}_u$ uzayında ayrılabilir değildir.

İspat. $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{C}_p \cap E$ olup $\mathcal{C}_p \cap E$ ν -conull FDK uzayı değildir. Böylece $\mathcal{C}_p \cap E$ uzayı E de kapalı değildir. Teorem 4.2.16. dan $\mathcal{M}_u \cap E$ uzayı $\mathcal{M}_u$ da ayrılabilir olmayan bir uzayıdır.

Teorem 4.2.13.

- i. E FDK uzayı olsun. Eğer $\mathcal{L}_u \cap E$ uzayı E de kapalı değilse $E \cap (\mathcal{CS}_\nu \setminus \mathcal{L}_u) \neq \emptyset$ dır.
- ii. $\mathcal{BV} \cap E$ uzayı E de kapalı değilse $E \cap (\mathcal{CS}_\nu \setminus \mathcal{BV}) \neq \emptyset$ dır.

İspat. Yalnızca (i) nin ispatını vermemiz yeterlidir. Diğer şıkların ispatı benzer şekildedir. $S^{(2)} : \Omega \rightarrow \Omega$ olmak üzere $S^{(2)}(x) = \sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl}$ olarak tanımlanan $S^{(2)}$ dönüşümü birebirdir. F , FDK uzayı olmak

üzere $S^{(2)} : E \rightarrow F$ dönüşümü göz önüne alınsın. Böylece $\mathcal{BV} \cap F$ uzayı $S^{(2)}$ dönüşümü altında $\mathcal{L}_u \cap F$ uzayına karşılık geldiğinden $\mathcal{L}_u \cap E$ uzayı E de kapalı değilse $\mathcal{BV} \cap F$ uzayı da F de kapalı değildir.

Eğer $\mathcal{C}_p \cap F = \mathcal{BV} \cap F$ eşitliği gerçekleşirse $\mathcal{C}_p \cap F$ uzayı da F uzayı üzerinde kapalı olmayacaktır.

Bu ise Teorem 4.2.16 ile çelişir. Dolayısıyla $F \cap (\mathcal{C}_p \setminus \mathcal{BV}) \neq \emptyset$ elde edilir ki bu da $E \cap (\mathcal{CS}_\nu \setminus \mathcal{L}_u) \neq \emptyset$ olması demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3. Seçkin Alt Uzaylar

Bu bölümde verilen alt uzaylar FDK uzaylarının detaylı yapısının incelenmesinde önemlidir.

Tanım 4.3.1. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda

$$S_E^{(\nu)} = S^{(\nu)}(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : x = \nu - \sum_{k,l} x_{kl} \delta^{kl} \right\}.$$

A dört boyutlu bir matris olmak üzere $S^{(\nu)}(A) = S^{(\nu)}(C_{\nu A})$ (Zeltser 2001).

$S_E^{(\nu)} \supset \Phi$ olup E tam uzay olduğundan $S_E^{(\nu)} \subset E$ içermesi gerçekleşir. $AK(\nu)$ uzayı tanımından açıkça görülür ki $x \in E$ elemanı için eğer $x \in S_E^{(\nu)}$ ise x elemanı $AK(\nu)$ özelliğine sahiptir denir. Eğer E bir $AK(\nu)$ uzayı ise bu durumda $S_E^{(\nu)} = E$ dir.

Tanım 4.3.2. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda

$$W_E^{(\nu)} = W^{(\nu)}(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', f(x) = \nu - \sum_{k,l} x_{kl} f(\delta^{kl}) \right\}.$$

A dört boyutlu bir matris olmak üzere $W^{(\nu)}(A) = W^{(\nu)}(C_{\nu A})$ (Zeltser 2001).

Tanım 4.3.3. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda

$$B_E^+ = B^+(E) = \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', (x_{kl} f(\delta^{kl})) \in \mathcal{BS} \right\}.$$

$B_E = B_E^+ \cap E$ ve A dört boyutlu bir matris olmak üzere $B(A) = B(C_{\nu A})$. Tanımdan açıkça görülür ki eğer E bir AB uzayı ise bu durumda $B(E) = E$ dir.

Tanım 4.3.4. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F_E^{(\nu)+} = F^{(\nu)+}(E) &= \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', \left(\sum_{k,l=1}^{m,n} x_{kl} f(\delta^{kl}) \right)_{mn} \in \mathcal{C}_\nu \right\} \\ &= \left\{ x = (x_{kl}) \in E : \forall f \in E', (x_{kl} f(\delta^{kl})) \in \mathcal{CS}_\nu \right\}. \end{aligned}$$

$F_E^{(\nu)} = F_E^{(\nu)+} \cap E$ ve A dört boyutlu bir matris olmak üzere $F^{(\nu)}(A) = F^{(\nu)}(\mathcal{C}_{\nu A})$ (Zeltser 2001).

Eğer E bir FDK uzayı ise bu durumda $F^{(\nu)+} \supset E$ yani; $F^{(\nu)} = E$ ise bu uzaya $\text{FAK}(\nu)$ (fonksiyonel $\text{AK}(\nu)$) uzayı adı verilir.

Örnek 4.3.5. i. $E = \mathcal{BV}_0$ ise $S_E^{(\nu)} = W_E^{(\nu)} = B_E = F_E^{(\nu)} = F_E^{(\nu)+} = \mathcal{BV}_0$ ve $B_E^+ = \mathcal{BV}$ dir.

ii. $E = \mathcal{L}_u \oplus e$ ise $\|e^{(mn)}\| = mn$ olduğundan $B_E^+ = B_E = \mathcal{L}_u$ dir.

iii. $E = \mathcal{C}_{p_0}$ ise $e \in F_E^{(\nu)+} \setminus F_E^{(\nu)}$ dir. $F_E^{(\nu)+} = \mathcal{M}_u$ olup böylece $F_E^{(\nu)} = \mathcal{C}_{bp_0}$ dir.

Tanımlardan $\Phi \subset S_E^{(\nu)} \subset W_E^{(\nu)} \subset F_E^{(\nu)}$ olduğu açıktır. Eğer $\nu = r$ ise $F_E^{(\nu)} \subset B_E$ gerçekleşir. Fakat $\nu = p$ ise $F_E^{(\nu)}$ ile B_E arasında bir içermeye bağıntısı yoktur. Çünkü $\mathcal{BS}$ ile $\mathcal{CS}_p$ uzayları birbirlerini içermez.

Teorem 4.3.6. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda $\Phi \subset S_E^{(\nu)} \subset W_E^{(\nu)} \subset \bar{\Phi}$ içermesi gerçekleşir.

İspat. İspat için yalnızca $W_E^{(\nu)} \subset \bar{\Phi}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $f \in E'$ ve Φ üzerinde $f = 0$ olsun. Eğer $x \in W_E^{(\nu)}$ ise $f(x) = \nu - \sum x_{kl} f(\delta^{kl})$ olduğundan ve Φ üzerinde $f = 0$ olduğundan $W_E^{(\nu)}$ üzerinde de $f = 0$ olacaktır. Böylece Hahn-Banach Teoreminden $x \in \bar{\Phi}$ elde edilir.

Tanım 4.3.7. E uzayı Φ yi içeren bir FDK uzayı olmak üzere eğer $E \supset \mathcal{C}_\nu$ ise E uzayına ν -konservatif uzay denir.

Tanım 4.3.8. E uzayı Φ yi içeren bir FDK uzayı olmak üzere eğer $E^f \subset \mathcal{CS}_\nu$ ise E uzayına ν -yarı konservatif uzay denir. Yani, $E \supset \Phi$ olmak üzere her $f \in E'$ için $\nu - \sum f(\delta^{kl})$ yakınsaktır.

Ayrıca eğer bir ν -yarı konservatif FDK-uzayı $\mathcal{BV}$ uzayını içeriyor ise bu uzaya salınımlı ν -yarı konservatif uzay denir.

Teorem 4.3.9. $E \supset \Phi$ olmak üzere E bir FDK uzayı ve $z \in \Omega$ olsun. Bu durumda

- i. $z \in B_E^+$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}_0$ olmasıdır. Özel olarak;
 $e \in B_E^+ \Leftrightarrow E \supset \mathcal{BV}_0$ olmasıdır.
- ii. $z \in B_E$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}$ olmasıdır. Özel olarak;
 $e \in B_E \Leftrightarrow E \supset \mathcal{BV}$ olmasıdır.
- iii. $z \in F_E^{(\nu)+}$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E$ nin ν -yarı konservatif uzay olmasıdır.
 Özel olarak; $e \in F_E^{(\nu)+} \Leftrightarrow E$ uzayı ν -yarı konservatiftir.
- iv. $z \in F_E^{(\nu)}$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E$ nin salınımlı ν -yarı konservatif uzay olmasıdır. Özel olarak; $e \in F_E^{(\nu)} \Leftrightarrow E$ uzayının salınımlı ν -yarı konservatif olmasıdır.
- v. $z \in W_E^{(\nu)}$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E$ nin ν -conull uzayı olmasıdır. Özel olarak; $e \in W_E^{(\nu)} \Leftrightarrow E$ uzayı ν -conull FDK uzayıdır.
- vi. $z \in S_E^{(\nu)}$ olması için gerek ve yeter şart $z^{-1}.E$ nin kuvvetli ν -conull uzayı olmasıdır.
 Özel olarak; $e \in S_E^{(\nu)} \Leftrightarrow E$ uzayı kuvvetli ν -conull FDK uzayıdır.

İspat. (i) $f \in (z^{-1}.E)'$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \Phi$ ve $g \in E'$ olmak üzere $f(x) = \alpha x + g(zx)$ gösterimine sahiptir. Özel olarak $x = \delta^{mn}$ alalım. Bu durumda

$$f(\delta^{mn}) = \alpha_{mn} + g(z_{mn}\delta^{mn}) = \alpha_{mn} + z_{mn}g(\delta^{mn})$$

olup

$$z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}_0 \Leftrightarrow f(\delta^{mn}) \in \mathcal{BS} \Leftrightarrow (z_{mn}g(\delta^{mn})) \in \mathcal{BS} \Leftrightarrow z \in B_E^+$$

elde edilir.

(ii) ($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} z \in B_E &\Rightarrow z \in E \text{ ve } z \in B_E^+ \\ &\Rightarrow e \in z^{-1}.E \text{ ve } z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}_0 \\ &\Rightarrow z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $z^{-1}E \supset \mathcal{BV}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{BV}'_0 \subset \mathcal{BV}$ olduğundan $z^{-1}.E \supset \mathcal{BV}'_0$ dır. Böylece (i) ifadesinden $z \in B_E^+$ dir. Aynı zamanda $e \in \mathcal{BV} \Rightarrow e \in z^{-1}.E \Rightarrow z \in E$ olup $z \in B_E^+ \cap E = B_E$ elde edilir.

(iii) $f \in (z^{-1}.E)'$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \Phi$ ve $g \in E'$ olmak üzere $f(x) = \alpha x + g(zx)$ gösterimine sahiptir. Diğer yandan $x = \delta^{mn}$ için $f(\delta^{mn}) = \alpha_{mn} + z_{mn}g(\delta^{mn})$ eşitliği sağlanır. Böylece $z^{-1}.E$ ν -yarı konservatif ise

$$(z^{-1}.E)^f \subset \mathcal{CS}_\nu \Leftrightarrow f(\delta^{mn}) \in \mathcal{CS}_\nu \Leftrightarrow (z_{mn}g(\delta^{mn})) \in \mathcal{CS}_\nu$$

olup $z \in F_E^{(\nu)+}$ elde edilir.

(iv) (iii) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} z \in F_E^{(\nu)} &\Leftrightarrow z \in F_E^{(\nu)+} \text{ ve } z \in E \\ &\Leftrightarrow (z^{-1}.E)^f \subset \mathcal{CS}_\nu \text{ ve } e \in z^{-1}.E \\ &\Leftrightarrow z^{-1}.E \text{ salınımlı } \nu\text{-yarı konservatiftir.} \end{aligned}$$

(v) Yeterlilik açıktır. Gerekliliği ispat etmek için $z \in W_E^{(\nu)}$ alalım. Bu durumda her $g \in E'$ için $g(z - z^{(mn)}) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) dır. Diğer yandan her $f \in (z^{-1}.E)'$ için $\alpha \in \Phi$ ve $g \in E'$ olmak üzere $f(x) = \alpha x + g(zx)$ olduğundan

$$f(e - e^{(mn)}) = \alpha(e - e^{(mn)}) + g(z(e - e^{(mn)})) = \sum_{\substack{k=1 \\ l=n+1}}^{m, \infty} \alpha_{kl} + \sum_{\substack{k=m+1 \\ l=1}}^{\infty, \infty} \alpha_{kl} + g(z - z^{(mn)}) \quad (4.8.)$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha \in \Phi$ olduğundan (4.8.) eşitliğinin sağ tarafındaki serilerin toplamı sıfırdır. O halde (4.8.) eşitliğinin her iki tarafının $m, n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa her $f \in (z^{-1}.E)'$ için $f(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) elde edilir ki bu da gerekliliği ispatlar.

(vi) ($\Rightarrow$) $z \in S_E^{(\nu)}$ olsun. Bu durumda q, E de bir yarı norm olmak üzere $q(z - z^{(mn)}) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) dır. O halde $z^{-1}.E$ uzayının kuvvetli ν -conull FDK uzayı olduğunu göstermek için $r_{kl}(x) = |x_{kl}|$ ve $h(x) = q(zx)$ yarı normlarına göre $(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$r_{kl}(e - e^{(mn)}) = 0, \quad ((k, l) < (m, n))$$

ve

$$h(e - e^{(mn)}) = q(z(e - e^{(mn)})) = q(z - z^{(mn)}) \rightarrow 0$$

olup $z^{-1}.E$ kuvvetli ν -conull FDK uzayıdır.

($\Leftarrow$) $z^{-1}.E$ ν -conull FDK uzayı olsun. Bu durumda $r(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0$ ve $h(e - e^{(mn)}) \rightarrow 0$ dir.

$h(x) = q(zx)$ olduğundan $h(e - e^{(mn)}) = q(z - z^{(mn)}) \rightarrow 0$ olur ki bu da $z \in S_E^{(\nu)}$ olması demektir.

Teorem 4.3.10. $\Psi = S^{(\nu)}, W^{(\nu)}, F^{(\nu)}, F^{(\nu)+}, B, B^+$ olmak üzere eğer $E_1 \subset E_2$ ise bu durumda $\Psi(E_1) \subset \Psi(E_2)$ dir. Ayrıca $\Psi = \bar{\Phi}$ ise bu takdirde $(\bar{\Phi})_{E_1} \subset (\bar{\Phi})_{E_2}$ dir.

İspat. $i: E_1 \rightarrow E_2$ içme dönüşümü sürekli olduğundan E_1 uzayında $x^{(mn)} \rightarrow x$ olması E_2 uzayında da olmasını gerektirir. Bu ise $S^{(\nu)}$ için teoremi ispatlar. i içme dönüşümü zayıf sürekli olduğundan $W^{(\nu)}$ için de aynı sonuç elde edilir. $z \in F^{(\nu)+}, B^+$ olması için gerek ve yeter şart her $f \in (E_1)'$ için sırasıyla $(z_{mn} f(\delta^{mn})) \in \mathcal{CS}_\nu, \mathcal{BS}$ olmasıdır. Bu durumda $g|_{E_1} \in (E_1)'$ olduğundan her $g \in (E_2)'$ için de yukarıdaki sonuç doğrudur. Böylece sonuç $F^{(\nu)+}, B^+$ ve dolayısıyla $F^{(\nu)}, B$ için de benzer şekilde elde edilir.

Teorem 4.3.11. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda her bir $z \in B_E^+$ ve E üzerindeki her bir sürekli p yarı normu için $z_{mn} = O(p(\delta^{mn})^{-1})$ dir.

İspat. Sürekli bir yarı norm sınırlı cümleler üzerinde sınırlı olacağından

$$|z_{mn}| p(\delta^{mn}) = p(z_{mn} \delta^{mn}) = p(z^{(mn)} - z^{(m-1,n)} - z^{(m,n-1)} + z^{(m-1,n-1)}) < m$$

olup ispat açıktır.

Teorem 4.3.12. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda $B_E^+ = E^{f\gamma}$ dır.

İspat. $z \in B^+$ olması için gerek ve yeter şart her bir $u \in E^f$ için $z.u \in \mathcal{BS}$ olmasıdır. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem 4.3.13. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda B^+ uzayı $(\bar{\Phi})_E$ ile E arasındaki tüm Y uzayları için aynıdır. Yani; $(\bar{\Phi})_E \subset Y \subset E$ ise $B^+(Y) = B^+(E)$ dır.

İspat. Seçkin alt uzaylar monoton olduğundan $B^+((\bar{\Phi})_E) \subset B^+(Y) \subset B^+(E)$ içermesi açıktır.

Teorem 4.3.12. ve Teorem 3.1.19. dan $B^+((\bar{\Phi})_E) = B^+(E)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.14. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda E nin AB uzayı olması için gerek ve yeter şart $E^f \subset E^\gamma$ (Yani $E^f = E^\gamma$) olmasıdır.

İspat. Gereklik. E bir AB uzayı olsun. O halde $B(E) = E$ ve $B \subset B^+$ olup $E \subset B^+(E) = E^{f\gamma}$ elde edilir ki $E^\gamma \supset E^{f\gamma} \supset E^f$ içermesi gerçekleşir.

Yeterlilik. $E^f \subset E^\gamma$ olsun. Bu durumda $B^+(E) = E^{f\gamma} \supset E^\gamma \supset E$ olup $B^+(E) \supset E$ dir. Buradan ise $B = E$ olduğundan E bir AB uzayıdır.

Sonuç 4.3.15. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Eğer E AB uzayı ise bu takdirde E^β uzayı E^f içinde kapalıdır.

Teorem 4.3.16. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda $F_E^{(\nu)+} = E^{f\beta(\nu)}$ dır.

İspat. Teorem 4.3.12. nin ispatında $\mathcal{BS}$ yerine $\mathcal{CS}_\nu$ alınarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.17. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda $F^{(\nu)+}$ uzayı $(\bar{\Phi})_E$ ile E arasındaki tüm FDK-uzayları için aynıdır. Bu durumda $(\bar{\Phi})_E \subset Y \subset E$ ise $F^{(\nu)+}(Y) = F^{(\nu)+}(E)$.

İspat. Bu sonuç Teorem 4.3.12. deki gibi ispatlanabilir.

Sonuç 4.3.18. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu durumda E nin bir $FAK(\nu)$ uzayı olması için gerek ve yeter şart $E^f \subset E^{\beta(\nu)}$ (Yani $E^f = E^{\beta(\nu)}$) olmasıdır.

Teorem 4.3.19. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. $\bar{\Phi}$ bir $AK(\nu)$ uzayı ise $F^{(\nu)+} = (\bar{\Phi})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$ dır.

İspat. $F^{(\nu)+} = E^{f\beta(\nu)} = (\bar{\Phi})^{f\beta(\nu)} = (\bar{\Phi})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$ olduğundan açıktır.

Teorem 4.3.20. E bir FDK uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i. E bir $FAK(\nu)$ uzayı
- ii. $E \subset (S^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$
- iii. $E \subset (W^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$
- iv. $E \subset (F^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$
- v. $E^{\beta(\nu)} = (S^{(\nu)})^{\beta(\nu)}$
- vi. $E^{\beta(\nu)} = (F^{(\nu)})^{\beta(\nu)}$.

İspat. $\Phi \subset S_E^{(\nu)} \subset W_E^{(\nu)} \subset F_E^{(\nu)}$ içermesinden $(S_E^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)} \subset (W_E^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)} \subset (F_E^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$ olup

ii $\Rightarrow$ iii $\Rightarrow$ iv bağıntısı gerçekleşir.

Şimdi (iv $\Rightarrow$ i) önermesini ispatlayalım. $E \subset (F^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)}$ olsun. Bu durumda

$$E^{\beta(\nu)} \supset (F^{(\nu)})^{\beta(\nu)\beta(\nu)\beta(\nu)} \supset (F^{(\nu)})^{\beta(\nu)} = E^{f\beta(\nu)\beta(\nu)} \supset E^f$$

olup $E^{\beta(\nu)} \supset E^f \Rightarrow E = F^{(\nu)}$ elde edilir. Bu da E nin bir $FAK(\nu)$ uzayı olduğunu gösterir.

(iv), (v) ve (vi) şıklarının denkliği açıktır.

4.4. Matris Alanlarının Seçkin Alt Uzayları

Bu bölümde herhangi bir E FDK uzayı için $E_A^{(\nu)}$ matris alanlarının seçkin alt uzayları ile ilişkileri incelendi.

$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olmak üzere $\{a_{mnkl}\}_{k,l=1}^{\infty,\infty}$ dizisine A matrisinin (m,n) -nci satırı denir ve $\zeta_A^{(mn)}$ ile gösterilir, $\{a_{mnkl}\}_{m,n=1}^{\infty,\infty}$ dizisine ise A matrisinin (k,l) -nci kolonu denir ve $\zeta_A^{(kl)}$ ile gösterilir.

Uyarı 4.4.1. Bu kısımda $z \in \Omega$, E bir FDK uzayı ve $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olmak üzere $E_A^{(\nu)} \supset \Phi$, yani A nın kolonları E ye aittir. Ayrıca $S^{(\nu)}, W^{(\nu)}, F^{(\nu)}, B$ alt uzayları bir FDK uzayı olmak üzere $E_A^{(\nu)}$ içinde hesaplanmaktadır.

Lemma 4.4.2. z, E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun.

$$(Az^{(ij)})_{mn} = \sum_{(k,l)=(1,1)}^{(i,j)} a_{mnkl} z_{kl} = \left(\sum z_{kl} \zeta_A^{(kl)} \right)_{mn}$$

olup $Az^{(ij)} = \sum_{(k,l)=(1,1)}^{(i,j)} z_{kl} \zeta_A^{(kl)}$ dir.

Teorem 4.4.3. z, E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $z \in B^+$.
- ii. $\{Az^{(ij)}\}$ E de sınırlıdır.
- iii. $E_{A,z}^{(\nu)} \supset \mathcal{BV}_0$.
- iv. Her $g \in E'$ için $\left\{ z_{kl} g \left(\zeta_A^{(kl)} \right) \right\} \in \mathcal{BS}$.

Burada hemen belirtelim ki

$$z \in B \Leftrightarrow E_{A,z}^{(\nu)} \supset \mathcal{BV} , \text{ (ii)} \Leftrightarrow z \in E_A^{(\nu)} , \text{ (iv)} \Leftrightarrow z \in E_A^{(\nu)} \quad (4.9.)$$

önermeleri gerçekleşir.

İspat. $z^{-1}.E_A^{(\nu)} = E_{A,z}^{(\nu)} = \{x : xz \in E_A^{(\nu)}\} = \{x : x \in E_{A,z}^{(\nu)}\}$ olduğundan Teorem 4.3.9 den $z \in B^+ \Leftrightarrow z^{-1}.E_A^{(\nu)} \supset \mathcal{BV}_0 \Leftrightarrow E_{A,z}^{(\nu)} \supset \mathcal{BV}_0$ olduğundan (i) ile (iii) nin denkliği elde edilir. Diğer yandan Az nin (k, l) -nci kolonu $z_{kl}\zeta_A^{(kl)}$ olduğundan (iii) ile (ii) nin denkliği elde edilmiş olur. (ii) nin doğru olması için gerek ve yeter şart ise her bir $g \in E'$ için $\{g(Az^{(ij)})\}$ nin sınırlı olmasıdır. Bu ise (iv) ün doğruluğunu verir.

Diğer taraftan (4.9.) in ispatı için $z \in E_A^{(\nu)} \Leftrightarrow e \in E_{A,z}^{(\nu)}$ olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 4.4.4. $\nu \in \{r, c\}$ ve E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun. Bu durumda $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -yarı konservatif FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $\zeta_A^{(kl)} \in E$ ve her $g \in E'$ için $g(\zeta_A^{(kl)}) \in \mathcal{CS}_\nu$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik. Tanım 4.3.8. den $E_A^{(\nu)} \supset \Phi$ olup $\zeta_A^{(kl)} \in E$ olacağı açıktır. $g \in E'$ verildiğinde $x \in E_A^{(\nu)}$ için $f(x) = g(Ax)$ olsun. Böylece $f \in (E_A^{(\nu)})'$ olur. O halde

$$f(\delta^{kl}) = g(A\delta^{kl}) = g(\zeta_A^{(kl)})$$

dir. Hipotezden $(E_A^{(\nu)})' \subset \mathcal{CS}_\nu$ olup $g(\zeta_A^{(kl)}) \in \mathcal{CS}_\nu$ elde edilir.

Yeterlilik. Hipotezde $g = P_{mn}$ ($P_{mn}(x) = x_{mn}$) alınır. A nin satırlarının $\mathcal{CS}_\nu$ uzayına ait olduğu açıktır. Bu ise $\{g(\zeta_A^{(kl)})\} = \{a_{mkl}\}$ olmasını verir. Böylece $\Omega_A^{(\nu)} \supset \mathcal{BV}$ dir.

Şimdi $f \in (E_A^{(\nu)})'$ olsun. Bu durumda $h \in (\Omega_A^{(\nu)})'$ ve $g \in E'$ için

$$f(x) = h(x) + g(Ax)$$

dir. Böylece Teorem 3.1.11. den $x \in \Omega_A^{(\nu)}$ ve $u \in (\Omega_A^{(\nu)})^{\beta(\nu)} \subset \mathcal{BV}^{\beta(\nu)} = \mathcal{CS}_\nu$ için

$$h(x) = \nu - \sum_{k,l} u_{kl} x_{kl}$$

sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} f(\delta^{kl}) &= h(\delta^{kl}) + g(A\delta^{kl}) \\ &= h(\delta^{kl}) + g(\zeta_A^{(kl)}) \end{aligned}$$

olup hipotezden ve $u \in \mathcal{CS}_\nu$ olmasından $(f(\delta^{kl})) \in \mathcal{CS}_\nu$ elde edilir. Bu da $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -yarı konservatif FDK uzayı olmasını verir.

Teorem 4.4.5. $\nu \in \{r, c\}$ ve z, E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $z \in F^{(\nu)+}$.
- ii. $\{Az^{(ij)}\}$, E de zayıf Cauchy, yani her bir $g \in E'$ için $\{g[Az^{(ij)}]\} \in \mathcal{C}_\nu$.
- iii. $E_{A,z}^{(\nu)}$ bir ν -yarı konservatif FDK uzayıdır.
- iv. Her $g \in E'$ için $\{z_{kl}g(\zeta_A^{(kl)})\} \in \mathcal{CS}_\nu$.

İspat. Teorem 4.3.19 den i $\equiv$ iii, Teorem 4.4.4. ten iii $\equiv$ iv, Lemma 4.4.2 den ii $\equiv$ iv elde edilir.

Teorem 4.4.6. $\nu \in \{r, c\}$, E bir FDK uzayı ve $E_A^{(\nu)}$ uzayı salınımlı ν -yarı konservatif FDK uzayı olsun. $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart her $g \in E'$ için $\sum g(\zeta_A^{(kl)}) = g(Ae)$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik. $f(x) = g(Ax)$ olsun. Böylece Teorem 3.1.14. ten $f \in (E_A^{(\nu)})'$ dir. Bu durumda sürekli fonksiyonlar aynı zamanda dizisel sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} g(Ae) = f(e) &= \lim_{m,n} f(e^{(mn)}) = \lim_{m,n} g(Ae^{(mn)}) = \lim_{m,n} g\left(\sum_{k=1, l=1}^{m,n} a_{mnkl}\right) \\ &= g\left(\lim_{m,n} \sum_{k=1, l=1}^{m,n} a_{mnkl}\right) = g\left(\sum_{k=1, l=1}^{\infty, \infty} a_{mnkl}\right) = g(\zeta_A^{(kl)}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yeterlilik. $f \in (E_A^{(\nu)})'$ olsun. Bu durumda göz önüne alınacak iki durum vardır. İlk durum $h \in (\Omega_A^{(\nu)})'$

olmak üzere $x \in \Omega_A^{(\nu)}$ ve $u \in (\Omega_A^{(\nu)})^{\beta(\nu)}$ için

$$f(x) = h(x) = \nu - \sum u_{kl} x_{kl}$$

olmasıdır. Buradan $E_A^{(\nu)}$ uzayı salınımlı ν -yarı konservatif FDK uzayı olduğundan $E_A^{(\nu)} \supset \mathcal{BV}$ olup $u \in (\Omega_A^{(\nu)})^{\beta(\nu)} \subset \mathcal{BV}^{\beta(\nu)} = \mathcal{CS}_\nu$ dir. Böylece

$$f(e - e^{(mn)}) = \nu - \sum_{\substack{k=m+1 \\ l=1}}^{\infty, \infty} u_{kl} + \nu - \sum_{\substack{k=1 \\ l=n+1}}^{m, \infty} u_{kl} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

İkinci durum ise $g \in E'$ olmak üzere $f(x) = g(Ax)$ olmasıdır. Böylece $f(e - e^{(mn)}) = g(A(e - e^{(mn)})) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.7. $\nu \in \{r, c\}$ ve z, E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $z \in W^{(\nu)}$.
- ii. $Az^{(ij)} \rightarrow Az$ E içinde zayıf yakınsaktır.
- iii. $E_{A,z}^{(\nu)}$ ν -conull FDK uzayıdır.
- iv. Her bir $g \in E'$ için $\sum z_{kl} g(\zeta_A^{(kl)}) = g(Az)$.

İspat. Teorem 4.3.9 den i $\equiv$ iii, Teorem 4.4.6. dan iii $\equiv$ ii, Lemma 4.4.2 den ii $\equiv$ iv elde edilir.

Teorem 4.4.8. $\nu \in \{r, c\}$ ve z, E, A Uyarı 4.4.1 deki gibi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $z \in S^{(\nu)}$.
- ii. E içinde $Az^{(ij)} \rightarrow Az$ dır.
- iii. $E_{A,z}^{(\nu)}$ kuvvetli ν -conull FDK uzayıdır.
- iv. E içinde $\sum z_{kl} \zeta_A^{(kl)} = Az$ dir.

İspat. Teorem 4.3.9 den i $\equiv$ iii ve Lemma 4.4.2 den ii $\equiv$ iv elde edilir. Ayrıca

$$(i \Rightarrow ii) \quad z = \sum z_{kl} \delta^{kl} \text{ ve } A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E \text{ sürekli olduğundan } Az = \sum z_{kl} A\delta^{kl} = \sum z_{kl} \zeta_A^{(kl)} \text{ elde}$$

edilir.

(ii $\Rightarrow$ i) Teorem 3.1.16 den $\Omega_A^{(\nu)}$ bir $AK(\nu)$ uzayıdır. Böylece $u, \Omega_A^{(\nu)}$ uzayının topolojisini oluşturan yarı normlardan biri olmak üzere herhangi bir $z \in \Omega_A^{(\nu)}$ için $u(z - z^{(ij)}) \rightarrow 0$ dır. Böylece q, E uzayının bir yarı normu olmak üzere eğer $q[A(z - z^{(ij)})] \rightarrow 0$ ise bu durumda $z \in S^{(\nu)}$ elde edilir. Bu ise E de $Az^{(ij)} \rightarrow Az$ demektir.

4.5. Toplanabilirlik Alanlarına Uygulamalar

Şimdi ise ν -conull FDK ve ν -kama FDK uzaylarının toplanabilirlik alanlarındaki bazı uygulamalarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.5.1. $\mathcal{C}_\nu, E$ birer FDK uzayı ve $A = (a_{mnl})$ dört boyutlu bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $E_A^{(\nu)}$ bir ν -kama FDK uzayıdır.
- ii. $\mathcal{L}_\phi \subset E_A^{(\nu)}, \xi_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu 0} (m, n = 1, 2, \dots)$ ve $A: \mathcal{L}_\phi \rightarrow E$ dönüşümü kompaktır.
- iii. A nın kolonları E ye ait olup $\zeta_A^{(kl)} \rightarrow 0$ dır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) Teorem 4.1.5 den $E_A^{(\nu)}$ bir ν -kama FDK uzayı ise $\mathcal{L}_\phi \subset E_A^{(\nu)}$ olup $I: \mathcal{L}_\phi \rightarrow E_A^{(\nu)}$ içermeye dönüşümü kompaktır. FDK uzayları arasındaki matris dönüşümü sürekli olduğundan $A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ süreklidir. Böylece $A = A \circ I: \mathcal{L}_\phi \rightarrow E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü kompaktır. Ayrıca $E_A^{(\nu)}$ ν -kama FDK uzayı olduğundan $E_A^{(\nu)}$ üzerinde $\delta^{kl} \rightarrow 0 (k, l \rightarrow \infty)$ olur. Diğer yandan $A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ sürekli olduğundan E uzayında $A(\delta^{kl}) \rightarrow 0 (k, l \rightarrow \infty)$ dır. E bir FDK uzayı olduğundan koordinat fonksiyonelleri sürekli olup

$$A(\delta^{kl}) = (a_{mnl})_{kl} \rightarrow 0 (k, l \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu da $\xi_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu 0} (m, n = 1, 2, \dots)$ olduğunu gösterir.

(ii $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{L}_\phi \subset E_A^{(\nu)}$ olsun. $\delta^{kl} \in \mathcal{L}_\phi (k, l = 1, 2, \dots)$ olduğundan $\delta^{kl} \in E_A^{(\nu)}$ dır. O halde

$$\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E (k, l = 1, 2, \dots)$$

yazılabilir. $\{\delta^{kl} : k, l = 1, 2, \dots\}$ cümlesi $\mathcal{L}_\varphi$ da sınırlı olduğundan $E_A^{(\nu)}$ uzayında da sınırlıdır.

$\mathcal{L}_\varphi \subset E_A^{(\nu)}$ olması için gerek ve yeter şart $A \in (\mathcal{L}_\varphi, E)$ olmasıdır. Bu ise A nın kolonlarının E de sınırlı bir cümle olmasına denktir (Kamthan, Gupta, 1980). Ayrıca $A : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ kompakt olduğundan $K = \{A(\delta^{kl}) : k, l = 1, 2, \dots\}$ cümlesi E de rölatif kompakttır. Dolayısıyla K daki koordinatsal yakınsaklık topolojisi ile E nin topolojisi çakışıktır. Diğer yandan $\zeta_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ olduğundan E üzerinde $A(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olup her k, l için $A(\delta^{kl}) = (a_{mnkl})_{mn} = \zeta_A^{(kl)} \in E$ elde edilir. Böylece sabit m, n için $a_{mnkl} \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olduğundan $K = \{A(\delta^{kl}) : k, l = 1, 2, \dots\} \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) elde edilir.

(iii $\Rightarrow$ i) A nın kolonları E ye ait ve sifıra yakınsak olsun. O halde $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E$ ($k, l = 1, 2, \dots$) olduğundan $\Phi \in E_A^{(\nu)}$ dır. Şimdi ise $E_A^{(\nu)}$ uzayının bir ν -kama FDK uzayı olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.14 ten $E_A^{(\nu)}$ uzayı $\{r_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{t_r \circ A_{mn} : r, m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_r \circ A : r \in \mathbb{N}\}$ yarı norm ailesi ile bir FDK-uzayıdır. Diğer yandan

$$r_{mn}(\delta^{kl}) \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty),$$

$$(t_r \circ A_{mn})(\delta^{kl}) = t_r(A(\delta^{kl})) = t_r(\zeta_A^{(kl)}) \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$$

ve

$$(\eta_r \circ A)(\delta^{kl}) = \eta_r(A(\delta^{kl})) = \eta_r(\zeta_A^{(kl)}) \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$$

oldüğundan $E_A^{(\nu)}$ bir ν -kama FDK uzayıdır.

Teorem 4.5.2. $\mathcal{C}_\nu$ FDK uzayı, $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris ve E uzayı $E^f \subset \mathcal{BS}$ şartını sağlayan bir FDK-uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $E_A^{(\nu)}$ bir zayıf ν -kama FDK uzayıdır.
- ii. $\mathcal{L}_\varphi \subset E_A^{(\nu)}$, $\zeta_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{\nu_0}$ ve $A : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompakttır.
- iii. A nın kolonları E ye ait ve E de sifıra zayıf yakınsaktır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) $E_A^{(\nu)}$ bir ν -kama FDK uzayı ve $E^f \subset \mathcal{M}_u$ ise $\mathcal{L}_\varphi \subset E_A^{(\nu)}$ olup $I : \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E_A^{(\nu)}$ içirme dönüşümü zayıf kompakttır. FDK uzayları arasındaki matris dönüşümü sürekli olduğundan

$A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü süreklidir. Böylece $A = A \circ I: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompaktır. O halde $E_A^{(\nu)}$ zayıf ν -kama FDK uzayı olduğundan $E_A^{(\nu)}$ üzerinde $\delta^{kl} \rightarrow 0$ (zayıf) ($k, l \rightarrow \infty$) dır. Diğer yandan $A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü sürekli olduğundan E uzayında $A(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ (zayıf) ($k, l \rightarrow \infty$) dır. E uzayı FDK uzayı olduğundan koordinat fonksiyonelleri sürekli olup

$$P_{mn}(A(\delta^{kl})) = (a_{mnkl})_{kl} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu ise $\xi_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{p0}$ ($m, n = 1, 2, \dots$) olmasıdır.

(ii $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{L}_\varphi \subset E_A^{(\nu)}$ olsun. Bu durumda $\delta^{kl} \in \mathcal{L}_\varphi$ ($k, l = 1, 2, \dots$) olduğundan $\delta^{kl} \in E_A^{(\nu)}$ dır. Dolayısıyla $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E$ ($k, l = 1, 2, \dots$) olup $\{\delta^{kl} : k, l = 1, 2, \dots\}$ cümlesi $\mathcal{L}_\varphi$ da sınırlı olduğundan $E_A^{(\nu)}$ da da sınırlıdır. Ayrıca $A: \mathcal{L}_\varphi \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompakt olduğundan $\{A(\delta^{kl}) : k, l = 1, 2, \dots\}$ cümlesi E de zayıf rölatif kompaktır. O halde K daki koordinatsal yakınsaklık topolojisi ile E nin zayıf topolojisi çakışıkır. Sonuç olarak, $\xi_A^{(mn)} \in \mathcal{C}_{p0}$ olduğundan E üzerinde $A(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olur.

(iii $\Rightarrow$ i) $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E$ olup $A(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olsun. Eğer $f \in E_A'$ için $f(\delta^{kl}) \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$) olduğu gösterilirse $E_A^{(\nu)}$ bir zayıf ν -kama FDK uzayıdır. Her $f \in (E_A^{(\nu)})'$ için $f(x) = g(x) + h(Ax)$, ($x \in E_A^{(\nu)}$, $g \in (\Omega_A^{(\nu)})'$, $h \in E'$) ve $M > 0$ için

$$|\alpha x| \leq M \sup_s \left| \sum_{l=1}^s \sum_k a_{mnkl} x_{kl} \right| = M \ell_{mn}(x), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

olup

$$|\alpha \delta^{ij}| \leq M \ell_{mn}(\delta^{ij}), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği gerçekleşir. E de $a_{mnij} \rightarrow 0$ (zayıf), ($m, n = 1, 2, \dots$) ve E bir FDK uzayı olduğundan koordinat fonksiyonelleri sürekli olup $P_{mn}(a_{mnij}) = (a_{mnij})_{m,n} \rightarrow 0$, ($i, j \rightarrow \infty$), $m, n = 1, 2, \dots$ elde

edilir. Böylece $\ell_{mn}(\delta^{ij}) \rightarrow 0, (i, j \rightarrow \infty), m, n = 1, 2, \dots$ olup $g(\delta^{ij}) \rightarrow 0 (i, j \rightarrow \infty)$ elde ederiz.

Buradan ise $x \in E_A^{(\nu)}, g \in (\Omega_A^{(\nu)})', h \in E'$ olmak üzere

$$f(\delta^{ij}) = g(\delta^{ij}) + h(A(\delta^{ij}))$$

olup hipotezden E de $A(\delta^{ij}) \rightarrow 0$ (zayıf), $(i, j \rightarrow \infty)$ olduğundan her $h \in E'$ için $h(A(\delta^{ij})) \rightarrow 0, (i, j \rightarrow \infty)$ olur. Buradan ise her $f \in (E_A^{(\nu)})'$ için $f(\delta^{ij}) \rightarrow 0, (i, j \rightarrow \infty)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.5.3. $\nu \in \{r, c\}$, E bir FDK uzayı ve $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $E_A^{(\nu)}$ bir kuvvetli ν -conull FDK-uzayıdır.
- ii. $\mathcal{BV}(\varphi) \subseteq E_A^{(\nu)}$ ve $A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü kompaktır.
- iii. A nın sütunları E ye ait ve $\{A(e - \sum \delta^{kl})\}$ dizisi E de sifıra yakınsaktır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) Teorem 4.2.4 den E_A kuvvetli ν -conull FDK uzayı ise $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E_A^{(\nu)}$ olup $I: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E_A^{(\nu)}$ dönüşümü kompaktır. $A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü sürekli olduğundan $I \circ A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü kompaktır.

(ii $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{BV}(\varphi) \subseteq E_A^{(\nu)}$ ve $A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü kompakt olsun. Bu takdirde $\delta^{kl} \in \mathcal{BV}(\varphi), \forall k, l \geq 1$ olup $\mathcal{BV}(\varphi) \subseteq E_A^{(\nu)}$ olduğundan $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E, \forall k, l \geq 1$ elde edilir. Diğer yandan

$$e \in \mathcal{BV}(\varphi) \subset E_A \subset \Omega_A$$

ve $\Omega_A^{(\nu)}$ uzayı bir $AK(\nu)$ uzayı olduğundan $e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \rightarrow 0 (i, j \rightarrow \infty)$ yakınsar. Diğer taraftan

$A: \Omega_A^{(\nu)} \rightarrow E$ sürekli olduğundan $A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0 (i, j \rightarrow \infty)$ dır. Böylece

$\left\{e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} : i, j \geq 1\right\}$ cümlesi $\mathcal{BV}$ de sınırlı olup $A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü kompakt olduğundan

$\left\{ A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) : i, j \geq 1 \right\}$ cümlesi E de rölatif kompakttır. O halde bu cümle üzerindeki E topolojisi

ile koordinatsal yakınsaklık topolojisi çakışıktır. Diğer yandan Ω da $A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) \rightarrow 0 \ (i, j \rightarrow \infty)$

olduğundan E nin topolojisine göre de $A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) \rightarrow 0 \ (i, j \rightarrow \infty)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

(iii $\Rightarrow$ i) $\zeta_A^{(kl)} \in E, k, l \geq 1$ ve $\left\{ A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) : i, j \geq 1 \right\}$ dizisi E de sifira yakınsasın.

$\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E$ ise A nın kolonları E ye aittir, yani $E_A^{(\nu)} \supset \Phi$ dir. Bu durumda

$\left\{ A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) : i, j \geq 1 \right\}$ sifira yakınsadığından $E_A^{(\nu)}$ kuvvetli ν -conull FDK-uzayıdır.

Teorem 4.5.4. $\nu \in \{r, c\}$, E bir FDK uzayı ve $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $E_A^{(\nu)}$ bir ν -conull FDK-uzayıdır.
- ii. $\mathcal{BV}(\varphi) \subseteq E_A^{(\nu)}$ ve $A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompakttır.
- iii. A nın sütunları E ye ait ve $\left\{ A \left(e - \sum \delta^{kl} \right) \right\}$ dizisi E de sifira zayıf yakınsaktır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) $E_A^{(\nu)}$ ν -conull FDK uzayı ise Teorem 4.2.4 den $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E_A^{(\nu)}$ olup $I: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E_A^{(\nu)}$ dönüşümü zayıf kompakttır. Diğer yandan $A: E_A^{(\nu)} \rightarrow E$ dönüşümü sürekli olduğundan $I \circ A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompakttır.

(ii $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{BV}(\varphi) \subseteq E_A^{(\nu)}$ ve $A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ dönüşümü zayıf kompakt olsun. Bu takdirde $\delta^{kl} \in \mathcal{BV}(\varphi), \forall k, l \geq 1$ olup $\mathcal{BV}(\varphi) \subset E_A^{(\nu)}$ olduğundan $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E, \forall k, l \geq 1$ bulunur.

Diğer yandan $e \in \mathcal{BV}(\varphi) \subset E_A^{(\nu)} \subset \Omega_A^{(\nu)}$ olup $\Omega_A^{(\nu)}$ uzayı bir $AK(\nu)$ uzayı olduğundan $e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \rightarrow 0 \ (i, j \rightarrow \infty)$ elde edilir. Ayrıca $A: \Omega_A^{(\nu)} \rightarrow \Omega$ sürekli olduğundan

$A \left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} \right) \rightarrow 0 \ (i, j \rightarrow \infty)$ dir. $\left\{ e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl} : i, j \geq 1 \right\}$ cümlesi $\mathcal{BV}(\varphi)$ de sınırlıdır.

$A: \mathcal{BV}(\varphi) \rightarrow E$ zayıf kompakt olduğundan $\left\{ A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) : i, j \geq 1 \right\}$ cümlesi E de zayıf rölatif kompaktır. O halde bu cümle üzerindeki koordinatsal yakınsaklık topolojisi ile E nin zayıf topolojisi çakışık olup Ω da $A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0$ ($i, j \rightarrow \infty$) olduğundan E nin zayıf topolojisine göre de $A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) \rightarrow 0$ ($i, j \rightarrow \infty$) elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

(iii $\Rightarrow$ i) $\zeta_A^{(kl)} \in E$, $k, l \geq 1$ ve $\left\{ A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) : i, j \geq 1 \right\}$ dizisi E de sıfıra zayıf yakınsak olsun. Bu durumda $\zeta_A^{(kl)} = A(\delta^{kl}) \in E$ olduğundan $E_A^{(\nu)} \supset \Phi$ olup $\left\{ A\left(e - \sum_{k,l=1}^{i,j} \delta^{kl}\right) : i, j \geq 1 \right\}$ sıfıra zayıf yakınsadığından $E_A^{(\nu)}$ uzayı ν -conull FDK-uzayıdır.

4.6. Mutlak Toplanabilirlik Alanlarının Bazı Özellikleri

Mutlak yakınsak seri oluşturan çift indisli dizilerin uzayı

$$\mathcal{L}_u := \left\{ x \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl}| < \infty \right\}$$

olup bu uzay

$$\|x\| = \sum_{k,l} |x_{kl}|$$

normu ile bir BDK-AK(ν) uzayıdır. A dört boyutlu bir matris olmak üzere

$$\mathcal{L}_{uA} := \{ x \in \Omega : Ax \in \mathcal{L}_u \}$$

uzayı A nın mutlak toplanabilme alanı olarak adlandırılır. Eğer (E, q) bir FDK uzayı ise E_A uzayı da bir FDK uzayıdır. $\mathcal{L}_{uA}'$ ise $\mathcal{L}_{uA}$ uzayının sürekli duali olmak üzere her $f \in \mathcal{L}_{uA}'$ fonksiyoneli için $(t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$, $(w_{kl}) \in \mathcal{L}_{uA}^{\beta(\nu)}$ olmak üzere f fonksiyoneli her $x \in \mathcal{L}_{uA}$ için

$$f(x) = \sum_{m,n} t_{mn} (Ax)_{mn} + \sum_{k,l} w_{kl} x_{kl} \quad (4.10.)$$

gösterimine sahiptir.

Bu bölümde daha önce çalışılan bazı kavramlar $\mathcal{L}_{uA}$ uzayı üzerinde incelendi ve yukarıdaki gösterimden yararlanarak invaryant ve replaceability kavramları verildi.

Öncelikle $F_{\mathcal{L}_{uA}}^{(\nu)}$ seçkin alt uzayını tanımlayalım

$$F_{\mathcal{L}_{uA}}^{(\nu)} = F_A^{(\nu)} := \left\{ x \in \mathcal{L}_{uA} : \forall f \in \mathcal{L}'_{uA}, \left(\sum_{k,l=1}^{m,n} f(\delta^{kl}) x_{kl} \right)_{m,n} \in \mathcal{C}_\nu \right\}.$$

$\sum_A x = \sum_{m,n} \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl}$ olsun. Böylece $a_{kl} = \sum_A \delta^{kl}$ olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayabiliriz.

$$I_A^{(2)} := \left\{ x \in \mathcal{L}_{uA} : \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} \text{ yakınsak} \right\},$$

$$\left(\Lambda_A^{(2)} \right)^\perp := \left\{ x \in I_A : \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} = \sum_A x \right\}$$

ve her $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ için

$$I_A^{(2)}(f) := \left\{ x \in \mathcal{L}_{uA} : \sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl} \text{ yakınsak} \right\}$$

ve

$$\left(\Lambda_A^{(2)} \right)^\perp(f) := \left\{ x \in I_A^{(2)} : \sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl} = f(x) \right\}$$

olur. Bu uzaylara ilişkin elde ettiğimiz bazı temel sonuçları verelim.

Teorem 4.6.1. Dört boyutlu A matrisi için $\mathcal{L}'_{uA} \supset \Phi$ gerçeklensin. Bu durumda her bir $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ için $\mathcal{L}_{uB} = \mathcal{L}_{uA}$ ve $\sum_B = f$ olacak şekilde dört boyutlu bir B matrisi vardır.

İspat. $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ olsun. (4.10.) gösterimindeki $(t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$, $(w_{kl}) \in \mathcal{L}^{\beta(v)}_{uA}$ dizileri ile $B(w, t) = (b_{mnkl})$ dört boyutlu matrisini $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} b_{11kl} &= w_{kl} \\ b_{2m,n,k,l} &= a_{mnkl} \\ b_{2m+1,n,k,l} &= (t_{mn} - 1)a_{mnkl} \end{aligned} \quad (4.11.)$$

olarak tanımlayalım. Eğer $x \in \mathcal{L}_{uB}$ ise bu durumda $x \in \mathcal{L}_{uA}$ dir. Karşıt olarak, eğer $x \in \mathcal{L}_{uA}$ ise her m, n için $(Bx)_{mn}$ mevcut olup

$$\begin{aligned} B_{11}(x) &= \sum_{k,l} w_{kl} x_{kl} \\ B_{2m,1n}(x) &= \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \\ B_{2m+1,n}(x) &= \sum_{k,l} (t_{mn} - 1)a_{mnkl} x_{kl} \end{aligned}$$

şeklindedir. $\|t\| = M$ alınırsa $|t_{mn} - 1| \leq 1 + M$ olup böylece

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |B_{mn}(x)| &\leq |wx| + \sum_{m,n} |A_{mn}(x)| + \sum_{m,n} |A_{mn}(x)|(1 + M) \\ &= |wx| + (2 + M) \sum_{m,n} |A_{mn}(x)| < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $x \in \mathcal{L}_{uB}$ dir. O halde $\mathcal{L}_{uB} = \mathcal{L}_{uA}$ dir. Diğer taraftan

$$\sum_{m,n} (Bx)_{mn} \leq wx + \sum_{m,n} (Ax)_{mn} + \sum_{m,n} (t_{mn} - 1)(Ax)_{mn} = wx + t(Ax) = f(x)$$

olup bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.6.2. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $\mathcal{L}_{uD} = \mathcal{L}_{uA}$ olacak şekilde dört boyutlu her D matrisi için $\left(\Lambda_D^{(2)}\right)^\perp = I_D^{(2)}$ dir.
- ii. $(tA)x$ olacak şekilde $\forall (t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$ ve $\forall x \in \mathcal{L}_{uA}$ için $(tA)x = t(Ax)$ dir.
- iii. $\forall f \in \mathcal{L}'_{uA}$ için $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp (f) = I_A^{(2)} (f)$ dir.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) (i) sağlansın ve $\forall (t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$ ve $\forall x \in \mathcal{L}_{uA}$ için $(tA)x$ mevcut olsun. Bu durumda $f(x) = t(Ax)$ olmak üzere Teorem 4.6.1. den $\mathcal{L}_{uA} = \mathcal{L}_{uD}$ olacak şekilde D matrisi mevcut olup $\sum_D x = f(x)$ dir. Yani,

$$\sum_{m,n} \sum_{k,l} d_{mnkl} x_{kl} = \sum_{m,n} \sum_{k,l} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl}$$

sağlanır. Özel olarak; $x = \delta^{kl}$ alınırsa $d_{kl} = \sum_{m,n} t_{mn} a_{mnkl}$ ve $t(Ax) = \sum_{k,l} d_{kl} x_{kl}$ elde edilir. Böylece

$\sum_{k,l} d_{kl} x_{kl}$ mevcut olup E den $\sum_{k,l} d_{kl} x_{kl} = \sum_D x = f(x) = t(Ax)$ eşitliği gerçekleşir. Yani (ii)

sağlanır.

(ii $\Rightarrow$ iii) (ii) sağlansın, $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ ve $\sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl}$ olacak şekilde $x \in \mathcal{L}_{uA}$ alalım. Bu durumda

f nin (4.10.) daki temsilinden

$$f(\delta^{kl}) = \sum_{m,n} t_{mn} a_{mnkl} + w_{kl}$$

olup

$$f(x) = \sum_{m,n} t_{mn} (Ax)_{mn} + \sum_{k,l} \left(f(\delta^{kl}) - \sum_{m,n} t_{mn} a_{mnkl} \right) x_{kl}$$

elde edilir. Böylece $\sum_{m,n} \sum_{k,l} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl}$ mevcut ve $t(Ax)$ e eşit olup $\sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl} = f(x)$ dir.

O halde (iii) sağlanır.

(iii $\Rightarrow$ i) (iii) sağlansın. Eğer (iii) de $f = \sum_D$ alınırsa ispat tamamlanır.

Bir A matrisi için tanımlanan bir küme için $\mathcal{L}_{uA} = \mathcal{L}_{uD}$ olacak şekilde herhangi bir D matrisine karşılık gelen küme değiştirilmemiş ise bu kümeye invaryant denir. Benzer şekilde A matrisinin özellikleri için de invaryant olduğu söylenebilir.

Teorem 4.6.3. $I_A^{(2)}$ invaryant olması için gerek ve yeter şart $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp$ uzayının invaryant olmasıdır.

Ayrıca $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp = I_A^{(2)} = \mathcal{L}_{uA}$ eşitliği sağlanır.

İspat. İlk olarak $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp$ uzayının invaryant olduğunu kabul edelim. D matrisini (4.11.) den yararlanarak $B(0,0)$ şeklinde tanımlayalım. Böylece $\left(\Lambda_D^{(2)}\right)^\perp = I_D^{(2)} = \mathcal{L}_{uD} = \mathcal{L}_{uA}$ eşitliği sağlanır. İnvaryantlıktan $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp = \mathcal{L}_{uA}$ olup $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp = I_A^{(2)} = \mathcal{L}_{uA}$ dır. $I_A^{(2)}$ uzayı invaryant olsun. Bu durumda benzer olarak $I_A^{(2)} = \mathcal{L}_{uA}$ olur. Fakat $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp$ uzayı $I_A^{(2)}$ uzayından daha küçük olabilir. Bunu anlamak için herhangi bir $(t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$ dizisini alalım ve D matrisini (4.11.) den $B(0,t)$ olarak tanımlayalım. O halde

$$\sum_D x = \sum_{m,n} \sum_{k,l} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl}$$

ve D nin sütunları toplamı

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} t_{mn} a_{mn11}, \sum_{m,n} t_{mn} a_{mn12}, \sum_{m,n} t_{mn} a_{mn13}, \dots \\ & \sum_{m,n} t_{mn} a_{mn21}, \sum_{m,n} t_{mn} a_{mn22}, \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

şeklindedir. Herhangi $x \in I_D = I_A$ için $\sum_{k,l} \sum_{m,n} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl}$ mevcuttur ve bu her $(t_{mn}) \in \mathcal{M}_u$ için sağlanır. Bu durumda $\sum_{k,l} \sum_{m,n} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl} = \sum_{m,n} \sum_{k,l} t_{mn} a_{mnkl} x_{kl}$ eşitliği gerçekleşir. Eğer $t = (t_{mn})$ dizisini $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $t_{mn} = 1$ alırsak o zaman $\sum_{k,l} \sum_{m,n} a_{mnkl} x_{kl} = \sum_{m,n} \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl}$ olup $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp = I_A^{(2)}$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\mathcal{L}_{uG} = \mathcal{L}_{uA}$ olacak şekilde herhangi bir G matrisi için de aynı eşitlik elde edileceğinden $\left(\Lambda_A^{(2)}\right)^\perp$ invaryanttır.

Tanım 4.6.4. A dört boyutlu bir matris ve $\mathcal{L}_{uA} \supset \Phi$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_{uA} = \mathcal{L}_{uD}$ ve $\sum_{m,n} d_{mnkl} = 1$ ($k, l \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir D matrisi varsa bu durumda A matrisine replaceable matris denir.

Teorem 4.6.5. A dört boyutlu bir matris ve $\mathcal{L}_{uA} \supset \Phi$ olsun. Bu takdirde A matrisinin replaceable olması için gerek ve yeter şart her $k, l \in \mathbb{N}$ için $f(\delta^{kl}) = 1$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ bulunmasıdır.

İspat. Gereklik. A matrisi replaceable olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_{uA} = \mathcal{L}_{uD}$ ve $\sum_{m,n} d_{mnkl} = 1$ ($k, l \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir D matrisi vardır. Diğer taraftan $\mathcal{L}_{uA}$ uzayı üzerinde

$$f(x) = \sum_{m,n} D_{mn}(x)$$

tanımlanırsa Banach-Steinhaus Teoreminden $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ elde ederiz. Ayrıca

$$f(\delta^{kl}) = \sum_{m,n} d_{mnkl} = 1 \quad (\forall k, l \in \mathbb{N})$$

olup gereklik ispatlanır.

Yeterlilik. Her $k, l \in \mathbb{N}$ için $f(\delta^{kl}) = 1$ olacak şekilde $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ mevcut olsun. O halde Teorem 4.6.5. ten $\mathcal{L}_{uA} = \mathcal{L}_{uD}$ ve $\sum_D x = f(x)$ olacak şekilde bir D matrisi vardır. Ancak her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_D \delta^{kl} = f(\delta^{kl}) = 1$$

olup $1 = \sum_D \delta^{kl} = \sum_{m,n} d_{mnkl}$ olduğundan A matrisi replaceabledır.

Teorem 4.6.6. $F_A^{(\nu)} = \mathcal{L}_{uA}$ olsun. Bu takdirde A matrisinin replaceable olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{L}_{uA} \subset \mathcal{CS}_\nu$ olmasıdır.

İspat. A matrisi replaceable olsun. Bu durumda her $k, l \in \mathbb{N}$ için $f(\delta^{kl}) = 1$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{L}'_{uA}$ mevcuttur. $F_A^{(\nu)} = \mathcal{L}_{uA}$ olduğundan $\forall x \in \mathcal{L}_{uA}$ için $\sum_{k,l} f(\delta^{kl}) x_{kl}$ serisi yakınsaktır. $f(\delta^{kl}) = 1$ olduğundan $\sum_{k,l} x_{kl}$ serisi yakınsaktır. Yani $x \in \mathcal{CS}_\nu$ elde edilir.

Karşıt olarak, $\mathcal{L}_{uA} \subset \mathcal{CS}_\nu$ olsun. Bu durumda $\forall x \in \mathcal{L}_{uA}$ için $\sum_{k,l} x_{kl}$ yakınsak olup $f(x) := \sum_{k,l} x_{kl}$ $\mathcal{L}_{uA}$ nın bir elemanını tanımlar. Diğer yandan $f(\delta^{kl}) = 1$ ($k, l \in \mathbb{N}$) olup A matrisi replaceabledır.

Teorem 4.6.7. Zayıf ve kuvvetli yakınsaklık çakışık olacak şekilde bir E FDK uzayı ve bir A dört boyutlu matrisi verilsin. Bu durumda

- i. $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $E_A^{(\nu)}$ uzayının zayıf ν -kama FDK uzayı olmasıdır.
- ii. $E_A^{(\nu)}$ uzayının kuvvetli ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -conull FDK uzayı olmasıdır.

İspat. (i) $E_A^{(\nu)}$ ν -kama FDK uzayı olsun. Bu durumda A nın sütunları E ye ait ve $\{A(e - \sum \delta^{kl})\} \rightarrow 0$ dır. Hipotezden, zayıf yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan A nın kolonları E de zayıf yakınsaktır. Bu da $E_A^{(\nu)}$ uzayının zayıf ν -kama FDK uzayı olması demektir.

(ii) $E_A^{(\nu)}$ kuvvetli ν -conull FDK uzayı olsun. Bu durumda A nın kolonları E ye ait ve $\{A(e - \sum \delta^{kl})\} \rightarrow 0$ dır. Hipotezden, zayıf yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan $\{A(e - \sum \delta^{kl})\}$ dizisi zayıf yakınsaktır. Bu ise $E_A^{(\nu)}$ uzayının ν -conull FDK uzayı olması demektir.

Teorem 4.6.8. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{L}_{uA}$ uzayının (zayıf) ν –kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{k,l} \sum_{m,n} |a_{mnkl}| = 0$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{L}_u$ dizi uzayında zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan $\mathcal{L}_{uA}$ nın zayıf ν –kama FDK uzayı olması ν –kama olmasına denktir. Bu durumda Teorem 4.5.1 de $E_A^{(\nu)} = \mathcal{L}_{uA}$ alınırsa ν –kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart A nın kolonlarının E ye ait ve sıfıra yakınsak olmasıdır. Yani; $A(\delta^{kl}) = (a_{mnkl})_{mn} = \xi_A^{(kl)} \in E$ olur. Bu ise

$$\lim_{k,l} \left\| \left(A(\delta^{kl}) \right)_{mn} \right\|_{\mathcal{L}_u} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} |a_{mnkl}| = 0$$

olması demektir.

Teorem 4.6.9. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{L}_{uA}$ uzayının (kuvvetli) ν –onull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i=k}^{\infty, l} a_{mnij} + \sum_{i=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} \right| = 0$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{L}_u$ dizi uzayında zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan $\mathcal{L}_{uA}$ uzayının kuvvetli ν –conull FDK uzayı olması ν –conull FDK uzayı olmasına denktir. Bu durumda Teorem 4.5.3 te $E_A^{(\nu)} = \mathcal{L}_{uA}$ alınırsa kuvvetli ν –conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart A nın kolonlarının E ye ait ve $\left\{ A(e - \sum \delta^{kl}) \right\}$ nin E de sıfıra yakınsak olmasıdır. Bu ise

$$\begin{aligned} \lim_{k,l} \left\| A \left(e - \sum \delta^{kl} \right) \right\|_{\mathcal{L}_u} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} - \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i=k}^{\infty, l} a_{mnij} + \sum_{i=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} \right| = 0 \end{aligned}$$

olması demektir.

Teorem 4.6.10. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{L}_{uA}$ uzayı ν -conull FDK uzayı ise A matrisi $\mathcal{L}_u$ -replaceable değildir.

İspat. $\mathcal{L}_{uA}$, ν -conull FDK uzayı ve A matrisi $\mathcal{L}_u$ -replaceable olsun. Bu durumda Her $k, l \in \mathbb{N}$ için $f(\delta^{kl}) = 1$ olacak şekilde $f \in \mathcal{L}_{uA}$ ' olsun. Böylece $\left(f(e) - \sum_{k,l=1}^{m,n} f(\delta^{kl}) \right)$ dizisi sıfıra yakınsak olmayıp $\mathcal{L}_{uA}$ ν -conull FDK uzayı değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde A matrisi $\mathcal{L}_u$ -replaceable değildir.

Teorem 4.6.11. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde; $\mathcal{M}_{uA}$ dizi uzayının ν -kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart

- i. $\sup_{m,n} |a_{mnkl}| < \infty \quad (k, l = 1, 2, \dots)$
- ii. $\limsup_{k,l} \sup_{m,n} |a_{mnkl}| = 0$

olmasıdır.

İspat. Teorem 4.5.1 de $E = \mathcal{M}_u$ alınırsa $\mathcal{M}_{uA}$ nın ν -kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart A nın kolonlarının $\mathcal{M}_u$ ye ait yani; $\sup_{m,n} |a_{mnkl}| < \infty \quad (k, l = 1, 2, \dots)$ ve $\limsup_{k,l} \sup_{m,n} |a_{mnkl}| = 0$ olmasıdır.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.6.12. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{BV}_A$ (zayıf) ν – kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{k,l} \sum_{m,n} |a_{mnl} - a_{m+1,n,k,l} - a_{m,n+1,k,l} + a_{m+1,n+1,k,l}| = 0$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{BV}$ dizi uzayında zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan $\mathcal{BV}_A$ uzayının zayıf ν – kama FDK uzayı olması ν – kama FDK uzayı olmasına denktir.

Teorem 4.5.1 de $E_A^{(\nu)} = \mathcal{BV}_A$ alınırsa ν – kama FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart A nın kolonlarının E ye ait ve sıfıra yakınsak olmasıdır. Bu ise

$$A(\delta^{kl}) = (a_{mnl})_{mn} = \xi_A^{(kl)} \in \mathcal{BV}$$

demektir. Dolayısıyla

$$\lim_{k,l} \left\| \left(A(\delta^{kl}) \right)_{mn} \right\|_{\mathcal{BV}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} |a_{mnl} - a_{m+1,n,k,l} - a_{m,n+1,k,l} + a_{m+1,n+1,k,l}| = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.6.13. A dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{BV}_A$ uzayının (kuvvetli) ν – conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} (a_{mnij} - a_{m+1,n,i,j} - a_{m,n+1,i,j} + a_{m+1,n+1,i,j}) - \sum_{i,j=1}^{k,l} (a_{mnij} - a_{m+1,n,i,j} - a_{m,n+1,i,j} + a_{m+1,n+1,i,j}) \right| = 0$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{BV}$ dizi uzayında zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık çakışık olduğundan $\mathcal{BV}_A$ uzayının kuvvetli ν – conull FDK uzayı olması ν – conull FDK uzayı olmasına denktir.

Teorem 4.5.3 de $E_A^{(\nu)} = \mathcal{BV}_A$ alınırsa $\mathcal{BV}_A$ uzayının kuvvetli ν -conull FDK uzayı olması için gerek ve yeter şart A nın kolonlarının E ye ait ve $\left\{A\left(e - \sum \delta^{kl}\right)\right\}$ nin E de sıfıra yakınsak olmasıdır.

Bu ise

$$\lim_{k,l} \left\| A\left(e - \sum \delta^{kl}\right) \right\|_{\mathcal{BV}} = 0$$

şartının sağlanması demektir. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{k,l} \left\| A\left(e - \sum \delta^{kl}\right) \right\|_{\mathcal{BV}} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{k,l} \left\| \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} - \sum_{i,j=1}^{k,l} a_{mnij} \right\|_{\mathcal{BV}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{mnij} - \sum_{i,j=1}^{k,l} a_{mnij} - \left(\sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{m+1,n,i,j} - \sum_{i,j=1}^{k,l} a_{m+1,n,i,j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{m,n+1,i,j} - \sum_{i,j=1}^{k,l} a_{m,n+1,i,j} \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} a_{m+1,n+1,i,j} - \sum_{i,j=1}^{k,l} a_{m+1,n+1,i,j} \right) \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k,l} \sum_{m,n} \left| \sum_{i,j=1}^{\infty, \infty} (a_{mnij} - a_{m+1,n,i,j} - a_{m,n+1,i,j} + a_{m+1,n+1,i,j}) - \sum_{i,j=1}^{k,l} (a_{mnij} - a_{m+1,n,i,j} - a_{m,n+1,i,j} + a_{m+1,n+1,i,j}) \right| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (ii) şartını verir ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yukarıdaki kavramlar kullanılarak tek indisli diziler için mevcut olan çeşitli bağıntılar ve içerme sonuçları ν – conull ve ν – kama FDK uzayları için de incelenebilir.



KAYNAKLAR

Altay, B. and Başar, F. (2005). “Some new spaces of double sequences.” J. Math. anal. Appl., Vol.309, pp.70-90.

Başar, F. and Sever, Y. (2009). “The space $\mathcal{L}_q$ of double sequences.” Math. J. Okayama Univ., Vol.51, pp.149-157.

Başarır, M. and Sonalcan, O. (1999). “On some double sequence spaces.” J. Indian Acad. Math., Vol.21, pp.193-200.

Bennett, G. (1974). “A new class of sequence spaces with applications in summability theory.” J. Reine Agnew. Math., Vol.266, pp.49-75.

Boos, J. (2000). Classical and modern methods in summability, Oxford University Press., New York, Oxford.

Boos, J. and Fleming, D. J. (1995). “Gliding Hump Properties and Some Applications.” International Journal of Mathematical Science, Vol.18, pp.121-132.

Boos, J., Leiger, T. and Zeller, K. (1997). “Consistency Theory for SM-Methods.” Acta Math. Hungar., Vol.76, pp.83-116.

Bromwich, T. J. (1965). An introduction to the theory of infinite series, Macmillanand Co. Ltd., New York.

Çapan, H. (2018). Some paranormed double sequence spaces and backward difference matrix, PhD Thesis, İstanbul University, İstanbul, Turkey.

Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1957). Linear Operators Part I General Theory, Interscience Publishers Inc., New York.

Goffman, C. and Petersen, G. M. (1956). “Submethods of regular matrix summability methods, Canad. J. Math., Vol.8, pp.40-46.

Gökhan, A. and Çolak, R. (2004). “The double sequences spaces $c_2^p(p)$ and $c_2^{bp}(p)$.” Applied mathematics and computation, Vol.157, No.2, pp.491-501.

Gökhan, A. and Çolak, R. (2005). “Double sequence space $l_2^\infty(p)$.” Applied mathematics and computation, Vol.160, No.1, pp.147-153.

Hamilton, H. J. (1936). “Transformations of multiple sequences.” Duke Mathematical Journal, Vol.2, pp.29-60.

Hardy, G. H. (1904). “On the convergence of certain multiple series.” Proc.London Math. Soc., Vol.2-1, No.1, pp.124-128.

Kamthan, P.K. and Gupta M. (1980). Sequence spaces and series, Marcel Dekker Inc. New York and Basel.

Milovidov, S. P. and Povolotski, A. I. (1991). “Dual spaces of conditional Köthe spaces of double number sequences.” Izvestija Vyssh. Ucheb. Zav., Matem., Vol.2, pp.90-91.

Moricz, F. (1991). “Extension of the spaces c and c_0 from single to double sequence.” Acta Math. Hungarica, Vol.57, pp.129-136.

Moricz, F. and Rhoades, B. E. (1988). “Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices.” Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.104, No.2, pp.283-294.

Mursaleen, M. and Edely ,O.H.H. (2003). “Statistical convergence of double sequences.” J.Math. Anal. Appl., Vol.288, pp.223-231.

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S. A. (2014). Convergence methods for double sequences and applications, Springer.

Patterson, R. F. (2000). “Analogues of some fundamental theorems of summability theory.” Int. J. Math. Math. Sci., Vol.23, pp.1-9.

Pringsheim, A. (1898). “Elementare theorie der unendliche doppelreihen.” Sitzungs Berich. der Math. Akad. derWissen. zuMüch. Ber., Vol.7, pp.101-153.

Przybylski, B. (1977). On the perfectness of methods defined by the iteration product of matrix transformations, PhD Thesis, Univeristy of Łódź, Łódź, Poland.

Robertson, A.P. and Robertson, W. (1964). Topological vector spaces, Cambridge at the University Press.

Robison, G. M. (1926). “Divergent double sequences and series.” Transactions of the Amer. Mathematical Society, Vol.28, no.1, pp.50-73.

Snyder, A. K. (1965). “Conull and coregular FK-spaces.” Math. Z., Vol.90, pp.376-381.

Tripathy, B. C. and Sarma B. (2008) “Generalized köthe-toeplitz dual of some double sequence spaces.” Fasciculi Mathematici, Vol.40, pp.119-125.

Tripaty, B. C. (2003). “Statistically convergent double sequences.” Tamkang J. Math., Vol.34, pp.230-237.

Tripaty, B. C. (2004). “Generalized difference paranormed statistically convergent sequences defined by Orlicz function in a locally convex spaces.” Soochow J. Math., Vol.30, pp.431-446.

Tuğ O., Rakočević V. and Malkowsky E. (2022). “On the spaces $\mathcal{BV}_{\nu_0}$ of double sequences of bounded variation.” Asian-European Journal of Mathematics, Vol.15, No. 11, pp. 2250204.

Wilansky, A. and Zeller K. (1959). “FH-spaces and Intersections of FK-spaces.” Michigan Math. J., Vol.6, pp.349-357.

Wilansky, A. (1984). Summability through functional analysis, North Holland.

Wilansky, A. (1978). Modern methods in topological vector spaces, McGraw-Hill, Inc. New York.

Yeşilkayagil, M. and Başar, F. (2021). “ $AK(\nu)$ -property of double series spaces.” Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Vol.44, No.2, pp.881-889.

Zeltser, M. (2001). Investigation of double sequence spaces by soft and hard analitical methods, PhD Thesis, Tartu University Press, Tartu, Estonia.

Zeltser, M. (1998). “The solid topology in double sequence spaces.” Seminarberichte des Fachbereichs Mathematik der Fernuniversität Hagen, Vol.64, pp.53-67.

Zeltser, M., Boos, J. and Leiger, T. (2002). “Sequences of 0’s and 1’s: new results via double sequence spaces.” J. Math. Anal. Appl., Vol.275, pp.883-899.



ÖZGEÇMİŞ







