



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



HEMEN HEMEN BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ
İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Eşref ERDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Eşref ERDOĞAN tarafından hazırlanan “HEMEN HEMEN BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ” adlı tez çalışması 21/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

.....

Danışman

Doç. Dr. Özlem ACAR

.....

Üye

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

.....

Üye

Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer Faruk YÜKSEL
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Eşref ERDOĞAN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

EŞREF ERDOĞAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özlem ACAR

2023, 106 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Özlem ACAR

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması toplamda beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölüm kaynak araştırması olup tez de yararlanılan kaynakları içermektedir. Üçüncü bölümde ise tez boyunca kullandığımız topolojikel ve metrikel kavramlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, ortogonal metrik uzay kavramı tanıtılarak ortogonal metrik uzaylarda yapılan bazı sabit nokta çalışmalarına yer verilmiştir. Sonra ise tezimizin orijinal konularını olan hemen hemen büzülme tipli ortogonal F -büzülme dönüşümü ve küme değerli hemen hemen büzülme tipli ortogonal F -büzülme dönüşümü tanımlanarak sabit nokta teoremleri incelenip, özgün örnekler verilmiştir. Son olarak ise beşinci bölümde orijinal sonuçlarımızdan elde edilen sonuçlara ve bu sonuçlara ek literatüre katkı olarak ne yapılabileceği hakkında öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Berinde tipli büzülme, küme değerli dönüşüm, metrik uzay, ortogonal metrik uzay, sabit nokta, F -büzülme

ABSTRACT

MS THESIS

FIXED POINT THEOREMS FOR ALMOST CONTRACTION MAPPINGS

Eşref ERDOĞAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Özlem ACAR

2023, 106 Pages

Jury

Doç. Dr. Özlem ACAR

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

This thesis consists of five chapters in total. The first chapter is devoted to introduction. The second chapter is the literature review and contains the references used in the thesis. The third chapter introduces the topological and metric concepts used throughout the thesis. In the fourth chapter, the concept of orthogonal metric space is introduced and some fixed point studies on orthogonal metric spaces are given. Then, the orthogonal F -contraction contraction with almost contraction type and orthogonal F -contraction contraction with set-valued almost contraction type, which are the original topics of our thesis, are defined, fixed point theorems are analyzed and original examples are given. Finally, in the fifth section, we conclude with the results obtained from our original results and suggestions on what can be done to contribute to the literature.

Keywords: Berinde-type contraction, set-valued mapping, metric space, orthogonal metric space, fixed point, F -contraction

ÖNSÖZ

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan hem lisans hem de yüksek lisans eğitim hayatımda desteğini her daim hissettiğim, bilgi ve tecrübeleriyle beni her daim aydınlatan, ayrıca bu süreçte başarılı olmamı sağlayan çok değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Özlem ACAR'a, çalışmalarım boyunca beni daima destekleyen Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Tuncer ACAR'a saygı ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitim boyunca 2210-A Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Eşref ERDOĞAN
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER VE TABLO LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
3.1. Temel Notasyonlar.....	6
3.2. Metrik Uzaylarda Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teorisi.....	18
3.3. Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler için Sabit Nokta Teorisi	29
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	51
4.1. Ortogonal Metrik Uzaylar.....	51
4.2. Adi Diferensiyel Denklemler İçin Uygulama	68
4.3. Ortogonal Metrik Uzaylarda Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	72
4.4. Ortogonal Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	80
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	91
5.1 Sonuçlar	91
5.2 Öneriler	92
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ	96

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(X, ρ)	: Metrik uzay
$\mathcal{T}: X \rightarrow X$	: $\mathcal{T}, X$ 'den X 'e bir dönüşüm
$\mathcal{T}x$	: x noktasının $\mathcal{T}$ dönüşümü altındaki görüntüsü
$\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{A})$	: $\mathcal{A}$ kümesinin $\mathcal{T}$ dönüşümü altındaki ters görüntüsü
$\{\mathcal{T}^n x_0\}$	: İterasyon dizisi
$(X, \perp)$	: Ortogonal küme
$(X, \perp, \rho)$	: Ortogonal metrik uzay
$\mathcal{P}(X)$	: X 'nin güç kümesi
$\beta(X)$	: X 'nin boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı
$\mathcal{C}(X)$	: X 'nin boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı
$\mathcal{C}\beta(X)$	: X 'nin boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfı
$\kappa(X)$	: X 'nin boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı
$\mathcal{C}(a, b)$	: $[a, b]$ aralığındaki bütün sürekli fonksiyonların ailesi
$F(\mathcal{T})$	: $\mathcal{T}$ dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi
$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	: $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ kümeleri arasındaki uzaklık
$\mathcal{D}(x, \mathcal{A})$	: x noktasının $\mathcal{A}$ kümesine olan uzaklığı
$\rho(x, y)$	: x ve y arasındaki uzaklık
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar

ŞEKİLLER VE TABLO LİSTESİ

<u>Şekil</u>		<u>SAYFA</u>
Şekil 3.1.	$\mathcal{B}((0,0), r)$ Açık yuvarı	10
Şekil 3.2.	$\mathcal{D}((0,0), r)$ Kapalı yuvarı	10
Şekil 3.3.	$\mathcal{S}((0,0), r)$ Yuvar yüzeyi	11
Şekil 3.4.	$\mathcal{Y} = x^3$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri	18
Şekil 3.5.	$\mathcal{Y} = x^2 + 9x + 16$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri	18
Şekil 3.6..	$\mathcal{Y} = \frac{x}{2}$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri	19
Şekil 3.7.	$\mathcal{Y} = \frac{x}{5}$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri	19
Şekil 3.8.	$\mathcal{T}_a x$ dönüşümünün grafiği	30
Şekil 3.9.	$\mathcal{T}_b x$ dönüşümünün grafiği	31
Şekil 3.10.	$\mathcal{T}_c x$ dönüşümünün grafiği	32
Şekil 4.1.	Tekerlek grafi	53
 <u>Tablo</u>		<u>SAYFA</u>
Tablo 4.1.	Kan grupları	52

1. GİRİŞ

X kümesi boştan farklı olmak üzere $\mathcal{T}$, X 'de bir öz dönüşüm olsun. Sabit nokta “ $\mathcal{T}x_0 = x_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ varsa, x_0 noktası $\mathcal{T}$ 'nin bir sabit noktasıdır” şeklinde tanımlanır. Örnek olarak $X = [0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{T}x = \frac{x}{5}$, $\mathcal{S}x = x + 1$, $\mathcal{R}x = x^3$ dönüşümlerini ele alırsak; $x_0 = 0$, noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktası olmasına rağmen $\mathcal{S}$ dönüşümünün bir sabit noktası yoktur. Ayrıca, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ ve $x_0 = 1$ noktaları da $\mathcal{R}$ 'nin sabit noktalarıdır. $X = [0, \infty)$ kümesi yerine, $X = (0, \infty)$ kümesi alınırsa; $\mathcal{T}$ dönüşümü, bir sabit noktaya sahip değildir. Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi verilen $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının var olması, tanımlandığı kümenin yapısına bağlı olduğu kadar dönüşümün niteliğine bağlıdır. Buradan hareketle sabit nokta problemleri verilen bir dönüşümün sabit noktasının hangi şartlar altında var olduğunu, var ise; tekliğini, tekliğinin ise nasıl elde edilebileceği sorularına cevap arar.

Topolojikel, metriksel ve ayrık sabit nokta teori olmak üzere; sabit nokta teori çalışmaları üç ana başlık altında incelenmektedir. Bu alanlarda kabul edilen teoriler sırasıyla;

1. Brouwer Sabit Nokta Teorisi (1912)
2. Banach Sabit Nokta Teorisi (1922)
3. Tarski Sabit Nokta Teorisi (1955)

biçimindedir. Metriksel sabit nokta teori çalışmaları tam metrik uzaylarda, ilk olarak Polonyalı matematikçi S. Banach tarafından Banach büzülme prensibi ile verilmiştir.

Banach (1922), “ (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X üzerinde bir öz dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k\rho(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir $k \in [0, 1)$ sayısı var ise; $\mathcal{T}$ dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.” ile verilen teoremi ifade edip ispatlamıştır. İspatında, tam metrik

uzaylarda büzülme dnm yardımı ile oluşturulan Picard iterasyon dizisinin yakınsadığı noktanın, dnmn sabit noktası olduğu gösterilir.

Metriksel sabit nokta teoremi, Banach ile balamı olsa da; daha sonra pek çok araştırmacı tarafından genelletirilmitir. Bu genelletirmelerde büzülme dnmlerindeki eşitsizliğin sağ tarafındaki verilen katsayılar toplamı 1'den küçüktür. 2003 yılında Berinde; büzülme dnmlerindeki eşitsizliklerin sağ tarafındaki katsayı ve katsayılar toplamının 1 veya 1'den büyük gelebileceğini göstermiştir. Banach sabit nokta teoreminde sabit noktanın tekliği, garanti iken; Berinde tarafından tanımlanan hemen hemen büzülme dnmnde sabit noktanın tekliği garanti değildir. Berinde, sabit noktanın tekliğini garanti etmek için hemen hemen büzülme şartına benzeyen ek koşul eklemiştir. Yine Berinde 2004'te $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ kıyaslama fonksiyonunu kullanmıştır ve lineer olmayan tipte hemen hemen büzülme şartını tanımlayarak, tam metrik uzaylarda sabit noktanın varlık ve tekliğini incelemiştir (Berinde, 2003a).

Banach Büzülme Prensibinin en ilgi çekici genelletirmelerinden birini Wardowski (2012) *F*-büzülme kavramını tanımlayarak vermiştir. Tam metrik uzaylarda Wardowski yaptığı bu genelletirmede *F*-büzülme dnmlerinin tek bir sabit noktasının var olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Metriksel sabit nokta teori çalışmaları; tek değerli dnmlerde çalışıldığı gibi küme değerli dnmler için de çalışılmıştır. Küme değerli dnm tanımı;

“ $X, Y \neq \emptyset$ iki küme olmak üzere $\mathcal{T} \subseteq X \times Y$ ise $\mathcal{T}$ 'ye X 'den Y 'ye bir küme değerli (oğul değerli) dnm denir.” ile verilmiştir. Küme değerli dnmler için ilk kez sabit noktanın varlığı ve aynı zamanda Banach büzülme prensibinin önemli bir genellemesi, Nadler (1969) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

(X, ρ) metrik uzay ve $\mathcal{T}: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli dnm olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için,

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k\rho(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k > 0$ sabiti var ise; $\mathcal{T}$ 'ye, Lipschitz dönüşümü ve k sayısı da $\mathcal{T}$ 'nin Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. $k < 1$ ise $\mathcal{T}$ 'ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir (Nadler, 1969).

“(X, ρ) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $\mathcal{T}: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli büzülme dönüşümü ise $\mathcal{T}$ 'nin bir sabit noktası vardır (Nadler, 1969).” teorisinden esinlenerek küme değerli büzülme için birçok sabit nokta teoremi incelenmiştir (bakınız, [8, 18, 22, 23-25, 33, 36]).

Banach sabit nokta prensibinin farklı uzaylarda (kısmi metrik uzaylar, modüler uzaylar, Branciari metrik uzaylar) birçok genelleştirmeleri yapılmıştır. Bu genelleştirmelerden biri de Gordji ve arkadaşları tarafından 2017 yılında ortogonal metrik uzaylar üzerinde verilmiştir. Gordji ve arkadaşları, bu çalışmalarında; ilk kez Banach Sabit Nokta Prensibi'ni ortogonal metrik uzaylarda çalışmışlardır. Modüler uzay, uygulamalı matematik ve fonksiyonel analiz gibi çeşitli alanlara uygulamalarının olması sebebiyle ortogonal metrik uzaylar günümüzde ilgi odağı haline gelmiştir. Bundan hareketle ortogonal metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ve uygulamaları çalışılmaya başlanmıştır (bakınız, [30, 32, 34]).

Bu tez çalışmasında, ortogonal metrik uzaylarda genelleştirilmiş hemen hemen F -büzülme dönüşümü tanımlanmıştır. Ortogonal metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri tek değerli dönüşümler ve küme-değerli dönüşümler için ifade edilip ispatlanmıştır. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlara ek olarak açıklayıcı örnekler ve bazı doğal sonuçlar verilerek, literatüre katkı sağlanmıştır (bakınız, [3,4]).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Metrik uzaylar, fonksiyonel analiz ve topolojiksel kavramlar için M. Koçak 'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" isimli kitabı, O. Bizim' in "Genel Topoloji" ve O. Mucuk' un "Topoloji ve Kategori" kitapları kullanılmıştır. Tek değerli büzülme dönüşümlerinde sabit nokta teorisinin literatür bilgisi için Banach' ın " Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales" isimli makalesinden, Kannan' ın "Some results on fixed points" isimli makalesinden, Chatterjea' nın "Fixed point theorems" isimli makalesinden, Zamfirescu' nun "Fixed point theorems in metric spaces" isimli makalesinden, Berinde' nin "On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings" adlı makalesi ve "Approximating fixed points of weak ϕ -contractions using the Picard iteration" adlı makalelerinden yararlanılmıştır. Tek değerli dönüşümlerde F-büzülmeler kısmında, D. Wardowski' nin Fixed Points of a New Type of Contractive Mappings in Complete Metric Spaces" isimli makalesinden yararlanılmıştır. Küme değerli dönüşümlerde sabit nokta teori bölümünde gerekli tanım teoremler için S. B. Nadler 'in "Multivalued Contraction-Mappings" adlı makalesinden, İ. Altun ve arkadaşlarının "Multivalued F-contractions on complete metric spaces" adlı makalesinden, Ö. Acar ve arkadaşlarının "Generalized multivalued ϕ -contractions on complete metric spaces" adlı makalelerinden yararlanılmıştır. Ortogonal metrik uzaylar bölümünde gerekli temel tanım, teoremler ve literatür taraması için M. E. Gordji ve arkadaşlarının "On orthogonal sets and Banach fixed point theorem, Fixed Point Theory" adlı makalesinden, Sawangsup ve arkadaşları tarafından "Fixed point theorems for orthogonal F-contraction mappings on O-complete metric spaces" adlı makalesinden, Quing Yang ve Chuanzhi Bai tarafından "Fixed point theorem for orthogonal contraction of Hardy Rogers-type mapping on O-complete metric spaces" adlı makalesinden, Mani ve arkadaşları tarafından "Fixed point theorems for orthogonal F-Suzuki contraction mappings on O-complete metric space with an applications" adlı makalesinden yararlanılmıştır. Adi diferensiyel denklemler için uygulama bölümünde kullanılan kaynak, E. Gordji ve arkadaşlarının "On Orthogonal Sets and Banach Fixed Point Theorem" adlı makalesinden alınmıştır. Tezimizin orijinal sonuçlarını içeren 4.3. alt bölümünde, Ö. Acar ve E. Erdoğan' ın "Some Fixed Point Results For Almost Contraction On Orthogonal Metric Space" adlı makalesinden yararlanmıştır. Bu makale Creative Mathematics and Informatics isimli dergide yayınlanmıştır. 4.4. alt bölümünde ise Ö. Acar

ve E. Erdoğan' ın “Generalized Multivalued F -Contraction On Orthogonal Metric Space” adlı makalesinden yararlanmıştır. Bu makale Fixed Point Theory dergisinde kabul edilmiştir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezimizde kullanılacak temel kavramlardan bahsedilecektir. Metrik uzayda tek değerli ve küme değerli dönüşümler için bazı büzülme dönüşümleri ele alınarak, bu büzölmeler yardımıyla verilen sabit nokta teoremlerine değinilecektir. Bu bölümün devamında ise tek değeri dönüşümler ve küme değeri dönüşümler için F -büzölme kavramı verilecektir.

3.1. Temel Notasyonlar

Tanım 3.1.1. X kümesi boştan farklı olmak üzere $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin her $x, y, z \in X$ için

- i) $\rho(x, y) \geq 0$, (Pozitif tanımlılık)
- ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, (Simetri özelliğı)
- iv) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (Üçgen eşitsizliğı)

koşulları gerçekenir; ρ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metrik ve (X, ρ) , metrik uzay olarak adlandırılır. X kümesinin elemanlarına metrik uzayın noktaları, $\rho(x, y)$ sayısına x ve y arasındaki uzaklık denir (Bizim, 2013).

Uyarı 3.1.1.

- 1- X kümesinde birden fazla, farklı metrikler tanıtılabilir ve böylece farklı metrik uzaylar elde edilmiş olur. Doğal olarak ρ fonksiyonu değıştiğinde belli x ve y nokta çiftleri arasındaki uzaklıkta değışecektir.
- 2- Doğal olarak, $\rho(x, y)$ negatif olmayan bir sayı olduğı gibi x noktasının y noktasına olan uzaklığı ile y noktasının x noktasına olan uzaklığı da aynıdır.
- 3- x noktasının y noktasına olan uzaklığıyla, x noktasının uzayın üçüncü bir z noktasına olan uzaklığı ile y noktasının z noktasına olan uzaklığının toplamından daha büyük olamaz. iv) koşuluna üçgen eşitsizliğı denmesinin nedeni, Euclid

düzlemindeki bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğunun diğer iki kenarın uzunlukları toplamından daha büyük olamayacağıdır. Tümevarım ile, üçgen eşitsizliğinden $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere;

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n)$$

genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği elde edilebilir.

- 4- Metrik tanımındaki ρ fonksiyonunun gerçeklediği i), ii), iii) ve iv) koşullarına dikkat edilirse, $|\cdot|$ mutlak değer fonksiyonu da, bu koşulları sağlar. Bu nedenle

$$\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$$

fonksiyonu ile $(\mathbb{R}, \rho)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe Euclid metriği, alışılmış metrik denir (Bizim, 2013).

Örnek 3.1.1. $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$ olmak üzere;

$$\rho_{\infty}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| | x \in [a, b]\} = \max\{|f(x) - g(x)| | x \in [a, b]\}$$

şeklinde tanımlanan ρ fonksiyonu, $\mathcal{C}(a, b)$ üzerinde bir metriktir.

Çözüm. $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$ olsun. Dolayısıyla; f ve g sürekli olduklarından sınırlıdır. Böylece her $x \in [a, b]$ için, $|f(x)| \leq \mathcal{A}$ ve $|g(x)| \leq \mathcal{B}$ olacak biçimde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ reel sayıları vardır. Diğer yandan; her $x \in [a, b]$ için,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

Olduğundan; $|f(x) - g(x)|$ fonksiyonu, sınırlıdır. Böylece $\{|f(x) - g(x)| | x \in [a, b]\}$ kümesinin supremumu vardır. Yani; ρ_{∞} , iyi tanımlıdır.

- i) $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için, $|f(x) - g(x)| \geq 0$ olduğundan $\rho_{\infty}(f, g) \geq 0$ olur.

ii) $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$ olsun.

$$\begin{aligned}\rho_{\infty}(f, g) = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } x \in [a, b] \text{ için } |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } x \in [a, b] \text{ için } f(x) = g(x) \\ &\Leftrightarrow f = g\end{aligned}$$

olur.

iii) $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için, $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ olduğundan;

$$\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\} = \{|g(x) - f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

olur. Buradan $\rho_{\infty}(f, g) = \rho_{\infty}(g, f)$ elde edilir.

iv) $f, g, h \in \mathcal{C}(a, b)$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \rho_{\infty}(f, h) + \rho_{\infty}(h, g)$$

olur. Böylece $\rho_{\infty}(f, h) + \rho_{\infty}(h, g)$ değeri $\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bir kümenin herhangi bir üst sınırı kümenin supremumundan büyük veya eşit olduğundan

$$\sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\} \leq \rho_{\infty}(f, h) + \rho_{\infty}(h, g)$$

olur. Yani

$$\rho_{\infty}(f, g) \leq \rho_{\infty}(f, h) + \rho_{\infty}(h, g)$$

dir. $\mathcal{C}(a, b)$ üzerindeki bu metriğe supremum veya düzgün metrik adı verilir (Koçak, 2011).

Tanım 3.1.2. (X, ρ) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere; $B(a, r) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$ kümesine, a merkezli r yarıçaplı bir açık disk (yuvar)

denir. Benzer olarak $\mathcal{D}(a, r) = \{x \in X | \rho(x, a) \leq r\}$ kümesine, a merkezli r yarıçaplı bir kapalı disk (yuvar) denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.1.3. (X, ρ) bir metrik uzay, $r > 0$ ve $a \in X$ olmak üzere $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in X | \rho(x, a) = r\}$ kümesine, a merkezli r yarıçaplı küre (yuvar yüzeyi) denir (Bizim, 2013).

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}^2$ üzerinde; her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $\rho: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ metriğine göre

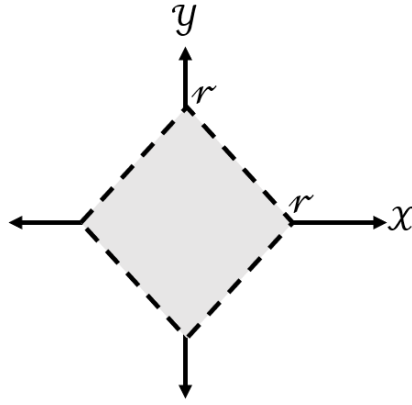
- a) $\mathcal{B}((0,0), r)$
- b) $\mathcal{D}((0,0), r)$
- c) $\mathcal{S}((0,0), r)$

kümelerini bulalım.

Çözüm.

a)

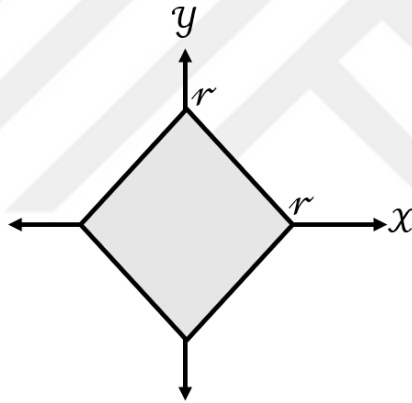
$$\begin{aligned} \mathcal{B}((0,0), r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \rho((x, y), (0,0)) < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x - 0| + |y - 0| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y < r\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y < r\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -x + y < r\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -x - y < r\} \end{aligned}$$



Şekil 3.1. $B((0,0), r)$ Açık yuvarı

b)

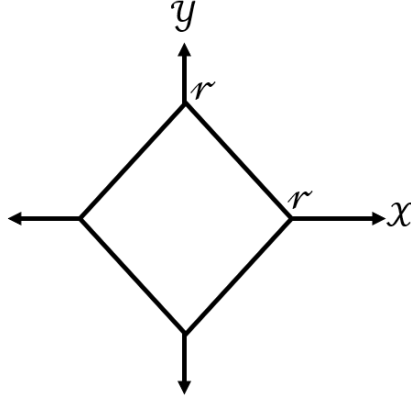
$$\begin{aligned} \mathcal{D}((0,0), r) = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq r\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq r\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y \leq r\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - y \leq r\} \end{aligned}$$



Şekil 3.2. $\mathcal{D}((0,0), r)$ Kapalı yuvarı

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}((0,0), r) = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = r\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = r\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y = r\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - y = r\} \end{aligned}$$



Şekil 3.3. $\mathcal{S}((0,0), r)$ Yuvar yüzeyi

Tanım 3.1.4. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X$ boştan farklı bir küme olmak üzere eğer

$\{\rho(x, y) | x, y \in \mathcal{A}\}$ kümesi,

bir üst sınıra sahipse, $\mathcal{A}$ kümesine sınırlı küme denir.

$$d(\mathcal{A}) = \sup\{\rho(x, y) | x, y \in \mathcal{A}\}$$

sayısına ise; $\mathcal{A}$ kümesinin çapı adı verilir. Eğer X kümesi sınırlı ise (X, ρ) metrik uzayına, sınırlı metrik uzay adı verilir. Herhangi bir $x \in X$ noktasının $\mathcal{A}$ kümesine olan uzaklığı $\rho(x, \mathcal{A})$ simgesiyle gösterilir,

$$\rho(x, \mathcal{A}) = \inf\{\rho(x, a) | a \in \mathcal{A}\}$$

ile tanımlanır. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X$ kümelerinin birbirine olan uzaklıkları ise $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ile gösterilir ve

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\rho(a, b) | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

ile tanımlanır (Bizim, 2013).

Tanım 3.1.5. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere; $a \in X$ ve (a_n) , terimleri X 'de olan bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ iken; $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$

var ise, (a_n) dizisi, $a \in X$ noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ veya $(a_n) \rightarrow a$ şeklinde yazılır (Mucuk, 2010).

Önerme 3.1.1. Bir (X, ρ) metrik uzayında yakınsak olan bir (a_n) dizisinin her (a_{n_k}) alt dizisi de aynı noktaya yakınsar (Mucuk, 2010).

Önerme 3.1.2. (X, ρ) metrik uzayındaki herhangi bir (a_n) dizisi, bir tek noktaya yakınsar (Mucuk, 2010).

Tanım 3.1.6. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere; (a_n) , X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $m, n > n_0$ olduğu zaman $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (belli bir indisten sonra dizinin terimleri arasındaki uzaklık istenildiği kadar küçük kalıyor ise) (a_n) dizisine, Cauchy dizisi adı verilir (Mucuk, 2010).

Önerme 3.1.3. (X, ρ) metrik uzayında yakınsak her (a_n) dizisi, Cauchy dizisidir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.1.7. (X, ρ) metrik uzay olmak üzere; eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi, yakınsaksa; bu uzaya, tam uzay denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.1.8. (X, ρ) metrik uzayında (a_n) herhangi bir dizi olmak üzere; eğer her $n \in \mathbb{N}$ için, $|a_n| \leq M$ sağlayan pozitif bir M sayısı var ise; (a_n) 'ye, sınırlı dizi denir (Mucuk, 2010).

Önerme 3.1.4. Herhangi bir metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır (Koçak, 2011).

Tanım 3.1.9. (X, ρ) ve (Y, e) herhangi iki metrik uzay olmak üzere; $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, e)$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x_0) \in Y$ noktasının her $D(f(x_0), \varepsilon)$ açık komşuluğu için, $f(D(x_0, \delta)) \subseteq D(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasının bir $D(x_0, \delta)$ açık komşuluğu varsa; diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için, $\rho(x_0, x) < \delta$ iken $e(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı var ise; f fonksiyonu, x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekliyse, f 'ye, sürekli fonksiyon adı verilir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.1.10. (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) herhangi iki metrik uzay olmak üzere; f fonksiyonu, X 'den Y 'ye verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ reel sayısı

$$\rho_1(x, y) < \delta$$

özelliğini sağlayan her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

olacak biçimde varsa; f fonksiyonuna, düzgün süreklidir denir. Buna eşit olarak her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ reel sayısı her $x \in X$ için

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

olacak şekilde var ise; f fonksiyonuna, düzgün süreklidir denir (Koçak, 2011).

Örnek 3.1.3. (X, ρ_1) ayrık uzay olmak üzere (Y, ρ_2) herhangi bir metrik uzay olmak üzere her $f: (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ fonksiyonu düzgün süreklidir (Koçak, 2011).

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\rho_1(x, y) < \delta$$

ise $x = y$ olacağından

$$\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_2(f(x), f(x)) = 0 < \varepsilon$$

olur. O halde f fonksiyonu, düzgün süreklidir.

Tanım 3.1.11. (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) , herhangi iki metrik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq k\rho_1(x, y)$$

olacak biçimde sabit bir $k > 0$ sayısı var ise; f fonksiyonuna, Lipschitz süreklidir denir (Koçak, 2011).

Örnek 3.1.4. (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) , herhangi iki metrik uzay ve $c \in Y$ olmak üzere; $f(x) = c$ şeklinde tanımlı $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, Lipschitz süreklidir.

Çözüm. Her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq \rho_2(c, c) = 0 \leq \rho_1(x, y), (k = 1)$$

olur. Böylece f fonksiyonu, Lipschitz süreklidir.

Örnek 3.1.5. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $f(x) = x$ şeklinde tanımlı $f: (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ fonksiyonu, Lipschitz süreklidir.

Çözüm. $\forall x, y \in X$ için

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y) \leq \rho(x, y), (k = 1)$$

olur. Böylece f fonksiyonu, Lipschitz süreklidir.

Teorem 3.1.1. (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) , herhangi iki metrik uzay olmak üzere; $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, düzgün sürekli ise süreklidir (Koçak, 2011).

İspat. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda bir $\delta > 0$ reel sayısı, $\rho_1(x, y) < \delta$ özelliğini sağlayan her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

olacak şekilde vardır. $\rho_1(x_0, y) < \delta$ özelliğini sağlayan her $y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$$

olur. Bu durumda f fonksiyonu, x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktası, keyfi olduğundan; f fonksiyonu, süreklidir.

NOT. Bir fonksiyonunun sürekli olması onun düzgün sürekli olmasını gerektirmez. Örneğin, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğu halde düzgün sürekli değildir. $\delta > 0$ sayısı için,

$$x = \frac{1}{\delta} \text{ ve } y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

olarak seçilirse,

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |(x - y)(x^2 + xy + y^2)| = \frac{3}{2\delta} + \frac{3\delta}{4} + \frac{\delta^3}{8}$$

olur. Dolayısıyla; $\varepsilon > 0$ sayısı, $0 < \varepsilon < 1$ olarak verildiğinde; $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı olmadığı açıktır.

Teorem 3.1.2. (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) , herhangi iki metrik uzay olsun. Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise düzgün süreklidir (Koçak, 2011).

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. f fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğundan; her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq k\rho_1(x, y)$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ olsun. Bu durumda; $\rho_1(x, y) < \delta$ özelliğini sağlayan her $x, y \in X$ için,

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq k\rho_1(x, y) < k\delta = \varepsilon$$

Geçerlidir. O halde f fonksiyonu, düzgün süreklidir.

Bir fonksiyonunun düzgün sürekli olması onun Lipschitz sürekli olmasını gerektirmez.

Örnek 3.1.6. $X = [0, \infty)$ olsun. (X, ρ_1) ayrık uzay ve (X, ρ) standart uzay olmak üzere $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı $f: (X, \rho_1) \rightarrow (X, \rho)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu fakat Lipschitz sürekli olmadığını gösterelim.

Çözüm.

$$x, a \in [0, \infty) \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{a}| |\sqrt{x} + \sqrt{a}| = |x - a|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x - a|}$$

Olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için, $0 < \delta \leq \varepsilon^2$ seçilirse; her $x, a \in [0, \infty)$ için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

Sağlanır. Buradan f fonksiyonu, $[0, \infty)$ 'da düzgün süreklidir. Şimdi Lipschitz sürekli olmadığını gösterelim. f fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\rho(f(x), f(y)) = |x - y| \leq k \rho_1(x, y)$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. $x = 0$ ve $y = (k + 2)^2$ olsun. Bu durumda

$$\rho_1(x, y) = 1 \text{ ve } \rho(f(x), f(y)) \leq k \rho_1(x, y)$$

olduğundan,

$$\rho(f(0), f((k + 2)^2)) = \left| \sqrt{0} - \sqrt{(k + 2)^2} \right| = k + 2 \leq k$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde f fonksiyonu Lipschitz sürekli değildir.

Lipschitz Sürekli $\Rightarrow$ Düzgün Sürekli $\Rightarrow$ Sürekli

Tanım 3.1.12. X , boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{I}$ da X 'in kuvvet kümesi olan $\mathfrak{P}(X)$ 'in bir alt koleksiyonu olsun.

$\mathfrak{I}_1$) $X \in \mathfrak{I}$ ve $\emptyset \in \mathfrak{I}$

$\mathfrak{I}_2$) $\mathcal{I}$ herhangi bir indis kümesi ve $i \in \mathcal{I}$ için, $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{I}$ ise; $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i \in \mathfrak{I}$

$\mathfrak{T}_3)$ $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ ise $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathfrak{T}$ 'dur

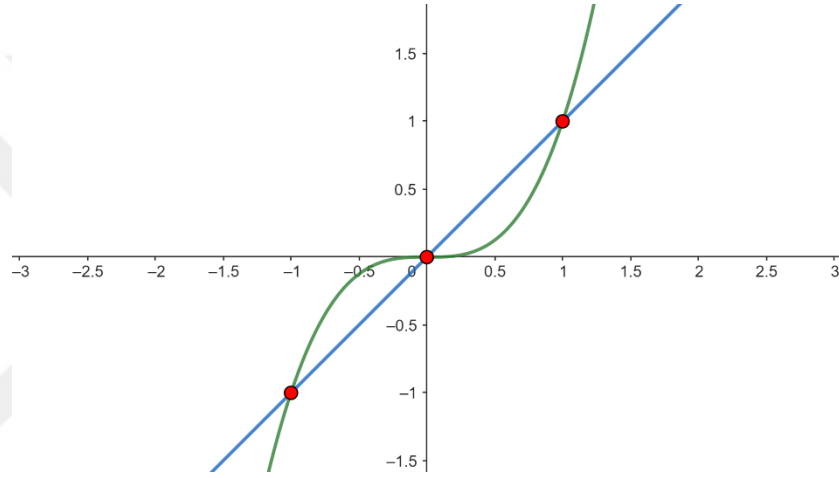
özellikleri sağlanıyorsa; $\mathfrak{T}$ koleksiyonuna, X üzerinde bir topoloji denir. $(\mathfrak{T}, X)$ ikilisine topolojik uzay adı verilir (Koçak, 2011).



3.2. Metrik Uzaylarda Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teorisi

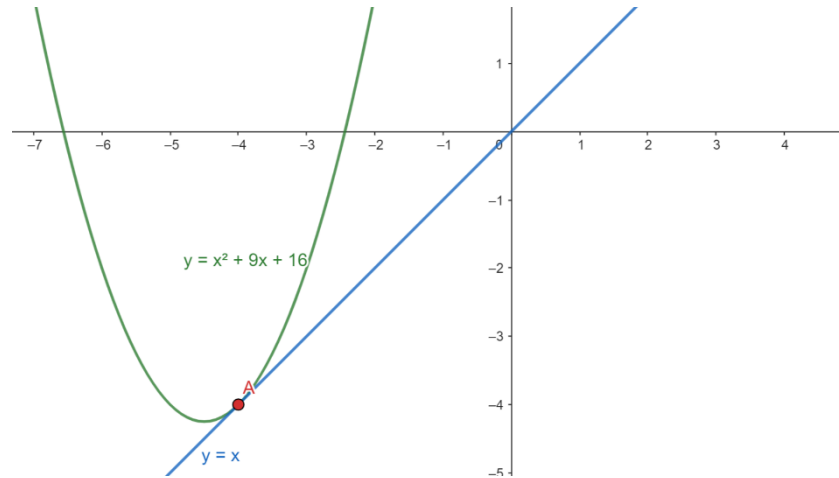
Tanım 3.2.1. X , boştan farklı bir küme ve $\mathcal{T}$, X 'de bir öz dönüşüm olmak üzere; $\mathcal{T}x = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ noktası var ise; bu noktaya, $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktası denir. Bu durumda; $\mathcal{T}x = x$ denkleminin çözümleri, $\mathcal{T}$ 'nin sabit noktalarıdır. $\mathcal{T}$ dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(\mathcal{T})$ ile gösterilir.

Verilen bir dönüşümün sabit noktalarının geometrik yeri ise $y = \mathcal{T}x$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalarının apsisleridir. Şekil 3.4. de, $y = x^3$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri verilmiştir.



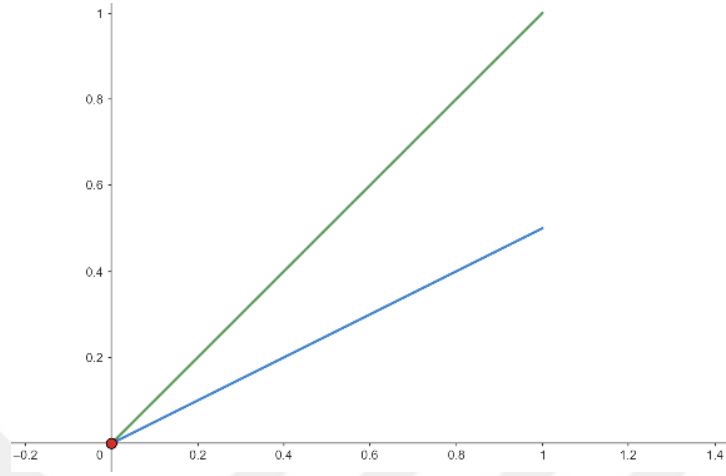
Şekil 3.4. $y = x^3$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

Örnek 3.2.1. $X = \mathbb{R}$ olsun. $\mathcal{T}x = x^2 + 9x + 16$ olacak biçimde $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü için, $F(\mathcal{T}) = \{-4\}$ dir.



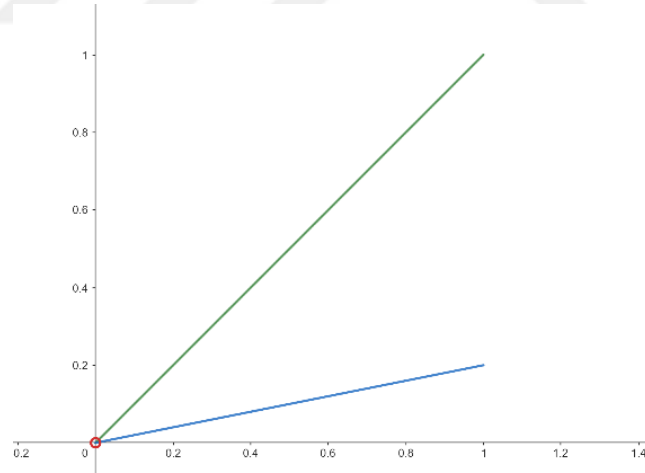
Şekil 3.5. $y = x^2 + 9x + 16$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

Örnek 3.2.2. $X = [0,1]$ olsun. $\mathcal{T}x = \frac{x}{2}$ olacak biçimde $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü için, $F(\mathcal{T}) = \{0\}$ dir.



Şekil 3.6. $\mathcal{T}x = \frac{x}{2}$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

Örnek 3.2.3. $X = (0,1)$ olsun. $\mathcal{T}x = \frac{x}{5}$ olacak biçimde $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü için, $F(\mathcal{T}) = \emptyset$ dir.



Şekil 3.7. $\mathcal{T}x = \frac{x}{5}$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

Yukarıdaki verilen örneklerde görüldüğü gibi, sabit noktasının varlığı tanımlandığı kümenin yapısına bağlı olduğu kadar, dönüşümün niteliğine de bağlıdır.

Tanım 3.2.2. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere; $\mathcal{T}$, X 'de bir öz dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha \geq 0$ reel sayısı var ise; T dönüşümü, Lipschitz koşunu sağlıyor denir. En küçük α sabitine ise; Lipschitz sabiti denir. Bu eşitsizlikte, $\alpha < 1$ alınırsa; T 'ye, büzülme dönüşümü ve $\alpha = 1$ alınırsa; T 'ye, genişlemeyen dönüşüm adı verilir. Burada $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa; T 'ye, büzülebilir dönüşüm denir. Tüm bu dönüşümler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilmektedir (Banach, 1922).

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm

Şimdi 1922 yılında Banach tarafından verilen sabit nokta teoremine değinelim.

Teorem 3.2.1. (X, ρ) tam metrik uzay olmak üzere; T , X 'de bir büzülme dönüşümü olsun. (X, ρ) uzayında; T dönüşümünün sabit noktası, tektir (Banach, 1922).

İspat. Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası alınsın.

$$Tx_{n-1} = x_n, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi $\{x_n\}$ dizinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. T , bir büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\begin{aligned} \rho(x_2, x_1) &= \rho(Tx_1, Tx_0) \leq \alpha \rho(x_1, x_0) \\ \rho(x_3, x_2) &= \rho(Tx_2, Tx_1) \leq \alpha \rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2 \rho(x_1, x_0) \\ &\vdots \\ \rho(x_{n+1}, x_n) &\leq \alpha^n \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için, $m > n$ iken

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) \\
&= \alpha^n (\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \dots + 1) \rho(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

sağlanır. $0 < \alpha < 1$ olduğundan; $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ bulunur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi, bir Cauchy dizisi olur. (X, ρ) uzayı tamlığından $\{x_n\}$ dizisi, bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsar. Şimdi $x_0 \in X$ noktasının sabit nokta olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\rho(Tx_0, x_0) &\leq \rho(Tx_0, x_n) + \rho(x_n, x_0) \\
&= \rho(Tx_0, Tx_{n-1}) + \rho(x_n, x_0) \\
&\leq \alpha \rho(x_0, x_{n-1}) + \rho(x_n, x_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken, $\rho(Tx_0, x_0) = 0$ olur; yani $Tx_0 = x_0$ bulunur. Son olarak, bu noktanın tekliği gösterilsin. Bunun için $x_0 \neq y$ ve $Ty = y$ olacak biçimde bir $y \in X$ noktasının var olduğu kabul edilsin.

$$\rho(x_0, y) = \rho(Tx_0, Ty) \leq \alpha \rho(x_0, y)$$

elde edilir. Bu durum $0 < \alpha < 1$ olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Banach (1922), tüm Lipschitz fonksiyonlarının sürekli olduğunu söylemiştir. Burada her $\varepsilon > 0$ için, $\rho(x, y) < \delta = \varepsilon/\alpha$ iken $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y) < \alpha \delta = \varepsilon$ olduğundan; T Lipschitz fonksiyonunun sürekli olduğu kolayca görülebilir. Yani her büzülme dönüşümü, süreklidir. Büzülme şartını sağlayıp sürekli olmayan fonksiyonlar için Kannan, Banach'ın farklı bir genelleştirmesini yapmıştır.

Tanım 3.2.4. (X, ρ) metrik uzay ve T, X 'de bir öz dönüşüm olmak üzere; her $x, y \in X$

$$\rho(Tx, Ty) \leq k[\rho(x, Tx) + \rho(y, Ty)]$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı bulunabiliyorsa; T dönüşümü, Kannan dönüşümü olarak adlandırılır (Kannan, 1968).

Teorem 3.2.2. (X, ρ) , tam metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir Kannan dönüşümü olmak üzere; $\mathcal{T}$, bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca; herhangi bir $x_0 \in X$ noktası için $\{\mathcal{T}^n x_0\}$ iterasyon dizisi de, tek olan sabit noktaya yakınsar (Kannan, 1968).

Tanım 3.2.5. (X, ρ) , metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir dönüşüm olmak üzere; eğer her $x, y \in X$

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k[\rho(x, \mathcal{T}y) + \rho(y, \mathcal{T}x)]$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı bulunabiliyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümü Chatterjea dönüşümü olarak adlandırılır (Chatterjea, 1972).

Teorem 3.2.3. (X, ρ) metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir Chatterjea dönüşümü olmak üzere; $\mathcal{T}$ 'nin tek bir $x \in X$ sabit noktası vardır (Chatterjea, 1972).

Yukarıdaki verilen büzülme tiplerindeki katsayıların $[0,1)$ 'de olduğu unutulmamalıdır. Şimdi vereceğimiz büzülmede eşitsizliğin sağ tarafındaki katsayı veya katsayılar toplamının $[1, \infty)$ 'de olduğu görülecektir. Bu tip büzölmeleri, V. Berinde (2003; 2003a; 2004) ilk olarak aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Tanım 3.2.6. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere; $\mathcal{T}$, X 'de bir öz dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ noktaları için,

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta\rho(x, y) + L\rho(y, \mathcal{T}x) \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ var ise $\mathcal{T}$ 'ye hemen hemen büzölme dönüşümü adı verilir. Metrik uzayın iii) şartından

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta\rho(x, y) + L\rho(x, \mathcal{T}y) \quad (3.2)$$

geçerlidir. $\mathcal{T}$ dönüşümünün hemen hemen büzölme dönüşümü olması için, (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri sağlanmalıdır (Berinde, 2003).

Teorem 3.2.4. (X, ρ) , bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir hemen hemen büzülme dönüşümü olmak üzere; her $x, y \in X$ noktaları için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta\rho(x, y) + L\rho(y, \mathcal{T}x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ varsa bu durumda $\mathcal{T}$, bir sabit noktaya sahiptir (Berinde, 2003).

Şimdiye kadar ele alınan büzülme tiplerinde sabit noktanın tek olduğu gösterildi. Ancak hemen hemen büzülme olarak adlandırdığımız büzülme tipinde sabit noktanın tekliği garanti edilemez. Hemen hemen büzülme dönüşümlerinde sabit noktanın tekliği için ek bir şarta ihtiyaç duyulmuştur. Aşağıdaki teoremden bu tip büzülme dönüşümlerinin sabit noktaların varlık ve tekliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Teorem 3.2.5. (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir hemen hemen büzülme dönüşümü olmak üzere; her $x, y \in X$ için,

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta_u\rho(x, y) + L_u\rho(x, \mathcal{T}x)$$

eşitsizliğini sağlayan $\delta_u \in [0,1)$ ve $L_u \geq 0$ varsa; $\mathcal{T}$ 'nin bir tek sabit noktası vardır (Berinde, 2003).

2004 yılında Berinde $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ kıyaslama fonksiyonu ile lineer olmayan tipte bir büzülme dönüşümünü aşağıdaki gibi vermiştir;

Tanım 3.2.7. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir dönüşüm olsun. $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir kıyaslama fonksiyonu ve her $x, y \in X$ için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \varphi(\rho(x, y)) + L\rho(x, \mathcal{T}y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L \geq 0$ varsa; $\mathcal{T}$ 'ye, hemen hemen φ -büzülme dönüşümü adı verilir (Berinde, 2003a).

Hemen hemen büzülme tipindeki tüm büzülme dönüşümleri aynı zamanda bir hemen hemen φ -büzülme dönüşümüdür (Berinde, 2003a).

Tanım 3.2.8. $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olmak üzere;

i_φ φ monoton artandır yani, $t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$;

ii_φ Her $t > 0$ için, $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^\infty$ sifıra yakınsayan bir diziye; φ fonksiyonuna kıyaslama fonksiyonu adı verilir.

Ayrıca, φ fonksiyonu i_φ koşulunu sağlıyor ve

iii_φ Her $t > 0$ için, $\sum_{n=0}^\infty \varphi^n(t)$ yakınsak ise; φ fonksiyonuna, (c) -kıyaslama fonksiyonu adı verilir (Berinde, 2004).

Teorem 3.2.6. (X, ρ) , bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e c -kıyaslama fonksiyonuyla hemen hemen büzülme dönüşümü olmak üzere; $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir kıyaslama fonksiyonu ve her $x, y \in X$ noktaları için,

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \varphi(\rho(x, y)) + L\rho(x, \mathcal{T}y)$$

sağlayan $L \geq 0$ varsa; $\mathcal{T}$ 'nin $z \in X$ sabit noktası vardır (Berinde, 2004).

Wardowski (2012) F -büzülme kavramını tanımlayarak Banach büzülme teoreminin genelleştirmelerinden birini vermiştir. Bu genelleştirme, F -büzülme dönüşümlerinin tam metrik uzaylarda tek bir sabit noktasının var olduğunu gösterir. İlk olarak F -büzülme kavramının tanımını ve bununla ilgili bazı örnekleri verelim. Devamında ise tanımlanan F -büzülme dönüşümü ile yapılan sabit nokta teoremlerine yer verelim.

$\mathcal{F}$, aşağıdaki $(F1) - (F3)$ şartlarını ve $\mathcal{F}^*$ 'da $(F1) - (F4)$ koşullarını gerçekleyen tüm $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi olsun.

$(F1)$ F kesin artandır. Yani $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için

$$\alpha < \beta \text{ olduğunda } F(\alpha) < F(\beta)$$

eşitsizliği sağlanır.

(F2) Pozitif sayıların $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$$

sağlanır.

(F3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sayısı vardır.

(F4) $\inf \mathcal{A} > 0$ eşitsizliğini sağlayan tüm $\mathcal{A} \subset (0, \infty)$ kümesi için $F(\inf \mathcal{A}) = \inf F(\mathcal{A})$ (Wardowski, 2012).

Tanım 3.2.9. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{T}$, X 'den X 'e bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\rho(x, y)) \quad (3.3)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\tau > 0$ mevcut ise; $\mathcal{T}$ 'ye, bir F -büzülme adı verilir (Wardowski, 2012).

Aşağıda $\mathcal{F}$ ailesine ait bazı örnekler verilecektir. Bu örneklerde büzülme dönüşümlerinin bazılarının bir F -büzülme olduğu görülür.

Örnek 3.2.4. $F_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ ile tanımlansın. Bu durumda $F_1 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer $\mathcal{T}$ bir F_1 -büzülme ise $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq e^{-\tau} \rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = 0$ olduğu durumda da her $x, y \in X$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. $L = e^{-\tau}$ sabiti ile $\mathcal{T}$ dönüşümü bir Lipschitz dönüşümdür. $L = e^{-\tau} < 1$ olduğunda $\mathcal{T}$ bir büzülme dönüşümü olur. Sonuç olarak, her büzülme dönüşümü bir F_1 -büzülme dönüşümüdür (Wardowski, 2012).

Örnek 3.2.5. $F_2: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(a) = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ şeklinde tanımlansın. Böylece $F_2 \in \mathcal{F}$ 'dir. $\mathcal{T}$ bir F_2 -büzülme ise $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \frac{1}{(1 + \tau\sqrt{\rho(x, y)})^2} \rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır (Wardowski, 2012).

Uyarı 3.2.1. Her F -büzülme dönüşümü aynı zamanda büzülebilir dönüşümdür. T dönüşümü bir F -büzülme ise $\rho(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ eşitsizliği sağlanır. Buradan her F -büzülme dönüşümü süreklidir (Wardowski, 2012).

Uyarı 3.2.2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olmak üzere her $a > 0$ için $F_1(a) \leq F_2(a)$ ve $\mathcal{G} = F_2 - F_1$ dönüşümü azalmayan ise bu durumda her F_1 -büzülme dönüşümü bir F_2 -büzülme dönüşümüdür. Uyarı 3.2.1'den $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{G}(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq \mathcal{G}(\rho(x, y))$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \tau + F_2(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) &= \tau + F_1(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) + \mathcal{G}(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \\ &\leq \tau + F_1(\rho(x, y)) + \mathcal{G}(\rho(x, y)) \\ &= \tau + F_2(\rho(x, y)) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Wardowski, 2012).

Şimdi 2012 yılında Wardowski tarafından verilen teoremin ifadesi ve ispatını verilecektir.

Teorem 3.2.7. (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}, X$ 'den X 'ye dönüşümü F -büzülme olmak üzere $\mathcal{T}$ 'nin tek bir sabit noktası mevcuttur. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{\mathcal{T}^n x_0\}$ dizisi $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Wardowski, 2012).

İspat. Öncelikle $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu kabul edip tekliğini gösterelim. z ile w , $\mathcal{T}$ 'nin farklı iki sabit noktası olmak üzere buradan $\rho(z, w) = \rho(\mathcal{T}z, \mathcal{T}w) > 0$ dır. (3.3) eşitsizliğinden

$$\tau \leq F(\rho(z, w)) - F(\rho(\mathcal{T}z, \mathcal{T}w)) = 0 \quad (3.4)$$

yazılır ve çelişki elde edilir. Buradan $\mathcal{T}$ 'nin sabit noktası var ise tektir. Şimdi $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu inceleyelim. $x_0 \in X$ noktası keyfî olmak üzere her $n \geq 0$ tam sayısı için $x_{n+1} = \mathcal{T}x_n$ eşitliğini sağlayan X 'de bir $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. $\gamma_n = \rho(x_{n+1}, x_n)$ olsun.

Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise, buradan $\mathcal{T}x_{n_0} = x_{n_0}$ olur. Böylece ispat biter. $\forall n \geq 0$ tam sayısı için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu varsayalım. O halde $\forall n \geq 0$ tam sayı için $\gamma_n > 0$ olduğundan (3.4) eşitsizliği sağlandığından

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \dots \leq F(\gamma_0) - n\tau \quad (3.5)$$

yazılır. (3.5)'de $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

dir. (F2)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$$

dır. O halde (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{\ell} F(\gamma_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $\ell \in (0,1)$ vardır. (3.5)'de her $n \geq 0$ tam sayısı için

$$\gamma_n^{\ell} F(\gamma_n) - \gamma_n^{\ell} F(\gamma_0) \leq -\gamma_n^{\ell} n\tau \leq 0 \quad (3.6)$$

olur. (3.6)'da $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{\frac{1}{k}} n = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.7)'den $\forall n \geq n_1$ için $\gamma_n^{\frac{1}{k}} n \tau \leq 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\forall n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$$

elde edilir. Buradan $m > n \geq n_1$ sağlayan her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

olup $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisi belirtir. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır ve $\mathcal{T}$ 'nin sürekliliği kullanılırsa

$$\rho(z, \mathcal{T}z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, \mathcal{T}x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

dır. Böylece $z = \mathcal{T}z$ olup ispat tamamlanır.

3.3. Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler için Sabit Nokta Teorisi

Bu bölümde küme değerli dönüşümlerin tanımı verilecektir. Ayrıca Pompeiu-Hausdorff metriği ve bu metriğin bazı özellikleri irdelenecektir.

Tanım 3.3.1 X, Y boştan farklı küme olmak üzere $\mathcal{T} \subseteq X \times Y$ ise $\mathcal{T}$ 'ye X 'den Y 'ye bir küme değerli (çoğul değerli) dönüşüm adı verilir ve $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilir. $\mathcal{P}(Y)$ ise Y 'nin boştan farklı tüm alt kümelerinin sınıfını gösterir.

$\mathcal{T}: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ dönüşüm ve $x \in X$ olmak üzere $\mathcal{T}$ 'nin x noktasındaki görüntüsü

$$\mathcal{T}x = \{y \in Y: (x, y) \in \mathcal{T}\}$$

kümesidir. $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ küme değerli dönüşümünün tersi

$$(x, y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{T}^{-1}$$

ile tanımlanır. Yine $\mathcal{A} \subseteq X$ için $\mathcal{A}$ 'nın $\mathcal{T}$ küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsü

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{T}x$$

kümesidir. Ayrıca

$$\bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{T}x = \{y \in Y: \mathcal{T}^{-1}(y) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$$

dır. Gerçekten,

$$u \in \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{T}x$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{A} \text{ için } u \in \mathcal{T}x$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \text{ için } (x, u) \in \mathcal{T}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \text{ için } x \in \mathcal{T}^{-1}(u)$$

$$\Leftrightarrow T^{-1}(u) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow u \in \{y \in Y : T^{-1}(y) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$$

elde edilir. $\mathcal{B} \subseteq Y$ için $\mathcal{B}$ 'nin T^{-1} altındaki görüntüsü (veya T altındaki ters görüntüsü)

$$T^{-1}(\mathcal{B}) = \bigcup_{y \in \mathcal{B}} T^{-1}(y)$$

kümesidir. Benzer şekilde

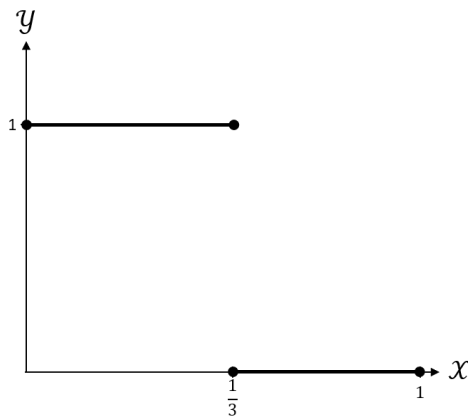
$$\bigcup_{y \in \mathcal{B}} T^{-1}(y) = \{x \in X : Tx \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$$

ifadesinin sağlandığı gösterilebilir (Nadler, 1969).

Örnek 3.3.1. $X = [0,1]$ ve T_a , X 'den X 'e dönüşüm olmak üzere;

$$T_a(x) = \begin{cases} 1 & , x < \frac{1}{3} \\ \{0,1\} & , x = \frac{1}{3} \\ 0 & , x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T_a , küme değerli bir dönüşümdür.



Şekil 3.8. $T_a x$ dönüşümünün grafiği

Tanım 3.3.2. $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ var ise x_0 noktasına, T 'nin sabit noktası adı verilir. $F(T)$ kümesi, T 'nin tüm sabit noktalarının kümesini gösterir. Yani

$$F(T) = \{x \in X: x \in Tx\}$$

şeklinde ifade edilir (Nadler, 1969).

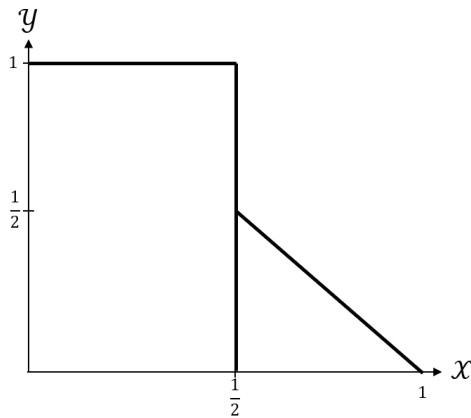
Örnek 3.3.1. $X = [0,1]$ ve $T_\ell: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü olmak üzere;

$$T_\ell x = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ [0,1-x] & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} T_\ell(0) &= \{1\} & , \quad T_\ell\left(\frac{3}{4}\right) &= \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ T_\ell\left(\frac{1}{2}\right) &= [0,1] & , \quad T_\ell\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) &= [0,1] \\ T_\ell\left(\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) &= \{1\} & , \quad T_\ell\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{2} \in T_\ell \frac{1}{2} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{2}$, T_ℓ 'nin bir sabit noktasıdır (Nadler, 1969).



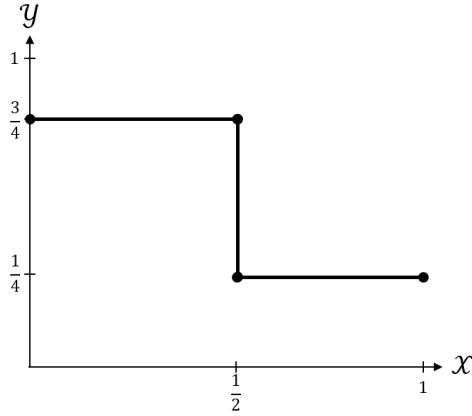
Şekil 3.9. $T_\ell x$ dönüşümünün grafiği

Tanım 3.3.3. X ve Y , herhangi iki topolojik uzay olmak üzere; $T: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, küme değerli bir dönüşüm olsun. Y 'deki her açık kümenin ters görüntüsü eğer X 'de açık ise T 'ye alttan yarı sürekli dönüşüm, Y 'deki her kapalı kümenin ters görüntüsü X 'de kapalı oluyorsa, T 'ye üstten yarı sürekli dönüşüm denir. Buradan verilen bir küme değerli dönüşüm alttan ve üstten yarı sürekli dönüşüm oluyorsa bu dönüşüme süreklidır denir (Nadler, 1969).

Örnek 3.3.2. $\mathcal{T}_c: [0,1] \rightarrow \mathcal{P}([0,1])$

$$\mathcal{T}_c x = \begin{cases} \left\{ \frac{3}{4} \right\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ \left\{ \frac{1}{4} \right\} & , \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

ile tanımlansın $\mathcal{T}_c$ dönüşümü üstten yarı sürekli dönüşümdür. Fakat alttan yarı sürekli değildir: $\mathcal{V} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$ açık kümesi alındığında $T^{-1}(\mathcal{V}) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ olduğundan açık küme değildir. Burada her kapalı kümenin ters görüntüsünde kapalıdır (Nadler, 1969).



Şekil 3.10. $\mathcal{T}_c x$ dönüşümünün grafiği

Örnek 3.3.3. $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$\mathcal{T}x = \begin{cases} \{0\} & , \quad x = 0 \\ [-1,1] & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\mathcal{T}$ dönüşümü alttan yarı sürekli dir ama üstten yarı sürekli dönüşüm değildir. Çünkü açık kümenin ters görüntüsü sadece 3 durumda olabilir: Bunlar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}$ veya $\emptyset$ dur. Buradan $\mathcal{T}$ dönüşümü alttan yarı sürekli olur. Diğer taraftan $\mathcal{K} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kapalı kümesi alındığında $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{K}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olduğundan kapalı bir küme değildir. Böylece $\mathcal{T}$ dönüşümünün üstten yarı sürekli olmadığı görülür (Nadler, 1969).

(X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere;

- $\kappa(X)$, X 'in boştan farklı tüm kompakt alt kümelerinin sınıfı,
- $\mathcal{CB}(X)$, X 'in boştan farklı tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfı,
- $\mathcal{C}(X)$, X 'in boştan farklı tüm kapalı alt kümelerin sınıfı,
- $\mathcal{B}(X)$, X 'in boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı olsun.

Buradan $\kappa(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$ ve $\kappa(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ oldukları açıktır. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$ kümeleri için

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\rho(a, b) : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

olmak üzere

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{x \in \mathcal{A}} \{\mathcal{D}(x, \mathcal{B})\} = \sup_{x \in \mathcal{A}} \inf_{y \in \mathcal{B}} \rho(x, y)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} \\ &= \max\left\{\sup_{x \in \mathcal{A}} \inf_{y \in \mathcal{B}} \rho(x, y), \sup_{x \in \mathcal{B}} \inf_{y \in \mathcal{A}} \rho(x, y)\right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır (Nadler, 1969).

Örnek 3.3.4. $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış uzayında $\mathcal{A} = [2, 4], \mathcal{B} = [6, \infty]$ kümeleri göz önüne alındığında

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 4, \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \infty$$

bulunduğundan

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} = \infty$$

bulunur. δ 'nın $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ olduğu görülebilir. Dahası $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı δ ve $\mathcal{H}$, reel değerli fonksiyonlar değildir (Nadler, 1969).

Uyarı 3.3.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kümeleri (X, ρ) metrik uzayının sınırlı alt kümeleriye $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ ve $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ birer reel sayıdır. Bu durumda $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ üzerinde tanımlı δ ve $\mathcal{H}$, reel değerli fonksiyonlardır (Nadler, 1969).

Örnek 3.3.5. $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış uzayında $\mathcal{A} = [3, 8]$ ve $\mathcal{B} = (3, 8)$ kümeleri göz önüne alındığında

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$$

bulunduğundan

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} = 0$$

dir. $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ olduğu halde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 'den farklıdır. Dolayısıyla $H: \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metrik şartlarını sağlamadığı için bir metrik değildir. (Nadler, 1969).

Teorem 3.3.1. (X, ρ) bir metrik uzay, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})| : x \in X\}$$

dir (Nadler, 1969).

İspat. Her $x \in X$ ve her $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ noktaları için,

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) \leq \rho(x, \mathcal{A}) + \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

yazılabilir. $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ olduğundan

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) \leq \rho(x, \mathcal{A}) + \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

eşitsizliği her $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ için de geçerlidir. Buradan

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) \leq \mathcal{D}(x, \mathcal{B}) + \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

veya

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B}) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{B}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{A}) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

elde edilir. Buradan her $x \in X$ için

$$|\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})| \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

olur. Ve buradan;

$$\sup_{x \in X} |\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})| \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (3.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) &= \sup\{\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}): \mathcal{A} \in \mathcal{B}\} \\ &= \sup\{\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) - \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{A}): \mathcal{A} \in \mathcal{B}\} \\ &\leq \sup\{\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B}): x \in X\} \\ &\leq \sup\{|\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})|: x \in X\} \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sup\{ |\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})| : x \in \mathcal{X} \}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} \leq \sup\{ |\mathcal{D}(x, \mathcal{A}) - \mathcal{D}(x, \mathcal{B})| : x \in X \} \quad (3.9)$$

bulunur. O halde (3.8) ve (3.9)'dan istenilen eşitlik elde edilir.

Uyarı 3.3.1. Reel sayıların boş kümeden farklı, üstten sınırlı iki alt kümesi $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ olmak üzere

$$\sup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \max\{\sup \mathcal{A}, \sup \mathcal{B}\}$$

dir.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow \sup \mathcal{A} \leq \sup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$$

ve

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow \sup \mathcal{B} \leq \sup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$$

eşitsizlikleri sağlandığından

$$\max\{\sup \mathcal{A}, \sup \mathcal{B}\} \leq \sup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \quad (3.10)$$

bulunur. $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ olmak üzere $x \in \mathcal{A}$ veya $x \in \mathcal{B}$ dir. Dolayısıyla $x \leq \sup \mathcal{A}$ veya $x \leq \sup \mathcal{B}$ eşitsizlikleri sağlanır. Sonra ise

$$x \leq \max\{\sup \mathcal{A}, \sup \mathcal{B}\}$$

olur. Buradan o halde (3.10) ve (3.11)'den

$$\sup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq \max\{\sup \mathcal{A}, \sup \mathcal{B}\} \quad (3.11)$$

ifadesine ulaşılır. (Nadler, 1969).

δ 'nın bazı özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.3.1. (X, ρ) metrik uzay, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{B}(X)$ olmak üzere aşağıdaki 4 özellikler sağlanır.

- a) $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$,
- b) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,
- c) $\delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$,
- d) $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ (Nadler, 1969).

İspat. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{B}(X)$ olsun

a)

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathcal{A}} \{D(x, \mathcal{B})\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } x \in \mathcal{A} \text{ için } D(x, \mathcal{B}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{her } x \in \mathcal{A} \text{ için } x \in \overline{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

b)

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ olsun. $\forall x \in X$ için $D(x, \mathcal{C}) \leq D(x, \mathcal{B})$ dir. $\forall x \in \mathcal{A}$ için de $D(x, \mathcal{C}) \leq D(x, \mathcal{B})$ eşitsizliği gerçekleştiğinden $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ifadesine ulaşılır.

c)

Uyarı 3.3.1. göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \sup_{x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \{D(x, \mathcal{C})\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{A}} \{D(x, \mathcal{C})\}, \sup_{x \in \mathcal{B}} \{D(x, \mathcal{C})\} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

d)

$a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ ve $c \in \mathcal{C}$ olsun. Buradan

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$$

olur. Buradan $b \in \mathcal{B}$ üzerinden infimum alındığında

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) \leq \rho(a, c) + \mathcal{D}(c, \mathcal{B})$$

elde edilir. $\mathcal{D}(c, \mathcal{B}) \leq \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ sağlandığından

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) \leq \rho(a, c) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

elde edilir. Elde edilen ifade de $c \in \mathcal{C}$ üzerinden infimum alındığında

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) \leq \mathcal{D}(a, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

dir. Diğer taraftan $\mathcal{D}(a, \mathcal{C}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ sağlandığında

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

olur. Böylece $a \in \mathcal{A}$ üzerinden supremum alındığında

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

ifadesine ulaşılır.

Uyarı 3.3.2. Önerme 3.3.1. de F kümesi kapalıysa

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

elde edilir (Nadler, 1969).

Önerme 3.3.2. (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere; $\mathcal{H}, \mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metrik uzaydır (Nadler, 1969).

İspat. $\mathcal{H}$ 'in $\mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X)$ üzerinde tanımlı olan fonksiyon bir reel değerli bir fonksiyondur. Tanım gereği

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$$

dır. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{CB}(X)$ olsun. Buradan

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \text{ ve } \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ ve } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$$

dir. $a, b, c, d \in [0, \infty)$ için

$$\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$$

eşitsizliğinden yararlanılırsa $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{CB}(X)$ kümeleri için

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\}$$

$$\leq \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \delta(\mathcal{C}, \mathcal{A})\}$$

$$\leq \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \delta(\mathcal{C}, \mathcal{A})\} + \max\{\delta(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$$

$$= \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathcal{H}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

ifadesine ulaşılır. Buradan $\mathcal{H}: \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir metrik uzaydır ve Pompeiu-Hausdorff metriği olarak adlandırılır.

Pompeiu-Hausdorff metrik uzayının ρ 'ye bağlı olduğu bir örnekle görülebilir. Dahası, (X, ρ) tam metrik uzaysa $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ ve $(\kappa(X), \mathcal{H})$ metrik uzayları da tam metrik uzaylardır (Nadler, 1969).

Örnek 3.3.6. $X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\rho_1(x, y) = |x - y|$ ve

$$\rho_2(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

metriklerini alalım. $\mathcal{A} = [0,4]$, $\mathcal{B} = [5,8]$ kümeleri için $\mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 4$, $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$ elde edilir. Buradan ρ_1 ve ρ_2 metriğine göre her iki küme de kapalı ve sınırlıdır (Nadler, 1969).

Lemma 3.3.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\rho(a, b) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \varepsilon$$

sağlayan bir $b \in \mathcal{B}$ mevcuttur (Nadler, 1969).

İspat. $a \in \mathcal{A}$ noktası alındığında

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) = \inf\{\rho(a, y) : y \in \mathcal{B}\}$$

dir. İnfimumun tanımından her $\varepsilon > 0$ için,

$$\rho(a, b) \leq \mathcal{D}(a, \mathcal{B}) + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $b \in \mathcal{B}$ mevcuttur.

$$\mathcal{D}(a, \mathcal{B}) \leq \delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

sağlandığından her $\varepsilon > 0$ için,

$$\rho(a, b) \leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \varepsilon$$

şeklinde bir $b \in \mathcal{B}$ vardır.

Lemma 3.3.1.'i aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Lemma 3.3.2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in \mathcal{A}$ olmak üzere her $q > 1$ için

$$\rho(a, \mathcal{B}) \leq q\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

sağlayan bir $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ vardır (Nadler, 1969).

İspat. $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ olduğunda $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ dir. Buradan $\mathcal{B}$, a olarak alınırsa her $q > 1$ için

$$\rho(a, \mathcal{B}) \leq q\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

sağlayan bir $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ vardır. $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0$ olsun. Böylece

$$\varepsilon = (q - 1)\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0$$

ile alınırsa Lemma 3.3.1.'den $q > 1$ için

$$\begin{aligned} \rho(a, \mathcal{B}) &\leq \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \varepsilon \\ &= \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + (q - 1)\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ &\leq q\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

sağlayan bir $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ mevcuttur.

Önerme 3.3.3. (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{CB}(X)$ için

$$\mathcal{H}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \leq \max\{\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{D})\}$$

ifadesi sağlanır. (Nadler, 1969).

İspat. Önerme 3.3.1 göz önüne alınırsa

$$\delta(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1) = \max\{\delta(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1), \delta(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1)\}$$

eşitliğinden

$$\delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) = \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D})\}$$

yazılabilir ve

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \Rightarrow \delta(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \leq \delta(\mathcal{B}_1)$$

özelliğinden

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) &= \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D})\} \\ &\leq \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{D})\} \\ &\leq \max\{\delta(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \delta(\mathcal{B}, \mathcal{D})\} \\ &\leq \max\{\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{D})\} \end{aligned}$$

olur.

$$\delta(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \max\{\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{D})\}$$

eşitliği gösterebilir. $\mathcal{H}$ 'nin tanımını gereği

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) &= \max\{\delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}), \delta(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})\} \\ &\leq \max\{\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{D})\} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Sabit nokta teoremi küme değerli fonksiyonlarda ilk olarak Nadler (1969) tarafından verilmiştir. Nadler'in teoremi aynı zamanda Banach'ın teoreminin küme değerli fonksiyonlara bir genişlemesidir. İlk olarak küme değerli Lipschitz dönüşümü ve küme değerli büzülme kavramlarını verelim. Daha sonra Nadler'in vermiş olduğu Banach sabit nokta teoreminin küme değerli versiyonunu verelim.

Tanım 3.3.4. (X, ρ) , bir metrik uzay olmak üzere; $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$, küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k\rho(x, y)$$

şartını sağlayan bir $k > 0$ sabiti var ise T 'ye Lipschitz dönüşümü ve k sayısına ise T 'nin Lipschitz sabiti denir. $k < 1$ ise T 'ye küme değerli büzülme dönüşümü, $k = 1$ ise genişlemeyen küme değerli dönüşüm denir (Nadler, 1969).

Teorem 3.3.2. (X, ρ) bir tam metrik uzay olmak üzere. Eğer $T: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ küme değerli büzülme dönüşümü ise T 'nin X de bir sabit noktası mevcuttur (Nadler, 1969).

İspat. T 'nin Lipschitz sabiti $0 < k < 1$ olmak üzere keyfi $x_0 \in X$ için $x_1 \in Tx_0$ olsun.

Lemma 3.3.1. gereğince

$$\rho(x_1, x_2) \leq \mathcal{H}(Tx_0, Tx_1) + k$$

sağlayan bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine

$$\rho(x_2, x_3) \leq \mathcal{H}(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

sağlayan bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. Devam edilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

olacak biçimde X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &\leq \mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq k \rho(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k[\mathcal{H}(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\ &= k\mathcal{H}(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + 2k^n \\ &\leq k^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\ &\vdots \\ &\leq k^n \rho(x_0, x_1) + nk^n \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$$

olur. Buradan $\{x_n\}$ dizisinin (X, ρ) 'de bir Cauchy dizisi olur. (X, ρ) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Buradan

$$\mathcal{D}(x_{n+1}, Tz) \leq \mathcal{H}(Tx_n, Tz) \leq k\rho(x_n, z)$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\mathcal{D}(z, Tz) = 0$$

olur. Yani $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. z, T 'nin bir sabit noktası olur.

Önceki bölümde tek değerli dönüşümler için F -büzülme tanımı ele alınmıştı. Şimdi F -büzülme dönüşümlerinin küme değerli değerlisini verelim.

Tanım 3.3.5. (X, ρ) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{H}(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(\mathcal{H}(Tx, Ty)) \leq F(\rho(x, y)) \quad (3.12)$$

sağlayacak bir $\tau > 0$ var ise; T 'ye, küme değerli F -büzülme denir (Altun ve ark., 2015).

Teorem 3.3.3. (X, ρ) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$, küme değerli F -büzülme olmak üzere; T , bir sabit noktaya sahiptir (Altun ve ark., 2015).

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Tüm $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ seçilir. $x_1 \in Tx_1$ ise x_1, T 'nin sabit bir noktasıdır ve böylece ispat tamamlanmıştır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $\mathcal{D}(x_1, Tx_1) > 0$ dır. Diğer taraftan $\mathcal{D}(x_1, Tx_1) \leq \mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_1, Tx_1)) \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1))$$

elde edilir. (3.12) eşitsizliğinden

$$F(\mathcal{D}(x_1, Tx_1)) \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)) \leq F(\rho(x_0, x_1)) - \tau \quad (3.13)$$

Tx_1 kompakt olduğundan, $\rho(x_1, x_2) = \mathcal{D}(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. (3.13)'den

$$F(\rho(x_1, x_2)) \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)) \leq F(\rho(x_0, x_1)) - \tau$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu işleme devam edilirse tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(\rho(x_n, x_{n+1})) \leq F(\rho(x_n, x_{n-1})) - \tau \quad (3.14)$$

olacak biçimde X 'te bir $\{x_n\}$ dizisi bulunur. Eğer $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olan $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise o zaman x_{n_0} , T 'nin bir sabit noktasıdır ve böylece ispat biter. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin Tx_n$ olduğunu varsayalım. $\gamma_n = \rho(x_{n+1}, x_n)$ olsun. Ardından, tüm n için bir $\gamma_n > 0$ ve (3.14) kullanılarak aşağıdakiler geçerlidir:

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \dots \leq F(\gamma_0) - n\tau \quad (3.15)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.15) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

dir. (F2)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$$

dır. (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{\ell} F(\gamma_n) = 0$$

sağlayan bir $\ell \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.15)'de her $n \geq 0$ tam sayısı için

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq -\gamma_n^k n\tau \leq 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16)'dan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^k n = 0 \quad (3.17)$$

dir. Dolayısıyla (3.17)'den $\forall n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ sağlayan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Buradan $\forall n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$$

elde edilir. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

olup $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan (3.12)

eşitsizliğinden $\mathcal{H}(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

olduğundan $\forall x, y \in X$ için

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \rho(x, y)$$

olur. O zaman

$$\mathcal{D}(x_{n+1}, Tz) \leq \mathcal{H}(Tx_n, Tz) \leq \rho(x_n, z)$$

olacağından $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\mathcal{D}(z, Tz) = 0$ bulunur. Buradan $z \in Tz$ olduğundan T 'nin X 'de bir sabit noktası mevcuttur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi de F -büzülme dönüşümlerinin genelleştirilmiş küme değerli versiyonunu verelim.

Tanım 3.3.6. (X, ρ) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{H}(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(\mathcal{H}(Tx, Ty)) \leq F(\mathcal{M}(x, y)) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{M}(x, y) = \max \left\{ \rho(x, y), \mathcal{D}(x, Tx), \mathcal{D}(y, Ty), \frac{1}{2} [\mathcal{D}(x, Ty) + \mathcal{D}(y, Tx)] \right\}$$

sağlayan bir $\tau > 0$ var ise; T 'ye, genelleştirilmiş küme değerli F -büzülme denir (Acar ve ark., 2014).

Teorem 3.3.4. (X, ρ) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ genelleştirilmiş küme değerli F -büzülme olmak üzere T veya F sürekli ise T 'nin X 'de bir sabit noktası mevcuttur. (Acar ve ark., 2014).

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Tüm $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ seçilir. $x_1 \in Tx_1$ ise x_1, T 'nin sabit bir noktasıdır ve böylece ispat tamamlanmıştır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $\mathcal{D}(x_1, Tx_1) > 0$ dır. $\mathcal{D}(x_1, Tx_1) \leq \mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_1, Tx_1)) \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1))$$

elde edilir. Bu nedenle (3.18)'i kullanarak

$$\begin{aligned}
& F(\mathcal{D}(x_1, Tx_1)) \\
& \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)) \leq F(\mathcal{M}(x_0, x_1)) - \tau \\
& = F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_0, Tx_0), \mathcal{D}(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_0, Tx_1) + \mathcal{D}(x_1, Tx_0)\}\right\}\right) - \tau \\
& \leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}\mathcal{D}(x_0, Tx_1)\right\}\right) - \tau \\
& \leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}[\rho(x_0, x_1) + \mathcal{D}(x_1, Tx_1)]\right\}\right) - \tau \\
& \leq F(\max\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, Tx_1)\}) - \tau \\
& = F(\rho(x_0, x_1)) - \tau.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Tx_1 kompakt olduğundan, $x_2 \in Tx_1$ 'i $\rho(x_1, x_2) = \mathcal{D}(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde elde edilir. (3.19)'den

$$F(\rho(x_1, x_2)) \leq F(\mathcal{H}(Tx_0, Tx_1)) \leq F(\rho(x_0, x_1)) - \tau$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu işleme devam edilirse, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(\rho(x_n, x_{n+1})) \leq F(\rho(x_n, x_{n-1})) - \tau \tag{3.20}$$

olacak biçimde X 'te bir $\{x_n\}$ dizisi mevcuttur. $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olan $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise buradan x_{n_0} , T 'nin bir sabit noktasıdır ve buradan ispat biter. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin Tx_n$ olduğunu varsayalım. $\gamma_n = \rho(x_{n+1}, x_n)$ olsun. Ardından, tüm n için bir $\gamma_n > 0$ ve (3.20)'i kullanılarak aşağıdakiler geçerlidir:

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \dots \leq F(\gamma_0) - n\tau \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21)'den $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

dir. (F2)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$$

dır. O halde (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0$$

sağlayan bir $k \in (0,1)$ mevcuttur. (3.21)'de her $n \geq 0$ tam sayısı için

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq -\gamma_n^k n\tau \leq 0 \quad (3.22)$$

olur. (3.22)'den $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^k n = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23)'den her $n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ sağlayan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$\forall n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$$

dir. $m > n \geq n_1$ olacak şekilde $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

olup $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ serisi yakınsak olduğundan X 'de $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ sağlayan bir $z \in X$ mevcuttur.

T sürekliyse $Tx_n \rightarrow Tz$ ve

$$\mathcal{D}(z, Tz) \leq \mathcal{H}(Tx_n, Tz),$$

yani $\mathcal{D}(z, Tz) = 0$ dır ve böylece $z \in Tz$ olup ispat tamamlanır.

Şimdi F 'nin sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda $z \in Tz$ olduğu iddia edilsin. Bunun tersini varsayalım yani $z \notin Tz$ olsun. Bu durumda bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve tüm $n_k \geq n_0$ için $\mathcal{D}(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. (Aksi taktide tüm $n \geq n_1$ için $x_n \in Tz$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır, bu da $z \in Tz$ anlamına gelir. Bu bir çelişkidir çünkü $z \notin Tz$ dir.) Tüm $n_k \geq n_0$ için $\mathcal{D}(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \tau + F(\mathcal{D}(x_{n_k+1}, Tz)) \\ & \leq \tau + F(\mathcal{H}(Tx_{n_k}, Tz)) \\ & \leq F(\mathcal{M}(x_{n_k}, z)) \\ & \leq F\left(\max\left\{\rho(x_{n_k}, z), \rho(x_{n_k}, x_{n_k+1}), \mathcal{D}(z, Tz), \frac{1}{2}[\mathcal{D}(x_{n_k}, Tz) + \rho(z, x_{n_k+1})]\right\}\right). \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$ limit alınırsa ve F 'nin sürekliliğini kullanarak $\tau + F(\mathcal{D}(z, Tz)) \leq F(\mathcal{D}(z, Tz))$ eşitsizliği elde edilir ve bu bir çelişkidir. $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmalarının ispatında büzülme şartı dikkate alınarak ilk olarak Picard iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilir. Sonrasında metrik uzayın tam olmasının kabulü ile Picard iterasyon dizisinin yakınsaklığının ispatlanması ve yakınsadığı noktanın tek bir sabit nokta olduğu gösterilir. Metriksel sabit nokta teorisinin temel yapısını oluşturan Banach Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen teoride, sabit noktanın var ve tek olmasının, ayrıca bununla beraber uygulamaya sahip olmasından birçok araştırmacı tarafından Banach Sabit Nokta Teoreminin genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu genelleştirmelerden biri, son yıllarda oldukça ilgi odağı haline gelen ortogonal metrik uzaylarda yapılan çalışmalar olmuştur. Banach Sabit Nokta Teoremi'nin ortogonal metrik uzaylardaki ilk uygulaması 2017 yılında Gordji ve arkadaşları (2017) tarafından verilmiştir. Ortogonal metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi'nin birçok genellemesi yapılmıştır (Bakınız, [5- 7, 19, 29]). Tezimizin orijinal sonuçlarını içeren bu bölümde ilk olarak ortogonal metrik uzay ele alınacaktır. Ortogonal metrik uzayda hemen hemen büzülmeyi sağlayan birçok fonksiyon bulunabilir. İlk sonucumuz ortogonal metrik uzaylarda F -büzülme kullanarak hemen hemen büzülmeler için sabit noktanın varlığı, tekliği araştırıldı ve ispatlandı. Böylece Acar ve Erdoğan tarafından 2022 yılında Creative Mathematics and Informatics isimli dergide “Some Fixed Point Results For Almost Contraction On Orthogonal Metric Space” adlı makale yayınlanmıştır. İkinci sonucumuzda ortogonal metrik uzaylarda Pompeiu-Hausdorff metriği yardımıyla F -büzülme kullanarak hemen hemen büzülme dönüşümü için sabit noktanın varlığı, tekliği araştırıldı ve ispatlandı. Böylece Acar ve Erdoğan tarafından 2023 yılında Fixed Point Theory isimli dergide “Generalized Multivalued F -Contraction On Orthogonal Metric Space” adlı makale kabul edilmiştir.

4.1. Ortogonal Metrik Uzaylar

Tanım 4.1.1. Boştan farklı bir X kümesi ve $\perp \subseteq X \times X$ bir ikili bağıntısı olmak üzere ‘ $\perp$ ’ bağıntısı

$$\exists x_0 \in X; (\forall y \in X, x_0 \perp y) \text{ ya da } (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

koşulunu sağlıyorsa X ortogonal küme ($\mathcal{O}$ -küme) olarak adlandırılır ve $(X, \perp)$ ile gösterilir. Burada x_0 elemanına ortogonal eleman denir (Gordji ve ark., 2017).

Ortogonal kümelere örnek olarak aşağıdaki çeşitli örnekleri verebiliriz.

Örnek 4.1.1. X dünyadaki bütün insanların kümesi olsun. $x \perp y$ bağıntısı x 'in, y 'ye kan verebilmesi olarak tanımlansın.

Kan grubu	Kan verebilen gruplar	Kan alabilen gruplar
$A +$	$A + AB +$	$A + A - 0 + 0 -$
$0 +$	$0 + A + B + AB +$	$0 + 0 -$
$B +$	$B + AB +$	$B + B - 0 + 0 -$
$AB +$	$AB +$	Herkes
$A -$	$A + A - AB + AB -$	$A - 0 -$
$0 -$	Herkes	$0 -$
$B -$	$B + B - AB + AB -$	$B - 0 -$
$AB -$	$AB + AB -$	$AB - B - 0 - A -$

Tablo 4.1. Kan grupları

Tablo 4.1'e göre x_0 , $0 -$ kan gruplarına sahip bir insan olarak alınırsa her $y \in X$ için, $x_0 \perp y$ elde edilir. Böylece $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. Bu ortogonal kümede x_0 tek değildir. Örneğin x_0 , $AB +$ kan grubuna sahip bir insan ise her $y \in X$ için $y \perp x_0$ bağıntısı vardır (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.2. $X = \mathbb{Z}$ olsun. $m \perp n$ bağıntısı $k \in \mathbb{Z}$ için $m = kn$ şeklinde tanımlasın. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $0 \perp n$ olduğundan $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.3. $X = [0, \infty)$ olsun. $x \perp y$ bağıntısı $xy \in \{x, y\}$ şeklinde tanımlasın. Ortogonal elemanları $x_0 = 0$ veya $x_0 = 1$ dir. Bu durumda $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.4. $X = [2, \infty)$ olsun. $x \leq y$ şeklinde tanımlı $x \perp y$ bağıntısına göre $x_0 = 2$ alınırsa $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.5. $X = \langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpım uzayı üzerinde $x \perp y$ bağıntısı $\langle x, y \rangle = 0$ şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için $0 \perp x$ olduğundan bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).

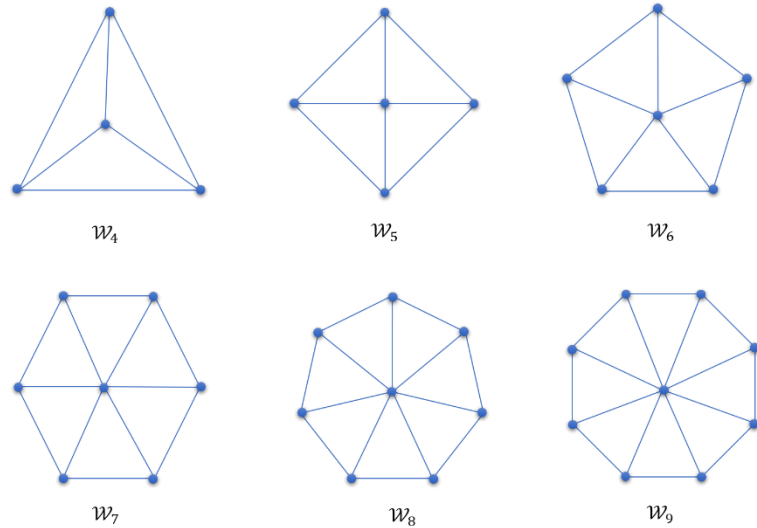
Örnek 4.1.6. (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere $\mathcal{T}$, X 'den X 'e Picard operatörü olsun. Bu durumda her $y \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n(y) = x^*$$

sağlayacak bir $x^* \in X$ noktası vardır. $x \perp y$ bağıntısı $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, \mathcal{T}^n(y)) = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.7. Graf teoride bir tekerlek (Wheel) grafi W_n , $n \geq 4$ olmak üzere n tane noktadan oluşan bir graftır öyle ki bu grafta $(n - 1)$ devirin tüm noktaları sadece tek bir nokta ile birbirine bağlıdır.

X , her $n \geq 4$ için W_n grafinin tüm noktalarından oluşan bir küme olmak üzere $a, b \in X$ için $a \perp b$ bağıntısı, a dan b ye giden bir yol olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Gordji ve ark., 2017).



Şekil 4.1. Tekerlek grafi

Örnek 4.1.8. $(G, *)$ bir grup olsun. Her $x, y \in G$ için

$$x \perp_1 y: \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$$

$$x \perp_2 y: \Leftrightarrow x * y = e$$

bağıntıları tanımlansın. Burada x^{-1} , x in tersi ve e , G grubunun birim elemanıdır. $(G, \perp_1)$ ve $(G, \perp_2)$ ortogonal küme oldukları açıktır (Baghani ve ark., 2016).

Örnek 4.1.9. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ -cebiri olmak üzere $\forall A, B \in \mathcal{A}$ kümeleri için

$$A \perp B: \Leftrightarrow A \subseteq B$$

olmak üzere $(\mathcal{A}, \perp)$ ortogonal kümedir (Baghani ve ark., 2016).

Örnek 4.1.10. $S_n, \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin σ permütasyonlarının kümesi olsun. σ 'da ki elemanların sayısı, $\sigma(k) > \sigma(k+1)$ olacak şekilde k elemanlarının sayısıdır. $\sigma \perp \mu: \Leftrightarrow \sigma = \mu$ ya da μ , σ 'dan fazla permüte elemana sahiptir. Şeklinde tanımlı bağıntıya göre $(S_n, \perp)$ bir ortogonal kümedir (Baghani ve ark., 2016).

Örnek 4.1.11. $(L, \perp_L)$ ve $(U, \perp_U)$ ayrık iki ortogonal küme olsun. $P = L \cup U$ kümesi üzerinde

$$a \perp b: \Leftrightarrow \{a \in L \text{ ve } b \in U\} \text{ ya da } \{a, b \in L \text{ ve } a \perp_L b\} \text{ ya da } \{a, b \in U \text{ ve } a \perp_U b\}$$

tanımlı bağıntısına göre $(P, \perp)$ bir ortogonal kümedir. Ayrıca L ve U 'nun ortogonal elemanları, P 'nin ortogonal elemanlarıdır (Baghani ve ark., 2016).

Tanım 4.1.2. Bir $(X, \perp)$ ortogonal kümesindeki $\{x_n\}$ dizisi

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x_n \perp x_{n+1}) \text{ ya da } (\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \perp x_n)$$

koşullarından birisini sağlıyorsa $\{x_n\}$ dizisine ortogonal dizi denir (Baghani ve ark., 2016).

Tanım 4.1.3. $(X, \perp)$ bir ortogonal küme (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere $(X, \perp, \rho)$ üçlüsüne ortogonal metrik uzay adı verilir.

Tanım 4.1.4. $(X, \perp, \rho)$ ortogonal metrik uzay ve f, X 'den X 'e bir dönüşüm olmak üzere X 'de her $\{a_n\}$ dizisi için $a_n \rightarrow a$ iken $f(a_n) \rightarrow f(a)$ oluyorsa f dönüşümüne $a \in X$ noktasında ortogonal sürekli dönüşümler denir. f her $a \in X$ noktasında ortogonal sürekli ise f dönüşümüne ortogonal süreklidir ($\perp$ -sürekli) adı verilir (Gordji ve ark., 2017).

Her sürekli dönüşüm ortogonal ($\perp$ -sürekli) süreklidir fakat tersi geçerli değildir. Bir sonraki örnekte ortogonal sürekli bir dönüşümün sürekli olması gerekmediği gösterilecektir.

Örnek 4.1.13. $X = \mathbb{R}$ üzerinde

$$x \perp y: \Leftrightarrow x = 0 \text{ ya da bir } n \in \mathbb{Z} \text{ için } x, y \in \left(n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right)$$

bağıntısı tanımlansın. $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü $f(x) = [x]$ şeklinde tanımlansın. f dönüşümü ortogonal ($\perp$ -sürekli) süreklidir. Çünkü $\{x_k\}$ bir $x \in X$ noktasına yakınsayan X 'de keyfî bir ortogonal dizi olmak üzere aşağıdaki durumlar mevcuttur.

Durum 1. Her k için $x_k = 0$ ise $x = 0$ ve $f(x_k) = 0 = f(x)$ dir.

Durum 2. Bir k_0 için $x_{k_0} \neq 0$ ise her $k \geq k_0$ için $x_k \in \left(m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}\right)$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. Buradan $x \in \left[m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}\right]$ ve $f(x_k) = m = f(x)$ 'dir. O halde f dönüşümü ortogonal süreklidir. f dönüşümün sürekli olmadığı açıktır (Gordji ve ark., 2017).

Tanım 4.1.5. $(X, \perp)$ bir ortogonal küme olmak üzere $f: X \rightarrow X$ dönüşümü için

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

oluyorsa f dönüşümüne ortogonal koruyan ($\perp$ -koruyan) dönüşüm denir (Gordji ve ark., 2017).

Örnek 4.1.14. $X = \mathbb{R}$ üzerindeki bağıntı

$$x \perp y: \Leftrightarrow x = 0 \text{ ya da } 0 \neq y \in \mathbb{Q}$$

şeklinde olmak üzere $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f dönüşümü ortogonalliği koruyan bir dönüşüm değildir. Çünkü $0 \perp \sqrt{2}$ olmasına rağmen $f(0) = 1$ ve $f(\sqrt{2}) = 0$ olduğundan $f(0)$ ile $f(\sqrt{2})$ ortogonal değildir (Baghani ve ark., 2016).

Tanım 4.1.6. $(X, \perp, \rho)$ bir ortogonal metrik uzay olmak üzere X 'deki her Cauchy $\mathcal{O}$ -dizi yakınsak ise $(X, \perp, \rho)$ ye ortogonal tam metrik uzay ($\mathcal{O}$ -tam) denir (Gordji ve ark., 2017).

Her tam metrik uzay ortogonal tam metrik uzay olmasına rağmen tersi doğru değildir.

Örnek 4.1.15. $X = [0,1)$ kümesi üzerinde

$$x \perp y: \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \text{ya da } x = 0 \end{cases}$$

bağıntısı tanımlasın. $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. Öklid metriği ρ olmak üzere (X, ρ) tam metrik uzay değildir çünkü $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ve $a_m = \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ alınırsa

$$\rho(a_n, a_m) = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \in \mathcal{X}$$

olduğundan a_n bir Cauchy dizisidir fakat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \in X$$

olduğundan bu Cauchy dizisi yakınsak değildir yani (X, ρ) tam metrik uzay değildir. Fakat $(X, \perp, \rho)$ ortogonal tamdır. $\{x_k\}$, X de keyfi bir Cauchy ortogonal dizisi ise $\{x_k\}$ 'nin her $n \geq 1$ için $\{x_{k_n}\} = 0$ olacak şekilde bir $\{x_{k_n}\}$ bir alt dizisi vardır veya $n \geq 1$ için $\{x_{k_n}\} \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde $\{x_k\}$ 'nin monoton bir $\{x_{k_n}\}$ alt dizisi vardır. Bu durumda $\{x_{k_n}\}$ dizisi $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ noktasına yakınsaktır. Yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $\{x_k\}$ yakınsaktır (Baghani ve ark., 2016).

Tanım 4.1.7. $(X, \perp, \rho)$ bir ortogonal metrik uzay ve $0 < \lambda < 1$ olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü için

$$x \perp y \Rightarrow \rho(fx, fy) \leq \lambda \rho(x, y)$$

oluyorsa f dönüşümüne λ Lipschitz sabiti ile ortogonal büzülme ($\perp$ -büzülme) denir (Gordji ve ark., 2017).

Her büzülme dönüşümü bir ortogonal büzülme dönüşümüdür fakat tersi doğru değildir.

Örnek 4.1.16. $X = [0, 10)$ kümesi üzerinde öklid metriği olsun.

$$x \perp y: \Leftrightarrow x \vee y = x \text{ ya da } y \text{ olmak üzere } xy \leq (x \vee y)$$

bağıntısına göre $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlasın. $x \perp y$ ve $xy \leq x$ olsun. f dönüşümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $x = 0$ ve $y \leq 2$ ise $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 2. $x = 0$ ve $y > 2$ ise $f(x) = f(y) = 0$ dir.

Durum 3. $y \leq 1$ ve $x \leq 2$ ise $f(x) = \frac{x}{2}$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Durum 4. $y \leq 1$ ve $x > 2$ ise $x - y > y$, $f(x) = 0$ ve $f(y) = \frac{y}{2}$ dir.

Yukarıdaki bu dört durumdan

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

elde edildiği için f bir ortogonal büzülmedir. Fakat f bir büzülme dönüşümü değildir. Bunu göstermek için aksini kabul edelim yani f büzülme dönüşümü olsun. $x = 3$ ve $y = 2$ noktaları ele alınırsa $\forall 0 < c < 1$ için

$$|f(3) - f(2)| = 1 > c = c|3 - 2|$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O zaman f dönüşümü, bir büzülme dönüşümü değildir (Gordji ve ark., 2017).

Banach büzülme dönüşüm prensibinin bir başka genellemesi Ortogonal metrik uzaylarda Gordji ve arkadaşları tarafından (2017) yapılmıştır. Bu teoremin ifadesini ve ispatını verelim.

Teorem 4.1.1. $(X, \perp, \rho)$ bir ortogonal tam metrik uzay ve $0 < \lambda < 1$ olsun. $f: X \rightarrow X$, ortogonal sürekli, Lipschitz sabiti λ ile ortogonal büzülme şartını sağlayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olmak üzere buradan f 'in $x^* \in X$ şeklinde bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca f bir Picard operatörüdür yani her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$ dır (Gordji ve ark., 2017).

İspat. Ortogonallik tanımından

$$(\forall y \in X, x_0 \perp y) \text{ ya da } (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. Buradan $x_0 \perp f(x_0)$ ya da $f(x_0) \perp x_0$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1) = f^2(x_0), \dots, x_{n+1} := f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$$

elemanları tanımlansın. f , $\perp$ -koruyan dönüşüm olduğundan $\{x_n\}$ bir ortogonal dizidir. Diğer taraftan, f dönüşümü $\perp$ -büzölme olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda \rho(x_{n-1}, x_n) \\ &= \lambda \rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leq \lambda^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $n \leq m$ ise

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \lambda^n \rho(x_1, x_0) + \dots + \lambda^{m-1} \rho(x_1, x_0) \\ &= (\lambda^n + \dots + \lambda^{m-2} + \lambda^{m-1}) \rho(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n (1 + \dots + \lambda^{m-n-1}) \rho(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n \frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} \rho(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n, m \rightarrow \infty$ iken $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy ortogonal dizidir. X ortogonal tam metrik uzay olduğu için $x_n \rightarrow x^*$ 'ı sağlayan bir $x^* \in X$ elemanı mevcuttur. f dönüşümü $\perp$ - sürekliliğinden $f(x_n) \rightarrow f(x^*)$ ve

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

elde edilir. Böylece x^*, f in sabit noktasıdır.

f dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu olmayana ergi yöntemi ile gösterelim. $y^* \in X$, f in x^* dan başka farklı bir sabit noktası olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(x^*) = x^*$ ve $f^n(y^*) = y^*$ dır. $\{x_n\}$ dizisini oluştururken kullandığımız x_0 noktasını seçerek

$$[x_0 \perp x^* \text{ ve } x_0 \perp y^*] \text{ ya da } [x^* \perp x_0 \text{ ve } y^* \perp x_0]$$

yazabiliriz. f , $\perp$ -koruyan dönüşüm olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$[f^n(x_0) \perp f^n(x^*) \text{ ve } f^n(x_0) \perp f^n(y^*)]$$

ya da

$$[f^n(x^*) \perp f^n(x_0) \text{ ve } f^n(y^*) \perp f^n(x_0)]$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \rho(x^*, y^*) &= \rho(f^n(x^*), f^n(y^*)) \\ &\leq \rho(f^n(x^*), f^n(x_0)) + \rho(f^n(x_0), f^n(y^*)) \\ &\leq \lambda^n \rho(x^*, x_0) + \lambda^n \rho(x_0, y^*) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $x^* = y^*$ dır. Yani buradan sabit nokta tektir.

Son olarak f in Picard operatörü olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$[x_0 \perp x^* \text{ ve } x_0 \perp x] \text{ ya da } [x^* \perp x_0 \text{ ve } x \perp x_0]$$

ve

$$[f^n(x_0) \perp f^n(x^*) \text{ ve } f^n(x_0) \perp f^n(x)]$$

ya da

$$[\mathcal{F}^n(x^*) \perp \mathcal{F}^n(x_0) \text{ ve } \mathcal{F}^n(x) \perp \mathcal{F}^n(x_0)]$$

yazılabilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x^*, \mathcal{F}^n(x)) &= \rho(\mathcal{F}^n(x^*), \mathcal{F}^n(x)) \\ &\leq \rho(\mathcal{F}^n(x^*), \mathcal{F}^n(x_0)) + \rho(\mathcal{F}^n(x_0), \mathcal{F}^n(x)) \\ &\leq \lambda^n \rho(x^*, x_0) + \lambda^n \rho(x_0, x) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Ortogonal metrik uzaylarda Wardowski'nin (2017) F -büzülme dönüşümüyle yapılan sabit nokta teori çalışmaları Sawangsup ve arkadaşları tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 4.1.8. $(X, \perp, \rho)$ ortogonal metrik uzay olmak üzere $\tau > 0$ ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Aşağıda verilen koşulunu sağlayan $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümüne ortogonal F -büzülme dönüşümü adı verilir: Her $x, y \in X$ için $x \perp y$ ile

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau + F(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\rho(x, y))$$

dır (Sawangsup ve ark., 2020).

Teorem 4.1.2. $(X, \perp, \rho)$ tam ortogonal metrik uzay ve x_0 'da ortogonal eleman olmak üzere $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyandır,
- ii) $\mathcal{T}$, F -büzülme dönüşümüdür,
- iii) $\mathcal{T}$, $\perp$ -süreklidir,

$\mathcal{T}$ dönüşümünün X ' de tek bir sabit noktası mevcuttur. Ayrıca $\{\mathcal{T}^n x_0\}$ Picard dizisi $\mathcal{T}$ 'nin bu tek sabit noktasına yakınsar (Sawangsup ve ark., 2020)

Şimdide Quing Yang ve Chuanzhi Bai tarafından ortogonal metrik uzayda Hardy-Rogers tipi dönüşümün ortogonal (F, Ψ) büzülmesi için sabit nokta teoremini verelim.

Teorem 4.1.3. $(X, \perp, \rho)$ tam ortogonal metrik uzay ve x_0 'da ortogonal eleman olmak üzere. $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

- i) $\mathcal{T}, \perp$ -koruyandır,
- ii) $\mathcal{T}$, Hardy- Rogers tipi dönüşümünün bir (F, Ψ) büzülmesidir,
- iii) $\mathcal{T}, \perp$ -süreklidir,

O halde $\mathcal{T}$ sabit bir noktaya sahiptir. Ayrıca, $\beta + L \leq \gamma + \delta < 1$ ise, o zaman $\mathcal{T}$ 'nin sabit noktası tektir (Yang ve Bai, 2020).

İspat. Ortogonallik tanımına göre $\mathcal{T}x_0 \perp x_0$ veya $x_0 \perp \mathcal{T}x_0$ dır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n := \mathcal{T}x_{n-1}$ olsun. Herhangi bir $n^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n^*} = x_{n^*+1}$ ise x_{n^*} , $\mathcal{T}$ 'nin bir sabit noktasıdır ve ispat tamamlanmış olur.

Varsayalım ki her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Bu nedenle $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur.

$\mathcal{T}, \perp$ -koruyan olduğundan $x_n \perp x_{n+1}$ veya $x_{n+1} \perp x_n$ dir ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ O -dizisidir.

$\mathcal{T}$ bir ortogonal (F, Ψ) -büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned}
 & F(\rho(x_n, x_{n+1})) \\
 &= F(\rho(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n)) \leq F(\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(x_{n-1}, x_n)) + \Psi(\rho(x_{n-1}, x_n)) \\
 &= F(\alpha\rho(x_{n-1}, x_n) + \beta\rho(x_{n-1}, \mathcal{T}x_{n-1}) + \gamma\rho(x_n, \mathcal{T}x_n) + \delta\rho(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) \\
 &+ L\rho(x_n, \mathcal{T}x_{n-1})) + \Psi(\rho(x_{n-1}, x_n))
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Kolaylık sağlamak için $\rho(x_n, x_{n+1}) = a_n$ olsun. O zaman (4.1) ile

$$\begin{aligned}
 F(a_n) &\leq F(\alpha a_{n-1} + \beta a_{n-1} + \gamma a_n + \delta \rho(x_{n-1}, x_{n+1})) + \Psi(a_{n-1}) \\
 &\leq F(\alpha a_{n-1} + \beta a_{n-1} + \gamma a_n + \delta \rho(a_n, a_{n-1})) + \Psi(a_{n-1}) \\
 &\leq F((\alpha + \beta + \delta)a_{n-1} + (\gamma + \delta)a_n) + \Psi(a_{n-1})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dir ve $\psi \in \Psi$ 'den

$$F(a_n) < F((\alpha + \beta + \delta)a_{n-1} + (\gamma + \delta)a_n)$$

yazılır. F 'nin monotonluğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n < (\alpha + \beta + \delta)a_{n-1} + (\gamma + \delta)a_n \quad (4.3)$$

elde edilir. $\gamma + \delta < 1$ ve $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1$ koşullarına göre $1 - \gamma - \delta > 0$ ve

(4.3)'den

$$a_n < \frac{\alpha + \beta + \delta}{1 - \gamma - \delta} a_{n-1} = a_{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

dir. Yani $\{a_n\}$ dizisi kesin azalandır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dir. $a > 0$ olduğunu varsayalım. ψ sağdan üst yarı sürekli olduğu için, öyle bir $q \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$\psi(a_j) < \psi(a) - \frac{\psi(a)}{2} = \frac{\psi(a)}{2} < 0, j \geq q \quad (4.4)$$

dir. (4.2), (4.4) ve $\{a_n\}$ azalan olduğundan $n > q$

$$\begin{aligned} F(a_n) &< F((\alpha + \beta + \gamma + 2\delta)a_{n-1}) + \frac{\psi(a)}{2} \\ &= F(a_{n-1}) + \frac{\psi(a)}{2} \leq F(a_{n-2}) + 2 \times \frac{\psi(a)}{2} \\ &\leq \dots \leq F(a_q) + (n - q) \frac{\psi(a)}{2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

dir. (4.5) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$$

elde edilir. Bu yüzden (F2)'den

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0 \quad (4.6)$$

dır. Şimdi de $\{a_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. (4.6) ve (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k F(a_n) = 0 \quad (4.7)$$

olacak biçimde bir $k \in (0,1)$ vardır. (4.5)'den

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_q) \leq (n - q) \frac{\psi(a)}{2} a_n^k \leq 0, n > q$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) kullanarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k n = 0 \quad (4.8)$$

bulunur. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için $a_n^k n \leq 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\forall n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) ve üçgen eşitsizliğini kullanarak $n \geq n_1$ ve $m \in \mathbb{N}^*$ için

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{i=n}^{n+m+1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{n+m+1} a_i \leq \sum_{i=n}^{n+m+1} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$$

dir. $0 < k < 1$ den $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ serisi yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ sağlayan bir $x_* \in X$ vardır. Son olarak $\mathcal{T}$ sürekli olduğundan

$$\mathcal{T}x_* = \mathcal{T}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_*$$

$\mathcal{T}x_* = x_*$ olup böylece $\mathcal{T}$ 'nin X 'de bir sabit noktası sahiptir.

Ayrıca, x_* 'in $\mathcal{T}$ 'nin tek bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. x^* , $\mathcal{T}$ 'nin başka bir sabit noktası olduğunu varsayalım. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x^*$ olarak $x_* = x^*$ dir. $n \rightarrow \infty$ için x_n, x^* 'e yakınsamıyorsa tüm $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}x_{n_k} \neq x^*$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. İspatın başında x_0 seçimiyle

$$(x_0 \perp x^*) \text{ veya } (x^* \perp x_0)$$

dir. $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}^n x^* = x^*$

$$(\mathcal{T}^n x_0 \perp x^*) \text{ or } (x^* \perp \mathcal{T}^n x_0), \text{ her } n \in \mathbb{N}$$

dir. $\mathcal{T}$, Hardy-Rogers tipi dönüşümün ortogonal (F, Ψ) - büzülmesi olduğundan

$$\begin{aligned} F(\rho(x_{n_k}, x^*)) &= F(\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, x^*)) = F(\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, \mathcal{T}^{n_k} x^*)) \\ &\leq F(\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}^{n_k-1} x_0, \mathcal{T}^{n_k-1} x^*)) + \psi(\rho(\mathcal{T}^{n_k-1} x_0, \mathcal{T}^{n_k-1} x^*)) \\ &= F(\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(x_{n_{k-1}}, x^*)) + \psi(\rho(x_{n_{k-1}}, x^*)) \\ &= F(\alpha\rho(x_{n_{k-1}}, x^*) + \beta\rho(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) + \delta\rho(x_{n_{k-1}}, x^*) \\ &\quad + L\rho(x_{n_k}, x^*)) + \psi(\rho(x_{n_{k-1}}, x^*)) \\ &\leq F((\alpha + \beta + \delta)\rho(x_{n_{k-1}}, x^*) + (\beta + L)\rho(x_{n_k}, x^*)) \\ &\quad + \psi(\rho(x_{n_{k-1}}, x^*)) \\ &< F((\alpha + \beta + \delta)\rho(x_{n_{k-1}}, x^*) + (\beta + L)\rho(x_{n_k}, x^*)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. $\beta + L \leq \delta + \gamma$ koşuluna göre, $1 - \beta - L > 0$ 'ye ve $\alpha + \beta + 2\delta = 1$ 'e göre de $\alpha + 2\beta + \delta + L \leq 1$ 'e sahibiz.

Böylece, (4.10) ve F 'nin monotonluğu ile,

$$\rho(x_{n_k}, x^*) < \frac{\alpha + \beta + \delta}{1 - \beta - L} \rho(x_{n_{k-1}}, x^*) \leq \rho(x_{n_{k-1}}, x^*) \quad (4.11)$$

dir. $\mu_{n_k} = \rho(x_{n_k}, x^*)$ olsun. Bu durumda $\{\mu_{n_k}\}$ dizisi kesin azalandır. Böylece $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k} = \mu \geq 0$ dir. (4.4)'ün ispatına benzer şekilde eğer $\mu > 0$ ise o zaman bir $p \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$\psi(\mu_{n_k}) < \frac{\psi(\mu)}{2} < 0, j \geq p, \quad (4.12)$$

(4.10) ve (4.12) ile $k > p$ için μ_{n_k} azalmasıyla

$$\begin{aligned} F(\mu_{n_k}) &\leq F((\alpha + 2\beta + \delta + L)\mu_{n_{k-1}}) + \frac{1}{2}\psi(\mu) \\ &\leq F(\mu_{n_{k-1}}) + \frac{1}{2}\psi(\mu) \leq F(\mu_{n_{k-2}}) + 2 \times \frac{1}{2}\psi(\mu) \\ &\leq \dots \leq F(\mu_{n_p}) + \frac{k-p}{2}\psi(\mu), \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$ için $F(\mu_{n_k}) \rightarrow -\infty$ dir ve bu nedenle (F2) koşulundan $k \rightarrow \infty$ için $\rho(x_{n_k}, x^*) = \mu_{n_k} \rightarrow 0$ dir. Bu $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x^*$ 'dir. Bu bir çelişkidir. Böylece, $\mathcal{T}$ 'nin bir tek sabit noktası vardır.

Mani Quing Yang ve arkadaşları tarafından ortogonal metrik uzayda yeni bir F -Suziki büzülmesini ve bu büzülme dönüşümü için verilen sabit nokta teoremini verelim.

Tanım 4.1.9. $(X, \perp, \rho)$ ortogonal metrik uzay olmak üzere $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümünün $(X, \perp, \rho)$ üzerinde ortogonal bir F -Suziki büzülme dönüşümü (kısaca $\mathcal{T}_\perp$ -Suziki büzülmesi) olduğu söylenir. Eğer $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ varsa aşağıdaki koşul sağlanır (Mani ve ark., 2021).

$\forall x, y \in X$ için $x \perp y$;

$$\left[\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0, \frac{1}{2}\rho(x, \mathcal{T}x) < \rho(x, y) \Rightarrow \tau + F(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\rho(x, y)) \right].$$

Teorem 4.1.4. $(X, \perp, \rho)$ tam ortogonal metrik uzay, x_0 da ortogonal eleman ve $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ olmak üzere $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ sayısı varsa aşağıdaki koşul sağlanır.

- i) $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyandır,
- ii) $\mathcal{T}$, Ortogonal bit F -Suzuki büzölme dönüşümüdür,
- iii) $\mathcal{T}$, $\perp$ -süreklidir,

O zaman $\mathcal{T}$ 'nin $t \in X$ tek sabit noktası mevcuttur ve $\forall x \in X$ için $\{\mathcal{T}^n x\}$ dizisi t 'ye yakınsar (Mani ve ark., 2021).



4.2. Adi Diferensiyel Denklemler İçin Uygulama

Bu bölümde aşağıda verilen tipte bir diferensiyel denklemin varlık problemine bir çözüm sunulmaktadır.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & , \quad t \in \mathfrak{T} := [0, T] \\ u(0) = a & , \quad a \geq 1 \end{cases}, \quad (4.13)$$

olmak üzere $f: \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyondur ve aşağıdaki koşulları sağlar.

(a1) Her $x \geq 0$ ve $s \in \mathfrak{T}$ için $f(s, x) \geq 0$ dır.

(a2) $x \vee y = x$ ya da y ile tanımlansın. Her $t \in \mathfrak{T}$ ve $xy \geq (x \vee y)$ olacak biçimde $x, y \geq 0$ dır. Buradan

$$|f(s, x) - f(s, y)| \leq a(s)|x - y|$$

olacak şekilde $a \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{T})$ vardır.

$f: \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a2) koşulundaki Lipschitz koşulunu sağlaması gerekmez.

Örneğin

$$f(s, x) = \begin{cases} sx & , \quad x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.14)$$

fonksiyonu (a1) ve (a2) şartlarını sağlarken f fonksiyonu sürekli ve monoton değildir.

Ayrıca $s \neq 0$ için

$$\left| f\left(s, \frac{1}{2}\right) - f\left(s, \frac{2}{3}\right) \right| = s \frac{1}{2} > s \frac{1}{6} = s \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right|$$

dir.

Teorem 4.2.1. Yukarıda verilen şartlar altında, her $\mathcal{T} > 0$ için (4.13) diferensiyel denkleminin bir tek pozitif çözümü vardır (Gordji ve ark., 2017).

İspat. $X = \{u \in \mathcal{C}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}) : u(t) > 0, \forall t \in \mathfrak{I}\}$ olsun. X 'te aşağıdaki ortogonallik bağıntısını ele alalım:

Her $t \in \mathfrak{I}$ için

$$x \perp y \Leftrightarrow x(t)y(t) \geq (x(t) \vee y(t))$$

dir.

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t |a(s)| ds$$

olsun. Buradan hemen hemen $t \in \mathfrak{I}$ için $\mathcal{A}'(t) = |a(t)|$ dir. Her $x, y \in X$ için

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} e^{-\mathcal{A}(t)} |x(t)|, \rho(x, y) := \|x - y\|_{\mathcal{A}}$$

ile tanımlansın. Buradan (X, ρ) bir metrik uzaydır. X 'in $\mathcal{O}$ -tam (tam olması gerekmez) olduğunu gösterelim. $(x_n) \in X$ Cauchy $\mathcal{O}$ -dizisini alalım. (x_n) dizisinin $x \in \mathcal{C}(\mathfrak{I})$ noktasına yakınsadığını göstermek kolaydır. $x \in X$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\perp$ bağıntısının tanımı gereği her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n(t)x_{n+1}(t) \geq (x_n(t) \vee x_{n+1}(t))$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n(t) > 0$ olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k}(t) > 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ gibi alt dizisi vardır. Bu reel sayılar dizisinin $x(t)$ 'ye yakınsaması $x(t) \geq 1$ anlamına gelir. Ancak $t \in \mathfrak{I}$ keyfi olduğu için, $x \geq 1$ ve dolayısıyla $x \in X$ dir. $\mathcal{F}: X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\mathcal{F}u(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds + a$$

olacak biçimde tanımlansın. $\mathcal{F}$ 'nin sabit noktalarının (4.13)'ün çözümleri olduğunu unutmayalım. İspatı tamamlamak için aşağıdaki üç adıma ihtiyacımız vardır:

Adım 1. $\mathcal{F}$, $\perp$ -koruyandır. Gerçekten tüm $x, y \in X$ noktaları için $x \perp y$ ve $t \in \mathfrak{T}$ ile

$$\mathcal{F}x(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds + a \geq 1,$$

olması $\mathcal{F}x(t)\mathcal{F}y(t) \geq \mathcal{F}x(t)$ ve böylece $\mathcal{F}x(t) \perp \mathcal{F}y(t)$ dir.

Adım 2. $\mathcal{F}$, $\perp$ -büzülmedir. Gerçekten her $x, y \in \mathcal{X}$ için $x \perp y$ ve $t \in \mathfrak{T}$ ile (a2) şartından

$$\begin{aligned} & e^{-\mathcal{A}(t)} |\mathcal{F}x(t) - \mathcal{F}y(t)| \\ & \leq e^{-\mathcal{A}(t)} \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & \leq e^{-\mathcal{A}(t)} \int_0^t |a(s)| e^{\mathcal{A}(s)} e^{-\mathcal{A}(s)} |x(s) - y(s)| ds \\ & \leq e^{-\mathcal{A}(t)} \left(\int_0^t |a(s)| e^{\mathcal{A}(s)} ds \right) \|x - y\|_{\mathcal{A}} \\ & \leq e^{-\mathcal{A}(t)} (e^{\mathcal{A}(t)} - 1) \|x - y\|_{\mathcal{A}} \\ & \leq (1 - e^{-\|a\|_1}) \|x - y\|_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

dir ve böylece

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\|_{\mathcal{A}} \leq (1 - e^{-\|a\|_1}) \|x - y\|_{\mathcal{A}}$$

dir. $1 - e^{-\|a\|_1} < 1$ den dolayı $\mathcal{F}$ bir $\perp$ -büzülmedir.

Adım 3. $\mathcal{F}$, $\perp$ -süreklidir. Gerçekten $\{x_n\} \subseteq \mathcal{X}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\mathcal{O}$ -dizi olsun. Kanıtın birinci kısmını kullanarak her $t \in \mathfrak{T}$ için $x(t) \geq 1$ olduğu görülebilir ve böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \perp x$ dir. (a2) şartını kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathfrak{T}$ için

$$\begin{aligned}
& e^{-\mathcal{A}(t)} |\mathcal{F}x_n(t) - \mathcal{F}x(t)| \\
& \leq e^{-\mathcal{A}(t)} \int_0^t |\mathcal{F}(s, x_n(s)) - \mathcal{F}(s, x(s))| ds \\
& \leq (1 - e^{-\|a\|_1}) \|x_n - x\|_{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|\mathcal{F}x_n - \mathcal{F}x\|_{\mathcal{A}} \leq (1 - e^{-\|a\|_1}) \|x_n - \mathcal{Y}\|_{\mathcal{A}}$$

dir. Bu durumda $\mathcal{F}x_n \rightarrow \mathcal{F}x$ dir. Çözümün tekliği Teorem 4.1.1. ile elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.3. Ortogonal Metrik Uzaylarda Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde geliştirilmiş ortogonal hemen hemen F -büzülme dönüşümü tanımını ve $(X, \perp, \rho)$ $\mathcal{O}$ -ortogonal tam metrik uzaylarda bazı sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.3.1. $(X, \perp, \rho)$ ortogonal metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşul geçerli olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$, $L > 0$ ve $\tau > 0$ varsa $\mathcal{T}$, X 'den X 'e dönüşümüne geliştirilmiş ortogonal hemen hemen F -büzülme dönüşümü denir. Her $x, y \in X$ için $x \perp y$

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau + F(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y))$$

$$\mathcal{M}(x, y) = \max \left\{ \rho(x, y), \rho(x, \mathcal{T}x), \rho(y, \mathcal{T}y), \frac{\rho(x, \mathcal{T}y) + \rho(y, \mathcal{T}x)}{2} \right\}$$

ve

$$\mathcal{N}(x, y) = \min\{\rho(x, \mathcal{T}y), \rho(y, \mathcal{T}x)\} \text{ (Acar ve Erdoğan, 2022).}$$

Teorem 4.3.1. $(X, \perp, \rho)$ tam ortogonal metrik uzay ve x_0 da ortogonal eleman olmak üzere $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

- (i) $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyandır,
- (ii) $\mathcal{T}$, geliştirilmiş ortogonal hemen hemen F -büzülme dönüşümüdür,
- (iii) $\mathcal{T}$, $\perp$ -süreklidir,

O halde $\mathcal{T}$, X 'de sabit bir noktaya sahiptir (Acar ve Erdoğan, 2022).

İspat. Ortogonalite tanımına göre

$$(\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır ve $\mathcal{T}x_0 \perp x_0$ veya $x_0 \perp \mathcal{T}x_0$ dır.

$n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \mathcal{T}x_{n-1}$ olacak şekilde

$$x_1 = \mathcal{T}x_0, x_2 = \mathcal{T}x_1 = \mathcal{T}^2x_0, \dots, x_n = \mathcal{T}x_{n-1} = \mathcal{T}^nx_0$$

olsun. $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyan olduğundan $x_n \perp x_{n+1}$ veya $x_{n+1} \perp x_n$ dir. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{O}$ -dizisidir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise o zaman $x_n = \mathcal{T}x_n$ alırız ve bu nedenle $\mathcal{T}$ 'nin sabit noktası vardır.

Kabul edelim ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Bu nedenle $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur. $\mathcal{T}$ hemen hemen büzülme dönüşümü olduğundan $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \tau + F(\rho(x_n, x_{n+1})) &= \tau + F(\rho(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n)) \\ &\leq F(\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) + L \cdot \mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)) \\ \mathcal{M} &= \max \left\{ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_{n-1}, \mathcal{T}x_{n-1}), \rho(x_n, \mathcal{T}x_n), \frac{1}{2}[\rho(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) \right. \\ &\quad \left. + \rho(x_n, \mathcal{T}x_{n-1})] \right\} \\ &= \max \left\{ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[\rho(x_{n-1}, x_{n+1}) + \rho(x_n, x_n)] \right\} \\ &= \max \left\{ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}\rho(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}(\rho(x_{n-1}, x_n) + \rho(x_n, x_{n+1})) \right\} \\ &\leq \max \{ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1}) \} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \min \{ \rho(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n), \rho(x_n, \mathcal{T}x_{n-1}) \} \\ &= \min \{ \rho(x_{n-1}, x_{n+1}), \rho(x_n, x_n) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir.

$$\tau + F(\rho(x_n, x_{n+1})) = +F(\rho(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n))$$

$$\leq F(\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) + L \cdot \mathcal{N}(x_{n-1}, x_n))$$

$$F(\rho(x_n, x_{n+1})) \leq F(\max\{\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1})\}) - \tau$$

$\max = \rho(x_n, x_{n+1})$ olsun. $F(\rho(x_n, x_{n+1})) \leq F(\rho(x_n, x_{n+1})) - \tau$ $\tau > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. O zaman $\max = \rho(x_{n-1}, x_n)$ olur.

$$\begin{aligned} F(\rho(x_n, x_{n+1})) &\leq F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \tau \\ &\leq F(\rho(x_{n-2}, x_{n-1})) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(\rho(x_0, x_1)) - n\tau \end{aligned} \tag{4.15}$$

olur.

$\rho(x_n, x_{n+1}) = a_n$ olsun.

$$\begin{aligned} F(a_n) &\leq F(a_{n-1}) - \tau \\ &\leq F(a_{n-2}) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(a_0) - n\tau \end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. (4.16) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$$

elde edilir. (F2)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

dır. (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

sağlayan bir $k \in (0,1)$ mevcuttur. Ayrıca (4.16)'dan her $n \geq 0$ tam sayı için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq a_n^k n \tau \leq 0 \quad (4.17)$$

(4.17) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k n = 0$$

bulunur. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için $a_n^k n \tau \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$$

dir. Buradan $m > n \geq n_1$ sağlayan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} a_i \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$$

olup $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla X 'de $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ sağlayan bir $x^* \in X$ mevcuttur. $\mathcal{T}$ dönüşümünün sürekliliğinden

$$\mathcal{T}x^* = \mathcal{T}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

$\mathcal{T}x^* = x^*$ olup bu durumda $\mathcal{T}$, X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Sabit noktanın tekliğini garanti etmek için berinde tipli büzülme koşuluna benzer ek bir şart verilerek tekliği sağlanabilir.

Teorem 4.3.2. $(X, \perp, \rho)$ tam ortogonal metrik uzay ve x_0 da ortogonal eleman olmak üzere $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

- (i) $\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyandır,
- (ii) $\mathcal{T}$, genelleştirilmiş ortogonal hemen hemen F -büzülme dönüşümüdür,
- (iii) $\mathcal{T}$, $\perp$ -sürekli.

Ayrıca $\mathcal{T}$ aşağıdaki koşulu sağlarsa; $x \perp y$ 'yi sağlayan her $x, y \in X$ için $F_1 \in \mathcal{F}$, $L_1 > 0$ ve $\tau_1 > 0$ olmak üzere

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau_1 + F_1(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F_1(\mathcal{M}(x, y) + L_1 \cdot \mathcal{N}(y, \mathcal{T}y))$$

O halde $\mathcal{T}$, X 'de tek sabit noktaya sahiptir (Acar ve Erdoğan, 2022).

İspat. y^* , $\mathcal{T}$ 'nin x^* farklı bir sabit noktası olsun. Eğer $x_n \rightarrow y^*$ ise $x^* = y^*$ dir. $x_n \rightarrow y^*$ O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}x_{n_k} = y^*$ olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

Ortogonalite tanımına göre

$$(\forall y \in X, x_0 \perp y^*) \vee (\forall y \in X, y^* \perp x_0)$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

$\mathcal{T}$, $\perp$ -koruyan olduğundan $(\mathcal{T}^n x_0 \perp y^*)$ veya $(y^* \perp \mathcal{T}^n x_0)$ dir.

$$\begin{aligned} F(\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, y^*)) &= F(\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*)) \\ &\leq F(\mathcal{M}(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*) + L \cdot \mathcal{N}(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*) \\ &= \max \left\{ \begin{aligned} &\rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*), \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} x_0), \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*, \mathcal{T}^{n_k} y^*), \\ &\frac{1}{2} [\rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*) + \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*, \mathcal{T}^{n_k} x_0)] \end{aligned} \right\} \\ &= \max \{ \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*), \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} x_0) \} \end{aligned}$$

$\max = \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} x_0)$ olsun.

$k \rightarrow \infty$ limit alınır

$$F(\rho(x^*, y^*)) \leq F(\rho(x^*, x^*)) - \tau$$

$F(0)$ tanımlı değildir. Dolayısıyla $\max = \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*)$ dir.

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*) = \min \{ \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*), \rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*, \mathcal{T}^{n_k} y^*) \} = 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} F(\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*)) &\leq F(\rho(\mathcal{T}^{n_{k-1}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-1}} y^*)) - \tau \\ &\leq F(\rho(\mathcal{T}^{n_{k-2}} x_0, \mathcal{T}^{n_{k-2}} y^*)) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(\rho(x_0, y^*)) - n\tau \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ limit alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(\mathcal{T}^{n_k} x_0, \mathcal{T}^{n_k} y^*)) = -\infty$$

elde edilir. (F2)'den

$$\rho(\mathcal{T}^{n_k}x_0, \mathcal{T}^{n_k}y^*) = 0$$

olur. $x^* = y^*$ olup sabit nokta tektir.

Örnek 4.3.1. $X = [0, \infty)$ olsun. $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

olsun.

$$\mathcal{S}_k = \frac{k(k+1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olarak tanımlanan $\{\mathcal{S}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisini göz önünde bulunduralım. X üzerinde

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x, y\} \subseteq \{\mathcal{S}_k\}$$

ortogonal bağıntısı tanımlansın. Böylece $(X, \perp, \rho)$ bir O -tam metrik uzaydır. Şimdi bir $\mathcal{f}: X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\mathcal{f}x = \begin{cases} \mathcal{S}_0 & , \quad \mathcal{S}_0 \leq x \leq \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_{k-1} & , \quad \mathcal{S}_k \leq x \leq \mathcal{S}_{k+1}, \forall k \geq 1 \end{cases}$$

O halde $\mathcal{f}$, $\perp$ -sürekli ve X , $\perp$ -koruyandır. $F \in \mathcal{F}$, her $\alpha > 0$ için $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. $\mathcal{f}$ 'nin $\tau = 1$ ve $L = 1$ ile genelleştirilmiş bir ortogonal hemen hemen F -büzlme olduğunu söylüyoruz. Bunu görmek için aşağıdaki durumları ele alıyoruz. İlk olarak $x, y \in X$ ile $x \perp y$ ve $\rho(\mathcal{f}x, \mathcal{f}y) > 0$ dır. Genelliği bozmaksızın $x < y$ olduğunu varsayabiliriz. Yani $x \in \{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1\}$ ve bazı $k \geq 2$ için $y = \mathcal{S}_k$. Durum 1. $x = \mathcal{S}_0$, $k \geq 2$ için $y = \mathcal{S}_k$ aşağıdaki eşitsizliği sahibiz

$$\frac{\rho(\mathcal{f}x, \mathcal{f}y)}{\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y)} e^{\rho(\mathcal{f}x, \mathcal{f}y) - (\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y))}$$

$$= \frac{\frac{k^2 - k}{2}}{\frac{k^2 + k}{2} + \frac{k^2 - k}{2}} e^{\frac{k^2 - k}{2} - \left(\frac{k^2 + k}{2} + \frac{k^2 - k}{2}\right)} < e^{-\left(\frac{k^2 - k}{2}\right)} < e^{-1}.$$

Durum 2. $x = \mathcal{S}_1$, $k \geq 2$ için $y = \mathcal{S}_k$ aşağıdaki eşitsizliğine sahibiz

$$\begin{aligned} & \frac{\rho(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y)}{\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y)} e^{\rho(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) - (\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y))} \\ &= \frac{\frac{k^2 - k}{2}}{\frac{k^2 + k - 2}{2} + \frac{k^2 - k - 2}{2}} e^{\frac{k^2 - k}{2} - \left(\frac{k^2 + k - 2}{2} + \frac{k^2 - k - 2}{2}\right)} \\ &= \frac{k^2 - k}{2k^2 - 4} e^{\frac{-k^2 - k + 4}{2}} < e^{-1}. \end{aligned}$$

Bu nedenle Teorem 4.3.1.'nin tüm koşulları sağlanır ve bu nedenle $\mathcal{F}$ 'nin sabit noktası vardır. Ayrıca Teorem 4.3.2.'nin tüm koşulları her $\alpha > 0$ için $F_1(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$, $\tau_1 = 1$ ve $L = 1$ sağlanır. Buradan $\mathcal{F}$ tek bir sabit noktaya sahiptir.

4.4. Ortogonal Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde ortogonal metrik uzaylarda genelleştirilmiş küme değerli F -büzülme dönüşümü tanımını ve sonra bu büzülme dönüşümü için $(X, \perp, \rho)$ O -ortogonal tam metrik uzaylarda bazı sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.4.1. $(X, \perp, \rho)$ ortogonal metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşul geçerli olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$, $L > 0$ ve $\tau > 0$ varsa $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{CB}(\mathcal{X})$ dönüşümüne genelleştirilmiş küme değerli ortogonal F -büzülme dönüşümü denir. Her $x, y \in X$ için $x \perp y$

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau + F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\mathcal{M}(x, y) + L \cdot \mathcal{N}(x, y)) \quad (4.18)$$

$$\mathcal{M}(x, y) = \max \left\{ \rho(x, y), \mathcal{D}(x, \mathcal{T}x), \mathcal{D}(y, \mathcal{T}y), \frac{\mathcal{D}(x, \mathcal{T}y) + \mathcal{D}(y, \mathcal{T}x)}{2} \right\}$$

ve

$$\mathcal{N}(x, y) = \min\{\mathcal{D}(x, \mathcal{T}y), \mathcal{D}(y, \mathcal{T}x)\} \text{ (Acar ve Erdoğan, 2023).}$$

Teorem 4.4.1. $(X, \perp, \rho)$ O -tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: X \rightarrow \kappa(X)$ olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\{x_0\} \perp \mathcal{T}x_0$ veya $\mathcal{T}x_0 \perp \{x_0\}$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- (ii) Tüm $x, y \in X$ $x \perp y$ için $\mathcal{T}x \perp \mathcal{T}y$ anlamına gelir,
- (iii) $\{x_n\}$, X 'te $x_n \rightarrow x^*$ olacak şekilde ortogonal bir diziye, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \perp x^*$ veya $x^* \perp x_n$ 'tür,
- (iv) $\mathcal{T}$, genelleştirilmiş küme değerli ortogonal F -büzülmedir.

$\mathcal{T}$ 'nin en az bir sabit noktası vardır (Acar ve Erdoğan, 2023).

İspat. (i) varsayımına göre $x_0 \perp x_1$ veya $x_1 \perp x_0$ olacak şekilde $x_1 \in \mathcal{T}x_0$ vardır. (ii) varsayımıyla $\mathcal{T}x_0 \perp \mathcal{T}x_1$ elde ederiz; yani $x_2 \in \mathcal{T}x_1$ vardır ki, öyle ki $x_1 \perp x_2$ veya $x_2 \perp$

x_1 olur. $x_1 \in \mathcal{T}x_1$ ise x_1 , $\mathcal{T}$ 'nin sabit noktasıdır. $x_1 \notin \mathcal{T}x_1$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{T}x_1$ kompakt olduğundan $\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1) > 0$ dır.

$\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1) \leq \mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1))$$

elde ederiz. Bu nedenle (iv)'i kullanarak

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) \\ & \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq F(\mathcal{M}(x_0, x_1) + L \cdot \mathcal{N}(x_0, x_1)) - \tau \\ & = F\left(\max\left\{\begin{array}{l} \rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_0), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_1) + \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_0)\} \\ + L \min\{\mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_0)\} \end{array}\right\}\right) - \tau \\ & \leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \frac{1}{2}\mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_1)\right\}\right) - \tau \\ & \leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \frac{1}{2}[\rho(x_0, x_1) + \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)]\right\}\right) - \tau \\ & \leq F(\max\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)\}) - \tau \\ & = F(\rho(x_0, x_1)) - \tau. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Bu işleme devam ederek, tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in \mathcal{T}x_n$ olacak şekilde X 'te $\{x_n\}$ ortogonal bir dizi oluşturulabilir. Böylece tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \perp x_n$ veya $x_n \perp x_{n+1}$ elde edilir. Tüm $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \in \mathcal{T}x_n$ ise, x_n $\mathcal{T}$ 'nin sabit bir noktasıdır. Yani $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \notin \mathcal{T}x_n$ olduğunu varsayabilir. $\mathcal{T}x_n$ kapalı olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n) > 0$ dır. Ayrıca $\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n) \leq \mathcal{H}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n)) \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n))$$

elde ederiz.

(iv)'den

$$\begin{aligned}
& F(\mathcal{D}(x_n, Tx_n)) \\
& \leq F(\mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\
& \leq F(\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) + L \cdot \mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)) - \tau \\
& = F\left(\max\left\{\begin{array}{l} \rho(x_{n-1}, x_n), \mathcal{D}(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \mathcal{D}(x_n, Tx_n), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_{n-1}, Tx_n) + \mathcal{D}(x_n, Tx_{n-1})\} \\ + L \min\{\mathcal{D}(x_{n-1}, Tx_n), \mathcal{D}(x_n, Tx_{n-1})\} \end{array}\right\}\right) - \tau \\
& = F\left(\max\left\{\begin{array}{l} \rho(x_{n-1}, x_n), \mathcal{D}(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \mathcal{D}(x_n, Tx_n), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_{n-1}, Tx_n) + \mathcal{D}(x_n, Tx_{n-1})\} \end{array}\right\}\right) - \tau \\
& \leq F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \tau.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla F 'nin kesin artan özelliğinden

$$\mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) < \rho(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \mathcal{D}(x_n, Tx_n) \leq \mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) < \rho(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Bu nedenle $\{\rho(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi kesinlikle azalan bir dizidir. Bazı $t \geq 0$ için $a_n = \rho(x_n, x_{n+1}) \rightarrow t$ olduğunu varsayalım. Ayrıca her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\tau + F(\rho(x_n, x_{n+1})) & \leq \tau + F(\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n-1})) \\
& \leq F(\rho(x_n, x_{n-1})).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.20)'de $n \rightarrow \infty$ alarak $\tau + F(t + 0) \leq F(t + 0)$ elde ederiz. Bu bir çelişkidir. (F3)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\ell} F(\alpha_n) = 0$$

olacak şekilde bir $\ell \in (0,1)$ vardır. O zaman aşağıdaki eşitsizlik $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir:

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) - \alpha_n^k F(\alpha_0) \leq -\alpha_n^k n \tau \leq 0 \quad (4.21)$$

(4.21) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n^k = 0 \quad (4.22)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.22) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $n \alpha_n^k \tau < 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı var ve $\forall n \geq n_1$ için

$$\alpha_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \quad (4.23)$$

bulunur. $m > n \geq n_1$ olacak biçimindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &= \alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m \\ &= \sum_{i=n}^m \alpha_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisi yakınsaktır. Bu yüzden $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

$z \in \mathcal{T}z$ olduğunu iddia ediyoruz. Tersini kabul edelim. Yani $z \notin \mathcal{T}z$ olsun. Dolayısıyla $z \notin \{x_n\}_{n \geq n_1}$, $\mathcal{H}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}z) > 0$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle $x_n \perp z$ veya $z \perp x_n$ varsayımızla (iv) kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} &F(\mathcal{D}(x_{n+1}, \mathcal{T}z)) \\ &\leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq F(\mathcal{M}(x_n, z) + L \cdot \mathcal{N}(x_n, z)) - \tau \\
&= F\left(\begin{array}{c} \rho(x_n, z), \mathcal{D}(x_n, Tx_n), \mathcal{D}(z, Tz), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_n, Tz) + \mathcal{D}(z, Tx_n)\} \\ +L \min\{\mathcal{D}(x_n, Tz), \mathcal{D}(z, Tx_n)\} \end{array}\right) - \tau \\
&= F\left(\begin{array}{c} \rho(x_n, z), \mathcal{D}(x_n, Tx_n), \mathcal{D}(z, Tz), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_n, Tz) + \mathcal{D}(z, Tx_n)\} \\ +L \min\{\mathcal{D}(x_n, Tz), \mathcal{D}(z, x_{n+1})\} \end{array}\right) - \tau \\
&= F\left(\begin{array}{c} \rho(x_n, z), \rho(x_n, x_{n+1}), \mathcal{D}(z, Tz), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_n, Tz) + \mathcal{D}(z, Tx_n)\} \\ +L \min\{\mathcal{D}(x_n, Tz), \mathcal{D}(z, x_{n+1})\} \end{array}\right) - \tau \tag{4.24}
\end{aligned}$$

(4.24) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$F(\mathcal{D}(z, Tz)) \leq F(\mathcal{D}(z, Tz)) - \tau$$

elde edilir bu da bir çelişkidir yani $z \in Tz$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Örnek 4.4.1. $X = \{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\rho(x, y) = |x - y|$ olsun. X üzerindeki $\perp$ bağıntısını

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x, y\} \subset X$$

ile tanımlayalım. Buradan $(X, \perp, \rho)$, $\mathcal{O}$ -tam ortogonal metrik uzaydır. $T: X \rightarrow \kappa(X)$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} x_1 & , \quad x = x_1 \\ \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Buradan T dönüşümü $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ve $\tau = 1$ için genelleştirilmiş küme değerli ortogonal F -büzülmedir. Bunu görmek için aşağıdaki durumu inceleyelim. $x, y \in X$ için $x \perp y$ ve $\mathcal{H}(Tx, Ty) > 0$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x < y$ olarak kabul edelim.

$x = x_1$ ve $y = x_n$, $n > 1$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{H}(Tx_n, Tx_1)}{\mathcal{M}(x_n, x_1) + \mathcal{L} \cdot \mathcal{N}(x_n, x_1)} e^{\mathcal{H}(Tx_n, Tx_1) - [\mathcal{M}(x_n, x_1) + \mathcal{L} \cdot \mathcal{N}(x_n, x_1)]} \\
&= \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1 + \mathcal{L}(x_{n-1} - 1)} e^{x_{n-1} - 1 - [x_{n-1} + x_{n-1} - 1]} \\
&= \frac{\frac{n^2 + n - 2}{2}}{n^2 - 2} e^{\frac{-n^2 - n + 2}{2}} \leq e^{-1}
\end{aligned}$$

dir. Bu da Teorem 4.4.1.'in (iv) koşulunu sağladığını gösterir. Diğer taraftan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}(Tx_n, Tx_1)}{\mathcal{M}(x_n, x_1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olduğundan $\mathcal{T}$ dönüşümü genelleştirilmiş küme değerli dönüşüm değildir (Acar ve Erdoğan, 2023).

Sonuç 4.4.1. $(X, \perp, \rho)$ $\mathcal{O}$ -tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: X \rightarrow \kappa(X)$ olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\{x_0\} \perp \mathcal{T}x_0$ veya $\mathcal{T}x_0 \perp \{x_0\}$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- (ii) Tüm $x, y \in X$ $x \perp y$ için $\mathcal{T}x \perp \mathcal{T}y$ anlamına gelir,
- (iii) $\{x_n\}$, X 'te $x_n \rightarrow x^*$ olacak şekilde ortogonal bir diziye, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \perp x^*$ veya $x^* \perp x_n$ 'tür,
- (iv) $\forall x, y \in X$ için

$$x \perp y [\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau + F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\mathcal{M}(x, y))],$$

$$\mathcal{M}(x, y) = \max \left\{ \rho(x, y), \mathcal{D}(x, \mathcal{T}x), \mathcal{D}(y, \mathcal{T}y), \frac{\mathcal{D}(x, \mathcal{T}y) + \mathcal{D}(y, \mathcal{T}x)}{2} \right\}$$

O halde $\mathcal{T}$ 'nin en az bir sabit noktası vardır.

Şimdide, Teorem 4.4.1'i kullanarak, aşağıdaki diferensiyel denklemin bir çözümünün varlığını gösteriyoruz. Öncelikle gerekli olan kavramları hatırlayalım.

Herhangi bir $1 \leq p < \infty$ için $\mathcal{L}^p(\mathcal{M}, F, \mu)$ (veya $\mathcal{L}^p(\mathcal{M})$) uzayının

$$\int_{\mathcal{M}} |\kappa(x)|^p d\mu(x)$$

$\mathcal{M}$ içerisinde olan tüm karmaşık değerli ölçülebilir κ fonksiyonlarından oluştuğunu hatırlayalım ve burada F ölçülebilir kümelerin σ -cebiri ve μ ölçüdür. $p = 1$ alındığında $\mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ uzayı, $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm integrallenebilir κ fonksiyonlarından oluşur ve κ 'nın $\mathcal{L}^1$ -normunu

$$\|\kappa(x)\|_1 = \int_{\mathcal{M}} |\kappa(x)| d\mu(x).$$

ile tanımlanır.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & , \quad t \in \mathfrak{T} := [0, T] \\ u(0) = a & , \quad a \geq 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

olmak üzere $f: \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyondur ve aşağıdaki koşulları sağlar.

(a1) Her $x \geq 0$ ve $s \in \mathfrak{T}$ için $f(s, x) \geq 0$ dır.

(a2) Her $x, y \in \mathcal{L}^1$ ile her $s \in \mathfrak{T}$ için $x(s)y(s) \geq x(s)$ veya $x(s)y(s) \geq y(s)$ ile $\kappa \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{T})$ ve $\tau > 0$ vardır. Öyle ki

$$|f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \leq \frac{\kappa(s)}{(1 + \tau\sqrt{\kappa(s)})^2} |x(s) - y(s)|$$

ve

$$|x(s) - y(s)| \leq \kappa(s)e^{\mathcal{A}(s)}$$

olacak şekilde $s \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{I})$ vardır ve burada $\mathcal{A}(s) := \int_0^s |\kappa(y)| d y$ dir.

Teorem 4.4.2. Yukarıda verilen şartlar altında, her $\mathcal{T} > 0$ için (4.25) diferensiyel denkleminin bir tek pozitif çözümü vardır.

İspat. $X = \{u \in \mathcal{C}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}) : u(t) > 0, \forall t \in \mathfrak{I}\}$ olsun. X 'te aşağıdaki ortogonalite bağıntısını ele alalım:

Her $t \in \mathfrak{I}$ için

$$x \perp y \Leftrightarrow x(t)y(t) \geq x(t) \text{ ya da } x(t)y(t) \geq y(t) \text{ dir.}$$

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t |a(s)| ds$$

olsun. Buradan hemen hemen $t \in \mathfrak{I}$ için $\mathcal{A}'(t) = |a(t)|$ dir. Her $x, y \in X$ için

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} e^{-\mathcal{A}(t)} |x(s) - y(s)|, \rho(x, y) := \|x - y\|_{\mathcal{A}}$$

ile tanımlansın. Bu durumda (X, ρ) bir metrik uzay olmasının yanı sıra bir tam metrik uzaydır. $\mathbb{G}: X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$(\mathbb{G}x)(t) = a + \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

ile tanımlayalım. Buradan $\mathbb{G}$ bir $\perp$ -süreklidir.

Şimdi $\mathbb{G}$ 'nin $\perp$ -koruyan olduğunu gösterelim. $x \perp y$ ve $t \in \mathfrak{I}$ ile her $x, y \in X$ için

$$(\mathbb{G}x)(t) = a + \int_0^t f(s, x(s)) ds \geq 1$$

dir. Buradan $[(\mathbb{G}x)(t)] [(\mathbb{G}y)(t)] \geq (\mathbb{G}y)(t)$ ve bu yüzden $(\mathbb{G}x)(t) \perp (\mathbb{G}y)(t)$ dir.

$\mathbb{G}$ 'nin $\perp$ -koruyandır.

Şimdi $\mathbb{G}$ 'nin Sonuç 4.4.1 ile $F(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ sağladığını söyleyebiliriz. Buradan (4.25) diferensiyel denkleminin bir tek pozitif çözümü vardır.

Teorem 4.4.1'de F fonksiyonunun koşullarına (F4) ekleyerek, $\kappa(X)$ yerine $CB(X)$ 'i düşünerek aşağıdaki teoremimizi ispatlıyoruz.

Teorem 4.4.3. $(X, \perp, \rho)$ $\mathcal{O}$ -tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: X \rightarrow CB(X)$ olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\{x_0\} \perp \mathcal{T}x_0$ veya $\mathcal{T}x_0 \perp \{x_0\}$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- (ii) Tüm $x, y \in X$ $x \perp y$ için $\mathcal{T}x \perp \mathcal{T}y$ anlamına gelir,
- (iii) $\{x_n\}$, X 'te $x_n \rightarrow x^*$ olacak şekilde ortogonal bir diziyse, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \perp x^*$ veya $x^* \perp x_n$ 'tür,
- (iv) $\mathcal{T}$, genelleştirilmiş küme değerli ortogonal F -büzülmedir.

O halde $\mathcal{T}$ en az bir sabit noktaya sahiptir (Acar ve Erdoğan, 2023).

İspat. $x_0 \in X$ olsun. $\forall x \in X$ için $\mathcal{T}x$ boş olmadığından (i) varsayımına göre $x_0 \perp x_1$ veya $x_1 \perp x_0$ olacak şekilde $x_1 \in \mathcal{T}x_0$ vardır. (ii) varsayımıyla $\mathcal{T}x_0 \perp \mathcal{T}x_1$ elde ederiz; yani $x_2 \in \mathcal{T}x_1$ vardır ki, öyle ki $x_1 \perp x_2$ veya $x_2 \perp x_1$ olur. $x_1 \in \mathcal{T}x_1$ ise $x_1, \mathcal{T}$ 'nin sabit noktasıdır. $x_1 \notin \mathcal{T}x_1$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{T}x_1$ kapalı olduğundan $\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1) > 0$ dır. $\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1) \leq \mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1))$$

elde ederiz. Bu nedenle (iv)'i kullanarak

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) \\ & \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq F(\mathcal{M}(x_0, x_1) + L \cdot \mathcal{N}(x_0, x_1)) - \tau \\ & = F\left(\max\left\{\begin{array}{l} \rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_0), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \\ \frac{1}{2}\{\mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_1) + \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_0)\} \\ +L \min\{(x_0, \mathcal{T}x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_0)\} \end{array}\right\}\right) - \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \frac{1}{2}\mathcal{D}(x_0, \mathcal{T}x_1)\right\}\right) - \tau \\
&\leq F\left(\max\left\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1), \frac{1}{2}[\rho(x_0, x_1) + \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)]\right\}\right) - \tau \\
&\leq F(\max\{\rho(x_0, x_1), \mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)\}) - \tau \\
&= F(\rho(x_0, x_1)) - \tau.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

(F4)'den aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) = \inf_{y \in \mathcal{T}x_1} F(\rho(x_1, y)).$$

(4.26) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{D}(x_1, \mathcal{T}x_1)) &= \inf_{y \in \mathcal{T}x_1} F(\rho(x_1, y)) \\
&\leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \\
&\leq F(\rho(x_0, x_1)) - \tau \\
&< F(\rho(x_0, x_1)) - \frac{\tau}{2}.
\end{aligned}$$

Bu işleme devam ederek, tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in \mathcal{T}x_n$ olacak şekilde X 'te $\{x_n\}$ ortogonal bir dizi oluşturulabilir. Böylece tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \perp x_n$ veya $x_n \perp x_{n+1}$ elde edilir. Tüm $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \in \mathcal{T}x_n$ ise, x_n $\mathcal{T}$ 'nin sabit bir noktasıdır. Yani $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \notin \mathcal{T}x_n$ olduğunu varsayabiliriz. $\mathcal{T}x_n$ kapalı olduğundan tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n) > 0$ dır. Ayrıca $\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n) \leq \mathcal{H}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x_n)$ olarak (F1)'i kullanarak

$$F(\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n)) \leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n))$$

elde ederiz. (iv)'den

$$\begin{aligned}
&F(\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n)) \\
&\leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n)) \\
&\leq F(\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) + L \cdot \mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)) - \tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F \left(\max \left\{ \begin{aligned} &\rho(x_{n-1}, x_n), \mathcal{D}(x_{n-1}, \mathcal{T}x_{n-1}), \mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n), \\ &\frac{1}{2} \{ \mathcal{D}(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) + \mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_{n-1}) \} \\ &+ L \min \{ \mathcal{D}(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n), \mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_{n-1}) \} \end{aligned} \right\} \right) - \tau \\
&= F \left(\max \left\{ \begin{aligned} &\rho(x_{n-1}, x_n), \mathcal{D}(x_{n-1}, \mathcal{T}x_{n-1}), \mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n), \\ &\frac{1}{2} \{ \mathcal{D}(x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) + \mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_{n-1}) \} \end{aligned} \right\} \right) - \tau \\
&\leq F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \tau \\
&< F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \frac{\tau}{2}.
\end{aligned}$$

$$F(\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n)) = \inf_{\psi \in \mathcal{T}x_n} F(\rho(x_n, \psi))$$

olarak yazılabilir. Böylece bu eşitliği kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{D}(x_n, \mathcal{T}x_n)) &= \inf_{\psi \in \mathcal{T}x_n} F(\rho(x_n, \psi)) \\
&\leq F(\mathcal{H}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n)) \\
&\leq F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \tau \\
&< F(\rho(x_{n-1}, x_n)) - \frac{\tau}{2}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Böylece (4.27)'den X 'de $x_{n+1} \in \mathcal{T}x_n$ olacak şekilde bir dizi $\{x_n\}$ elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$F(\rho(x_n, x_{n+1})) < F(\rho(x_{n-1}, x_n)).$$

İspatın geri kalanı Teorem 4.4.1'in ispatında olduğu gibi tamamlanabilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Sonuç 5.1.1. $(X, \perp, \rho)$ $\mathcal{O}$ -tam metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ortogonal bir eleman ve $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i) $\mathcal{T}$ bir $\perp$ -koruyandır.
- ii) $\mathcal{T}$ dönüşümü ortogonal F -büzülmedir. Yani

$$\forall x, y \in X \text{ için } x \perp y \Rightarrow [\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0 \Rightarrow \tau + F(\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(\rho(x, y))]$$

dir.

- iii) $\mathcal{T}$ dönüşümü bir $\perp$ -süreklidir.

$\mathcal{T}$ 'nin X 'de bir tek sabit noktası mevcuttur.

Sonuç 5.1.2. (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}, X$ 'den X 'e bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için $\alpha \in (0,1)$ için

$$\rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \rho(x, y)$$

sağlansın. $\mathcal{T}$ dönüşümünün tek bir sabit noktası mevcuttur.

5.2 Öneriler

Ortogonal metrik uzaylar, son yıllarda sabit nokta teori için ilgi çeken bir çalışma alanı olmuştur. Bu teorinin ilgi çeken bir araştırma olmasının nedeni; verilen bir X kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ dönüşümü için büzülme şartı sadece kümedeki ortogonal elemanlar için sağlanmasıdır. Sabit nokta problemi bir diferensiyel denkleme karşılık geldiği için diferensiyel denklemin çözüm metoduna bir imkân sağlar. Tezimizin orijinal bölümünde ortogonal metrik uzaylarda hemen hemen büzülme dönüşümleri kullanılarak adi diferensiyel denklemlere uygulaması verilmiştir. Literatürde var olan birçok sabit nokta problemi ortogonal metrik uzaylarda genelleştirilerek farklı tip diferensiyel denklemlerin çözüm metodlarına yenileri eklenebilir. Dolayısıyla ortogonal metrik uzaylarda farklı tip büzülme dönüşümleri tanımlanarak, bu tip büzölmelere karşılık gelen diferensiyel denklemlerin yeni çözüm yolları bulunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Acar, Ö., 2017, A Fixed Point Theorem for multivalued almost F δ -contraction. *Results in mathematics*, 72(3), 1545-1553.
- [2] Acar, Ö., Durmaz, G., Minak, G. 2014, Generalized multivalued FS -contractions on complete metric spaces. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40(6), 1469-1478.
- [3] Acar, Ö., Erdoğan E., 2022, Some fixed point results for almost contraction on orthogonal metric space, *Creat. Math. Inform.*, 31(2), 147-153.
- [4] Acar, Ö., Erdoğan E., 2023, Generalized Multivalued F-Contraction On Orthogonal Metric Space, *Fixed Point Theory* (Accepted).
- [5] Acar, Ö., Erdoğan., E., Özkapu, A. S., 2022, Generalized integral type mappings on orthogonal metric spaces, *Carpathian Mathematical Publications*.
- [6] Acar, Ö., Özkapu, A. S., Erdoğan., E., 2022, Some fixed point result on orthogonal metric space, *Bulletin of Computational Applied Mathematics*,.
- [7] Acar, Ö., Özkapu, A. S., 2022, Multivalued rational type F-contraction on orthogonal metric space, *Mathematical Foundations of Computing*, 0, Doi: 10.3934/mfc.2022026 (Yayın No: 7759008).
- [8] Agarwal, R. P., Fulga, A., Karapınar, E. 2020, A survey: F-contractions with related fixed point results (art. number: 69). *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22.
- [9] Altun, I., Minak, G., Dag, H. 2015, Multivalued F-contractions on complete metric spaces.
- [10] Banach, S. 1922, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, 3(1), 133-181.
- [11] Baghani, H., Eshaghi Gordji, M., Ramezani, M. 2016. Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed point theorem. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18, 465-477.
- [12] Bizim, O. 2013, Genel topoloji. *Dora Basım-Yayın Dağıtım Limited Şti.*
- [13] Berinde, V., 2003, On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings. *Carpathian J. Math.*, 19(1), 7-22.
- [14] Berinde, V., 2003a, Approximating fixed points of weak ϕ -contractions using the Picard iteration, *Fixed Point Theory*, 4, No. 2, 131-142
- [15] Berinde, V., 2004, Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *In Nonlinear Analysis Forum* (Vol. 9, pp. 43-54).
- [16] Chatterjea, S.K., 1972, Fixed-point theorems, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 25, 727-730.

- [17] Daffer, P. Z., Kaneko, H. 1995, Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 192(2), 655-666.
- [18] Gordji, M.E., Ramezani, M., De la Sen, M. and Cho, Y.J., 2017, On orthogonal sets and Banach fixed point theorem, *Fixed Point Theory*, 18(2), 569-578pp
- [19] Gungor, N. B., Turkoglu, D. (2019, December), Fixed point theorems on orthogonal metric spaces via altering distance functions. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2183, No. 1, p. 040011). AIP Publishing LLC.
- [20] Kannan, R., 1969, Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math.*, 30, 71-76.
- [21] Koçak, M. 2015. Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. *Nisan Kitapevi Yayınları*, Eskişehir.
- [22] Klim, D., Wardowski, D. 2007, Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(1), 132-139.
- [23] Kumar, S., & Luambano, S. 2021, On some fixed point theorems for multivalued F-contractions in partial metric spaces. *Demonstratio Mathematica*, 54(1), 151-161.
- [24] Lj. B. 'Ciri'c, 2009, Multi-valued nonlinear contraction mappings, *Nonlinear Anal.*, 71, 2716-2723.
- [25] Luambano, S., Kumar, S., Kakiko, G. 2019, Fixed point theorem for F-contraction mappings, in partial metric spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 40, 183-188.
- [26] Mani, G., Gnanaprakasam, A. J., Mishra, L. N., Mishra, V. N. 2021, Fixed point theorems for orthogonal F-Suzuki contraction mappings on O-complete metric space with an applications. *Malaya Journal of Matematik*, 9(1), 369-377.
- [27] Mucuk, O. 2010, Topoloji ve kategori. *Nobel Yayın Dağıtım*.
- [28] Nadler, S. B., 1969, Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30, 475-488.
- [29] Roy, R., Goswami, N., Mishra, L. N., Mishra, V. N. (2021, September), Wardowski type cyclic F-contraction mappings in orthogonal metric spaces and some proximity point results. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2364, No. 1, p. 020033). AIP Publishing LLC.
- [30] Sawangsup, K., Sintunavarat, W. 2020, Fixed point results for orthogonal Z-contraction mappings in O-complete metric space. *Int. J. Appl. Phys. Math*, 10(1), 33-40.
- [31] Sawangsup, K., Sintunavarat, W., Cho, Y. J., 2020, Fixed point theorems for orthogonal F-contraction mappings on O-complete metric spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22(1), 1-14.

- [32] Senapati, T., Dey, L. K., Damjanović, B., & Chanda, A. 2018, New fixed point results in orthogonal metric spaces with an application. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 42(4), 505-516.
- [33] S. Kumar and M. Asim, 2022, Fixed Point Theorems for a Pair of Ordered F-contraction mappings in Ordered Metric Spaces, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, Vol. 25, No.1, 17-28.
- [34] Van Dung, N. 2022, Notes on orthogonal-complete metric spaces. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 105(1), 154-160.
- [35] Yang, Q., Bai, C. 2020, Fixed point theorem for orthogonal contraction of Hardy Rogers-type mapping on O-complete metric spaces. *AIMS Math*, 5(6), 5734-5742.
- [36] Wangwe, L., Kumar, S. 2022, Common Fixed Point Theorems for-Kannan–Suzuki Type Mappings in TVS-Valued Cone Metric Space with Some Applications. *Journal of Mathematics*, 2022.
- [37] Wardowski, D., 2012, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2012:94, 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Eşref ERDOĞAN
Uyruğu : T.C. Vatandaşı

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Özel Kayseri Final Temel Lisesi, Kocasinan, Kayseri	2016
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi	2020
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi	2023
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
-----	-------	--------

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

- İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

ORCID NO: 0000-0003-0823-3258

YAYINLAR

- Acar, Ö., Erdoğan E., 2022, Some fixed point results for almost contraction on orthogonal metric space, *Creat. Math. Inform.*, 31(2), 147-153.
- Acar, Ö., Erdoğan E., 2023, Generalized Multivalued F-Contraction On Orthogonal Metric Space, *Fixed Point Theory* (Accepted).
- Acar, Ö., Erdoğan., E., Özkapu, A. S., 2022, Generalized integral type mappings on orthogonal metric spaces, *Carpathian Mathematical Publications*.

- Acar, Ö., Özkapu, A. S., Erdoğan, E., 2022, Some fixed point result on orthogonal metric space, *Bulletin of Computational Applied Mathematics*.

ULUSLARASI BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN VE BİLDİRİLER:

- Erdoğan, E., Acar, Ö., 2022, Fixed Point Results For Almost F-Type Contraction, *Turkish Journal of Mathematics- Studies on Scientific Developments in Geometry, Algebra and Applied Mathematics* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
- Erdoğan, E., Özkapu, A. S., Acar, Ö., 2022, The New Aspect to Fixed Point Theory on Orthogonal Metric Space, *International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting (ICOMSS'22)* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).
- Erdoğan, E., Özkapu, A. S., Acar, Ö., 2023, The New Perspective to Fixed Point Theory for Almost F-Type Contraction on Orthogonal Metric Space, *International Mathematics and Statistics Student Research Symposium (IMSSRS'23)* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).
- Erdoğan, E., Acar, Ö., 2023, The New Perspective to Fixed Point Theory on Weak Partial Metric Space, *International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting (ICOMSS'23)* (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).