

**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI**

DOKTORA TEZİ

**KANTİL EŞBÜTÜNLEŞME TESTİ
ÖNERİSİ**

**Aysun TURFANDA
2502190071**

**TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. Burak GÜRİŞ**

İSTANBUL - 2023

ÖZ
KANTİL EŞBÜTÜNLEŞME TESTİ ÖNERİSİ
AYSUN TURFANDA

Kantil eşbütünleşme analizleri ekonomik değişkenler arasındaki doğrusal ilişkileri araştırmaktadır. Ancak ekonomik değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olmadığı durumlarda, doğrusallığa dayanan testlerin kullanılması sonuçların hatalı olmasına yol açabilir. Literatürde en yaygın kullanılan kantil eşbütünleşme testleri Xiao (2009) ve Kuriyama (2016) dır.

Bu tez çalışmasının amacı, değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri farklı yüzdelik dilimlerle açıklamaktır. Ancak, bildiğimiz kadarıyla, hiçbir çalışma doğrusal olmayan ESTAR yapının kantille modellendiği bir kantil eşbütünleşme testi önermemiştir. Bu nedenle, doğrusal olmayan kantil eşbütünleşme testi geliştirilmeye çalışılmıştır.

Tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak kantil kavramı açıklanmış ve değişkenler arasındaki ilişkinin farklı yüzdelik dilimlerde incelenbildiği kantil regresyon yöntemi incelenmiştir. İkinci bölümde birim kök kavramı ve kantil birim kök testleri anlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise kantil eşbütünleşme testleri ve doğrusal olmayan eşbütünleşme testleri anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise Kantil Eşbütünleşme Test Önerisi ve önerilen test adımlarını göstermek amacıyla örnek bir uygulamaya yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kantil, Kantil Eşbütünleşme, Doğrusal Olmayan Kantil Eşbütünleşme Testi

ABSTRACT

QUANTILE COINTEGRATION TEST PROPOSAL

AYSUN TURFANDA

Quantile cointegration analyzes investigate linear relationships between economic variables. However, in cases where the relationships between economic variables are not linear, the use of tests based on linearity may lead to erroneous results. The most commonly used quantile cointegration tests in the literature are Xiao (2009) and Kuriyama (2016).

The aim of this thesis study is to explain the nonlinear relationships between the variables with different percentiles. However, to the best of our knowledge, no study has proposed a quantile cointegration test in which the nonlinear ESTAR structure is modeled with a quantile. Therefore, a nonlinear quantile cointegration test has been attempted to be developed.

Thesis work consists of 4 parts. In the first chapter, the concept of quantile is explained first and the quantile regression method, in which the relationship between variables can be examined in different percentiles, is examined. In the second part, the concept of unit root and quantile unit root tests are explained. In the third part, quantile cointegration tests and nonlinear cointegration tests are explained. In the fourth part, a sample application is given to show the quantile cointegration test proposal and suggested test steps.

Keywords: Quantile , Quantile Cointegration, Nonlinear Quantile Cointegration Test

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, normallik varsayımı sağlanmadığı durumlar için doğrusal olmayan kantil eşbütünleşme testi önerilmektedir. Doğrusal olmama durumu üstel yumuşak geçişli otoregresif (ESTAR) yapı ile modellenmiştir.

Bu tez çalışmasının her aşamasında desteğini ve bilgisini benden esirgemeyen, yardımlarıyla her an yanımda olan, çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Burak Güriş'e sonsuz teşekkür ederim. Çok değerli tez izleme komitesi üyelerim Prof.Dr.Nilgün Çil ve Prof.Dr.Nurcan Metin'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tez hazırlık aşamasında her an yanımda olan, hep beni motive eden çok değerli arkadaşlarıma ve destekleriyle benim bugünlere gelmemi sağlayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İSTANBUL, 2023

AYSUN TURFANDA

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

KANTİL KAVRAMI VE KANTİL REGRESYON YÖNTEMİ

1.1.Kantil Kavramı	2
1.2.Anakütlenin Modellenmesi.....	2
1.2.1.Kümülatif (Birikimli) Dağılım Fonksiyonu	2
1.2.2.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	3
1.2.3.Kantil Fonksiyonu.....	4
1.2.4.Kantil Yoğunluk Fonksiyonu.....	6
1.3.Kantil Regresyon.....	7
1.3.1. Kantil Regresyon Yönteminin Özellikleri	11
1.3.2. Kantil Regresyon Parametre Tahminleri.....	13
1.3.2.1.Sıra İstatistiği Tahmincisi	14
1.3.2.2.Bootstrap Tahmincisi	15
1.3.2.3.Kernel Tahmincisi.....	18

İKİNCİ BÖLÜM

KANTİL BİRİM KÖK TESTLERİ

2.1.Kantil Birim Kök Testleri	23
2.1.1.Koenker-Xiao (2004) Kantil Birim Kök Testi	24
2.1.2.Galvao (2009) Kantil Birim Kök Testi	29
2.1.3.Li-Park (2016) Doğrusal Olmayan Kantil Birim Kök Testi	32

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

EŞBÜTÜNLEŞME TESTLERİ

3.1.Kantil Eşbütünleşme Testleri.....	42
3.1.1.Xiao (2009)	43
3.1.2.Kuriyama(2016)	45
3.2.Doğrusal Olmayan Eşbütünleşme Testleri	49
3.2.1.Enders ve Siklos (2001) Eşbütünleşme Testi.....	49
3.2.2.Kapetanious, Shin ve Snell (2006) Eşbütünleşme Testi	51
3.2.2.Seo (2006) Eşbütünleşme Testi.....	55

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

KANTİL EŞBÜTÜNLEŞME TESTİ ÖNERİSİ

4.1. Kantil Doğrusal Olmayan Eşbütünleşme Testi Önerisi	57
4.2.Önerilen Test ile Uygulama Örneği.....	63
SONUÇ	68
KAYNAKÇA.....	70
ÖZGEÇMİŞ	79

TABLÖLER LİSTESİ

Tablo 4. 1: OLS v.s. Median regression estimation of β , T=100	58
Tablo 4. 2: OLS v.s. Median regression estimation of β , T=200	58
Tablo 4. 3: Tanımlayıcı İstatistikler	63
Tablo 4. 4: Geleneksel Birim Kök Test Sonuçları	64
Tablo 4. 5: Kapetanious vd.(2003) Birim Kök Test Sonuçları	64
Tablo 4. 6: Sollis(2009) Birim Kök Test Sonuçları	65
Tablo 4. 7: Kruse(2011) Birim Kök Test Sonuçları	65
Tablo 4. 8: SPX için Koenker -Xiao(2004)Kantil Birim Kök Test Sonuçları	66
Tablo 4. 9: TSLA için Koenker -Xiao(2004)Kantil Birim Kök Test Sonuçları	66
Tablo 4. 10: Kapetanious, Shin ve Snell (2006) Eşbütünleşme Test Sonuçları	67
Tablo 4. 11: Önerilen Kantil Eşbütünleşme Testi Sonuçları	67

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu.....	3
Şekil 1.2: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	4
Şekil 1.3: Kantil Fonksiyonu Grafiği.....	5
Şekil 1.4: Kantil Regresyon Amaç Fonksiyonu	11



KISALTMALAR LİSTESİ

ADF	: Genişletilmiş Dickey Fuller (Augmented Dickey Fuller)
AR	: Otoregresif Model
CADF	: Covariate Augmented Dickey-Fuller
CDF	: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu
CKSS	: Covariate-KSS
CQAR	: Covariate Quantile Autoregressive Model
DF	: Dickey Fuller
EKK	: En Küçük Kareler Yöntemi
ESTAR	: Üstel Yumuşak Geçişli Otoregresif (Exponential Smooth Transition Threshold Autoregressive)
FMOLS	: Tamamen Değiştirilmiş Sıradan En Küçük Kareler (Fully Modified Ordinary Least Squares)
GMM	: Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi
i.i.d	: Bağımsız ve Özdeş Dağılmış
KPSS	: Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin
KSS	: Kapetanios, Shin ve Snell
LAD	: En Küçük Mutlak Sapmalar
MSE	: Ortalama Hata Kare (Mean Squared Error)
MTAR	: Momentum Eşik Değerli Otoregresif Model (Momentum Threshold Autoregressive)
OLS	: Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi (Ordinary Least Squares)

PDF	: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
PP	:Phillips-Perron
QF	:Kantil Fonksiyonu
QAR	: Kantil Otoregresif Model
QCM	: Quantile Cramer-von Mises
QDF	: Kantil Yoğunluk Fonksiyonu
QESTAR	: Kantil Üstel Yumuşak Geçişli Otoregresif
QKS	: Quantile Kolmogorov-Simironov
QSETAR	: Quantile Self- Exciting Threshold Autoregressive
QSTAR	: Quantile Smooth Transition Autoregressive
QTAR	:Quantile Threshold Autoregressive
QUR	: Kantil Birim Kök Testi
SETAR	: Kendinden Uyarımlı Eşik Değerli Otoregresif (Self Exciting Threshold Autoregressive)
STAR	: Yumuşak Geçişli Otoregresif (Smooth Transition Threshold Autoregressive)
STD	: Standart Sapma (Standard Deviation)
SPX	: Standard & Poors Borsa Endeksi
TSLA	: Tesla Hissesi

GİRİŞ

Zaman serileri üzerine yapılan çalışmalar çoğunlukla serilerin doğrusal olduğu varsayımı altında yapılmaktadır. Ancak zaman serileri çoğunlukla doğrusal olmayan bir yapı sergilemektedir. Doğrusal olmayan bu yapıyı açıklayacak modellere literatürde ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyaçtan yola çıkılarak çalışmalar yapılmış, pek çok birim kök ve eşbütünleşme testi zamanla ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı, değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri farklı yüzdelik dilimlerle açıklamaktır. Bu nedenle, doğrusal olmayan kantil eşbütünleşme testi geliştirilmeye çalışılmıştır. Çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak kantil kavramı açıklanmış ve kantil regresyon yöntemi incelenmiştir. İkinci bölümde birim kök kavramı ve kantil birim kök testleri anlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise kantil eşbütünleşme testleri ve doğrusal olmayan eşbütünleşme testleri anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise Kantil Eşbütünleşme Test Önerisi ve önerilen test adımlarını göstermek amacıyla örnek bir uygulamaya yer verilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

KANTİL KAVRAMI VE KANTİL REGRESYON YÖNTEMİ

1.1. Kantil Kavramı

Kantil, küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir seriyi parçalara bölen değerler olarak adlandırılmaktadır. Kantiller seriyi böldükleri kısım sayısına göre isim alır. Seriyi iki eşit parçaya bölen değerlere medyan(ortanca) denir. Medyan aynı zamanda ikinci kartildir. Seriyi dört eşit parçaya ayıran değerler kartil, on eşit parçaya ayıran değerlere desil ve yüz eşit parçaya ayıran değerlere persantil (yüzde birlik) denir.¹

1.2. Anakütlenin Modellenmesi

Bu bölümde anakütle modellenmesinde kullanılan yöntemler sırasıyla açıklanacaktır.

1.2.1. Kümülatif (Birikimli) Dağılım Fonksiyonu

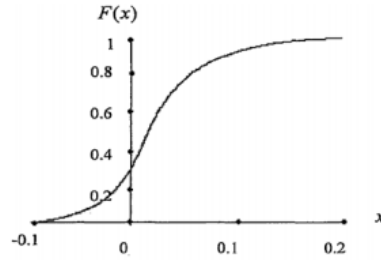
$F(X)$ sembolü ile gösterilen birikimli olasılık fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$F(X) = \text{Olasılık}(\text{tesadüfi değişken } X \leq x) \quad (1.1)$$

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1.2)$$

Azalan kümülatif dağılım fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde grafikte gösterilir.

¹ Özer Serper, *Uygulamalı İstatistik 1*, 5.Baskı-Bursa, Ezgi Kitabevi, 2004.



Şekil 1. 1:Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Kaynak:Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, İrem Saçaklı, 2005.

Azalan kümülatif dağılım fonksiyonu '0' olasılık değerinden başlar '1' olasılık değerine doğru devam eder. Alınan bir olasılık değeri için θ örnekten elde edilen değerlerin x değerlerine göre şeklini gösterir. Kümülatif dağılım fonksiyonu dağılımının tanımını gösterir.²

1.2.2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Bir değişkene ait değerler ile söz konusu değerleri alma olasılığı arasındaki ilişkiyi açıklayan fonksiyondur.³ $f(x)$ ile tanımlanır.Aşağıdaki eşitlik ile gösterilir.

$$f(x)dx = \text{Olasılık}(x \leq X \text{ tesadüfi değişken} \leq x + dx) \quad (1.3)$$

yani

$$f(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx) \quad (1.4)$$

Burada dx , x 'in sonsuza doğru küçük aralığıdır.

Kümülatif dağılım fonksiyonu ve $f(x)$ ilişkisi aşağıdaki gibi gösterilir.

² Warren G.Gilchrist, "Statistical Modelling with Quantile Functions", Florida:Chapman &Hall/CRC, 2000, s.10.

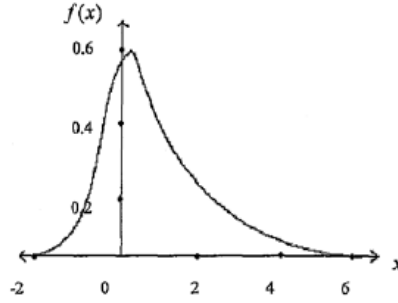
³ Bedriye Saraçoğlu, Ferhan Çevik, **Matematiksel İstatistik**, Ankara:Gazi Büro Kitabevi, 1995, s.67.

$$f(x)dx = F(x + dx) - F(x) = dF(x) \quad (1.5)$$

Söz konusu fonksiyonda da gösterildiği üzere $f(x)$, kümülatif dağılım fonksiyonun türevidir. Bu eşitlik aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$f(x) = dF / dx \quad (1.6)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikte ifade etmek gerekirse aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 1. 2:Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Kaynak:Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, İrem Saçaklı, 2005.

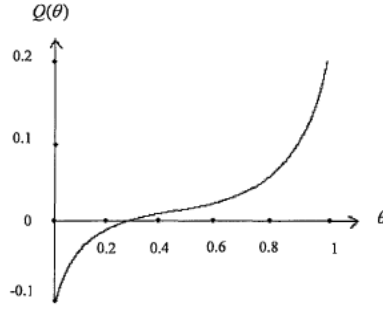
Eğrinin altında gösterilen alanın herhangi bir noktadaki toplam olasılığı “1” olur.

1.2.3. Kantil Fonksiyonu

Bir dağılımı tanımlamanın diğer bir yoludur. QF ve $Q(\theta)$ ifadeleriyle gösterilmektedir. Kantil değeri, dağılımı ikiye bölen değer olarak tanımlanabilir. Yani değerlerin % θ 'sı, θ . kantilden daha küçüktür geriye kalanlar ise daha büyüktür. θ ise olasılık değerini göstermektedir.

$$x_{\theta} = (X \leq x_{\theta}) \quad (1.7)$$

olasılığı için x 'in değeridir.



Şekil 1. 3: Kantil Fonksiyonu Grafiği

Kaynak:Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, İrem Saçaklı, 2005.

Fonksiyonlar herhangi (x, θ) ikilisi için $x\theta = Q(\theta)$ ve $\theta = F(x)$ şeklinde gösterilebilir. Bu fonksiyonlar sürekli artan fonksiyonlar olarak gösterilmektedir.⁴ Fonksiyon;

$$Q(\theta) = F^{-1}(\theta) \text{ ve } F(x) = Q^{-1}(\theta) \quad (1.8)$$

şeklinde gösterilebilir.

$Q(\theta)$ kantil fonksiyonu $0 \leq \theta \leq 1$ kantil değerlerini alır. Medyan $Q(0.5)$ 'lik kantile eşittir ve seriyi ikiye böler. Birinci kantil $Q(0.25)$ değerine, üçüncü kantil ise $Q(0.75)$ değerine eşittir.

Normal dağılım tabloları standart normal dağılım için kantil fonksiyon tabloları olarak kullanılabilir.⁵

Dağılımları modelleyebilmek için bir diğer yöntem kantil fonksiyon kullanmaktır. x belli ise y bağımlı değişkeninin θ 'cı kantili,

$$Q_y(\theta/x) = \beta x + \eta S + (\theta) \quad (1.9)$$

⁴ Warren G.Gilchrist, a.g.e., s.13.

⁵ Warren G.Gilchrist, a.g.e., s.10.

olarak ifade edilir.

Denklemden;

$\eta S(\theta)$ = artık terimini

$S(\theta)$ =simetrik olması gerekmeyen kantil fonksiyonu

η = ölçek parametresini göstermektedir.

1.2.4. Kantil Yoğunluk Fonksiyonu

Kantil dağılım fonksiyonunun türevi alınarak olasılık yoğunluk fonksiyonunu oluşturmayı yukarıda göstermiştik. Aynı şekilde kantil fonksiyonunun (QF) türevi alınarak kantil yoğunluk fonksiyonu (QDF) belirlenebilir. Kantil yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$q(\theta) = \frac{qQ(\theta)}{d\theta} \quad (1.10)$$

$Q(\theta)$ azalmayan bir fonksiyon olduğu için eğimi $q(\theta)$ her zaman pozitiftir, $0 \leq \theta \leq 1$ aralığında değer alır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise sonsuz tanım aralığında gösterilir.

Serinin mod değerinin olasılığına göre çarpıklık yönü belirlenir. ($p - \text{mod} \geq 0,5$) olması durumunda dağılım sola çarpıktır, ($p - \text{mod} \geq 0,5$) olması durumunda ise dağılım sağa çarpıktır. Dağılım sola çarpıksa $q(\theta)$ ile gösterilen yoğunluk fonksiyonu $q(\theta) \leq q(1 - \theta)$ durumunu sağlar, $0 \leq \theta \leq 0,5$ 'tir. Bu durumda, kantil fonksiyonu. $Q(\theta) + Q(1 - \theta) \leq 2Q(0,5)$ şeklinde ifade edilir. Ortalama $\leq$ medyan $\leq$ mod sıralaması bu şekilde sağlanır.

Dağılım sağa çarpıksa, $q(\theta)$ yoğunluk fonksiyonu durumunu sağlar, yani $0 \leq \theta \leq 0,5$ şeklinde gösterilir.

Kantil fonksiyonu $Q(\theta) + Q(1 - \theta) \geq 2Q(0,5)$ ise ortalama $\geq$ medyan $\geq$ mod sıralaması sağlanır.⁶

1.3. Kantil Regresyon

Kantil regresyon kavramı, Koenker ve Bassett (1978) tarafından literatüre kazandırılmıştır.⁷ Hata terimlerinin normalliği temel varsayımını ihmal eden dirençli bir tekniğidir.⁸ Kantil regresyon modeli hata terimlerinin sabit olmamasına izin verir ve varyansın yapısına ilişkin bir varsayımı yoktur. Kantil Regresyon Modeli aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$Y_t = \beta + e_t \quad (1.11)$$

Y_t simetrik F dağılım fonksiyonuna sahip aynı zamanda bağımsız, özdeş, tesadüfi bir değişkendir. τ . örnek kantili,

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \{ \sum_{i: y_i \geq \beta} \theta |y_i - \beta| + \sum_{i: y_i < \beta} (1 - \theta) |y_i - \beta| \} \quad (1.12)$$

ile ifade edilir.⁹ Burada doğrusal regresyon modeli;

$$y_i = x_i' \beta + e_t \quad (1.13)$$

θ . kantil,

⁶ İrem Saçaklı, Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 2005.

⁷ Roger Koenker, Gilbert Bassett, Jr., “Regression Quantiles”, **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, 46(1), 1978, 33-50.

⁸ Colin Chen, “An Introduction to quantile regression and the quantreg procedure.”, Statistics and Data Analysis”, **SUGI 30, SAS Institute Inc.**, Cary, NC: 213- 230, 2005.

⁹ J.Tiago de Oliveria, Benjamin Epstein, “Some Recent Advances in Statistics”, **London: Academic Press**, 1982, s.35.

$$\theta \min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(y_i - x_i' \beta)(y_i - x_i' \beta)) \quad (1.14)$$

şeklinde tahmin edilir. Denklemden, $\text{sgn}(\alpha)$ α değerinin pozitif olması durumunda 1, negatif veya 0 olması durumunda -1 değerini alır. Kantil regresyon, tahmincilerin işaretlerine dayalıdır. Bu da kantil regresyonun dirençli bir yöntem olmasını sağlar.¹⁰ Yukarıdaki denklemde yer alan koşulun sağlanması gerekir. Bu koşul için $K \times 1$ vektörü aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\theta \min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(y_i - x_i' \beta)(y_i - x_i' \beta)) \quad (1.15)$$

Moment fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\psi(x_i, y_i, \beta) = \left(\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(y_i - x_i' \beta) \right) x_i \quad (1.16)$$

$\psi(\cdot)$ 'nın geçerli olabilmesi için,

$$E[\psi(x_i, y_i, \beta_\theta)] = 0 \quad (1.17)$$

dır. Asimptotik dağılımın genel gösterimi,

$$E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'] = \partial E[\psi(x_i, y_i, \beta_0)] / \partial \beta_\theta' \quad (1.18)$$

$$\theta(1 - \theta)E[x_i x_i'] = E[\psi(x_i, y_i, \beta_\theta)\psi(x_i, y_i, \beta_\theta)']$$

şeklinde parametre tahmincilerinin tutarlı ve asimptotik olarak normal olmaları için Genelleştirilmiş momentler yöntemiyle elde edilmeleri gerekir.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\theta - \beta_\theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_\theta) \quad (1.19)$$

¹⁰ Indermit Singh Gill, "Crafting Labor Policy: Techniques and Lessons from Latin America", Washington: World Bank, 2002, s.249.

$$\Lambda_{\theta} = \theta(1 - \theta)(E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} \quad (1.20)$$

olarak tanımlayabiliriz.

Olasılık değerinin 1 ve. $f_{u\theta}(0/x_i) = f_{u\theta}(0)$ olması durumunda, hata teriminin x 'den bağımsız olduğu söylenir ve Λ_{θ} ,

$$E(y_i/x_i) = \mu(x_i, \beta) = \mu_i \quad (1.21)$$

şeklinde kısaltılabilir. $f_{u\theta}(. / x)$ değeri x değeriyle ilişkisiz ise tüm kantillere ait parametre ve vektörler sadece kesim noktalarında farklılaşır.

Katsayı yorumu yapabilmek amacıyla kısmi türev alınır. Türev alırsak,

$$\partial Quant_{\theta}(y_i/x_i) / \partial x_{ik} \quad (1.22)$$

elde edilir.

Türev almak, x 'in k 'inci değerindeki marjinal değişime bağlı olarak, θ 'ıncı şartlı kantildeki marjinal değişimi gösterir.

Kantil regresyon tahmin edicilerinin çözümü için farklı yöntemler mevcuttur. Bu çözüm doğrusal programlama problemi olarak görülebilir ve artıkların iki parçalı doğrusal amaç fonksiyonu optimize edilerek farklı yöntemlerle çözülebilir.¹¹

Y , F dağılım fonksiyonuna sahip bağımlı değişkendir. b ise tahmin edilecek katsayı vektörü, $e_i = y_i - x_i \beta$ hata değeri olmak üzere, θ . regresyon kantili ($0 < \theta < 1$) aşağıdaki minimizasyon denklemi ile tahmin edilir.

¹¹ Roger Koenker, Kevin F. Hallock, "Quantile Regression", **Journal of Economic Perspectives**, Volume 15, 2001, 153.

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i' \beta} \theta |y_i - x_i' \beta| + \sum_{i: y_i < x_i' \beta} (1 - \theta) |y_i - x_i' \beta| \right\} = \min_{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(u_{\theta_1}) \quad (1.23)$$

y'nin θ . kantildir. Kantil regresyonun bu yukarıdaki gösterimi doğrusal programlama gösterimidir. β parametre tahmincileri;

$$\hat{\beta}(\theta) = \operatorname{argmin}_{\beta \in R^p} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(y_i - x_i \beta) \right\} \quad (1.24)$$

denklemlerle tahmin edilebilir. Burada $0 < \theta < 1$ 'dir. y ;

$$y_i = \sum_{j=1}^K x_{ij} \beta_{\theta j} + u_{\theta_1} = \sum_{j=1}^K x_{ij} (\beta_{\theta j}^1 - \beta_{\theta j}^2) + (\varepsilon_{\theta_1} - v_{\theta_1}) \quad (1.25)$$

$$\beta_{\theta j}^1 \geq 0, \quad \beta_{\theta j}^2 \geq 0 \quad (j = 1, \dots, K) \text{ ve } \varepsilon_{\theta_1} \geq 0, v_{\theta_1} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

olarak yeniden yazılabilir.

Daha iyi bir tahmin için;

$$\min_{\beta} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{u_{\theta}}(0/x) \left(\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y_i - x_i \beta) \right) (y_i - x_i \beta) \right\} \quad (1.26)$$

prosedür bilinmeyen yoğunluk, $f_{u_{\theta}}(0/x)$ için bir tahmini gerektirir.

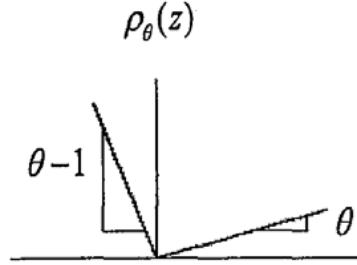
Burada I karakteristik fonksiyon, ρ_{θ} ise kontrol fonksiyonudur

$$\rho_{\theta}(z) = z(\theta - I(z \leq 0)) \quad (1.27)$$

veya

$$\rho_{\theta}(z) = \begin{cases} \theta z, & z \geq 0 \\ (\theta - 1)z, & z < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1. 4: Kantil Regresyon Amaç Fonksiyonu

Kaynak:Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, İrem Saçaklı, 2005.

şeklinde gösterilir.¹²

$\theta=0,5$ ise kantil regresyon amaç fonksiyonu LAD amaç fonksiyonuna ve I_1 regresyona eşittir diyebiliriz.¹³ Kantil regresyon amaç fonksiyonunu kısaca tanımlamak gerekirse mutlak sapmaların ağırlıklandırılmış toplamıdır.

1.3.1. Kantil Regresyon Yönteminin Özellikleri

Aşağıdaki şekilde sıralamak mümkündür:

i) Çoklu doğrusal regresyon yöntemi bağımlı değişkenin koşullu dağılımının ortalaması hakkında bilgi sağlamaktadır. Kantil regresyon ise bundan farklı olarak kantillere göre bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre koşullu dağılımının bütünü hakkında bilgi sağlamaktadır.¹⁴

¹² Roger Koenker, Kevin F.Hallock., **a.g.e.**, s.143.

¹³ S.Lee, **Lecture Notes for MECT1**, Quantile Regression, 2005.

¹⁴ Yichao Wu, Yufeng Liu, “Variable Selection in Quantile Regression.”, **Statistica Sinica**, 19, 2009, 801-817.

ii) $\min_b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_\theta(y_i - x_i' b)$ ifadesinin minimizasyonunun, doğrusal programlama (LP)

gösterimi olması model tahminini kolaylaştırmaktadır.¹⁵

iii) Kantiller monoton dönüşümlere uygundur.¹⁶ $h(\cdot)$ bir monoton fonksiyonu için

$$Q_{\frac{h(y)}{x}}(\tau/x) = h\left(Q_{\frac{y}{x}}\left(\frac{\tau}{x}\right)\right) \text{ dir.}$$

iv) Kantiller y değişkenindeki aykırı değerlere karşı dirençlidir.¹⁷

v) Hata terimleri normallik varsayımını sağlamadığında, kantil regresyon tahmin edicileri EKK tahmincilerinden daha iyi sonuç verir.

vi) Kantil regresyon değişen varyansa izin vermektedir.¹⁸

vii) Kantil regresyon amaç fonksiyonu için tahmin edilen katsayı vektörü, y bağımlı değişkenindeki aşırı gözlemlere duyarlı değildir.

viii) Farklı kantiller için farklı tahmin sonuçlarının elde edilmesi, bağımlı değişkenin koşullu dağılımının bağımsız değişkenlerdeki değişikliklere farklı tepki vermesi şeklinde açıklanabilir.

ix) Yapılan analizde $\tau = 0,5$ ise En Küçük Mutlak Sapmalar (LAD) regresyon analizine ulaşılır.¹⁹

¹⁵ Brian S.Cade, Jon D.Richards, “A Permutation Test for Quantile Regression.”, **Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics**, 11(1), 2006, 106- 126.

¹⁶ S.Lee, **a.g.e.**, s.2.

¹⁷ C.Y.Tang, C.Leng, “An Empirical Likelihood Approach to Quantile Regression with Auxiliary Information.”, **Statistics & Probability Letters**, 82(1), 2012, 29-36.

¹⁸ Onyedikachi O. John, Ethelbelt C. Nduka, “Quantile Regression Analysis as a Robust Alternative to Ordinary Least Squares.”, **Scientia Africana**, 2009, 8(2), 61-65.

¹⁹ Roger Koenker, Gilbert Bassett, Jr., **a.g.e.**, 33- 50.

1.3.2. Kantil Regresyon Parametre Tahminleri

Kalıntı karelerinin toplamını minimize eden değerleri ele alır, bu şekilde $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ için parametreleri elde eder.

$$\min \sum_i (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 \quad (1.29)$$

Bu ifade sıfıra eşitlenerek kısmi türevi alındığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.30)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (1.31)$$

Medyan regresyon modelinde aynı şekilde saf kalıntıların toplamını minimize ederek katsayılar bulunur.

$$\sum_i |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i| \quad (1.32)$$

Bu ifade minimize edildiğinde medyan regresyon doğrusuna bakarak teyit ederiz. Sonuç olarak kalıntıların yarısı pozitif yarısı negatif olmalıdır.²⁰

Alternatif varsayımlar altında, $\hat{\beta}_\theta$ için $f(0/x)$ civarında, aşağıdaki τ u $_\tau$ denklemler asimptotik kovaryans matrisi için formülleri sağlar:

$$\Lambda_\theta = \theta(1 - \theta)(E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} \quad (1.33)$$

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u\theta}^2(0)} (E[x_i x_i'])^{-1} \quad (1.34)$$

²⁰ Lingxin Hao, Daniel Q.Naiman, “Quantile Regression.”, The United States of America: Sage Publication, 2007.

Λ_τ 'daki kovaryans matrisinin tahmin edilmesindeki problemler $f_{u\tau}(0/x)$ ve $E[f_{u\tau}(0/x)xx']$ ile ilişkili olarak ortaya çıkmaktadır. Böylece Λ_τ 'ın tahmini araştırmacının tercihinin bırakılır. Her yaklaşımın avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Buchinsky (1995) çalışmasında matris için tahmincileri incelemiştir. Bu tahminciler; Sıra İstatistiği Tahmincisi, Bootstrap Tahmincisi ve Kernel Tahmincisi' dir.²¹

1.3.2.1. Sıra İstatistiği Tahmincisi

Sıra istatistiği tahmincisi, $f_{u\tau}(0/x) = f_{u\tau}(0)$ iken yani u_τ , bağımsız değişken x ' ten bağımsız ise geçerlidir. Bu durumda asimptotik kovaryans matrisi,

$$\Lambda_\theta = \sigma_\theta^2 E[x_i x_i']^{-1} \quad (1.35)$$

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u\theta}^2(\theta)} \quad (1.36)$$

olarak yazılabilir.

$\hat{E}(xx') = 1/N \sum_{i=1}^n x_i x_i'$ ile tahmin edilir. İlk terim $\sigma_\tau^2, \hat{u}_{\tau 1}, \dots, \hat{u}_{\tau n}$ 'in $[n\tau]$ 'ci sıra istatistiğinden oluşan bir güven aralığından belirlenir. Bir tesadüfi değişkenin τ . kantili için güven aralığı hesaplanabilir. Örneğin,

$$Y \approx F_Y(.) \quad (1.37)$$

benzer şekilde,

$$\Pr(y_{(j)} \leq \xi_\theta) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} \quad (1.38)$$

²¹ Moshe Buchinsky, “Estimating The Asymptotic Covariance Matrix For Quantile Regression Models A Monte Carlo Study.”, **Journal of Econometrics**, 68, 1995, s. 303-338.

gösterilebilir. Yukarıdaki denklemler yerine konulursa,

$$\Pr(y_{(j)} \leq \xi_\theta \leq y_{(k)}) = \sum_{i=j}^{k-1} \binom{n}{i} \theta^i (1 - \theta)^{n-i} \quad (1.39)$$

olur. ξ_x için $(1 - \alpha)$ seviyesinde simetrik bir güven aralığı oluşturmak iyidir.²² Bu güven aralığı,

$$\Pr(y_{[n\theta-1]} \leq \xi_\theta \leq y_{[n\theta+1]}) = \Pr([n\theta - l] \leq X < [n\theta + l]) \approx \left(\left| \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right) \quad (1.40)$$

$$\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{n(y_{(n\theta+1)} - y_{(n\theta-1)})^2}{4Z_{1-\alpha/2}^2} \quad (1.41)$$

şeklinde olacaktır. Aslında $\hat{f}_{u\tau}(0) = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tau(1-\tau)}/\sqrt{n}(y_{([n\tau+l])} - y_{([n\tau-l])})$ ile $\hat{f}_{u\tau}(0)$ belirlenebilir. Bu yöntem kantil regresyon yönteminin kovaryans matris tahmini için uygulanabilir.²³

1.3.2.2. Bootstrap Tahmincisi

Bootstrap yöntemi, üç farklı şekilde hesaplanır²⁴. Bu hesaplama yöntemleri, Desing Matris Bootstrap Tahmincisi, Hata Bootstrap Tahmincisi ve Sigma Tahmincisidir. Bootstrap yöntemi dirençli tahminler elde etmek için tercih edilir. Asimtotik matrisin tutarlı tahmincisini sağlayan desing matris bootstrap tahmincisi için bootstrap örnekleri

²² Moshe Buchinsky, "Recent Advances in Quantile Regression Models: A Practical Guideline for Empirical Research.", **The Journal of Human Resources**, Vol.33, No.1, 1998, s.88.

²³ Moshe Buchinsky, **a.g.e.**, s.101.

²⁴ B.Efron, "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife." **The Annals of Statistics**, 1979, Vol.7, No.1.

bağımsız değişken x ve bağımlı değişken y , F_{nxy} 'nin deneysel bileşik dağılımından çekilir.

F_{nxy} dağılımından elde edilen örnekler $(y_i^*, x_i^*), i = 1, \dots, n$ olduğunda,

$$y_i = x_i' \beta_\theta + u_{\theta t} \quad (1.42)$$

$$Quant_\theta(y_i/x_i) = x_i' \beta_\theta \quad (1.43)$$

Burada $Quant_\theta(y_i/x_i)$, y_i nin şartlı kantilidir. Bu ilişkiden yola çıkılarak,

$$y^* = x^* \beta_\theta + u_{\theta t}^*, \quad y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)' \quad ve \quad X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)' \quad (1.44)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\widehat{\Lambda}_\theta^{DMB} = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\beta}_{\theta j}^* - \overrightarrow{\beta_\theta})' \quad (1.45)$$

$\overrightarrow{\beta_\theta} = 1/B \sum_{j=1}^B \hat{\beta}_{\theta j}^*$, $\overrightarrow{\beta_\theta}^*$ yerine $\hat{\beta}_\theta$ 'da kullanılabilir.

$\Lambda_\theta = \theta(1 - \theta)(E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1} E[x_i x_i'] (E[f_{u\theta}(0/x_i)x_i x_i'])^{-1}$ 'de verilen $\hat{\beta}_\theta$ 'nın asimptotik kovaryansının sürekli tahmincisidir.

İkinci tahmin edici olan hata bootstrap tahmincisi ise, bağımsızlık varsayımıyla birlikte sürekli tahminciyi vermektedir. Bağımsız değişken x , F_{nx} ve u_θ , $F_{n\hat{u}\theta}$ 'nın bileşik dağılımından elde edilir.

F_{nx} ve $F_{n\hat{u}\theta}$ marjinal dağılımlarından yeniden örnekleme ile bootstrap tahmin yönteminden yararlanılabilir.

$F_{n\hat{u}\theta}$ dağılımından tesadüfi olarak seçilen örnek $n_\theta^* = (u_{\theta 1}^*, \dots, u_{\theta n}^*)'$ ve F_{nx} dağılımından yine aynı yöntemle elde edilen örnek $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)'$ olarak belirlendiğinde, Kantil Regresyon Modeli aşağıdaki şeklini alır.

$$y^* = x^* \hat{\beta}_\theta + u_\theta^* \quad (1.46)$$

Bu kantil regresyonun bootstrap tahmincisi ile çözülmesine olanak verir.

Λ_θ 'nın tahmin edicisi ise aşağıdaki şekilde Design Matris Bootstrap yöntemi kullanılarak elde edilir.

$$\hat{\Lambda}_\theta^{DMB} = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\beta}_{\theta_j}^* - \overrightarrow{\beta}_\theta) (\hat{\beta}_{\theta_j}^* - \overrightarrow{\beta}_\theta)' \quad (1.47)$$

Bağımsız olma varsayımıyla Hata Bootstrap tahmincisi, Λ_θ 'nın sürekli tahmincisidir. Bağımsız olma durumu sağlanmıyor ise, yeniden örnekleme u_θ ile bağımsız değişken x arasında olan ilişkiyi yok etmekte ve bu yöntemi kullanılamaz duruma getirmektedir. Design matris tahmincisi ve Hata Bootstrap tahmincisi için bağımsız olma varsayımı varsa; Hata Bootstrap tahmincisi avantaj sağlamamaktadır. Çünkü iki tahminci aynı hesaplama süresinde elde edilir. Küçük örneklerde bağımsızlık varsayımının sağlandığı durum için Hata Bootstrap tahmincisi avantaj sağlayabilir.

Sigma tahmincisinde kovaryans matrisinin tümü bootstrap tekniğiyle tahmin edilmez. Bu matrisin sadece bir kısmı bootstrap tekniğiyle tahmin edilmektedir. Tahmin edilebilen bu tahminci de bağımsızlık varsayımına ve daha önce açıklanan,

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u_\theta}^2(\theta)} (E[x_i x_i'])^{-1} \quad (1.48)$$

şeklindeki asimptotik kovaryans matrisine dayanır. Bu yöntem, bootstrap yöntemi ile Λ_θ gösterimini ve σ_θ^2 'nin parametrik olmayan tahminini birleştirir. σ_θ^2 'nin bir tahmincisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\hat{\sigma}_{\theta_D}^2 = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (q_{\theta_j}^* - \hat{q}_\theta)^2 \quad (1.49)$$

Burada;

$$\hat{q}^* = 1/B \sum_{j=1}^B \hat{q}_{\theta_j}^* \quad (1.50)$$

olmaktadır.²⁵

1.3.2.3. Kernel Tahmincisi

Kernel tahmincisi, kovaryans matrisinin tahmininde kullanılan bir tahmincidir. Bu tahmincinin hesaplanmasında 2 unsur önemlidir. Bunlar, Kernel fonksiyonunun ve bant genişliğinin belirlenmesidir. $E[f_{u_\theta}(0/x)xx']$ için;

$$\hat{E}[f_{u_\theta}(0/x)xx'] = (c_k^n)^{-1} \sum_{i=1}^n k(\hat{u}_{\theta_i})x_i x_i' \quad (1.51)$$

olarak hesaplanır.²⁶ Bu denklemde $k(\cdot)$ kernel fonksiyonudur.

$c_n = 0_p(1)$ kernel bant genişliğidir. $\hat{E}[xx']$ ifadesi ise;

$$\hat{E}[xx'] = \sum_{i=1}^n x_i x_i' / n \quad (1.52)$$

olarak tahmin edilir.

Kernel bant genişliği seçiminde c_n ' in optimal seçimi için doğrudan bir yöntem olmaması nedeniyle sorun ortaya çıkar.

$$\hat{E}[f_{u_\theta}(0/x)xx'] = (c_k^n)^{-1} \sum_{i=1}^n k(\hat{u}_{\theta_i})x_i x_i' \quad (1.53)$$

gösterimindeki $\hat{f}_{u_\theta}(0) = (c_n n)^{-1} \sum_{i=1}^n k(\hat{u}_{\theta_i}), f_{u_\theta}(0)$ yoğunluğunun tahminidir. c_n 'in optimal seçimini zorlaştıran da budur. Bu probleme karşı, birçok sayıda çapraz geçerlilik

²⁵ Moshe Buchinsky, **a.g.e.**, s. 308.

²⁶ J.L.Powell,"Censored Regression Quantiles.", **Journal of Econometrics**, Vol.32, No.1, 1986, s.143.

yöntemi vardır. Öncelikle c_n değeri belirlenir, sonra ilk denklemdeki $E[f_{u_\theta}(0/x)xx']$ nin tahmini için optimal olarak seçilen c_n kullanılır.

Bağımsız olma varsayımıyla $f_{u_\theta}(0)$ 'ın da tahmini gereklidir. Λ_θ kovaryans matrisinin tahmini,

$$\Lambda_\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{f_{u_\theta}^2(0)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' \right)^{-1} \quad (1.54)$$

olacaktır.²⁷

²⁷ J.L.Powell, **a.g.e.**, s.143.

İKİNCİ BÖLÜM

KANTİL BİRİM KÖK TESTLERİ

Zaman serisi verileriyle yapılan çalışmalarda serilerin durağanlık varsayımı kabul edilerek analizlere başlanır.¹ Ancak ekonomik zaman serileri çoğunlukla durağan olmayan görünümündedir.² Nelson ve Plosser (1982) durağan olmayan yapıdaki serilerin daha çok olduğunu söylemiştir.³ Bu nedenle çalışmalara başlamadan önce serilerin durağanlığı incelenmelidir. Birim kök testleri kullanılarak zaman serilerinin durağanlığı analiz edilir.⁴ Durağanlık varsayımı sağlanmıyorsa t , F ve Ki -Kare sonuçlarına güvenemeyiz.⁵

Durağanlık, bir zaman serisinin ortalamasının, varyansının ve kovaryansının zamana göre sabit olması şeklinde tanımlanır. Süreç,

$$\text{Sabit ortalama} \quad : E(Y_t) = \mu$$

$$\text{Sabit varyans} \quad : Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

$$\text{Gecikme mesafesine bağlı kovaryans} : \gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]$$

şeklinde gösterilir.⁶ Bütün t değerlerinde k =gecikme mesafesidir. Bu süreç aynı zamanda zayıf durağan süreç olarak adlandırılır.

Durağanlığın sağlanması için birim kök analizi yapılır. Birim kök testi için regresyon denklemi⁷,

¹ Ruey S.Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, University of Chicago, 3.Baskı, 2010, s.23.

² Burak Gürış, **R Uygulamalı Doğrusal Olmayan Zaman Serileri Analizi**, 1.Baskı, Der Yayınları, 2020.

³ Charles R.Nelson, Charles R.Plosser, "Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications.", **Journal of monetary economics**, 10.2, 1982, s.139-162.

⁴ Aysun Turfanda, "Doğrusal olmayan birim kök testleri: Yakınsama analizi uygulaması." MS thesis, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

⁵ Damodar N.Gujarati, **Temel Ekonometri**, 8.Baskı, Literatür Yayıncılık, 2011, s.707.

⁶ Damodar N.Gujarati, **a.g.e.**, s.707.

⁷ Burak Gürış, **a.g.e.**

$$Y_t = pY_{t-1} + u_t \quad (2.1)$$

şeklinde oluşturulur. Denkleminde yer alan p parametresi 1'e eşit ise seriler birim köklüdür. Yani seriler durağan değildir. Regresyon denklemini aşağıdaki şekilde de gösterebiliriz.

$$\Delta Y_t = (p - 1)Y_{t-1} + u_t = \delta Y_{t-1} + u_t \quad (2.2)$$

Bu denklemde test edilecek parametre δ dir. δ , parametresinin 0'a eşitliği test edilir.

Birim kök sınaması için kullanılan ilk test DF (1979) testidir. Birim kök testi için aşağıdaki regresyon denklemleri oluşturulmuştur.

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t \quad (2.3)$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t \quad (2.4)$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t \quad (2.5)$$

Birinci denklem sadece gecikmeli değerin olduğu modeldir. İkinci denklem, gecikmeli değer ve otonom parametrenin olduğu modeldir. Üçüncü denklem ise otonom parametre ve deterministik trendin gösterildiği modeldir.

Tüm denklemler için $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ olduğu varsayılmaktadır. Dickey-Fuller(1979) test istatistiği ise,

$$\tau_{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\delta}}{s_{\hat{\delta}}} \quad (2.6)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\hat{\delta}$ modellerden tahmin edilen Y_{t-1} 'in katsayısının değeri ve $S_{\hat{\delta}}$ ise $\hat{\delta}$ parametresinin standart hatasıdır. DF(1979) testi için hipotezler aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$H_0: \delta = 0$ ise seri birim köke sahiptir

$H_1: \delta < 0$ ise seri birim köke sahip değildir

Temel hipotez serinin birim köke sahip olduğunu yani durağan olmadığını gösterir. Kritik değerler DF(1979) tarafından tablolaştırılmıştır. Hesaplanan bu test istatistiği sabit ve trendin olmadığı ilk denklem için τ , sadece sabitin olduğu ikinci denklem için τ_μ , hem sabit hem de trendin olduğu üçüncü denklem için τ_τ ile ifade edilen McKinnon(1991,1996) tarafından geliştirilen kritik değerler karşılaştırılır. Hesaplanan test istatistik değeri kritik değerden küçük olduğunda temel hipotez reddedilir.

DF (1979) testi hata terimlerinin otokorelasyonlu olduğu durumda kullanılamamaktadır. Bu duruma çözüm olarak Dickey-Fuller (1981) testi geliştirilmiştir. Bağımlı değişkenin gecikmeli değerleri modele eklenerek otokorelasyon problemi ortadan kaldırılır ve gecikmeli yapıyla modele devam edilir⁸. Yeni denklemler aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (2.8)$$

$$\Delta Y_t = \mu + \beta_t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (2.9)$$

⁸ D.A.Dickey, Wayne A. Fuller, **a.g.e.**

İlk denklem sabit terim ve trend yoktur, ikinci denklemde ise sadece sabit terim yer alır, üçüncü denklemde sabit terim ve trend birlikte yer alır. Dickey-Fuller (1981) test istatistiği,

$$\tau_{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\delta}}{s_{\hat{\delta}}} \quad (2.10)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Test için hipotezler aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$H_0: \delta = 0$ ise seri birim köke sahiptir

$H_1: \delta < 0$ ise seri birim köke sahip değildir

Temel hipotez serinin birim köklü olduğunu yani durağan olmadığını göstermektedir. Hesaplanan test istatistiği sabit ve trendin olmadığı ilk denklem için τ , sadece sabitin olduğu ikinci denklem için τ_{μ} , hem sabit hem de trendin olduğu üçüncü denklem için τ_{τ} ile ifade edilen McKinnon(1991,1996) tarafından geliştirilen kritik değerler karşılaştırılır. Hesaplanan test istatistik değeri kritik değerden küçük olduğunda temel hipotez reddedilir.

2.1. Kantil Birim Kök Testleri

Birim kökün varlığının incelendiği testlerde normal dağılım şartının sağlanması gerekmektedir. Kantil birim kök testleri (QUR) asimetrik dinamiklerin varlığında klasik birim kök testlerine göre daha iyi güce sahiptir⁹. Bu bölümde Koenker-Xiao (2004) Galvao (2009) ve Li-Park (2016) testlerinde bahsedilecektir.

⁹ Roger Koenker, Zhijie Xiao, “Unit Root Quantile Autoregression Inference.”, **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 99, No. 467, 2004, s. 775-787.

2.1.1. Koenker-Xiao (2004) Kantil Birim Kök Testi

İlk geliştirilen kantil birim kök testidir. Kantil otokorelasyon yaklaşımına dayanan bu birim kök testi, serilerin kalın kuyruklu olması durumunda dirençli tahminciler sağlamaktadır. Kantil otokorelasyona dayanan Koenker-Xiao (2004) kantil birim kök testi ile inceleme yapılırken, farklı kantiller için farklı birim kök davranışları ile karşılaşmak mümkündür.¹⁰ Yöntem açıklanırken birinci dereceden otoregresif model üzerinden yola çıkılır;

$$y_t = \alpha y_{t-1} + u_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Yukarıda gösterilen birinci mertebeden otoregresif model AR(1), AR(p) modeli olarak genelleştirilebilir.

u_t 'nin τ .kantili $Q_u(\tau)$ olarak, y_t 'nin y_{t-1} üzerindeki τ . şartlı kantil gösterimi $Q_{y_t}(\tau|y_{t-1})$ olarak tanımlanmaktadır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$Q_{y_t}(\tau|y_{t-1}) = Q_u(\tau) + \alpha y_{t-1} \quad (2.12)$$

Bu denklemde $\alpha_0(\tau) = Q_u(\tau)$, $\alpha_1(\tau) = \alpha$ olmak üzere $\alpha(\tau) = (\alpha_0(\tau), \alpha_1(\tau))^T$ ve $x_t = (1, y_{t-1})^T$ olarak tanımlandığında,

$$Q_{y_t}(\tau|y_{t-1}) = x_t^T \alpha(\tau) \quad (2.13)$$

olarak gösterilir. Bu denklemde y_t 'nin τ . şartlı kantil fonksiyonu, y_t bağımlı değişkeninin gecikmeli değerlerinin bir doğrusal fonksiyonu olarak tanımlanır.

Doğrusal kantil otoregresyon modelinin tahmini,

$$\min_{\alpha \in R^2} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(y_t - x_t^T \alpha) \quad (2.14)$$

¹⁰ Ebru Çağlayan, “Reel Döviz Kurunun Asimetrik Davranışı.”, Ocak 2007, s.335-340.

probleminin çözümünü içermektedir.

Buradaki $\rho_\tau, \rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$ dır. (τ) verildiğinde, y_t 'nin τ .şartlı kantil fonksiyonu,

$$\hat{Q}_{y_t}(\tau / x_t) = x_t^\tau \hat{\alpha}(\tau) \quad (2.15)$$

olarak tahmin edilmektedir.

$$\hat{f}_{y_t}(\tau / x_t) = (\tau_i - \tau_{i-1}) / (\hat{Q}_{y_t}(\tau_i / x_t) - \hat{Q}_{y_t}(\tau_{i-1} / x_t)) \quad (2.16)$$

Doğrusal kantil otoregresyon sürecinin dağılımı Knight (1991) yaklaşımını takip etmektedir. y_t bağımlı değişkeninin durağan olmamasından dolayı, $\hat{\alpha}(\tau) = (\hat{\alpha}_0(\tau), \hat{\alpha}_1(\tau))$ 'da iki bileşen farklı yakınsama oranlarına sahiptir. $\hat{\alpha}_0(\tau), \sqrt{n}$ oranında yakınsar iken $\hat{\alpha}_1(\tau)$ n oranında yakınsamaktadır. Bu nedenle standardizasyon matrisi $D_n = \text{diag}(\sqrt{n}, n)$ olarak tanımlanmaktadır ve $\hat{v} = D_n(\hat{\alpha}(\tau) - \alpha(\tau))$ olarak gösterilmektedir.¹¹

$\rho_\tau(u_{t\tau} - (D_n^{-1}\hat{v})^T x_t)$ olan ifade $\rho_\tau(y_t - \hat{\alpha}(\tau)^T x_t)$ olarak yazılabilmektedir. Burada $u_{t\tau} = y_t - x_t' \alpha(\tau)$ dır.

$$\min_v \sum_{t=1}^n [\rho_\tau(u_{t\tau} - (D_n^{-1}v)^T x_t) - \rho_\tau(u_{t\tau})] \quad (2.17)$$

$$Z_n(v) = \sum_{t=1}^n [\rho_\tau(u_{t\tau} - (D_n^{-1}v)^T x_t) - \rho_\tau(u_{t\tau})] \quad (2.18)$$

Fonksiyonunu minimize eden $\hat{v}$ ise o halde;

¹¹ Keith Knight, "Limit theory for M-estimates in an integrated infinite variance.", **Econometric Theory** 7.2., 1991, s.200-212.

$$\hat{v} = D_n(\hat{\alpha}(\tau) - \alpha(\tau)) \text{ dir.} \quad (2.19)$$

$Z_n(v)$, konveks bir fonksiyondur.

Asimptotik analizler çeşitli varsayımlara dayanmaktadır. Bu varsayımlardan ilki, $\{u_t\}$, 0 ortalama ve $\sigma^2 < \infty$ ile iid tesadüfi değişkendir. Varsayımlardan ikincisi ise $\{u_t\}$ 'nin dağılım fonksiyonu olan $F, \{u: 0 < F(u) < 1\}$ üzerinde $0 < f(u) < \infty$ ile birlikte sürekli bir yoğunluğa sahiptir.

$u_{t\tau}$ ile $\psi_\tau(u) = \tau - I(u < 0)$ tanımlandığında $E[\psi_\tau(u_{t\tau})|F_{t-1}] = 0$ olmaktadır. QAR'ın asimptotik dağılımı $n^{-1} \sum_{t=1}^n y_{t-1} \psi_\tau(u_{t\tau})$ 'in asimptotik davranışı ile ilişkilidir. u_t ve $\psi_\tau(u_{t\tau})$ 0 ortalamalı ve ilişkilidir. İlk varsayım ile, $(u_t, \psi_\tau(u_{t\tau}))$ vektör sürecinin kısmi toplamlarını gösterir.

ADF modeliyle süreci gösteririz.¹²

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{j=1}^q \alpha_{j+1} \Delta y_{t-j} + u_t \quad (2.20)$$

Bu modelde, otoregresif katsayı α_1 durağanlık testi için kullanılır. Bu modelde, $\alpha_1 = 1$ ise y_t bir birim kök içermektedir ve $|\alpha_1| < 1$ ise y_t durağandır. F_1 aracılığı ile $\{u_s, s \leq t\}$ tarafından üretilen σ bölgesi tanımlandığında, y_t 'nin F_{t-1} üzerinde τ . şartı kantili,

$$Q_{y_t}(\tau/F_{t-1}) = Q_u(\tau) + \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{j=1}^q \alpha_{j+1} \Delta y_{t-j} \quad (2.21)$$

olarak verilmektedir.

¹² D.A.Dickey, Wayne A. Fuller, **a.g.e.**

$$\alpha_0(\tau) = Q_u(\tau) \text{ ve } \alpha_j(\tau) = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, q \quad (2.22)$$

$$\alpha(\tau) = (\alpha_0(\tau), \alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}) \quad (2.23)$$

$$x_t = (1, y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-q})' \quad (2.24)$$

olarak tanımlandığında,

$$f_n(F_n^{-1}(\tau)) = \frac{2h_n}{F_n^{-1}(\tau+h_n) - F_n^{-1}(\tau-h_n)} \quad (2.25)$$

Burada $F_n^{-1}(s), F^{-1}(s)$ 'nin bir tahmini ve $h_n, n \rightarrow \infty$ iken 0'a doğru giden bir bant genişliğini gösterir. h_n , aşağıda gösterilen farklı yöntemler ile hesaplanmaktadır.

Bofinger bant genişliği(1975) aşağıdaki yöntemler ile şu şekilde hesaplanır.

$$h_n = n^{-1/5} \left(\frac{4.5(\phi(\Phi^{-1}(\tau)))^4}{[2(\Phi^{-1}(\tau))^2 + 1]^2} \right)^{1/5} \quad (2.26)$$

Hall-Sheasther bant genişliği(1988) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.¹³

$$h_n = n^{-1/3} z_\alpha^{2/3} \left(\frac{1.5(\phi(\Phi^{-1}(\tau)))^2}{[2(\Phi^{-1}(\tau))^2 + 1]^2} \right)^{1/3} \quad (2.27)$$

Chamberlain bant genişliği de aşağıdaki gibi gösterilir:

$$h_n = z_\alpha \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)}{n}} \quad (2.28)$$

¹³ Peter Hall., Simon J.Sheather, "On the Distribution of a Studentized Quantile.", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, 50, 1988, s.381-391.

$F^{-1}(s)$ 'i tahmin etmek için, Bassett ve Koenker (1982) tarafından önerilen,

$$\hat{Q}(\tau|\bar{x}) = \bar{x}^T \hat{\alpha}(\tau) \quad (2.29)$$

kantil fonksiyonun bir değişkeninden yararlanmaktadır.

$f_n(F_n^{-1}(t))$ 'de $\hat{Q}(\tau|\bar{x}) = \bar{x}^T \hat{\alpha}(\tau)$ kullanılırsa o halde yoğunluk $f(F^{-1}(t))$,

$$f_n(F_n^{-1}(t)) = \frac{2h_n}{\bar{x}^T(\hat{\alpha}(t+h_n) - \hat{\alpha}(t-h_n))} \quad (2.30)$$

olarak tahmin edilebilmektedir.

$t_n(\tau)$ istatistiği birim kök hipotezi altında,

$$t_n(\tau) \Rightarrow t(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \left[\int_0^1 B^2 \right]^{-1/2} \left[\int_0^1 B dB_\psi^\tau \right] \quad (2.31)$$

olarak yazılır. Herhangi bir τ değerinde, test istatistiği $t_n(\tau)$ dir. Brownian hareketinde B_ω ve B_ω^τ ilişkili olmaları nedeniyle $t_n(\tau)$ 'nin sınırlayıcı dağılımı aynı değildir ve $(\sigma_\omega^2, \sigma_{\omega\psi}(\tau))$ parametrelerine bağlıdır.

$t_n(\tau)$ 'daki terim aşağıdaki gibi ayrıştırılabilmektedir.

$$\int_0^1 B dB_\psi^\tau = \int B dB_{\psi,\omega}^\tau + \lambda_{\omega\psi}(\tau) \int B dB_\omega \quad (2.32)$$

Burada $\lambda_{\omega\psi}(\tau) = \sigma_{\omega\psi}(\tau)/\sigma_\omega^2$ ve $B_{\psi,\omega}^\tau$ Brownian hareketi

$\sigma_{\psi,\omega}^2(\tau) = \sigma_\psi^2(\tau) - \sigma_{\omega\psi}^2(\tau)/\sigma_\omega^2$ varyansına sahip ve B 'nin bağımsızdır. $t_n(\tau)$ 'nin sınırlayıcı dağılımı,

$$\frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{\int B dB_{\psi,\omega}^\tau}{\left(\int_0^1 B^2\right)^{1/2}} + \frac{\lambda_{\omega\psi}(\tau)}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{\int B dB_\omega}{\left(\int_0^1 B^2\right)^{1/2}} \quad (2.33)$$

dır. Bu eşitlik, birim kökü test ederken ilk yaklaşımı kolaylaştırmaktadır. Aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir.

$$B_\omega(r) = \sigma_\omega W_1(r), \quad B_{\psi,\omega}^\tau(r) = \sigma_{\psi,\omega}(\tau) W_2(r) \quad (2.34)$$

$$B(r) = \sigma_\omega W(r) \quad (2.35)$$

$$W(r) = W_1(r) - \int_0^1 W_1(s) ds \quad (2.36)$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada $W_1(r)$ ve $W_2(r)$ standart Brownian hareketleridir ve birbirinden bağımsızdır. $\sigma_{\psi}^2(\tau) = \tau(1 - \tau)$ olarak tanımlanmaktadır.

2.1.2. Galvao (2009) Kantil Birim Kök Testi

Koenker ve Xiao (2004) testinin kapsamının genişletilmesi ile ortaya çıkan yeni test Galvao (2009) dır.

Galvao (2009) kantil otoregresyon birim kök testini, durağan açıklayıcı değişken ve doğrusal zaman trendi kullanarak genelleştirmiştir. Monte Carlo deneyleri, testin normal dağılmayan dağılımlarda üstün yapısını göstermektedir.

Galvao bu çalışmada, Koenker ve Xiao (2004)'nun önerdiği teste göre güçlü bir test geliştirdiğini savunmuştur. Ayrıca, normal dağılmayan dağılımlarında kovaryans kantil Otoregresyon (CQAR) birim kök testinin kovaryans ADF (CADF) testinden daha güçlü olduğu ortaya konmuştur.

y_t , deterministik ve stokastik bileşenden oluşmaktadır ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$y_t = d_t + S_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

Burada deterministik bileşen $d_t = 0$, $d_t = \mu$ veya $d_t = \mu_1 + \mu_2 t$ olabilmektedir. Stokastik model S_t ise aşağıdaki şekilde modellenir:

$$\alpha(L)\Delta S_t = \delta S_{t-1} + e_t \quad (2.38)$$

Denklemden Δ fark operatörü, $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p$ gecikme operatöründe p.dereceden polinom ve $e_t = b(L)'x_t + u_t$ 'dir. Burada veri üretme sürecinden $\{y_t\}_{t=1}^n$, birim kök hipotezi altında kantil otoregresyon sürecinin dağılımını gösterir.

Burada x_t , sıfır ortalama vektörü ve $b(L) = b_{q_2} L^{-q_2} + \dots + b_{q_1} L^{q_1}$, e_t için denklem girmek için x_t 'nin gecikmelerine izin veren bir polinomdur. Bu şekilde hata terimi (e_t) seri olarak ilişkili olmaya ayrıca diğer durağan açıklayıcı değişkenlerle de ilişkili olmasına izin vermektedir.¹⁴

Galvao(2009) testi aşağıda gösterilen modeli temel alır:

$$y_t = \mu_1 + \mu_2 t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta y_{t-j} + \sum_{l=-q_1}^{q_2} \gamma_l x_{t-l} + u_t \quad (2.39)$$

Denklemden,

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 t - \hat{\alpha} y_{t-1} - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \Delta y_{t-j} - \sum_{l=-q_1}^{q_2} \hat{\gamma}_l x_{t-l} + \hat{u} \quad (2.40)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$$Q_{y_t}(\tau/\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_1 + \mu_2 t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta y_{t-j} + \sum_{l=-q_1}^{q_2} \gamma_l x_{t-1} + F_u^{-1}(\tau) \quad (2.41)$$

¹⁴ Müge Özdemir, Kantil Birim Kök Testleri:Kırılgan Beşli Ülkelerinde Enflasyonun Kalıcılığının Analizi, İstanbul Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

Denkleimde, $Q_{y_t}, \mathfrak{I}_{t-1}$ üzerinde y_t 'nin τ . şartlı kantilini $\mathfrak{I}_{t-1}, \{u_s, s < t, x_{t-q_2}, \dots, x_{t+q_1}\}$ tarafından üretilen σ bölgesini tanımlamaktadır.¹⁵ F_u hataların ortak dağılım fonksiyonunu ifade eder.

$$\mu_1(\tau) = \mu_1 + F_u^{-1}(\tau) \quad (2.42)$$

$$z_t = (1, t, y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p}, x_{t-q_2}, \dots, x_{t+q_1})' \text{ ve} \quad (2.43)$$

$$\beta(\tau) = (\mu_1(\tau), \mu_2, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{-q_2})' \quad (2.44)$$

olarak tanımlandığında kantil otoregresyon modeli,

$$Q_{y_t}(\tau/\mathfrak{I}_{t-1}) = z_t' \beta(\tau) \quad (2.45)$$

olarak gösterilir.

Doğrusal kantil otoregresyon modelinin tahmini aşağıdaki minimizasyon probleminin çözümünü içerir.

$$\min_{\beta \in R^{3+p+q}} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(y_t - z_t' \beta) \quad (2.46)$$

Burada $\rho_\tau(u)$, $\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$ dır. Katsayılarından $\hat{\alpha}(\tau)$ ve $\alpha(\tau) = 1$ birim kök temel hipotezi altında t oran istatistiği incelenmektedir.

Koenker ve Xiao(2004) ile aynı test ele alınmaktadır.

$$t_n(\tau) = \frac{f(\widehat{F^{-1}}(\tau))}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} (Y_{-1}' M_Z Y_{-1})^{\frac{1}{2}} (\hat{\alpha}(\tau) - 1) \quad (2.47)$$

¹⁵ Fabio Augusto Reis Gomes, “Testing the Permanent Income Hypothesis Using Unit Root Quantile Autoregression Tests.”, **Applied Economics Letters**, 18:18, 2011, s.1756.

Bu denklemde $f(\widehat{F}^{-1}(\tau))$, $f(F^{-1}(\tau))$ 'nin tutarlı tahmincisi, Y_{-1} bağımlı değişkenin gecikmeli vektörü (y_{t-1}) ve $M_Z, Z = (1, t, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p}, x_{t-q_2}, \dots, x_{t+q_1})$ üzerinde ortogonal projeksiyon matrisidir.

Birim kök hipotezi altında, $\tau \in T \equiv [\tau_0, 1 - \tau_0], \tau_0 \in T$ ve $\tau_0 \in \left(\frac{0,1}{2}\right)$ olmak üzere t oran istatistiği $t_n(\tau)$ 'nin yakınsaması Brownian hareketleriyle gösterilmektedir.

$$t_n(\tau) \Rightarrow t(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \left[\int_0^1 B^2 \right]^{-1/2} \left[\int_0^1 B dB_\psi^\tau \right] \quad (2.48)$$

B_e ve B_ψ^τ Brownian hareketleri korelasyonlu olduğu için $t_n(\tau)$ 'nin dağılımı standart değildir ve $(\sigma_e^2(\tau), \sigma_{\psi,e}(\tau))$ parametrelerine göre değişir. Ancak $t_n(\tau)$ 'nin sınırlayıcı dağılımı ayrıştırılabilmektedir.

2.1.3. Li-Park (2016) Doğrusal Olmayan Kantil Birim Kök Testi

Li-Park (2016) testi, kalın kuyruklu bir dağılıma karşı uygulamada güç kaybından etkilenen en küçük kareler tahmincisini temel almaktadır. Bu nedenle, kalın kuyruklu serilerin, doğrusallık sağlanmayan modellerinde birim kök testlerinde dirençli tahmincilere ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaç nedeniyle, Li ve Park (2016) üç çeşit kantil doğrusal olmayan test önermiştir.¹⁶ Bu testler sırasıyla; kantil t-oranı, kantil Kolmogorov–Smirnov (QKS) ve kantil Cramer–von Mises testidir.

Koenker ve Xiao (2004) testinde belirtildiği gibi, eğer bir dağılım normal dağılımdan saparsa, bu testler zayıf güç performansı sergiler. Bu nedenle, normal olmayan yeniliklere karşı sağlam olan birim kök testlerini dikkate almak büyük önem taşımaktadır. Doğrusal birim kök testleri için, normallik varsayımı sağlanmadığında kullanılabilen birçok yaklaşım önerilmiştir. Koenker ve Xiao (2004), seçilen niceliklerde bir t-oran testi

¹⁶ Haiqi Li, Sung Y. Park, a.g.e.

ve bir nicel otoregresif çerçevede bir dizi nicelik üzerinde bir Kolmogorov-Smirnov veya Cramer-Von Mises testi önerdi.¹⁷ Daha sonra Galvao (2009), kantil otoregresyona sabit ortak değişkenler dahil ederek Koenker ve Xiao'nun (2004) testlerini genişletmiştir.¹⁸ Li ve Park(2016) ise doğrusal olmayan ilişki için bir birim kök testi önermiştir.

KSS testi, doğrusal olmayan ESTAR süreci için test önermektedir.¹⁹ Tsong (2011) Covariate- KSS testini ileri sürmüştür.²⁰ Doğrusal olmayan kantil otoregresif modellerin asimetrik yapısı Cai-Stander (2008), Galvao ve diğerleri (2011) tarafından başarılı bir şekilde modellenmiştir. Cai-Stander QSETAR modelini, Galvao ve diğerleri²¹ de QTAR modelini geliştirmiştir.

$\{y_t\}$ zaman serisinin birinci dereceden QSTAR (Quantile Smooth Transition Autoregressive) modeli aşağıdaki gibi formüle edilmektedir:

$$Q_{yt}(\tau/y_{t-1}) = \lambda y_{t-1} + \gamma y_{t-1} G(s_t; \theta, c) + Q_{\varepsilon_t}(\tau) \quad (2.49)$$

$s_t = y_t - 1$ ve $c = 0$ değerlerine sahip üssel STAR modelin geçiş fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$G(s_t; \theta, c) = 1 - \exp(-\theta y_{t-1}^2) \quad (2.50)$$

Eşitlikte yer alan, $G(s_t; \theta, c)$ geçiş fonksiyonu $t=1,2,...,T$ iken, s_t geçiş değişkeni $t=1,2,...,T$ iken, θ farklı rejimler arasındaki geçişin hızını gösteren geçiş parametresidir. c ise konum parametresidir.

¹⁷ R.Koenker, Z.Xiao, "Unit root quantile autoregression inference.", **Journal of the American statistical association**, 99.467 (2004): 775-787.

¹⁸ A.F., Galvao Jr., **a.g.e.**

¹⁹ Kapetanios, G., Shin, Y., Snell, A., **a.g.e.**

²⁰ Tsong, C., "Testing for a Unit Root with Covariates Against Nonlinear Alternatives", **Economic Modelling**, 28, 2011, s. 1226-1234.

²¹ Galvao, A., Montes-Rojas, G., Olmo, J., **a.g.e.**

Denklemdede $\{y_t\}$ 'nin durağanlığını test etmek için Kapetanios (2003)' e göre, $\lambda = 1$ birim kök sürecini göstermektedir. Böylece QESTAR (Kantil Üstel Yumuşak Geçişli Otoregresif) modeli aşağıdaki gibidir:

$$Q_{\Delta y_t}(\tau/y_{t-1}) = \gamma y_{t-1}[(1 - \exp(-\theta_{y-1}^2))] + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta y_{t-j} + Q_{\varepsilon_t}(\tau) \quad (2.51)$$

Bu eşitlik için, temel hipotez $H_0: \theta = 0$ şeklinde oluşturulur ve birim köke sahiptir şeklinde yorumlanır. Alternatif hipotez ise $H_0: \theta > 0$ ' dir. $-2 < \gamma < 0$ ise alternatif hipotez altında $\{y_t\}$ durağandır. Birim kök hipotezi γ temel hipotez altında tanımlanmamıştır. Bu nedenle, bu hipotezi doğrudan test etmek mümkün değildir.

Davies (1977, 1987), birinci dereceden Taylor açılımı yardımıyla QESTAR modelinde üstel geçiş fonksiyonunu doğrusallaştırılmıştır. Bunu yaparken amaç, bu sorunu ortadan kaldırmaktır.²² Böylece temel hipotez $H'_0: \delta = 0$, alternatif hipotez $H_A: \delta < 0$ olarak oluşturulur ve model aşağıdaki gibi gösterilir.

$$Q_{\Delta y_t}(\tau/y_{t-1}) = \delta y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta y_{t-j} + Q_{\varepsilon_t}(\tau) \quad (2.52)$$

Yukarıdaki eşitlikte, $\beta_0(\tau) = Q_{\varepsilon_t}(\tau)$, $\beta_1(\tau) = \delta$, $\beta_2(\tau) = \alpha_1, \dots, \beta_{p+1}(\tau) = \alpha_p$ dır ve katsayılar vektörü $\beta(\tau) = (\beta_0(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \beta_{p+1}(\tau))$ olarak gösterilmektedir. Açıklayıcı değişkenler vektörü de $z_t = (1 - y_{t-1}^3, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p})$ şeklindedir. Model aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$Q_{\Delta y_t}(\tau|y_{t-1}) = z_t' \beta(\tau) \quad (2.53)$$

²² Robert B. Davies, "Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present only Under the Alternative", **Biometrika**, 64, 1977, s. 247-254.

$\beta(\tau)$ 'nin tahmincisi $\hat{\beta}(\tau)$ aşağıda açıklanan minimizasyonun çözümüne dayanmaktadır.

$$\hat{\beta}(\tau) = \operatorname{argmin} \sum_{t=1}^T \rho_{\tau}(\Delta y_t - z_t' \beta) \quad (2.54)$$

$\rho_{\tau}(u) = u(\tau - I(u < 0))$ kontrol fonksiyonudur.

Temel hipotezi test etmek için dirençli bir yaklaşım ortaya koyar. t-oran istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$t_T(\tau) = \frac{f(\widehat{F^{-1}(\tau)})}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} (Y_{-1}' M_Z Y_{-1})^{1/2} \hat{\delta} \quad (2.55)$$

Bu eşitlikte $f(\widehat{F^{-1}(\tau)})$, $f(F^{-1}(\tau))$ nin tutarlı bir tahmincisi, $Y_{-1}, (y_{t-1}^3)$ vektörü ve $M_Z, Z = (1, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-q})$ üzerinde projeksiyon matrisidir.²³

Temel hipotez altında, $\hat{\delta}$ ' nun asimptotik dağılımın sonuçları da kullanılarak aşağıdaki yakınsamaya sahip olunmaktadır:

$$t_T(\tau) \Rightarrow t(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \left[\int_0^1 B^2 \right]^{-1/2} \int_0^1 B dB_{\psi}^{\tau} \quad (2.56)$$

Kantil regresyonda sabit bir τ değeri için $t_n(\tau)$ test istatistiği hesaplanır.²⁴ Bu şekilde farklı kantiller için birim kök temel hipotezinin geçerliliği test edilir. Her kantil farklı bir durumu yansıttığı için birim kök durumu kantil bazında değişkenlik gösterir.

B_{ε} ve B_{ψ}^{τ} korelasyonlu olduğu için $t_n(\tau)$ ' nun asimptotik dağılımı parametrelere $(\sigma_{\varepsilon}^2, \sigma_{\varepsilon\psi}(\tau))$ bağlıdır. Yukarıda anlatılan diğer iki kantil birim kök testine benzer olarak $t_n(\tau)$ ' nun asimptotik dağılımı bölümlere ayrılabilir:

²³ Li, Park, **a.g.e.**, s. 6.

²⁴ G.Kapetanios, Y.Shin, A.Snell, **a.g.e.**

$$\int_0^1 B dB_\psi^\tau = \int B dB_{\psi-\varepsilon}^\tau + \zeta_{\varepsilon\psi}(\tau) \int B dB_\varepsilon \quad (2.57)$$

Bu eşitlikte, $\zeta = \sigma_{\varepsilon\psi}(\tau)/\sigma_\varepsilon^2$, $B_{\psi,\varepsilon}^\tau$, $\sigma_{\psi,\varepsilon}^\tau(\tau) = \sigma_\psi^2(\tau) - \sigma_{\varepsilon\psi}^2(\tau)/\sigma_\varepsilon^2(\tau)$ varyansına sahip Brownian hareketi ve B 'nin bağımsızdır. Bu tanımlamalardan sonra $t_n(\tau)$ dağılımı aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$t(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{\int B dB_{\psi-\varepsilon}^\tau}{(\int B^2)^{1/2}} + \frac{\zeta_{\varepsilon\psi}(\tau)}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{\int B dB_\varepsilon}{(\int B^2)^{1/2}} \quad (2.58)$$

Burada $W_1(r)$ ve $W_2(r)$ birbirinden bağımsız Brownian hareketidir. B_ε ve $B_{\psi-\varepsilon}^\tau$ Brownian hareketleri şu şekilde yazılır:

$$B_\varepsilon = \sigma_\varepsilon W_1(r) \quad (2.59)$$

$$B_{\psi-\varepsilon}^\tau = \sigma_{\psi-\varepsilon} W_2(r) \quad (2.60)$$

$$B_\varepsilon(r) = \sigma_\varepsilon W_1(r) \quad (2.61)$$

$$W_1(r) = W_1(r) - \int_0^1 W_1(s) ds \quad (2.62)$$

Böylece asimptotik dağılım şöyle yazılabilir;

$$t(\tau) = \lambda \frac{\int_0^1 W_1^3(r) dW_1}{\int_0^1 W_1^6(r) dr} + \sqrt{1-\lambda^2} \frac{\int_0^1 W_2^3(r) dW_2}{\int_0^1 W_2^6(r) dr} \quad (2.63)$$

Buradaki λ aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\lambda = \lambda(\tau) = \frac{\sigma_{\varepsilon\psi}(\tau)}{\sigma_\varepsilon \sigma_\psi(\tau)} = \frac{\sigma_{\varepsilon\psi}(\tau)}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\tau(1-\tau)}} \quad (2.64)$$

$t_n(\tau)$ 'nin asimptotik dağılımı λ^2 parametresi tarafından belirlenen ağırlığa sahip W_1 ve W_2 'nin fonksiyonudur. λ' 1 yakınsarken, KSS dağılımına yaklaşır. λ' 0 değerine yakınsarken standart Brownian hareketinin fonksiyonlarından oluşmaktadır.

$dF^{-1}/dt=(f(F^{-1}(t)))^{-1}$ 'e eşittir ve $f(F^{-1}(t))$ tutarlı bir şekilde tahmin gerçekleşir:

$$e f(\widehat{F^{-1}(\tau)}) = \frac{2h_n}{\widehat{F_n^{-1}(\tau+h_n)} - \widehat{F_n^{-1}(\tau-h_n)}} \quad (2.65)$$

$$h_{HS} = T^{-1/3} Z_{\alpha}^{2/3} \left[\frac{1.5\phi^2(\Phi^{-1}(\tau))}{2(\Phi^{-1}(\tau))^2 + 1} \right]^{1/3} \quad (2.66)$$

Burada z_{α} , α seviyesi için $\Phi(z_{\alpha})=1-\alpha/2$ dir. Diğer bir bant genişliği Bofinger (1975) tarafından önerilmiştir:

$$h_B = T^{-1/5} \left[\frac{4.5\phi^4(\Phi^{-1}(t))}{(2(\Phi^{-1}(t))^2 + 1)^2} \right]^{1/5} \quad (2.67)$$

Eşitlikte yer alan standart normal dağılımın yoğunluk ve kümülatif dağılım fonksiyonları $\phi(.)$ ve $\Phi(.)$ dir.

$F_n^{-1}(\tau)$ ' i hesaplamadaki en kolay yaklaşım, uygun kantil regresyondan elde edilen kalıntıların ampirik kantilini almaktır. Bu da aşağıdaki şekilde gerçekleşir.

$$\widehat{F}_n^{-1}(\tau) = \widehat{\varepsilon}_{(i)}, \quad \tau \in \left[\frac{(i-1)}{T}, \frac{i}{T} \right) \quad (2.68)$$

$\widehat{\varepsilon}_{(i)}$, $\{\widehat{\varepsilon}\}_{t=1}^T$ 'nin τ .kantili ve $\widehat{\varepsilon}_i$,

$$Q_{\Delta y t}(\tau/y_{t-1}) = \delta y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta y_{t-j} + Q_{\varepsilon_t}(\tau) \quad (2.69)$$

denkleminin kantil regresyon kalıntılarıdır. σ_{ε}^2 ve $\sigma_{\varepsilon\psi}$ değerlerinin tahmini için kernel tahmincileri kullanılmaktadır.

$$\widehat{\sigma_{\varepsilon}^2} = \sum_{j=-M}^M k\left(\frac{j}{M}\right) C_{\varepsilon\varepsilon}(j), \quad \widehat{\sigma_{\varepsilon\psi}} = \sum_{j=-M}^M k\left(\frac{j}{M}\right) C_{\varepsilon\psi}(j) \quad (2.70)$$

Denklemden $k(\cdot)$, $[-1,1]$ üzerinde tanımlanan değer çekirdek fonksiyondur, M ise bant genişliği parametresini göstermektedir. Denklemden yer alan örnek kovaryanslar aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(j) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t+j} \quad (2.71)$$

$$C_{\varepsilon\psi}(j) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \psi_t(\hat{\varepsilon}_{t+h,\tau}) \quad (2.72)$$

Buna ek olarak, kantillerin belirli bir aralığı üzerinde doğrusal olmayan testlerde test edilir. Literatüre bakıldığında Galvao ve diğerleri (2014)'nin kantil regresyonda yer alan threshold etkisine karşı doğrusallığı test ettiği görülür.²⁵ Koenker-Xiao (2004) ve Galvao (2009)'a benzer şekilde $\tau_0 > 0$ için $\tau \in T=[\tau_0, 1-\tau_0]$ olmak üzere QKS ve QCM testleri önerilmektedir:

$$QKS \equiv \sup |t_T(\tau)| \quad (2.73)$$

$$QCM \equiv \int_{\tau \in \mathfrak{J}}^{\tau \in \mathfrak{J}} t_T(\tau)^2 d\tau \quad (2.74)$$

QKS ve QCM testlerinin asimptotik dağılımları değişkendir. Bu nedenle, kritik değerleri ancak simulasyon yoluyla elde edilebilir. Monte Carlo simülasyonları yardımıyla QKS test istatistiğinin asimptotik dağılımı aşağıdaki gibi yaklaştırılabilmektedir:

-Her zaman serisi için $\{\tau_i = i/L\}_{i=1}^L$ elde edilir.

²⁵ Antonio F.Galvao, K.Kato, G.Montes-Rojas, J.Olmo, "Testing Linearity Against Threshold Effects: Uniform Inference in Quantile Regression.", **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, 66, 2014, s. 413-439.

-Her bir $\lambda(\tau_i)$ için $t=1,2,\dots,T$ olmak üzere e_{1t} ve e_{2t} vektörleri üretilmektedir. Sonrasında $y_{1,0} = 0'e$ sahip $y_{1,t} = y_{1,t-1} + e_{1,t}$ rasgele yürüyüş süreci üretilmekte ve test istatistiği hesaplanmaktadır:

$$\hat{t}(\tau_i) \equiv \lambda(\tau_i) \frac{\sum_{t=2}^T y_{1,t-1}^3 e_{1t}}{\sqrt{\sum_{t=2}^T y_{1,t-1}^6}} + \sqrt{1 - \lambda(\tau_i)^2} \frac{\sum_{t=2}^T y_{1,t-1}^3 e_{2t}}{\sqrt{\sum_{t=2}^T y_{1,t-1}^6}} \quad (2.75)$$

$t(\tau_i)$ 'nin maksimumu alınır.

- İkinci adımda tekrar sayısı arttırılarak supremumun ampirik dağılım yoluyla söz konusu kantilin kritik değerine ulaşılır.

Yukarıdaki yöntemler aynı şekilde QCM testi için de yapılır ve kritik değerler bu şekilde elde edilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

EŞBÜTÜNLEŞME TESTLERİ

Eşbütünleme kavramı ilk defa Granger (1981) tarafından durağan olmayan değişkenler arasındaki uzun dönem ilişkisi şeklinde tanımlanmıştır.¹ Daha sonra Engle ve Granger (1987) tarafından bu kavram geliştirilmiştir.² Eşbütünleme analizi, aynı mertebeden bütünlenen serileri oluşturan durağan olmayan değişkenler arasındaki uzun dönem ilişkisini inceler. İncelenecek değişkenler aynı mertebeden durağan olmalıdır. Bu serilerle yapılan regresyon modelinin hata terimi durağan ise yani ortalama ve varyansı zamana göre sabitse ele alınan değişkenler arasında eşbütünlenen ilişki bulunur.³

Eşbütünleşme testlerinden Engle ve Granger (1987) testinin uygulanmasında ilk adım incelenen değişkenlerin durağanlık mertebelerini belirlemek için birim kök analizi yapılır. Birim kök analizi sonucunda incelenen değişkenler birinci mertebeden bütünlenen ise ancak bu durumda Engle ve Granger (1987) yaklaşımı uygulanabilir. Bu yaklaşımın ilk aşamasında incelenen serilerin birim kök yardımı ile durağan olup olmadıkları araştırılır. Aynı mertebeden bütünlenen değişkenler için eşbütünleme analizi yapılır. İkinci aşamada ise Hata Düzeltme Modeli oluşturulur. Örnek olarak, Y ve X değişkenlerinden oluşan bir modeli el alırsak,

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

bu denklemde yer alan Y ve X değişkenlerinin birinci mertebeden bütünlenen olduklarını varsayalım. Bu yaklaşıma göre, Y_t ve X_t 'nin eşbütünlenen olması durumunda ε_t 'nin I(0)

¹ C.W.J.Granger, "Some Properties of Time Series data and Their Use in Econometric Model Specification.", **Journal of Econometrics**, Vol:16, 1981, s.121-130.

² R.F.Engle, C.W.J.Granger, "Co-integration and error correction: Representation., estimation and testing.", **Econometrica**, 55, 1987, s.251-76.

³ Selahattin Güriş, Ebru Çağlayan Akay, Burak Güriş, **R ile Temel Ekonometri**, Der Yayınları, 2020.

olması gerekmektedir. $\hat{\varepsilon}_t \sim I(0)$ ise Y_t ve X_t değişkenleri arasında uzun dönem ilişkisi olduğu sonucuna ulaşılır.

Yaklaşımın ilk aşamasında 3.1 denklemi en küçük kareler ile tahmin edilir. Söz konusu modele eşbütünleme regresyonu adı verilmektedir. Modelin artıkları,

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen artıklar için birim kök testleri ile durağanlık analizi yapılır. İncelenecek denklem,

$$\Delta \hat{\varepsilon}_t = \delta \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta \hat{\varepsilon}_{t-i} + v_t \quad (3.3)$$

şeklinde oluşturulur. Test istatistiği,

$$t_{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}} \quad (3.4)$$

olarak hesaplanacaktır. Hipotezler,

$H_0: \delta = 0$ ise artıklar durağan değildir, seriler eşbütünlenen değildir.

$H_1: \delta < 0$ ise artıklar durağandır, seriler eşbütünlenendir.

şeklinde oluşturulur.

Temel hipotezin reddedilmesi durumunda incelenen değişkenler arasında uzun dönem bir ilişki olduğu yani eşbütünlenen olduğuna karar verilir. Elde edilen test istatistiği Dickey Fuller tipi kritik değerlerle karşılaştırılır. Test istatistiğini karşılaştırmak için Engle-Granger(1987) veya MacKinnon(1991) tarafından geliştirilen kritik değer tabloları kullanılmalıdır.

Bu yaklaşımın ikinci aşamasında ise hata düzeltme modeli oluşturulur. Bu model Engle ve Granger (1987) tarafından geliştirilmiştir. Modelin temel düşüncesi, eşbütünlenen değişkenlerin uzun dönem ilişkisi varsa, kısa dönemde bu ilişkide

dengelesizlik meydana gelebilir. Bu kısa süreli dengelesizlik hata düzeltme mekanizması yardımıyla düzeltilebilmektedir.

Y_t ve X_t gibi iki $I(1)$ değişken için Hata düzeltme modeli genel olarak,

$$\Delta Y_t = \lambda \hat{\varepsilon}_{t-1} + \theta_0 + \sum_{i=0}^k \theta_i \Delta X_{t-i} + \sum_{j=1}^k \delta_j \Delta Y_{t-j} + v_t \quad (3.5)$$

gösterilebilir. Burada λ hata düzeltme katsayısı olarak adlandırılır. Bu katsayının geçerli olabilmesi için negatif işaretli ve aynı zamanda istatistiksel olarak anlamlı olması gerekir. Bu şartlar sağlanıyorsa, değişkenler arasında kısa dönemde oluşan dengelesizliklerin belirli bir dönem sonra düzelerek uzun dönemde dengeye geleceği anlaşılır. Hata düzeltme katsayısının değeri uzun dönem dengesine ulaşma hızını da vermektedir. Bu süre $1/|\lambda|$ olarak hesaplanır.⁴

3.1. Kantil Eşbütünleşme Testleri

Eşbütünleşme testleri, stokastik trend nedeniyle durağan olmama durumuyla karşılaşılınan değişkenlerde ortaya çıkan sahte regresyon sorununu çözmek amacıyla ortaya çıkmıştır. Tutarlı sonuçlar elde etme amacını taşır. Geleneksel eşbütünleşme analizlerinde değişkenler arasındaki doğrusal ilişki araştırılır. Ancak ekonomik değişkenler arasındaki ilişki her zaman doğrusal olmayabilir. Bu durumda geleneksel eşbütünleşme testleri yanıltıcı sonuçlar verebilir. Aynı zamanda geleneksel eşbütünleşme testleri değişkenler için tek bir sonuç elde eder.

Koenker ve Bassett (1978) çalışmalarında değişkenlerin farklı yüzdelik dilimlerdeki davranışlarını incelemiş ve Kantil Regresyon yöntemini literatüre kazandırmışlardır.⁵ Bu çalışmalar, Xiao (2009) tarafından zaman serileri verileri için kullanılmıştır. Zaman serisi verilerine uyarlama noktasındaki temel amaç, değişkenler

⁴ Selahattin Güriş, Ebru Çağlayan Akay, Burak Güriş, **a.g.e.**, s.210.

⁵ Roger Koenker, Gilbert Bassett, "Regression Quantiles", **Econometrica**, 46(1), 1978.

arasında yer alan uzun dönemli denge ilişkisini farklı yüzdelik dilimlere göre araştırmaktır.⁶

Xiao (2009) tarafından literatüre kantil eşbütünleşme testi olarak kazandırılan bu test, Kuriyama (2016) tarafından Kantil CUSUM eşbütünleşme testi olarak adlandırılmıştır.⁷ Bu test aracılığıyla değişkenler arasında yer alan doğrusal olmayan uzun dönemli ilişki farklı yüzdelik dilimlerde incelenir ve her dilim için farklı katsayılar tahmin edilir.

3.1.1. Xiao (2009)

Xiao (2009), geleneksel eşbütünleşme testlerine alternatif olarak eşbütünleşme katsayılarının zamana göre sabit olmadığı bir yöntemi önerir. Bu test, eşbütünleşme katsayısının kantillere göre değişebileceğini ve maruz kalınan şoklardan etkilenebileceğini ifade etmektedir.⁸

Xiao (2009), geleneksel eşbütünleşme modelini kantil eşbütünleşme modeli olarak yeniden düzenlemek için Saikkonen'in (1991) gecikmesi dağıtılmış model fikrinden yola çıkmıştır.⁹ Geleneksel eşbütünleşme modeline X değişkeninin gecikmelerini $\sum_{j=-K}^K \Delta X'_{t-j}$ eklemektedir. Bunu yaparken temel amaç, içsellik probleminin ortadan kaldırılması ve ε_t 'in elde edilmesidir. Eğer $Q_\varepsilon(\tau)$, ε_t 'in τ 'cı kantili ve F_t zamana bağlı bilgi şeklinde gösterilirse, Y_t 'in F_t 'e koşullu τ 'cı kantili aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir¹⁰;

$$Q_{Yt}(\tau|F_t) = \alpha + \beta(\tau)'X_t + \sum_{j=-K}^K \Delta X'_{t-j} \Pi_j + F_\varepsilon^{-1}(\tau) \quad (3.6)$$

⁶ Zhijie Xiao, "Quantile Cointegration Regression.", **Journal of Economics**, 150, 2009, s.248- 260.

⁷ Nina Kuriyama, "Testing Cointegration in Quantile Regressions With An Application To the Term Structure Of Interest Rates.", **Studies in Non-Linear Dynamics and Econometrics**, 20(2), 2016, s.107-121.

⁸ Z.Xiao., **a.g.e.**, s.249.

⁹ Pentti Saikkonen, "Asymptotically Efficient Estimation Of Cointegration Regression.", **Econometric Theory**, 1991, 7, s.1-21.

¹⁰ Anıl Çekiç, "İkiz Açıklar Hipotezinin Türkiye Açısından Değerlendirilmesi:Kantil Eşbütünleşme Testi Uygulaması", Sakarya Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2019.

Denklemden $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, \Delta X_{t-j}, \forall j)$ dir ve $F_\varepsilon(\cdot)$ ε_t 'in kümülatif dağılım fonksiyonunu gösterir. $Z_t, (1, X_t)$ ve $(\Delta X'_{t-j}, j = -K, \dots, K), \Theta = (\alpha, \beta'_t, \Pi'_{-K}, \dots, \Pi'_K)'$ olmak üzere;

$$\Theta(\tau) = (\alpha(\tau), \beta(\tau)', \Pi'_{-K}, \dots, \Pi'_K)' \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilebilir. Denklemden yer alan $\alpha(\tau) = \alpha + F_\varepsilon^{-1}(\tau)$ dir. Yukarıdaki bilgilerle denklemi yeniden yazmak istersek;

$$y_t = \Theta Z_t + \varepsilon_t \text{ ve } Q_{Y_t}(\tau | \mathcal{F}_t) = \Theta(\tau)' Z_t \quad (3.8)$$

$\varepsilon_{it} = \varepsilon_t - F_\varepsilon^{-1}(\tau)$ denklemden yola çıkarsak $Q_{\varepsilon_{it}}(\tau) = 0$ dir.

Bu gösterim hata terimlerinin $\mathcal{F}_t$ ile ilişkisiz olduğunu gösterir. Ulaşılan eşbütünleşme katsayıları sadece her dönemdeki gelişmelere bağlıdır ve bu gelişmelerden etkilenir. Yani, söz konusu eşbütünleşme vektörü farklı kantillerde farklı değerler almaktadır.¹¹

Kantil eşbütünleşme modelleri, geleneksel eşbütünleşme modellerinin önemli bir uzantısıdır. Bu model, bağımlı değişkene ve bağımsız değişkenlere bir oynaklık sağlamaktadır. Ek olarak model, koşullu değişen varyanslar bakımından farklı bir yöntem önerir.¹²

$$H_0: \beta(\tau) = \bar{\beta} \quad (3.9)$$

Temel hipotezde yer alan $\bar{\beta}$ bilinmeyen sabit bir vektördür. Katsayı vektörünün tahminicisini kullanarak denklemi tekrar yazmak istersek;

¹¹ Chien-Chiang Lee, Jhih-Hong Zeng, "Revisiting the Relationship Between Spot and Futures Oil Prices: Evidence From Quantile Cointegrating Regression.", **Energy Economic**, 2011, 33, s.924-935.

¹² Z.Xiao, **a.g.e.**, s.249.

$$H_0: \hat{\beta}(\tau) = \bar{\beta} \quad (3.10)$$

gözlem sayısını n olarak kabul edersek sıfır hipotezi altında aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$n(\beta(\tau) - \bar{\beta}) \Rightarrow \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_{\Delta X} \underline{B}_{\Delta X}^T \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_{\Delta X} d\mathbf{B}_\psi^* \quad (3.11)$$

Eşitlikte yer alan $f(\cdot)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu, $F(\cdot)$ ise kümülatif dağılım fonksiyonunu gösterir. Kontrol fonksiyonu ise,

$$\psi_\tau(u) = \tau - I(u < 0) \quad (3.12)$$

olarak gösterilir. B indirgenmiş Brownian hareketini göstermektedir. $B_\psi^*(\cdot)$ ile $B_{\Delta X}(\cdot)$ bağımsız Brownian hareketinin sembolleridir. Ayrıca “ $\Rightarrow$ ” işareti zayıf yakınsamayı gösterir. Sıfır hipotezinin testi için kullanılacak test istatistiği aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\sup_\tau |\hat{V}_n(\tau)| \Rightarrow \sup_\tau \left| \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_{\Delta X} \underline{B}_{\Delta X}^T \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_{\Delta X} d(\mathbf{B}_\psi^* - f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))) \mathbf{B}_\varepsilon^* \right| \quad (3.13) \quad \mathbf{B}_\varepsilon^*(\cdot)$$

Eşitlikte yer alan hata terimi, ε_t 'nin kısmi toplamının sınırını gösterir. Bu yöntemle katsayıların zamana göre değişimi görülebilmektedir.¹³

3.1.2. Kuriyama(2016)

Kuriyama (2016) testinde eşbütünleşme testi için elde edilen kalıntıların kararlı bir süreç izleyip izlemediği bağımlı değişkenin koşullu dağılımının farklı kantilleri boyunca CUSUM testi kullanılarak araştırılır.¹⁴ Test, $w_t = \phi d_t + w_t^s$ süreci tarafından oluşturulan

¹³ Chien-Chiang Lee, Jhih-Hong Zeng, **a.g.e.**, s.928.

¹⁴ Nina Kuriyama, **a.g.e.**, 107-121.

$\{W_t\}$ gibi m vektörlü bir zaman serisini göstermektedir. $t = 1, \dots, T, d_t$ deterministik trenddir.

d_t , deterministik trend olmak üzere;

$$d = \begin{cases} 0 & \text{trend yok} \\ 1 & \text{sabit trend var} \\ (1, t)' & \text{doğrusal trend var} \end{cases} \quad (3.14)$$

değerlerini almaktadır.

ϕ deterministik trendin katsayısıdır. w_t^s stokastik bileşen olmak üzere $w_t^s = w_{t-1}^s + \xi_t$ ve $w_0^s=0$ dır. ξ_t ise;

$$T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \xi_t \Rightarrow B_w(r) = BM(0, \Omega) \quad (3.15)$$

şeklinde gösterilir.” $\Rightarrow$ ” zayıf yakınsamayı gösterir “[T_r]” tamsayı kısmı göstermektedir. Ayrıca, $B_w(r)$, $0 \leq r \leq 1$ aralığında, Ω kovaryans matrisli bir Brownian vektörünü göstermektedir. Ω ile simgelenen uzun dönem kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\Sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(\sum_{t=1}^T \xi_t \xi_t') \text{ ve } \Lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(\sum_{i=1}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-i} \xi_t \xi_{t+1}') \quad (3.16)$$

olmak üzere;

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(\sum_{t=1}^T \xi_t \sum_{t=1}^T \xi_t') = \Sigma + \Lambda + \Lambda' \quad (3.17)$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak denklem matris notasyonu ile aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$w_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix}, w_t^s = \begin{bmatrix} Y_t^s \\ X_t^s \end{bmatrix}, \xi_t = \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix}, B_w(r) = \begin{bmatrix} B_y(r) \\ B_x(r) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Kuriyama (2016) testi $\mathcal{F}_t$ tanımı konusunda Xiao (2009) testiyle benzerlik gösterir. İki testte $\mathcal{F}_t$ 'i zamana göre değişen bilgi olarak ifade etmektedir. X_t 'i , $\mathcal{F}_t$ 'in bir parçası olarak gösterir. Kalıntıların koşullu kantilini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$$Q_{ut}(\tau/F_t) = F_t^{-1}(\tau) \quad (3.19)$$

Bu eşitlikten yararlanarak bağımlı değişkenin koşullu kantilleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Q_{yt}(\tau/F_t) = \alpha'(\tau)d_t + \beta'(\tau)x_t \text{ ve } u_t(\tau) = u_t - F_t^{-1}(\tau) = y_t - \alpha'(\tau)d_t + \beta'(\tau)x_t \quad (3.20)$$

Elde edilen model aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$y_t - \alpha'(\tau)d_t + \beta'(\tau)x_t = \theta'(\tau)z_t + u_t(\tau) \quad (3.21)$$

Model tahmini için kantil regresyon prosedürü izlenir. Tahmin için kalıntıların pozitif ve negatif asimetric ağırlıklı amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$S_T(\tau, \theta) = \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - z_t'\theta) \quad (3.22)$$

Denklemden yer alan ve $\rho_\tau(\cdot), \rho_\tau(u) = u(\tau - I < 0)$ olarak gösterilen asimetric mutlak sapma kayıp fonksiyonudur.¹⁵

Testte kullanılan kantil regresyon yöntemi, geleneksel regresyon yöntemi ile benzerlikler taşımaktadır. Bu benzerliklerden biri, kantil regresyon yönteminde de birinci

¹⁵ Nina Kuriyama, **a.g.e.**, s.109-110.

mertebeden durağan değişkenler nedeniyle serisel korelasyon ve uzun dönemli içsellik problemidir. Bu durum elde edilecek tahmincilerin ikinci dereceden sapmalı olmasına neden olmaktadır.¹⁶ Bu durum, $\hat{\beta}(\tau)$ tahmincisinin, zayıf bir tahminci olma ihtimalini gösterir. Kuriyama (2016) bu sorun için çalışmalar yapmıştır. Bu durumu çözmek amacıyla Phillips ve Hansen (1990) tarafından önerilen FMOLS yönteminden elde edilen katsayıları kullanmayı önermiştir. Bu katsayı $\hat{\beta}^+(\tau)$ aşağıdaki yöntemle elde edilir;

$$\hat{\beta}^+(\tau) = \hat{\beta}(\tau) - [f(\widehat{F^{-1}}(\tau)) \sum_{t=1}^T x_t^d x_t^{d'}]^{-1} [\sum_{t=1}^T x_t^d \widehat{\Omega}_{\psi x} \widehat{\Omega}_{xx}^{-1} \Delta x_t + \widehat{\Delta}_{x\psi}^+] \quad (3.23)$$

Denklemden x_t^d , indirgenmiş veya trendden arındırılmış bağımsız değişkeni gösterir. $f(\widehat{F^{-1}}(\tau))$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun parametrik olmayan tutarlı bir tahmincisini gösterir. $\widehat{\Omega}_{\psi x}$ ve $\widehat{\Omega}_{xx}$ uzun dönem kovaryans matrisinin yarı parametrik kernel tahmincileridir ve;

$$\Omega_{\psi x} = \Omega'_{x\psi} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E(v_t \psi_\tau(u_0(\tau))), \quad \Omega_{xx} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E(v_t v'_0) \text{ ve } \psi_t(u(\tau)) = \tau - I(u < 0) \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Benzer şekilde $\Delta_{x\psi}^+, \Delta_{x\psi}^+ = \Delta_{x\psi} - \Omega_{\psi x} \Omega_{xx}^{-1} \Delta_{xx}$ denklemi ile tanımlanan tek taraflı uzun dönem kovaryans matrisinin yarı parametrik kernel tahmincisini gösterir. Bu denklemde $\Delta_{x\psi} = \sum_{t=0}^{\infty} E(v_t \psi_\tau(u_0(\tau)))$ ve $\Delta_{xx} = \sum_{t=0}^{\infty} E(v_t v'_0)$ şeklinde tanımlanmaktadır.¹⁷

Kuriyama (2016) test istatistiklerini elde etmek için $\hat{\beta}^+(\tau)$ ile tahmin edilen modelden ulaşılan kalıntıları kullanmaktadır. $u^+(\tau)$ şeklinde tanımlanan bu kalıntılar $u^+(\tau) = y_t^+ - \theta^{+'}(\tau)z_t$ denkleminde elde edilmektedir. Aşağıdaki şekilde gösterilir.

¹⁶ Nina Kuriyama, **a.g.e.**, s.108.

¹⁷ Christina Christou, R.Gupta, W.Nyakabawo, M.E.Wohar, “Do House Prices Hedge Inflation in the US? A Quantile Cointegration Approach.”, **International Review Of Economics & Finance**, 2018, s.9.

$$CS_T(\tau) = \max_{n=1, \dots, T} \frac{1}{\hat{w}_{\psi x} \sqrt{T}} \left| \sum_{t=1}^n \psi_{\tau}(u_t^+(\tau)) \right| \quad (3.25)$$

Xiao (2002) testi, kritik değerler için Hao ve Inder (1996)'i önermiştir.¹⁸

3.2. Doğrusal Olmayan Eşbütünleşme Testleri

3.2.1. Enders ve Siklos (2001) Eşbütünleşme Testi

Momentum eşik değerli otoregresif model, Enders ve Siklos (2001) çalışmasında ortaya çıkmıştır.¹⁹

$X_{1t}, \dots, X_{nt}$ birinci mertebeden durağan seriler olduğunda uzun dönem eşitliği,

$$Y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_n X_{nt} + \mu_t \quad (3.26)$$

şeklinde oluşturulduğunda, uzun dönem ilişkisi var diyebilmek için μ_t 'nin durağanlığı gerekir. Enders ve Siklos (2001) çalışmalarında MTAR modelini eşbütünleşme ilişkisinin tespitinde kullanmışlardır. Model,

$$\Delta \mu_t = I_t p_1 \mu_{t-1} + (1 - I_t) p_2 \mu_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.27)$$

şeklinde gösterilir. I_t gösterge fonksiyonudur ve

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta \mu_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{eğer } \Delta \mu_{t-1} < \tau \end{cases} \quad (3.28)$$

olarak gösterilir.²⁰ τ bilinmeyen eşik değerdir.

¹⁸ Kang Hao, Brett Inder, "Diagnostic Test For Structural Change In Cointegrated Regression Models", **Economic Letters**, 50, 1996, s.179-187.

¹⁹ Walter Enders, Pierre L. Siklos, "Cointegration and threshold adjustment.", **Journal of Business & Economic Statistics** 19.2, 2001, s.166-176.

²⁰ Walter Enders, Pierre L. Siklos, **a.g.e.**, s.167.

Önsel bilgi varsa eşik değeri tahmin edilmez. Eşik değeri 0 olarak alınır ve gösterge fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta\varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta\varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Hata düzeltme modeli,

$$\Delta y_t = \sum_{i=0}^s \alpha_i \Delta X_{t-1} + \gamma^+ \varepsilon_{t-1} I_t + \gamma^- \varepsilon_{t-1} (1 - I_t) \quad (3.30)$$

şeklinde gösterilir. Model genel formda,

$$\Delta y_t = \sum_{i=0}^s \alpha_i \Delta X_{t-1} + \gamma^+ ECT_{t-1}^+ + \gamma^- ECT_{t-1}^- + \varepsilon_t \quad (3.31)$$

olarak ifade edilir. Model EKK yöntemi ile çözülebilmektedir.

Durağanlık koşullarının sağlanması için $p_1 < 0, p_2 < 0, [(1 + p_1)(1 + p_2)] < 1$ koşullarının sağlanması gerekir.²¹ Bu Enders Granger test yapısının asimetrik düzeltmeler için genişletilmiş şeklidir.²²

Modelde otokorelasyon olması durumunda, model genişletilerek aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$\Delta\mu_t = I_t p_1 \mu_{t-1} + (1 - I_t) p_2 \mu_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma \Delta\mu_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3.32)$$

Eşbütünleşme testinde kullanılacak temel hipotez, $p_1 = p_2 = 0$ şeklinde oluşturulur. Temel hipotez, eşbütünleşme ilişkisinin olmamasını ifade etmektedir. Test

²¹ Daiki Maki, Shin-ichi Kitasaka, "The equilibrium relationship among money, income, prices, and interest rates: evidence from a threshold cointegration test.", **Applied Economics** 38.13, 2006, 1587.

²² Li-Hsueh Chen, Miles Finney, Kon S. Lai, "A threshold cointegration analysis of asymmetric price transmission from crude oil to gasoline prices.", **Economics letters** 89.2, 2005, s.234-235.

için klasik F istatistiği hesaplanabilir. Ayrıca. p_1 ve p_2 için t_{max} istatistiği de hesaplanabilmektedir. t_{max} istatistiği, en büyük t test istatistiğini gösterir.

Bağımlı değişken Y_t , bağımsız değişken ise X_t olarak adlandırıldığında MTAR tipi hata düzeltme modeli,

$$\Delta X_t = \mu + I_t p_1 EC_{t-1} + (1 - I_t) p_2 EC_{t-1} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \sum_{k=1}^p \beta_k \Delta X_{t-k} + v_t \quad (3.33)$$

şeklinde oluşturulacaktır.²³

3.2.2. Kapetanious, Shin ve Snell (2006) Eşbütünleşme Testi

Kapetanious, Shin ve Snell, Engle-Granger eşbütünleşme testinden yola çıkarak eşbütünleşme ilişkisinin olmadığını ifade eden temel hipoteze karşın, değişkenler arasında doğrusal olmayan uzun dönem ilişkiyi ifade eden alternatif hipotezi sıyan bir test geliştirmişlerdir.²⁴

Birinci mertebeden durağan olan serilerle kurulan regresyon denklemi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$y_t = \beta' x_t + u_t \quad (3.34)$$

Bu denkleme ait hata terimi ise,

$$u_t = y_t - \beta' x_t \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir. Hata düzeltme modeli aşağıdaki şekilde oluşturulur.

²³ Burak Gürış, **a.g.e.**, s.204.

²⁴ George Kapetanios, Yongcheol Shin, Andy Snell, "Testing for cointegration in nonlinear smooth transition error correction models.", **Econometric Theory**, 22.2, 2006, s.279-303.

$$\Delta y_t = \beta' \Delta x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.36)$$

Bu yapıyla yapılan eşbütünleşme testi için sık kullanılan 2 yöntem vardır. Engle ve Granger (1987) çalışmasında modelden elde edilen hata terimleri kullanılarak,

$$\Delta \hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.37)$$

denklemini aracılığıyla Dickey ve Fuller t testi ile $\rho = 0$ eşbütünleşme olmama temel hipotezi test edilecektir. Diğer yöntem ise hata düzeltme modeli kullanılarak eşbütünleşmenin test edilmesidir. Bunun için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\Delta y_t = \beta' \Delta x_t + \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.38)$$

$\rho = 0$ eşbütünleşme olmama temel hipotezi $\rho < 0$ eşbütünleşmenin varlığı hipotezine karşılık t testi kullanılarak test edilir.

Model yapısı fonksiyonel formda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\Delta u_t = F(u_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (3.39)$$

Modelde,

$$F(u_{t-1}) = \gamma u_{t-1} (1 - e^{-\theta u_{t-1}^2}) \quad (3.40)$$

ESTAR fonksiyonel formunu göstermektedir. Bu durumda model,

$$\Delta u_t = \gamma u_{t-1} (1 - e^{-\theta u_{t-1}^2}) + \varepsilon_t \quad (3.41)$$

şeklini alır. Bu denklemden hareketle ESTAR hata düzeltme modeli,

$$\Delta y_t = \gamma u_{t-1} (1 - e^{-\theta u_{t-1}^2}) + \beta' \Delta x_t + \varepsilon_t \quad (3.42)$$

şeklinde yazılır. Model daha genel formda aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\Delta y_t = \gamma u_{t-1} (1 - e^{-\theta u_{t-1}^2}) + \alpha' \Delta x_t + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta y_{t-j} + \sum_{j=1}^p \lambda_j' \Delta x_{t-j} + e_t \quad (3.43)$$

Eşbütünleşme olmadığını gösteren temel hipotez $H_0: \theta = 0$ dir. Doğrusal olmayan ESTAR eşbütünleşmeyi gösteren alternatif hipotez ise $H_1: \theta > 0$ şeklinde gösterilir. $H_0: \theta = 0$ temel hipotezi altında yaşanan belirlenme sorunu nedeni ile Taylor açılımının kullanımı önerilmiştir. Bu durumda hata düzeltme modeli aşağıdaki denkleme yaklaşır.

$$\Delta y_t = \delta u_{t-1}^3 + \omega' \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \psi_i' \Delta z_{t-i} + e_t \quad (3.44)$$

Denklemden $z_t = (y_t, x_t')'$ şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada önerilen ilk test kalıntılara dayanan iki aşamalı testtir. Testin ilk aşamasında hata terimleri $\hat{u}_t = y_t - \beta' x_t$ elde edilir. İkinci aşamada ise ilk aşamadan elde edilen hata terimleri kullanılarak aşağıdaki model tahmin edilir.

$$\Delta y_t = \delta u_{t-1}^3 + \omega' \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \psi_i' \Delta z_{t-i} + e_t \quad (3.45)$$

Denklemden $z_t = (y_t, x_t')'$ şeklinde gösterilir.

Bu modelle eşbütünleşme testi yapıldığında kullanılacak hipotezler,

$H_0: \delta = 0$ (Eşbütünleşme yoktur.)

$H_1: \delta < 0$ (Doğrusal olmayan ESTAR eşbütünleşme vardır.)

şeklinde oluşturulur.

Test istatistiği,

$$t_{NLECM} = \frac{\hat{u}_{-1}^{3'} Q_1 \Delta y}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{u}_{-1}^{3'} Q_1 \hat{u}_{-1}^3}} \quad (3.46)$$

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\Delta y_t - \hat{\delta} \hat{u}_{t-1}^3 - \hat{w}' \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \hat{\psi}_i' \Delta z_{t-i})^2 \quad (3.47)$$

dir. Burada,

$$\hat{u}_{-1}^3 = (\hat{u}_0^3, \dots, \hat{u}_{T-1}^3)' , \quad (3.48)$$

$$Q_1 = I_T - S(S'S)^{-1}S', \quad (3.49)$$

$$S = (\Delta X, \Delta Z_{-1}, \dots, \Delta Z_{-p}), \quad (3.50)$$

$$\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_T)', \quad (3.51)$$

$$\Delta Z_{-i} = (\Delta Z_{1-i}, \dots, \Delta Z_{T-i})', \quad i = 1, \dots, p \text{ ve } \Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_T)' \text{ dir.} \quad (3.52)$$

Bu test için ikinci alternatif prosedür Engle ve Granger iki aşamalı yöntemine benzer şekilde uygulanır. İlk aşamadan elde edilen hata terimleri kullanılarak aşağıdaki denklem tahmin edilir.

$$\Delta \hat{u}_t = \hat{\delta} \hat{u}_{t-1}^3 + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta \hat{u}_{t-i} + \xi_t \quad (3.53)$$

Test istatistiği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$t_{NLEG} = \frac{\hat{u}_{-1}^{3'} Q_2 \Delta \hat{u}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{u}_{-1}^{3'} Q_2 \hat{u}_{-1}^3}} \quad (3.54)$$

Burada,

$$\hat{\sigma}_{EG}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\Delta \hat{u}_t - \hat{\delta} \hat{u}_{t-1}^3 + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \Delta \hat{u}_{t-i})^2 \quad (3.55)$$

Burada,

$$\Delta \hat{u} = (\Delta \hat{u}_1, \dots, \Delta \hat{u}_T)', \quad (3.56)$$

$$Q_2 = I_T - \Delta U_p (\Delta U_p' \Delta U_p)^{-1} \Delta U_p', \quad (3.57)$$

$$\Delta U_p = (\Delta \hat{u}_{-1}, \dots, \Delta \hat{u}_{-p}), \quad (3.58)$$

$$\Delta \hat{u}_{-i} = (\Delta \hat{u}_{1-i}, \dots, \Delta \hat{u}_{T-i})', \quad i=1, \dots, p \text{ dir.} \quad (3.59)$$

Temel hipotez t istatistiği kullanılarak test edilebilir.

$$t = \frac{\delta}{se(\delta)} \quad (3.60)$$

Bu t istatistiği, asimptotik olarak normal dağılmadığından, Kapetanios vd. (2006) kritik değerlere simülasyonlar yardımıyla ulaşır.

3.2.2. Seo (2006) Eşbütünleşme Testi

Seo (2006) testi bant-eşik değerli hata düzeltme modeline dayanan eşbütünleşme testi önermiştir.²⁵ Hata düzeltme modeli,

$$\phi(L)\Delta x_t = \alpha_1 z_{t-1} 1\{z_{t-1} \leq \gamma_1\} + \alpha_2 z_{t-1} 1\{z_{t-1} > \gamma_2\} + \mu + \varepsilon_t \quad (3.61)$$

²⁵ Myunghwan Seo, "Bootstrap testing for the null of no cointegration in a threshold vector error correction model.", **Journal of Econometrics**, 134.1, 2006, s.129-150.

şeklinde ifade edilir. Denklemden yer alan $\phi(L)$ q.derece gecikme operatörüdür ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\phi(L) = I - \phi_1 L^1 - \dots - \phi_q L^q \quad (3.62)$$

z_t hata düzeltme terimini göstermekte ve bilinen eşbütünleşme vektörü(β) ile $z_t = x_t' \beta$ şeklinde gösterilmektedir. γ eşik değeri parametresidir $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ve $\gamma_1 \leq \gamma_2$ koşulunu sağlamalıdır. İki rejimin arasında kalan orta rejim ($\gamma_1 < z_{t-1} \leq \gamma_2$) düzeltmenin olmadığı bölümdür.²⁶

Temel hipotez, doğrusal eşbütünleşmenin olmadığı gösterir. ($H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

Seo (2006) tarafından test istatistiği olarak supremum Wald test istatistiği önerilmiştir. Verilen eşik değerlere göre parametreler en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilebilir. Aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\Delta x_t = \hat{\alpha}_1(\gamma) z_{t-1} 1\{z_{t-1} \leq \gamma_1\} + \hat{\alpha}_2(\gamma) z_{t-1} 1\{z_{t-1} \leq \gamma_2\} + \hat{\mu}(\gamma) + \hat{\phi}_1(\gamma) \Delta x_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_q(\gamma) \Delta x_{t-q} + \hat{\varepsilon}_t(\gamma) \quad (3.63)$$

$$\hat{\Sigma}(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t(\gamma) \hat{\varepsilon}_t(\gamma)' \quad (3.64)$$

Supremum Wald test istatistiği aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\sup W = \sup W_n(\gamma) \quad (3.65)$$

Seo (2006) testinin karar aşamasında bootstrap tekniğinin kullanılması önerilmiştir.

²⁶ Myunghwan Seo, a.g.e., s.131.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

KANTİL EŞBÜTÜNLEŞME TESTİ ÖNERİSİ

Eşbütünleşme testlerine ait literatüre bakıldığı zaman; kantil eşbütünleşme testlerine Xiao (2009) ve Kuriyama (2016) örnek verilebilir. Ancak, KSS (2006) testinde yer alan doğrusal olmayan ESTAR yapının kantille modellendiği bir kantil eşbütünleşme testi literatürde yoktur.

Literatürde yer alan bu eksikliği giderebilmek için, KSS (2006) testinde yer alan model Xiao (2009) testine uyarlanarak yeni bir kantil eşbütünleşme testi geliştirilmiştir. Bu bölümde öncelikle geliştirilen eşbütünleşme testi anlatılacak ve simülasyon sonuçları paylaşılacak, ardından geliştirilen yeni test kullanımı iktisadi bir uygulama ile gösterilecektir.

4.1. Kantil Doğrusal Olmayan Eşbütünleşme Testi Önerisi

Zamanla değişen davranışın incelenmesinde kantil eşbütünleşme regresyon uygulanması için öncelikle iki değişkenli regresyon modeli oluşturulur.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t, \quad \alpha = 0, \beta = 1, \quad (4.1)$$

$$\Delta x_t = v_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Simülasyon analizinin ilk aşamasında farklı veri üretme süreçleri için OLS tahmin edicisini Medyan regresyon tahmincisi ile karşılaştırırız. u_t ve v_t bağımsız ve özdeş dağılmış rastgele değişkenler iken, normal ve 2, 3, 4 serbestlik dereceli student-t olduğu durumlar için sonuçlar aşağıdaki şekilde tablolastırılmıştır. Başlangıç değerlerinin tümü sıfır olarak alınmıştır.¹

¹ Z.Xiao, a.g.e.

Tablo 4.1 ve 4.2’de standart hatalar ve ortalama hata kareler, örnek boyutları T=100 ve T=200 için medyan regresyon ve OLS regresyon sonuçları gösterilmektedir. Tekrar sayısı 500 olarak alınmıştır.

Tablo 4. 1: OLS v.s. Median regression estimation of β , T=100

		OLS		Median Reg.	
		STD	MSE	STD	MSE
$v_t \sim N(0,1)$	$u_t \sim t(3)$	0.1701726	0.0289587	0.1344092	0.01806583
	$u_t \sim t(4)$	0.1421194	0.02019791	0.1312501	0.01722659
$v_t \sim t(4)$	$u_t \sim t(3)$	0.1730235	0.02993714	0.1417502	0.02009312
	$u_t \sim t(4)$	0.1399041	0.01957317	0.132055	0.01743853
$v_t \sim t(3)$	$u_t \sim t(3)$	0.1637128	0.02680187	0.1361766	0.01854407

Tablo 4. 2: OLS v.s. Median regression estimation of β , T=200

		OLS		Median Reg.	
		STD	MSE	STD	MSE
$v_t \sim N(0,1)$	$u_t \sim t(3)$	0.1250772	0.01564431	0.09430238	0.008892938
	$u_t \sim t(4)$	0.100425	0.01008518	0.0954443	0.009109615
$v_t \sim t(4)$	$u_t \sim t(3)$	0.1206952	0.01456732	0.097055	0.009419672
	$u_t \sim t(4)$	0.1016577	0.01033429	0.09184062	0.008434699
$v_t \sim t(3)$	$u_t \sim t(3)$	0.1166237	0.01360109	0.1009054	0.0101819

Geleneksel eşbütünleşme testlerinden farklı olarak kantil eşbütünleşme testlerinde eşbütünleşme vektörü farklı kantiller boyunca değişebilmektedir.

$$y_t = \alpha + \beta_t x_t + u_t \quad (4.3)$$

Denklemden β_t , dağılımının farklı dilimlerinde değişiklik gösterebilir. F_{t-1} ’e bağlı olarak y_t ’nin τ ’inci niceliği şu şekilde gösterilir:

$$\beta_t = 1, \quad (4.4)$$

$$\beta_t = \beta(u_t) = \begin{cases} 1, & u_t \geq 0 \\ -1 & u_t < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$\beta_t = 1$ olduğunda tüm kantiller için sabittir. İkinci durumda, $\beta_t = \beta(u_t)$ iken eşbütünleşme vektörü, hata dağılımının farklı kantilleri için farklı değerler alır. İkinci durumda veriler, farklı $\{u_t\}$ ve $\{v_t\}$ dağılımlarından üretilmiştir. Yine, u_t ve v_t bağımsız ve özdeş olarak kabul edilmiştir.

Tablo 4.1 ve 4.2'deki bilgiler, normal dağılmayan verilerin varlığında kantil eşbütünleşme regresyonundan etkinlik kazancı elde edilebileceğini göstermektedir. Normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda Medyan Regresyon sonuçları OLS regresyona göre daha iyi sonuçlar verir. Tablolarda görüldüğü üzere bu durum gözlem sayısından bağımsızdır. Gözlem sayısı 100'den 200'e yükseldiği halde aradaki fark düzelmemiştir. Bu durum gözlem sayısından bağımsız olarak kantil regresyon yönteminin OLS regresyon yönteminden daha üstün olduğunu ortaya koymaktadır.

Yukarıda yer alan tablolar kantil eşbütünleşme testinin önemini ve gerekliliğini ifade etmektedir. OLS regresyon sonuçlarına göre üstünlüğü kanıtlanmış olan kantil eşbütünleşme testlerine katkı sağlamak amacıyla ESTAR yapıya dayanan doğrusal olmayan kantil eşbütünleşme testi geliştirilmiştir.

Geliştirilen eşbütünleşme test aşamaları aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

y_t ve x_t değişkenlerinden oluşan doğrusal formda regresyon denklemi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$y_t = \beta'x_t + u_t \quad (4.6)$$

Hata terimi

$$u_t = y_t - \beta'x_t \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilir. Hata düzeltme modeli aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\Delta y_t = \beta' \Delta x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

Yukarıdaki denklemler yardımıyla KSS(2006) modeli genel formuyla aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\Delta y_t = \gamma u_{t-1} (1 - e^{-\theta u_{t-1}^2}) + \alpha' \Delta x_t + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta y_{t-j} + \sum_{j=1}^p \lambda_j' \Delta x_{t-j} + e_t \quad (4.9)$$

Ancak modelde yer alan belirlenme sorunu nedeni ile Taylor açılımının kullanılır. Bu durumda hata düzeltme modeli aşağıdaki denkleme yaklaşır.

$$\Delta y_t = \delta u_{t-1}^3 + \omega' \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \psi_i' \Delta z_{t-i} + u_t \quad (4.10)$$

Geliştirilen QKSS eşbütünleşme testi için denklem kantil notasyonu ile aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$\Delta y_t = \beta(\tau) u_{t-1}^3 + \beta(\tau) \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \psi_i'(\tau) \Delta z_{t-i} + u_t(\tau), \quad \tau = 0.1, 0.2, \dots, 0.9 \quad (4.11)$$

Modelde yer alan τ , kantilleri ifade eder.

Bu model her kantil için yeniden tahmin edilir. Model sonuçları kullanılarak test istatistiği değeri,

$$\hat{V}_n(\tau) = n(\hat{\beta}(\tau) - \hat{\beta}) \quad (4.12)$$

şeklinde hesaplanır. $\hat{V}_n(\tau)$ değerinin supremum olanı alınır.

$\hat{\beta}(\tau)$, kantil regresyona ait β değeri, $\hat{\beta}$ ise ols regresyon sonucunda elde edilen β değerleridir.

Eşitlikleri kullanılarak x_t^* ve y_t^* elde edilir.

$$x_t^* = x_{t-1}^* + v_t^* \quad (4.13)$$

$$x_1^* = x_1 \quad (4.14)$$

$$y_t^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}' x_t^* + u_t^* \quad (4.15)$$

yeni örnekler elde edilir(y_t^*, x_t^*).

Geliştirilen QKSS testinin asimptotik dağılımı standart olmadığından kritik değerleri simülasyon sonucunda elde edilmiştir. Bozucu terimin varlığı nedeniyle kritik değerler tablosu oluşturulamamıştır.

Kullanılan Bootstrap Aşamaları Xiao (2009) çalışmasındaki gibidir²:

i) Öncelikle sırasıyla $\hat{\beta}(\tau)$ ve $\hat{\beta}$, kantil regresyon ve OLS regresyon ile

$$y_t = \alpha + \beta' x_t + \sum_{j=-K}^K \Delta x_{t-j}' \Pi_j + \varepsilon_t \quad (4.16)$$

tahmin edilir.

$$\hat{V}_n(\tau) = n(\hat{\beta}(\tau) - \widehat{\beta}) \quad (4.17)$$

oluşturulur ve artıklar elde edilir.

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}' x_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

$$\text{ii) } \hat{w}_t = (v_t, \hat{u}_t), v_t = \Delta x_t \quad (4.19)$$

tanımlanır. $\hat{w}_t$ üzerinde otoregresyon uygulanır ve

$$\hat{w}_t = \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \hat{w}_{t-j} + \hat{e}_t, \quad t = q + 1, \dots, n \quad (4.20)$$

uygun artıklar elde edilir.

$$\hat{e}_t = \hat{w}_t - \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \hat{w}_{t-j}, \quad t = q + 1, \dots, n \quad (4.21)$$

² Z.Xiao, **a.g.e.**, s.253.

iii) Bağımsız ve özdeş dağılmış rastgele değişkenler $\{e_t^*\}_{t=q+1}^n$ merkezi artıklardan $\hat{e}_t - \frac{1}{n-q} \sum_{j=q+1}^n \hat{e}_j$ ve uygun otoregresyon kullanılarak e_t^* den w_t^* düzenlenir.

$$w_t^* = \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j w_{t-j}^* + e_t^*, \quad t = q + 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

$$w_j^* = \hat{w}_j \quad j = 1, \dots, q \quad (4.23)$$

iv) $w_t^* = (v_t^*, u_t^*)$, $\hat{w}_t = (v_t, \hat{u}_t)$ ile uyumlu olacak şekilde tanımlanır ve x_t^* ,

$x_t^* = x_{t-1}^* + v_t^*$ ve $x_1^* = x_1$ 'dan türetiriz. x_t^* kullanılarak y_t^* ,

$$y_t^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}' x_t^* + u_t^* \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece, bootstrap örnekleri elde edilmiş olur. (y_t^*, x_t^*) .

v) Bootstrap örnekleri (y_t^*, x_t^*) kullanılarak, $\hat{\beta}(\tau)$, $\hat{\beta}$ ve $\hat{V}_n(\tau)$ 'nin bootstrap versiyonları elde edilir. Öncelikle $\hat{\beta}^*(\tau)$ ve $\hat{\beta}^*$, kantil ve OLS regresyon için aşağıdaki denklem ile elde edilir.

$$y_t^* = \alpha + \beta' x_t^* + \sum_{j=-K}^K \Delta x_{t-j}^{*'} \Pi_j + \varepsilon_t^* \quad (4.25)$$

Sonra $\hat{V}_n^*(\tau)$ oluşturulur.

$$\hat{V}_n^*(\tau) = n(\hat{\beta}^*(\tau) - \hat{\beta}^*) \quad (4.26)$$

Bu prosedürde, bootstrap testini geçerli kılmak için, β sabitinin temel hipotezi altında y_t^* 'ı üretiriz. Test istatistiklerinin dağılımı, 2-5 arası adımlar birçok kez tekrarlanarak tahmin edilebilir.

4.2. Önerilen Test ile Uygulama Örneği

Bu bölümde geliştirilen eşbütünleşme testine yönelik süreci gösteren bir uygulama yapılmıştır. Amerikan Borsalarının gösterge endeksi olarak S&P 500 Borsa Endeksi (SPX) ve Tesla (TSLA) arasındaki eşbütünleşme ilişkisi araştırılmıştır. Mart 2021-Temmuz 2023 dönemine ait günlük veri seti Yahoo Finance veri tabanından alınmıştır. Uygulama olarak incelenecek model, aşağıdaki şekilde oluşturulur;

$$SPX_t = \alpha(\tau)d_t + \beta(\tau)TSLA_t + u_t(\tau) \quad (4.27)$$

burada $\beta(\tau)$, kantil eşbütünleşme yöntemi sonucunda eşbütünleşme vektöründen elde edilmiş olan ve SPX ile TSLA doğrusal olmayan ilişkinin ölçütüdür. Söz konusu katsayı, kantillere göre değişkenlik gösterir. Eşbütünleşme ilişkisinin testi için ise yukarıdaki regresyon sonucunda elde edilen kalıntıların kararlı bir süreç izleyip izlemediği farklı kantillere göre kantil eşbütünleşme testiyle test edilir.

Testlere başlamadan önce veri setinin analizi için değişkenlere ait tanımlayıcı istatistiklere yer verilmiştir.

Tablo 4. 3: Tanımlayıcı İstatistikler

	Kurtosis	Skewness	Jarque-Bera
TSLA	2.8595	0.3299	12.042
SPX	2.1219	-0.0347	20.531

Değişkenler için elde edilen tanımlayıcı istatistik sonuçlarına göre, TSLA ve SPX değişkenleri sivri ve kalın kuyruğa sahiptir.

Jarque-Bera test sonuçlarına göre ise değişkenler normal dağılıma sahip değildir.

Geleneksel eşbütünleşme yöntemlerinde olduğu gibi kantil eşbütünleşme yönteminde de eşbütünleşme modeli, birinci mertebeden durağan değişkenler ile oluşturulmaktadır.

Bu nedenle, öncelikle hem TSLA hem de SPX serilerinin durağanlıkları gözlemlenir. Tablo 4.4’de her iki değişken için düzey ve birinci farklarında ADF birim kök testi sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 4. 4: Geleneksel Birim Kök Test Sonuçları

Değişkenler	ADF		PP		KPSS	
	Sabit	Sabit ve Trendli	Sabit	Sabit ve Trendli	Sabit	Sabit ve Trendli
TSLA	-1.9085	-2.0111	-2.0529	-2.1847	1.8655	0.9421
SPX	-2.1253	-2.1762	-2.1644	-2.2453	1.6256	0.9663
Δ TSLA	-7.2933	-7.2878	-26.0200	-26.0027	0.0732	0.067
Δ SPX	-18.5541	-18.5392	-25.1449	-25.1261	0.1156	0.1153

ADF (1981), PP (1998) ve KPSS (1992) geleneksel birim kök test sonuçlarına göre %5 anlamlılık düzeyinde TSLA ve SPX değişkenlerinin düzey halleriyle durağan olmadığı ancak birincil farkı alınan serilerin durağan olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Geleneksel birim kök testlerinin sonuçları incelendiğinde TSLA ve SPX değişkenlerinin 1.mertebeden durağan olduğu sonucuna ulaşılır. Eşbütünleşme analizi yapılabilmesi için gerekli olan şart sağlanmıştır.

Tablo 4. 5: Kapetanious vd.(2003) Birim Kök Test Sonuçları

Değişkenler	Kapetanious vd.(2003)			
	k	c	k	t
TSLA	9	-3.540159	9	-4.013825
SPX	9	-2.699955	9	-2.680886

Kapetanious vd. (2003) testi tablosunda yer alan c ortalama arındırılmış yapıyı, t ise ortalama ve trendden arındırılmış yapıyı göstermektedir. Test istatistikleri Kapetanious vd. (2003) çalışmasında yer alan kritik değerler ile karşılaştırılmıştır. Test sonuçlarına göre %5 anlamlılık düzeyi için birim kök temel hipotezi SPX için kabul edilmektedir. Kapetanious vd. (2003) test sonuçlarına göre SPX serisi durağan değildir.

Tablo 4. 6: Sollis(2009) Birim Kök Test Sonuçları

Değişkenler	Sollis(2009)			
	k	c	k	t
TSLA	9	7.448794	9	9.147344
SPX	9	3.960008	9	4.037759

Sollis (2009) testi tablosunda yer alan c ortalamadan arındırılmış yapıyı, t ise ortalama ve trendden arındırılmış yapıyı göstermektedir. Test istatistikleri Sollis (2009) çalışmasında yer alan kritik değerler ile karşılaştırılmıştır. Test sonuçlarına göre %5 anlamlılık düzeyi için birim kök temel hipotezi SPX için kabul edilmektedir. Sollis (2009) test sonuçlarına göre SPX serisi durağan değildir.

Tablo 4. 7: Kruse(2011) Birim Kök Test Sonuçları

Değişkenler	Kruse(2011)			
	k	c	k	t
TSLA	9	12.95274	9	16.31575
SPX	9	7.753661	9	8.099813

Kruse (2011) testi tablosunda yer alan c ortalamadan arındırılmış yapıyı, t ise ortalama ve trendden arındırılmış yapıyı göstermektedir. Test istatistikleri Kruse (2011) çalışmasında yer alan kritik değerler ile karşılaştırılmıştır. Test sonuçlarına göre %5 anlamlılık düzeyi için birim kök temel hipotezi SPX için kabul edilmektedir. Kruse (2011) test sonuçlarına göre SPX serisi durağan değildir.

Tablo 4. 8: SPX için Koenker -Xiao(2004)Kantil Birim Kök Test Sonuçları

SPX için Koenker - Xiao(2004) Kantil Birim Kök Testi Sonuçları				
<i>Kantiller (τ)</i>	$\hat{\alpha}_1(\tau)$	$t_n(\tau)$	$\hat{\delta}^2$	Kritik Değer(%5)
0.1	-11.739	-0.686	0.411	-2.5152
0.2	10.921	-1.065	0.497	-2.5816
0.3	-11.606	-0.186	0.549	-2.6114
0.4	-1.701	-0.178	0.560	-2.6176
0.5	1.128	-0.039	0.564	-2.6199
0.6	48.703	-1.171	0.555	-2.6148
0.7	104.818	-1.952	0.527	-2.599
0.8	167.138	-3.025	0.452	-2.5475
0.9	206.23	-2.957	0.318	-2.4184

QKS Test İstatistiği:-3.025*

*Sembölü %5 anlamlılık seviyesinde birim kök temel hipotezinin reddedildiği anlamına gelmektedir.Seri durağandır.

Tablo 4. 9: TSLA için Koenker -Xiao(2004)Kantil Birim Kök Test Sonuçları

TSLA için Koenker - Xiao(2004) Kantil Birim Kök Testi Sonuçları				
<i>Kantiller (τ)</i>	$\hat{\alpha}_1(\tau)$	$t_n(\tau)$	$\hat{\delta}^2$	Kritik Değer(%5)
0.1	2.437	-4.041	0.356	-2.4592
0.2	3.795	-4.386	0.461	-2.5544
0.3	1.777	-2.515	0.503	-2.5857
0.4	1.541	-2.081	0.502	-2.5854
0.5	1.691	-1.317	0.495	-2.5804
0.6	1.271	0.366	0.493	-2.5785
0.7	1.790	1.366	0.469	-2.5604
0.8	4.449	0.856	0.427	-2.528
0.9	4.026	3.193	0.332	-2.4344

QKS Test İstatistiği:-4.386*

*Sembölü %5 anlamlılık seviyesinde birim kök temel hipotezinin reddedildiği anlamına gelmektedir.Seri durağandır.

Tablo 4. 10: Kapetanious, Shin ve Snell (2006) Eşbütünleşme Test Sonuçları

KSS(2006) Eşbütünleşme Testi				
TSLA-SPX	k	Ham Veri	Ortalamadan arındırılmış	Ortalama ve trendden arındırılmış
	12	-2.871761	-1.353915	-1.362032

Kapetanious, Shin ve Snell (2006)³ eşbütünleşme testine göre %5 anlamlılık düzeyinde değişkenler arasında eşbütünleşme ilişkisinin bulunmamasını ifade eden temel hipotez ortalamadan arındırılmış, ortalamadan arındırılmış ve trendden arındırılmış yapı için kabul edilir.

Tablo 4. 11: Önerilen Kantil Eşbütünleşme Testi Sonuçları

QKSS Kantil Eşbütünleşme Testi Önerisi				
	Test İstatistiği	Kritik Değerler		
		99%	95%	90%
TSLA-SPX	0.00022	0.00023	0.00019	0.00017

Önerilen test için sınanacak olan hipotezler şu şekilde oluşturulur,

H_0 : TSLA ile SPX arasında eşbütünleşme yoktur.

H_1 : TSLA ile SPX arasında eşbütünleşme vardır.

Test istatistik değeri tablo değerlerinden büyük olduğu için eşbütünleşme ilişkisinin bulunmamasını ifade eden temel hipotez reddedilir. Önerilen kantil eşbütünleşme testi sonuçlarına göre %5 anlamlılık düzeyinde TSLA ve SPX değişkenleri arasında eşbütünleşme vardır.

Geleneksel eşbütünleşme test sonuçları, seriler arasında bir eşbütünleşme ilişkisinin olmadığı yönünde çıktı üretirken, önerilen kantil eşbütünleşme testi TSLA ve SPX değişkenleri arasında eşbütünleşme ilişkisinin olduğunu ortaya koymaktadır.

³ G.Kapetanios, Y.Shin, and A. Snell, **a.g.e.**

SONUÇ

Ekonometrik seriler için analizlere başlamadan önce serilerin durağanlığı incelenmelidir. Literatürde durağanlık analizi için kullanılan testler vardır. ADF testi ile başlayan geleneksel birim kök testlerinin büyük çoğunluğu en küçük kareler tahminine dayanmaktadır. Bu tahminlerin güvenilir olması için bir dizi varsayımı sağlaması gerekmektedir. Bu varsayımlar sağlanmadığı takdirde elde edilen sonuçlara tam olarak güvenemeyiz. Bunlardan biri normalliktir. Normallik, zaman serileri analizinde serinin dağılımının Gauss'a uygunluğunda güvenilir sonuçlar verdiğini söyler.

Literatürde, incelenecek seri normal dağılmadığında EKK ile tahminin güvenilir olmadığını ve buna karşı dirençli sonuçlar veren testlere ihtiyaç duyulduğu konusundan bahsedilmiştir. İktisadi serilerin çoğunlukla normal dağılmadığı da belirtilmektedir. Bu literatürden hareketle seriler normal dağılmadığında etkinlik kaybına uğramacağımız testler geliştirilmeye çalışılmıştır.

Literatürde seriler normal dağılmadığında uygulayabileceğimiz etkinlik kaybına neden olmayacak, KSS (2006) eşbütünleşme testinde yer alan doğrusal olmayan ESTAR yapının kantille modellendiği bir eşbütünleşme testi yoktur. Buradan hareketle literatürde yer alan bu eksikliği gidermek amacıyla yeni bir kantil eşbütünleşme testi önerilmiştir.

Önerilen test simülasyonu sonucunda, üretilen kantil testinin üstünlüğü ve kullanım gerekçesi ispatlanmıştır. Kritik değer üretimindeki bozucu terim nedeni ile bootstrap yöntemine geçiş yapılmıştır.

Çalışmada önerilen testin adımlarını göstermek adına 2021-2023 döneminde günlük verilerle bir uygulamaya yer verilmektedir. Öncelikle çalışmada kullanılan ve Amerikan Borsa gösterge endeksleri olarak ele alınan SPX ve TSLA verilerinin normal dağılıp dağılmadığı test edilmiştir. Test sonucunda değişkenlerin normal dağılım

varsayımını sağlamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmada geleneksel birim kök testleri ve doğrusal olmayan birim kök test sonuçları tablolar şeklinde gösterilmiştir. Genel olarak birim kök test sonuçları değişkenlerin düzey halleriyle durağan olmadığını göstermiştir. Ancak değişkenler birinci farkları alındığı durumda durağan hale gelmektedir. Eşbütünleşme testleri için gerekli olan temel şartı yani değişkenlerin aynı mertebeden durağan olmasını sağlamaktadır.

Önerilen test uygulamasına geçmeden önce doğrusal olmayan eşbütünleşme testlerinden Kapetanious, Shin ve Snell (2006) testi söz konusu verilere uygulanmıştır. Test sonucunda temel hipotez kabul edilerek TSLA ve SPX değişkenleri arasında eşbütünleşme ilişkisi olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Sonrasında önerilen kantil eşbütünleşme yaklaşımı ile geliştirilen test sonucuna göre temel hipotez reddedilir eşbütünleşme ilişkisi vardır sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç, kantillerin önemini vurgular ve kantillerin dikkate alınmadığı durumda yanlış yorumlamaların yapılabileceğini gösterir. Geleneksel eşbütünleşme testleriyle seriler arasında eşbütünleşme ilişkisi ortaya konamazken, geliştirilen kantil eşbütünleşme testiyle değişkenler arasındaki eşbütünleşme ilişkisi ortaya konmuştur.

Sonuçlardan da görüldüğü gibi eşbütünleşme testi yapılırken kantil eşbütünleşme testiyle inceleme yapılmadığı takdirde seriler arasında eşbütünleşme ilişkisi olmadığı yönünde yanıltıcı sonuçlar çıkmaktadır.

KAYNAKÇA

- Bofingeb, Eve:** "Estimation of a density function using order statistics 1.", **Australian journal of statistics**, 17.1, 1975, 1-7.
- Buchinsky, Moshe:** "Estimating the asymptotic covariance matrix for quantile regression models a Monte Carlo study.", **Journal of Econometrics**, 68.2, 1995, 303-338.
- Buchinsky, Moshe:** "Recent advances in quantile regression models: a practical guideline for empirical research.", **Journal of human resources**, 1998, 88-126.
- Cade, B. S. ve Richards, J. D.:** "A Permutation Test for Quantile Regression", **Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics**, 11(1), 2006, 106- 126.
- Chamberlain, Gary:** "Quantile regression, censoring, and the structure of wages.", No. 1558. in C. Sims and J. J. Laffont (eds), **Proceeding of the Sixth World Congress of the Econometric Society, Spain, Cambridge University Press**, 1994.
- Chen, Colin:** "An introduction to quantile regression and the quantreg procedure." **Proceedings of the Thirtieth Annual SAS Users Group International Conference**. SAS Institute Inc. Cary, NC, 2005.
- Chen, Li-Hsueh, Miles Finney, and Kon S. Lai:** "A threshold cointegration analysis of asymmetric price transmission from crude oil to gasoline prices.", **Economics letters** 89.2, 2005, 234-235.
- Christou, Christina, et al.:** "Do house prices hedge inflation in the US? A quantile cointegration approach.", **International Review of Economics & Finance** 54, 2018, 15-26.

- Çağlayan, Ebru, Saçaklı, İrem:** “İMKB Endeksi için Farklı Kantillerde Birim Kök Analizi”, 5.İstatistik Günleri Bildiriler Kitabı, Mayıs 2006, s. 37-43.
- Çekiç, Anıl:** İkiz açıklar hipotezinin Türkiye açısından değerlendirilmesi: kantil eşbütünleşme testi uygulaması, Sakarya Üniversitesi, 2019.
- Davies, Robert B.:** "Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative.", *Biometrika* 64.2, 1977, 247-254.
- Dickey, David A., and Wayne A. Fuller:** "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root.", **Journal of the American statistical association** 74.366a, 1979, 427-431.
- Dickey, David A., and Wayne A. Fuller:** Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root." **Econometrica: journal of the Econometric Society** ,1981, 1057-1072.
- Efron, Bradley:** "Bootstrap methods: another look at the jackknife." Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution. New York, NY: Springer New York, 1992. 569-593.
- Efron, Bradley:** "Maximum likelihood and decision theory." *The annals of Statistics*,1982, 340-356.
- Efron, B.:** "Bootstrap methods: another look at the jackknife *The annals of Statistics*",1979, Google Scholar: 1-26.
- Enders, Walter, and Clive William John Granger:** "Unit-root tests and asymmetric adjustment with an example using the term structure of interest rates." **Journal of Business &Economic Statistics** 16.3 ,1998, 304-311.

- Enders, Walter, and Pierre L. Siklos:** "Cointegration and threshold adjustment.", **Journal of Business & Economic Statistics** 19.2, 2001, 166-176.
- Engle, Robert F., and Clive WJ Granger:** "Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing.", **Econometrica: journal of the Econometric Society**, 1987, 251-276.
- Fabio Augusto Reis Gomes:** "Testing the Permanent Income Hypothesis Using Unit Root Quantile Autoregression Tests", **Applied Economics Letters**, 18:18, 2011, s. 1756.
- Galvao Jr, Antonio F.** "Unit root quantile autoregression testing using covariates.", **Journal of econometrics** 152.2, 2009, 165-178.
- Galvao, Antonio F., et al.:** "Testing linearity against threshold effects: uniform inference in quantile regression." **Annals of the Institute of Statistical Mathematics** 66 , 2014, 413-439.
- Galvao Jr, Antonio F., Gabriel Montes-Rojas, and Jose Olmo:** "Threshold quantile autoregressive models." **Journal of Time Series Analysis** 32.3, 2011, 253-267.
- Gilchrist, Warren:** "Statistical modelling with quantile functions." , CRC Press, 2000.
- Gill, Indermit Singh, Claudio Montenegro, and Dörte Dömeland, eds.:** **Crafting labor policy: techniques and lessons from Latin America.**, World Bank Publications, 2002.
- Granger, Clive W.J.:** "Some Properties of Time Series data and Their Use in Econometric Model Specification", **Journal of Econometrics**, Vol:16, 1981, ss.121-130.

- Gujarati, Damodar N.:** Temel Ekonometri, 8.Baskı, Literatür Yayıncılık, 2011, s.707.
- Güriş, Burak:** R Uygulamalı Doğrusal Olmayan Zaman Serileri Analizi, 1.Baskı, Der Yayınları, 2020, s.109.
- Güriş,Selahattin,Çağlayan Akay, Güriş,Burak:** R ile Temel Ekonometri, Der Yayınları, 2020.
- Hall, Peter, and Simon J. Sheather:** "On the distribution of a studentized quantile.", **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)** 50.3, 1988, 381-391.
- Hao, Lingxin, and Daniel Q. Naiman:** Quantile regression. No. 149. Sage, 2007.
- Hao, Kang, and Brett Inder:** "Diagnostic test for structural change in cointegrated regression models.", **Economics Letters** 50.2, 1996, 179-187.
- Huber, P.:** "Robust statistics. new york: John wiley and sons." HuberRobust statistics1981 (1981).
- Jarque, Carlos M., and Anil K. Bera:** "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals.", **Economics letters** 6.3, 1980, 255-259.
- John, O. O. & Nduka, E. C.:** Quantile Regression Analysis as a Robust Alternative to Ordinary Least Squares", **Scientia Africana**, 2009, 8(2), 61-65.
- J.Tiago de Oliveria, Benjamin Epstein:** Some Recent Advances in Statistics, **London: Academic Press**, 1982, s.35.
- Kapetanios, George,** "Testing for a unit root in the nonlinear STAR

- Yongcheol Shin, and Andy Snell:** **framework."**, **Journal of econometrics** 112.2, 2003, 359-379.
- Kapetanios, George, Yongcheol Shin, and Andy Snell:** "Testing for cointegration in nonlinear smooth transition error correction models.", **Econometric Theory**, 22.2, 2006, 279-303.
- Koenker, Roger, and Gilbert Bassett Jr.:** "Regression quantiles.", **Econometrica: journal of the Econometric Society**, 1978, 33-50.
- Koenker, Roger, and Zhijie Xiao:** "Unit root quantile autoregression inference.", **Journal of the American statistical association**, 99.467, 2004, 775-787.
- Koenker, Roger, and Gilbert Bassett Jr.:** "Regression quantiles.", **Econometrica: journal of the Econometric Society**, 1978, 33-50.
- Koenker, Roger, and Zhijie Xiao:** "Quantile autoregression.", **Journal of the American statistical association** 101.475, 2006, 980-990.
- Koenker, Roger, and Kevin F. Hallock:** "Quantile regression.", **Journal of economic perspectives**, 15.4, 2001, 143-156.
- Koenker, Roger, and Gilbert Bassett Jr.** Robust tests for heteroscedasticity based on regression quantiles.", **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, 1982, 43-61.
- Koenker, Roger, and Gilbert Bassett Jr.:** "Robust tests for heteroscedasticity based on regression quantiles.", **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, 1982, 43-61.
- Knight, Keith:** "Limit theory for M-estimates in an integrated infinite variance.", **Econometric Theory** 7.2, 1991, 200-212.
- Kruse, R.:** "A New Unit Root Test Against ESTAR

Based on a Class of Modified Statistics",
Statistical Papers, 52, 2011, 71-85.

- Kuriyama, Nina:** "Testing cointegration in quantile regressions with an application to the term structure of interest rates.", **Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics** 20.2, 2016, 107-121.
- Kwiatkowski, Denis, et al.:** "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?.", **Journal of econometrics**, 54.1-3, 1992, 159-178.
- Lee, Chien-Chiang, and Jhih-Hong Zeng:** "Revisiting the relationship between spot and futures oil prices: evidence from quantile cointegrating regression.", **Energy economics** 33.5, 2011, 924-935.
- Lee, Junsoo, and Mark C. Strazicich:** "Minimum Lagrange multiplier unit root test with two structural breaks.", **Review of economics and statistics**, 85.4, 2003, 1082-1089.
- Lee, S.:** "Lecture Notes for MECT1 Quantile Regression.", 2005.
- Li, Haiqi, and Sung Y. Park.:** "Testing for a unit root in a nonlinear quantile autoregression framework.", **Econometric Reviews** 37.8, 2016, 867-892.
- MacKinnon, J.G.:** Critical values for cointegration tests, In Eds, Long-Run Economic Relationship: Readings in Cointegration, 1991.
- MacKinnon, J.G.:** Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests, **Journal of applied econometrics**, 11, 6, 1996, p.601-618.

- Maki, Daiki, and Shin-ichi Kitasaka:** The equilibrium relationship among money, income, prices, and interest rates: evidence from a threshold cointegration test.", **Applied Economics** **38.13**, 2006, 1587.
- M. Buchinsky:** "Estimating The Asymptotic Covariance Matrix For Quantile Regression Models A Monte Carlo Study", **Journal of Econometrics**, 68, 1995, s. 308.
- Nelson, Charles R., and Charles R. Plosser:** "Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications.", **Journal of monetary economics** **10.2**, 1982, 139-162.
- Olivera, J.Tiago de, Benjamin Epstein:** "Some Recent Advances in Statistics", **London: Academic Press**, 1982.
- Özdemir, Müge:** Kantil Birim Kök Testleri:Kırılgan Beşli Ülkelerinde Enflasyonun Kalıcılığının Analizi, İstanbul Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
- Phillips, Peter CB, and Bruce E. Hansen:** "Statistical inference in instrumental variables regression with I (1) processes.", **The review of economic studies** **57.1**, 1990, 99-125.
- Philips, P., & Perron, P. :** Testing for Unit Roots in Time Series Regression. *Biometrika*, Vol:75, 1988, 335-346.
- Perron, P.:** "The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis.", **Econometrica:journal of the Econometric Society**, 1989, 1361-1401.
- Powell, J.L.:** "Censored Regression Quantiles", **Journal of Econometrics**, Vol.32, No.1, 1986, s.143.
- Tarı, Recep:** *Ekonometri*, Umuttepe Yayınları, 7.Baskı, s.374.

- Tsay Ruey S.:** Analysis of Financial Time Series, (University of Chicago), 3.Baskı, 2010, s.23.
- Saçaklı, İrem:** Kantil Regresyon ve Alternatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması., Marmara Üniversitesi, 2005.
- Saikkonen, Pentti:** "Asymptotically efficient estimation of cointegration regressions.", **Econometric theory** 7.1 ,1991, 1-21.
- Saraçoğlu, Bedriye, Çevik, Ferhan:** Matematiksel İstatistik, Ankara:Gazi Büro Kitabevi, 1995, s.67.
- Serper, Özer:** Uygulamalı İstatistik 1, 5.Baskı-Bursa, Ezgi Kitabevi, 2004
- Seo, Myunghwan:** "Bootstrap testing for the null of no cointegration in a threshold vector error correction model.", **Journal of Econometrics**, 134.1 (2006): 129-150.
- Sollis, R.:** A Simple Unit Root Test Against Asymmetrical STAR Nonlinearity with an Application to Real Exchange Rates in Nordic Countries, **Economic Modelling**, Vol.26(1), 2009, 118-125.
- Tang, Cheng Yong, and Chenlei Leng:** "An empirical likelihood approach to quantile regression with auxiliary information.", **Statistics & Probability Letters**, 82.1 (2012): 29-36.
- Troster, Victor, Muhammad Shahbaz, and Gazi Salah Uddin:** "Renewable energy, oil prices, and economic activity: A Granger causality in quantiles analysis.", *Energy Economics* 70, 2018, 440-452.
- Tsong, Ching-Chuan:** "Testing for a unit root with covariates against nonlinear alternatives.", *Economic Modelling* 28.3, 2011, 1226-1234.

- Turfanda, Aysun:** Doğrusal olmayan birim kök testleri: Yakınsama analizi uygulaması, MS thesis, Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Wu, Y. ve Liu, Y.:** “Variable Selection in Quantile Regression”, Statistica Sinica, 2009, 801-817.
- Xiao, Zhijie:** "Quantile cointegrating regression." **Journal of econometrics** 150.2, 2009, 248-260.
- Xiao, Zhijie, and Peter CB Phillips:** "A CUSUM test for cointegration using regression residuals." **Journal of Econometrics** 108.1 ,2002, 43-61.

ÖZGEÇMİŞ

Aysun TURFANDA

Kişisel Bilgiler:

Eğitim Bilgileri:

Lise: Özel Saint Michel Fransız Lisesi(2005-2010)

Lisans: Marmara Üniversitesi- Ekonometri (2010-2014) (79.3/100)

Yüksek Lisans: İstanbul Üniversitesi- Ekonometri (2014-2018) (3.79/4)

Yüksek Lisans Tez Konusu: Doğrusal Olmayan Birim Kök Testleri:Yakınsama Analizi Uygulaması

İş Deneyimi:

T.Garanti Bankası A.Ş.- Portföy Saklama (2015-2019)

T.Garanti Bankası A.Ş.- Fon Performans İzleme (2019-...)