

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI**

$\mathcal{L}$ – FUZZY NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Reha YAPALI

**Danışman
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN**



MANİSA-2023

TEZ ONAYI

Reha YAPALI tarafından hazırlanan " **$\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda Bazı Yakınsaklık Çeşitleri**" adlı tez çalışması 05.09.2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Hüsametdin ÇOŞKUN Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Muhammed ÇINAR Muş Alparslan Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Enes YAVUZ Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

05.09.2023
Reha YAPALI



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2. Fuzzy Normlu Uzaylar ve Genelleştirmeleri	4
2.2.1. Fuzzy Normlu Uzay	4
2.2.2. Sezgisel Fuzzy Normlu Uzay	14
2.2.3. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzay	17
2.3. Yakınsaklık Çeşitleri	20
2.3.1. İstatistiksel Yakınsaklık	20
2.3.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	23
2.3.3. İdeal Yakınsaklık	24
3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	25
3.1. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık	25
3.1.1. İstatistiksel Cauchy ve İstatistiksel Sınırlılık	29
3.2. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	31
3.2.1. Lacunary İstatistiksel Tamlık	35
3.2.2. Lacunary İstatistiksel Cauchy ve Lacunary İstatistiksel Sınırlılık İlişkileri	37
3.3. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık	40
3.3.1. I_1^* – Yakınsaklık	43
3.3.2. İdeal Tamlık	48
3.3.3. İdeal Cauchy ve İdeal Sınırlılık İlişkileri	50
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A_α	A fuzzy kümesinin α kesimi
A_1	A fuzzy kümesinin çekirdeği
$ A $	A fuzzy kümesinin skalar kardinalitesi
$ A $	A fuzzy kümesinin relatif kardinalitesi
$A \leq B$	A, B nin alt kümesi (A, B birer fuzzy küme)
$A \wedge B$	A kesişim B (A, B birer fuzzy küme)
$A \vee B$	A birleşim B (A, B birer fuzzy küme)
$B = \bar{A}$	A 'nın tümleyeni B (A, B birer fuzzy küme)
δ	Yoğunluk fonksiyonu
δ_θ	θ — yoğunluk fonksiyonu
$F(X)$	X üzerindeki tüm fuzzy kümelerinin koleksiyonu
F — norm	Fuzzy norm
IF — norm	Sezgisel fuzzy norm
I_1	Aşık olmayan ideal
μ_A	A kümesine ait üyelik fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}$	Negator
π_A	Hassasiyet derecesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$supp A$	A kümesinin desteği
$\mathcal{T}$	Üçgensel norm
u	Fuzzy sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Sıfır sayısına yakın reel sayılar	5
Şekil 2.2.	Sıfır sayısına çok yakın reel sayılar	6
Şekil 2.3.	On sayısına yakın reel sayılar	6



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince desteklerini esirgemeyen, yol gösteren ve yönlendiren çok kıymetli danışmanım Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN'a samimi teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam esnasında bilgisini ve deneyimlerini paylaşan Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL'a ve tez çalışmam ile ilgili fikirlerini ve katkılarını sunan kıymetli jüri üyelerim Prof. Dr. Muhammed ÇINAR'a, Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a, Doç. Dr. Enes YAVUZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayat arkadaşım, sevgili eşim Seval YAPALI'ya, bu süreçte bana verdiği desteklerden dolayı teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Yurtiçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Reha YAPALI
Manisa, 2023

ÖZET

Doktora Tezi

$\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda Bazı Yakınsaklık Çeşitleri

Reha YAPALI

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Klasik mantıktan fuzzy mantığa geçişin tarihçesi ile birlikte sezgisel fuzzy mantığı ile $\mathcal{L}$ – fuzzy mantığından bahsedilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları ile ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiş ve bu tezin amacı takdim edilmiştir.

İkinci bölümde, fuzzy küme teorisine giriş yapılmış, sezgisel fuzzy mantığı ele alınmış ve $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylar tanıtılmıştır. Ardından, bazı yakınsaklık çeşitleri olan istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları ele alınmıştır.

Üçüncü bölüm, tezin orjinal bölümüdür. Bu bölümde, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda tanımlanmış ve özelliklerinin üzerinde durularak, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda Cauchy dizisi, sınırlı dizi, tam uzay olma gibi kavramlar sözü edilen yakınsaklık çeşitlerine göre araştırılmış ve aralarındaki ilişkiler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylar, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, İdeal yakınsaklık.

2023, 58 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Some Convergence Types On $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normed Spaces

Reha YAPALI

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüsametdin ÇOŞKUN

This thesis consists of three parts.

The first part is the introductory part. Along with the history of the transition from classical logic to fuzzy logic, intuitionistic fuzzy logic and $\mathcal{L}$ – fuzzy logic are mentioned. Studies on the concepts of statistical convergence, lacunary statistical convergence and ideal convergence are summarized and the purpose of this thesis is presented.

In the second part, fuzzy set theory is introduced, intuitionistic fuzzy logic is discussed and $\mathcal{L}$ – fuzzy normed spaces are introduced. Then, the concepts of statistical convergence, lacunary statistical convergence and ideal convergence, which are some types of convergence, are discussed.

The third part is the original part of the thesis. In this section, the concepts of statistical convergence, lacunary statistical convergence and ideal convergence are defined in $\mathcal{L}$ – fuzzy normed spaces and with emphasis on their properties, concepts such as Cauchyness, boundedness, completeness in $\mathcal{L}$ – fuzzy normed spaces are searched according to the types of convergence mentioned.

Keywords: $\mathcal{L}$ Fuzzy normed spaces, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Ideal convergence.

2023, 58 pages

1. GİRİŞ

Klasik mantık, keskin sınırlara sahip ve genellikle ikili (evet/hayır, doğru/yanlış) değerlerle çalışan bir matematiksel yaklaşımdır. Klasik mantık, net ve belirgin sonuçlar elde etmek için uygun bir yöntemdir. Ancak, bazı gerçek dünya problemleri, belirsizlik, ve çoklu değerlilik içerebilir. Bu tür durumlarla başa çıkmada klasik mantığın yetersiz kaldığı durumlar belirlenmiştir.

Fuzzy mantık, Zadeh [1] tarafından ortaya atılmış, karmaşık ve belirsiz durumları ele almak için geliştirilen bir matematiksel modeldir. Aristoteles mantığının genelleştirilmiş bir versiyonu olarak ortaya çıkmıştır ve insan tecrübeleri ve verilerini kullanarak kural tabanlı algoritmalarla çalışır. Belirli matematiksel fonksiyonları kullanarak sonuç değerleri çıkarırken, değişkenleri "az," "çok," "biraz," "orta," "uzun," "normal" gibi sözel ifadelerle tanımlayarak ara değerlerle işlem yapar.

Batı kültüründe, genellikle Aristoteles'in ikili değer mantığı (Boolean) kullanılırken, fuzzy mantık çok değerli sonuçlar elde etmek için ara değerleri kullanır. Bu da, gerçek dünyadaki karmaşık ve belirsiz durumların daha iyi modellenmesine olanak tanır.

Mantık kavramı, tarih boyunca birçok düşünür tarafından geliştirilmiştir. Bu düşünürler, mantık alanına önemli katkılarda bulunmuş ve modern mantığın temellerini atmışlardır. Bu katkılar, mantığın matematiksel ve felsefi alanlarda ilerlemesine ve fuzzy mantığın da gelişmesine katkı sağlamıştır.

Farabi, İbni Sina, İbni Rüşd, St. Augustine, Severinus Boethius, Albertus Magnus, Aquinolu Thomas, Duns Scotus, Ockhamlı William, Francis Bacon, Gottfried Wilhelm Von Leibnitz, Immanuel Kant ve Bernhard Bolzano isimli düşünürler dönemlerinde mantık kavramına önemli katkılarda bulunarak modern dönemde oluşan mantık kavramının zeminini hazırlamışlardır.

Fuzzy uzayları, fuzzy küme teorisine dayalı matematiksel kavramlardır. Bu kavramlar, belirsizlik içeren problemleri modellemek ve çözmek için kullanılır. Fuzzy uzaylarında elemanlar, geleneksel matematiksel kümeler yerine fuzzy kümeler ile temsil edilirler. Fuzzy kümeler, elemanların tam üyelik değerleri yerine $[0, 1]$ aralığında değerlere

sahip olan üyelik dereceleriyle tanımlanır. Elemanlar, tam üyelik (1) veya hiç üyelik (0) değerine sahip olabileceği gibi, ara değerlerde üyeliğe de sahip olabilir.

Fuzzy uzaylarının özellikle yapay zeka, kontrol sistemleri, karar verme, veri analizi ve lojistik gibi birçok kullanım alanları mevcuttur. Örneğin, 1987 tarihinde Hitachi firması, Semdai metrosuna fuzzy mantık kavramı uygulamıştır. Bu çalışma ile yüzde 10 enerji tasarrufu sağlamıştır ve trenin beklenen konumda durması 3 kat daha iyi hale getirilmiştir. 1988 yılında Tokyo Borsası'nda kara pazar olarak da anılan krizin sinyallerini Yamaichi Securities tarafından fuzzy mantık temelli akıllı sistem, tam 18 gün önceden haber vermiştir. Oldukça başarılı sonuçların elde edildiği bu çalışmaların ardından fuzzy mantığa ilgi yoğunlaşmıştır. Bütün bu gelişmelerle birlikte 1989 yılında aralarında IBM, Matsuhita, Toshiba, Omron, SGS, Thomson gibi firmaların da bulunduğu toplam 51 şirket bir araya gelerek "Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering" isimli laboratuvarı kurmuştur.

Sezgisel fuzzy uzayları, sezgisel fuzzy küme (IFS) teorisine dayanan ve fuzzy mantığın bir genişlemesi olan matematiksel yapılar ve kavramlardır. Atanassov [2], [3] tarafından literatüre kazandırılan sezgisel fuzzy küme teorisi, elemanların bir kümede üyeliğini, üye olma derecesi ve üye olmama derecesi olmak üzere iki ayrı değerle ifade eden bir genelleştirilmiş fuzzy küme kuramıdır. Sezgisel fuzzy uzaylarda, sezgisel fuzzy kümeler ve bu kümeler üzerinde işlem yapmak için çeşitli mantık operatörleri kullanılır. Sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı JH. Park [4] tarafından ortaya atılmış ve bu uzay üzerinde birçok çalışma yapılmıştır [5]. Örnek olarak sezgisel fuzzy metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri Cihangir Alaca [6], [7] tarafından çalışılmıştır. Matematikçiler tarafından fuzzy sayı kavramı [8] ve fuzzy küme teorisi üzerine norm kavramı daha sonraki yıllarda eklenmiştir [9].

Sezgisel fuzzy küme teorisi, fuzzy mantığın ve klasik kesin mantığın sınırlamalarını gidermeyi hedefler ve gerçek dünyadaki belirsiz ve muğlak durumlarla karşılaşıldığında daha uygun çözüm sunar. Bu nedenle, sezgisel fuzzy mantığının yapay zeka üzerine uygulanma potansiyeli oldukça yüksektir.

L — fuzzy küme kavramı ilk olarak Goguen [10] tarafından ortaya atılmış ve üyelik fonksiyonunun değer kümesi, kısmi sıralı kümelerin özel bir hali olan kafesler yardımıyla

oluşturulmuştur. Dolayısıyla, L – fuzzy mantığı, sezgisel fuzzy mantığının da bir genellemesi olarak kabul edilmektedir. Ardından, L – fuzzy uzaylar üzerinde [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] şeklinde birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin, Mursaleen’in [18] tanımladığı λ – istatistiksel yakınsaklık kavramı, arşimedyan olmayan $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda, Eghbali ve Ganji [19] tarafından çalışılmıştır.

Klasik anlamda tanımlanan yakınsaklık kavramının bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [20] ve Steinhaus [21] tarafından eşzamanlı olarak çalışılmış, ardından Salat [22], Fridy [23] ve Connor [24] gibi matematikçiler tarafından bu kavram geliştirilmiştir. Daha sonra literatüre, istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birçok çalışma eklenmiştir [25], [26], [27], [28].

Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fridy, John Albert ve Cihan Orhan [29] tarafından tanımlanmış ve bu kavram üzerinde birçok çalışma yapılmıştır [30], [31], [32], [33].

İdeal yakınsaklık kavramı ilk olarak Kostyrko, Pavel, Tibor Salat ve Wladyslaw Wilczynski [34] tarafından tanımlanmış ve bu çalışmanın devamı niteliğinde ideal limit noktaları ile ilgili çalışma [35] aynı bilim insanları tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra, Ekrem Savaş [36], [37], [38] gibi çalışmaları ile ideal yakınsaklık kavramını zenginleştirmiş ve matematikçiler tarafından ideal yakınsaklık kavramı ile ilgili [39], [40], [41] gibi birçok çalışma yapılmıştır.

Bu tezin amacı, L – fuzzy normlu uzaylarda, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramlarını literatüre kazandırmaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bugüne kadar çalışılmış, tezimize temel oluşturan kavramlardan bahsedilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.2. Fuzzy Normlu Uzaylar ve Genelleştirmeleri

Bu alt bölümde ilk olarak, fuzzy küme kavramı ile ilgili tanımlar verilerek, örneklerle açıklanacaktır. Sonrasında, fuzzy norm kavramı verilecektir. Ardından, sezgisel fuzzy küme teorisi ile ilgili temel tanımlamalar ile birlikte sezgisel fuzzy norm kavramı tanıtılacaktır. Son olarak da, L - fuzzy küme teorisi ile ilgili açıklamalar yapılarak, L - fuzzy normlu uzay ve özelliklerinden bahsedilecektir.

2.2.1. Fuzzy Normlu Uzay

Tanım 2.2.1. X bir evrensel küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bir x elemanın A kümesine ait olma durumunu belirleyen üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada iki durum söz konusudur.

- (i) $x \in A$ ise $\mu_A(x) = 1$,
- (ii) $x \notin A$ ise $\mu_A(x) = 0$

dır.

Tanım 2.2.2. X bir evrensel küme olmak üzere üyelik fonksiyonu $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlandığında,

$$A = \{(x, \mu_A) : x \in X\}$$

kümesine fuzzy küme denir [1].

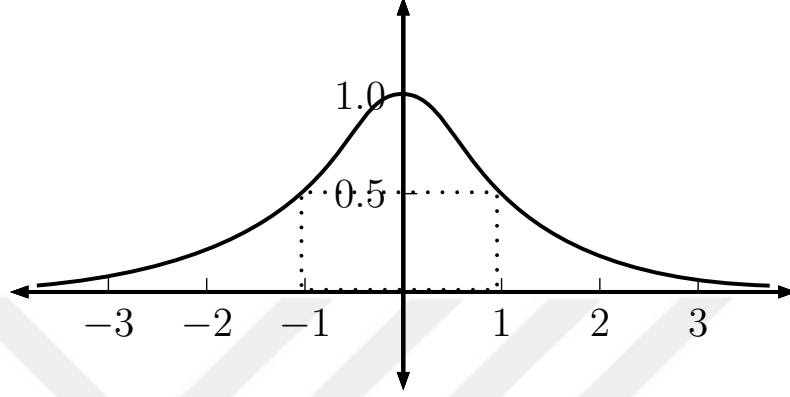
Klasik küme ile fuzzy küme arasındaki fark incelendiğinde, klasik küme teorisinde bir elemanın bir kümeye ait olma durumu ya 0 ya da 1 ile açıklanırken, fuzzy küme teorisinde bu değer, $[0, 1]$ aralığındaki bir sayıya karşılık gelir. Üyelik fonksiyonunun al-

dığı bu değer 1'e yaklaştıkça, elemanın o kümeye ait olma derecesi artarken, değer 0'a yaklaştıkça, elemanın kümeye ait olma derecesi azalır.

Örnek 2.2.3. Üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1], \quad \mu_A(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

şeklinde tanımlandığında,



Şekil 2.1. Sıfır sayısına yakın reel sayılar

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Sıfır sayısına yakın reel sayılar}\} \\ &= \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A(x) = \frac{1}{1 + x^2}\} \end{aligned}$$

kümesi bir fuzzy kümesidir. 0, 1 ve 2 elemanlarının A kümesine üyelik dereceleri sırasıyla,

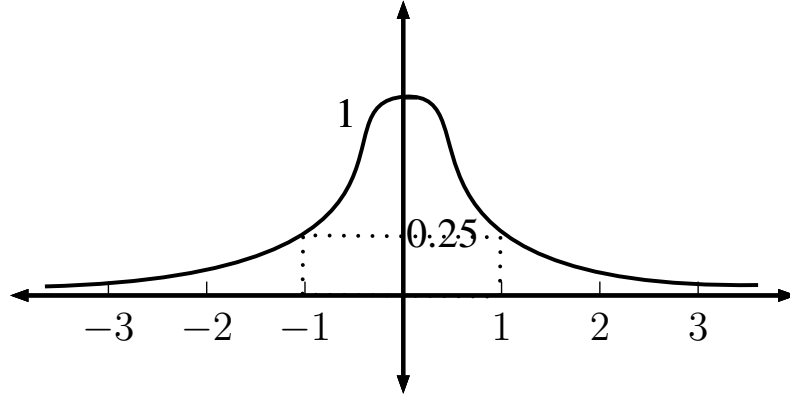
- $\mu_A(0) = 1,$
- $\mu_A(1) = 0.5,$
- $\mu_A(2) = 0.2$

dir.

Örnek 2.2.4. Üyelik fonksiyonu,

$$\mu_B : X \rightarrow [0, 1], \quad \mu_B(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

şeklinde tanımlandığında,



Şekil 2.2. Sıfır sayısına çok yakın reel sayılar

$$B = \{\text{Sıfır sayısına çok yakın reel sayılar}\}$$

$$= \{(x, \mu_B(x)) : \mu_B(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\}$$

kümesi bir fuzzy kümedir. Yukarıda verilen örnekten farklı olarak burada, sıfır sayısına daha yakın olan sayıların kümesi oluşturulmuştur. Dikkat edilirse, 0, 1 ve 2 elemanların B kümesine üyelik dereceleri sırasıyla,

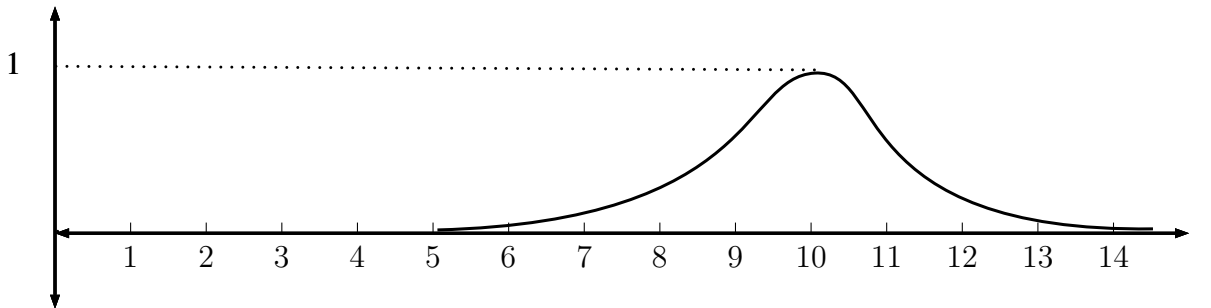
- $\mu_B(0) = 1$,
- $\mu_B(1) = 0.25$,
- $\mu_B(2) = 0.04$

dir.

Örnek 2.2.5. Üyelik fonksiyonu,

$$\mu_C : X \rightarrow [0, 1], \mu_C(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}$$

şeklinde tanımlandığında,



Şekil 2.3. On sayısına yakın reel sayılar

$$C = \{\text{On sayısına yakın reel sayılar}\}$$

$$= \{(x, \mu_C(x)) : \mu_C(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}\}$$

kümesi bir fuzzy kümedir. Burada, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ve 13 sayılarının C kümesine üyelik dereceleri sırasıyla,

- $\mu_C(7) = 0.1,$
- $\mu_C(8) = 0.2,$
- $\mu_C(9) = 0.5$
- $\mu_C(10) = 1,$
- $\mu_C(11) = 0.5,$
- $\mu_C(12) = 0.2,$
- $\mu_C(13) = 0.1$

dir. Bir başka gösterimle,

$$C = 0.1/7 + 0.2/8 + 0.5/9 + 1/10 + 0.5/11 + 0.2/12 + 0.1/13$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.6. Bir A fuzzy kümesinin desteği,

$$\text{supp}(A) = \{x : \mu_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.2.7. X evrensel küme ve A fuzzy kümesi olsun. Eğer,

$$\mu_A(x) = 1$$

olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa, bu takdirde A fuzzy kümesine normaldir denir [1].

Tanım 2.2.8. A bir fuzzy küme olmak üzere $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

kümesine A 'nın α - kesimi veya α - seviye kümesi denir. Burada,

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) > \alpha\}$$

alınırsa bu takdirde, A_α kümesine A 'nın güçlü α - kesimi denir. Ayrıca,

$$A_1 = \{x : \mu_A(x) \geq 1\}$$

şeklinde ifade edilirse, A_1 kümesine A nın çekirdeği denir [1].

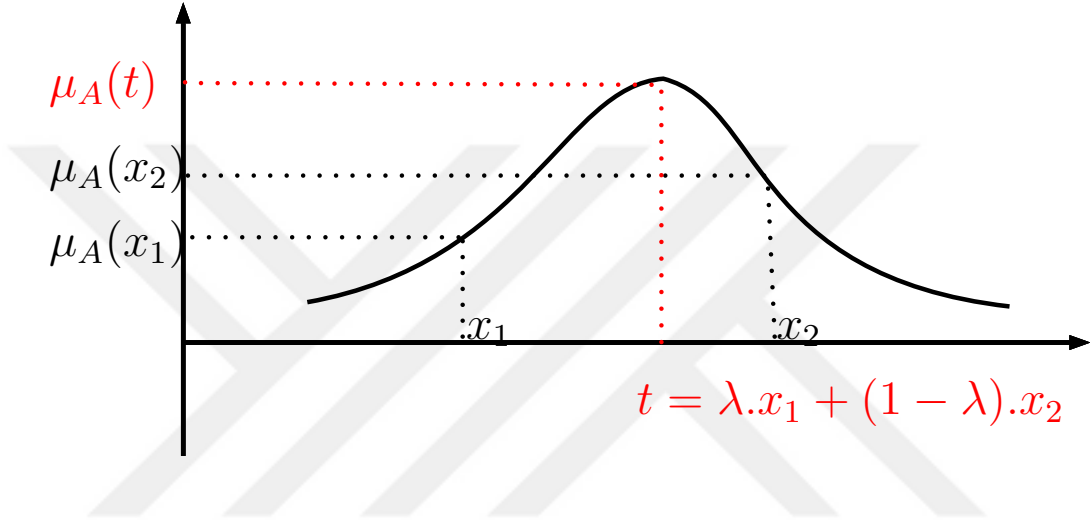
Eğer $\alpha_1 > \alpha_2$ ise, bu takdirde $A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$ olur.

Tanım 2.2.9. A reel sayılar üzerinde bir fuzzy küme, her $x_1, x_2 \in A$ için $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliği varsa, A 'ya fuzzy konveks küme denir. Bir başka deyişle, verilen bir fuzzy kümenin, tüm α -kesimleri konveks ise verilen fuzzy kümeye, konveks fuzzy küme denir [1].

Örnek 2.2.10. Aşağıdaki şekilde verilen fuzzy küme, konveks fuzzy kümedir.



Çünkü, grafikten de görüldüğü üzere,

$$\mu_A(t) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Örnek 2.2.11. Aşağıdaki şekilde verilen fuzzy küme, konveks olmayan fuzzy kümedir.

Çünkü,

$$\mu_A(t) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

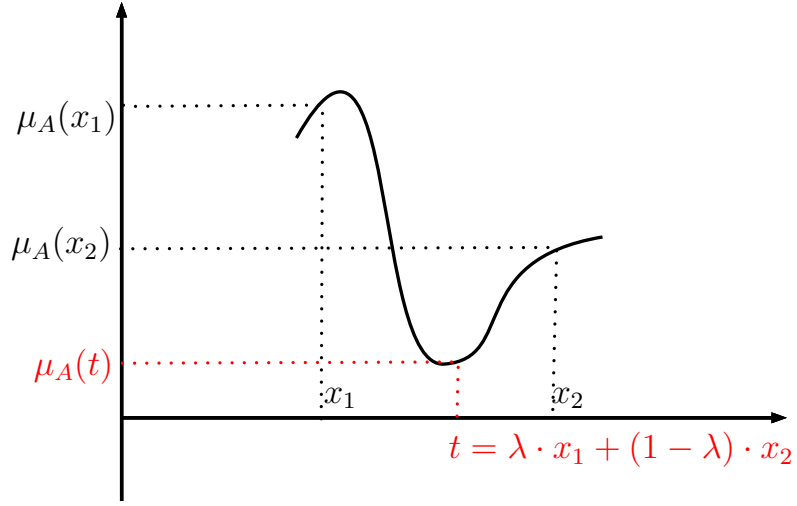
eşitsizliği, grafikten de görüldüğü üzere sağlanmaz.

Tanım 2.2.12. A ve B iki fuzzy kümesi olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ise, bu takdirde A ve B fuzzy kümelerine denktir denir [1].

Tanım 2.2.13. Kardinalite kavramı skalar, relatif ve fuzzy kardinalite olmak üzere üç başlıkta verilir.



1. A fuzzy küme olmak üzere, her $x \in X$ için

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

olarak tanımlanan kardinaliteye skalar kardinalite denir.

2. A fuzzy küme olmak üzere,

$$||A|| = \frac{|A|}{|X|}$$

şeklinde tanımlı kardinaliteye relatif kardinalite denir.

3. A bir fuzzy küme ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$|A|_F = \{(|A_\alpha|, \alpha)\}$$

ile tanımlanan kardinaliteye fuzzy kardinalite denir [1].

Şimdi, fuzzy kümeler için altküme, kesişim, birleşim ve tümleyen kavramlarının tanımlarını verelim. Bunun için, $F(X)$ 'i, X evrensel kümesi üzerinde tüm fuzzy kümele-
rinin koleksiyonu olarak alalım.

Tanım 2.2.14. $A, B \in F(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

oluyorsa A, B nin altkümesidir denir ve $A \leq B$ ile gösterilir. Boş fuzzy küme ve evrensel fuzzy küme her $x \in X$ için sırasıyla $\emptyset(x) = 0$ ve $X(x) = 1$ dir [1].

Tanım 2.2.15. $A, B \in F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için, A ve B kümelerinin kesişimi C olmak üzere,

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

ile tanımlanır ve $C = A \wedge B$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.2.16. $A, B \in F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için, A ve B kümelerinin birleşimi C olmak üzere,

$$\mu_C(x) = maks\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

ile tanımlanır ve $C = A \vee B$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.2.17. $A \in F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için A nın tümleyeni B olmak üzere,

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$$

ile tanımlanır ve $B = \bar{A}$ ile gösterilir [1].

Örnek 2.2.18. Üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1],$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 40 \leq x \leq 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 60 \\ \frac{70-x}{10}, & 60 \leq x \leq 70 \\ 0, & 70 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

şeklinde verilen fuzzy kümenin

- Çekirdeği, $(A)_1 = \{60\}$,
- $\frac{1}{2}$ seviye kümesi, $(A)_{\frac{1}{2}} = [55, 65]$,
- α - seviye kümesi, $(A)_\alpha = [50 + 10\alpha, 70 - 10\alpha], 0 < \alpha \leq 1$ ve
- Desteği, $suppA = (50, 70)$

bulunur.

Örnek 2.2.19. A ve B fuzzy kümeleri,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & 40 \leq x \leq 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 60 \\ 0, & 60 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & 40 \leq x \leq 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 60 \\ 1 - \frac{x-60}{10}, & 60 \leq x \leq 70 \\ 0, & 70 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

şeklinde verildiğinde, bu kümelerin birleşimi, kesişimi ve A nın tümleyeni sırasıyla,

$$\mu_{A \vee B}(x) = \begin{cases} 1, & 40 \leq x \leq 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 55 \\ \frac{x-50}{10}, & 55 \leq x \leq 60 \\ 1 - \frac{x-60}{10}, & 60 \leq x \leq 70 \\ 0, & 70 \leq x \leq 100 \end{cases},$$

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \begin{cases} 0, & 40 \leq x \leq 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 55 \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 55 \leq x \leq 60 \\ 0, & 60 \leq x \leq 100 \end{cases},$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, & 40 \leq x \leq 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x \leq 60 \\ 1, & 60 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi fuzzy sayıları ile ilgili tanımları verelim.

Tanım 2.2.20. $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

1. u normaldir.
2. u fuzzy konvektir.
3. u üstten yarı süreklidir.
4. $[u]_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

Bu takdirde, u fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir [8].

Tanım 2.2.21. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki fuzzy sayıların kümesi E^n ile gösterilir ve fuzzy sayı uzayı olarak adlandırılır. Bir $u \in E^n$ fuzzy sayısının α -seviye kümesi $[u]_\alpha$ ile gösterilir ve

$$[u]_\alpha := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\} & , \quad (0 < \alpha \leq 1), \\ \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}} & , \quad (\alpha = 0). \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [8].

$[u]_\alpha$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesidir.

Herhangi bir $r \in \mathbb{R}^n$ sayısı,

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = r \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\bar{r}$ fuzzy sayısı gibi düşünülür.

Tanım 2.2.22. Fuzzy sayılarının üzerindeki toplama ve skaler çarpma işlemleri $u, v \in E^n$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u + v = w \iff \text{her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } [w]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$$

ve

$$\text{her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } [ku]_\alpha = k[u]_\alpha$$

ile tanımlanır [8].

Teorem 2.2.23. Fuzzy sayıları aşağıdaki cebirsel özelliklere sahiptir.

- (i) Toplama işlemine göre birim eleman $\bar{0}$ dır.
- (ii) Toplama işlemine göre her $u \neq \bar{r}, r \in \mathbb{R}^n$ fuzzy sayılarının ters elemanı yoktur.
- (iii) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^n$ olsun. Eğer $a, b \geq 0$ veya $a, b \leq 0$ ise o zaman

$$(a + b)u = au + bu$$

eşitliği geçerlidir [8]. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için bu eşitlik geçerli olmayabilir.

- (iv) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in E^n$ için

$$a(u + v) = au + av$$

eşitliği geçerlidir.

- (v) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^n$ için

$$a(bu) = (ab)u$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.24. $* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $[0, 1]$ kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın.

1. $*$ işlemi değişmelidir.
2. $*$ işlemi birleşmelidir.
3. $*$ işlemi süreklidir.
4. Her $a \in [0, 1]$ için $a * 1 = a$ dır.
5. $a, b, c, d \in [0, 1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a * b \leq c * d$ dir.

Bu takdirde, $*$ işlemine sürekli t - norm adı verilir [4].

Örnek 2.2.25. Aşağıda verilen T_1, T_2 ve T_3 fonksiyonları, t - norma ait bilinen örneklerdir [12].

1. $T_1(x, y) = \min\{x, y\}$,
2. $T_2(x, y) = xy$,
3. $T_3(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$

Tanım 2.2.26. V bir reel vektör uzayı, $\mu, V \times \mathbb{R}$ üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere her $x, y \in V$ ve $t, s \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (a) Pozitif olmayan her t reel sayısı için $\mu(x, t) = 0$,
- (b) Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\mu(x, t) = 1$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x = \theta$,
- (c) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $c \neq 0$ için $\mu(cx, t) = \mu\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$,
- (d) $\mu(x + y, t + s) \geq \min\{\mu(x, t), \mu(y, s)\}$,
- (e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(x, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(x, t) = 0$,

Bu takdirde, (V, μ) ikilisine fuzzy normlu uzay denir [9].

2.2.2. Sezgisel Fuzzy Normlu Uzay

Tanım 2.2.27. X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$\mu_A, \nu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

ve her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A + \nu_A \leq 1$ şartını sağlayan,

$$A = \{(x, \mu_A, \nu_A) : x \in X\}$$

kümesi sezgisel fuzzy kümesidir. Her $x \in X$ için μ_A ve ν_A sırasıyla x elemanının A kümesine ait olma derecesi ve ait olmama derecesini ifade eder [2].

Bir fuzzy kümede herhangi bir x elemanının A kümesine ait olma derecesi μ_A ise ait olmama derecesi $1 - \mu_A$ şeklinde ifade edildiğinden, elemanın kümeye ait olma derecesi ile ait olmama derecesi toplamı her zaman 1'i vermelidir. Ancak, sezgisel fuzzy kümede, bir x elemanının A kümesine ait olma derecesi ile ait olmama derecesi toplamı 1 den küçük olabilir. Bu durum ise hassasiyetin artması anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2.28. A bir sezgisel fuzzy küme ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

$$\pi_A = 1 - \mu_A - \nu_A$$

olacak şekilde,

$$\pi_A : X \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonuna hassasiyet derecesi adı verilir [2].

Tanım 2.2.29. A ve B birer sezgisel fuzzy küme olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır [2].

- $A \subseteq B \iff$ Her $x \in X$ için $\mu_A \leq \mu_B$ ve $\nu_A \geq \nu_B$.
- $A = B \iff A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$.
- $A \cap B = \{(x, \min(\mu_A, \mu_B), \max(\nu_A, \nu_B)) : x \in X\}$.
- $A \cup B = \{(x, \max(\mu_A, \mu_B), \min(\nu_A, \nu_B)) : x \in X\}$.
- $A^c = \{(x, \nu_A, \mu_A) : x \in X\}$.
- $A \oplus B = \{(x, \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B, \nu_A \cdot \nu_B) : x \in X\}$.
- $A \otimes B = \{(x, \mu_A \cdot \mu_B, \nu_A + \nu_B - \nu_A \cdot \nu_B) : x \in X\}$.

Önerme 2.2.30. A, B ve C birer sezgisel fuzzy küme olmak üzere,

- $A \cap B = B \cap A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \oplus B = B \oplus A$
- $A \otimes B = B \otimes A$

şeklinde değişme özelliğini,

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

şeklinde birleşme özelliğini,

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \cup (B \otimes C) = (A \cup B) \otimes (A \cup C)$

şeklinde dağılma özelliğini,

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

şeklinde tek kuvvet özelliğini ve

- $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$
- $(A^c \otimes B^c)^c = A \oplus B$

şeklinde tümleyene ait özellikleri sağlar [5].

Tanım 2.2.31. $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $[0, 1]$ kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın.

1. Δ işlemi değişmelidir.
2. Δ işlemi birleşmelidir.
3. Δ işlemi süreklidir.
4. Her $a \in [0, 1]$ için $a \Delta 0 = a$ dır.
5. $a, b, c, d \in [0, 1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a \Delta b \leq c \Delta d$ dir.

Bu takdirde, Δ işlemine sürekli t - conorm adı verilir [4].

Sürekli t - norm ile t - conorm kavramını kullanarak Saadati ve Park [5] aşağıdaki gibi sezgisel fuzzy normlu uzay kavramını tanımlamışlardır.

Tanım 2.2.32. V bir reel vektör uzayı, $\mu, \nu, V \times \mathbb{R}$ üzerinde birer fuzzy küme olmak üzere her $x, y \in V$ ve $t, s \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (a) Pozitif olmayan her t reel sayısı için $\mu(x, t) = 0$,
- (b) Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\mu(x, t) = 1$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x = \theta$,
- (c) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $c \neq 0$ için $\mu(cx, t) = \mu\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$,
- (d) $\mu(x + y, t + s) \geq \min\{\mu(x, t), \mu(y, s)\}$,
- (e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(x, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(x, t) = 0$,
- (f) Pozitif olmayan her t reel sayısı için $\nu(x, t) = 1$,
- (g) Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\nu(x, t) = 1$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x = \theta$,
- (h) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $c \neq 0$ için $\nu(cx, t) = \nu\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$,
- (i) $\max\{\nu(x, t), \nu(y, s)\} \geq \nu(x + y, t + s)$,
- (j) $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(x, t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \nu(x, t) = 1$.

Bu takdirde, (V, μ, ν) üçlüsüne IF -normlu uzay ve (μ, ν) ikilisine de V üzerinde IF -norm adı verilir. Açıktır ki her $x \in V$ için $\mu(x, \cdot)$ ve $\nu(x, \cdot)$ fonksiyonları, $\mathbb{R}$ üzerinde sırasıyla azalmayan ve artmayan fonksiyonlardır.

Örnek 2.2.33. $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $\mu_0, \nu_0, V \times \mathbb{R}$ üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanan birer fuzzy küme olsun.

$$\mu_0(x, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{t + \|x\|}, & t > 0, \end{cases} \quad \nu_0(x, t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ \frac{\|x\|}{t + \|x\|}, & t > 0. \end{cases}$$

Bu takdirde, (μ_0, ν_0) , V üzerinde bir IF -normdur.

Tanım 2.2.34. Her $\varepsilon \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $n \geq n_0$ için,

$$\mu(x_n - x, t) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu(x_n - x, t) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, bu takdirde (V, μ, ν) IF -normlu uzayında (x_n) dizisi $x \in V$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.2.35. Her $\varepsilon \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $k, n \geq n_0$ için,

$$\mu(x_k - x_n, t) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu(x_n - x_k, t) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, bu takdirde (V, μ, ν) IF -normlu uzayında (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [5].

2.2.3. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzay

Tanım 2.2.36. $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ bir tam kafes ve X kümesi evrensel küme olsun. Bu takdirde,

$$A : X \rightarrow L$$

fonksiyonu X üzerinde bir L – fuzzy küme veya kısaca L – küme olarak adlandırılır. X üzerindeki tüm L – kümelerin ailesi L^X ile gösterilecektir.

Her $x \in X$ için X evrensel kümesi üzerindeki iki L – fuzzy kümesinin kesişim ve birleşimi,

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$

ve

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde L – fuzzy kümelerinin $\{A_i : i \in I\}$ küme ailesinin kesişim ve birleşimleri sırasıyla,

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} A_i(x)$$

ve

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} A_i(x)$$

ile gösterilir [10].

L tam kafesinin en büyük ve en küçük elemanı sırasıyla 1_L ve 0_L ile gösterilecektir. Ayrıca $(L, \preceq)$ kafesi üzerindeki $\succeq$, $\prec$ ve $\succ$ sembolleri aşıkâr anlamda kullanılacaktır.

Tanım 2.2.37. Her $x, y, z, t \in L$ için $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ tam kafesi üzerindeki $\mathcal{T} : L \times L \rightarrow L$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

1. $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(y, x)$
2. $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), z) = \mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$
3. $\mathcal{T}(x, 1_L) = \mathcal{T}(1_L, x) = x$
4. $x \preceq y$ ve $z \preceq t$ ise $\mathcal{T}(x, z) \preceq \mathcal{T}(y, t)$.

Bu takdirde, $\mathcal{T} : L \times L \rightarrow L$ fonksiyonuna üçgensel norm veya kısaca t – norm denir [12].

Tanım 2.2.38. L üzerindeki sıra topolojisine göre her (x_n) ve (y_n) dizisi için $(x_n) \rightarrow x \in L$ ve $(y_n) \rightarrow y \in L$ olduğunda $\mathcal{T}(x_n, y_n) \rightarrow \mathcal{T}(x, y)$ sağlanıyorsa, bu takdirde $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ tam kafesi üzerindeki $\mathcal{T}$ üçgensel norma süreklidır denir [12].

Tanım 2.2.39. $\mathcal{N} : L \rightarrow L$ fonksiyonu, $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlasın.

1. $N_1)$ $\mathcal{N}(0_L) = 1_L$,
2. $N_2)$ $\mathcal{N}(1_L) = 0_L$,
3. $N_3)$ Her $x, y \in L$ için $x \preceq y$ ise $\mathcal{N}(y) \preceq \mathcal{N}(x)$.

Bu takdirde, $\mathcal{N} : L \rightarrow L$ dönüşümüne negator, ayrıca,

4. $N_4)$ Her $x \in L$ için $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$

ise $\mathcal{N}$ ye involutif negator denir [12].

Uyarı 2.2.40. Genel olarak, sürekli t - norm olarak $\mathcal{T}$ ve negator olarak $\mathcal{N}$ alındığında, verilen her $\varepsilon \in L - \{0_L, 1_L\}$ için,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \geq \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ varlığı mümkün olmayabilir. Verilen eşitsizliğin sağlanması için gereken durumların neler olduğu ile ilgili çalışma [14]'de mevcuttur. Bu tezde, sürekli t - norm olarak $\mathcal{T}$ ve negator olarak $\mathcal{N}$ alındığında, verilen her $\varepsilon \in L - \{0_L, 1_L\}$ için,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \geq \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bir $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ 'nin varlığı kabul edilecektir.

$([0, 1], \leq)$ kafesi üzerinde, $\mathcal{N}_s(x) = 1 - x$ şeklinde tanımlı $\mathcal{N}_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, klasik fuzzy küme teorisinde kullanılan involutif negatora bir örnek teşkil eder. Benzer şekilde, $([0, 1]^2, \preceq)$ kafesi üzerinde her $(\mu_i, \nu_i) \in [0, 1]^2$, $i = 1, 2$ için

$$(\mu_1, \nu_1) \preceq (\mu_2, \nu_2) \iff \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{ve} \quad \nu_1 \geq \nu_2$$

sıralamasıyla $\mathcal{N}_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ fonksiyonu

$$\mathcal{N}_1(\mu, \nu) = (\nu, \mu)$$

şeklinde tanımlandığında, sezgisel fuzzy küme teorisinde kullanılan involutif negator olur.

Tanım 2.2.41. V bir vektör uzayı, $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ bir tam kafes, $\mathcal{T}$ bir sürekli üçgensel norm ve $\rho, V \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıda verilen şartları sağlayan bir L - fuzzy küme olsun.

- (a) Her $x \in V, t > 0$ için $\rho(x, t) \succ 0_L$.
- (b) Her $t > 0$ için $\rho(x, t) = 1_L$ ancak ve ancak $x = \theta$.
- (c) Her $x \in V, t > 0$ and $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $\rho(\alpha x, t) = \rho(x, \frac{t}{|\alpha|})$.
- (d) Her $x, y \in V$ and $t, s > 0$ için $\mathcal{T}(\rho(x, t), \rho(y, s)) \preceq \rho(x + y, t + s)$.
- (e) Her $x \in V - \{\theta\}$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = 1_L$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(x, t) = 0_L$.
- (f) $f(t) = \rho(x, t)$ ile tanımlanan $f_x : (0, \infty) \rightarrow L$ fonksiyonu sürekli'dir.

Bu takdirde, $(V, \rho, \mathcal{T})$ üçlüsüne $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay veya kısaca $\mathcal{L}$ – normlu uzay denir [12].

Tanım 2.2.42. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$\rho(x_n - x, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

kalacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elemanı bulunabiliyorsa, bu takdirde $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayındaki (x_n) dizisine x noktasına yakınsaktır denir [12].

Tanım 2.2.43. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$\rho(x_n - x_m, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

kalacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elemanı bulunabiliyorsa, bu takdirde $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayındaki (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [12].

Tanım 2.2.44. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ve (x_n) bu uzayda herhangi bir dizi olsun. Eğer, $r \in L - \{0_L, 1_L\}$, $t > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(x_k, t) \succ \mathcal{N}(r)$$

sağlanıyorsa, bu takdirde (x_n) dizisine sınırlı dizi denir [12].

2.3. Yakınsaklık Çeşitleri

Bu alt bölümde yoğunluk fonksiyonundan bahsedilecek ve ardından istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Daha sonra, θ - yoğunluk fonksiyonu yardımıyla lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve sonrasında ideal yakınsaklık kavramı hatırlanacaktır.

2.3.1. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramından bahsetmek için ilk olarak yoğunluk kavramına değinmek gerekir. Yoğunluk kavramı oldukça geniş bir kavram olup asimptotik yoğunluk, doğal yoğunluk, düzgün yoğunluk, rasyonel ve reel sayıların yoğunluğu v.b. gibi birbirinden farklı birçok şekilde tanımlanmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin çeşitli dallarına birçok matematikçi tarafından uygulanmış ve uygulanmaya devam edilmektedir.

Tanım 2.3.1. Bir A kümesindeki n e eşit veya daha küçük pozitif tam sayıların sayısını $A(n)$ ile gösterelim. Bu takdirde A kümesinin doğal yoğunluğu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

olarak tanımlanır ve doğal yoğunluk $\delta(A)$ ile gösterilir [27].

Örnek 2.3.2. $A = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ ise bu takdirde $\delta(A) = 1$ 'dir.

Örnek 2.3.3. $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ olsun. $\frac{A(n)}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$$

şeklinde ve

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 2.3.4. $A = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$ ise

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olduğundan $\delta(A) = 0$ dır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramını vermeden önce adi yakınsak dizilerin tanımından bahsedip istatistiksel yakınsaklık kavramının neden ortaya atıldığından bahsetmek gerekir. Klasik yakınsaklıkta bir x reel sayı dizisi bir ℓ noktasına yakınsak ise, bu takdirde ℓ in her bir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi kabul edelim ki, ℓ noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda elemanı kalsın. Açıktır ki komşuluğun dışında kalan elemanların sayısı dizinin tüm terimlerine kıyasla sayı bakımından oldukça azdır. Bir başka deyişle, dizinin “hemen hemen” bütün terimleri ℓ in ε komşuluğu içerisindeydir. Bu durumda x dizisinin ℓ noktasına “hemen hemen” yakınsak olduğu söylenebilir. Burada ℓ noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanların sayısının az olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir. İşte istatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramdır. Şimdi bu kavramı verelim.

Tanım 2.3.5. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x dizisi ℓ ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = \ell$ ile gösterilir [20].

Örnek 2.3.6. $x = (x_k)$ dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

alınır. Burada K kümesinin yoğunluğu $\delta(K) = 0$ dır. Dolayısıyla x dizisi $\ell = 0$ noktasına istatistiksel yakınsaktır, yani $st - \lim x = 0$ dır. Ayrıca dikkat edilirse dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan yakınsak değildir. Yani, istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Ancak, sonlu sayıda elemanın doğal yoğunluğu sıfır olacağından yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 2.3.7. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi bir istatistiksel Cauchy dizisidir denir. Bu ifade, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için,

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır şeklinde de ifade edilebilir [23].

Klasik yakınsaklık kavramında her Cauchy dizisi yakınsak olmak zorunda değildir. Ancak istatistiksel yakınsaklığa geçildiğinde, istatistiksel yakınsak olmak ile istatistiksel Cauchy olmak kavramları birbirine denktir.

Tanım 2.3.8. $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > A\}) = 0$$

olacak şekilde en az bir sonlu $A > 0$ reel sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır denir [28].

2.3.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde lacunary dizisinin tanımı yardımıyla, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel Cauchy dizi tanımları hatırlanacaktır [29], [33].

Tanım 2.3.9. $r \rightarrow \infty$ ve $k_0 = 0$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ olacak şekilde artan tam sayı dizisi olan $\theta = \{k_r\}$ dizisine bir lacunary dizi denir.

Burada, $q_1 = k_1$, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.10. $K \subseteq \mathbb{N}$ doğal sayıların herhangi bir alt kümesi olmak üzere,

$$\delta_\theta(K) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : k \in K\}|$$

sayısına K kümesinin θ yoğunluğu denir ve $\delta_\theta(K)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.11. θ bir lacunary dizisi ve $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, bu takdirde $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır veya $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına S_θ yakınsaktır denir ve bu durum $S_\theta - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ veya $x_k \rightarrow \ell(S_\theta)$ ile gösterilir. Bir başka deyişle,

$$K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin θ yoğunluğu sıfırdır.

Tanım 2.3.12. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve her r için $k'(r) \in I_r$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $\{x_{k'(r)}\}$ dizisi için $\lim_r x_{k'(r)} = L$ ise bu takdirde x dizisine lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir.

2.3.3. İdeal Yakınsaklık

Tanım 2.3.13. X boştan farklı bir küme, I ailesi X in alt küme ailesi ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. Eğer,

- (a) $\emptyset \in I$,
- (b) $A, B \in I$ olduğunda $A \cup B \in I$,
- (c) Her $A \in I$ ve $B \subset A$ için $B \in I$,

şartları sağlanıyorsa, bu takdirde I ailesine ideal denir. Eğer $I \neq \emptyset$ ve $X \notin I$ ise I ya aşikar olmayan ideal denir [34].

Tanım 2.3.14. X boştan farklı bir küme ve $F \subset P(X)$ boş olmayan bir küme ailesi olsun. Eğer,

- (a) $\emptyset \notin I$,
- (b) $A, B \in F$ olduğunda $A \cap B \in F$,
- (c) Her $A \in F$ ve $A \subset B$ için $B \in F$,

şartları sağlanıyorsa, bu takdirde F ailesine X üzerinde bir filtre denir [34].

Tanım 2.3.15. Aşikar olmayan I ideali her tek nokta kümesini ihtiva ediyorsa, yani her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ oluyorsa, bu takdirde I ideale admissible ideal denir.

$I \subset P(X)$ aşikar olmayan ideal olsun. Bu takdirde,

$$F(I) = \{M \subset X : M = X \setminus A, A \in I\}$$

kümesine X üzerinde bir filtredir ve buna I ile ilişkili olan filtre denir [34].

Tanım 2.3.16. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de aşikar olmayan ideal olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\} \in I$$

sağlanıyorsa, bu takdirde $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına ideal yakınsaktır denir ve $I\text{-}\lim x = \ell$ ile gösterilir [34].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde tezin orjinal sonuçları verilecektir.

3.1. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Eğer her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

ise, bu takdirde $x = (x_n)$ dizisi $\ell \in V$ sayısına istatistiksel olarak yakınsaktır denir ve $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ ile gösterilir.

Lemma 3.1.2. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) $st_{\mathcal{L}} - \lim x_n = \ell$.
- (b) $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$.
- (c) $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 1$.
- (d) $st - \lim \rho(x_n - \ell, t) = 1_L$.

İspat: (a), (b) ve (c) ifadelerinin denklikleri tanımdan aşıkardır olduğundan, (a) ve (d) ifadelerinin denkliğini gösterelim.

(a) $\iff$ (d): $st_{\mathcal{L}} - \lim x_n = \ell$ ifadesi tanım gereği, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan, sıra topolojisine göre $\mathcal{L} = (L, \leq)$ kafesi üzerinde, $1_L \in L$ nin açık komşuluklarının bir yerel bazı, herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için,

$$(a, 1_L] = \{x \in L : a < x \leq 1_L\}$$

dır. Böylece, $st - \lim \rho(x_n - \ell, t) = 1_L$ olabilmesi için gerek ve yeter şart, herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \notin (a, 1_L]\}) = 0$$

veya denk olarak

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec a\}) = 0$$

olmasıdır. Burada, herhangi $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ için $a = \mathcal{N}(\varepsilon)$ şeklinde $a \in L - \{1_L\}$ seçimini yapabileceğimizden ve tersine herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için $\varepsilon = \mathcal{N}(a)$ şeklinde $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ seçimi yapılabileceğinden, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

ifadesi ile her $a \in L - \{1_L\}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec a\}) = 0$$

ifadesi birbirine denktir. Yani, $a = \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = \mathcal{N}(\varepsilon)$ olup, bu (a) ile (d) nin denk olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.1.3. $(V, \rho, \mathcal{T}), \mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay olsun. Eğer $\lim x = \ell$ ise, bu takdirde $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir.

İspat: $\lim x = \ell$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzaydaki yakınsaklık tanımı gereği, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için bir n_0 sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ için

$$\rho(x_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

dir. Böylece dizinin sadece sonlu adetteki terimi

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

kümesinde bulunur. Doğal sayıların her sonlu alt kümesinin yoğunluğu sıfır olacağından,

$$\delta\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 0$$

bulunur. Yani $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir. ■

Aşağıdaki örnekte görüleceği üzere bu teoremin tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.4. $V = \mathbb{R}^2$ ve $\mathcal{L} = (\mathcal{P}(\mathbb{R}^+), \subseteq)$ olsun.

$$\rho : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$$

olmak üzere

$$\rho((a, b), t) = \{r \in \mathbb{R}^+ : \max\{|ra|, |rb|\} < t\}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+), \nu), \mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzaydır. Burada, $x_k = (sgn(k \sin k + k - 1), sgn(k \cos k + k - 1))$ dizisini göz önüne alırsak $st_{\mathcal{L}} - \lim x = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ olmasına rağmen, bu bir konjektür olmakla birlikte yakınsak olması beklenmez.

Teorem 3.1.5. $(V, \rho, \mathcal{T}), \mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Eğer, $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise, bu takdirde $st_{\mathcal{L}}$ – limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell_1$ ve $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell_2$ olsun. Bu takdirde, verilen $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $r \in L - \{0_L\}$ sayısı seçebiliriz. $t > 0$ için

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell_1, t)\} \not\succ \mathcal{N}(r)\}$$

ve

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell_2, t)\} \not\succ \mathcal{N}(r)\}$$

kümelerini tanımlayalım. $K(\varepsilon, t) = K_1(\varepsilon, t) \cup K_2(\varepsilon, t)$ olduğundan,

$$\rho(\ell_1 - \ell_2, t) \succeq \mathcal{T}(\rho(x_n - \ell_1, \frac{t}{2}), \rho(x_n - \ell_2, \frac{t}{2})) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olur. Yani, $\ell_1 = \ell_2$ dir. ■

Her $x \in V$ ve $t \in (0, \infty)$ için $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay tanımı gereği $\rho(x, t) \succ 0_L$ dir. Ayrıca $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = 0_L$ olur. Özel olarak $a_n = \rho(x, \frac{1}{n})$ şeklinde tanımlanırsa L üzerinde her n tam sayısı için $(a_n) \rightarrow 0_L$ olmasına rağmen $a_n \neq 0_L$ dir. (b_n) dizisini $b_n := \mathcal{N}(a_n)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde her n için $b_n \neq 1_L$ bulunur. Buradan,

$$a_n = \mathcal{N}(\mathcal{N}(a_n)) = \mathcal{N}(b_n) = \mathcal{N}(1_L) = 0_L$$

elde edilir ki bu, $a_n \neq 0_L$ olması ile çelişir. $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$ ile azalan, birebir ve örten olmasından involütif negator $\mathcal{N}$ sıra sürekli fonksiyondur. Böylece $(b_n) \rightarrow \mathcal{N}(0_L) = 1_L$ bulunur.

$(a_n) \rightarrow 0_L$ dir. $c \in L - \{0_L\}$ olmak üzere 0_L nin her açık komşuluğu $A_c = \{x \in L : x \prec c\}$ için, $n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $a_n \in A_c$ dir. Eğer, $i_1 = 1$, $i_2 = n_0(a_1) + 1 = n_0(a_{i_1}) + 1$, $i_3 = n_0(a_{i_2}) + 1$ ve $i_{k+1} = n_0(a_{i_k}) + 1$ denirse, genel olarak azalan bir (a_n) alt dizisi elde edilir.

Yukarıdaki tartışmada kısaca anlatılmak istenen verilen herhangi bir $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay için $L - \{0_L\}$ de her zaman bir (a_n) dizisi bulabiliriz öyle ki $(a_n) \rightarrow 0_L$ ve buradan da $\mathcal{N}(a_n) \rightarrow 1_L$ dir. Özel olarak, $L - \{0_L\}$ de $\mathcal{N}(\varepsilon_n) \rightarrow 1_L$ olacak şekilde, artan bir (ε_n) dizisi her zaman bulunabilir.

Teorem 3.1.6. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Bu takdirde, $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 1$ olacak şekilde doğal sayıların bir K alt kümesi ve $k_m \in K$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_m} = \ell$ dir ve her $m \in \mathbb{N}$ için $k_m < k_{m+1}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olsun. $\mathcal{N}(\epsilon_n) \rightarrow 1_L$ in L olacak şekilde (ϵ_n) dizisi, $L - \{0_L\}$ de azalan bir dizi olsun. Bu durumda herhangi $t > 0$ ve $i \in \mathbb{N}$ için,

$$K(i+1) \subset K(i)$$

olur. $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olduğundan

$$\delta(K(i)) = 1, (i \in \mathbb{N} \text{ ve } t > 0)$$

bulunur. Şimdi, $p_1, K(1)$ de keyfi bir sabit olsun. Bu durumda her $n > p_2$ için,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \rho(x_k - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\epsilon_2)\}| > \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $p_2 \in K(2)$, $(p_2 > p_1)$ vardır. Ayrıca, her $n > p_3$ için,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\epsilon_3)\}| > \frac{2}{3}$$

olacak şekilde bir $p_3 \in K(3)$, $(p_3 > p_2)$ vardır. Bu şekilde devam edilirse, $p_i \in K(i)$ ve her $n > p_i$ ($i \in \mathbb{N}$):

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\epsilon_i)\}| > \frac{i-1}{i}$$

için $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ doğal sayıların bir artan dizisi elde edilir. Yani, artan indeks dizisini,

$$K := \{k \leq n : 1 < k < p_1\} \cup \left[\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{k \in K(i) : p_i \leq k < p_{i+1}\} \right]$$

şeklinde oluşturalım. Burada $\delta(K) = 1$ dir. Şimdi $\epsilon_i \prec \epsilon$ olacak şekilde, i pozitif tam sayısı seçimi ile $\epsilon \succ 0_L$ olsun. $(\epsilon_k) \rightarrow 0_L$ olduğundan bu şekilde bir i sayısı her zaman mevcuttur. Kabul edelim ki $k \geq p_i$ ve $k \in K$ olsun. Bu takdirde, K nın tanımı gereği $p_a \leq k < p_{a+1}$ ve $k \in K(i)$ olacak şekilde $a \geq i$ sayısı vardır. Böylece, her $\epsilon \succ 0_L$, $k \geq p_i$ ve $k \in K$ için,

$$\rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\epsilon_i) \succ \mathcal{N}(\epsilon)$$

bulunur. Yani,

$$\mathcal{L} - \lim_{m \in K} x_{k_m} = \ell$$

dir.

Yeter şart olarak, $\delta(K) = 1$ ve $\mathcal{L} - \lim_{m \in K} x_{k_m} = \ell$ olacak şekilde doğal sayıların bir artan indeks dizisini $K = (k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ alalım. Böylece, her $\epsilon \succ 0_L$ için bir n_0 sayısı

vardır öyle ki herhangi $k \geq n_0$ için $\rho(x_k - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ sağlanır. Eğer,

$$M(\varepsilon) := \{k \leq n : \rho(x_k - \ell, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

tanımlarsak,

$$M(\varepsilon) \subseteq \mathbb{N} - (K - \{k_m : m \leq n_0\})$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\delta(K) = 1$ olduğundan $\delta(\mathbb{N} - (K - \{k_m : m \leq n_0\})) = 0$ elde edilir ki bu $\delta(M(\varepsilon)) = 0$ demektir. Bir başka deyişle, $st_{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olur. ■

3.1.1. İstatistiksel Cauchy ve İstatistiksel Sınırlılık

Tanım 3.1.7. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - x_m, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

sağlanıyorsa, bu takdirde $x = (x_n)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.8. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ sayısı ve $t > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, t) \not\succ \mathcal{N}(r)\}) = 0$$

ise, bu takdirde $x = (x_n)$ dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 3.1.9. $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaydaki her sınırlı dizi istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayında (x_n) dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde, $t > 0$ ve $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ sayısı için $\rho(x_n, t) \succ \mathcal{N}(r)$ dir. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, t) \not\succ \mathcal{N}(r)\} = \emptyset$$

olur ki bu da

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, t) \not\succ \mathcal{N}(r)\}) = 0$$

demektir. Yani, (x_n) istatistiksel sınırlıdır. ■

Ancak aşağıdaki ters örnekte görüleceği gibi bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için ilk olarak Asal Sayı Teorem’ini hatırlayalım.

Teorem 3.1.10. (Asal Sayı Teoremi) $\pi(n)$, n den küçük eşit olan asal sayıların sayısı olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \frac{\pi(n)}{\left(\frac{n}{\ln n}\right)} = 0 \times 1 = 0$$

limit mevcuttur [42].

Örnek 3.1.11. L negatif olmayan genişletilmiş reel sayılar kümesi, $L = [0, \infty]$ olmak üzere $V = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{L} = (L, \leq)$ olsun. Bu takdirde, $0_L = 0, 1_L = \infty$ dur. $x \neq 0$ ve her $t \in (0, \infty)$ için $\rho(x, t) = \frac{t}{|x|}$ ve $\rho(0, t) = \infty$ ile tanımlayalım. t - norm ise $\mathcal{T}(a, b) = \min\{a, b\}$ şeklinde olsun. (x_n) dizisini, $\tau(n)$, n in pozitif bölenlerinin sayısı olmak üzere,

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ asal} \\ \frac{1}{\tau(n)-2}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $t > 0$ ve $r \in L - \{0, \infty\}$ ve $rt \leq n$ olacak şekilde n asal sayısı için

$$\rho(x_n, t) = \rho(n, t) = \frac{t}{|n|} = \frac{t}{n} \not\geq \frac{1}{r} = \mathcal{N}(r)$$

olduğundan (x_n) sınırlı değildir. Ancak $t = 1$ ve asal olmayan herhangi bir tam sayı için $n, r = 2$ alınırsa aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\rho(x_n, 1) = \rho\left(\frac{1}{\tau(n)-2}, 1\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\tau(n)-2}\right|} = |\tau(n) - 2| > \frac{1}{2} = \mathcal{N}(r).$$

Burada, $\tau(n) \neq 2$ dir ve herhangi bir asal olmayan n sayısı için, Asal Sayı Teorem'i ve asal sayıların doğal yoğunluğunun sıfır olmasından dolayı,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, 1) \not\geq \mathcal{N}(2)\}) = 0$$

elde edilir ki bu, (x_n) dizisinin istatistiksel sınırlı olması demektir.

Teorem 3.1.12. $\mathcal{L}$ - fuzzy normlu uzayda alınan her istatistiksel Cauchy dizisi istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $(V, \rho, \mathcal{T})$ uzayında, (x_n) istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - x_m, t) \not\geq \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

dir. $\rho(x_n - x_m, 1) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ sayısını göz önüne alalım. $t = 2$ için,

$$\rho(x_n, 2) = \rho(x_n - x_m + x_m, 2) \succ \mathcal{T}(\rho(x_n - x_m, 1), \rho(x_m, 1)) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(x_m, 1))$$

olur. $r := \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(x_m, 1)))$ denirse

$$\rho(x_n, 2) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(x_m, 1)) = \mathcal{N}(r)$$

bulunur ki bu,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, 2) \not\geq \mathcal{N}(r)\}) = 0$$

demektir. Yani, (x_n) istatistiksel sınırlıdır. ■

3.2. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Eğer her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için

$$\delta_\theta(\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

ise, bu takdirde $x = (x_n)$ dizisi $\ell \in V$ sayısına lacunary istatistiksel olarak yakınsaktır denir ve $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x = \ell$ ile gösterilir.

Yukarıda verilen tanımdan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.2.2. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$.
- (b) $\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 0$.
- (c) $\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 1$.
- (d) $S_\theta^\mathcal{L} - \lim \rho(a_k - \ell, t) = 1_L$.

İspat: (a), (b) ve (c) ifadelerinin denklikleri tanımdan aşikar olduğundan, (a) ve (d) ifadelerinin denkliğini gösterelim.

(a) $\iff$ (d): $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x_n = \ell$ ifadesi tanım gereği, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, sıra topolojisine göre $\mathcal{L} = (L, \leq)$ kafesi üzerinde, $1_L \in L$ açık komşuluklarının bir yerel bazı, herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için,

$$(a, 1_L] = \{x \in L : a < x \leq 1_L\}$$

kümelerinden oluşur. Böylece, $S_\theta^\mathcal{L} - \lim \rho(x_n - \ell, t) = 1_L$ olabilmesi için gerek ve yeter şart, herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \notin (a, 1_L]\}) = 0$$

veya denk olarak

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec a\}) = 0$$

olmasıdır. Burada, herhangi $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ için $a = \mathcal{N}(\varepsilon)$ şeklinde $a \in L - \{1_L\}$ seçimini yapabileceğimizden ve tersine herhangi $a \in L - \{1_L\}$ için $\varepsilon = \mathcal{N}(a)$ şeklinde

$\varepsilon \in L - \{0_L\}$ seçimi yapılabileceğinden, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ için

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

ifadesi ile her $a \in L - \{1_L\}$ için

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec a\}) = 0$$

ifadesi birbirine denktir. Yani, $a = \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = \mathcal{N}(\varepsilon)$ olup, bu (a) ile (d) nin denk olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.2.3. $(V, \rho, \mathcal{T}), \mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Eğer $\lim x = \ell$ ise, bu takdirde $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x = \ell$ dir.

İspat: $\lim x = \ell$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaydaki yakınsaklık tanımı gereği, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için bir n_0 sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ için

$$\rho(x_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

dir. Böylece dizinin sadece sonlu adetteki terimi

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

kümesinde bulunur. Doğal sayıların her sonlu alt kümesinin θ – yoğunluğu sıfır olacağından,

$$\delta_\theta\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 0$$

bulunur. Yani $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x = \ell$ dir. ■

Aşağıdaki örnekte görülebileceği üzere, verilen teoremin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.4. $V = \mathbb{R}$ ve bütün pozitif reel sayı kümelerinin oluşturduğu kafes $\mathcal{L} = (\mathcal{P}(\mathbb{R}^+), \subseteq)$ olsun. $\rho : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunu,

$$\rho(x, t) = \{r \in \mathbb{R}^+ : |x| < \frac{t}{r}\}$$

şeklinde tanımlarsak, bu takdirde $(\mathbb{R}, \rho, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$ bir $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olur. Bu uzay üzerinde,

$$a_k = \begin{cases} 1, & k \in (k_r - \ln(h_r), k_r], r \in \mathbb{N} \text{ için,} \\ 0, & \text{diğer durumlar;} \end{cases}$$

kuralı ile $a = (a_k)$ dizisini göz önüne alırsak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_\theta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(h_r)}{h_r} = 0$$

olacağından $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell = 0 \in \mathbb{R}$ bulunur. Yani, dizinin kendisi yakınsak olmamasına rağmen lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2.5. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ve $a = (a_k)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde, $S_\theta^\mathcal{L} - \lim$ limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x = \ell_1$ ve $S_\theta^\mathcal{L} - \lim x = \ell_2$ olsun. Bu takdirde, verilen $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $r \in L - \{0_L\}$ sayısı seçebiliriz. $t > 0$ için

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell_1, t)\} \not\succ \mathcal{N}(r)\}$$

ve

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell_2, t)\} \not\succ \mathcal{N}(r)\}$$

kümelerini tanımlayalım. $K = K_1 \cup K_2$ olarak alınırsa,

$$\rho(\ell_1 - \ell_2, t) \succeq \mathcal{T}(\rho(x_n - \ell_1, \frac{t}{2}), \rho(x_n - \ell_2, \frac{t}{2})) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olur. Yani, $\ell_1 = \ell_2$ dir. ■

Teorem 3.2.6. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Bu takdirde, $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$ olabilmesi için gerek ve yeter şart, $\delta_\theta(K) = 1$ ve $\mathcal{L} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \ell$ ve $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$ olacak şekilde bir $K = \{k_1, k_2, k_3, \dots\} \subset \mathbb{N}$ alt kümenin var olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$ olsun. $\mathcal{N}(\varepsilon_n) \rightarrow 1_L$ in L olacak şekilde (ε_n) dizisi, $L - \{0_L\}$ de azalan bir dizi olsun. Bu durumda herhangi $t > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için,

$$K(k+1) \subset K(k)$$

olur. $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$ olduğundan

$$\delta_\theta(K(k)) = 1, (k \in \mathbb{N} \text{ and } t > 0)$$

bulunur. Şimdi, $p_1, K(1)$ de keyfi bir sabit olsun. Bu durumda her $n > p_2$ için,

$$\frac{1}{h_n} |\{n \in I_n : \rho(a_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon_2)\}| > \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $p_2 \in K(2)$, $(p_2 > p_1)$ vardır. Ayrıca, her $n > p_3$ için,

$$\frac{1}{h_n} |\{n \in I_n : \rho(a_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon_3)\}| > \frac{2}{3}$$

olacak şekilde bir $p_3 \in K(3)$, ($p_3 > p_2$) vardır. Bu şekilde devam edilirse, $p_k \in K(k)$ ve her $n > p_k$ ($k \in \mathbb{N}$):

$$\frac{1}{h_n} |\{n \in I_n : \rho(a_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon_k)\}| > \frac{k-1}{k}$$

için $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ doğal sayıların bir artan dizisi elde edilir. Yani, artan indeks dizisini,

$$K := \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < p_1\} \cup \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{n \in K(k) : p_k \leq n < p_{k+1}\} \right]$$

şeklinde oluşturalım. Burada $\delta_\theta(K) = 1$ dir. Şimdi $\varepsilon_k \prec \varepsilon$ olacak şekilde, k pozitif tam sayısı seçimi ile $\varepsilon \succ 0_L$ olsun. $(\varepsilon_k) \rightarrow 0_L$ olduğundan bu şekilde bir k sayısı her zaman mevcuttur. Kabul edelim ki $n \geq p_k$ ve $n \in K$ olsun. Bu takdirde, K nın tanımı gereği $p_m \leq n < p_{m+1}$ ve $n \in K(k)$ olacak şekilde $m \geq k$ sayısı vardır. Böylece, her $\varepsilon \succ 0_L$, $n \geq p_k$ ve $n \in K$ için,

$$\rho(a_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon_k) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Yani,

$$\mathcal{L} - \lim_{n \in K} a_{k_n} = \ell$$

dir.

Yeter şart olarak, $\delta_\theta(K) = 1$ ve $\mathcal{L} - \lim_{n \in K} a_{k_n} = \ell$ olacak şekilde doğal sayıların bir artan indeks dizisini $K = (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alalım. Böylece, her $\varepsilon \succ 0_L$ için bir n_0 sayısı vardır öyle ki herhangi $n \geq n_0$ için $\rho(a_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ sağlanır. Eğer,

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n - \ell, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

tanımlarsak,

$$M(\varepsilon) \subseteq \mathbb{N} - (K - \{k_n : n \leq n_0\})$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\delta_\theta(K) = 1$ olduğundan $\delta_\theta(\mathbb{N} - (K - \{k_n : n \leq n_0\})) = 0$ elde edilir ki bu $\delta_\theta(M(\varepsilon)) = 0$ demektir. Bir başka deyişle, $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$ olur. ■

Şimdi, $\mathcal{L}$ - fuzzy normlu uzayda lacunary istatistiksel Cauchy dizisi tanımı ve lacunary istatistiksel tamlik kavramı verilecektir.

3.2.1. Lacunary İstatistiksel Tamlik

Tanım 3.2.7. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için,

$$\delta_\theta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - x_m, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}) = 0$$

sağlanıyorsa, bu takdirde $x = (x_n)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2.8. Her lacunary istatistiksel yakınsak dizi aynı zamanda lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: Kabul edelim ki $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda $a = (a_k)$ dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Bir başka deyişle, $S_\theta^\mathcal{L} - \lim a = \ell$ olsun. Bu takdirde, verilen $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ için vardır bir $r > 0$ öyle ki,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Buradan da, $t > 0$ için

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(r)\}$$

elde edilir. A kümesinde bir m elemanı alırsak, açıkça $\rho(a_m - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(r)$ elde edilir. Ayrıca,

$$\rho(\ell - a_m, \frac{t}{2}) = \rho(a_m - \ell, \frac{\frac{t}{2}}{|-1|}) = \rho(a_m - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \rho(a_k - a_m, t) &= \rho((a_k - \ell) + (\ell - a_m), \frac{t}{2} + \frac{t}{2}) \\ &\succ \mathcal{T}(\rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}), \rho(\ell - a_m, \frac{t}{2})) \\ &\succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \\ &\succ \mathcal{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. $B = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - a_m, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$ kümesi tanımlanırsa, bu takdirde $A \subseteq B$ bulunur. Burada $\delta_\theta(A) = 1$ olduğundan, $\delta_\theta(B) = 1$ dir. Böylece, B kümesinin tümleyeninin θ yoğunluğu sıfır olduğundan, $\delta_\theta(B^c) = 0$ elde edilir ki bu, $a = (a_k)$ dizisinin lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. ■

Tanım 3.2.9. $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda alınan her Cauchy dizisi yine aynı uzayda yakınsak ise bu takdirde $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayına tamdır denir.

Tanım 3.2.10. $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda alınan her lacunary istatistiksel Cauchy dizisi yine aynı uzayda lacunary istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayına lacunary istatistiksel tamdır denir.

Teorem 3.2.11. Her $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayı lacunary istatistiksel tam olmasına rağmen tam olmak zorunda değildir.

İspat: $a = (a_k)$ dizisi lacunary istatistiksel Cauchy dizisini alalım. Kabul edelim ki $a = (a_k)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak olmasın. Bu takdirde, verilen $\varepsilon > 0$, $t > 0$ ve $r > 0$ için,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \rho(a_k - a_n, t) &\succ \mathcal{T}(\rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}), \rho(a_k - \ell, \frac{t}{2})) \\ &\succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \\ &\succ \mathcal{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer, $A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - a_n, t) \succ \varepsilon\}$ kümesi alınırsa, $\delta_\theta(A) = 1$ olur ki buradan $\delta_\theta(A^c) = 1$ dir. Ancak bu durum, a dizisinin lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olması ile çelişir. Yani a dizisi lacunary istatistiksel yakınsaktır. Yani, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayı lacunary istatistiksel tamdır.

Şimdi, hipotezdeki şartlar altında $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayının tam olmayabileceğine dair aksine bir örnek verelim.

Örnek 3.2.12. $X = C[0, 1]$, $L = [0, 1]$ ve

$$\rho(f, t) = \frac{t}{\int_0^1 (t + f(x)) dx}$$

olsun. Bu takdirde, (X, ρ, L) uzayı $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaydır. Ancak, bu uzayda

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$$

ile tanımlı (f_n) dizisini alırsak, (f_n) dizisi bir Cauchy dizisi olmasına rağmen verilen uzayda yakınsak değildir.

■

Şimdi, lacunary istatistiksel sınırlı dizi tanımı verilerek, lacunary istatistiksel Cauchy dizi kavramı ile lacunary istatistiksel sınırlı dizi kavramı arasındaki ilişkiler incelenecektir.

3.2.2. Lacunary İstatistiksel Cauchy ve Lacunary İstatistiksel Sınırlılık İlişkileri

Tanım 3.2.13. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay, $a = (a_k)$ dizisi bu uzayda bir dizi, $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ ve $t > 0$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\delta_\theta \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\} = 0$$

sağlanıyorsa, bu takdirde $a = (a_k)$ dizisine lacunary istatistiksel sınırlı dizi denir.

Teorem 3.2.14. $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzayda alınan her sınırlı dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $a = (a_k)$ dizisi $(V, \rho, \mathcal{T})$ üzerinde sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde, $t > 0$ ve $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ için, $\rho(a_k, t) \succ \mathcal{N}(r)$ bulunur. Burada,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\} = \emptyset$$

dır. Böylece,

$$\delta_\theta \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\} = 0$$

elde edilir. Yani, (a_k) dizisi lacunary istatistiksel sınırlıdır. ■

Yukarıda verilen teoremin tersinin her zaman doğru olmayacağı ile ilgili aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.15. L genişletilmiş reel sayıların negatif olmayan bir cümlesi, yani $L = [0, \infty]$ olmak üzere, $V = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{L} = (L, \leq)$ alalım. Burada, $0_L = 0$ ve $1_L = \infty$ dir. V üzerinde $\mathcal{L}$ -fuzzy normunu $x \neq 0$ için $\rho(x, t) = \frac{t}{|x|}$ şeklinde ve $t \in (0, \infty)$ için $\rho(0, t) = \infty$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{L}$ üzerindeki t -normunu $\mathcal{K}(a, b) = \min\{a, b\}$ olarak alalım. $\tau(n)$, n in pozitif bölenlerinin sayısını göstermek üzere,

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ asal sayı ise,} \\ \frac{1}{\tau(n)-2}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dizisi verilsin. Burada dikkat edilirse, herhangi $t > 0$, $r \in L - \{0, \infty\}$ ve $rt \leq n$ olacak şekilde herhangi n asal sayısı için

$$\rho(x_n, t) = \rho(n, t) = \frac{t}{|n|} = \frac{t}{n} \not\prec \frac{1}{r} = \mathcal{N}(r)$$

olduğundan, (x_n) dizisi sınırlı değildir. Ancak, herhangi n asal olmayan sayısı ve $r = 2$ için $\tau(n) \neq 2$ olduğundan,

$$\rho(x_n, 1) = \rho\left(\frac{1}{\tau(n) - 2}, 1\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\tau(n) - 2}\right|} = |\tau(n) - 2| > \frac{1}{2} = \mathcal{N}(r)$$

elde edilir.

Şimdi, $n \geq 1$ için $k_0 = 0$ ve $k_n = 10^{n-1}$ olsun. $n > 1$, $I_n = (10^{n-2}, 10^{n-1}]$ ve $I_1 = (0, 1]$ için p_n , I_n de asalların sayısı olsun. Böylece,

$$\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, 1) \neq \mathcal{N}(2)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{9 \cdot 10^{n-2}}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, 1) \neq \mathcal{N}(2)\} > 0$$

ise bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{9 \cdot 10^{n-2}} = \varepsilon$$

ifadesinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-2}} = 9\varepsilon$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-1}} = \frac{9\varepsilon}{10}$$

bulunur. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{10^{n-1}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-1}} = \frac{9\varepsilon}{10} > 0$$

dir. Ancak, doğal sayılardaki asal sayıların yoğunluğunun limiti asal sayı teoremi gereği sıfır olur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Böylece,

$$\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, 1) \neq \mathcal{N}(2)\} = 0$$

elde edilir. Bir başka deyişle, (x_n) dizisi lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 3.2.16. $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda alınan her lacunary istatistiksel Cauchy dizisi, lacunary istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $a = (a_n)$ dizisi $(V, \rho, \mathcal{T})$ üzerinde lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, $m, k \geq N$ olduğunda,

$$\delta_\theta\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n - a_k, t) \neq \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 0$$

bulunur. Bu takdirde,

$$\delta_\theta\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n - a_k, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} = 1$$

dir. Şimdi, $\rho(a_n - a_k, 1) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını göz önüne alalım. Böylece $t = 2$ için,

$$\rho(a_n, 2) = \rho(a_n - a_k + a_k, 2) \succ \mathcal{T}(\rho(a_n - a_k, 1), \rho(a_k, 1)) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1))$$

bulunur. Eğer, $r := \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1)))$ denirse,

$$\rho(a_n, 2) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1)) = \mathcal{N}(r)$$

bulunur ki bu da

$$\delta_\theta\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n, 2) \succ \mathcal{N}(r)\} = 1$$

veya denk olarak

$$\delta_\theta\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n, 2) \not\succ \mathcal{N}(r)\} = 0$$

demektir. Yani, (a_n) dizisi lacunary istatistiksel sınırlıdır. ■

3.3. $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde, $\mathcal{L}$ –fuzzy normlu uzaylarda ideal yakınsaklık kavramı incelenecektir. I_1 ise $\mathbb{N}$ de aşikar olmayan ideal olarak alınacaktır.

Tanım 3.3.1. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ –fuzzy normlu uzay ve I_1 , $\mathbb{N}$ de aşikar olmayan bir ideal olsun. Bu takdirde, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - l, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in I_1$$

ise $x = (x_k)$ dizisi $\ell \in V$ sayısına ideal yakınsaktır veya I_1 yakınsaktır denir ve $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremden I_1 idealinin admisible olma şartının kaldırılamayacağı ilerde gösterilecektir.

Teorem 3.3.2. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ve I_1 admisible ideal olsun. Eğer, $\lim x = \ell$ ise bu takdirde $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir.

İspat: $\lim x = \ell$ olsun. Bu takdirde, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, bir pozitif N tam sayısı vardır öyle ki $k \geq N$ olduğunda,

$$\rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

elde edilir.

$A := \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - l, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$ şeklinde tanımlı A kümesini göz önüne alalım. Bu takdirde, $A \subset \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dir. $\{x_1\}, \dots, \{x_k\}$ tek nokta kümelerinin her biri I_1 admisible idealine ait olduğundan, $A \in I_1$ dir ve böylece $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ bulunur. ■

Aşağıdaki örnekte görüleceği üzere, verilen teoremin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.3.3. Negatif olmayan genişletilmiş reel sayıların kafesi olarak $\mathcal{L} = [0, \infty]$ alalım. Ayrıca üçgensel norm $\mathcal{T}(\alpha, \beta) = \min\{\alpha, \beta\}$ ve negator da $\mathbb{N}(\alpha) = \alpha^{-1}$ olsun. Bu takdirde, her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için, $\rho(x, t) = \frac{t}{|x|}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, \rho, \mathcal{T})$ üçlüsü bir $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaydır. Burada, genişletilmiş reel sayıların tanımı gereğince her $t > 0$ için $\frac{t}{0} = \infty$ yazılabileceği unutulmamalıdır.

Şimdi, I_1 admisible idealini

$$I_1 = \{A \subset \mathbb{N} : \sum_{k \in A} \frac{1}{k} < \infty\}$$

olarak alalım. $x = (x_n)$ dizisi de κ Dirichlet fonksiyonu olmak üzere $x_n = \kappa(\log_2 n)$ şeklinde verilsin. Dizi tanımından anlaşılacağı üzere x_n , 2'nin kuvvetleri için 1, n in diğer değerleri için 0'dır. Böylece x dizisi, çok büyük n değerleri için hem 0 hem de 1 değerini alacağından klasik anlamda yakınsak değildir. Ancak, $\varepsilon \in (0, \infty]$ ve $t > 0$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, ki böylece

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - 0, t) \not\geq \mathcal{N}(\varepsilon)\} &= \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, t) \not\geq \varepsilon^{-1}\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \frac{t}{|x_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \varepsilon t \leq |x_k|\} \\ &\subseteq \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\} \\ &= \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} \in I_1 \end{aligned}$$

olacağından x dizisi 0'a I_1 -yakınsaktır. Yani, $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = 0$ dır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.3.2'nin hipotezinde belirtilen admisible ideal olma şartının kaldırılamayacağı ile ilgilidir.

Örnek 3.3.4. Örnek 3.3.3 de verilen $(\mathbb{R}, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzayını göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$I_1 = \{A \subset \mathbb{N} : 1 \notin A\}$$

küme ailesi bir ideal olmasına rağmen, $\{1\} \notin A$ olduğundan admisible değildir. $x_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere, $x = (x_n)$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ ye yakınsaktır ancak I_1 -yakınsak değildir. Gerçekten, $\varepsilon = 0.3$ ve $t = 1$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, t) \not\geq \mathcal{N}(0.3)\} = \{1, 2, 3\} \notin I_1$$

bulunur.

Teorem 3.3.5. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay olsun. Eğer, $x = (x_k)$ dizisi I_1 yakınsak ise bu takdirde $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x$ tektir.

İspat: Kabul edelim ki $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell_1$ and $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell_2$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, $r \in L - \{0_L\}$ seçilebilir öyle ki

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olur. Herhangi $t > 0$ için,

$$K_0 = \{k \in \mathbb{N} : \rho(\ell_1 - \ell_2, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\},$$

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell_1, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\}$$

ve

$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell_2, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\}$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece, $\mathbb{N} \setminus (K_1 \cup K_2)$ olacağından

$$\rho(\ell_1 - \ell_2, t) \succeq \mathcal{T}(\rho(x_k - \ell_1, \frac{t}{2}), \rho(x_k - \ell_2, \frac{t}{2})) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

elde edilir. Buradan da

$$\mathbb{N} \setminus (K_1 \cup K_2) \subset \mathbb{N} \setminus K_0$$

bulunur ki bu da denk olarak $K_0 \subset K_1 \cup K_2$ demektir.

Burada $\rho(\ell_1 - \ell_2, r) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)$ ifadesi $k \in \mathbb{N}$ dan bağımsız olduğundan $K_0 = \emptyset$ veya $K_0 = \mathbb{N}$ dir. Böylece her $\varepsilon \in L \setminus \{0_L\}$ için, $\rho(\ell_1 - \ell_2, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ olduğundan $\rho(\ell_1 - \ell_2, t) = 1_L$, yani $\ell_1 = \ell_2$ bulunur. ■

Teorem 3.3.6. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay ve I_1 admisible ideal olsun. Bu takdirde, aşağıdaki önermeler vardır.

- (a) Eğer $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x_k = \ell_1$ ve $I_1^{\mathcal{L}} - \lim y_k = \ell_2$ ise $I_1^{\mathcal{L}} - \lim(x_k + y_k) = \ell_1 + \ell_2$ dir.
- (b) Eğer $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x_k = \ell$ ise $I_1^{\mathcal{L}} - \lim \alpha x_k = \alpha \ell$ dir.

İspat:

- (a) Kabul edelim ki $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x_k = \ell_1$ ve $I_1^{\mathcal{L}} - \lim y_k = \ell_2$ olsun. Bu takdirde, verilen herhangi $\varepsilon \in L \setminus \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, $r > 0$ seçilebilir öyle ki $\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ dir. $t > 0$ için,

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell_1, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\} \text{ ve } K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \rho(y_k - \ell_2, t) \not\prec \mathcal{N}(r)\}$$

kümelerini tanımlayalım. $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x_k = \ell_1$ ve $I_1^{\mathcal{L}} - \lim y_k = \ell_2$ olduğundan, $K_1, K_2 \in I_1$ elde edilir. Eğer,

$$K = \{k \in \mathbb{N} : \rho((x_k + y_k) - (\ell_1 + \ell_2), t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

kümesi tanımlanırsa, bu takdirde $K \in I_1$ olduğu gösterilmelidir. $K_1, K_2 \in I_1$ olduğundan, filtre tanımı gereğince $K_1^c, K_2^c \in F(I_1)$ bulunur. Böylece,

$$\rho((x_k + y_k) - (\ell_1 + \ell_2), t) \succeq \mathcal{T}(\rho(x_k - \ell_1, \frac{t}{2}), \rho(y_k - \ell_2, \frac{t}{2}))$$

$$\succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r))$$

$$\succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

elde edilir. Bu da,

$$K^c \subset \{k \in \mathbb{N} : \rho((x_k + y_k) - (\ell_1 + \ell_2), t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

demektir. Buradan,

$$K^c \in F(I_1)$$

bulunur. Bir başka deyişle,

$$K \in I_1$$

dir. O halde, $I_1^{\mathcal{L}} - \lim(x_k + y_k) = \ell_1 + \ell_2$ elde edilir.

- (b) $\alpha = 0$ için durum aşıkardır. Kabul edelim ki $\alpha \neq 0$ olsun. Böylece, $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için,

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in F(I_1)$$

bulunur. Her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için $|\alpha|t > 0$ olup,

$$A \subset \{k \in \mathbb{N} : \rho(\alpha x_k - \alpha l, |\alpha|t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için,

$$\rho(\alpha x_k - \alpha l, |\alpha|t) = \rho(x_k - l, \frac{|\alpha|t}{|\alpha|}) = \rho(x_k - l, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

yazılabilir. Böylece,

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(\alpha x_k - \alpha l, |\alpha|t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\},$$

ve $A^c \in I_1$ elde edilir. Buradan da, $I_1^{\mathcal{L}} - \lim \alpha x_k = \alpha l$ bulunur.

■

3.3.1. I_1^* – Yakınsaklık

Bu alt bölümde, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda I_1^* – yakınsaklık kavramından bahsedilecektir.

Tanım 3.3.7. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay olsun. Eğer, $\mathbb{N}$ nin bir $K = \{k_m : k_1 < k_2 < \dots\}$ alt kümesi için $K \in F(I_1)$ (yani $\mathbb{N} \setminus K \in I_1$) ve $\mathcal{L} - \lim_m x_{k_m} = \ell$ oluyorsa, bu takdirde, X teki elemanlardan oluşan $x = (x_k)$ dizisi $\ell \in X$ sayısına I_1^* – yakınsaktır denir ve bu $I_1^{*, \mathcal{L}} - \lim x = \ell$ ile gösterilir. Ayrıca, $x = (x_k)$ dizisinin I_1^* – limiti ℓ dir.

Teorem 3.3.8. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay ve I_1 admisible ideal olsun. Eğer, $I_1^{*,\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ ise, bu takdirde $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir.

İspat: $I_1^{*,\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olsun. Buradan, $K = \{k_m : k_1 < k_2 < \dots\} \in F(I_1)$ (yani $\mathbb{N} \setminus K = H \in I_1$) bulunur öyle ki $\mathcal{L} - \lim_m x_{k_m} = \ell$ dir. Böylece, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, $m > n_0$ olduğunda

$$\rho(x_{k_m} - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Verilen ideal admisible olduğundan yakınsaklık tanımı gereği, $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için

$$\{k_m \in K : \rho(x_{k_m} - \ell, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in I_1$$

ve

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \subset H \cup \{k_1 < k_2 < \dots < k_{n_0-1}\} \in I_1$$

elde edilir. Bir başka deyişle, $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir. ■

Aşağıda verilen örnek, Teorem 3.3.8 in tersinin her zaman sağlanamayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.3.9. Örnek 3.3.3 te verilen $(\mathbb{R}, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzayını göz önüne alalım. $\mathbb{N}$ nin bir A alt kümesi için,

$$Prime(A) = \{p \in \mathbb{P} : \exists a \in A, p \mid a\}$$

tanımlansın ki burada $\mathbb{P}$ ve $p \mid a$ sembolleri sırasıyla tüm asal sayıların kümesini ve “ p böler a ” anlamına gelsin. Küme ailesi olarak,

$$I_p := \{A \subset \mathbb{N} : Prime(A) \text{ sonlu}\}$$

alalım. Burada, $Prime(\emptyset) = \emptyset$ ifadesinin sonlu olduğu dikkate alınırsa $\emptyset \in I_p$ elde edilir. Ayrıca, $Prime(A \cup B) = Prime(A) \cup Prime(B)$ olduğundan, eğer $A, B \in I_p$ ise $A \cup B \in I_p$ dir. Benzer şekilde, $Prime(B) \subset Prime(A)$ olduğundan, eğer $A \in I_p$ ve $B \subset A$ ise $B \in I_p$ dir. Buna ek olarak, $Prime(\mathbb{N}) = \mathbb{P}$ ifadesi sonsuz olup buradan I_p ideali aşikar olmayan idealdir. Her $n \in \mathbb{N}$ nin sonlu sayıda asal çarpanı olduğundan I_p ideali admisible ideal olur ki bu da $Prime(\{n\})$ nin sonlu olması demektir.

Şimdi, verilen herhangi $n \geq 2$ sayısı göz önüne alınsın. $m_p(n)$ ile n nin maksimum asal çarpanı gösterilsin ve $m_p(1) = 1$ olsun. $\mathbb{R}$ de

$$(x_n) = \left(\frac{1}{m_p(n)}\right)$$

dizisi için,

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{11}, \dots\right)$$

bulunur. Verilen $\varepsilon > 0$ için, $\frac{t}{0} = \infty$ tanımı ile her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $\mathcal{N}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ ve $\rho(x, t) = \frac{t}{|x|}$ olur. $\frac{1}{p_0} < t\varepsilon$ olacak şekilde $p_0 \in \mathbb{P}$ asal sayısı alınırsa,

$$\begin{aligned} A &:= \{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - 0, t) \neq \mathcal{N}(\varepsilon)\} = \{k \in \mathbb{N} : \frac{t}{|x_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : t\varepsilon \leq \frac{1}{m_p(k)}\} \\ &\subseteq \{k \in \mathbb{N} : m_p(k) < p_0\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $\text{Prime}(A) \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p < p_0\}$ sonludur ve $A \in I_p$ dir. Buradan $I_p^{\mathcal{L}} - \lim x = 0$ elde edilir. Ancak, her bir

$$K = \{k_m : k_1 < k_2 < \dots\} \in F(I_p),$$

kümesi için eğer p_1 , sonlu olan $\text{Prime}(\mathbb{N} \setminus K)$ kümesinin elemanı olmayan en küçük asal sayı ise, bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $p_1^n \in K$ olur ve buradan $t \in p_1 \leq 1$ olacak şekilde verilen her $\varepsilon > 0$ için sonsuz sayıdaki m sayısının $\rho(x_{k_m}, t) \neq \mathcal{N}(\varepsilon)$ olmasını sağladığı gözlemlenebilir. Dolayısıyla, $I_p^{*,\mathcal{L}} - \lim x \neq 0$ olur.

Uyarı 3.3.10. Yukarıda verilen örnekten I_1^* – yakınsamanın I_1 – yakınsamayı gerektirdiği, ancak tersinin her zaman var olmayabileceği görülmüştür. Şimdi sorulması gereken soru, hangi şartlar altında bu yakınsamanın korunacağı sorusudur. Bunun için aşağıdaki tanımda (AP) şartı tanımlanmış ve bahsedilen korunma şartları gösterilmiştir.

Tanım 3.3.11. I_1 den elde edilen ikili ayrık kümelerin her $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ dizisi için, bir $B_n \subset \mathbb{N}$ vardır öyle ki $A_n \triangle B_n$ simetrik farkı her sonlu n ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in I_1$ için sağlanırsa, bu takdirde $I_1 \subset P(\mathbb{N})$ admisible idealine (AP) şartını sağlar denir.

Uyarı 3.3.12. $\mathbb{N}$ doğal sayıların sıfır asimptotik yoğunluğa sahip sonlu alt kümelerinden oluşan idealin (AP) şartını sağladığı söylenebilir. Ancak Örnek 3.3.9’da verilen I_p ideali bu özelliği sağlamaz. Bunu açıkça görmek için, $p_n, n.$ asal sayıyı göstermek üzere

$$A_n := \{p_n^k : k \in \mathbb{N}\}$$

kümesini tanımlayalım. Açıkça, her $n \in \mathbb{N}$ için $\text{Prime}(A_n) = \{p_n\}$ sonludur. Ayrıca bu kümeler ikili ayrık kümelerdir. Eğer, $A_n \triangle B_n$ sonlu ise A_n in B_n de olmayan sınırlı sayıda elemanı vardır. A_n sonsuz küme olduğundan, B_n in elemanları p_n^k formundadır. Böylece, $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ için, $\text{Prime}(B) = \mathbb{P}$ bulunur ki bu, sonsuz kümedir. Dolayısıyla, $B \in I_p$ ile $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini oluşturmak mümkün değildir.

Şimdi, yukarda bahsedilen (AP) şartı altında I_1 – yakınsamanın I_1^* – yakınsamasını gerektirdiğini gösteren teoremi verelim.

Teorem 3.3.13. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ve I_1 ideali (AP) şartını sağlayan bir ideal olsun. Eğer, X te $x = (x_k)$ dizisi $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ ise, bu takdirde $I_1^{*, \mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir.

İspat: Kabul edelim ki I_1 ideali (AP) şartını sağlasın ve $I_1^{\mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olsun. Bu takdirde, her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için, I_1 yakınsaklık tanımı gereği,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in I_1$$

dir. $(\mathcal{N}(\varepsilon_n)) \rightarrow 1_L$ artan olacak şekilde (ε_n) on $L - \{0_L\}$ üzerinde (ε_n) dizisini göz önüne alalım. Buradan,

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon_1)\},$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon_2)\} - A_1$$

ve bu şekilde devam edilerek, ve $k \geq 3$ olmak üzere

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell, t) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon_k)\} - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$$

kümelerini tanımlayalım. Burada, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi I_1 de boş olmayan kümelerin bir dizisidir. (AP) şartı ile $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in I_1$ olup her $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k \triangle B_k$ sonludur.

$K := \mathbb{N} \setminus B$ dersek, I aşıkâr olmayan admisible ideal olduğundan, $K \in F(I)$ ve K sonsuzdur. K nın elemanlarını artan şekilde $k_1 < k_2 < \dots$ alalım. $(\mathcal{N}(\varepsilon_n)) \rightarrow 1_L$ olduğundan, bir $j \in \mathbb{N}$ bulabiliriz öyle ki $\mathcal{N}(\varepsilon_{j+1}) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ olur. Bu takdirde,

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n - \ell) \not\prec \mathcal{N}(\varepsilon_{j+1})\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j+1} A_i$$

bulunur. $A_i \triangle B_i$ sonlu olduğundan, $(\bigcup_{i=1}^{j+1} A_i) \triangle (\bigcup_{i=1}^{j+1} B_i)$ dır. Kabul edelim ki r , bu kümeye ait olmayan bir eleman olsun. Bu takdirde,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j+1} A_i\right) \cap \{r, r+1, r+2, \dots\} = \left(\bigcup_{i=1}^{j+1} B_i\right) \cap \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

elde edilir. $r \leq k_{n_0}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ alırsak, $k_n \in K = \mathbb{N} \setminus B$ olduğundan $n > n_0$ için, $k_n \notin B$ bulunur. Böylece, $k_n \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$ olduğundan, $k_n \notin \bigcup_{i=1}^{j+1} A_j$ vardır. Buradan da

$$\rho(x_{k_n} - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon_k) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olur. Bir başka deyişle, $I_1^{*, \mathcal{L}} - \lim x = \ell$ dir. ■

Teorem 3.3.14. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen önermeler birbirine denktir.

- (a) $I_1^{*, \mathcal{L}} - \lim x = \ell$.
- (b) X de $y = (y_k)$ ve $z = (z_k)$ şeklinde iki dizi vardır öyle ki $x = y + z$, $\mathcal{L} - \lim y = \ell$ ve $\{k : z_k \neq \theta\} \in I_1$ dir. Burada θ , X in sıfır elemanıdır.

İspat: İspatın ilk kısmı olarak kabul edelim ki $I_1^{*, \mathcal{L}} - \lim x = \ell$ olsun. Böylece, $K \in F(I_1)$ ve $\mathcal{L} - \lim_n x_{k_n} = \ell$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. V üzerinde y ve z dizilerini,

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n \in K \\ \ell, & \text{diğer;} \end{cases}$$

ve

$$z_n = \begin{cases} \theta, & n \in K \\ x_n - \ell, & \text{diğer;} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde, $x = y + z$ dir. $t > 0$ ifadesini sabitleyerek $\varepsilon > 0$ alalım. Buradan, her $n > n_0$ için,

$$\rho(x_{k_n} - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. O halde, her $n > k_{n_0}$ için

$$\rho(y_n - \ell, t) = \rho(x_n - \ell, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

vardır. Eğer $n \in K$ ise dizinin tanımından

$$\rho(y_n - \ell, t) = \rho(\theta, t) = 1_L \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Yani, $\mathcal{L} - \lim y = \ell$ olur. Bu ise,

$$K \in F(I) \subseteq \{k : z_k = \theta\}$$

anlamına gelir ki buradan da

$$\{k : z_k \neq \theta\} \subseteq \mathbb{N} \setminus K \in I_1$$

elde edilir.

İspatın diğer kısmına gelirsek, kabul edelim ki $x = y + z$, $\mathcal{L} - \lim_n y_n = \ell$ ve $\{k : z_k \neq \theta\} \in I_1$ olsun.

$$K := \mathbb{N} \setminus \{k : z_k \neq \theta\}$$

olarak alınırsa, $K \in F(I_1)$ ve her $k \in K$ için, $x_k = y_k + z_k = y_k + 0 = y_k$ dır. Bir başka deyişle, $\mathcal{L} - \lim_n y_n = \ell$ ise $\mathcal{L} - \lim_n y_{k_n} = \ell$ elde edilir. Bu da $\mathcal{L} - \lim_n x_{k_n} = \ell$ demektir. ■

3.3.2. İdeal Tamlık

Bu bölümde, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzaylarda ideal Cauchy dizisi tanımı verilerek ideal tamlık kavramının üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.3.15. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay olsun. Eğer, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$, $t > 0$ ve $m, k \geq N$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - a_m, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in I_1$$

olacak şekilde bir N varsa, bu takdirde $a = (a_k)$ dizisine ideal Cauchy denir.

Teorem 3.3.16. $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzay üzerinde her ideal yakınsak dizi, bir ideal Cauchy dizisidir.

İspat: $\mathcal{L}$ -fuzzy normlu uzayda $a = (a_k)$ dizisini ℓ sayısına ideal yakınsak olacak şekilde alalım. Yani, $I_1^{\mathcal{L}} - \lim a = \ell$ olsun. Buradan, verilen $\varepsilon > 0$ için $r > 0$ seçilirse,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Böylece, $t > 0$ için,

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(r)\}$$

yazılabilir. $m \in A$ alırsak, $\rho(a_m - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(r)$ olur. Ayrıca,

$$\rho(\ell - a_m, \frac{t}{2}) = \rho(a_m - \ell, \frac{\frac{t}{2}}{|-1|}) = \rho(a_m - \ell, \frac{t}{2}) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

olduğundan,

$$\rho(a_k - a_m, t) = \rho((a_k - \ell) + (\ell - a_m), \frac{t}{2} + \frac{t}{2})$$

$$\begin{aligned}
& \succ \mathcal{T}(\rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}), (\rho(\ell - a_m, \frac{t}{2}))) \\
& \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \\
& \succ \mathcal{N}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer, $B = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - a_m, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\}$ kümesi tanımlanırsa, buradan $A \subseteq B$ dir. $A \notin I_1$ olduğundan, $B \notin I_1$ bulunur. Böylece, B nin tümleyeni I_1 dedir. Yani, $B^c \in I_1$ dir. Bir başka deyişle, $a = (a_k)$ dizisi bir Cauchy dizisidir. ■

Tanım 3.3.17. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayının ideal tam olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda alınan her ideal Cauchy dizisinin ideal yakınsak olmasıdır.

Teorem 3.3.18. Her $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ideal tam olmasına rağmen tam olmak zorunda değildir.

İspat: Kabul edelim ki $a = (a_k)$ dizisi ideal Cauchy olsun. Ancak ideal yakınsak olmasın. Bu takdirde, verilen her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için, $r > 0$ alınır,

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\rho(a_k - a_n, t) & \succ \mathcal{T}(\rho(a_k - \ell, \frac{t}{2}), \rho(a_k - \ell, \frac{t}{2})) \\
& \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(r), \mathcal{N}(r)) \\
& \succ \mathcal{N}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

dir. Eğer, $A = \{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k - a_n, t) \succ \varepsilon\}$ kümesi alınır, $A \notin I_1$ olur. Böylece, $A^c \in I_1$ dir. (a_k) dizisi ideal Cauchy olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece, (a_k) ideal yakınsaktır. Yani, her $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ideal tamdır. Şimdi, alınan herhangi bir $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayın bilinen anlamda tam olmayabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek 3.3.19. $X = C[0, 1]$, $L = [0, 1]$ ve

$$\rho(f, t) = \frac{t}{\int_0^1 (t + f(x)) dx}$$

olsun. Bu takdirde, (X, ρ, L) , $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaydır. Ancak bu uzayda,

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$$

olacak şekilde (f_n) dizisi alırsak. (f_n) , bir Cauchy dizisi olmasına rağmen yakınsak değildir.

■

3.3.3. İdeal Cauchy ve İdeal Sınırlılık İlişkileri

Bu bölümde, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda ideal sınırlı dizi kavramı tanımlanacak ve ideal Cauchy dizisi ile ideal sınırlı dizi arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.20. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzay ve $a = (a_k)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\geq \mathcal{N}(r)\} \in I_1$$

olacak şekilde bir $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ varsa, bu takdirde $a = (a_k)$ dizisi ideal sınırlıdır denir.

Teorem 3.3.21. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayda alınan her sınırlı dizi ideal sınırlıdır.

İspat: $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayında $a = (a_k)$ dizisi sınırlı dizi olsun. Bu takdirde, $t > 0$ için,

$$\rho(a_k, t) \geq \mathcal{N}(r)$$

olacak şekilde bir $r \in L - \{0_L, 1_L\}$ vardır. Böylece,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\geq \mathcal{N}(r)\} = \emptyset$$

olur ki buradan da,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(a_k, t) \not\geq \mathcal{N}(r)\} \in I_1$$

elde edilir. Yani, (a_k) ideal sınırlıdır. ■

Ancak, yukarıda verilen teoremin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.3.22. L negatif olmayan genişletilmiş reel sayıların kümesi, $L = [0, \infty]$, olmak üzere $V = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{L} = (L, \leq)$ alalım. Burada, $0_L = 0, 1_L = \infty$ dur. $\mathcal{L}$ – fuzzy normu olarak V üzerinde $x \neq 0$ için $\rho(x, t) = \frac{t}{|x|}$ şeklinde ve $t \in (0, \infty)$ için $\rho(0, t) = \infty$ olarak tanımlayalım. t – normu da $\mathcal{T}(a, b) = \min\{a, b\}$ olsun. $\tau(n)$, n nin pozitif bölenlerinin sayısını göstermek üzere,

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ asal sayı} \\ \frac{1}{\tau(n)-2}, & \text{diğer.} \end{cases}$$

dizisini alalım. Burada, her $t > 0$, $r \in L - \{0, \infty\}$ ve $rt \leq n$ olacak şekilde herhangi bir n asal sayısı için

$$\rho(x_n, t) = \rho(n, t) = \frac{t}{|n|} = \frac{t}{n} \not\geq \frac{1}{r} = \mathcal{N}(r)$$

olduğundan, (x_n) dizisi sınırlı değildir. Ancak, $t = 1$ ve asal olmayan herhangi n ve $r = 2$ için,

$$\rho(x_n, 1) = \rho\left(\frac{1}{\tau(n) - 2}, 1\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\tau(n) - 2}\right|} = |\tau(n) - 2| > \frac{1}{2} = \mathcal{N}(r)$$

sağlanır. Burada, açıktır ki asal olmayan herhangi n için $\tau(n) \neq 2$ dir.

Şimdi, $I_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta_\theta(A) = 0\}$ idealini ele alalım. $k_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için, $k_n = 10^{n-1}$ ve p_n , $n > 1$, $I_n = (10^{n-2}, 10^{n-1}]$ ve $I_1 = (0, 1]$ olacak şekilde I_n deki asal sayıların sayısı olsun. Böylece,

$$\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, 1) \not\geq \mathcal{N}(2)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{9 \cdot 10^{n-2}}.$$

dır. Ayrıca,

$$\delta_\theta\{k \in \mathbb{N} : \nu(x_k, 1) \not\geq \mathcal{N}(2)\} > 0$$

denirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{9 \cdot 10^{n-2}} = \varepsilon$$

olur ki böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-2}} = 9\varepsilon$$

bulunur. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-1}} = \frac{9\varepsilon}{10}$$

dir. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{10^{n-1}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{10^{n-1}} = \frac{9\varepsilon}{10} > 0$$

elde edilir.

Ancak, doğal sayılarda sol taraflı limit, asal sayıların yoğunluğudur. Bu yoğunlukta Asal Sayı Teorem'i gereği 0 dır. Yani bu bir çelişkidir. Böylece,

$$\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, 1) \not\geq \mathcal{N}(2)\} \in I_1$$

bulunur. Bir başka deyişle, (x_n) ideal sınırlıdır.

Teorem 3.3.23. $(V, \rho, \mathcal{T})$, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzayında alınan her ideal Cauchy dizisi ideal sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki $(V, \rho, \mathcal{T})$ üzerinde $a = (a_n)$ dizisi ideal Cauchy dizisi olsun. Böylece, her $\varepsilon \in L - \{0_L\}$ ve $t > 0$ için, $m, k \geq N$ olduğunda

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n - a_k, t) \not\succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \in I_1$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ vardır. Buradan,

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n - a_k, t) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)\} \neq I_1$$

bulunur. $\rho(a_n - a_k, 1) \succ \mathcal{N}(\varepsilon)$ olacak şekilde, $n \in \mathbb{N}$ sayısını göz önüne alalım. Böylece, $t = 2$ için,

$$\rho(a_n, 2) = \rho(a_n - a_k + a_k, 2) \succ \mathcal{T}(\rho(a_n - a_k, 1), \rho(a_k, 1)) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1))$$

dir. $r := \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1)))$ dersek,

$$\rho(a_n, 2) \succ \mathcal{T}(\mathcal{N}(\varepsilon), \rho(a_k, 1)) = \mathcal{N}(r)$$

bulunur ki buradan da

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n, 2) \succ \mathcal{N}(r)\} \notin I_1$$

elde edilir. Denk olarak,

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(a_n, 2) \not\succ \mathcal{N}(r)\} \in I_1$$

bulunur. Yani, (a_n) dizisi ideal sınırlıdır. ■

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda bazı yakınsaklık çeşitleri olan istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Yapılan bu çalışma göstermiştir ki, $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda, literatürde bulunan diğer yakınsaklık çeşitleri tanımlanabilir ve yine $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylarda, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları çift ve hatta üçlü diziler üzerine uygulanabilir. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramlarının birbirleri ile ilişkileri ele alınabilir.

Sezgisel fuzzy normlu uzaylarda tanımlanan yakınsaklık çeşitlerinin matematik camiasında uyandırdığı ilgiden yola çıkarak, bu tezde, literatüre kazandırılan $\mathcal{L}$ – fuzzy normlu uzaylardaki bu kavramlar üzerine, çalışmalar yapılacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965, 8, 29–44
- [2] Atanassov, K. T., & Stoeva, S. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*, 20(1), 87-96.
- [3] Atanassov, K. (199950000) *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*. Physica-Verlag, Berlin Heidelberg, 1-137. <https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3>
- [4] Park, Jin Han. "Intuitionistic fuzzy metric spaces." *Chaos, Solitons & Fractals* 22.5 (2004): 1039-1046.
- [5] Saadati, Reza, and Jin Han Park. "On the intuitionistic fuzzy topological spaces." *Chaos, Solitons & Fractals* 27.2 (2006): 331-344.
- [6] Alaca, Cihangir, Duran Turkoglu, and Cemil Yildiz. "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces." *Chaos, Solitons & Fractals* 29.5 (2006): 1073-1078.
- [7] Turkoglu, D., Alaca, C. İ. H. A. N. G. İ. R., Cho, Y. J., & Yildiz, C. (2006). Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of applied mathematics and computing*, 22, 411-424.
- [8] Dijkman, J. G., H. Van Haeringen, and S. J. De Lange. "Fuzzy numbers." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 92.2 (1983): 301-341.
- [9] S.C. Cheng, J.N. Mordeson, Fuzzy linear operator and fuzzy normed linear spaces. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 86, 429–436 (1994)
- [10] Goguen, J. A. (1967). L-fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18(1), 145-174.
- [11] Saadati R. and Park C., Non-Archimedean L-fuzzy normed spaces and stability of functional equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010,60:2488–2496.
- [12] Shakeri S., Saadati R., Park C., Stability of the quadratic functional equation in non-Archimedean L – fuzzy normed spaces. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 2010,1(2):72-83
- [13] Deschrijver, G., O'Regan, D., Saadati, R., & Vaezpour, S. M. (2009). L-Fuzzy Euclidean normed spaces and compactness. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(1), 40-45.
- [14] R. Saadati, A. Razani, H. Adibi, A common fixed point theorem in L – fuzzy metric spaces, *Chaos Soliton. Fract.*, 33 (2007), 358–363.
- [15] Mao, M. H., & Fang, J. X. (2012). Some topological properties of L-fuzzy normed spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 195, 100-108.
- [16] Saadati, R., Razani, A., & Adibi, H. (2007). A common fixed point theorem in L-fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(2), 358-363.

- [17] Aiyub M., Saini K., Raj K., Korovkin type approximation theorem via lacunary equi-statistical convergence in fuzzy spaces. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 2022,25(4):312-321
- [18] Mursaleen, M. (2000). λ -statistical convergence. *Mathematica slovacica*, 50(1), 111-115.
- [19] Eghbali, N., & Ganji, M. (2016). Generalized Statistical Convergence in the Non-Archimedean L-fuzzy Normed Spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 6(1), 15-22.
- [20] Fast, H. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*. 1951, 2, 241–244.
- [21] Steinhaus H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. Math*, 1951,2:73-74
- [22] Šalát, T. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*. 1980, 30, 139–150.
- [23] Fridy, J.A. On statistical convergence. *Analysis*. 1985, 5, 301–313.
- [24] Connor, S. The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. *Analysis*. 1988, 8, 47–63.
- [25] Çınar, Muhammed, Murat Karakaş, and Mikail Et. "On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions." *Fixed Point Theory and Applications* 2013.1 (2013): 1-11.
- [26] Türkmen, Muhammed Recai, and Muhammed Çınar. " λ -statistical convergence in fuzzy normed linear spaces." *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 34.6 (2018): 4023-4030.
- [27] Freedman, Allen, and John Sember. "Densities and summability." *Pacific Journal of Mathematics* 95.2 (1981): 293-305.
- [28] Fridy, J., and C. Orhan. "Statistical limit superior and limit inferior." *Proceedings of the American mathematical society* 125.12 (1997): 3625-3631.
- [29] Fridy, John Albert, and Cihan Orhan. "Lacunary statistical convergence." (1993): 43-51.
- [30] Savaş, Ekrem, and Richard F. Patterson. "Lacunary statistical convergence of multiple sequences." *Applied Mathematics Letters* 19.6 (2006): 527-534.
- [31] Patterson, Richard F., and E. Savaş. "Lacunary statistical convergence of double sequences." *Mathematical Communications* 10.1 (2005): 55-61.
- [32] Mursaleen, Mohammad, and S. A. Mohiuddine. "On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233.2 (2009): 142-149.
- [33] J.A. Fridy, Lacunary statistical summability, *J. Math. Anal. Appl.* 173 (1993) 497–504.

- [34] Kostyrko, Pavel, Tibor Šalát, and Władysław Wilczyński. "I-convergence." Real analysis exchange (2000): 669-685.
- [35] Kostyrko, Pavel, et al. "*I*-convergence and extremal *I*-limit points." Mathematica slovaca 55.4 (2005): 443-464.
- [36] Savaş, Ekrem, and Mehmet Gürdal. "Ideal convergent function sequences in random 2-normed spaces." Filomat 30.3 (2016): 557-567.
- [37] Savas, Ekrem, and Pratulananda Das. "A generalized statistical convergence via ideals." Applied mathematics letters 24.6 (2011): 826-830.
- [38] Savas, Ekrem, Shyamal Debnath, and Debjani Rakshit. "On I-statistically rough convergence." Publications de l'Institut Mathématique 105.119 (2019): 145-150.
- [39] DüNDAR, Erdinç, and Celal Çakan. "Rough I-convergence." Demonstratio mathematica 47.3 (2014): 638-651.
- [40] Arslan, Mukaddes, and Erdinç DüNDAR. "On I-Convergence of sequences of functions in 2-normed spaces." Southeast Asian Bull. Math 42.4 (2018): 491-502.
- [41] Arslan, Mukaddes, and Erdinç DüNDAR. "*I*-Convergence and *I*-Cauchy Sequence of Functions In 2-Normed Spaces." Konuralp Journal of Mathematics 6.1 (2018): 57-62.
- [42] Hadamard, Jacques (1896), "Sur la distribution des zéros de la fonction $\eta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.", Bulletin de la Société Mathématique de France, Société Mathématique de France, 24: 199–220, archived from the original on 2012-07-17

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Reha YAPALI

Doğum Yeri ve Yılı :

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta :

Eğitim Durumu

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik, 2015

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, 2018

Doktora : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, 2023

Mesleki Deneyim

Araştırma Görevlisi, Muş Alparslan Üniversitesi, 2020-

Ödüller ve Burslar

- 2015 Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fakülte Birinciliği
- 2021-2023 TÜBİTAK 2211/A Yurt İçi Doktora Bursiyerliği

Yayınları

1. Yapalı, R., & Talo, Ö. (2017). Tauberian conditions for double sequences which are statistically summable $(C, 1, 1)$ in fuzzy number space. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 33(2), 947-956.(SCI-EXPANDED)
2. Yapalı, R., & Gürdal, U. (2021). Pringsheim and statistical convergence for double sequences on L - fuzzy normed space. AIMS Mathematics, 6(12), 13726-13733.(SCI-EXPANDED)
3. Yapalı, R., & Polat, H. (2022). Tauberian theorems for the weighted mean methods of summability in intuitionistic fuzzy normed spaces. Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS), 11(2), 439-447.
4. Yapalı, R., Coşkun, H., & Gürdal, U. (2023). Statistical convergence on L - fuzzy normed space. Filomat, 37(7), 2077-2085. (SCI-EXPANDED)

5. Yapalı, R., & Coşkun, H. (2023). Lacunary Statistical Convergence for Double Sequences on $\mathcal{L}$ – Fuzzy Normed Space. Journal of Mathematical Sciences and Modelling, 6(1), 24-31. (TR-DİZİN)
6. Yapalı, R., & Coşkun, H. (2023). On Ideal Completeness for Double Sequences on L – Fuzzy Normed Spaces. Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS). (ACCEPTED)
7. Yapalı, R., Korkmaz, E., Çınar, M., & Coşkun, H. (2023). Lacunary Statistical Convergence on L – Fuzzy Normed Space. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. (SCI-EXPANDED) (ACCEPTED)

