T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FUZZY MANTIK TEKNİKLERİ KULLANILARAK FUZZY TOPOLOJİNİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

KHIDER MOHAMED SALİH KHIDER KHIDER

DOKTORA TEZİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT TOKEŞER

EYLUL - 2023
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Khider Mohamed Salih Khider KHIDER tarafından hazırlanan "**FUZZY MANTIK TEKNİKLERİ KULLANILARAK FUZZY TOPOLOJİNİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **04.09.2023** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Tuğba MERT Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü V.	Doç. Dr. Osman ÇİÇEK	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Khider Mohamed Salih Khider KHIDER

ÖZET

DOKTORA TEZİ

FUZZY MANTIK TEKNİKLERİ KULLANILARAK FUZZY TOPOLOJİNİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

KHIDER MOHAMED SALİH KHIDER KHIDER

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN:DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT TOKEŞER

Bu tezde, fuzzy küme, soft kümeler, fuzzy soft kümeler ve fuzzy topolojik uzayın temel tanımlarını inceledi ve bazı teoremlerle taban ve alt taban çalışıldı, ardından fuzzy kümelerin bazı temel özelliklerini de inceledik. Özellikleri ve teoremleri ile fuzzy kümeler için fonksiyonu ve kartezyen çarpımı ile fuzzy mantıklar kullanarak T_0, T_1, T_2 için bazı ayırma aksiyom teorilerini tartıştık.

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy topoloji, yumuşak küme, Fuzzy yumuşak kümesi

Eylül 2023, 60 Sayfa

ABSTRACT

PH.D THESIS

INVESTIGATION OF SOME PROPERTIES OF FUZZY TOPOLOGY USING FUZZY LOGIC TECNHIQUES

KHIDER MOHAMED SALİH KHIDER KHIDER

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR:ASSIST. PROF. DR. ÜMİT TOKEŞER

In this thesis we studied the fundamental definitions of the fuzzy set, soft sets, fuzzy soft sets and fuzzy topological space, and we studied base and subbase with some theorems then we studied some fundamental properties of the fuzzy sets also we discussed the function and Cartesian product for fuzzy sets with properties and theorems and we discussed some separation axiom theories for T_0, T_1, T_2 using fuzzy logics.

KEYWORDS: Fuzzy topology, soft set, Fuzzy soft set

September 2023, 60 Page

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında büyük katkıları olan, tez çalışması boyunca gösterdiği ve ışık tutucu yollar, yöntemler ve destekleri için değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER'e çok teşekkür ederim. Aynı zamanda, bu araştırmayla ilişkili pek çok pratik bilgiler hakkında yardımcı oldukları için Matematik Anabilim Dalı öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim. Tez çalışmam sürecinde benden hem manevi hem de maddi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Khider Mohamed Salih Khider KHIDER

Kastamonu, 2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

μ_A	:Karakteristik Fonksiyon
U	:Evrensel Küme
$P(U)$	:Kuvet Kümesi
$\leq$	:Alt Küme
$\vee$	:Birleşim Kümesi
$\wedge$	:Kesişim Kümesi
$<$	:İçermek
A^c	:Tümleyen Küme
$\setminus$	:Fark
(F, A)	:Soft Kümeler
F	:Soft Küme Fonksiyonu
E	:Parametre
$\circ$	:Birleşim
$\mho$	:İndeks Küme
$\propto, \beta$	:Elemanlar
$\emptyset$	:Boş Küme
φ, ψ	:Fonksiyonlar
$\tilde{\varphi}$	:Boş Soft Küme
$\widetilde{U}$	:Mutlak Soft Küme
$\times$	:Kartezyen Çarpımı
(f, A)	:Fuzzy Soft Küme
I^U	:Tüm Fuzzy Kümelerin Koleksiyonu
$\overline{U}$	:Mutlak Fuzzy Soft Küme
$\bar{\varphi}$	:Boş Fuzzy Soft Küme
$f(e)$	:Mutlak Fuzzy Soft Küme Fonksiyonu
(U, τ)	:Fuzzy Topolojik Uzay
τ	:Fuzzy Açık Küme
(V, τ_V)	:Fuzzy Topolojik Alt Uzay

δ	:Fuzzy Alt Tabanlı Küme
$\mathcal{B}$	:Fuzzy Tabanlı Küme
f^{-1}	: Soft Küme Fonksiyonun Tersi
T_0	:T_0 Fuzzy Soft Uzay
T_1	:T_1 Fuzzy Soft Uzay
T_2	:T_2 Fuzzy Soft Uzay

1. GİRİŞ

Bu yüzyılda bilim ve matematikteki çeşitli paradigmatik değişiklikler arasında, bu tür bir değişiklik belirsizlik kavramıyla ilgilidir. Bilimde bu değişim, bilimde belirsizliğin istenmeyen bir durum olduğunda ısrar eden geleneksel görüşten tedrici bir geçişle kendini göstermiştir. Belirsizliğe hoşgörülü olan ve bilimin bundan kaçınamayacağında ısrar eden alternatif bir görüşe mümkün olan tüm yollarla kaçınılmalıdır. Geleneksel görüşe göre bilim, tüm tezahürlerinde (kesinlik, özgüllük, keskinlik, tutarlılık vb.) kesinlik için çabalamalıdır; bu nedenle, belirsizlik (kesinlik, belirli olmama, muğlaklık, tutarsızlık vb.) bilimsel olmayan olarak kabul edilir. Alternatif (ya da modern) görüşe göre, belirsizlik bilim için gerekli kabul edilir; sadece kaçınılmaz bir veba değil, aslında büyük bir faydası var. Geleneksel görüşten modern belirsizlik görüşüne geçişin ilk aşaması, fiziğin moleküler düzeydeki süreçlerle ilgilenmeye başladığı 19. yüzyılın sonlarında başladı. Newton mekaniğinin kesin yasaları bu süreçlerin incelenmesiyle ilgili olsa da, bunların ilgili muazzam sayıdaki varlıklara fiilen uygulanması, mevcut hesaplama yeteneklerinin çok ötesinde hesaplama talepleriyle sonuçlanacaktı ve şimdi fark ettiğimiz gibi, temel hesaplama sınırlarını bile aşacaktı. Yani, bu kesin yasaların bu alanda uygulanabilirliği yalnızca pratikte (mevcut bilgisayar teknolojisine dayalı olarak) değil, aynı zamanda prensipte reddedilir (Klir ve vd, 1995).

Fiziksel süreçlerin moleküler düzeyde incelenmesine temelde farklı bir yaklaşıma duyulan ihtiyaç, yalnızca moleküler süreçlerin (istatistiksel mekanik) çalışmasına değil, aynı zamanda ilgili istatistiksel yöntemlerin de geliştirilmesini motive etti, ancak aktüerya mesleği, büyük telefon santrallerinin tasarımı ve benzerleri gibi bir dizi başka alana yöneliktir. İstatistiksel yöntemlerde, mikroskobik varlıkların (moleküller, bireysel telefon siteleri, vb.) belirli tezahürleri, uygun makroskopik değişkenlerle bağlantılı olan istatistiksel ortalamaları ile değiştirilir. Newton'un belirsizliğinde oynanan rol, Lotfi A. Zadeh'in (1965b) ufuk açıcı bir makalesinin yayınlanmasıydı, ancak makalede sunulan bazı fikirler 30 yıl kadar önce Amerikalı filozof Max Black (1937) tarafından tasavvur edilmişti. Zadeh makalesinde, nesneleri (bulanık kümeler) kesin olmayan sınırları olan kümeler olan bir teori ortaya koydu. Bir fuzzy kümeye üyelik, bir onaylama veya reddetme meselesi değil, bir derece meselesidir.

Zadeh'in makalesinin önemi, yalnızca belirsizlik için tek ajan olarak olasılık teorisine değil, aynı zamanda olasılık teorisinin dayandığı temellere de meydan okumasıydı: Aristotelesçi iki değerli mantık. A bir fuzzy küme ve x ilgili bir nesne olduğunda, "x, A'nın bir üyesidir" önermesi, iki değerli mantığın gerektirdiği gibi, mutlaka doğru veya yanlış değildir, ancak yalnızca bir dereceye kadar doğru olabilir, x'in gerçekte A'nın bir üyesi olduğu derecedir. Fuzzy kümelerdeki üyelik derecelerini ve ilişkili önermelerin doğruluk derecelerini kapalı birim aralığında [0, 1] sayılarla ifade etmek en yaygın olanıdır, ancak gerekli değildir. Bu aralıktaki uç değerler, 0 ve 1, sırasıyla, belirli bir fuzzy kümedeki üyeliğin toplam reddini ve onayını ve ayrıca ilişkili önermenin yanlışlığını ve doğruluğunu temsil eder. Fuzzy kümelerin üyelikten üyeliksizliğe ve tam tersi kademeli geçişleri ifade etme yeteneği geniş bir kullanıma sahiptir.

Bir fuzzy küme, söylem evrenindeki her olası bireye, fuzzy kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atanarak matematiksel olarak tanımlanabilir. Bu derece, o bireyin fuzzy küme ile temsil edilen kavrama ne derece benzer veya uyumlu olduğuna karşılık gelir. Bu nedenle, bireyler, daha büyük veya daha küçük üyelik derecesi ile gösterildiği gibi, daha fazla veya daha az derecede fuzzy kümeye ait olabilirler. Daha önce bahsedildiği gibi, bu üyelik dereceleri sıklıkla 0 ile 1 arasındaki kapalı aralıkta değişen gerçek sayı değerleri ile temsil edilir. Böylece, güneşli kavramımızı temsil eden bir fuzzy küme, %, 0’lık bulut örtüsüne 1 üyelik derecesini, %20’lik bulut örtüsüne 0.8 üyelik derecesini, %30'luk bulut örtüsüne 0.4 üyelik derecesini ve %75’lik bulut örtüsüne 0 üyelik derecesi atayabilir. Bu dereceler, bulut örtüsünün her bir yüzdesinin bizim öznel güneşli kavramımıza yaklaşma derecesini belirtir ve kümenin kendisi, böylesine yaygın bir dilsel terimin doğasında bulunan anlamsal esnekliği modelleridir. Fuzzy kümeye tam üyelik ve tam üyelik olmama sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle gösterilebildiğinden, kesin küme kavramını daha genel bir fuzzy küme kavramının sınırlı bir durumu olarak düşünebiliriz, sadece bu iki üyelik derecesine izin verilir.

Fuzzy kümeler teorisi üzerine yapılan araştırmalar, teorinin 1960'ların ortalarında ortaya çıkmasından bu yana istikrarlı bir şekilde büyümektedir. Teoriye ilişkin kavram ve sonuçlar gövdesi şimdi oldukça etkileyicidir. Çok çeşitli uygulamalar üzerinde yapılan araştırmalar da çok aktif olmuştur ve belki de daha etkileyici sonuçlar üretmiştir, (Klir,1995) Bu tezde, teorinin en başarılı uygulamalarından bazılarının yanı sıra teorinin başlıca gelişmelerine bir giriş sunuyoruz.

Soft küme teorisi, 1999 yılında Molodtsov tarafından belirsizlikle parametrik bir şekilde başa çıkmak için önerilen fuzzy küme teorisinin bir genellemesidir. Soft küme, parametreli bir küme ailesidir-sezgisel olarak, bu "soft"tır, çünkü kümenin sınırı parametrelere bağlıdır. Biçimsel olarak, bir evrensel X kümesi ve E parametre kümesi üzerinde bir soft küme, *A*'nın E'nin bir alt kümesi olduğu ve *f*'nin *A*'dan X'in kuvvet kümesine bir fonksiyon olduğu bir *(f, A)* çiftidir. Her *e* için *A*'da, *f(e)* kümesi, *(f, A)*'daki *e*'nin değer kümesi olarak adlandırılır. Yeni soft kümeler teorisi için en önemli adımlardan biri, 2009 yılında matematikçiler Athar Kharal ve Bashir Ahmad tarafından 2011 yılında yayınlanan sonuçlarla elde edilen soft kümeler üzerindeki eşlemeleri tanımlamaktır. Soft kümeler, tıbbi uzman sistemlerde kullanım için tıbbi teşhis sorununa da uygulanmıştır. Fuzzy soft kümeler de tanıtıldı. Fuzzy soft kümeler üzerindeki eşlemeler Kharal ve Ahmad tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Fuzzy soft küme teorisi, çeşitli yönlerde uygulama için zengin bir potansiyele sahiptir.

Soft topoloji, matematiğin diğer dallarıyla bağlantıları olan önemli bir matematiğin dalıdır. Soft topolojik uzaylar, matematiğin hemen hemen tüm dallarında doğal olarak ortaya çıkar. Bu soft topolojiyi matematiğin büyük birleştirici fikirlerinden biri haline getirdi.

Ekonomi, çevre mühendisliği, tıp vb. alanlardaki gerçek hayat problemlerinin çoğu klasik matematiksel yöntemlerle çözülemez ve bu yöntemler yeni gereksinimleri karşılamak için yeterli değildir, bu nedenle bulanık küme teorisi gibi bazı teoriler verilmiştir. Soft küme teorisi ve fuzzy soft küme teorisi ve uygulamaları, bu problemleri çözmek için geliştirilmiştir. İlk olarak araştırmacı Zadeh tarafından ortaya atılan fuzzy küme teorisi, bu tür problemlerin çözümünde çok önemli bir araç haline gelmiş ve kısmi üyeliklere izin vererek muğlak kavramları temsil etmek için uygun bir çerçeve sunmaktadır (Zadeh 1965). Fuzzy küme teorisi hem matematikçiler hem de bilgisayar bilimcileri tarafından incelenmiştir ve yıllar içinde fuzzy kontrol sistemleri, fuzzy otomatlar, fuzzy mantık, fuzzy topoloji vb. gibi birçok fuzzy küme teorisi uygulaması ortaya çıkmıştır. Bu teorinin yanı sıra olasılık teorisi, bu problemlerin çözümüne yönelik kaba küme teorisi de vardır. Chang, fuzzy ailesi olan fuzzy topolojinin tanımını verdi(Chang 1968). Molodtsov (Molodtsov 1999), belirsizlik kümelerini modellemek için tamamen yeni bir yaklaşım olan soft küme teorisi kavramını tanıttı. Abdulkadir (Abdulkadir 2014) fuzzy soft topolojik uzaylara bir giriş soft, Roy .S. ve vd,(2012) tartıştı Fuzzy soft topolojik uzaylar üzerine bir not tartışmıştır, Sabir ve vd, (2011) soft topolojik uzayların bazı özelliklerini vermiştir. Banu, fuzzy soft topoloji üzerinde çalışmıştır (Banu ve diğerleri, 2012), Georgiou (D.N. Georgiou ve diğerleri 2013) soft topolojik uzaylar üzerinde tartışmıştır, Babitha K.V., ve vd, (2010) üzerinde çalışılan soft küme ilişkileri kavramları bir alt olarak tanıtmış ve soft kümelerin kartezyen çarpımının soft kümesi ve ilgili birçok kavram vermiştir. Maji ve vd, (2011) fuzzy kümeler ve soft kümeleri birleştirmiş ve fuzzy soft kümeleri tanıtmıştır. Fuzzy soft kümeler üzerindeki araştırmaya devam etmek için, Ahmad ve Karal (2009) fuzzy soft kümelerin bazı özelliklerini daha fazla sunmuştur. Topoloji B. Chen,(2013) ve Min (2011), cebir Koyuncu ve Tanay,(2010) ve Aktaş ve Çağan,(2007) dahil olmak üzere çeşitli alanlarda (fuzzy) soft küme teorisi ve uygulamaları üzerine araştırmalar hızla ilerlemektedir. Biswas ve Hanmandlu ,(2013) ve Mahapatra ve Mondal (2012) vb. özellikle, soft kümeleri ve fuzzy soft kümeleri kapsamlı bir şekilde kullanılmıştır. Ayrıca, kaba kümelere ve aralık değerli fuzzy kümelere soft kümeler ve fuzzy soft kümeler de uygulanmıştır Peng ve Liu, (2017). Fuzzy soft kümelerin bir uygulaması olarak, Tanay ve vd, (2011), fuzzy soft topoloji olarak adlandırılan fuzzy soft kümelerin topolojik yapısını tanıtmıştır. Daha sonra, Roy ve vd, (2012) ve Varol ve vd, (2012), fuzzy soft kümelerin tanımını bağımsız olarak değiştirmiş ve fuzzy soft topolojiyi yeniden tanımlamıştır. Bunun ardından, Etkin ve Aygun,(2014) diğer fuzzy soft topolojik yapıları, fuzzy soft topolojik uzaylar bağlamında incelemeye başlamışlardır. Shi ve B. Pang'da,(2015) belirtildiği gibi, soft topolojiler ve fuzzy soft topolojiler gereksizdir ve teorik anlamda gereksiz yere karmaşıktır. A. Kandil ve arkadaşları Soft İdeal Teorisi Soft Lokal Fonksiyon ve Üretilmiş Soft Topolojik Uzaylar üzerinde çalıştılar A. Kandil (2014). Ke Gong ve vd, (2010), işlemleriyle birlikte ikili soft kümeyi incelemiştir. Onyeozili ve vd, (2014), soft küme teorisinin temelleri üzerine bir çalışma sunmuştur.

Bu tezde, fuzzy küme, soft kümeler, fuzzy soft kümeler, fuzzy topolojik uzay ve fuzzy topolojik alt uzayın bazı özelliklerini inceledik. Birinci bölümde, fuzzy küme, soft kümeler ve fuzzy topolojik uzayın gelişimini tanıttıktan sonra yukarıdaki kavramlarla ilgili bazı tarihi çalışmalardan bahsettik. İkinci bölümde, bazı özellikleri ve teoremleri ile fuzzy küme ve fuzzy soft kümeleri inceledik. Üçüncü bölümde, bazı teorem ve özellikler ve bazı örneklerle fuzzy topolojik uzayı çalıştık. Dördüncü bölümde bazı teoremler ve örneklerle birlikte soft kümeleri ve fuzzy soft kümeleri inceledik. Beşinci bölümde fuzzy küme için Kartezyen çarpımını inceledik ve böylece T_0–uzay, T_1–uzay ve T_2–uzay için ayırma aksiyomunun bazı özelliklerini ve bazı teoremleri inceledik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Fuzzy küme teorisi, klasik küme kavramının bir uzantısı olarak önerilmiştir (Zadeh, 1965). Bu teorinin temeli, açıkça tanımlanmış sınırları olmayan ve yalnızca belirli bir dereceye kadar elemanlar içerebilen bir küme olan fuzzy kümedir; başka bir deyişle, elemanlar belirli bir üyelik derecesine sahip olabilir. Bu nedenle, bir fuzzy kümedeki her bir elemanın üyelik derecesini belirleyen uygun fonksiyonlar, yani üyelik fonksiyonları kullanılır. Bu bölümde fuzzy küme kavramları, esnek kümeler, bazı işlemlerle fuzzy soft kümeler, özellikler ve teoremler örneklerle incelenmiştir.

2.1.1 Tanım

$\mu_A : U \to [0,1] = I$ bir dönüşüm ve $\mu_A(\mathrm{u})$ (veya $\mathrm{A(u)}$), x'in A'daki aitlik derecesini belirtmek üzere, U'daki bir A fuzzy kümesinin sıralı çiftler kümesi

$$\mathrm{A} = \{(\mathrm{u}, \mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) : \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}$$

şeklindedir (Zadeh,1965).

2.1.2 Tanım (Sabit Fuzzy Küme)

Her $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ için, eğer $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) = \mathrm{c}$ (sabit) ise, o zaman buna sabit fuzzy küme denir.

2.1.3 Tanım (Eşit Fuzzy Küme)

U boş olmayan küme olsun ve her $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ için A, B, iki fuzzy küme olsun, o zaman $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) = \mu_\mathrm{B}(\mathrm{u})$ ise $A = \mathrm{B}$ dir (Zadeh,1965).

2.1.4 Örnek

$\mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) = \mathrm{x}$, ve $\mu_B(u) = x^2$ olmak üzere $U = \{0,1\}$ ve A, B iki fuzzy küme olsun. Böylece A, B eşit iki fuzzy küme olur. $A = \{(0,0), (1,1)\}, B = \{(0,0), (1,1)\}$ olmak üzere $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ için $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) = \mu_B(u)$ olduğundan, A fuzzy kümesi, B fuzzy kümesine eşittir.

2.1.5 Tanım (Fuzzy Kuvet Kümesi)

$A = \{(u, \mu_A(u) : u \in U\}$ bir Fuzzy küme olsun. O zaman *n* Fuzzy kuvet kümesi

$$A^n = \{(u, (\mu_A(u))^n) : u \in U\} \text{ . n=1,2,3,…}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.6 Örnek

$A = \{(2{,}0.2), (1{,}0.3), (3{,}0.5)\}$ bir Fuzzy küme olsun. O zaman A^2, A^3, A^n

$$A^2 = \{(2{,}0.04), (1{,}0.09), (3{,}0.25)\}$$

$$A^3 = \{(2{,}0.008), (1{,}0.027), (3{,}0.125)\}$$

$$A^n = \{(2, (0.2)^n), (1, (0.3)^n), (3, (0.5)^n\}$$

şeklindedir.

2.1.7 Tanım

$A = \{(u, \mu_A(u) : u \in U\}$ ve $B = \{(u, \mu_B(u) : u \in U\}$, U da iki Fuzzy küme olsun. O halde, $A \vee B$ birleşimi, $A \wedge B$ kesişimi ve A^c tümleyeni aşağıdaki gibi tanımlanan üyelik fonksiyonlarına sahip fuzzy kümelerdir;

i) $\mu_{A \vee B}(u) = max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \forall u \in U$,
ii) $\mu_{A \wedge B}(u) = min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \forall u \in U$,
iii) $\mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u), \forall u \in U$,
iv) $\mu_A(u) \leq \mu_B(u), \forall u \in U$ ise $A \leq B$ (fuzzy altküme),
v) $\mu_{A \setminus B} = min\{\mu_A(u), \mu_{B^c}(u)\}$ olmak üzere $A \setminus B = \{(u, \mu_{A \setminus B}(u)), \forall u \in U\}$ (Fuzzy küme farkı).

2.1.8 Örnek

$U = \{a, b\}$ ve A, B iki Fuzzy küme $A = \{(a, 0.2), (b, 0.6)\}, B = \{(a, 0.8), (b, 0.7)\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $A \vee B$, $A \wedge B$, A^c, $A \backslash \mathrm{B}$ ifadeleri aşağıdaki gibi olur;

i) $A \vee B = C$, $\forall u \in U$ olsun. O zaman $\mu_C(u) = max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$, $\mu_C(a) = 0.8$, $\mu_C(b) = 0.7$ ve böylece $A \vee B = \{(a, 0.8), (b, 0.7)\}$ dir.
($\forall \mathrm{u} \in \mathrm{U}$ olduğunda $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) \leq \mu_\mathrm{B}(\mathrm{u})$ olur ve böylece A ≤ B dir.)

ii) $A \wedge B = D$, o zaman $\mu_D(a) = 0.2$, $\mu_D(b) = 0.6$ olup böylece $A \wedge B = \{(a, 0.2), (b, 0.6)\}$ dir.

iii) $\forall u \in U$ için $\mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_\mathrm{A}(\mathrm{u})$ olsun. O zaman $\mu_{A^c}(a) = 0.8$, $\mu_{A^c}(b) = 0.4$ ve $A^c = \{(a, 0.8), (b, 0.4)\}$ olur.

v) $A \backslash \mathrm{B} = \mathrm{A} \wedge B^C$ olduğunda, böylece Fuzzy fark kümesi üyelik fonksiyonuna eşittir; $\mu_{A\backslash \mathrm{B}} = min\{\mu_A(u), \mu_{B^c}(u)\}$, ve $\mu_{A\backslash \mathrm{B}}(a) = (a, 0.2)$, $\mu_{A\backslash \mathrm{B}}(b) = (a, 0.3)$, ve $A \backslash \mathrm{B} = \{(a, 0.2), (b, 0.3)\}$.

2.1.9 Teorem

$U \neq \emptyset$ ve $A, B \subset U$ **,** U'nun iki Fuzzy kümesi olsun. O zaman

i) $A \leq B \Leftrightarrow B^c \leq A^c$

ii) $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$

iii) $(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$

iv) $(A^c)^c = A$ (Change 1968).

İspat.

i) $\forall u \in U$, $\mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u)$ ve $\mu_{B^c}(u) = 1 - \mu_B(u)$

$A \leq B \Leftrightarrow \mu_\mathrm{A}(\mathrm{u}) \leq \mu_\mathrm{B}(\mathrm{u}) \Leftrightarrow 1 - \mu_\mathrm{B}(\mathrm{u}) \leq 1 - \mu_\mathrm{A}(\mathrm{u})$

$\Leftrightarrow \mu_{\mathrm{B}^c}(\mathrm{u}) \leq \mu_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{u}) \Leftrightarrow B^c \leq A^c$.

ii) $\forall u \in U, \quad \mu_{(A \vee B)^c}(u) = 1 - \mu_{A \vee B}(u)$

$$= 1 - max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$
$$= min\{1 - \mu_A(u), 1 - \mu_B(u)\}$$
$$= min\{ \mu_{A^c}(u), \mu_{B^c}(u)\}$$
$$= \mu_{A^c \wedge B^c}(u)$$

böylece,

$$(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$$

olur.

iii) $\forall u \in U, \quad \mu_{(A \wedge B)^c}(u) = 1 - \mu_{A \wedge B}(u)$

$$= 1 - min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$
$$= max\{1 - \mu_A(u), 1 - \mu_B(u)\}$$
$$= max\{ \mu_{A^c}(u), \mu_{B^c}(u)\}$$
$$= \mu_{A^c \vee B^c}(u)$$

bu durumda,

$$(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$$

olur.

iv) $\forall u \in U, \mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u)$ ve

$\mu_{(A^c)^c}(u) = 1 - \big(1 - \mu_A(u)\big) = \mu_A(u)$ olup, $(A^c)^c = A$ elde edilir.

2.1.10 Teorem

$A, B \ ve \ C$ Fuzzy kümeler olsun. O zaman

i) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

ii) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

iii) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

iv) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Terzioglu 2007).

İspat.

i) $\forall u \in U$ için A$\wedge (B \wedge C) = M \Leftrightarrow$

$$\mu_M(u) = min\{\mu_A(u), min\{\mu_B(u), \mu_C(u)\}\}$$
$$= min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u)\}$$

ve

$\forall u \in U$ için $(A \wedge B) \wedge C = K \Leftrightarrow$

$$\mu_K(u) = min\{min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \mu_C(u)\}$$
$$= min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u)\}$$

olup, bu durumda $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ dir.

ii) $\forall u \in U$ için A$\vee (B \vee C) = M \Leftrightarrow$

$$\mu_M(u) = max\{\mu_A(u), max\{\mu_B(u), \mu_C(u)\}\}$$
$$= max\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u)\}$$

ve

$\forall u \in U$ için $(A \vee B) \vee C = K \Leftrightarrow$

$$\mu_K(u) = max\{max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, \mu_C(u)\}$$
$$= max\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u)\}$$

olup, böylece $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ elde ederiz.

iii) $\forall u \in U$ için $\mu_A(u) \leq \mu_B(u) \leq \mu_C(u)$ ise, o zaman

$A \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) = K \Leftrightarrow \mu_K(u) = min\{\mu_A(u), max\{\mu_B(u), \mu_C(u)\}\} = \mu_A(u)$

$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = M \Leftrightarrow \mu_M(u) =$

$max\{min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}, min\{\mu_A(u), \mu_C(u)\}\} = \mu_A(u)$

olur. Benzer şekilde $\forall u \in U$ için

$$\mu_A(u) \le \mu_C(u) \le \ \mu_B(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_B(u) \le \mu_A(u) \le \ \mu_C(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_B(u) \le \mu_C(u) \le \ \mu_A(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_C(u)$$
$$\mu_C(u) \le \mu_A(u) \le \ \mu_B(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_C(u) \le \mu_B(u) \le \ \mu_A(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_B(u)$$

ise

$$A \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

elde edilir.

iv) $\forall u \in U$ için $\mu_A(u) \le \mu_B(u) \le \ \mu_C(u)$ ise, o zaman

$$A \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = K \Leftrightarrow \mu_K(u) = max\{\mu_A(u), min\{\mu_B(u), \mu_C(u)\}\} = \mu_B(u)$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = M \Leftrightarrow \mu_M(u) =$$
$$min\{max\{\ \mu_A(u), \mu_B(u)\}, max\{\mu_A(u), \mu_C(u)\}\} = \mu_B(u)$$

olur. Benzer şekilde $\forall u \in U$ için

$$\mu_A(u) \le \mu_C(u) \le \ \mu_B(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_C(u)$$
$$\mu_B(u) \le \mu_A(u) \le \ \mu_C(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_B(u) \le \mu_C(u) \le \ \mu_A(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_C(u) \le \mu_A(u) \le \ \mu_B(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$
$$\mu_C(u) \le \mu_B(u) \le \ \mu_A(u) \ \Rightarrow \mu_K(u) = \mu_M(u) = \mu_A(u)$$

ise

$$A \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.1.11 Soft Kümeler

U bir başlangıç evrensel kümesi olsun ve *E*, *U*'ya göre parametreler veya nitelikler kümesidir. *P(U)*, *U* ve $A \subseteq E$'nin kuvet kümesini göstersin, o zaman *(F,A)* çiftine *U* üzerinde soft küme denir, burada *F*, *F:A→P(U)* seklinde verilen bir dönüşümdür. Bir *(F,A)* çifti, *U* üzerinde soft küme olarak adlandırılır eğerek ve yeter şart, *F*, *U* kümesinin tüm alt kümelerinin kümesine *E*'nin bir dönüşümüdür. Başka bir deyişle, soft küme, *U* kümesinin parametreleştirilmiş bir alt küme ailesidir. Bu tanımlamalardan sonra, bazı örnekler ve teorem ile soft kümelerin tanımlarını inceledik.

2.1.12 Tanım

$A \subseteq E$ olsun. $F: A \longrightarrow P(U)$ şeklinde verilen F bir dönüşüm olmak üzere (F, A) veya (F_A), U üzerinde soft küme olarak adlandırılır (Molodtsov 1999).

2.1.13 Örnek

$U = \{c_1\ , c_2, c_3, c_4\ , c_5, c_6\}$ evrensel kümesinde altı araba olduğunu varsayalım ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ de parametrelerin kümesi olsun. $e_i(i = 1,2,3,4,5)$ sırasıyla “pahalı”, “eski”, “çevre dostu”, “ucuz” ve “yeni” parametrelerini temsil etmektedir ki, e_1 "pahalı" parametresini, e_2 "eski" parametresini, e_3 "çevre dostu" parametresini, e_4 "ucuz" parametresini ve e_5 de "yeni" parametresini temsil etmektedir. Varsayalım ki;

$F(e_1) = \{c_1, c_3, c_4, c_5\}$,
$F(e_2) = \{c_2, c_5\}$,
$F(e_3) = \{c_4\}$,
$F(e_4) = \ \{c_5\}$,
$F(e_5) = \{c_1, c_3, c_4\}$

olsun. *(F,E)* soft kümesi, *U* kümesinin alt kümesinin $\{F(e_i), i = 1,2,3,4,5\}$ parametreli bir ailesidir ve bize bir nesnenin yaklaşık açıklamalarının bir koleksiyonunu verir. Böylece, *(F,E)* soft setini aşağıdaki gibi bir yaklaşımlar topluluğu olarak görebiliriz;

$(F,E) = \{(e_1, \{c_1, c_3, c_4, c_5\}), (e_2, \{c_2, c_5\}), (e_3, \{c_4\}), (e_4, \{c_5\}), (e_5, \{c_1, c_3, c_4\})\}$.

2.1.14 Tanım (Boş Soft Küme)

U üzerindeki bir soft küme *(F,A)* olsun. $her\ \epsilon \in A, F(\epsilon) = \breve{\varphi}$ ise $\breve{\varphi}$ ile gösterilen boş soft küme olarak adlandırılır (Maji 2003).

2.1.15 Örnek

Varsayalım ki, U ucuz arabalar kümesi ve A' da parametrelerin kümesi olsun. U evrensel kümesinde şu şekilde verilen dört araba olsun;

$U = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ ve $A = \{koenigsegg, buggatti, ferrari\}$, *(F,A)* soft kümesi arabaların yapımını göstersin. *(F,A)* soft kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$F(koenigsegg)$: $koenigsegg$ arabası,

$F(buggatti)$: *buggatti* arabası,

$F(ferrari)$: *Ferrari* arabası.

(F,A) soft kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların toplamı şeklindedir;

$$(F,A) = \{koenigsegg \text{ arabası} = \emptyset, \text{buggatti arabası} = \emptyset, \text{Ferrari arabası} = \emptyset\}$$

olup, *(F,A)* boş soft küme olur.

2.1.16 Tanım (Mutlak soft Küme)

U üzerindeki bir soft küme *(F,A)* olsun. $her\ \epsilon \in A, F(\epsilon) = \breve{U}$ ise $\breve{U}$ ile gösterilen mutlak soft küme olarak adlandırılır (Maji 2003).

2.1.17 Örnek

Varsayalım ki, U ucuz arabalar kümesi ve B' de parametrelerin kümesi olsun. U evrensel kümesinde şu şekilde verilen dört araba olsun;

$U = \{c_1 , c_2, c_3, c_4 \}$ ve $B = \{koenigsegg\ değil, buggatti\ değil, ferrari\ değil\}$, *(G,B)* soft kümesi arabaların yapımını göstersin. *(G,B)* sof kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$G(koenigsegg)$: $koenigsegg$ arabası değil,

$G(buggatti)$: *buggatti* arabası değil,

$G(ferrari)$: *Ferrari* arabası değil.

(G,B) soft kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların toplamı şeklindedir;

$$(G,B) = \{koenigsegg \text{ arabası değil} = \{c_1 , c_2, c_3, c_4\}, \text{buggatti arabası değil} = \{c_1 , c_2, c_3, c_4\} , \text{ Ferrari arabası değil} = \{c_1 , c_2, c_3, c_4\} \}$$

olup, *(G,B)* mutlak soft küme olur.

2.1.18 Tanım (Soft Altküme)

U üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft küme olsun. Eğer

(i) A< B ,

(ii) $her\ \epsilon \in A$, $F(\epsilon)$ ve $G(\epsilon)$ özdeş yaklaşımlardır ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$(F, A))\leq (G, B)$,

ise (F, A)'ya (G, B)'nin altkümesidir denir (Maji 2003).

2.1.19 Tanım (Soft Kümelerin Birleşimi)

$C = A \vee B$ ve $her\ \epsilon \in C$ olmak üzere U üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft kümenin birleşimi (H, C) soft kümesi ise

$$H(\epsilon) = \begin{cases} F(\epsilon) & \text{eğer } \epsilon \in A - B \\ G(\epsilon) & \text{eğer } \epsilon \in B - A \\ F(\epsilon) \vee G(\epsilon) & \text{eğer } \epsilon \in A \wedge B \end{cases}$$

ve $(F, A) \vee (G, B) = (H, C)$ şeklinde ifade edilir (Maji 2003).

2.1.20 Tanım (Soft Kümelerin Kesişimi)

$C = A \wedge B$ ve $her\ \epsilon \in C$, $H(\epsilon) = F(\epsilon) \wedge G(\epsilon)$ olmak üzere U üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft kümenin kesişimi (H, C) soft kümesidir ve $(F, A) \wedge (G, B) = (H, C)$ şeklinde ifade edilir (Maji 2003).

2.1.21 Tanım (Soft Kümelerin AND Operatörü)

(F, A) ve (G, B) iki soft küme ise, $H(\propto, \beta) = F(\propto) \wedge G(\beta)$,$her\ \propto \in A, her\ \beta \in B$ ve $\wedge$ iki kümenin kesişim operatörü olmak üzere "(F, A) AND (G, B)" soft kümesi $(F, A) \wedge (G, B)$ şeklinde gösterilir ve $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır (Maji 2003).

2.1.22 Tanım (Soft Kümelerin OR Operatörü)

(F, A) ve (G, B) iki soft küme ise, $H(\propto, \beta) = F(\propto) \vee G(\beta)$,$her\ \propto \in A, her\ \beta \in B$ ve $\vee$ iki kümenin kesişim operatörü olmak üzere "(F, A) OR (G, B)" soft kümesi $(F, A) \vee (G, B)$ şeklinde gösterilir ve $(F, A) \vee (G, B) = (K, A \times B)$ şeklinde tanımlanır (Maji 2003).

2.1.23 Tanım (Soft Kümenin Tümleyeni)

$F^c(\epsilon) = U - F(\epsilon) = \left(F(\epsilon)\right)^c$,$HER\ \epsilon \in A$ için $F^c: A \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) SOFT kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, A)$ şeklinde tanımlanır (Neog 2011).

2.1.24 Teorem

U üzerindeki $(F, A), (G, B)$ SOFT kümeleri için aşağıdakiler sağlanır;

i) $((F, A)^c)^c = (F, A)$,
ii) $\breve{\varphi}^c = \breve{U}\ \ and\ \breve{U}^c = \breve{\varphi}$,
iii) $(F, A) \vee (F, A)^c = \breve{U}$,
iv) $(F, A) \wedge (F, A)^c = \breve{\varphi}$,
v) $((F, A) \wedge (G, B))^c = (F, A)^c \vee (G, B)^c$,
vi) $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c$ (Onyeozili 2014).

İspat.

i) $her\ \epsilon \in A,\quad F^c(\epsilon) = (F(\epsilon))^c$ olmak üzere $(F, A)^c = (F^c, A)$ olsun. Hatta $\forall \epsilon \in A$, $(F^c)^c(\epsilon) = (\ F^c(\epsilon))^c = (F(\epsilon)^c\ )^c = F(\epsilon)$ olmak üzere $((F, A)^c)^c = (F^c, A)^c = ((F^c)^c, A)$ olur. Böylece $((F, A)^c)^c = (F, A)$ eşitliği elde edilir.

ii) $her\ \epsilon \in A$, $F(\epsilon) = \breve{\varphi}$ olmak üzere $\breve{\varphi} = (F, A)$ olsun. $her\ \epsilon \in A$, $F^c(\epsilon) = \left(F(\epsilon)\right)^c = \breve{\varphi}^c = \breve{U}$ olmak üzere $\breve{\varphi}^c = (F, A)^c = (F^c, A)$ olur. Böylece $\breve{\varphi}^c = \breve{U}$ dir. Benzer şekilde $\breve{U} = (F, A)$, $her\ \epsilon \in A$, $F(\epsilon) = \breve{U}$ ve $her\ \epsilon \in A$, $F^c(\epsilon) = \left(F(\epsilon)\right)^c = \breve{U}^c = \breve{\varphi}$ olmak üzere $\breve{U}^c = (F, A)^c = (F^c, A)$ olur ve $\breve{U}^c = \breve{\varphi}$ elde edilir.

iii) $her\ \epsilon \in A, \quad H(\epsilon) = F(\epsilon) \vee F^c(\epsilon) =$

$$F(\epsilon) \vee \left(F(\epsilon)\right)^c = \breve{U}$$

olmak üzere $(F,A) \vee (F,A)^c = (F,A) \vee (F^c,A) = (H,A)$ olsun. Bu durumda

$$(F,A) \vee (F,A)^c = \breve{U}$$

olur.

iv) $her\ \epsilon \in A, \quad H(\epsilon) = F(\epsilon) \wedge F^c(\epsilon) = F(\epsilon) \wedge \left(F(\epsilon)\right)^c = \breve{\varphi}$ olmak üzere $(F,A) \wedge (F,A)^c = (F,A) \wedge (F^c,A) = (H,A)$ olsun. Böylece $(F,A) \wedge (F,A)^c = \breve{\varphi}$ olur.

v) $H(\propto,\beta) = F(\propto) \wedge G(\beta)$,$her\ \propto\in A$ ve $her \beta \in B$ ve ∩ de iki soft kümenin kesişim operatörü olmak üzere $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu durumda $(F,A) \wedge (F,A)^c = (H, A \times B)^c = (H^c, A \times B)$ olur. $\forall(\propto,\beta) \in A \times B$ olmak üzere

$$H^c(\propto,\beta) = \left(H(\propto,\beta)\right)^c = \left(F(\propto) \wedge G(\beta)\right)^c$$
$$= (F(\propto))^c \vee (G(\propto))^c = F^c(\propto) \vee G^c(\beta)$$

dir. $O(\propto,\beta) = F^c(\propto) \vee G^c(\beta)$, $her\ \propto\in A$ ve $her\ \beta \in B$ ve ∨ iki soft kümenin birleşim operatörü olmak üzere $(F,A)^c \vee (G,B)^c = (F^c,A) \vee (G^c,B) = (O, A \times B)$ olsun. Böylece $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$ elde edilir.

vi) $((F,A) \vee (G,B))^c = (H, A \times B)$ olsun. $her\ (\propto,\beta) \in A \times B$ olmak üzere

$$H^c(\propto,\beta) = \left(H(\propto,\beta)\right)^c = \left(F(\propto) \vee G(\beta)\right)^c$$
$$= (F(\propto))^c \wedge (G(\propto))^c = F^c(\propto) \wedge G^c(\beta)$$

dir. $O(\propto,\beta) = F^c(\propto) \wedge G^c(\beta)$,$her\ \propto\in A$ ve $her\ \beta \in B$ ve ∧ iki yumuşak kümenin kesişim operatörü olmak üzere $(F,A)^c \wedge (G,B)^c = (F^c,A) \vee (G^c,B) = (O, A \times B)$ olsun. Bu durumda $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$ elde edilir.

2.2.1 Fuzzy Soft Kümeler

Fuzzy soft küme Yao (Yao, 2008), soft fuzzy küme kavramını sunmuş ve bu kavram, mevcut soft fuzzy kümenin önemi için test edilmiştir. Son olarak, Fuzzy Soft Set (FSS) ilişkileri ve soft fuzzy küme ilişkileri bazı örneklerle karşılaştırılmıştır. Çağman (Çağman,2011), Fuzzy Soft Set 'nin tanımını değiştirmiş ve kavramı bazı özellikleriyle birlikte incelemiştir. Son olarak, karar sürecinin etkin bir şekilde yapılandırılması için fuzzy soft toplama operatörü tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş Fuzzy Soft Set, Majumdar tarafından tanıtılmıştır (Macumdar, 2010). Genelleştirilmiş Fuzzy Soft Set 'nin bazı özellikleri ve uygulamaları Manjumdar tarafından sunulmaktadır. Bu bölümde, propiyonlu fuzzy soft kümenin tanımlarını inceledik.

2.2.2 Tanım

A dan I^U ya $f: A \to I^U$ bir dönüşüm olmak üzere, (f, A) çifti U üzerinde fuzzy yumuşak küme olarak adlandırılır (Maji 2001).

2.2.3 Tanım (Boş Fuzzy Soft Küme)

U üzerindeki bir soft küme *(F,A)* olsun. $her\ \epsilon \in A$, $\bar{0}(x) = 0$, $her\ x \in U$ olmak üzere $\bar{0}$ ile gösterilen boş fuzzy sof küme olarak adlandırılır (Maji 2001).

2.2.4 Tanım (Mutlak Fuzzy Soft Küme)

U üzerindeki bir soft küme *(F,A)* olsun. $her\ \epsilon \in A,\ \bar{1}(x) = 1,\ her\ x \in U$ olmak üzere $f(\epsilon)$, U nun $\bar{1}$ mutlak fuzzy kümesi ise $\bar{U}$ ile gösterilen mutlak fuzzy soft küme olarak adlandırılır (Maji 2001).

2.2.5 Tanım (Fuzzy Soft Altküme)

(f, A) ve (g, B), (U, E) fuzzy soft sınıfında iki fuzzy soft küme olsun. Eğer

i) A ≤B
ii) Her $\epsilon \in A$, $f(\epsilon) \leq g(\epsilon)$ ve $(f, A) \leq (g, B)$

olduğunda (f, A), (g, B)'nin fuzzy soft altkümesi olur (Maji 2001).

2.2.6 Tanım (Fuzzy Soft Kümelerin Birleşimi)

$C = A \vee B$ ve $her\ \epsilon \in C$ olmak üzere U üzerinde (f, A) ve (g, B) iki soft kümenin birleşimi (H, C) soft kümesi ise

$$H(\epsilon) = \begin{cases} f(\epsilon) & \text{eğer} \quad \epsilon \in A - B \\ g(\epsilon) & \text{eğer} \quad \epsilon \in B - A \\ f(\epsilon) \vee g(\epsilon) & \text{eğer} \quad \epsilon \in A \wedge B \end{cases}$$

ve $(f, A) \vee (g, B) = (H, C)$ şeklinde ifade edilir (Maji 2001).

2.2.7 Tanım (Fuzzy Soft Kümelerin Kesişimi)

$C = A \wedge B$ ve $her\ \epsilon \in C$, $H(\epsilon) = f(\epsilon) \wedge g(\epsilon)$ ve $A \wedge B \neq \emptyset$ olmak üzere U üzerinde (f, A) ve (g, B) iki fuzzy soft kümenin kesişimi (H, C) fuzzy soft kümesidir ve $(f, A) \wedge (g, B) = (H, C)$ şeklinde ifade edilir (Maji 2001).

2.2.8 Tanım (Fuzzy Soft Kümelerin AND Operatörü)

(f, A) ve (g, B) iki fuzzy soft küme ise, $H(\propto, \beta) = f(\propto) \wedge g(\beta)$,$her\ \propto \in A, her\ \beta \in B$ ve $\wedge$ iki kümenin kesişim operatörü olmak üzere "(f, A) AND (g, B)" fuzzy soft kümesi $(f, A) \wedge (g, B)$ şeklinde gösterilir ve $(f, A) \wedge (g, B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır (Maji 2001).

2.2.9 Tanım (Fuzzy Soft Kümelerin OR Operatörü)

(f, A) ve (g, B) iki fuzzy soft küme ise, $H(\propto, \beta) = f(\propto) \vee g(\beta), her \ \propto \in A, her\ \beta \in B$ ve $\vee$ iki kümenin kesişim operatörü olmak üzere "(f, A) OR (g, B)" fuzzy soft kümesi $(f, A) \vee (g, B)$ şeklinde gösterilir ve $(f, A) \vee (g, B) = (K, A \times B)$ şeklinde tanımlanır (Maji 2001).

2.2.10 Tanım (Fuzzy Soft Kümenin Tümleyeni)

$f^c(\epsilon) = 1 - f(\epsilon) = \left(f(\epsilon)\right)^c, her\ \epsilon \in A$ için $f^c: A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (f, A) fuzzy soft kümesinin tümleyeni $(f, A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(f, A)^c = (f^c, A)$ şeklinde tanımlanır (Neog 2011).

2.2.11 Önerme

(f, A) ve (g, B) iki fuzzy soft küme olsun. $\bar{U}\ ve\ \bar{\varphi}$, sırasıyla, mutlak ve boş fuzzy soft küme olmak üzere;

1. $(\bar{\varphi}, A)^c = (\bar{U}, A)$
2. $(\bar{U}, A) = (f, A)$
3. $(f, A) \vee (\bar{\varphi}, A) = (f, A)$
4. $(f, A) \vee (\bar{U}, A) = (\bar{U}, A)$
5. $(f, A) \wedge (\bar{\varphi}, A) = (\bar{\varphi}, A)$
6. $(f, A) \wedge (\bar{U}, A) = (f, A)$
7. $((f, A) \vee (g, B))^c = (f, A)^c \wedge (g, B)^c$
8. $((f, A) \wedge (g, B))^c = (f, A)^c \vee (g, B)^c$

eşitlikleri vardır.

İspat.

1) $(\bar{\varphi}, A) = (F, A)$ olsun. O zaman $her\ \epsilon \in A$ için

$$f(\epsilon) = \{u, \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}$$
$$= \{(u, 0), u \in U\}$$

$(\bar{\varphi}, A)^c = (f, A)^c = (f^c, A)$ olur ve

$$here \in A, \quad f^c(\epsilon) = \big(f(\epsilon)\big)^c$$
$$= \{u, \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}^c$$
$$= \{u, 1 - \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}$$
$$= \{(u, 1 - 0), u \in U\}$$
$$= \{(u, 1), u \in U\}$$
$$= \bar{U}$$

olup $(\bar{\varphi}, A)^c = (\bar{U}, A)$ elde edilir.

2) $(\bar{U}, A) = (f, A)$ olsun. O zaman $her\ \epsilon \in A$ için,

$$f(\epsilon) = \{u, \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}$$
$$= \{(u, 1), u \in U\}$$

$(\bar{U}, A)^c = (f, A)^c = (f^c, A)$, olur ve

$$her\ \epsilon \in A, \quad f^c(\epsilon) = \big(f(\epsilon)\big)^c$$
$$= \{u, \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}^c$$
$$= \{u, 1 - \mu_{f(\epsilon)}(u) : u \in U\}$$
$$= \{(u, 1 - 1), u \in U\}$$
$$= \{(u, 0), u \in U\}$$
$$= \bar{\varphi}$$

elde edilir.

3) $her\ \epsilon \in A \quad, (f, A) = \{\epsilon, (u, \mu_{f(\epsilon)}(u)) : u \in U\}$ için,

$$(\bar{\varphi}, A) = \{(\epsilon, (u, 0)) : u \in U\}$$

$$(f, A) \vee (\bar{\varphi}, A) = \left\{(\epsilon, \left(u, \max\left(\mu_{f(\epsilon)}(u), 0\right)\right) : u \in U\right\}$$

$$= \left\{(\epsilon, \left(u, \mu_{f(\epsilon)}(u)\right) : u \in U\right\}$$

$$= (f, A)$$

olup $(f, A) \vee (\bar{\varphi}, A) = (f, A)$ elde edilir.

4) $her\ \epsilon \in A\ \ ve\ (f, A) = \left\{\epsilon, (u, \mu_{f(\epsilon)}(u)) : u \in U\right\}$ için,

$$(\bar{U}, A) = \{(\epsilon, (u, 1)) : u \in U\}$$

$$(f, A) \vee (\bar{U}, A) = \left\{(\epsilon, \left(u, \max\left(\mu_{f(\epsilon)}(u), 1\right)\right) : u \in U\right\}$$

$$= \{(\epsilon, (u, 1) : u \in U\}$$

$$= (\bar{U}, A)$$

olup $(f, A) \vee (\bar{U}, A) = (\bar{U}, A)$ elde edilir.

5) $her\ \epsilon \in A, (f, A) = \left\{\epsilon, (x, \mu_{f(\epsilon)}(x)) : x \in U\right\}$ için,

$$(\bar{\varphi}, A) = \{(\epsilon, (x, 0)) : x \in U\}$$

$$(f, A) \wedge (\bar{\varphi}, A) = \left\{(\epsilon, \left(x, \min\left(\mu_{f(\epsilon)}(x), 0\right)\right) : x \in U\right\}$$

$$= \{(\epsilon, (x, 0) : x \in U\}$$

$$= (\varphi, A)$$

olup $(f, A) \wedge (\bar{\varphi}, A) = (\bar{\varphi}, A)$ elde edilir.

6) $her\ \epsilon \in A,\ (F, A) = \left\{\epsilon, (x, \mu_{f(\epsilon)}(x)) : x \in U\right\}$ için,

$$(\bar{U}, A) = \{(\epsilon, (x, 1)) : x \in U\}$$

$$(f, A) \wedge (\bar{U}, A) = \left\{(\epsilon, \left(x, \min\left(\mu_{F(\epsilon)}(x), 1\right)\right) : x \in U\right\}$$

$$= \left\{(\epsilon, \left(x, (\mu_{f(\epsilon)}(x)\right) : x \in U\right\}$$

$$= (F, A)$$

olup $(f, A) \wedge (\overline{U}, A) = (f, A)$ elde edilir.

7) $H(\propto, \beta) = f(\propto) \vee g(\beta), her\ \ \propto \in A\ ve\ her\ \beta \in B$ ve $\vee$ iki fuzzy soft kümenin birleşim operatörü olmak üzer $(f, A) \vee (g, B) = (K, A \times B)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} H(\propto, \beta) &= f(\propto) \vee g(\beta) \\ &= \{(x, \max(\mu_{f(\propto)}(x), \mu_{G(\beta)}(x))\} \end{aligned}$$

olup $her\ (\propto, \beta) \in A \times B$ için

$$\begin{aligned} \big((f, A) \vee (g, B)\big)^c &= (H, A \times B)^c \\ &= (H^c, A \times B) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} H^c(\propto, \beta) &= (H(\propto, \beta)^c \\ &= \Big\{\Big(u, 1 - \max(\mu_{F(\propto)}(U), \mu_{G(\beta)}(u)\Big)\Big\} \\ &= \Big\{\Big(u, \min(1 - \mu_{f(\propto)}(u), 1 - \mu_{g(\beta)}(u)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

$O(\propto, \beta) = f^c(\propto) \wedge g^c(\beta)$, $her\ \ \propto \in A\ ve\ her\ \beta \in B$ ve $\wedge$ iki fuzzy soft kümenin kesişim operatörü olmak üzere $(f, A)^c \wedge (g, B)^c = (f^c, A) \wedge (g^c, B) = (O, A \times B)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\Big\{\Big(u, \min(\mu_{f^c(\propto)}(u), \mu_{g^c(\beta)}(u)\Big)\Big\} \\ &= \Big\{\Big(u, \min(1 - \mu_{f(\propto)}(u), 1 - \mu_{g(\beta)}(u)\Big)\Big\} \end{aligned}$$

olur ve $((f, A) \vee (g, B))^c = (f, A)^c \wedge (g, B)^c$ elde edilir.

8) $H(\propto,\beta)=f(\propto)\wedge g(\beta), her\ \ \propto\in A\ ve\ her\ \beta\in B$ ve $\wedge$ iki fuzzy soft kümenin kesişim operatörü olmak üzere $(f,A)\wedge(g,B)=(H,A\times B)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} H(\propto,\beta) &= f(\propto)\wedge g(\beta) \\ &= \left\{\left(u, \min\left(\mu_{f(\propto)}(u),\mu_{g(\beta)}(u)\right)\right\}\right. \end{aligned}$$

olup $her\ (\propto,\beta)\in A\times B$ için

$$\begin{aligned} \left((f,A)\wedge(g,B)\right)^c &= \left(H(\propto,\beta)\right)^c \\ &= (H^c, A\times B) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^c(\propto,\beta) &= \left(H(\propto,\beta)\right)^c \\ &= \left\{\left(u, 1-\min\left(\mu_{f(\propto)}(u),\mu_{g(\beta)}(u)\right)\right\}\right. \\ &= \left\{\left(u, \max\left(1-\mu_{f(\propto)}(u), 1-\mu_{g(\beta)}(u)\right)\right\}\right. \end{aligned}$$

olur. $O(\propto,\beta)=f^c(\propto)\vee g^c(\beta), her\ \ \propto\in A\ ve\ her\ \beta\in B$ ve $\vee$ iki fuzzy soft kümenin birleşim operatörü olmak üzere $(f,A)^c\vee(g,B)^c=(f^c,A)\vee(g^c,B)=(O,A\times B)$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} &\left\{\left(u, \max\left(\mu_{f^c(\propto)}(u),\mu_{g^c(\beta)}(u)\right)\right\}\right. \\ &= \left\{\left(u, \max\left(1-\mu_{f(\propto)}(u), 1-\mu_{g(\beta)}(u)\right)\right\}\right. \end{aligned}$$

olup $((f,A)\wedge(g,B))^c=(f,A)^c\vee(g,B)^c$ elde edilir.

3. FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAY

Fuzzy soft topolojik uzaylar Tanay ve Kandemir, (2012), bir başlangıç evreni üzerinde bir fuzzy soft küme üzerinde fuzzy soft topoloji tanımladılar. Bu tanımda, fuzzy soft kümelerin parametre kümeleri, fuzzy soft topolojiyi oluşturur, aynı değildir, isteğe bağlı olarak seçilebilirler. Bu bölümde, fuzzy set topolojik uzay, fuzzy set topolojik alt uzay, fuzzy set taban ve alt taban tanımları ve bazı teoriler ve örneklerle fuzzy set topolojik uzayın bazı özellikleri incelenmiştir.

3.1.1 Tanım

U bir küme ve τ da U nun fuzzy alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer τ aşağıdaki şartları sağlıyorsa, τ ya U üzerinde fuzzy topoloji denir;

1- $0,1 \in \tau$,
2- Her $j \in J$ için $G_j \in \tau \ ise \ \vee G_j \in \tau$,
3- $G, H \in \tau \ ise \ G \wedge H \in \tau$.

(U, τ) ikilisine fuzzy topolojik uzay denir. τ nun elemanlarına fuzzy açık kümeler ve eğer *(1-A)*, *U* da fuzzy açık küme ise *U* daki *A* fuzzy kümesine kapalıdır denir (Change 1968).

3.1.2 Örnek

$U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $A = \{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq$ E

ve $(F, A) = \{(\alpha_1, \{x_1, x_2\}), (\alpha_2, \{x_2, x_3\})\ \}$ olsun. O zaman

$F_{A1} = \{(\alpha_1 , \{x_1\})\}$
$F_{A2} = \{(\alpha_1 , \{x_2\})\}$
$F_{A3} = \{(\alpha_1 , \{x_1 , x_2\})\}$

$F_{A4} = \{(\alpha_2, \{x_2\})\}$

$F_{A5} = \{(\alpha_2, \{x_3\})\}$

$F_{A6} = \{(\alpha_2, \{x_2, x_3\})\}$

$F_{A7} = \{(\alpha_1, \{x_1\}), (\alpha_2, \{x_2\})\}$

$F_{A8} = \{(\alpha_1, \{x_1\}), (\alpha_2, \{x_3\})\}$

$F_{A9} = \{(\alpha_1, \{x_1\}), (\alpha_2, \{x_2, x_3\})\}$

$F_{A10} = \{(\alpha_1, \{x_2\}), (\alpha_2, \{x_2\})\}$

$F_{A11} = \{(\alpha_1, \{x_2\}), (\alpha_2, \{x_3\})\}$

$F_{A12} = \{(\alpha_1, \{x_2\}), (\alpha_2, \{x_2, x_3\})\}$

$F_{A13} = \{(\alpha_1, \{x_1, x_2\}), (\alpha_2, \{x_2\})\}$

$F_{A14} = \{(\alpha_1, \{x_1, x_2\}), (\alpha_2, \{x_3\})\}$

$F_{A15} = F_A$

$F_{A16} = F_\emptyset$

şeklinde verilenlerin hepsi (F, A) nın fuzzy alt kümeleri olur. Bu durumda $\tau_1 = \{F_\emptyset, F_A\}$, $\tau_2 = P(F_A)$ ve $\tau_3 = \{F_\emptyset, F_A, F_{A2}, F_{A11}, F_{A13}\}$, (F, A) üzerinde topolojik uzaylar olurlar.

Her topolojik uzay bir fuzzy topolojik uzaydır ama tersi doğru değildir.

3.1.3 Örnek

$U = \{a, b, c\}$, $A = \{(a, 0), (b, 0.4), (c, 1)\}$, U üzerinde bir fuzzy küme ve $\tau = \{0, A, 1\}$ olsun. O zaman *(U, τ)* bir fuzzy topolojik uzay olup, topolojik uzay değildir.

3.1.4 Tanım

(U, τ), U üzerinde bir topolojik uzay ve *V* de *U* nun boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman $(F_V, E) = V_E \wedge (F, E)$ olmak üzere $\tau_V = \{(F_V, E), (F, E) \in \tau\}$ ye V üzerinde soft bağıl topoloji ve *(V,*τ_V*)* ye de *(U, τ)* nin bir fuzzy soft alt uzayı denir (Simsekler 2020).

3.1.5 Tanım

U evrensel küme ve E de parametrelerin kümesi olsun.

i) $\tau = \{U, P(U)\}$, U üzerinde tanımlanan tüm fuzzy soft kümelerin toplamı olsun. O zaman τ, U üzerinde fuzzy soft ayrık topoloji olarak adlandırılır ve
(U, τ), U üzerinde fuzzy soft ayrık uzay olarak adlandırılır.
ii) $\tau = \{\emptyset, U\}$, U üzerinde fuzzy soft ayrık topoloji olarak adlandırılır ve
(U, τ), U üzerindefuzzy ayrık uzay olarak adlandırılır.

Bir fuzzy soft ayrık topolojik uzayın herhangi bir fuzzy soft alt uzayı, bir fuzzy soft ayrık topolojik uzaydır. Ayrıca, bir fuzzy soft ayrık topolojik uzayın herhangi bir fuzzy soft alt uzayı, bir fuzzy soft ayrık topolojik uzaydır.

3.1.6 Önerme

(U, τ), U üzerinde soft topolojik uzay olsun. O zaman her $\alpha \in E$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha) \colon (F, E) \in \tau\}$ koleksiyonu U üzerinde bir topoloji tanımlar (Varol 2012).

İspat.

1) $\phi, \mathrm{U} \in \tau$, $\phi, \mathrm{U} \in \tau_\alpha$ olduğunu gösterir.
2) $\{F_i(\alpha) \colon i \in I\}$, τ_α da kümelerin koleksiyonu olduğunda her i$\in I$ için $(F_i\,, E) \in \tau$ olur ve böylece $\vee_{i\in \mathrm{I}}\,(F_i\,, E) \in \tau$ olup, $\vee_{i\in \mathrm{I}}\, F_i(\alpha) \in \tau_\alpha$ elde edilir.
3) Bazı $(F, E), (G, E) \in \tau$ için $F(\alpha), G(\alpha) \in \tau_\alpha$ olduğunda $(F, E) \wedge (G, E) \in \tau$ ve $F(\alpha) \wedge G(\alpha) \in \tau_\alpha$ olur. Böylece herhangi $\alpha \in E$ için τ_α, U üzerinde bir topolojidir.
Önerme (3.1), her $\alpha \in E$ parametresine karşılık gelen U üzerinde bir τ_α topolojimiz olduğunu gösterir. Böylece U üzerindeki bir soft topoloji, U üzerinde parametreli bir topoloji ailesi verir. Aşağıdaki örnek, her parametreye karşılık gelen koleksiyon U üzerinde bir topoloji tanımlasa bile, herhangi bir soft küme koleksiyonunun U üzerinde bir soft topoloji olması gerekmediğini gösterir.

3.1.7 Örnek

$(F_1,E),(F_2,E),\ (F_3,E),(F_4,E)\ ve\ (F_5,E)$ olmak üzere $U=\{x_1,x_2,x_3\}$, $E=\{\alpha_1,\alpha_2\}\ ve\ \tau=\{\ \tilde{\phi},\tilde{U}\ ,\ (F_1,E),(F_2,E),\ (F_3,E),(F_4,E),(F_5,E)\ \}$, U üzerinde soft kümeler olsun ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$F_1(\alpha_1)=\{x_2\}\,,F_1(\alpha_2)=\{x_1\}$
$F_2(\alpha_1)=\{x_2,x_3\}\,,\quad F_2(\alpha_2)=\{x_1,x_2\}$
$F_3(\alpha_1)=\{x_1,x_2\}\,,\quad F_3(\alpha_2)=\{x_1,x_2\}$
$F_4(\alpha_1)=\{x_1,x_2\}\,,\quad F_4(\alpha_2)=\{x_1,x_3\}.$

O zaman τ, U üzerinde bir soft topoloji tanımlar, dolayısıyla (U,τ,E), U üzerinde bir soft topolojik uzaydır. Kolayca görebiliriz ki;

$$\tau_{\alpha_1}=\left\{\tilde{\phi},\tilde{U},\{x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2\}\right\}$$

ve

$$\tau_{\alpha_2}=\left\{\tilde{\phi},\tilde{U},\{x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\}\right\}$$

U üzerinde birer topolojidir. Fakat τ, U üzerinde soft topoloji değildir, çünkü $G(e_1)=U\ ve\ G(e_2)=\{x_1,x_2\}$ olmak üzere $(F_2,E)\vee(F_3,E)=(G,E)$ olur ve böylece $(G,E)\notin\tau$ olur.

3.1.8 Önerme

(U, τ), U üzerinde bir topolojik uzay ve *V* de *U* nun boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman her $\alpha\in E$ için $(V,\tau_{\alpha v})$, (U,τ_α) nin alt uzayı olur.

İspat.

U üzerinde (V, τ_v) bir soft topolojik uzay olduğunda, her $\alpha \in E$ için $(V, \tau_{\alpha v})$ topolojik uzay olur. Şimdi her $\alpha \in E$ için tanımdan

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha v} &= \{F_v(\alpha) \colon (F, E) \in \tau\} \\ &= \{V \wedge F(\alpha), \colon (F, E) \in \tau\,\} \\ &= \{V \wedge F(\alpha), \colon F(\alpha) \in \tau\}\end{aligned}$$

olur ve bu durumda $(V, \tau_{\alpha v})$, (U, τ_α) nin alt uzayıdır. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

3.1.9 Teorem

(V, τ_v), (U, τ) soft topolojik uzayının bir soft alt uzayı ve (F, E) de U üzerinde bir soft küme olsun. O zaman

(1) (F, E), V de soft açıktır gerek ve yeter şart (G, $E) \in \tau$ için (F, E) = $V \wedge$*(G, E)*,
(2) (F, E), V de soft kapalıdır gerek ve yeter şart U daki bazı *(G, E)* için (F, E)= $V \wedge$*(G, E)* dir (Shabir 2011).

İspat.

(1) İspat, soft alt uzayın tanımdan kolayca görülebilir.
(2) (F, E), V de kapalı soft olduğundan *(G, E)* $\in \tau_v$ için (F, E) = $V \setminus$ *(G, E)* elde ederiz. Aynı zamanda $(H, E) \in \tau$ için *(G, E)* = $V \wedge$ *(H, E)* olur. Herhangi α ∈ E,

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= V\ (\alpha) \setminus G(\alpha) \\ &= V \setminus G(\alpha) \\ &= V \setminus (V(\alpha) \wedge H(\alpha)) \\ &= V \setminus (V \wedge H(\alpha)) \\ &= V \setminus H\ (\alpha) \\ &= V \wedge (\ U \setminus H\ (\alpha))\end{aligned}$$

$= V \wedge (H(\alpha))^C$

$= V(\alpha) \wedge (H(\alpha))^C$

dır. Böylece *(H,E)*, U da kapalı soft olmak üzere *(F,E)* = $V \wedge$*(H,E)* olur. Tersine U da *(G,E)* kapalı soft bazı kümeler için *(F,E)* = $V \wedge$*(G,E)* olduğunu varsayalım. Bunun anlamı *(G, E)* $\in \tau$ olduğudur. (H,E) $\in \tau$ olmak üzere (G, E) = (U,E) \ (H,E) ise o zaman herhangi $\alpha \in$ E için

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) &= V(\alpha) \wedge G(\alpha) \\
&= V \wedge G(\alpha) \\
&= V \wedge (U(\alpha) \setminus H(\alpha)) \\
&= V \wedge (U \setminus H(\alpha)) \\
&= V \setminus H(\alpha) \\
&= V \setminus (V \wedge H(\alpha)) \\
&= V(\alpha) \setminus (V(\alpha) \wedge H(\alpha))
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (F,E) = $V \setminus (V \wedge(H,$ E)) dir. (H, E) $\in \tau$ olduğunda ($V \wedge$(H, E))$\in \tau_v$ olur ve (F,E), V de kapalı softtur.

3.1.10 Tanım

(U, τ_1) ve (U, τ_2) fuzzy soft topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakileri elde ederiz;

Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ ise τ_2, τ_1 den daha fuzzy soft incedir,

Eğer $\tau_2 < \tau_1$ ise τ_2, τ_1 den kesinlikle fuzzy soft kabadır,

Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ veya $\tau_2 \leq \tau_1$ ise τ_1, τ_2 ile karşılaştırılabilirdir.

3.1.11 Örnek

Örnek 3.2'de verilen F_A'nın soft alt kümelerini ele alalım. O zaman τ_2, τ_1 ve τ_3 den daha soft incedir, ve τ_3 , τ_1 den daha kabadır, böylece τ_1 ve τ_3 , τ_2 ile karşılaştırabilirdir.

3.1.12 Tanım

(U, τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $(\mathcal{B}, E)$, $P(U)$ üzerinde soft küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $\mathcal{B}(e)$, $\tau(e)$ nin alt koleksiyonu (e) için bir baz ise, o zaman $\mathcal{B}(U, E)$, $\tau(U, E)$ için soft baz olarak adlandırılır (Cagman 2011).

3.1.13 Örnek

Örnek 3.2 ve (2) ele alalım. O zaman $\mathcal{B} = \{F_\emptyset, F_{A1}, F_{A2}, F_{A4}, F_{A5}\}$, τ_2 soft topolojisi için soft bir baz olur.

3.1.14 Teorem

(U, τ) bir fuzzy soft topolojik uzay ve $\mathcal{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olan τ nun her elemanı için $\mathcal{B}$ de τ nun bir koleksiyonu olsun. O zaman U üzerindeki τ fuzzy soft topolojinin alt kümeleri için $\mathcal{B}$ fuzzy yumuşak baz olur.

İspat.

$\bar{U}$ soft fuzzy soft olmak üzere $\bar{\phi} \in \tau$, $\bar{\phi} \in \mathcal{B}$ ve $\bar{U} \in \tau$, $\bar{U} = \vee \mathcal{B}$ olduğundan $(f, A), (g, B) \in \mathcal{B}$ olsun. O zaman $(f, A), (g, B) \in \tau$ ve bu yüzden $(f, A) \wedge (g, B) \in \tau$ dir. $\mho$ indeks kümesi olmak üzere $(k, C)(\varepsilon) \in \mathcal{B}, \varepsilon \in \mho$ vardır öyle ki:

$$(f, A) \wedge (g, B) = \vee \{(k, C)(\varepsilon) \in \mathcal{B}, \varepsilon \in \mho\} .$$

Öyleyse,

$$(f, A)(e) \wedge (g, B)(e) = \vee \{((k, C)(\varepsilon))(e) \in \mathcal{B}, \varepsilon \in \mho\} \; for \; e \in E$$

dir. Yani $e \in E$ ve $u \in U$ için

$$min\{\mu_{(f,A)(e)}(u), \mu_{(g,B)(e)}(u)\} = max\{\mu_{((k,C)(\varepsilon))(e)}(u), \varepsilon \in \mho\}$$

olur. $\varepsilon \in \mho$ için

$$min\{\mu_{(f,A)(e)}(u), \mu_{(g,B)(e)}(u)\} = \mu_{((k,C)(\varepsilon))(e)}(u)$$

olur ve her $e \in E$ ve $u \in U$ için $(k, C)(\varepsilon) \in \mathcal{B}$ elde ederiz, öyle ki:

$$((k, C)(\varepsilon))(e) \leq (f, A) \wedge (g, B)$$

ve

$$min\{\mu_{(f,A)(e)}(u), \mu_{(g,G)(e)}(u)\} = \mu_{((k,C)(\varepsilon))(e)}(u)$$

dir. Böylece $\mathcal{B}$, U üzerinde fuzzy soft topoloji için fuzzy soft taban olur.

3.1.15 Tanım

(U, τ) bir fuzzy soft topolojik uzay ve (δ, E), $P(U)$ üzerinde soft küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $\delta(e)$, $\tau(e)$ nin bir alt koleksiyonu (e) için bir alt taban ise, o zaman $\delta(U, E)$ veya δ_E, $\tau(U, E)$ için soft alt taban olarak adlandırılır (Roy 2012).

3.1.16 Teorem

U üzerinde fuzzy soft kümelerin koleksiyonu δ_E, τ uygun fuzzy soft topolojisi için bir alt tabandır gerek ve yeter şart

1) $\phi \in \delta_E$ veya ϕ , δ_E sonlu sayıda elemanlarının kesişimidir,

2) $\overline{U} = \vee \, \delta_E$ (Roy 2012).

İspat.

δ_E, τ için bir alt taban ve $\mathcal{B}$ de δ_E tarafından üretilem bir taban olsun. Bu durumda $\phi \in \mathcal{B}$, $\phi \in \delta_E$ veya ϕ, ϕ nin sonlu birçok elemanın kesişimi olarak ifade edilebilir. Şimdi $x \in U$ ve $e \in E$ olsun. $\bar{U} = \vee \mathcal{B}$ olduğunda $h_A \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki $\mu_{(h,A)}(e)(x) = 1$ dir. $h_A \in \mathcal{B}$ olduğunda ise, $Z_{A_i}^i \in \delta_E$, $i = 1,2, \dots, n$ vardır öyle ki $h_A = \wedge_{i=1}^n Z_{A_i}^i$ olur, bu durumda $\mu_{(h,A)}(e)(x) = min_{i=1}^n Z_{A_i}^i(x)$ ve böylece bazı $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\mu_{(h,A)}(e)(x) = \mu_{Z_{A_i}^i}(e)(x)$ ve $\mu_{Z_{A_i}^i}(e)(x) = 1$ olur. Buradan $\bar{U} = \vee \delta_E$ dir. Tersine U üzerinde bazı fuzzy soft kümelerin koleksiyonu olan δ_E (1) ve (2) koşullarını sağlar. $\mathcal{B}$, δ_E nin elemanlarının bütün sonlu kesişimlerinin bir koleksiyonu olsun. Şimdi uygun fuzzy soft topolojinin $\mathcal{B}$ formlarının taban olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $\mathcal{B}$, δ_E nin elemanlarının bütün sonlu kesişimlerinin koleksiyonu olduğunda , (1) deki varsayımla $\phi \in \mathcal{B}$ ve (2) den de $\bar{U} = \vee \delta_E$ elde ederiz. Yeniden $(f, A), (g, B) \in \mathcal{B}$ ve $x \in U, e \in E$ olsun. $(f, A) \in \mathcal{B}$ olduğunda, $i = 1,2, \dots, n$ için $f_{A_i}^i \in \delta_E$ olur öyle ki $A = \wedge_{i=1}^n A_i$ olmak üzere $(f, A) = \wedge_{i=1}^n f_{A_i}^i$ dir. $(g, B) \in \mathcal{B}$ olduğunda da, $j = 1,2, \dots, m$ için $g_{A_j}^j \in \delta_E$ olur ve öyle ki $B = \wedge_{i=1}^n B_i$ olmak üzere $(g, B) = \wedge_{j=1}^m g_{A_i}^i$ dir. Bu durumda

$$(f, A) \wedge (g, B) = (\wedge_{i=1}^n f_{A_i}^i) \wedge (\wedge_{j=1}^m g_{A_i}^i)$$

olup $(f, A) \wedge (g, B) \in \mathcal{B}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.1.17 Önerme

(U, τ_1) ve (U, τ_2) , aynı U evrensel küme üzerinde fuzzy soft topolojik uzaylar olsun. O zaman $(U, \tau_1 \wedge \tau_2)$, U üzerinde soft topolojik uzaydır.

İspat.

1) $\emptyset, U \in \tau_1 \wedge \tau_2$ dir.

2) $\{ (F_i, E) ⁝ i \in I\}$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ de soft kümelerin ailesi olsun. O zaman $(F_i, E) \in \tau_1$ ve $(F_i, E) \in \tau_2$,her $i \in I$ için $\vee_{i\in I} (F_i, E) \in \tau_1$ ve $\vee_{i\in I} (F_i, E) \in \tau_2$ olur. Böylece $\vee_{i\in I} (F_i, E) \in \tau_1 \wedge \tau_2$ dir.

3) $(F, E), (G, E) \in \tau_1 \wedge \tau_2$ olsun. O zaman $(F, E), (G, E) \in \tau_1$ ve $(F, E), (G, E) \in \tau_2$ dir. $(F, E) \wedge (G, E) \in \tau_1$ ve $(F, E) \wedge (G, E) \in \tau_2$ olduğunda, $(F, E) \wedge (G, E) \in \tau_1 \wedge \tau_2$ olur. Bu nedenle $\tau_1 \wedge \tau_2$, U üzerinde farklı soft topoloji ve $(U, \tau_1 \wedge \tau_2)$, U üzerinde soft topolojik uzay olur.

U üzerinde iki soft topolojinin birleşimi, *U* üzerinde soft topoloji olmayabilir.

3.1.18 Örnek

$U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $(F_1, E), (F_2, E)$, $(F_3, E), (F_4, E)$, $(G_1, E), (G_2, E)$, (G_3, E) ve (G_4, E), *U* üzerinde soft kümeler olmak üzere $\tau_1 = \{\overline{\phi}, \overline{U}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ve $\tau_2 = \{\overline{\phi}, \overline{U}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$, U üzerinde iki soft topoloji aşağıdaki gibi tanımlanır:

$F_1(\alpha_1) = \{x_2\}$, $F_1(\alpha_2) = \{x_1\}$,
$F_2(\alpha_1) = \{x_2, x_3\}$, $F_2(\alpha_2) = \{x_1, x_2\}$,
$F_3(\alpha_1) = \{x_1, x_2\}$, $F_3(\alpha_2) = \overline{U}$,
$F_4(\alpha_1) = \{x_1, x_2\}$, $F_4(\alpha_2) = \{x_1, x_3\}$,
$G_1(\alpha_1) = \{x_2\}$, $G_1(\alpha_2) = \{x_1\}$,
$G_2(\alpha_1) = \{x_2, x_3\}$, $G_2(\alpha_2) = \{x_1, x_2\}$,
$G_3(\alpha_1) = \{x_1, x_2\}$, $G_3(\alpha_2) = \{x_1, x_2\}$,
$G_4(\alpha_1) = \{x_2\}$, $G_4(\alpha_2) = \{x_1, x_2\}$.

Şimdi

$\tau = \tau_1 \vee \tau_2 = \{\overline{\phi}, \overline{U}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$
şeklinde tanımlayalım. Eğer

$(F_2, E) \vee (G_3, E) = \{x_2, x_3\} \vee \{x_1, x_2\} = \overline{U}$

ve

$$H(\alpha_2) = F_2(\alpha_2) \vee G_3(\alpha_2) = \{x_1, x_2\} \vee \{x_1, x_2\} = \{x_1, x_2\}$$

alırsak fakat $(H, E) \notin \tau$ olmak üzere böylece τ, U üzerinde soft topoloji olmaz.

4. SOFT KÜMELER, FUZZY SOFT KÜMELER VE FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAY DÖNÜŞÜMÜ

4.1. Soft Küme Dönüşümü

4.1.1 Tanım

$(F\ ,A)$ ve $(G\ ,B)$ boştan farklı soft kümeler olsun. O zaman f, $(F\ ,A)$ dan (G,B) ye, etki alanındaki her öğenin aralıkta benzersiz bir öğesi varsa, bu f fonksiyonu soft küme fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer $(F\ ,A)f(G\ ,B)$ ise $f\big(F(a)\big) = G(b)$ yazabiliriz ve $f{:}\,(F\ ,A) \to (G,B)$ şeklinde gösteririz (Babitha 2010).

4.1.2 Örnek

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A = \{\propto_1, \propto_2, \propto_3, \propto_4\}$ ve $B = \{\beta_1, \beta_2\}$ olsun. $F(\propto_1) = \{x_1, x_2, x_5\}$, $F(\propto_2) = \{x_2, x_3, x_4\}$, $F(\propto_3) = \{x_1, x_2\}$, $F(\propto_4) = \{x_5, x_6\}$ and $G(\beta_1) = \{x_1, x_2\}$, $G(\beta_2) = \{x_2, x_5\ , x_6\}$ tarafından tanımlanan $(F\ ,A)$ ve $(G\ ,B)$ soft kümeleri ele alalım. O zaman f soft küme fonksiyonu $(F\ ,A)$ dan (G,B) ye olmak üzere

$$f = \{F(\propto_1) \times\ G(\beta_1), F(\propto_2) \times G(\beta_1), F(\propto_3) \times G(\beta_2), F(\propto_4) \times G(\beta_2)\}$$

şeklinde verilir.

4.1.3 Tanım

$f{:}\,(F\ ,A) \to (G,B)$ fonksiyonu, eğer $f\big(F(a_1)\big) = G(b_1)\ and\ f\big(F(a_2)\big) =\ G(b_2)$ olmak üzere $F(a_1) \neq F(a_2)$ iken $f(F(a_1)) \neq f(F(a_2))$ ise birebir soft küme olarak adlandırılır. Örneğin, $ran\, f$ nin her elemanı fonksiyonda tam olarak bir kez görünüyorsa ve $(F\ ,A)$, $(G\ ,B)$ iki soft küme olduğunda f birebirdir denir (Babitha 2010).

4.1.4 Tanım

$f:(F\ ,A) \to (G,B)$ fonksiyonu eğer $ran\ f = (G\ ,B)$ ise örten soft küme olarak adlandırılır (Babitha 2010).

4.1.5 Tanım

Eğer f fonksiyonu hem birebir hem de örten fonksiyon ise $f:(F\ ,A) \to (G,B)$ fonksiyonu bijective soft küme fonksiyonu olarak adlandırılır.
Örnek 4.2'de $A = \{\propto_1, \propto_3\}$ aldığımızda

$$f = \{F(\propto_1) \times\ G(\beta_1), F(\propto_3) \times G(\beta_2)\}$$

şeklinde tanımlanan $(F\ ,A)$ dan $(G\ ,B)$ ye f fonksiyonu bijective fonksiyon olur.

4.1.6 Tanım

Aynı görüntüye sahip $dom\ \ f$ 'in her elemanı için $f:(F\ ,A) \to (G,B)$ şeklinde verilen fonksiyon sabit soft küme fonksiyonu olarak adlandırılır. Örneğin, $A = \{\propto_1, \propto_2\}$ $B = \{\beta_1, \beta_2\}$ olsun. $(F\ ,A)$ dan (G,B) ye $G(\beta_1) = G(\beta_2) = k$ olmak üzere

$$f = \{F(\propto_1) \times G(\beta_1), F(\propto_2) \times G(\beta_2)\}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu sabit fonksiyondur (Babitha 2010).

4.1.7 Tanım

$(F\ ,A)$ daki her $F(a)$ için $f:(F\ ,A) \to (F\ ,A)$ şeklinde verilen dönüşümde $f(F(a)) = F(a)$ oluyorsa, f fonksiyonuna özdeşlik soft küme fonksiyonu denir ve I ile gösterilir.
Örneğin $A = \{\propto_1, \propto_2\}$ aldığımızda o zaman $(F\ ,A)$ dan (F,A) ye

$$f = \{F(\propto_1) \times\ F(\propto_1), F(\propto_2) \times F(\propto_2)\}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu özdeşlik soft küme fonksiyonu olur (Babitha 2010).

4.1.8 Teorem

$f:(F\ ,A) \to (G,B)$ bir soft küme fonksiyonu ve $(F,A_1),(F,A_2)$ de $(F\ ,A)$ nın soft alt kümeleri olsun. O zaman

i) $(F,A_1) \leq\ (F,A_2) \Rightarrow f(F,A_1) \leq f(F,A_2)$,
ii)$f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ] = f(F,A_1) \vee f(F,A_2)$,
iii) $f[(F,A_1\ ) \wedge (F,A_2\ )] \leq f(F,A_1) \vee f(F,A_2)$, f birebir ise eşitlik kullanılır.

İspat.

i) G(b)∈ $f\,(F,A_1)$ olsun. O zaman
G(b)= f (F(a)) ((F,A_1) daki bazı F(a) için)
= f (F(a)) ((F,A_2) daki bazı F(a) için). $(F,A_1) \leq\ (F,A_2)$ olduğunda
G(b)∈ $f\,(F,A_2)$ için $f(F,A_1) \leq f(F,A_2)$ olur.

ii) G(b)∈ $f[(F,A_1) \vee (F,A_2)]$ olsun. O zaman
G(b)= f (F(a)) ($(F,A_1) \vee (F,A_2)$ deki bazı F(a) için)
= f (F(a)) ((F,A_1) daki F(a) veya (F,A_2) daki F(a) için)
$\Rightarrow\ G(b) \in (F,A_1)$ veya $G(b) \in\ (F,A_2)$
$\Rightarrow\ G(b) \in (F,A_1) \vee\ (F,A_2)$

$$f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ] \leq f(F,A_1) \vee f(F,A_2). \tag{4.1}$$

Açıkca $(F,A_1) \leq (F,A_1) \vee (F,A_2)$ ve
$(F,A_2) \leq (F,A_1) \vee (F,A_2)$
olur. O zaman $f(F,A_1) \leq f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ]$,
$f(F,A_2) \leq f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ]$

$$f(F,A_1) \vee f(F,A_2) \leq\ f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ]. \tag{4.2}$$

Eşitlik 4.1 ve eşitlik 4.2'den, $f[(F,A_1) \vee (F,A_2)\ ] = f(F,A_1) \vee f(F,A_2)$ elde ederiz.

iii) G(b)∈ $f[(F,A_1\ ) \wedge (F,A_2\ )]$ olsun. O zaman
G(b)= f (F(a)) ($(F,A_1) \wedge (F,A_2)$ daki bazı F(a) için)

= f(F(a)) (F(a) $\in (F, A_1)$ ve F(a) $\in (F, A_2)$ için)

$\Longrightarrow\ G(b) \in (F, A_1)$ ve $G(b) \in\ (F, A_2)$

$\Longrightarrow\ G(b) \in (F, A_1) \wedge (F, A_2)$

$\therefore\ f[(F, A_1) \wedge (F, A_2)\,] \leq f(F, A_1) \wedge f(F, A_2)$.

Tersine $G(b) \in (F, A_1) \wedge (F, A_2)$ olduğunu varsayalım,

$\Longrightarrow\ G(b) \in (F, A_1)$ ve $G(b) \in\ (F, A_2)$

$G(b) = f$(F(a_1)) (bazı F(a_1)$\in (F, A_1)$ için)

= f(F(a_2)) (F(a_2) $\in (F, A_2)$ için).

Şimdi f(F(a_1)) = f(F(a_2)) $= G(b)$ aldığımızda

$$\mathrm{F}(a_1) = \mathrm{F}(a_2)$$

olur. Eğer f birebir ise

$$G(b) \in f[(F, A_1) \wedge (F, A_2)\,]$$

olup $f[(F, A_1\ ) \wedge (F, A_2\ )] = f(F, A_1) \wedge f(F, A_2)$ elde edilir.

4.1.9 Tanım

$f\colon (F\ , A) \to (G, B)$, $g\colon (G\ , B) \to (H, C)$ iki soft küme fonksiyonu olsunlar. O zaman $g \circ f\colon (F, A) \to (H, C)$ soft küme fonksiyonu olur ve $(g \circ f)\big(F(a)\big) = g(f\big(F(a)\big))$ şeklinde tanımlanır.

4.1.10 Teorem

$f\colon (F\ , A) \to (G, B)$, $g\colon (G\ , B) \to (H, C)$ iki bijective soft küme fonksiyonu olsun. Bu durumda $g \circ f\colon (F, A) \to (H, C)$ dönüşümü de bijective soft kümedir ve

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ olur.

İspat.

F(a_1) ve F(a_2), $(F\ , A)$ nın iki farklı elemanı olsun. Bu durumda f birebir soft küme olduğunda F(a_1) $\neq$ F(a_2)

$\Longrightarrow f\big(F(a_1)\big) \neq f\big(F(a_2)\big)$ ve durumda g birebir soft küme olduğunda da

$\Longrightarrow g(f\big(F(a_1)\big)) \neq g(f\big(F(a_2)\big))$ olup

$\Longrightarrow (g \circ f)\big(F(a_1)\big) \neq (g \circ f)\ \big(F(a_2)\big).$

Bundan dolayı $g \circ f$ birebirdir. (4.3)

$H(c)$,(H, C) nin bir elemanı olsun. Bu durumda (G, B) de G(b) vardır öyle ki g örten olduğundan $g\big(G(b)\big) = H(c)$ dır. f örten olduğunda da (F, A) da $F(a)$ vardır öyle ki $f\big(F(a)\big) = G(b)$ dir. O zaman (H, C) deki her $H(c)$ için $g\Big(f\big(F(a)\big)\Big) = H(c)$ olup $(g \circ f)\big(F(a)\big) = H(c)$ olur.

Bundan dolayı $g \circ f$ örtendir. (4.4)

Eşitlik 4.3 ve eşitlik 4.4'den $g \circ f$ nin bijective soft küme olduğunu elde ederiz.

4.1.11 Tanım

f, $(F\ , A)$ dan (G, B) ye birebir örten soft küme fonksiyonu olsun. Bu durumda f^{-1} ters sof küme fonksiyonu olarak adlandırılır (Babitha 2010).

4.1.12 Teorem

Eğer $f{:}\,(F\ , A) \rightarrow (G, B)$ bijective soft küme ise, o zaman $f^{-1}{:}\,(G, B) \rightarrow (F, A)$ ters soft küme fonksiyonu da bijective soft küme fonksiyonu olur.

İspat.

(G, B) deki $G(b_1), G(b_2)$ için $G(b_1) \neq G(b_2)$,

$f^{-1}\big(G(b_1)\big) = F(a_1)$ ve $f^{-1}\big(G(b_2)\big) = F(a_2)$ olsun. O zaman $f\big(F(a_1)\big) = G(b_1)$ ve $f\big(F(a_2)\big) = G(b_2)$ için $f\big(F(a_1)\big) \neq f\big(F(a_2)\big)$ olup, f birebir olduğunda F$(a_1) \neq$ F(a_2) ve $f^{-1}\big(G(b_1)\big) \neq f^{-1}\big(G(b_2)\big)$ olur. Bundan dolayı f^{-1} birebirdir. Şimdi $F(a)$, $(F\ , A)$ nin bir elemanı olsun. f örten soft küme olduğunda (G, B) de bir tek $G(b)$ elemanı vardır öyle ki $f\,(F$(a)) =G(b) olup F$(a) = f^{-1}\big(G(b)\big)$ olur. Böylece f^{-1} örtendir ve bijective soft kümedir.

4.2. Fuzzy Soft Küme Dönüşümü

4.2.1 Tanım

E ve F sırasıyla U ve V kümeleri için parametre kümeleri olmak üzere $\varphi : U \to V$ ve $\psi: E \to K$ iki dönüşüm olsun. Bu durumda φ_ψ, (U, E) dan (V, K) ya fuzzy soft dönüşüm olarak adlandırılır ve $\varphi_\psi: (U, E) \to (V, K)$ şeklinde gösterilir (Simsekler 2019).

4.2.2 Tanım

f_A ve g_B sırasıyla U ve V üzerinde iki fuzzy soft kümeler ve φ_ψ de (U, E) den (V, K) ya fuzzy soft dönüşüm olsun.
1) f_A nın görüntüsü φ_ψ fuzzy soft dönüşümü altında, $\varphi_\psi(f_A)$ şeklinde gösterilir ve her $k \in K$ için

$$\varphi_\psi(f_A)_k(v) = \begin{cases} V_{\varphi(u)=v}\, V_{\psi(\mathrm{e})=\mathrm{k}}\, f_{A(e)(u);} if\ \varphi^{-1}(v) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k) \neq \emptyset; \\ 0\,, \qquad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır .
2) g_B nin ters görüntüsü φ_ψ fuzzy soft dönüşümü altında, ${\varphi_\psi}^{-1}\,(g_B)$ şeklinde gösterilir ve her $e \in E$ ve her $u \in U$ için

$${\varphi_\psi}^{-1}\,(g_B)(e)(u) = g_B\big(\psi(\mathrm{e})\big)\big(\,\varphi(u)\big)$$

şeklinde tanımlanır (Simsekler 2019).

4.2.3 Örnek

$U = \{a, b, c\}$, $V = \{x, y, z\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $K = \{k_1\,, k_2, k_3\}$ ve (U, E), (V, K) fuzzy soft kümeler olsun. $\varphi : U \to V$ ve $\psi: E \to K$ dönüşümleri $\varphi(a) =$

z , $\varphi(b) = y$, $\varphi(c) = y$, $\psi(e_1) = k_1$, $\psi(e_2) = k_1$, $\psi(e_3) = k_3$, $\psi(e_4) = k_2$ şeklinde tanımlansın.

(U, E) ve (V, K) dan sırasıyla aşağıdaki gibi iki fuzzy soft küme seçelim:

$$(H, N) = \{e_1 = \{a_{0.5}, b_0, c_{0.8}\}, e_2 = \{a_{0.1}, b_{0.9}, c_{0.5}\}, e_4 = \{a_{0.4}, b_{0.3}, c_{0.6}\}\},$$
$$(L, M) = \{f_1 = \{x_{0.3}, y_{0.5}, z_{0.1}\}, f_2 = \{x_{0.9}, y_{0.1}, z_{0.5}\}, \}, f_3 = \{x_{0.7}, y_{0.5}, z_{0.6}\}.$$

Bu durumda (H, N) nin fuzzy küme görüntüsünü $\varphi_\psi : (U, E) \to (V, K)$ dönüşümü altında aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\varphi_\psi(H, N)(f_1)(x) = \vee_{s\in\varphi^{-1}(x)} \left(\vee_{\propto\in\psi^{-1}(f_1)\cap N} H(\propto) \right)(s) = 0, \; (as \;\; \varphi^{-1}(x) = \emptyset)$$
$$\varphi_\psi(H, N)(f_1)(y) = \vee_{s\in\varphi^{-1}(y)} \left(\vee_{\propto\in\psi^{-1}(f_1)\cap N} H(\propto) \right)(s)$$
$$= \vee_{s\in\{b,c\}} \left(\vee_{\propto\in\{e_1,e_2\}} H(\propto) \right)(s)$$
$$= \vee_{s\in\{b,c\}} \left(H(e_1) \vee H(e_2) \right)(s)$$
$$= \vee_{s\in\{b,c\}} \left(\{a_{0.5}, b_{0.9}, c_{0.8}\} \right)(s)$$
$$= \vee (0.9, 0.8) = 0.9,$$
$$\varphi_\psi(H, N)(f_1)(z) = 0.5.$$

Benzer hesaplamalarla, sonuç olarak

$$\varphi_\psi((H, N), M) = \{k_1 = \{x_0, y_{0.9}, z_{0.5}\}, k_2 = \{x_0, y_{0.6}, z_{0.4}\}, k_3 = \{x_0, y_0, z_0\}\}$$

elde ederiz. $\psi(e_i) \in M, i = 1,2,4$ için hesaplama yaptığımızda

$$\varphi_\psi{}^{-1}(L, M)(e_1)(a) = L(\psi(e_1))(\varphi(a)) = L(k_1)(z)$$
$$= (\{x_{0.3}, y_{0.5}, z_{0.1}\}) = 0.1$$
$$\varphi_\psi{}^{-1}(L, M)(e_1)(b) = L(\psi(e_1))(\varphi_\Psi(b)) = L(k_1)(y)$$
$$= (\{x_{0.3}, y_{0.5}, z_{0.1}\}) = 0.5$$
$$\varphi_\psi{}^{-1}(L, M)(e_1)(c) = 0.5$$

$$\varphi_{\psi}{}^{-1}(L,M) = \big\{\{e_1 = \{a_{0.1}\,, b_{0.5}, c_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.1}\,, b_{0.5}, c_{0.5}\},$$
$$e_3 = \{a_{0.6}\,, b_{0.5}, c_{0.5}\}, e_4 = \{a_{0.5}\,, b_{0.1}, c_{0.1}\}\,\}\big\}$$

elde ederiz.

4.2.4 Tanım

Eğer φ ve ψ birebir ve örten iseler, bu durumda φ_{Ψ} fuzzy soft dönüşümü birebir ve örtendir. Eğer φ_{ψ} hem birebir hem de örten ise, bu durumda bijective olarak adlandırılır (Simsekler 2019).

4.2.5 Teorem

$\varphi : U \to U$ ve $\psi: E \to E$ özdeşlik dönüşümleri ise, bu durumda I özdeşlik fuzzy soft fonksiyon olarak adlandırılır ve bu fonksiyon fuzzy soft süreklidir.
(Simsekler 2019).

4.2.6 Tanım

$(\psi_1\,, \varphi_1)$, (U, E) den (V, K) ya fuzzy soft dönüşüm ve $(\psi_2\,, \varphi_2)$ de (V, K) den (W, H) ya bir fuzzy soft dönüşüm olsun. Bu durumda bu dönüşümlerin birleşimi (U, E) den (W, H) ya aşağıdaki gibi tanımlanır (Simsekler 2019):

$$(\psi_2\,, \varphi_2) \circ (\psi_1\,, \varphi_1) = (\psi_2 \circ \psi_{1\,,}, \varphi_2 \circ \varphi_1).$$

4.3. Fuzzy Soft Topolojik Uzay Dönüşümü

4.3.1 Tanım

(U, τ_1, E) ve (V, τ_2, E) iki fuzzy soft topolojik uzay ve $f: (U, \tau_1, E) \to (V, \tau_2, E)$ de her $(G, E) \in \tau_2\,, if\; f^{-1}(G, E) \in \tau_1$ için bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$f: (U, \tau_1, E) \rightarrow (V, \tau_2, E)$, fuzzy soft topolojik uzayların fuzzy soft sürekli küme dönüşümü denir (Zorlutuna 2016).

4.3.2 Önerme

Eğer $f: (U, \tau_1, E) \rightarrow (V, \tau_2, E)$ dönüşümü fuzzy soft sürekli dönüşüm ise, bu durumda $\forall \alpha \in E, \quad f: (U, \tau_{1\alpha}) \rightarrow (V, \tau_{2\alpha})$ fuzzy sürekli dönüşümdür.

İspat.

$A \in \tau_{2\alpha}$ olsun. Bu durumda V üzerinde (G, E) fuzzy soft açık kümesi vardır öyle ki $A = G(\alpha)$ dir. $f: (U, \tau_1, E) \rightarrow (V, \tau_2, E)$ olduğunda fuzzy soft sürekli dönüşüm ve $f^{-1}(G, E)$, U üzerinde fuzzy soft açık küme ve $f^{-1}(G, E)(\alpha) = f^{-1}G(\alpha) = f^{-1}(A)$ fuzzy soft açık küme olur. Bu ise, bunun fuzzy sürekli dönüşüm olduğu anlamına gelir.

4.3.3 Önerme

(U, τ_1, E_1), (V, τ_2, E_2) ve (W, τ_3, E_3) soft topoloji uzayları olsun. Eğer $(\psi_1, \varphi_1): (U, \tau_1, E_1) \rightarrow (V, \tau_2, E_2)$ ve $(\psi_2, \varphi_2): (V, \tau_2, E_2) \rightarrow (W, \tau_3, E_3)$ soft sürekli fonksiyonlar ise, bunların birleşimi de

$$(\psi_2, \varphi_2) \circ (\psi_1, \varphi_1) = (\psi_2 \circ \psi_1, \varphi_2 \circ \varphi_1)$$

soft süreklidir.

İspat.

Her $e_1 \in E_1$ için (ψ_1, φ_1) soft sürekli olduğunda ve her $e_2 = \psi(e_1) \in E_2$ için $\varphi_1: (\mathrm{U}, \tau_1(\mathrm{e}_1)) \rightarrow (\mathrm{V}, \tau_2(\mathrm{e}_2)))$ süreklidir, her $e_2 \in E_2$ ve $e_3 = \psi(e_2) \in E_3$ için (ψ_2, φ_2) sürekli olduğunda $\varphi_2: (\mathrm{U}, \tau_2(\mathrm{e}_2))) \rightarrow (\mathrm{V}, \tau_3(\mathrm{e}_3)))$ süreklidir. Bundan dolayı $(\varphi_2 \circ \varphi_1)$ sürekli olup $(\psi_2, \varphi_2) \circ (\psi_1, \varphi_1)$ soft süreklidir.

4.3.4 Önerme

(U, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda *(U,τ)*'den başka bir fuzzy topolojik uzaya giden her sabit fonksiyon, ancak ve ancak τ, *U*'daki tüm sabit fuzzy kümeleri içeriyorsa, fuzzy süreklidir.

İspat.

Varsayalım ki, herhangi fuzzy topolojik uzaydaki *(U,τ)* den her sabit fonksiyon fuzzy sürekli ve $[0,1]$ üzerindeki σ fuzzy topolojisi $\sigma = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \mathrm{I}_{[0,1]}\}$ şeklinde tanımlansın. k, $0 \leq k \leq 1$ aralığında reel sayı olsun. $f(u) = k, \forall u \in U$ şeklinde tanımlanan $f: U \rightarrow [0,1]$ sabit fonksiyon fuzyy sürekli ve bu yüzden $f^{-1}(\mathrm{I}_{[0,1]}) \in \tau$dir. Fakat $u \in U$ için, $k\ in\ U \in \tau$ sabit fuzzy kime olmak üzere $f^{-1}(\mathrm{I}_{[0,1]})(u) = \mathrm{I}_{[0,1]}(f(u)) = \mathrm{I}_{[0,1]}(k) = k$ olur. Tersine, τ'nun *U*'daki tüm sabit bulanık kümeleri içerdiğini varsayalım ve $f(u) = \mathrm{v}_0$ şeklinde tanımlanan $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ sabit fonksiyonu göz önüne alalım. Eğer $v \in \sigma$ ise bu durumda herhangi $u \in U$ için $f^{-1}(v)(u) = v(f(u)) = v(\mathrm{v}_0)$ elde ederiz, böylece $f^{-1}(v)$, *U* da sabit fuzzy kümedir. Sonuç olarak *f* fuzzy süreklidir.

5. KARTEZYEN ÇARPIMI VE FUZZY SOFT KÜMELERDE AYIRMA AKSİYOMLARI

5.1. Soft Kümelerin Kartezyen Çarpımı

5.1.1 Tanım

(f, E_1) ve (g, E_2) iki fuzzy soft kümeler olmak üzere $(f, E_1) \in (U, E_1)$ ve $(g, E_2) \in (V, E_2)$ olsun. $(f, E_1) \times (g, E_2)$ fuzzy çarpımı $(f \times g)_{E_1 \times E_2}$ şeklinde gösterilir ve

$$(f \times g)_{E_1 \times E_2}(e_1, e_2) = (f, E_1)(e_1) \times (g, E_2)(e_2) \in I^U \times I^V \subseteq I^{U \times V}$$

şeklinde tanımlanır. Her $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ ve her $(u, v) \in U \times V$ için

$$\big((f, E_1)(e_1) \times (g, E_2)(e_2)\big)(u, v) = (f, E_1)(e_1)(u) \wedge (g, E_2)(e_2)(v)$$
$$= min\{f_{e_1}(u), g_{e_2}(v)\}$$

dir (Varol 2012).

Not.

U_{E_1} ve V_{E_2} iki fuzzy soft kümeler olsun. Bu durumda

$$(U, E_1) \times (V, E_2) = \{(f, E_1) \times (g, E_2): (f, E_1) \in (U, E_1), (g, E_2) \in (V, E_2)\}$$

eşitliği (U, E_1) ve (V, E_2) fuzzy soft kümelerin fuzzy yumuşak Kartezyen çarpımı olarak adlandırılır.

5.1.2 Örnek

"Arabaların değeri" olarak tanımlanan (F, A) soft kümesini ve "Arabaların çekiciliği" olarak tanımlanan (G,B) soft kümesini ele alalım.

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ olmak üzere $A = \{\text{pahalı, ortalama, ucuz}\}$, $B = \{\text{yeni, iyi durumda, kötü durumda}\}$ ve

$F(\text{pahalı}) = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$,
$F(\text{ortalama}) = \{x_2, x_4, x_6\}$,
$F(\text{ucuz}) = \{x_8, x_9, x_{10}\}$,
$G(\text{yeni}) = \{x_1, x_4, x_7\}$,
$G(\text{iyi durumda}) = \{x_5, x_6, x_8\}$,
$G(\text{kötü durumda}) = \{x_2, x_3, x_9, x_{10}\}$,

olsun. Şimdi $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$ tipik bir eleman olmak üzere

$$H(\text{pahalı, yeni}) = \{x_1, x_3, x_5, x_7\} \times \{x_1, x_4, x_7\}$$
$$= \left\{\begin{matrix} (x_1, x_1), (x_1, x_4), (x_1, x_7), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_5, x_1), (x_5, x_4), \\ (x_5, x_7), (x_7, x_1), (x_7, x_4), (x_7, x_7) \end{matrix}\right\}$$

şeklinde elde edilir.

5.1.3 Önerme

Eğer A, U nun fuzzy kümesi ve B de V nin fuzzy kümesi ise bu durumda

$$1 - (A \times B) = (A^c \times 1) \vee (1 \times B^c)$$

dir (Palaniappan 2002).

İspat.

Her $(u, v) \in U \times V$ için
$$\begin{aligned}\big(1 - (A \times B)\big)(u, v) &= \max\big(1 - A(u), 1 - B(v)\big) \\ &= \max\,((A^c \times 1)(u, v)\,, (1 \times B^c))(u, v) \\ &= \big((A^c \times 1) \vee (1 \times B^c)\big)(u, v)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.1.4 Önerme

$f_i: U_i \rightarrow V_i$ bir dönüşüm ve A_i de $, i = 1,2, \ldots$ olmak üzere V_i nin fuzzy kümeleri olsun. Bu durumda $(f_1 \times f_2)^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(A_2)$ dir (Palaniappan 2002).

İspat.

Her $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$ için

$$\begin{aligned}(f_1 \times f_2)^{-1}(A_1 \times A_2) &= (A_1 \times A_2)\big(f_1(u_1), f_2(u_2)\big) \\ &= min\,\big(A_1 f_1(u_1), A_2 f_2(u_2)\big) \\ &= \min\big(f_1^{-1}\,(A_1)(u_1), f_2^{-1}\,(A_2)(u_2)\big) \\ &= \big(f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(A_2)\big)(u_1, u_2)\end{aligned}$$

elde edip, ispatı tamamlamış oluruz.

5.1.5 Önerme

$g: U \rightarrow U \times V$, $f: U \rightarrow V$ dönüşümünün bir eğrisi, A, U nun fuzzy kümesi ve B de V nin fuzzy kümesi olsun, bu durumda $g^{-1}(A \times B) = A \wedge f^{-1}(B)$ olur (Palaniappan 2002).

İspat.

Her $u \in U$ için

$$\begin{aligned}g^{-1}(A \times B)(u) = (A \times B)g(u) &= (A \times B)\big(u, f(u)\big) \\ &= \min\,(A(u), B\big(f(u)\big) = \big(A \wedge f^{-1}(B)\big)(u)\end{aligned}$$

elde ederiz.

5.1.6 Önerme

Varsayalım ki $(f, E_1) \in (U, E_1)$ ve $(g, E_2) \in (\mathrm{V}, \mathrm{E}_2)$ olsun, bu durumda aşağıdakilerden biri vardır:

1) $(f, E_1) \times (\Phi, E_2) = (\Phi, E_1) \times (g, E_2) = \Phi_{E_1 \times E_2}$

2) $[(f_1, E_1) \wedge (f_2, E_1)] \times [(g_1, E_2) \wedge (g_2, E_2)] = [(f_1, E_1) \times (g_1, E_2)] \wedge [(f_2, E_1) \times (g_2, E_2)]$ (Khameneh 2013).

İspat.

1) $\Phi_{E_1} = (\Phi_1, E_1)$ ve $\Phi_{E_2} = (\Phi_2, E_2)$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned}(f_1 \times \Phi_2)(e_1, e_2) &= f_1(e_1) \times \Phi_2(e_2) \\ &= f_1(e_1) \times \phi = \phi \\ &= \phi \times f_2(e_2) \\ &= \Phi_1(e_1) \times f_2(e_2) \\ &= (\Phi_1 \times f_2)(e_1, e_2)\end{aligned}$$

elde ederiz.

2) $(u, v) \in U \times V$ ve $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned}&[(f_1 \wedge f_2) \times (g_1 \wedge g_2)]_{(e_1, e_2)}(u, v) \\ &= \min\{(f_1 \wedge f_2)_{(e_1, e_2)}(u), (g_1 \wedge g_2)_{(e_1, e_2)}(v)\} \\ &= min\left\{min\left\{f_{1_{e_1}}(u), f_{2_{e_2}}(v)\right\}, min\left\{g_{1_{e_1}}(u), g_{2_{e_2}}(v)\right\}\right\} \\ &= min\left\{min\left\{f_{1_{e_1}}(u), g_{1_{e_1}}(v)\right\}, min\left\{f_{2_{e_2}}(u), g_{2_{e_2}}(v)\right\}\right\} \\ &= min\left\{f_{1_{e_1}}(u) \times g_{1_{e_1}}(v), f_{2_{e_2}}(u) \times g_{2_{e_2}}(v)\right\} \\ &= [(f_1 \times g_1) \wedge (f_2 \times g_2)]_{(e_1, e_2)}(u, v)\end{aligned}$$

olur.

5.1.7 Tanım

(U, E_1, τ) ve $(V, E_2, \grave{\tau})$ iki fuzzy soft topolojik uzaylar ve $\beta = \{(f_1, E_1) \times (g, E_2) : (f, E_1) \in \tau, (g, E_2) \in \grave{\tau}\}$ da $\tau^{\times}$ fuzzy soft topolojinin üreteci olsun. Bu durumda $\tau^{\times}$, $U \times V$ üzerinde fuzzt soft çarpım topolojisi olarak adlandırılır. $W = U \times V$ ve $E = E_1 \times E_2$ olmak üzere bu yeni topoloji $(W, E, \tau^{\times})$ şeklinde gösterilir (Khameneh 2013).

5.1.8 Önerme

(F, E_1) ve (G, E_2), (U, E_1) ve (V, E_2) de sırasıyla iki soft küme olsun. Bu durumda

$$\big((F, E_1) \times (G, E_2)\big)^c = ((F \times E_1)^c \times V) \vee (U \times (G, E_2)^c)$$

olur (Peyghan 2013).

İspat.

$(F \times G, E_1 \times E_2)^c = ((F \times G)^c, E_1 \times E_2)$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned}(F \times G)^c(e_1, e_2) &= (U \times V) - \big(F(e_1) \times G(e_2)\big) \\ &= \big[\big(U - F(e_1)\big) \times V\big] \vee \big[U \times \big(V - G(e_2)\big)\big]\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$((F, E_1)^c \times V) \vee (U \times (G, E_2)^c) =$$
$$(F^c \times V, E_1 \times E_2) \vee (U \times G^c, E_1 \times E_2)$$

dır. Bu soft kümeyi $(H, E_1 \times E_2)$ şeklinde gösterelim. O zaman

$$H(e_1, e_2) = (F^c \times V)(e_1, e_2) \vee (U \times G^c)(e_1, e_2)$$

$$= (F^c(e_1) \times V) \vee \big(U \times G^c(e_2)\big)$$
$$= \Big((U - F(e_1) \times V) \vee \Big(U \times \big(V - G(e_2)\big)\Big)\Big)$$

elde ederiz.

5.2. Fuzzy Soft Kümelerde Ayırma Aksiyomları

5.2.1 Tanım

Varsayalım ki (U, τ, E), U üzerinde fuzzy soft topolojik uzay olmak üzere $e_K, e_H \in (U, \tau, E)$ iki soft nokta olsun ($e_K \neq e_H$). Eğer $\exists\ (F, E)\ ve\ (G, E)$ iki fuzzy açık küme ise: $e_K, \in (F, E), e_H \notin (F, E)$ veya $e_H \in (G, E), e_K \notin (G, E)$, bu dururmda (U, τ, E) ye fuzzy soft T_{0-} uzayı denir (Hussain 2015).

5.2.2 Tanım

Varsayalım ki (U, τ, E), U üzerinde fuzzy soft topolojik uzay olmak üzere $e_K, e_H \in (U, \tau, E)$ iki soft nokta olsun ($e_K \neq e_H$). Eğer $\exists\ (F, E)\ ve\ (G, E)$ iki fuzzy açık küme ise: $e_K, \in (F, E), e_H \notin (F, E)$ ve $e_H \in (G, E), e_K \notin (G, E)$, bu dururmda (U, τ, E) ye fuzzy soft T_{1-} uzayı denir (Hussain 2015).

5.2.3 Tanım

Varsayalım ki (U, τ, E), U üzerinde fuzzy soft topolojik uzay olmak üzere $e_K, e_H \in (U, \tau, E)$ iki soft nokta olsun ($e_K \neq e_H$). Eğer $\exists\ (F, E)\ ve\ (G, E)$ iki fuzzy açık küme ise: $e_K, \in (F, E)$, $e_H \in (G, E)$ ve $(F, E) \cap (G, E) = \breve{\varphi}$, bu dururmda (U, τ, E) ye fuzzy soft T_{2-} uzayı denir (Hussain 2015).

5.2.4 Önerme

i) Her soft T_1 –uzayı, soft T_0 –uzayıdır,
ii) Her soft T_2 –uzayı, soft T_1 –uzayıdır (Hussain 2015).

İspat.

Varsayalım ki (U,τ,E), U üzerinde fuzzy soft topolojik uzay olmak üzere $e_K, e_H \in (U,\tau,E)$ iki soft nokta olsun ($e_K \neq e_H$).

i) Eğer (U,τ,E), soft T_1 –uzayı ise bu durumda, $\exists$ (F,E) ve (G,E) iki fuzzy açık küme : $e_K, \in (F,E)$ ve $e_H \notin (F,E)$ ve $e_H \in (G,E)$ ve $e_K \notin (G,E)$ dir. Belli ki o zaman $e_K \in (F,E)$ ve $e_H \notin (F,E)$ veya $e_H \in (G,E)$ ve $e_K \notin (G,E)$ elde ederiz, böylece (U,τ,E) soft T_0 –uzayı olur.

ii) Eğer (U,τ,E), soft T_2 –uzayı ise bu durumda, $\exists$ (F,E) ve (G,E) iki fuzzy açık küme ise: $e_K \in (F,E)$ ve $e_H \in (G,E), (e_K \neq e_H)$)ve $(F,E) \cap (G,E) = \breve{\varphi}$, $(F,E) \cap (G,E) = \breve{\varphi}$ olduğunda, bu nedenle $e_K \notin (G,E)$ ve $e_H \notin (F,E)$ olup, (U,τ,E) soft T_1 –uzayı olur.

Her soft T_1 –uzayı soft T_0 –uzayı ve her soft T_2 –uzayı da soft T_1 –uzayıdır.

5.2.5 Örnek

$F_1(e_1) = \widetilde{U}$, $F_1(e_2) = \{u_2\}$,
$F_2(e_1) = \{u_1\}$, $F_2(e_2) = \widetilde{U}$,
$F_3(e_1) = \{u_1\}$, $F_3(e_2) = \{u_2\}$,

olmak üzere $U = \{u_1, u_2\}, E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\breve{\varphi}, \widetilde{U}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)\}$ olsun. O zaman (U,τ,E), U üzerinde soft topolojik uzaydır. Hatta (U,τ,E), U üzerinde soft T_1 –uzayıdır fakat soft T_2 –uzayı değildir. Çünkü $u_1, u_2 \in U$ ve U da (F,E) ve (G,E)

gibi herhangi açık küme yoktur öyle ki $u_1 \in (F,E)$, $u_2 \in (G,E)$ ve $(F,E) \cap (G,E) = \breve{\varphi}$ dir. Şimdi U üzerinde aşağıdaki soft topolojiyi ele alalım;

$F_1(e_1) = \widetilde{U},\ F_1(e_2) = \{u_2\}$ olmak üzere $\tau = \{\breve{\varphi}, \widetilde{U}, (F_1, E)\}$.

O zaman (U,τ,E), U üzerinde soft topolojik uzaydır. Hatta (U,τ,E), U üzerinde soft T_0 –uzayıdır fakat soft T_1 –uzayı değildir. Çünkü $u_1, u_2 \in U$ fakat (F,E) ve (G,E) gibi herhangi açık küme yoktur öyle ki $u_1 \in (F,E)$, $u_2 \notin (F,E)$ ve $u_2 \in (G,E)$, $u_1 \notin (G,E)$ dir.

5.2.6 Teorem

(U,τ,E), U üzerinde soft topolojik uzay olsun. Eğer (U,E), her $e_K \in U$ için τ da soft kapalı küme ise, bu durumda (U,τ,E), fuzzy soft T_1 –uzayıdır (Mahanta 2018).

İspat.

Varsayalım ki, her $e_K \in U$ için (F,E), τ da soft kapalı küme olsun. O zaman $(F,E)^c$, τ da soft açıktır. $e_{K.}, e_H \in U$ olmak üzere öyle ki $e_K \neq e_H$ dir. $e_K \in U$ için $(F,E)^c$ soft açık kümedir öyle ki $e_H \in (F,E)^c$ ve $e_K \notin (F,E)^c$ dir. Benzer şekilde $(F,E)^c \in \tau$ dır öyle ki $e_K \in (G,E)^c$ ve $e_H \notin (G,E)^c$ olup, böylece (U,τ,E), U üzerinde soft T_1 –uzayı olur.

5.2.7 Önerme

(U,τ,E), U üzerinde soft topolojik uzay ve $e_{K.}, e_H \in U$ olsun, öyle ki $e_K \neq e_H$ dır. Eğer (F,E) ve (G,E) açık kümeleri varsa öyle ki $e_K \in U$ ve $e_H \in (F,E)^c$ veya $e_H \in (G,E)$ ve $e_K \in (G,E)^c$ olur. O zaman her $\alpha \in E$ için (U,τ,E), soft T_0 –uzayı ve (U,τ_α) de soft T_0 –uzayıdır.

İspat.

$e_{K.}, e_H \in U$ olsun, öyle ki $e_K \neq e_H$ ve (F, E) ve (G, E), U üzerinde iki soft açık küme vardır öyle ki $e_K \in (F, E)$ ve $e_H \in (F, E)^c$ veya $e_H \in (G, E)$ ve $e_K \in (G, E)^c$ dir. Eğer $e_H \in (F, E)^c$ ise o zaman her $\alpha \in$ E için $e_H \in (F(\alpha))^c$ olur. Bu şu anlama gelir; her $\alpha \in$ E için $e_H \notin F(\alpha)$ dir. Öyleyse $e_H \notin (F, E)$ olur. Benzer şekilde gösterebiliriz ki, eğer $e_K \in (G, E)^c$ ise o zaman $e_K \notin (G, E)$ dır. Buradan (U, τ, E), soft T_0 –uzayıdır. Şimdi herhangi $\alpha \in$ E için (U, τ_α) topolojik uzay ve $e_K \in (F, E)$ ve $e_H \in (F, E)^c$ veya $e_H \in (G, E)$ ve $e_K \in (G, E)^c$ dir. Böylece $e_K \in F(\alpha)$ ve $e_H \notin F(\alpha)$ veya $e_H \in G(\alpha)$ ve $e_K \notin G(\alpha)$ olup (U, τ_α), T_0 –uzayı olur.

5.2.8 Önerme

(U, τ, E), U üzerinde bir soft topolojik uzay ve V de U nun boştan farklı alt kümeleri olsun. Eğer (U, τ, E), soft T_0 –uzayı ise o zaman (V, τ_V, E), soft T_0 –uzayıdır.

İspat.

$e_{K.}, e_H \in U$ olsun, öyle ki $e_K \neq e_H$ ve (F, E) ve (G, E), U üzerinde iki soft açık küme vardır öyle ki $e_K \in (F, E)$ ve $e_H \notin (F, E)$ veya $e_H \in (G, E)$ ve $e_K \notin (G, E)$dir.

Şimdi $e_K \in V$, $e_K \in \bar{V}$ anlamına gelir ($\bar{V}$ mutlak fuzzy alt kümelerdir). Böylece $e_K \in \bar{V}$ ve $e_K \in (F, E)$ olup, buradan $(F, E) \in \tau$ için $e_K \in \bar{V} \wedge (F, E) = (F_V, E)$ dir.
$e_H \notin (F, E)$ göz önüne aldığımızda, bu şu anlama gelir ki bazı $\alpha \in E$ için $e_H \notin F(\alpha)$ dir. Bu durumda $e_H \notin V \wedge F(\alpha) = V(\alpha) \wedge F(\alpha)$ olur ve bu nedenle $e_H \notin V_E \wedge (F, E) = (F_V, E)$ dir. Benzer şekilde ispatlayabiliriz ki, eğer $e_H \in (G, E)$ ve $e_K \notin (G, E)$ ise o zaman $e_H \in (G_V, E)$ ve $e_K \notin (G_V, E)$ olur ve (V, τ_V, E), soft T_0 –uzayıdır.

5.2.9 Önerme

(U, τ, E), U üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (U, τ, E), U üzerinde soft T_2 –uzayı ise, o zaman her $\alpha \in E$ için (U, τ_α), T_2 –uzayıdır.

İspat.

Varsayalım ki (U, τ, E), U üzerinde soft T_2 –uzayı olsun. Herhangi $\alpha \in E$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha): (F, E) \in \tau\}$ dir. $e_{K.}, e_H \in U$ olsun öyle ki $e_K \neq e_H$ olur o zaman (F, E) ve $(G, E) \in \tau$ vardır öyle ki $e_K \in (F, E)$ ve $e_H \notin (G, E)$ ve $(F, E) \wedge (G, E) = \overline{\varphi}$ dir. Bu $e_K \in F(\alpha), e_H \in G(\alpha)$ ve $F(\alpha) \wedge G(\alpha) = \overline{\varphi}$ anlamına gelir. Böylece herhangi $\alpha \in E$ için (U, τ_α), T_2 –uzayıdır.

5.2.10 Önerme

(U, τ, E), U üzerinde soft topolojik uzay ve V de U nun boştan farklı alt kümeleri olsun. Eğer (U, τ, E), soft T_2 –uzayı ise o zaman (V, τ_V, E), soft T_2 –uzayıdır.

İspat.

$e_{K.}, e_H \in U$ olsun öyle ki $e_K \neq e_H$ olur o zaman U da (F, E) ve (G, E) iki soft açık küme vardır öyle ki $e_K \in (F, E)$ ve $e_H \notin (G, E)$ ve $(F, E) \wedge (G, E) = \overline{\varphi}$ dir. Böylece her $\alpha \in E, e_K \in F(\alpha), e_H \in G(\alpha)$ için $F(\alpha) \wedge G(\alpha) = \overline{\varphi}$ olur. Bu ise $e_K \in V \wedge F(\alpha), e_H \in V \wedge F(\alpha)$ ve $F(\alpha) \wedge G(\alpha) = \overline{\varphi}$ anlamına gelir. Buradan $(F_V, E), (G_V, E) \in \tau_V$ olmak üzere $e_K \in (F_V, E)$, $e_H \in (G_V, E)$ ve $(F_V, E) \wedge (G_V, E) = \overline{\varphi}$ olup, (V, τ_V, E), soft T_2 –uzayı olur.

6. SONUÇ

Fuzzy küme kullanılan topoloji çalışmamız sayesinde, fuzzy topolojik uzayların genel topolojik uzaylardan daha fazla olduğunu gördük. Daha sonra, topolojinin bazı özelliklerini teorem özellikleri veya örnekler kullanarak fuzzy mantık kullanarak kanıtladık ve topolojik uzay için birleşme ve kesişimin fuzzy topolojik uzay için aynı olduğunu ve dolayısıyla topolojik için daha ince ve kesin olanın fuzzy topolojik uzayla aynı olduğunu, ayrıca Kartezyen çarpım ve T_0, T_1, T_2için ayırma teoremini bulduk.

KAYNAKLAR

Aygunoglu, A., Cetkin, V., & Aygun, H. (2014). An introduction to fuzzy soft topological spaces. *Hacettepe Journal Mathematics and Statistics*, 43(2), 197-208.

Ahmad, B., & Kharal, A. (2009). Mappings on Fuzzy Soft Classes. *Advances in Fuzzy Systems*, Article ID 407890, 6 pages.

Chen, B. (2013). Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces. *Appl. Math. Inform Sci.*, 7, 287-294.

Tanay, B., & Kandemir M.B. (2011). Topological structure of fuzzy soft sets. *Comput. Math. Appl.*, 61, 2952–2957.

Babitha, K.V., & Sunil J.J. (2010). Soft set relations and functions. *Comp. and Math. with Appl.*, 60, 1840–1849.

Black, M. (1937). Vagueness: An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4, 427-455.

Cagman, N., Karataş, S., & Enginoglu, S. (2011). Soft Topology. *Comp. and Math. with Appl.*, G2, 351-358.

Change, C.L. (1963). Fuzzy topological space. *J. Math. Anal .Appl.*, 24, 182-190.

Georgiou, D.N., Megaritis, A.C., & Petropoulos, V.I. (2013). On Soft Topological Spaces. *Appl . Math. Inf. Sci.*, 7(5), 1889-1901.

Shi, F.G., & Pang, B. (2015). A Note on Soft Topological Spaces. *Iran Jour. Fuzzy Syst.*, 12(5), 149-155.

Khider,M.S., & U.Tokeser.(2020). A Study on Some Properties of Fuzzy Soft Topological Space. IOSR Journal of Mathematics 16(5),2278-5728.

Khider,M.S., & U.Tokeser.(2021). Some Properties Of Soft Topological Space Using Fuzzy Soft Set Theory. Asian Journal of Mathematics and Computer Research 51-59.

Klir, G.J., & Yuan, B. (1996). Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. *Kybernetika*, 32(2), 207-208.

Aktas, H., & Cagman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Inform Sci.*, 177, 2726–2735.

Hussain, S., & Bashir, A. (2011). Some properties of soft topological spaces. *Comp. and Math. with Appl.*, 62, 4058-4067.

Khameneh, A.Z., Kilicman, A., & Salleh, A.R. (2014). Fuzzy soft product topology. *Annals of Fuzzy Math. and Informatics*, 7(6), 935-947.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

Agarwal, M., Biswas, K.K., & Hanmandlu, M. (2013). Generalized Intuitionistic Fuzzy Soft Sets with Applications in Decision Making. *Appl Soft Comput.*, 13, 3552–3566.

Mahanta, J., & Das, P.K. (2012). Results on fuzzy soft topological spaces. https://doi.org/10.48550/arXiv.1203.0634.

Maji, P.K., Biswas, R., & Roy, A.R. (2001). Fuzzy Soft Sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589- 602.

Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First Resulte. *Comput. Math. Appl.*, 37(4-5), 19-31.

Palaniappan, N. (2002). Fuzzy topology. *Alpha Science International Ltd., Second Edition*, 15-52.

Cagman, N., Çıtak, F., & Enginoglu, S. (2010). Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems,* 1(1), 21- 35.

Onyeozili, I.A., & Gwary, T.M. (2014). A Study of The Fundamentals of Soft Set Theory. *International Journal of Scientific and Technology Research,* 3(4), 132- 143.

Maji, P.K., & Roy, A.R. (2003). Soft Sets Theory. *Comp. and Math. with Appl.*, 45, 555- 562.

Peyghan, E. (2013). About soft topological spaces. *Journal of New Results in Science*, 2(2), 60- 75.

Roy, S., & Samanta, T.K. (2012). A Note on Fuzzy Soft Topological Spaces. *Annals of Fuzzy Math. and Informatics*, 3(2), 305-311.

Hussain, S. (2017). On Some Properties of Fuzzy Soft almost Soft Continuous Mappings. *Moroccon Journal of Pure and Applied Anal.*, 3 (2), 131-139.

Shabir, M., & Munazza, N. (2011). On soft topological spaces. *Comp. and Math. with Appl.*, G2, 1786-1799.

Simsekler, T.H., Tozlu, N.D., & Yuksek, S. (2020). Fuzzy Soft Quasi Separation Axioms. *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 10(1), 102- 110.

Simsekler, T.H. (2019). Fuzzy Soft Topological Spaces and Related Category FST. *Turkish Journal of Math.*, 43, 871-878.

Neog, T.J., & Sut, D.K. (2011). A New Approach to The Theory of Soft Sets. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 1-6.

Basu, T.M., Mahapatra, N.K., & Mondal, S.K. (2012). A Balanced Solution of A Fuzzy Soft Set Based Decision Making Problem in Medical Science. *Appl. Soft Comput*., 12, 3260–3275.

Terzioglu, T. (2007). Characterization of Homotopy Groups on Fuzzy Topological Spaces. *Yüksek Lisans Tezi, Ankara Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, 1-52.

Acar, U., Koyuncu, F., & Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Comput. Math. Appl.*, 59, 3458–3463.

Etkin, V.C., & Aygun, H. (2014). On Fuzzy Soft Topogenous Structure. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 27, 247–255.

Varol, P.B., & Aygun, H. (2012). Fuzzy Soft Topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41(3), 407-419.

Min, W.K. (2012). A Note on Soft Topological Spaces. *Comput. Math. Appl.*, 62, 3524–3528.

Peng, X., & Liu, C. (2017). Algorithms for Neutrosophic Soft Decision Making Based on EDAS, New Similarity Measure and Level Soft Set. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 32, 955–968.

Yao, B.X., Liu, J., & Yan, R.X. (2008). Fuzzy Soft Set and Soft Fuzzy Set. *IEEE Fourth International Conference on Natural Computation*, 252-255.

Zorlutuna, I., & Atmaca, S. (2016). Fuzzy Paramertized Fuzzy Soft Topology. *NTMSCI*, 4(1), 142-152.