

**T.C.  
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL  
EŞİTSİZLİKLER**

**ŞEYDANUR KIZIL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADYAMAN, 2022**

## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

# GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Şeydanur KIZIL

Adıyaman Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ  
Yıl : 2022, Sayfa sayısı: VI+41

Jüri : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ  
Doç. Dr. Bilge İNAN

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla güçlü konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine hazırlanan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan ilk bölümde eşitsizlikler teorisinin, konveks fonksiyonlar teorisinin ve kesirli analiz teorisinin tarihsel gelişiminden kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışmasına kaynak teşkil eden önemli tanımlara ve eşitsizliklere yer verilmiştir. Ayrıca bu bölüm güçlü konveks fonksiyonlar için daha önceden elde edilmiş olan bazı önemli eşitsizlikleri de kapsamaktadır.

Üçüncü bölümde güçlü konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilirken kullanılacak olan Atangana-Baleanu integral operatörlerini içeren iki lemma tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm güçlü konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu integral operatörleri yardımıyla elde edilmiş olan sonuçları içermektedir.

Çalışmanın son bölümü olan beşinci bölümü ise tez çalışmasının kısa bir değerlendirilmesinin yapıldığı ve bazı önerilerin sunulduğu sonuçlar ve öneriler bölümüdür.

**Anahtar Kelimeler:** Güçlü konveks fonksiyon; Atangana-Baleanu integral operatörleri; Hölder eşitsizliği; Hermite-Hadamard eşitsizliği; Ostrowski eşitsizliği.

## ABSTRACT

MSc Thesis

### INTEGRAL INEQUALITIES FOR STRONGLY CONVEX FUNCTIONS

Şeydanur KIZIL

Adıyaman University  
Graduate Education Institute  
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ  
Year : 2022, Number of pages: VI+41

Jury : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ  
Assoc. Prof. Dr. Bilge İNAN

This thesis study, which is prepared on inequalities for strongly convex functions with the help of Atangana-Baleanu fractional integral operators, consists of five chapters. In the first chapter, which is the introduction, the historical development of the theory of inequalities, the theory of convex functions and the theory of fractional analysis is briefly mentioned.

In the second chapter, important definitions and inequalities that constitute the source of the thesis study are given. This chapter also covers some of the important inequalities previously obtained for strongly convex functions.

In the third chapter, two lemmas including Atangana-Baleanu integral operators to be used in obtaining inequalities for strongly convex functions are introduced.

The fourth chapter contains the results obtained with the help of Atangana-Baleanu integral operators for strongly convex functions.

The fifth chapter, which is the last part of the study, is the conclusions and recommendations section in which a brief evaluation of the thesis study is made and some suggestions are presented.

**Key Words:** Strongly convex function; Atangana-Baleanu integral operators; Hölder inequality; Hermite-Hadamard inequality; Ostrowski inequality.

## BEYAN

“Güçlü Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Şeydanur KIZIL

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince, tez konumun belirlenmesi de dahil her konuda yol göstericim olan, akademik bilgi, birikim ve tecrübeleri ve sonsuz sabrı ile desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca akademik gelişimimde emeği olan Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün saygıdeğer hocalarına en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca hayatımın her kademesinde maddi manevi desteklerini benden esirgemeyen, yol gösteren ve her zaman yanımda olan aileme sevgilerimi sunuyorum.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	I
ABSTRACT .....	II
BEYAN .....	III
TEŞEKKÜR .....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	VI
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	16
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR.....	38
KİŞİSEL BİLGİLER .....	41

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\Gamma$	: Gamma fonksiyonu
$I^\circ$	: $I$ aralığının içi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$(n_1, n_2)$	: $n_1, n_2$ açık aralığı
$[n_1, n_2]$	: $n_1, n_2$ kapalı aralığı
$\int_{n_1}^{n_2}$	: $n_1, n_2$ aralığında integral alma işlemi
$L[n_1, n_2]$	: $[n_1, n_2]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$I$	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
${}^{AB}I_{n_2}^\xi$	: Sağ Atangana-Baleanu kesirli integrali
${}^{CF}I_{n_2}^\xi$	: Sağ Caputo-Fabrizio kesirli integrali
$H^1$	: Sobolev uzayı
${}^{AB}I_{n_1}^\xi$	: Sol Atangana-Baleanu kesirli integrali
${}^{CF}I_{n_1}^\xi$	: Sol Caputo-Fabrizio kesirli integrali
$I_{n_2}^{\xi-}$	: $\xi$ . mertebeden sağ Riemann-Liouville kesirli integrali
$I_{n_1}^{\xi+}$	: $\xi$ . mertebeden sol Riemann-Liouville kesirli integrali
$\rho'$	: $\rho$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\rho''$	: $\rho$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$ \rho $	: $\rho$ fonksiyonunun mutlak değeri

**1. GİRİŞ**

Yirminci yüzyılda çok sayıda yeni sonuca ve araştırma problemine yol açan matematiksel eşitsizliğin keşfi matematiğin farklı alanlara genişlemesine katkıda bulunmuştur [1]. Çeşitli klasik ve yeni eşitsizliklerin yanında birçok yeni uygulama ve ispat yöntemlerine de yer verilen Hardy ve ark. [2] tarafından yazılan “Inequalities” isimli eser bu yüzyılın klasik eserleri arasında yerini alarak matematikçiler için temel kaynak haline gelmiştir. Bu temel eserin yanında Beckenbach ve Bellman’ın “Inequalities” [3] isimli eseri; Mitrinović’in “Analytic Inequalities” [4] isimli eseri; Mitrinović ve ark. [5,6] tarafından yazılan “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” ve “Classical and New Inequalities in Analysis” isimli eserler ile Pachpatte’nin “Mathematical Inequalities” [1] isimli eseri eşitsizlik teorisinin gelişmesine destek sunan diğer önemli eserlerdir.

Tarihi oldukça eskiye dayanan konveks fonksiyonlar Hermite’in 1883 yılında, Hölder’in 1889 yılında, Stolz’un ve Hadamard’ın 1893 yılında yaptıkları çalışmalar sayesinde 19. yüzyıl sonunda matematikte yer edinmeye başlamıştır. Konveks fonksiyonlar, 1905-1906 yıllarında Jensen’in üzerinde yaptığı sistematik çalışmalar sayesinde tanınırlığını artırarak matematiksel analizin bağımsız bir alanı haline gelmiş ve gelişimine hızla devam etmiştir [1]. Bu hızlı gelişimde konveks fonksiyonların uygulamalarının matematiksel analizin birçok alanı tarafından içerilmesi ve konveks fonksiyonlar teorisi ile eşitsizlik teorisinin yakın ilişkisi neden olarak gösterilebilir [7]. Bu yakın ilişkide konveks fonksiyonların tanımının bir eşitsizlikle verilmesinin ve önemli çoğu eşitsizliğin konveks fonksiyonların uygulamalarının bir sonucu olmasının etkisinin büyük olduğu söylenebilir. Konveks fonksiyonlar üzerine çalışan araştırmacılar için Roberts ve Varberg’in “Convex Functions” [8] isimli eseri temel kaynaklardan biridir. Pečarić’in “Convex Functions: Inequalities” [9] isimli eserinde sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizliklere yer verilmiştir. Bu kaynakların yanı sıra Niculescu ve Persson’un “Convex Functions and Their Applications” [10] isimli eseri, Pečarić ve ark. [7] tarafından yazılan “Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications” isimli eser ile Dragomir ve Pearce’in “Selected Topics on

Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” [11] isimli eseri de önemli kaynaklar arasındadır.

Eşitsizliklerin ve konveks fonksiyonların sadece matematikte değil aynı zamanda bilimin diğer dallarında da önemli birer araştırma alanı olması bu konuları araştırmacılar için ilgi odağı haline getirmiştir ve bu konular üzerinde çok sayıda çalışma yapılmaya devam edilmektedir.

Kesirli hesap, matematiksel analizin keyfi mertebeden türevlerin ve integrallerin uygulamalarını ve araştırmalarını kapsayan bir koludur [12]. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları bu yönüyle klasik türev ve klasik integral kavramlarından farklılaşmaktadır ve bu kavramlara göre daha kapsamlıdır.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları her ne kadar Liouville ismiyle ilişkilendirilse de kesirli hesap Leibniz ve Euler’in çalışmalarına dayanmaktadır [12,13]. Leibniz tarafından literatüre katılan  $\frac{d^{\xi}\rho(n)}{dn^{\xi}}$  gösterimi için 1695 yılında L’Hopital’in  $\xi = \frac{1}{2}$  seçilmesi durumunda ne olacağını sorması üzerine Leibniz’in yanıtı “Bu bir gün yararlı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradokstur.” şeklinde olmuştur [14]. Sorunun  $\xi = \frac{1}{2}$  değeri üzerinden sorulması teoreminin eksik bir isimlendirmeye günümüze kadar ulaşmasına neden olmuştur [12,14]. Kesirli analiz tarihinde meşhur mektuplaşma olarak bilinen bu soru cevaptan sonra Laplace, Fourier, Abel, Riemann, Grünwald, Letnikov, Hadamard, Hardy, Littlewood, Weyl, Riesz ile birçok önemli bilim insanı kesirli hesap üzerine çalışmalar yaparak bu teoremin gelişimine katkıda bulunmuştur ve bu sayede kesirli hesap matematikte gözde bir araştırma alanı haline gelmiştir [12,13]. Bu alanda düzenlenen ilk konferans Ross tarafından New Haven Üniversitesi’nde “First Conference of Fractional Calculus and its Applications” ismiyle 1974 yılının haziran ayında gerçekleştirilmiştir [12]. Kesirli analiz teorisi üzerine yazılan ilk monograf ise 1968 yılında başladıkları ortak çalışmayı 1974 yılında kitap halinde bastıran Oldham ve Spanier’e aittir [15]. Samko ve ark. [13] tarafından kaleme alınan ve önce Rusça daha sonra ise İngilizce olarak yayımlanan “Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications” isimli monograf kesirli analiz alanında önemli sayılan birçok bilgiyi içermesi bakımından literatürde bu alanda yazılan en belirgin ansiklopedik kaynak olarak bilinmektedir [12]. Yine

Machado ve ark. [16] tarafından yazılan “Recent History of Fractional Calculus” isimli makale kesirli analiz teorisi üzerine son yıllarda yazılan kitaplar, çıkarılan dergiler ve düzenlenen konferanslar ile ilgili bilgiler sunması açısından önemli bir kaynaktır.

Beş bölümden oluşan “Güçlü Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler” başlıklı tez çalışmasının ilk bölümünde eşitsizlik teorisinin, konveks fonksiyonlar teorisinin ve kesirli analiz teorisinin tarihsel gelişimine dair bazı önemli bilgilere yer verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyon ve güçlü konveks fonksiyon tanımları, bu sınıfların birbirleriyle olan ilişkisi, literatürde çok önemli bir yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliği ile bazı önemli yardımcı eşitsizlikler, güçlü konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan Hermite-Hadamard ile Ostrowski tipli eşitsizlikler ve ayrıca literatürde geniş çalışma kitlesine sahip bazı kesirli integral operatörleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde güçlü konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikler elde edilirken kullanılan iki lemma tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm çalışmanın bulgular kısmını içerirken beşinci bölüm ise çalışma hakkında kısa bir değerlendirmeden oluşmaktadır.

Bu tez çalışması ile güçlü konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla literatürden farklı olarak yeni ve genel eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışması için kaynak oluşturan bazı tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler verilmiştir.

**Tanım 2.1:** Boş olmayan bir  $L$  kümesi ve bir  $F$  cismi yardımıyla  $+: L \times L \rightarrow L$  ve  $.: F \times L \rightarrow L$  işlemleri verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $L, F$  cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) olarak adlandırılır:

A)  $L, +$  işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

A1. Her  $n_1, n_2 \in L$  için  $n_1 + n_2 \in L$  dir.

A2. Her  $n_1, n_2, n_3 \in L$  için  $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$  tür.

A3. Her  $n_1 \in L$  için  $n_1 + \theta = \theta + n_1 = n_1$  olacak şekilde  $\theta \in L$  vardır.

A4. Her  $n_1 \in L$  için  $n_1 + (-n_1) = \theta$  olacak şekilde  $-n_1 \in L$  vardır.

A5. Her  $n_1, n_2 \in L$  için  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$  dir.

B)  $n_1, n_2 \in L$  ve  $\alpha, \beta \in F$  olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

B1.  $\alpha.n_1 \in L$  dir.

B2.  $\alpha.(n_1 + n_2) = \alpha.n_1 + \alpha.n_2$  dir.

B3.  $(\alpha + \beta).n_1 = \alpha.n_1 + \beta.n_1$  dir.

B4.  $(\alpha\beta).n_1 = \alpha(\beta.n_1)$  dir.

B5.  $1, F$ 'nin birim elemanı olmak üzere  $1.n_1 = n_1$  dir.

$F = \mathbb{R}$  olması halinde ve  $F = \mathbb{C}$  olması halinde  $L$  sırasıyla reel lineer uzay, ve karmaşık lineer uzay olarak isimlendirilir [17].

**Tanım 2.2:**  $L$  bir lineer uzay ve  $A \subseteq L$  olmak üzere  $A$  kümesinden seçilen keyfi  $n_1, n_2$  elemanları için

$$A_1 = \{n_3 \in L: n_3 = tn_1 + (1-t)n_2, \quad t \in [0,1]\} \subseteq A$$

ise  $A$  kümesi konveks küme olarak isimlendirilir. Geometrik açıdan düşünüldüğünde  $A_1$ , uç noktaları  $n_1$  ve  $n_2$  olan bir doğru parçasını ifade etmektedir. Dolayısıyla konveks kümeler sezgisel şekilde, keyfi iki elemanını birleştiren doğru parçasını içeren boş olmayan kümeler olarak tanımlanabilir [18].

**Tanım 2.3:**  $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık olmak üzere  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Her  $n_1, n_2 \in I$  ve  $t \in [0,1]$  için

$$\rho(tn_1 + (1-t)n_2) \leq t\rho(n_1) + (1-t)\rho(n_2) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\rho$  fonksiyonu konveks fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer (2.1) eşitsizliği her  $n_1 \neq n_2$  ve  $t \in (0,1)$  için kesin olarak sağlanırsa  $\rho$  fonksiyonu kesin konveks fonksiyon olarak isimlendirilir. (2.1) eşitsizliğinin  $\rho$  fonksiyonu için ters yönde sağlanması durumunda  $\rho$  fonksiyonu  $I$  üzerinde konkav fonksiyon olarak isimlendirilir [7].

$[n_1, n_2]$  üzerinde tanımlı  $\rho$  fonksiyonu,  $[n_1, n_2]$  üzerinde konveks ve  $n_3 \in (n_1, n_2)$  noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise  $n \in (n_1, n_2)$  için

$$\rho(n) - \rho(n_3) \geq \rho'(n_3)(n - n_3) \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır [8]. Eğer  $\rho$  fonksiyonu konkav ise (2.2) eşitsizliği ters yönde sağlanır.

**Teorem 2.4:**  $\rho$  fonksiyonunun  $(n_1, n_2)$  üzerinde ikinci mertebeden türevinin mevcut olduğu varsayılınsın.  $\rho$  fonksiyonunun  $(n_1, n_2)$  üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart her  $n \in (n_1, n_2)$  için  $\rho''(n) \geq 0$  olmasıdır. Eğer  $\rho''(n) > 0$  ise  $\rho$  fonksiyonu  $(n_1, n_2)$  üzerinde kesin konvektir [8].

Konveks fonksiyonların bir alt sınıfı olan ve bazı özellikleri konveks fonksiyonların benzer özelliklerinin daha güçlü versiyonları olarak sunulan güçlü konveks fonksiyonlar Polyak [19] tarafından tanımlanmıştır. Tanımlandığı günden bu yana, bu konveks fonksiyon sınıfı matematiksel ekonominin, yaklaşım teorisinin ve optimizasyon teorisinin yanında pür ve uygulamalı matematiğin diğer branşlarında önemli uygulama alanları edinmiştir.

**Tanım 2.5:**  $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık olmak üzere  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Her  $n_1, n_2 \in I$  ve  $t \in [0,1]$  için

$$\rho(tn_1 + (1-t)n_2) \leq t\rho(n_1) + (1-t)\rho(n_2) - ct(1-t)(n_1 - n_2)^2 \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\rho$  fonksiyonuna  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyondur denir [19].

$c > 0$  modülü ile güçlü konveks olan  $\rho: [n_1, n_2] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $n_3 \in (n_1, n_2)$  noktasında diferensiyellenebiliyorsa  $n \in (n_1, n_2)$  için

$$\rho(n) - \rho(n_3) \geq \rho'(n_3)(n - n_3) + c(n - n_3)^2 \quad (2.4)$$

eşitsizliği sağlanır [8].

Teorem 2.6 ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyonun güçlü konveks olup olmadığının belirlenmesinde önemli bir kriterdir.

**Teorem 2.6:**  $\rho$  fonksiyonunun  $(n_1, n_2)$  üzerinde ikinci mertebeden türevinin mevcut olduğu varsayalım.  $\rho$  fonksiyonunun  $(n_1, n_2)$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks olması için gerek ve yeter şart her  $n \in (n_1, n_2)$  için  $\rho''(n) \geq 2c$  olmasıdır [8].

Güçlü konvekslik, kesin konvekslik ve konvekslik arasındaki ilişki şu şekilde özetlenebilir: Bir fonksiyon güçlü konveks ise aynı zamanda kesin konvektir ve dolayısıyla da konvektir. Ancak bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin  $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı  $\rho_1(n) = n^2$  fonksiyonu güçlü konveks, kesin konveks ve aynı zamanda konveks bir fonksiyondur.  $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı  $\rho_2(n) = e^n$  fonksiyonu hem kesin konveks hem de konvektir; ancak güçlü konveks değildir. Yine  $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı  $\rho_3(n) = n$  fonksiyonu konvektir; ancak ne güçlü konvektir ne de kesin konvektir [20].

Konveks fonksiyonlar için elde edilen ilk temel eşitsizlik olarak bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği hem konveks fonksiyonlar teorisi için hem de eşitsizlikler teorisi için büyük önem arz etmektedir [11]. Bu temel eşitsizlik konveks bir fonksiyonun ortalama değeri için alt ve üst yaklaşımlar sunmaktadır.

**Teorem 2.7:**  $I$ ,  $\mathbb{R}$ 'de bir aralık,  $n_1, n_2 \in I$  ve  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) \leq \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(t) dt \leq \frac{\rho(n_1) + \rho(n_2)}{2} \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanır [21].

Hermite-Hadamard eşitsizliği her ne kadar konveks fonksiyonlar için ispatlanmış olsa da araştırmacılar literatürde mevcut olan birçok farklı konveks fonksiyon sınıfı için Hermite-Hadamard tipine benzer eşitsizlikler elde etmişlerdir. Teorem 2.8'deki eşitsizlik Merentes ve Nikodem [22] tarafından güçlü konveks fonksiyonlar için elde edilmiştir.

**Teorem 2.8:**  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon ise  $n_1 < n_2$  olmak üzere her  $n_1, n_2 \in I$  için

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \frac{c}{12}(n_1 - n_2)^2 &\leq \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(t) dt \\ &\leq \frac{\rho(n_1) + \rho(n_2)}{2} - \frac{c}{6}(n_1 - n_2)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Ayrıca, Merentes ve Nikodem [22], çalışmalarında güçlü konveks fonksiyonlar için Jensen tipli eşitsizlikler elde etmiş ve güçlü konveks fonksiyonlar ile genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar arasındaki bağlantılara dikkat çekmiştir. Azócar ve ark. [23], Merentes ve Nikodem'in [22] çalışmalarında güçlü konveks fonksiyonlar için elde ettikleri Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin (Teorem 2.8'de verilen (2.6) eşitsizliğinin) bir iyileştirmesini sunmalarının yanında güçlü konveks fonksiyonlar için Fejér tipli eşitsizlikleri de literatüre kazandırmıştır. [22] ve [23] çalışmalarına benzer olarak Dragomir ve Nikodem [24], çalışmalarında normlu lineer uzaylarda güçlü konveks fonksiyonlar için Jensen ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Literatürde güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli, Jensen tipli ve Fejér tipli eşitsizliklerin dışında farklı tipli eşitsizlikler de geliştirilmiştir. Bunlar arasında Klaričić Bakula ve Nikodem [25] tarafından elde edilen ters Jensen tipli eşitsizlikler ve Klaričić Bakula [26] tarafından elde edilen Jensen-Steffensen tipli

eşitsizlikler dikkat çekmektedir. Güçlü konveks fonksiyonlar üzerine önemli bazı sonuçlar için [27-31] çalışmaları incelenebilir.

Set ve ark. [32], çalışmalarında iki güçlü konveks fonksiyonun çarpımının ortalama değeri ile bir konveks fonksiyonun ve bir güçlü konveks fonksiyonun çarpımının ortalama değerine ilişkin sonuçlar üretmiştir. Aşağıda Set ve ark. [32] tarafından çarpımlar üzerine elde edilen iki sonuç sıralanmıştır.

**Teorem 2.9:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho, \sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları  $I^\circ$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyonlar ve  $\rho\sigma \in L[n_1, n_2]$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u)\sigma(u)du \\ & \leq \frac{1}{3} [\rho(n_1)\sigma(n_1) + \rho(n_2)\sigma(n_2)] + \frac{1}{6} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)] \\ & \quad - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{12} [\rho(n_1) + \rho(n_2) + \sigma(n_1) + \sigma(n_2)] + \frac{c^2(n_2 - n_1)^4}{30} \end{aligned} \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

**Teorem 2.10:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho, \sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları  $I^\circ$  üzerinde sırasıyla konveks fonksiyon ve  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon olsun.  $\rho\sigma \in L[n_1, n_2]$  ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u)\sigma(u)du + \frac{c(n_2 - n_1)^2}{6} \left[ \frac{\rho(n_1) + \rho(n_2)}{2} \right] \\ & \leq \frac{1}{3} [\rho(n_1)\sigma(n_1) + \rho(n_2)\sigma(n_2)] + \frac{1}{6} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

Konveks fonksiyonlar teorisinde ve eşitsizlikler teorisinde Hermite-Hadamard eşitsizliği gibi dikkat çeken bir diğer eşitsizlik olan Ostrowski eşitsizliği, Ostrowski [33] tarafından 1938'de elde edilmiştir. Türevi sınırlı fonksiyonlar için yazılmış olan

bu eşitsizlik, fonksiyonun ortalama değeri ile fonksiyonun değerleri arasındaki fark için yaklaşımlar sunması açısından önemlidir.

**Teorem 2.11:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  ve  $\rho' \in L[n_1, n_2]$  olmak üzere  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $|\rho'(x)| \leq M$  ise  $\forall x \in [n_1, n_2]$  için

$$\left| \rho(x) - \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(t) dt \right| \leq \left[ \frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)^2}{(n_2 - n_1)^2} \right] (n_2 - n_1) M \quad (2.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada  $\frac{1}{4}$  sabiti en iyi katsayıdır [33].

Set ve ark. [32], çalışmalarında iki güçlü konveks fonksiyonun çarpımının ortalama değeri ile bir konveks fonksiyonun ve bir güçlü konveks fonksiyonun çarpımının ortalama değerine ilişkin sonuçlar üretmelerinin yanında güçlü konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler de elde etmiştir. Ayrıca Set ve ark. [32], elde edilen bu Ostrowski tipli eşitsizliklerde  $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$  seçimini yaparak güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafına ilişkin üst sınırlar veren sonuçlara ulaşmıştır.

**Teorem 2.12:**  $n_1, n_2 \in I$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $M \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{6}, \frac{c(n_2-n)^2}{6} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$  için

$$\begin{aligned} & \left| \rho(n) - \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^2}{2(n_2 - n_1)} \left( M - \frac{c(n - n_1)^2}{6} \right) + \frac{(n_2 - n)^2}{2(n_2 - n_1)} \left( M - \frac{c(n_2 - n)^2}{6} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

**Sonuç 2.13:** Teorem 2.12'de verilen (2.10) eşitsizliğinde  $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$  alınırsa

$$\left| \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) - \frac{1}{n_2-n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \leq M \frac{n_2-n_1}{4} - \frac{c(n_2-n_1)^3}{96} \quad (2.11)$$

eşitsizliği elde edilir [32].

**Teorem 2.14:**  $n_1, n_2 \in I$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $M^q \geq \max\left\{\frac{c(n-n_1)^2}{6}, \frac{c(n_2-n)^2}{6}\right\}$ ,  $q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$  için

$$\begin{aligned} & \left| \rho(n) - \frac{1}{n_2-n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \\ & \leq \frac{(n-n_1)^2}{n_2-n_1} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(M^q - \frac{c(n-n_1)^2}{6}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(n_2-n)^2}{n_2-n_1} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(M^q - \frac{c(n_2-n)^2}{6}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

**Sonuç 2.15:** Teorem 2.14'te verilen (2.12) eşitsizliğinde  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) - \frac{1}{n_2-n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \\ & \leq \frac{n_2-n_1}{2} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(M^q - \frac{c(n_2-n_1)^2}{24}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

eşitsizliği elde edilir [32].

**Teorem 2.16:**  $n_1, n_2 \in I$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $M^q \geq \max\left\{\frac{c(n-n_1)^2}{6}, \frac{c(n_2-n)^2}{6}\right\}$ ,  $q \geq 1$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$  için

$$\left| \rho(n) - \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \leq \frac{(n - n_1)^2}{2(n_2 - n_1)} \left( M^q - \frac{c(n - n_1)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(n_2 - n)^2}{2(n_2 - n_1)} \left( M^q - \frac{c(n_2 - n)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

**Sonuç 2.17:** Teorem 2.16’da verilen (2.14) eşitsizliğinde  $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$  alınırsa

$$\left| \rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) - \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \rho(u) du \right| \leq \frac{n_2 - n_1}{4} \left( M^q - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.15)$$

eşitsizliği elde edilir [32].

Aşağıda tez çalışmasında kullanılan önemli bazı yardımcı eşitsizlikler sıralanmıştır.

**Teorem 2.18:**  $p > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olsun.  $\rho$  ve  $\sigma$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde tanımlı reel fonksiyonlar,  $|\rho|^p$  ve  $|\sigma|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{n_1}^{n_2} |\rho(x)\sigma(x)| dx \leq \left( \int_{n_1}^{n_2} |\rho(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{n_1}^{n_2} |\sigma(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.16)$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.16) eşitsizliği integraller için Hölder eşitsizliği olarak bilinir [6].

**Teorem 2.19:** Herhangi  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$  için

$$|n_1 + n_2| \leq |n_1| + |n_2|,$$

$$||n_1| - |n_2|| \leq |n_1 - n_2|,$$

$$||n_1| - |n_2|| \leq |n_1 + n_2|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [4].

**Teorem 2.20:**  $[n_1, n_2]$  üzerinde sürekli reel değerli bir  $\rho$  fonksiyonu için

$$\left| \int_{n_1}^{n_2} \rho(x) dx \right| \leq \int_{n_1}^{n_2} |\rho(x)| dx \quad (2.17)$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.17) eşitsizliği üçgen eşitsizliğinin integral formu olarak bilinir [6].

Riemann-Liouville kesirli integralleri, Caputo-Fabrizio kesirli integralleri ve Atangana-Baleanu kesirli integralleri kesirli analiz teorisinin önemli sonuçlarıdır.

**Tanım 2.21:**  $\xi$  pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} x^{\xi-1} e^{-x} dx$$

şeklinde ifade edilen  $\Gamma(\xi)$  fonksiyonuna Gamma fonksiyonu denir [34].

**Tanım 2.22:**  $\rho \in L[n_1, n_2]$  ve  $\xi > 0$  olsun.  $\xi$ . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$\left( I_{n_1+}^{\xi} \rho \right) (n) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_{n_1}^n (n-t)^{\xi-1} \rho(t) dt, \quad n > n_1,$$

$$\left( I_{n_2-}^{\xi} \rho \right) (n) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_n^{n_2} (t-n)^{\xi-1} \rho(t) dt, \quad n < n_2$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\Gamma(\xi)$ , Gamma fonksiyonudur.  $\xi = 1$  seçilmesi durumunda klasik integrale dönüşen Riemann-Liouville kesirli integralleri için  $\xi = 0$  seçilmesi durumunda  $I_{n_1+}^0 \rho(n) = I_{n_2-}^0 \rho(n) = \rho(n)$  eşitliği elde edilir [12,13].

**Tanım 2.23:**  $\rho \in H^1(n_1, n_2)$ ,  $n_2 > n_1$  olsun.  $\xi \in [0,1]$  olmak üzere sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri sırasıyla

$$\left( {}^{CF} I_{n_1+}^{\xi} \rho \right) (t) = \frac{1-\xi}{B(\xi)} \rho(t) + \frac{\xi}{B(\xi)} \int_{n_1}^t \rho(y) dy,$$

$$\left( {}^{CF} I_{n_2-}^{\xi} \rho \right) (t) = \frac{1-\xi}{B(\xi)} \rho(t) + \frac{\xi}{B(\xi)} \int_t^{n_2} \rho(y) dy$$

şeklinde tanımlanır [35].

**Tanım 2.24:**  $\rho \in H^1(n_1, n_2)$ ,  $n_2 > n_1$  olsun.  $\xi \in [0,1]$  olmak üzere sol ve sağ Atangana-Baleanu kesirli integralleri sırasıyla

$${}^{AB}I_t^\xi \{\rho(t)\} = \frac{1-\xi}{B(\xi)} \rho(t) + \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_{n_1}^t \rho(u)(t-u)^{\xi-1} du,$$

$${}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(t)\} = \frac{1-\xi}{B(\xi)} \rho(t) + \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_t^{n_2} \rho(u)(u-t)^{\xi-1} du$$

olarak tanımlanır [36,37].

Tanım 2.23'te ve Tanım 2.24'te  $H^1(n_1, n_2) = \{\rho \in L[n_1, n_2]: \rho' \in L[n_1, n_2]\}$  ve  $B, B(\xi) > 0, B(0) = B(1) = 1$  ifadelerini sağlayan normalizasyon fonksiyonudur.

Çoğu araştırmacı Riemann-Liouville kesirli integralleri ve Caputo-Fabrizio kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikler elde ederek eşitsizlik teorisinin gelişmesine hız katmıştır. [38-41] çalışmaları güçlü konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri ve genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri ile Caputo-Fabrizio kesirli integralleri yardımıyla elde edilmiş sonuçları içermektedir. Ayrıca yine yakın zamanda tanımlanan Atangana-Baleanu kesirli integralleri hem eşitsizlik teorisi hem de konveks fonksiyonlar teorisi için kısa süre içerisinde kayda değer katkılar sunmuştur. Set ve ark. [42] tarafından hazırlanan çalışma literatürde konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üzerine yazılmış sonuçları içeren ilk çalışmadır.

Bu tez çalışmasında Atangana-Baleanu kesirli integralleri yardımıyla güçlü konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilerek söz konusu sınıfın hem eşitsizlik teorisindeki hem de operatör teorisindeki yerinin pekiştirilmesi hedeflenmiştir.

## 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu tez çalışmasında güçlü konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu integral operatörleri yardımıyla eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu eşitsizlikler çarpımlar üzerine sonuçlar içermekle beraber, Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli sonuçları da kapsamaktadır. Genel olarak çalışmadaki sonuçlar elde edilirken güçlü konveks fonksiyon tanımı, konveks fonksiyon tanımı ile sırasıyla (2.16) ve (2.17) ile verilen Hölder eşitsizliği ile üçgen eşitsizliğinin integral versiyonundan faydalanılmıştır. Ayrıca birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerlerinin kuvvetleri güçlü konveks olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilirken aşağıdaki iki lemma kullanılmıştır [43].

**Lemma 3.1:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $\rho' \in L[n_1, n_2]$  ise her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in (0,1]$  ve  $t \in [0,1]$  için

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \\
& - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \\
& + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \\
& = \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi \rho'(tn + (1 - t)n_1) dt \\
& - \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi \rho'(tn + (1 - t)n_2) dt \tag{3.1}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [43].

**Lemma 3.2:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $\rho'' \in L[n_1, n_2]$  ise her  $n \in [n_1, n_2]$  ve  $\xi, t \in [0,1]$  için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \\
& - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \\
& = \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \int_0^1 t^{\xi+1} \rho''(tn + (1 - t)n_1) dt \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \int_0^1 t^{\xi+1} \rho''(tn + (1 - t)n_2) dt \tag{3.2}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [43].

## 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde güçlü konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu integral operatörleri yardımıyla elde edilmiş olan eşitsizliklere yer verilmiştir.

**Teorem 4.1:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon olsun. Eğer  $\rho \in L[n_1, n_2]$  ise  $\xi \in (0,1]$  için Atangana-Baleanu integral operatörlerini içeren aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n_2 - n_1)^\xi} \left( {}^{AB}I_{n_1^+}^\xi \{ \rho(n_2) \} \right) &\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[ \frac{\rho(n_1)}{\xi + 1} + \frac{\rho(n_2)}{\xi(\xi + 1)} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \right] \\ &+ \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)^\xi B(\xi)} \rho(n_2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

**İspat:**  $\rho$  güçlü konveks fonksiyon olduğundan her  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  ve  $t \in [0,1]$  için (2.3) ile verilen

$$\rho(tn_1 + (1 - t)n_2) \leq t\rho(n_1) + (1 - t)\rho(n_2) - ct(1 - t)(n_2 - n_1)^2$$

eşitsizliği yazılır.

(2.3) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{\xi-1}$  terimi ile çarpılıp elde edilen eşitsizlik  $[0,1]$  üzerinden  $t$ 'ye göre integre edilirse gerekli integral hesaplamaları yapılarak

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{\xi-1} \rho(tn_1 + (1 - t)n_2) dt \\ &\leq \int_0^1 t^{\xi-1} [t\rho(n_1) + (1 - t)\rho(n_2) - ct(1 - t)(n_2 - n_1)^2] dt \\ &= \frac{\rho(n_1)}{\xi + 1} + \frac{\rho(n_2)}{\xi(\xi + 1)} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliğinde  $tn_1 + (1 - t)n_2 = u$  değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{(n_2 - n_1)^\xi} \int_{n_1}^{n_2} (n_2 - u)^{\xi-1} \rho(u) du$$

$$\leq \frac{\rho(n_1)}{\xi + 1} + \frac{\rho(n_2)}{\xi(\xi + 1)} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \quad (4.3)$$

yazılır. (4.3) ile verilen eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)}$  terimi ile çarpılıp elde edilen eşitsizliğin her iki tarafına da  $\frac{1-\xi}{(n_2-n_1)^\xi B(\xi)}\rho(n_2)$  terimi eklenirse (4.1) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.2:** Teorem 4.1'de  $\xi = 1$  seçilirse Teorem 2.8'de verilen (2.6) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

**Teorem 4.3:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho, \sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları  $I$  üzerinde sırasıyla konveks fonksiyon ve  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon olsun. Eğer  $\rho\sigma \in L[n_1, n_2]$  ise  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n_2 - n_1)^\xi} \left( {}^{AB}I_{n_1 n_2}^\xi \{ \rho\sigma(n_2) \} \right) \\ & \leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left\{ \frac{1}{\xi + 2} \left[ \rho(n_1)\sigma(n_1) + \frac{2}{\xi(\xi + 1)} \rho(n_2)\sigma(n_2) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\xi + 1)(\xi + 2)} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)] - c(n_2 - n_1)^2 \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{(\xi + 2)(\xi + 3)} \left[ \rho(n_1) + \frac{2\rho(n_2)}{\xi + 1} \right] \right\} + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)^\xi B(\xi)} \rho\sigma(n_2) \quad (4.4) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Konveks ve güçlü konveks fonksiyonların tanımları dikkate alınırsa her  $n_1, n_2 \in I$  olmak üzere  $\rho$  fonksiyonu için (2.1) ile verilen

$$\rho(tn_1 + (1 - t)n_2) \leq t\rho(n_1) + (1 - t)\rho(n_2)$$

eşitsizliği ve  $\sigma$  fonksiyonu için

$$\sigma(tn_1 + (1 - t)n_2) \leq t\sigma(n_1) + (1 - t)\sigma(n_2) - ct(1 - t)(n_2 - n_1)^2 \quad (4.5)$$

eşitsizliği yazılır. (2.1) ve (4.5) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \rho(tn_1 + (1-t)n_2)\sigma(tn_1 + (1-t)n_2) \\
& \leq t^2\rho(n_1)\sigma(n_1) + t(1-t)\rho(n_1)\sigma(n_2) - ct^2(1-t)(n_2 - n_1)^2\rho(n_1) \\
& + t(1-t)\sigma(n_1)\rho(n_2) + (1-t)^2\rho(n_2)\sigma(n_2) - ct(1-t)^2(n_2 - n_1)^2\rho(n_2) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1'in ispatındaki adımlara benzer olarak (4.6) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{\xi-1}$  terimi ile çarpılıp elde edilen eşitsizlik  $[0,1]$  üzerinden  $t$ 'ye göre integrale edilirse gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{\xi-1}\rho(tn_1 + (1-t)n_2)\sigma(tn_1 + (1-t)n_2) dt \\
& \leq \frac{1}{\xi+2} \left[ \rho(n_1)\sigma(n_1) + \frac{2}{\xi(\xi+1)}\rho(n_2)\sigma(n_2) \right] \\
& + \frac{1}{(\xi+1)(\xi+2)} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)] \\
& - c(n_2 - n_1)^2 \frac{1}{(\xi+2)(\xi+3)} \left[ \rho(n_1) + \frac{2\rho(n_2)}{\xi+1} \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.7) eşitsizliğinin sol tarafında  $tn_1 + (1-t)n_2 = u$  değişken değişimi yapılırsa ve elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)}$  ile çarpılıp elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafına da  $\frac{1-\xi}{(n_2-n_1)^\xi B(\xi)}$   $\rho\sigma(n_2)$  terimi eklenirse (4.4) ile verilen eşitsizlik elde edilir.

**Sonuç 4.4:** Teorem 4.3'te  $\xi = 1$  seçilirse (4.4) eşitsizliği Teorem 2.10'da verilen (2.8) eşitsizliğine indirgenir.

**Teorem 4.5:**  $n_1, n_2 \in I$ ,  $n_1 < n_2$  olmak üzere  $\rho, \sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonları  $I$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyonlar olsun. Eğer  $\rho\sigma \in L[n_1, n_2]$  ise  $\xi \in (0,1]$  için

$$\frac{1}{(n_2 - n_1)^\xi} \left( {}^{AB}I_{n_1}^\xi \{ \rho\sigma(n_2) \} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left\{ \frac{1}{\xi+2} \left[ \rho(n_1)\sigma(n_1) + \frac{2}{\xi(\xi+1)} \rho(n_2)\sigma(n_2) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{(\xi+1)(\xi+2)} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)] \\
&- \frac{c(n_2-n_1)^2}{(\xi+2)(\xi+3)} \left[ \rho(n_1) + \frac{2\rho(n_2)}{\xi+1} + \sigma(n_1) + \frac{2\sigma(n_2)}{\xi+1} \right] \\
&\left. + c^2(n_2-n_1)^4 \frac{2}{(\xi+2)(\xi+3)(\xi+4)} \right\} + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)^\xi B(\xi)} \rho\sigma(n_2) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat:** Güçlü konveks fonksiyonun tanımı yardımıyla her  $n_1, n_2 \in I$  olmak üzere  $\rho$  ve  $\sigma$  fonksiyonları için sırasıyla (2.3) ve (4.5) eşitsizlikleri yazılır. (2.3) ve (4.5) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\rho(tn_1 + (1-t)n_2)\sigma(tn_1 + (1-t)n_2) \\
&\leq t^2\rho(n_1)\sigma(n_1) + t(1-t)\rho(n_1)\sigma(n_2) - ct^2(1-t)(n_2-n_1)^2\rho(n_1) \\
&+ t(1-t)\sigma(n_1)\rho(n_2) + (1-t)^2\rho(n_2)\sigma(n_2) - ct(1-t)^2(n_2-n_1)^2\rho(n_2) \\
&- ct^2(1-t)(n_2-n_1)^2\sigma(n_1) - ct(1-t)^2(n_2-n_1)^2\sigma(n_2) \\
&+ c^2t^2(1-t)^2(n_2-n_1)^4 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1'in ve Teorem 4.3'ün ispatındaki adımlara benzer olarak (4.9) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{\xi-1}$  terimi ile çarpılıp elde edilen eşitsizlik  $[0,1]$  üzerinden  $t$ 'ye göre integre edilirse gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\xi-1} \rho(tn_1 + (1-t)n_2)\sigma(tn_1 + (1-t)n_2) dt \\
&\leq \frac{1}{\xi+2} \left[ \rho(n_1)\sigma(n_1) + \frac{2}{\xi(\xi+1)} \rho(n_2)\sigma(n_2) \right] \\
&+ \frac{1}{(\xi+1)(\xi+2)} [\rho(n_1)\sigma(n_2) + \rho(n_2)\sigma(n_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c(n_2 - n_1)^2}{(\xi + 2)(\xi + 3)} \left[ \rho(n_1) + \frac{2\rho(n_2)}{\xi + 1} + \sigma(n_1) + \frac{2\sigma(n_2)}{\xi + 1} \right] \\
& + c^2(n_2 - n_1)^4 \frac{2}{(\xi + 2)(\xi + 3)(\xi + 4)} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.10) eşitsizliğinin sol tarafında  $tn_1 + (1 - t)n_2 = u$  değişken değişimi yapılırsa ve elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)}$  ile çarpılıp elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafına da  $\frac{1-\xi}{(n_2-n_1)^\xi B(\xi)} \rho\sigma(n_2)$  terimi eklenirse (4.8) ile verilen eşitsizlik elde edilir.

**Sonuç 4.6:** Teorem 4.5'te  $\xi = 1$  seçilirse (4.8) eşitsizliği Teorem 2.9'da verilen (2.7) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 3.1 kullanılarak birinci mertebeden türevlerinin kuvvetleri güçlü konveks olan fonksiyonlar için elde edilen integral eşitsizlikler sıralanmıştır.

**Teorem 4.7:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $\frac{M}{\xi+1} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi+2)(\xi+3)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi+2)(\xi+3)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$  ve  $\xi \in (0,1]$  için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\
& - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \\
& \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{M}{\xi + 1} - \frac{c(n - n_1)^2}{(\xi + 2)(\xi + 3)} \right) \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{M}{\xi + 1} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi + 2)(\xi + 3)} \right) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Lemma 3.1'deki eşitlik ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi |\rho'(tn + (1-t)n_1)| dt \\
& \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi |\rho'(tn + (1-t)n_2)| dt \quad (4.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. (4.12) eşitsizliğinde  $|\rho'|$  fonksiyonunun  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \left| \right. \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi [t|\rho'(n)| + (1-t)|\rho'(n_1)| - ct(1-t)(n - n_1)^2] dt \\
& \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 t^\xi [t|\rho'(n)| + (1-t)|\rho'(n_2)| - ct(1-t)(n_2 - n)^2] dt \quad (4.13)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.13) eşitsizliğinde  $|\rho'| \leq M$  oluşu dikkate alınır ve (4.13) eşitsizliğinde gerekli integral hesaplamaları yapılırsa (4.11) eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.8:** Teorem 4.7'de  $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$  seçilirse

$$\left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + {}_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\} \right] \\
& \leq \frac{(n_2 - n_1)^{\xi}}{2^{\xi} B(\xi) \Gamma(\xi)} \left( \frac{M}{\xi + 1} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{4(\xi + 2)(\xi + 3)} \right) \tag{4.14}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.9:** Teorem 4.7’de  $\xi = 1$  seçilirse (4.11) eşitsizliği Teorem 2.12’de verilen (2.10) eşitsizliğine indirgenir.

**Sonuç 4.10:** Sonuç 4.8’de  $\xi = 1$  seçilirse (4.14) eşitsizliği Sonuç 2.13’te verilen (2.11) eşitsizliğine indirgenir.

**Teorem 4.11:**  $n_1, n_2 \in I^{\circ}$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^{\circ}$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $M^q \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{6}, \frac{c(n_2-n)^2}{6} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in (0,1]$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1) B(\xi) \Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^{\xi} + (n - n_1)^{\xi}] \right. \\
& - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_1)\} + {}_n^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\} \right] \\
& \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1) B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1) B(\xi) \Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M^q - \frac{c(n - n_1)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1) B(\xi) \Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M^q - \frac{c(n_2 - n)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Lemma 3.1'deki eşitlik ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla (4.12) eşitsizliği elde edilir. (4.12) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği ve  $|\rho'|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\rho'(tn + (1-t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\rho'(tn + (1-t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left( \int_0^1 [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_1)|^q - ct(1-t)(n - n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left( \int_0^1 [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2 - n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.16) eşitsizliğinde  $|\rho'| \leq M$  oluşu kullanılırsa ve gerekli olan integral hesaplamaları yapılırsa (4.15) ile verilen eşitsizlik elde edilerek ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.12:** Teorem 4.11’de  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\}}{2} \right] \right| \\ & \leq \frac{(n_2-n_1)^{\xi}}{2^{\xi}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M^q - \frac{c(n_2-n_1)^2}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.13:** Teorem 4.11’de  $\xi = 1$  seçilirse (4.15) eşitsizliği Teorem 2.14’te verilen (2.12) eşitsizliğine indirgenir.

**Sonuç 4.14:** Sonuç 4.12’de  $\xi = 1$  seçilirse (4.17) eşitsizliği Sonuç 2.15’te verilen (2.13) eşitsizliğine indirgenir.

**Teorem 4.15:**  $n_1, n_2 \in I^{\circ}$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^{\circ}$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $\frac{M^q}{\xi+1} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi+2)(\xi+3)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi+2)(\xi+3)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in (0,1]$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho(n)}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2-n)^{\xi} + (n-n_1)^{\xi}] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\ & \leq \frac{(n-n_1)^{\xi+1}}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M^q}{\xi+1} - \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi+2)(\xi+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M^q}{\xi + 1} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi + 2)(\xi + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat:** (4.12) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği farklı bir formda uygulanırsa ve  $|\rho'|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^\xi dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 t^\xi |\rho'(tn + (1-t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^\xi dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 t^\xi |\rho'(tn + (1-t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^\xi dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left( \int_0^1 t^\xi [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_1)|^q - ct(1-t)(n - n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^\xi dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left( \int_0^1 t^\xi [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2 - n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.19) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.19) eşitsizliğinde  $|\rho'| \leq M$  oluşu kullanılırsa ve gerekli olan integral hesaplamaları yapılırsa (4.18) ile verilen eşitsizlik elde edilerek ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.16:** Teorem 4.15'te  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\}}{2} \right] \right| \\ & \leq \frac{(n_2-n_1)^{\xi}}{2^{\xi}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{1}{\xi+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M^q}{\xi+1} - \frac{c(n_2-n_1)^2}{4(\xi+2)(\xi+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.17:** Teorem 4.15'te  $\xi = 1$  seçilirse (4.18) eşitsizliği Teorem 2.16'da verilen (2.14) eşitsizliğine indirgenir.

**Sonuç 4.18:** Sonuç 4.16'da  $\xi = 1$  seçilirse (4.20) eşitsizliği Sonuç 2.17'de verilen (2.15) eşitsizliğine indirgenir.

**Teorem 4.19:**  $n_1, n_2 \in I^{\circ}$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^{\circ}$  üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho'|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho'| \leq M$  ve  $\frac{M^q}{\xi^{p+1}} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi p+2)(\xi p+3)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi p+2)(\xi p+3)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in (0,1]$ ,  $q \geq p > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho(n)}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2-n)^{\xi} + (n-n_1)^{\xi}] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\}}{n} \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \Big| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{q - 1}{\xi(q - p) + q - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left( \frac{M^q}{\xi p + 1} - \frac{c(n - n_1)^2}{(\xi p + 2)(\xi p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{q - 1}{\xi(q - p) + q - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left( \frac{M^q}{\xi p + 1} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi p + 2)(\xi p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 4.15'in ispatında olduğu gibi (4.12) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği farklı bir formda uygulanırsa ve  $|\rho'|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi \left( \frac{q-p}{q-1} \right)} dt \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left( \int_0^1 t^{\xi p} |\rho'(tn + (1-t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi \left( \frac{q-p}{q-1} \right)} dt \right)^{1 - \frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^1 t^{\xi p} |\rho'(tn + (1-t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{(n_2 - n_1)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi \frac{(q-p)}{(q-1)}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{\xi p} [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_1)|^q - ct(1-t)(n - n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \int_0^1 t^{\xi \frac{(q-p)}{(q-1)}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{\xi p} [t|\rho'(n)|^q + (1-t)|\rho'(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2 - n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.22) eşitsizliğinde  $|\rho'| \leq M$  oluşu kullanılırsa ve gerekli olan integral hesaplamaları yapılırsa (4.21) ile verilen eşitsizlik elde edilerek ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.20:** Teorem 4.19'da  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{n_2}^{\xi}}{\frac{n_1+n_2}{2}} \{\rho(n_2)\} \right] \right| \\
& \leq \frac{(n_2 - n_1)^{\xi}}{2^{\xi}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left( \frac{q-1}{\xi(q-p) + q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \frac{M^q}{\xi p + 1} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{4(\xi p + 2)(\xi p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında Lemma 3.2 kullanılarak ikinci mertebeden türevlerinin kuvvetleri güçlü konveks olan fonksiyonlar için elde edilen integral eşitsizlikler sıralanmıştır.

**Teorem 4.21:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho''|$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho'' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho''| \leq M_1$  ve  $\frac{M_1}{\xi+2} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi+3)(\xi+4)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi+3)(\xi+4)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$  ve  $\xi \in [0,1]$  için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{M_1}{\xi + 2} - \frac{c(n - n_1)^2}{(\xi + 3)(\xi + 4)} \right) \\ & + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{M_1}{\xi + 2} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi + 3)(\xi + 4)} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Lemma 3.2'deki eşitlik ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \int_0^1 t^{\xi+1} |\rho''(tn + (1-t)n_1)| dt \\ & + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \int_0^1 t^{\xi+1} |\rho''(tn + (1-t)n_2)| dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

eşitsizliği yazılır. (4.25) eşitsizliğinde  $|\rho''|$  fonksiyonunun  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \\
& \times \int_0^1 t^{\xi+1} [t|\rho''(n)| + (1 - t)|\rho''(n_1)| - ct(1 - t)(n - n_1)^2] dt \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \\
& \times \int_0^1 t^{\xi+1} [t|\rho''(n)| + (1 - t)|\rho''(n_2)| - ct(1 - t)(n_2 - n)^2] dt \quad (4.26)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.26) eşitsizliğinde  $|\rho''| \leq M_1$  oluşu dikkate alınır ve (4.26) eşitsizliğindeki gerekli integral hesaplamaları yapılırsa (4.24) ile verilen eşitsizliğe ulaşılır.

**Sonuç 4.22:** Teorem 4.21'de  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{1}{(n_2 - n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] \right| \\
& \leq \frac{(n_2 - n_1)^{\xi+1}}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{M_1}{\xi + 2} - \frac{c(n_2 - n_1)^2}{4(\xi + 3)(\xi + 4)} \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.23:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho''|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho'' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho''| \leq M_1$  ve  $M_1^q \geq$

$\max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{6}, \frac{c(n_2-n)^2}{6} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in [0,1]$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{1}{(\xi + 1)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M_1^q - \frac{c(n - n_1)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{1}{(\xi + 1)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M_1^q - \frac{c(n_2 - n)^2}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.28) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Lemma 3.2'deki eşitlik ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla (4.25) eşitsizliği elde edilir. (4.25) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği ve  $|\rho''|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\rho''(tn + (1-t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\rho''(tn + (1-t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^1 [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_1)|^q - ct(1-t)(n-n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2-n)^{\xi+2}}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_0^1 [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2-n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.29) eşitsizliğinde  $|\rho''| \leq M_1$  oluşu dikkate alınır ve (4.29) eşitsizliğindeki gerekli integral hesaplamaları yapılırsa (4.28) ile verilen eşitsizliğe ulaşılır.

**Sonuç 4.24:** Teorem 4.23'te  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(n_2-n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_2)\}}{2} \right] \right| \\
& \leq \frac{(n_2-n_1)^{\xi+1}}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \frac{1}{(\xi+1)p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( M_1^q - \frac{c(n_2-n_1)^2}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.25:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho''|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho'' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho''| \leq M_1$  ve  $\frac{M_1^q}{\xi+2} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi+3)(\xi+4)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi+3)(\xi+4)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\left| \frac{1}{n_2-n_1} \left[ {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \Big| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{1}{\xi + 2} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M_1^q}{\xi + 2} - \frac{c(n - n_1)^2}{(\xi + 3)(\xi + 4)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{1}{\xi + 2} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M_1^q}{\xi + 2} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi + 3)(\xi + 4)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** (4.25) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği farklı bir formda uygulanırsa ve  $|\rho''|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} |\rho''(tn + (1-t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} |\rho''(tn + (1-t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{\xi+1} [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_1)|^q - ct(1-t)(n - n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{\xi+1} dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\times \left( \int_0^1 t^{\xi+1} [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2-n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.32)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.32) eşitsizliğinde  $|\rho''| \leq M_1$  oluşu dikkate alınır ve (4.32) eşitsizliğindeki gerekli integral hesaplamaları yapılırsa (4.31) ile verilen eşitsizliğe ulaşılır.

**Sonuç 4.26:** Teorem 4.25'te  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(n_2 - n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_2)\}}{2} \right] \right| \\ & \leq \frac{(n_2 - n_1)^{\xi+1}}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \frac{1}{\xi+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{M_1^q}{\xi+2} - \frac{c(n_2-n_1)^2}{4(\xi+3)(\xi+4)} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.27:**  $n_1, n_2 \in I^\circ$  ve  $n_1 < n_2$  için  $\rho: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $|\rho''|^q$ ,  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks ise  $\rho'' \in L[n_1, n_2]$ ,  $|\rho''| \leq M_1$  ve  $\frac{M_1^q}{\xi p + p + 1} \geq \max \left\{ \frac{c(n-n_1)^2}{(\xi p + p + 2)(\xi p + p + 3)}, \frac{c(n_2-n)^2}{(\xi p + p + 2)(\xi p + p + 3)} \right\}$  olmak üzere her  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^{\xi} \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^{\xi} \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\ & \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2-n)^{\xi} + (n-n_1)^{\xi}] + \frac{(n-n_1)^{\xi+1} - (n_2-n)^{\xi+1}}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \rho'(n) \right| \\ & \leq \frac{(n-n_1)^{\xi+2}}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \frac{q-1}{(\xi+1)(q-p)+q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{M_1^q}{\xi p + p + 1} - \frac{c(n - n_1)^2}{(\xi p + p + 2)(\xi p + p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \frac{q - 1}{(\xi + 1)(q - p) + q - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \times \left( \frac{M_1^q}{\xi p + p + 1} - \frac{c(n_2 - n)^2}{(\xi p + p + 2)(\xi p + p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 4.25'in ispatında olduğu gibi (4.25) eşitsizliğinde sırasıyla Hölder eşitsizliği farklı bir formda uygulanırsa ve  $|\rho''|^q$ 'nin  $[n_1, n_2]$  üzerinde  $c > 0$  modülü ile güçlü konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n_2 - n_1} \left[ {}^{AB}I_n^\xi \{\rho(n_1)\} + {}^{AB}I_{n_2}^\xi \{\rho(n_2)\} \right] - \frac{1 - \xi}{(n_2 - n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{\rho(n)}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)} [(n_2 - n)^\xi + (n - n_1)^\xi] + \frac{(n - n_1)^{\xi+1} - (n_2 - n)^{\xi+1}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \rho'(n) \right| \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)\left(\frac{q-p}{q-1}\right)} dt \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} |\rho''(tn + (1 - t)n_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2 - n)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)\left(\frac{q-p}{q-1}\right)} dt \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)p} |\rho''(tn + (1 - t)n_2)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{(n - n_1)^{\xi+2}}{(n_2 - n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)\left(\frac{q-p}{q-1}\right)} dt \right)^{1 - \frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)^p} [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_1)|^q - ct(1-t)(n-n_1)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(n_2-n)^{\xi+2}}{(n_2-n_1)B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)\left(\frac{q-p}{q-1}\right)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^1 t^{(\xi+1)^p} [t|\rho''(n)|^q + (1-t)|\rho''(n_2)|^q - ct(1-t)(n_2-n)^2] dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.35) eşitsizliğinde  $|\rho''| \leq M_1$  oluşu dikkate alınır ve (4.35) eşitsizliğindeki gerekli integral hesaplamaları yapılırsa (4.34) ile verilen eşitsizliğe ulaşılır.

**Sonuç 4.28:** Teorem 4.27’de  $n = \frac{n_1+n_2}{2}$  seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(n_2-n_1)^{\xi-1}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \rho\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) + \frac{1-\xi}{(n_2-n_1)B(\xi)} [\rho(n_1) + \rho(n_2)] \right. \\
& \left. - \frac{1}{(n_2-n_1)} \left[ {}^{AB}I_{\frac{n_1+n_2}{2}}^{\xi} \{\rho(n_1)\} + \frac{{}^{AB}I_{n_2}^{\xi}}{2} \{\rho(n_2)\} \right] \right| \\
& \leq \frac{(n_2-n_1)^{\xi+1}}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi+1)} \left( \frac{q-1}{(\xi+1)(q-p)+q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \frac{M_1^q}{\xi p + p + 1} - \frac{c(n_2-n_1)^2}{4(\xi p + p + 2)(\xi p + p + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.36)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER**

Bu çalışmada Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla güçlü konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler literatürde güçlü konveks fonksiyonlar için bu operatörler yardımıyla elde edilen ilk sonuçlar olması açısından önemlidir. Ayrıca bu sonuçların bazılarının literatürde daha önce elde edilmiş olan eşitsizliklerin genelleştirmelerinin olduğu gözlemlenmiştir. Dördüncü bölümde verilen sonuçlar Kızıl ve Avcı Ardıç [43] tarafından hazırlanan “Inequalities for strongly convex functions via Atangana-Baleanu integral operators” başlıklı makalede sunulmuştur.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, tez çalışmasının üçüncü bölümünde verilen lemmaları kullanarak farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni sonuçlar üretebilecekleri gibi farklı lemmalar kullanarak güçlü konveks fonksiyonlar için de yeni sonuçlar üretebilir.

**KAYNAKLAR**

- [1] B.G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier B.V., 2005.
- [2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1952.
- [3] E.F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1961.
- [4] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*. Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970.
- [5] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [7] J.E. Pečarić, F. Proschan ve Y.L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. United States of America: Academic Press, Inc., 1992.
- [8] A.W. Roberts ve D.E. Varberg, *Convex Functions*. New York, London: Academic Press, 1973.
- [9] J.E. Pečarić, *Convex Functions: Inequalities*. Serbocroatian, Beograd: 1987.
- [10] C.P. Niculescu ve L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*. United States of America: Springer, 2006.
- [11] S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. Victoria University: RGMIA Monographs, 2000.
- [12] R. Gorenflo ve F. Mainardi, "Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order", arXiv:0805.3823v1 [math-ph] 25 May 2008.
- [13] S.G. Samko, A.A. Kilbas ve O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [14] B. Ross, "The development of fractional calculus 1695-1900", *Historia Mathematica*, vol. 4, pp. 75-89, 1977.
- [15] K.B. Oldham ve J. Spanier, *The Fractional Calculus*. New York: Academic Press, 1974.
- [16] J.T. Machado, V. Kiryakova ve F. Mainardi, "Recent history of fractional calculus", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, pp. 1140-1153, 2011.
- [17] H. Anton ve C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [18] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi, 2000.
- [19] B.T. Polyak, "Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions", *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 7, pp. 72-75, 1966.

- [20] S. Ivelić Bradanović, “Sherman’s inequality and its converse for strongly convex functions with applications to generalized  $f$ -divergences”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, pp. 2680-2696, 2019.
- [21] Ch. Hermite, “Sur deux limites d’une intégrale définie”, *Mathesis*, vol. 3, pp. 82, 1883.
- [22] N. Merentes ve K. Nikodem, “Remarks on strongly convex functions”, *Aequationes Mathematicae*, vol. 80, pp. 193-199, 2010.
- [23] A. Azócar, K. Nikodem ve G. Roa, “Fejér-type inequalities for strongly convex functions”, *Annales Mathematicae Silesianae*, vol. 26, pp. 43-54, 2012.
- [24] S.S. Dragomir ve K. Nikodem, “Jensen’s and Hermite-Hadamard’s type inequalities for lower and strongly convex functions on normed spaces”, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 44, pp. 1337-1349, 2018.
- [25] M. Klaričić Bakula ve K. Nikodem, “On the converse Jensen inequality for strongly convex functions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 434, pp. 516–522, 2016.
- [26] M. Klaričić Bakula, “Jensen–Steffensen inequality for strongly convex functions”, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2018, pp. 1–12, 2018.
- [27] K. Nikodem ve Z. Páles, “Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions”, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, vol. 5, no. 1, pp. 83-87, 2011.
- [28] B. Meftah, “New integral inequalities via strongly convexity”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol 5, no. 2, pp. 266-270, 2017.
- [29] S. Turhan, N. Okur ve S. Maden, “Hermite-Hadamard type inequality for strongly convex functions via Sugeno integrals”, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, vol. 8, no. 1, pp. 1-10, 2017.
- [30] H.R. Moradi, M.E. Omidvar, M.A. Khan ve K. Nikodem, “Around Jensen’s inequality for strongly convex functions”, *Aequationes Mathematicae*, vol. 92, pp. 25-37, 2018.
- [31] M. Kadakal, H. Kadakal ve İ. İşcan, “Some new integral inequalities for  $n$ -times differentiable strongly convex functions”, *Karaelmas Science and Engineering Journal*, vol. 8, no.1, pp. 147-150, 2018.
- [32] E. Set, M.E. Özdemir, M.Z. Sarıkaya ve A.O. Akdemir, “Ostrowski-type inequalities for strongly convex functions”, *Georgian Mathematical Journal*, vol. 25, no. 1, pp. 109–115, 2018.
- [33] A. Ostrowski, “Über die absolutabweichung einer differentierbaren funktion von ihrem integralmittelwert”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, pp. 226-227, 1938.
- [34] P.I. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*. New York: Springer Science & Business Media, 2009.
- [35] T. Abdeljawad ve D. Baleanu, “On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions”, *Reports on Mathematical Physics*, vol. 80, no. 1, pp. 11-27, 2017.
- [36] A. Atangana ve D. Baleanu, “New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model”, *Thermal Science*, vol. 20, no. 2, pp. 763-769, 2016.

- [37] T. Abdeljawad ve D. Baleanu, “Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel”, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 10, pp. 1098-1107, 2017.
- [38] M.U. Awan, M.A. Noor, T.-S. Du ve K.I. Noor, “New refinements of fractional Hermite-Hadamard inequality”, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (RASCAM)*, vol. 113, pp. 21-29, 2019.
- [39] G. Farid, H. Yasmeen, C.Y. Jung, S.H. Shim ve G. Ha, “Refinements and generalizations of some fractional integral inequalities via strongly convex functions”, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2021, 2021.
- [40] E.R. Nwaeze ve S. Kermausuor, “Caputo–Fabrizio fractional Hermite–Hadamard type and associated results for strongly convex functions”, *The Journal of Analysis*, vol. 29, pp. 1351-1365, 2021.
- [41] Q. Li, M.S. Saleem, P. Yan, M.S. Zahoor ve M. Imran, “On strongly convex functions via Caputo-Fabrizio-type fractional integral and some applications”, *Journal of Mathematics*, vol. 2021, 2021.
- [42] E. Set, S.I. Butt, A.O. Akdemir, A. Karaođlan ve T. Abdeljawad, “New integral inequalities for differentiable convex functions via Atangana-Baleanu fractional integral operators”, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 143, 2021.
- [43] Ő. Kızıl ve M. Avcı Ardiç, “Inequalities for strongly convex functions via Atangana-Baleanu integral operators”, *Turkish Journal of Science*, vol. 6, no. 2, pp. 96-109, 2021.