

HAZİRAN 2022

Doktora Tezi-Matematik

MEHMET AKİF ÇETİN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEÇİŞ ŞARTI İLE VERİLMİŞ PERİYODİK STURM-
LIOUVILLE PROBLEMİNİN PRÜFER ANALİZİ

MATEMATİK
DOKTORA TEZİ

MEHMET AKİF ÇETİN
HAZİRAN 2022

**GEÇİŞ ŞARTI İLE VERİLMİŞ PERİYODİK STURM-
LIOUVILLE PROBLEMİNİN PRÜFER ANALİZİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Doktora Tezi

Danışman

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

İkinci Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Mehmet Akif ÇETİN

Haziran 2022



©2022[Mehmet Akif ÇETİN]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet Akif ÇETİN

ABSTRACT

PRÜFER ANALYSIS OF PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH TRANSMISSION CONDITION

ÇETİN, Mehmet Akif

Ph.D. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Co-Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

June 2022

71 pages

There are several studies in the literature that prefer the Prüfer transformation to show the existence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem. Within the scope of this thesis, we first focused on these studies in the literature, and then discussed a periodic Sturm-Liouville problem with transmission condition. We chose this problem because the spectral analysis of a Sturm-Liouville problem with transmission condition has not been handled using the Prüfer transformation before. The transmission condition mentioned here is given at an inner discontinuity point of the interval where the problem we have chosen is defined. As a result of the investigations we have made, we have reached our goal and demonstrated the existence of the eigenvalues of a periodic Sturm-Liouville problem with transmission condition by Prüfer transformation. Thus, it has been revealed that this analysis method we have considered is simpler and requires less background than other methods in the literature for the same problem.

Key Words: Periodic Sturm-Liouville Problem, Transmission Condition, Prüfer Transformation.

ÖZET

PERİYODİK KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL TEORİSİ ÜZERİNE

ÇETİN, Mehmet Akif

Doktora Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

İkinci Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Haziran 2022

71 sayfa

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin varlığını gösterebilmek için Prüfer dönüşümünü tercih eden birkaç çalışma literatürde mevcuttur. Biz de bu tez kapsamında öncelikle literatürde yer alan bu çalışmalar üzerinde durup, sonrasında ise geçiş şartına sahip periyodik katsayılı bir Sturm-Liouville problemini ele aldık. Bu problemi tercih etmemizin sebebi, daha evvel geçiş şartı ile verilmiş bir Sturm-Liouville probleminin spektral analizinin Prüfer dönüşümü yardımıyla ele alınmamış olmasıydı. Burada adı geçen geçiş şartı, seçtiğimiz problemin tanımlı olduğu aralığın bir iç süreksizlik noktasında verilir. Yapmış olduğumuz incelemeler sonucunda hedefimize ulaşp, geçiş şartlı periyodik katsayılı bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin varlığını Prüfer dönüşümü yardımı ile göstermiş olduk. Böylece, incelemiş olduğumuz bu analiz yönteminin aynı problem için literatürde yapılmış olan diğer analiz yöntemlerinden daha sade olduğu ve o yöntemlere göre daha az altyapı gerektirdiği de ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Periyodik Sturm-Liouville Problemi, Geçiş Şartı, Prüfer Dönüşümü.



“Yusuf Ozan’a”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteklerini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emekleri olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah KABLAN'a ve Adıyaman Üniversitesi öğretim üyelerinden ikinci danışman hocam sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmada maddi destek sağlayan Gaziantep Üniversitesi BAP Yönetim Birimine (FEF.DT.19.43 no'lu proje) teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi destekleriyle hayatım boyunca yanımda olan başta anne ve babam olmak üzere tüm aileme, ayrıca çalışma süresince beni hep destekleyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I: GİRİŞ	1
BÖLÜM II: STURM-LIOUVILLE TEORİSİ.....	5
2.1. Lineer İkinci Mertebeden Denklemler	5
2.2. Çözümlerin Kökleri.....	8
2.3. Kendine Eş Diferansiyel Operatör	12
2.4. Sturm-Liouville Problemi.....	19
2.4.1. Özfonksiyonların Varlığı.....	20
BÖLÜM III: İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN SALINIM VE KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ VE PRÜFER DÖNÜŞÜMÜ	27
3.1. Karşılaştırma Teoremleri.....	27
3.2. Özdeğerlerin Varlığı.....	34
3.3. Periyodik Sınır Koşulları.....	39
BÖLÜM IV: PRÜFER DÖNÜŞÜMÜ İLE PERİYODİK STURM- LIOUVILLE PROBLEMİNE YAKLAŞIM.....	48
4.1. Prüfer Dönüşümü	49
4.2. Periyodik ve Antiperiyodik Özdeğerler	52
BÖLÜM V: GEÇİŞ ŞARTI İLE VERİLMİŞ PERİYODİK STURM- LIOUVILLE PROBLEMİNİN PRÜFER ANALİZİ.....	57
BÖLÜM VI: SONUÇLAR	65
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ (CV)	70
YAYINLAR	71

SEMBOLLER LİSTESİ

α	Alfa
β	Beta
λ	Lamda (Özdeğer)
ψ	Psi
$\mathcal{L}^1$	Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{L}^2$	Lebesgue kare-integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
φ	Fi
ρ	Ro
L	Diferansiyel operatör
ξ	Ksi
η	Eta
W	Wronskian determinanı
$G(x, \xi)$	Green fonksiyonu
δ	Delta
μ	Mü
θ	Teta
ω	Omega
C^n	n . mertebeye kadar tüm türevleri sürekli sınıf

BÖLÜM I

GİRİŞ

Sturm-Liouville teorisi, 19. yüzyılda diferansiyel denklemleri çözmek amacıyla geliştirilmiştir. Derinlemesine incelendiğinde bu teorinin, kuantum mekaniği için temel çerçeveyi oluşturan matematiğin kendisi olduğu fark edilir. Kuantum mekaniğinde, gözlemlenebilir olanı temsil eden bir kendine eş operatörün (genellikle Hermite operatörü) öz fonksiyonlarının süperpozisyonu olarak ifade edilen zamana bağlı bir fonksiyonu düşünürüz. Bu süperpozisyonadaki özfonksiyonların katsayıları olasılık genlikleridir. Hermite operatörü tarafından temsil edilen gözlemlenebilir miktarın bir ölçümü, operatörün özdeğerlerinden birini, süperpozisyonadaki özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon modülünün karesiyle orantılı bir olasılıkla üretir. Operatörün kendine eş olması özdeğerlerin reel (ve bu yüzden gözlemlenebilir) olmasını garanti eder. Ayrıca özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, kuantum durumlarının ilk etapta bir süperpozisyon olarak temsil edilmesini sağlayan eksiksiz ve ortogonal bir fonksiyonlar kümesi oluşturur. 19. yüzyılın Sturm-Liouville teorisi esasen aynı yapıya sahiptir ve aslında Sturm-Liouville özdeğer problemleri daha genel olarak matematiksel fizikte önemlidir. Çünkü, sıklıkla karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemleri (örneğin Poisson denklemi, difüzyon denklemi, dalga denklemi gibi) çözmek için değişkenlerine ayırma metodu kullanıldığında ortaya çıkarlar [1].

Spektral teori modern matematiğin tarihi içerisinde fiziksel ve matematiksel yapılar hakkında en bilgi verici araç olmuştur. Son altmış yıldaki matematiksel yayınlarla bu konu, özellikle de özdeğerler ve spektral teori oldukça hızlı bir gelişim göstermiştir. Katı hal fiziğinde ve kristallerin kuantum mekaniği ile ilgili metallerin teorisinde ortaya çıkan periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizikçilerin ve matematikçilerin ortak ilgi alanlarından biri olmuştur. İki ucu bağlanmış bir telin titreşimi, yüzey üzerindeki elektrostatik potansiyel, iletken bir çubuk üzerindeki ısı

iletimi gibi kuantum fiziğinden, dalga teorisine kadar birçok problem aşağıdaki Sturm-Liouville denkleminin değişik formları ile ifade edilmektedir:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad x \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Örneğin,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

biçimindeki bir boyutlu Schrödinger denklemi özel bir Sturm-Liouville denklemdir. Schrödinger denklemindeki E parçacığın enerjisini göstermektedir ki bu değer Sturm-Liouville denkleminde λ ile gösterilmiştir. Bu değere, Sturm-Liouville teorisinde Sturm-Liouville denkleminin bazı şartlarla oluşturduğu Sturm-Liouville operatörünün özdeğeri denir. Bu özdeğeri denkleminde yerleştirdiğimizde elde ettiğimiz çözüm fonksiyonuna da operatörün özfonksiyonu adı verilir. Matematikte, fiziksel öneminden dolayı bu özdeğerlerin ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların bulunması problemi oldukça önemlidir. Bu tür çalışmaların tümüne Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi denilmektedir. Bu matematiksel analizleri yapmanın birkaç yolu olmakla beraber en yaygını ve en eskisi, klasik yöntem olan diferansiyel hesap tekniklerinin kullanılmasıdır. Özellikle 1960 lardan sonra ortaya çıkmış olan diğer bir yöntem ise problemi ayırık (discrete) forma getirerek fark denklemlerini kullanmaktır. Spektral analizi yapmanın bir diğer yolu ise son yıllarda ortaya atılan Prüfer yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, problemin kutupsal forma dönüştürülmesi olarak da düşünülebilir.

Sturm ve Liouville zamanlarından yaklaşık yüz yıl öncesinden günümüze kadar, (1.1) türündeki denklemler,

$$y(a)\cos\alpha = (py)'(a)\sin\alpha, \quad y(b)\cos\beta = (py)'(b)\sin\beta \quad (1.2)$$

şeklindeki ayırık sınır koşullarına bağlı olarak çeşitli bağlamlarda incelenmiştir. Uzun bir süredir, bu problemin özdeğerlerinin varlığı ve özfonksiyonlarının salınımlılığı, (1.1) denkleminin λ ya bağlı olarak bulunan reel çözümlerinin köklerinin analiz edilmesi ile gösterilmiştir. Bu konu ile ilgili tüm bilgiler ve materyallerin 1920 lere kadar olan kısmı, ilk olarak 1926 yılında yayınlanan [2] kitabında ele alınmıştır. Yine

aynı yıl Prüfer, problemin yeni bir dönüşümünü elde ederek önceki uygulamaları daha da basit şekilde yapabilecek yeni bir yöntem bulmuştur [3]. Prüfer bu çalışmasında, $p, r > 0$ kabul ederek (1.1) denklemini ona denk olan

$$y' = \frac{z}{p}, \quad z' = (q - \lambda r)y \quad (1.3)$$

sistemine çevirmiştir ve daha sonra karşılık gelen faz uzayında kutupsal koordinatları kullanmış ve özdeğerlerin varlığını ve özfonksiyonların salınımlılığını basit bir şekilde göstermiştir.

O zamandan beridir, Prüfer dönüşümü, yukarıdaki temel teoriyi çalışan çoğu metinde tercih edilen yöntem olmuştur. Birçok kişi Prüfer'in yolunu takip etmiş ve sürekli p , q ve r katsayılarını ele almıştır [4]. Ancak bu tezde, örneğin [5] ve [6] da ele alındığı gibi, $\mathcal{L}^1$ koşulları göz önüne alınacaktır.

Hill'in 19. yüzyılın ikinci yarısındaki gezegenlerin hareketi ile ilgili çalışmalarını takiben,

$$Y(a) = \pm Y(b), \quad (Y = [y \quad y']^T) \quad (1.4)$$

şeklindeki periyodik (veya antiperiyodik) sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville denklemleri ilgi çekmeye başlamıştır. Burada (1.1)-(1.4) sınır değer probleminin özdeğerlerinin varlığını göstermek için iki temel yöntem belirlenmiştir. Bunlardan birincisi Floquet teorisi ve $d(\lambda)$ Hill diskriminantının incelenmesidir. Bu yöntem çok az bir alt yapı gerektirir, ancak özellikle $d''(\lambda)$ nın analizinde bir miktar alt yapı yer alır. İkinci yöntem ise varyasyonel metottur ki bu metot operatör teorisi ile ilgili önemli miktarda alt yapı gerektirmektedir. Bu tezde tüm bu analizleri yapmak için Prüfer dönüşümü kullanılacaktır. Bunu yapmamız için birçok neden mevcuttur. Öncelikle bu yöntem Floquet/Hill yöntemine göre daha az karmaşık, basit ve kısadır [4]. Ayrıca bu yöntem, önemli miktarda operatör teorisi alt yapısı gerektiren Eastham [7] veya Weidmann'ın [6] kullandığı yöntemden çok daha az alt yapı gerektirir. Diğer yandan da, yalnızca özdeğer varlığının değil aynı zamanda salınım ve karşılaştırma ilkeleri, asimptotikler ve iç içe geçme gibi diğer konuların da birleşik bir değerlendirmesine izin verecek kadar çok yönlüdür.

Genel olarak Sturm-Liouville operatörleri, operatörü oluşturan iki temel unsur olan diferansiyel denklem ve sınır şartlarının çeşitliliğine göre çok değişik adlandırılırlar. Bunlardan bazıları denklemin çeşidine göre düzenli [8,9,10,11,12], tekil noktaya sahip [8,9,10,11,12,13], katsayıları periyodik olan [14], katsayıları delta fonksiyonu olan [15,16], kuadratik demet [17] Sturm-Liouville operatörleri şeklinde adlandırılırken; sınır şartına göre ise ayrık [8,9,10,11,12], ayrık olmayan [8,9,10,11,12], geçiş şartlı [18], sınır şartlarında spektral parametre içeren [19] Sturm-Liouville operatörleri şeklinde adlandırılırlar. Kaynakları sadece yukarıda verilenlerle sınırlı tutsak da bu tür operatörler birçok matematikçi tarafından çok sık çalışılan problemler olmuştur. Ancak tüm bu denklemlerin spektral incelemeleri yapılırken Prüfer dönüşümünün [3,4] kullanılması ise sadece birkaç çeşit Sturm-Liouville operatörlerinde olmuştur. Bunlar düzenli Sturm-Liouville operatörleri [4,20,21], periyodik/antiperiyodik Sturm-Liouville operatörleri [22,23], Atkinson tipindeki yarı tanımlı Sturm-Liouville operatörü [24] ve Molcanov potansiyeline sahip tekil Sturm-Liouville operatörüdür [25]. Literatürde çok çeşitli Sturm-Liouville operatörleri varken henüz bunların sadece birkaçının spektral incelemesinin Prüfer dönüşümü ile yapılması bu tezin konusunun temel çıkış noktası olmuştur.

BÖLÜM II

STURM-LIOUVILLE TEORİSİ

Bu bölümde, Sturm-Liouville teorisi üzerinde durulmuştur [26]. $\mathcal{L}^2$ uzayındaki ortogonal fonksiyon kümeleri, uygun sınır koşulları altında bazı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri şeklinde doğal olarak ortaya çıkar. Bahsedilen türden denklemler genellikle, bu problemleri ve çözümlerinin özelliklerini inceleyen İsviçreli matematikçi Jacques Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville'den (1809-1882) sonra Sturm-Liouville sınır değer problemleri olarak anılır. Burada ele alınan diferansiyel denklemler doğrudan Newton'un hareket yasalarının matematiksel modellemesi olarak, fakat daha çok Laplace denklemi, ısı denklemi ve dalga denklemi gibi fiziğin klasik kısmi diferansiyel denklemlerini çözmek için değişkenlerine ayırma metodunu kullanmanın bir sonucu olarak ortaya çıkar.

2.1. Lineer İkinci Mertebeden Denklemler

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere I aralığında verilmiş

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemini düşünelim. Burada a_0 , a_1 , a_2 ve f ; I aralığı üzerinde verilmiş kompleks fonksiyonlardır. I da $f = 0$ olduğu zaman denklem homojen olarak adlandırılır. Aksi takdirde denkleme homojen değildir denir. Eğer herhangi bir $\varphi \in C^2(I)$ fonksiyonu (2.1) denkleminin bir çözümü ise denklemi sağlar ve her $x \in I$ için

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x)$$

yazılır. Eğer

$$a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

ikinci mertebeden diferansiyel operatörünü L ile gösterirsek bu takdirde (2.1) denklemi $Ly = f$ formunda yazılabilir. Burada L operatörü lineerdir. Yani herhangi $\varphi, \psi \in C^2(I)$ fonksiyonları ve herhangi $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sabitleri için

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi$$

eşitliği yazılabilir. Bu yüzden (2.1) denklemi lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksini belirtmediğimiz sürece ilgilendiğimiz tüm diferansiyel denklem ve operatörler lineer olacaktır. Lineer homojen denklemlerle ilgili bir temel özellik şudur: Çözümlerin herhangi bir lineer kombinasyonu da yine bir çözümdür. Şöyle ki, eğer φ ve ψ sırasıyla

$$L\varphi = 0, \quad L\psi = 0$$

denklemlerini sağlıyorsa bu takdirde herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi = 0$$

olduğu açıktır. Bu eşitlik, süperpozisyon ilkesi olarak bilinir.

Eğer a_0 fonksiyonu I aralığında köke sahip değilse, bu durumda (2.1) denklemi a_0 a bölünerek

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada $q = \frac{a_1}{a_0}$, $r = \frac{a_2}{a_0}$ ve $g = \frac{f}{a_0}$ dir. (2.1) ve (2.2) denklemlerinin denk oldukları açıktır, bu yüzden aynı çözüm kümesine sahiptirler. Bu durumda (2.1) denkleminin I da regüler denir. Aksi takdirde eğer bir $c \in I$ için $a_0(c) = 0$ oluyorsa denkleme singüler denir ve c noktasına da denklemin tekil noktası adı verilir.

Lineer denklemler için varlık teklik teoremi gereğince eğer q , r ve g fonksiyonları I da sürekli ve x_0 , I da bir nokta olmak üzere bu takdirde herhangi iki ξ ve η sayısı için (2.2) nin I da

$$\varphi(x_0) = \xi, \quad \varphi'(x_0) = \eta \quad (2.3)$$

şartını sağlayan tek bir φ çözümü vardır. (2.3) deki denklemler başlangıç koşulları olarak adlandırılır. (2.2) ve (2.3) denklem sistemine de başlangıç değer problemi adı verilir.

$I = [a, b]$ alırsak (2.1) denkleminin çözümleri a ve b de sınır koşullarına bağlı olabilir. Bu koşullar aşağıdaki formlardan biri şeklinde olabilir.

$$\begin{aligned} (i) \quad & y(c) = \xi, \quad y'(c) = \eta, \quad c \in \{a, b\} \\ (ii) \quad & y(a) = \xi, \quad y(b) = \eta \\ (iii) \quad & y'(a) = \xi, \quad y'(b) = \eta. \end{aligned}$$

Sınır koşulları (i) de olduğu gibi aynı c noktasında verildiğinde genellikle başlangıç koşulu olarak adlandırılır. Amacımız (2.1) denkleminin tek çözümünü elde etmek olduğunda genellikle c noktasının I aralığının uç noktalarından biri olması gerekmez, c noktası iç noktalardan herhangi biri de olabilir. Ancak biz, çoğu fiziksel uygulamada olduğu gibi, sınır veya başlangıç koşullarını I aralığının uç noktalarında almayı tercih edeceğiz. (i)–(iii) formundaki sınır koşulları

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \xi \quad (2.4)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y'(a) = \eta \quad (2.5)$$

olarak genelleştirilebilir. Burada α_i ve β_i , $\sum_{i=1}^4 |\alpha_i| > 0$ ve $\sum_{i=1}^4 |\beta_i| > 0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir. Yani burada α_i ve β_i ler hepsi birden aynı anda sıfır olmayacak şekilde seçilmişlerdir. (2.1), (2.4) ve (2.5) denklem sistemine sınır değer problemi denir.

(2.4) ve (2.5) sınır koşulları $\xi = \eta = 0$ olduğunda homojen, $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ olduğunda ise ayrık olarak adlandırılır.

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta \quad (2.6)$$

formundaki ayrık sınır koşulları bizim için ayrı bir öneme sahiptir. (2.4) ve (2.5) deki katsayıların özel bir seçimiyle elde edilen

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \quad (2.7)$$

biçimindeki homojen şart da bizim için önemlidir. (2.7) ifadesine periyodik sınır koşulları adı verilir. Burada periyodik sınır koşullarının ayrık olmadığını belirtelim.

2.2. Çözümlerin Kökleri

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I \quad (2.8)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemi, çözümlerinin özelliklerini inceleyebilmek için açık bir şekilde çözmek gerekli değildir ve her zaman mümkün de değildir. Belirli koşullar altında, bu özellikleri tamamen denklemin parametreleri ve sınır koşulları belirler. Özellikle, bir çözümün köklerinin sayısı ve dağılımı, tekil noktaları, asimptotik davranışı ve ortogonalite özellikleri gibi niteleyici özelliklerinin tümü q ve r katsayıları ile verilen sınır koşulları tarafından belirlenir. Bu nedenle, bu katsayıların çözümün davranışı üzerindeki etkisini analiz ederek bu özelliklerden bazılarını çıkarmaya çalışabiliriz. Bu başlık altında, q ve r nin çözümlerin köklerinin dağılımına olan etkisini inceleyeceğiz. Ortogonalite de sonraki iki başlık altında ele alınacaktır.

$f: I \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktası için eğer $f(x_0) = 0$ ve x_0 ın bir U komşuluğundaki tüm $x \in I \cap U \setminus \{x_0\}$ için $f(x) \neq 0$ şartlarını sağlıyorsa x_0 a bu fonksiyonun izole kökü denir.

Lemma 2.1. Eğer y , (2.8) homojen denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise bu takdirde y nin kökleri I da izoledir.

İspat: y , (2.8) in bir çözümü olmak üzere $y(x_0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y'(x_0) = 0$ ise bu takdirde teklik teoremine göre y özdeş olarak sıfırdır. Eğer $y'(x_0) \neq 0$ ise bu takdirde, y' , I da sürekli olduğundan, x_0 ın bir U komşuluğu vardır ki burada $U \cap I$ üzerinde $y' \neq 0$ dır. Sonuç olarak $U \cap I$ üzerinde y , ya kesin olarak artan ya da kesin olarak azalandır.

Teorem 2.1. (Sturm Ayırma Teoremi) Eğer y_1 ve y_2

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise bu takdirde y_1 in kökleri y_2 nin köklerinden farklıdır. Ayrıca y_1 ve y_2 nin köklerinin oluşturduğu diziler birbirini takip eder yani y_1 , y_2 nin ardışık herhangi iki kökü arasında tam olarak bir köke sahiptir ve aynı şekilde bunun tam tersi de doğrudur.

İspat: y_1 ve y_2 lineer bağımsız olduğundan

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Wronskian determinantı sıfır olmaz ve bu yüzden I da bir işarete sahiptir. Öncelikle y_1 ve y_2 nin ortak bir kökünün olamayacağını belirtelim, aksi takdirde W , o noktada sıfır olurdu. Kabul edelim ki x_1 ve x_2 , y_2 nin ardışık iki kökü olsun. Bu takdirde

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0$$

$$W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0$$

olur ve $y_1(x_1)$, $y_1(x_2)$, $y_2'(x_1)$ ve $y_2'(x_2)$ sayılarının tamamı sıfırdan farklıdır. y_2' I da sürekli olduğundan, x_1 bir U_1 komşuluğuna sahiptir ve bu komşulukta y_2' işaret değiştirmez. Benzer olarak x_2 nin bir U_2 komşuluğu vardır ve bu komşulukta da y_2' işaret değiştirmez. Fakat y_2' in $U_1 \cap I$ ve $U_2 \cap I$ daki işaretleri aynı kalmaz, çünkü eğer y_2 bunlardan birinde artarsa bu takdirde diğerinde azalan olmak zorundadır. $W(x)$ in I da sabit bir işarete sahip olması için, $y_1(x_1)$ ve $y_2(x_2)$ nin zıt işaretlere sahip olması gerekir. Bu yüzden y_1 , sürekli olmasından dolayı, x_1 ve x_2 arasında en az bir köke sahiptir. Fakat böyle bir kök birden fazla olamaz. Çünkü eğer x_3 ve x_4 , y_1 in x_1 ve x_2 arasında kalan iki kökü olursa bu takdirde benzer mantıkla y_2 nin x_3 ve x_4 arasında kökünün olduğu sonucuna varırız. Ancak bu durum x_1 ve x_2 nin y_2 nin ardışık kökleri olmasıyla çelişir.

Sonuç 2.1. Eğer $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ denkleminin iki çözümünün I da ortak bir kökü varsa bu takdirde bu çözümler lineer bağımlıdır.

(2.8) denkleminin köklerinin dağılımını incelemek için ortadaki terim olan qy' ifadesinden kurtulup denklemi

$$u'' + \rho(x)u = 0 \quad (2.9)$$

şekline dönüştürürsek bizim için çok daha uygun olacaktır. Bunun için

$$y(x) = u(x)v(x)$$

dersek

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$y''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

olur. Bu türevleri (2.8) denkleminde yerine yazarsak

$$vu'' + (2v' + qv)u' + (v'' + qv' + rv)u = 0$$

şeklini alır. O halde $2v' + qv = 0$ seçerek (2.9) u elde ederiz. Burada

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_a^x q(t) dt\right) \quad (2.10)$$

ve

$$\rho(x) = r(x) - \frac{1}{4}q^2(x) - \frac{1}{2}q'(x)$$

olur. v üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$ de asla köke sahip değildir. Bu yüzden u nun kökleri y nin köklerine karşılık gelmiş olur. Böylece (2.8) denkleminin köklerinin dağılımını incelemek amacıyla dikkatimizi (2.9) denkleminde çevirebiliriz.

Teorem 2.2. (Sturm Karşılaştırma Teoremi) φ ve ψ sırasıyla

$$y'' + r_1(x)y = 0$$

$$u'' + r_2(x)u = 0, \quad x \in I$$

denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri olsun ve ayrıca her $x \in I$ için $r_1(x) \geq r_2(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $r_1(x) \equiv r_2(x)$ ve φ, ψ in bir sabit katı olmadığı sürece, φ, ψ in ardışık her iki kökünün arasında en az bir köke sahiptir.

İspat: x_1 ve x_2 , I da ψ in ardışık iki kökü olsun ve φ nin (x_1, x_2) açık aralığında kökünün olmadığını kabul edelim. φ ve ψ in her ikisinin de (x_1, x_2) üzerinde pozitif olduğunu kabul edelim. Aksi takdirde negatif fonksiyonun işaretini değiştiririz. φ' ve ψ' sürekli olduğundan $\varphi'(x_1) \geq 0$ ve $\psi'(x_2) \leq 0$ dır ve bu yüzden φ ve ψ in Wronskian determinantları

$$W(x_1) = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geq 0, \quad W(x_2) = \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0 \quad (2.11)$$

şartını sağlar. Fakat her $x \in (x_1, x_2)$ için

$$\begin{aligned} W'(x) &= \varphi(x)\psi''(x) - \varphi''(x)\psi(x) \\ &= [r_1(x) - r_2(x)]\varphi(x)\psi(x) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan W , (x_1, x_2) de artan bir fonksiyondur. Fakat bu, (2.11) denklemiyle çelişir. Bu çelişkinin olmaması için $r_1(x) - r_2(x) \equiv 0$ ve $W(x) \equiv 0$ olmalıdır ki bu durumda da φ ve ψ lineer bağımlı olacaklardır.

Sonuç 2.2. φ , I da $y'' + r(x)y = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $r(x) \leq 0$ ise bu takdirde φ , I da en fazla bir köke sahiptir.

İspat: Eğer φ , I da x_1 ve x_2 gibi iki köke sahipse bu takdirde Teorem 2.2 den $u'' = 0$ in $\psi(x) = 1$ çözümünün (x_1, x_2) de köke sahip olması gerekir ki bu imkansızdır.

Eğer

$$y'' + r(x)y = 0, \quad x \in I \quad (2.12)$$

denkleminin bir aşık olmaya çözümüm sonsuz sayıda köke sahipse bu durumda denkleme salınımlı denir. Teorem 2.2 ye göre bu denklemin salınımlı çözümlere sahip olup olmadığı r fonksiyonuna bağlıdır. Eğer $r(x) \leq 0$ ise Sonuç 2.2 den dolayı çözümler salınım yapmaz. Fakat, eğer bazı pozitif k sabitleri için

$$r(x) > k^2 > 0, \quad x \in I$$

ise bu takdirde (2.12) nin I daki herhangi bir çözümüm, $y'' + k^2 y = 0$ ın herhangi bir çözümümün, örneğin $a \sin k(x-b)$ gibi, köklerinin arasına dağılan sonsuz sayıda köke sahiptir ki bu kökler

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}$$

olarak verilir. Bu yüzden I nın, uzunluğu $\frac{\pi}{k}$ olan tüm alt aralıkları (2.12)

denkleminin en az bir köküne sahiptir ve k arttıkça köklerin sayısının da artmasını bekleriz. Elbette bu, r nin sabit olduğu durumdur.

Sturm Ayırma Teoremi'nden çıkarabileceğimiz diğer bir sonuç da şudur: Eğer I aralığı sonsuz ve

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

denkleminin bir çözümüm salınımlıysa bu takdirde tüm çözümleri salınımlıdır.

2.3. Kendine Eş Diferansiyel Operatör

Genel formda yazılmış lineer ikinci mertebeden (2.1) diferansiyel denklemine biraz değiştirilmiş bir gösterimle geri dönüp

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.13}$$

denklemini göz önüne alalım. Şimdi, bu denklemin çözümlerinin ortogonalite özelliklerini araştırmak istiyoruz. Bu, doğal olarak, $\mathcal{L}^2$ de bulunan (2.13) ün C^2 deki çözümlerini aramamız gerektiği anlamına gelir. (2.13) denklemini

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \quad (2.14)$$

ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel operatör olmak üzere

$$Ly = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $y, \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I)$ lineer vektör uzayındandır.

Kendine eş matrislerin bilinen özelliklerini $\mathcal{L}^2$ uzayına genişletmek için yapacağımız ilk iş, (2.14) operatörüyle tanımlanmış olan

$$L : \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I) \rightarrow \mathcal{L}^2(I)$$

operatörünün eşleniğinin formunu elde etmektir. Burada bu işe başlarken p, q ve r nin I da C^2 den olduklarını kabul ediyoruz. I kapalı ve sınırlı bir aralık olduğunda $C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I) = C^2(I)$ olduğunu belirtelim. L nin eşleniğini L' ile gösterirsek, L' nün bilinen tanımından, her $f, g \in C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ için

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L'g \rangle \quad (2.15)$$

elde ederiz. $I = (a, b)$ diyelim, burada I aralığı sonlu ya da sonsuz olabilir, ve (2.15) in sol yanındaki diferansiyel operatörü f den g ye kaydırabilmek için kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf) \bar{g} dx \\ &= p\bar{g}f' \Big|_a^b - \int_a^b f'(p\bar{g})' dx + q\bar{g}f \Big|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr\bar{g} dx \\ &= \left[p\bar{g}f' - f(p\bar{g})' \right]_a^b + \int_a^b f(p\bar{g})'' dx + q\bar{g}f \Big|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr\bar{g} dx \\ &= \left\langle f, (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \right\rangle + \left[p(\bar{g}f' - \bar{g}'f) + (q - p')\bar{g}f \right]_a^b \end{aligned}$$

yazılır. Eğer (a, b) aralığı sonsuzsa veya integrallerden herhangi biri a ya da b de sınırsızsa bu takdirde buradaki integraller genelleştirilmiş integraller olarak

düşünülür. Eğer $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$ ve $r \in C(a, b)$ ise bu takdirde yukarıdaki denklemin sağ yanının iyi tanımlı olduğunu belirtelim. Ayrıca yukarıdaki denklemin sağ yanındaki son terim a ve b sınırları arasındaki fark olarak yorumlanmalıdır. Bu yüzden her $f, g \in \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I)$ için

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + \left[p(\bar{g}f' - \bar{g}'f) + (q - p')\bar{g}f \right]_a^b \quad (2.16)$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} L^*g &= (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \\ &= \bar{p}g'' + (2\bar{p}' - \bar{q})g' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$L^* = \bar{p} \frac{d^2}{dx^2} + (2\bar{p}' - \bar{q}) \frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})$$

operatörüne L nin biçimsel eşleniği denir. Eğer $L^* = L$ oluyorsa, yani

$$\bar{p} = p, \quad 2\bar{p}' - \bar{q} = q, \quad \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r$$

oluyorsa, L ye biçimsel kendine eş denir. Bu son üç denklemin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul p , q ve r fonksiyonlarının reel ve $q = p'$ olması gerekir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Lf &= pf'' + p'f' + rf \\ &= (pf')' + rf \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden L biçimsel kendine eş olduğunda

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + r$$

formundadır ve (2.16) denklemini

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(\bar{g}f' - \bar{g}'f) \Big|_a^b \quad (2.17)$$

biçimine indirgenir. (2.15) ve (2.17) denklemlerini kıyaslarsak, her $f, g \in C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ için

$$p(\bar{g}f' - \bar{g}'f)\Big|_a^b = 0 \quad (2.18)$$

ise biçimsel kendine eş olan L operatörünün kendine eş olduğunu görürüz. Bu noktada $q = p'$ olduğunda L^* ifadesindeki $\bar{p}'' - \bar{q}'$ teriminin ortadan kalktığına, dolayısıyla p'' ve q' nin sürekliliğinin artık gerekli olmadığına dikkat etmek önemlidir.

Şimdi $-L$ operatörü için özdeğer problemiyle yani

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (2.19)$$

denkleminin çözümleriyle ilgileneceğiz. $u = 0$ olduğunda bu denklem elbette λ nın tüm değerleri için sağlanacaktır. $u \neq 0$ olduğunda ise λ nın belli değerleri için sağlanabilir. Bu λ değerleri de $-L$ nin özdeğerleridir. $C^2 \cap \mathcal{L}^2$ de bazı λ kompleks sayıları için (2.19) denklemini sağlayan herhangi bir $u \neq 0$ fonksiyonuna $-L$ nin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir. Burada $-L$ nin özdeğerleri ve özfonksiyonları derken aynı zamanda (2.19) denkleminin özdeğer ve özfonksiyonlarından bahsetmiş oluyoruz. Bu denklem homojen olduğu için $-L$ nin özfonksiyonları bir çarpımsal sabite kadar belirlenir. (2.19) denklemine uygun sınır koşulları eklendiğinde elde edilen sisteme Sturm-Liouville özdeğer problemi adı verilir ki bu problem bir sonraki kısımda ele alınacaktır. Açıkça, $-L$ nin (biçimsel) kendine eş olması için gerek ve yeter şart L nin (biçimsel) kendine eş olmasıdır diyebiliriz. Anlaşıldığı üzere L yerine $-L$ nin özdeğerlerini aramamızın nedeni, p pozitif olduğunda L nin negatif özdeğerlere sahip olmasıdır. Aşağıdaki teorem şimdiye kadar elde ettiğimiz sonuçları özetlemektedir. Yukarıda bahsedilenler, (i) ve (ii) özelliklerinin sonlu boyutlu uzaydan sonsuz boyutlu $\mathcal{L}^2 \cap C^2$ uzayına genelleştirilmesidir.

Teorem 2.3. $L : \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow \mathcal{L}^2(a, b)$,

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a, b)$$

biçiminde tanımlanan ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel operatör olsun. Burada $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$ ve $r \in (a, b)$ dir. Bu takdirde

(i) Eğer p , q ve r katsayıları reel ve $q \equiv p'$ ise L biçimsel kendine eştir yani $L^* = L$ dir.

(ii) Eğer L biçimsel kendine eş ve (2.18) denklemi sağlanıyorsa L kendine eştir yani $L' = L$ dir.

(iii) Eğer L kendine eş ise bu takdirde

$$Lu + \lambda u = 0$$

denkleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon çifti $\mathcal{L}^2(a, b)$ de ortogonaldır.

İspat: (i) ve (ii) ifadelerini daha önceden ispatlamıştık. (iii) ifadesini ispatlayabilmek için $\lambda \in \mathbb{C}$ nin $-L$ nin bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde öyle bir $f \in \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b)$, $f \neq 0$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} Lf + \lambda f &= 0 \\ \Rightarrow \lambda \|f\|^2 &= \langle \lambda f, f \rangle = -\langle Lf, f \rangle \end{aligned}$$

olur. L kendine eş olduğundan

$$-\langle Lf, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|^2$$

yazılır. Bu yüzden $\bar{\lambda} \|f\|^2 = \lambda \|f\|^2$ dir. $\|f\| \neq 0$ olduğundan $\bar{\lambda} = \lambda$ dır.

Eğer μ , $-L$ nin $g \in \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b)$ özfonksiyonuyla ilişkili başka bir özdeğeri ise bu takdirde

$$\begin{aligned} \lambda \langle f, g \rangle &= -\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle = \mu \langle f, g \rangle \\ (\lambda - \mu) \langle f, g \rangle &= 0 \\ \lambda \neq \mu &\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 2.1. Daha önce belirtildiği gibi, L için verilen ifade de $q = p'$ olduğunda, bu teoremin sonuçları p' ifadesinin sürekli olması şeklindeki daha zayıf gereksinim altında geçerlidir.

Şimdi Teorem 2.3 ün (iii) kısmını biçimsel kendine eş olmayan diferansiyel operatörlere genelleştireceğiz. Eğer $Lu = pu'' + qu' + ru$ ise, burada $p > 0$ ve $q \neq p'$ dir,

$$Lu + \lambda u = 0$$

özdeğer denklemi, c bir sabit olmak üzere

$$\rho(x) = \frac{c}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{q(t)}{p(t)} dt\right) \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanan pozitif ρ fonksiyonuyla çarpılabilir. Böylece

$$\rho Lu + \lambda \rho u = 0 \quad (2.21)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi burada ρL biçimsel kendine eştir. $\rho > 0$ olmak üzere (2.18) denklemi

$$\rho p (\bar{g}f' - \bar{g}'f)\Big|_a^b = 0$$

denklemine denktir. Bu, ρL operatörünü kendine eş yapar. Eğer $u \in \mathcal{L}_\rho^2$, L nin λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|_\rho^2 &= \langle \lambda \rho u, u \rangle \\ &= \langle -\rho Lu, u \rangle \\ &= \langle u, -\rho Lu \rangle \\ &= \langle u, \lambda \rho u \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|u\|_\rho^2 \end{aligned}$$

yazılır ki bu da λ nın bir reel sayı olduğu anlamına gelir. Üstelik $v \in \mathcal{L}_\rho^2$, L nin μ özdeğerine karşılık gelen başka bir öz fonksiyonu ise bu takdirde ρL kendine eş olduğundan

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle_\rho &= \lambda \langle \rho u, v \rangle - \mu \langle \rho u, v \rangle \\
&= \langle \lambda \rho u, v \rangle - \langle u, \mu \rho v \rangle \\
&= \langle -\rho Lu, v \rangle - \langle u, -\rho Lv \rangle = 0
\end{aligned}$$

yazılır. Bu yüzden eğer $\lambda \neq \mu$ ise $\mathcal{L}_\rho^2$ uzayında u, v ye ortogonaldır.

Böylece Teorem 2.3 ün (iii) kısmının aşağıdaki genişletmesini ispatlamış olduk.

Sonuç 2.3. Eğer $L : \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow \mathcal{L}^2(a, b)$, kendine eş bir lineer operatör ve $\rho, [a, b]$ üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde

$$Lu + \lambda \rho u = 0$$

denkleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen herhangi bir özfonksiyon çifti $\mathcal{L}_\rho^2(a, b)$ de ortogonaldır.

Hatırlatma 2.2.

1. Sonuç 2.3 de bahsedilen $Lu + \lambda \rho u = 0$ denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları aslında $-g^{-1}L$ operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonlarıdır.
2. (a, b) aralığının sonlu olduğunu kabul edelim. ρ ağırlık fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve pozitif olduğundan, ρ nun minimum değeri α ve maksimum değeri β olmak üzere

$$0 < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \infty$$

olur. Bu da

$$\sqrt{\alpha} \|u\| \leq \|u\|_\rho \leq \sqrt{\beta} \|u\|$$

anlamına gelir ve bu yüzden $\|u\|_\rho < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $\|u\| < \infty$ olmasıdır. Bu iki norma denktir denir ve $\mathcal{L}_\rho^2(a, b)$ ve $\mathcal{L}^2(a, b)$ uzayları farklı iç çarpımlara sahip olmalarına rağmen açıkça aynı fonksiyonları içerirler.

3. Bu sonucun ispatındaki hiçbir şey L nin ikinci mertebeden diferansiyel operatör olmasını gerektirmez. Aslında sonuç, bir iç çarpım uzayında kendine eş herhangi bir lineer operatör için doğrudur.

2.4. Sturm-Liouville Problemi

Bir önceki başlık altında, lineer bir diferansiyel denklemin sonsuz boyutlu bir vektör uzayında diferansiyel bir operatör için özdeğer problemi olarak nasıl ortaya çıktığını gördük. Kendine eşlik kavramı, sonlu boyutlu uzayda lineer dönüşümlerle benzerlikten yararlanarak tanımlandı ve kendine eş bir matrisin özdeğerlerinin reel ve özvektörlerinin ortogonal olması özelliklerinin Teorem 2.3 e nasıl çevrildiğini de görmüş olduk.

Şimdi L biçimsel kendine eş bir operatör olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x) \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre

$$Lu + \lambda \rho(x)u = 0, \quad x \in (a, b) \quad (2.23)$$

özdeğer denklemi, α_i ve β_i reel sabitler olmak üzere

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad (2.24)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \quad (2.25)$$

ayrık homojen sınır koşulları ile birlikte Sturm-Liouville özdeğer problemi olarak adlandırılır.

Bu sınır koşulları altında L kendine eş olduğundan, Sonuç 2.3 den biliyoruz ki eğer (2.23) denkleminin özdeğerleri varsa reeldir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar $\mathcal{L}_p^2(a, b)$ de ortogonaldır. (a, b) aralığı sınırlı ve $[a, b]$ aralığında p fonksiyonu köke sahip değilse (2.23)-(2.25) denklem sistemine regüler Sturm-Liouville problemi denir. Aksi takdirde bu sisteme singüler denir. Regüler problemde $[a, b]$ aralığında $p(x) > 0$ kabul etmek genelliği bozmaz. Sturm-Liouville

probleminin çözümlerinin, C^2 de (2.24) ve (2.25) sınır koşullarını sağlayan $-L/\rho$ operatörünün özfonksiyonları olduğu açıktır.

Şimdi, sadece regüler Sturm-Liouville probleminin çözümlere sahip olduğunu değil aynı zamanda bu çözümlerin $\mathcal{L}_\rho^2(a,b)$ uzayını germeye yeterli olduğunu da göstereceğiz. Bu temel sonucu aşama aşama kanıtlayacağız. Kolaylık olması açısından $\rho(x)=1$ olduğunu kabul edelim. Bu ρ seçimi, genel prensibi engellemeden bazı dikkat dağıtıcı ayrıntıları önlemiş olur. Öncelikle (2.24) ve (2.25) sınır koşulları altında L operatörü için Green fonksiyonunu inşaa edelim. L nin tersi olan L^{-1} için bir integral ifadesine ulaşabilmek için Green fonksiyonunu kullanacağız. $-L$ nin özfonksiyonları

$$Lu + \lambda u = 0,$$

$-L^{-1}$ in özfonksiyonları olan

$$L^{-1}u + \mu u = 0$$

ile çakışır ve bu özfonksiyonlara karşılık gelen özdeğerler arasında $\mu = \frac{1}{\lambda}$ ilişkisi vardır. L^{-1} in spektral özelliklerini yani özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını analiz ederek istenen sonuçlara varıyoruz.

2.4.1. Özfonksiyonların Varlığı

$$L = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + r$$

kendine eş diferansiyel operatörü için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, & |\alpha_1| + |\alpha_2| &> 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, & |\beta_1| + |\beta_2| &> 0 \end{aligned}$$

sınır koşulları altında aşağıdaki koşulları sağlayan $G:[a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir.

1. G simetriktir, yani her $x, \xi \in [a,b]$ için

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

yazılır ve G , her iki x ve ξ değişkeni için sınır koşullarını sağlar.

2. G , $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve $[a, b] \times [a, b] \setminus \{(x, \xi) : x = \xi\}$ üzerinde C^2 sınıfının sürekli bir fonksiyonudur. Burada G ,

$$L_x G(x, \xi) = p(x) G_{xx}(x, \xi) + p'(x) G_x(x, \xi) + r(x) G(x, \xi) = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar.

3. $\frac{\partial G}{\partial x}$ türevi $x = \xi$ noktasında bir sıçramalı süreksizliğe sahiptir ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial G}{\partial x}(\xi + \delta, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi - \delta, \xi) \right] \\ &= \frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ile verilir.

$Lu = 0$ homojen denkleminin (2.24) ve (2.25) ayrık sınır koşulları altında sadece $u = 0$ aşıkâr çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. Bu, 0 ın $-L$ nin bir özdeğeri olmadığı varsayımı anlamına gelir. Genelliği bozmaksızın $\tilde{\lambda}$ reel sayısının $-L$ nin bir özdeğeri olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $\tilde{r}(x) = r(x) + \tilde{\lambda}$ olmak üzere

$$\tilde{L} = L + \tilde{\lambda} = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + \tilde{r}$$

operatörünü tanımlayabiliriz. Şimdi

$$Lu + \lambda u = \tilde{L}u + (\lambda - \tilde{\lambda})u$$

olduğundan, $-L$ nin u özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğeri λ olması için gerek ve yeter şartın $-\tilde{L}$ nin aynı u özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğeri $\lambda - \tilde{\lambda}$ olması gerektiğini görürüz. $\tilde{\lambda}$, $-L$ nin bir özdeğeri olmadığından 0 , $\tilde{L}$ nin

bir özdeğeri olamaz. $-L$ nin özdeğeri olmayan reel sayıları aşağıdaki lemmadan sonra anlayacağız.

Lemma 2.2. $-L$ nin özdeğerleri reel bir sabitle alttan sınırlıdır.

İspat: (2.24) ve (2.25) sınır koşullarını sağlayan herhangi bir $u \in C^2([a, b])$ için

$$\begin{aligned}\langle -Lu, u \rangle &= \int_a^b \left[-(pu')' \bar{u} - r|u|^2 \right] dx \\ &= \int_a^b \left[p|u'|^2 - r|u|^2 \right] dx + p(a)u'(a)u(a) - p(b)u'(b)u(b) \\ &= \int_a^b \left[p|u'|^2 - r|u|^2 \right] dx + p(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}u^2(b) - p(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u^2(a)\end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $\beta_2 = 0$ ise bu takdirde ikinci sınır şartından $u(b) = 0$ olur diyebiliriz ve böylece yukardaki eşitliğin sağ yanındaki ikinci terim kaybolur. Benzer olarak eğer $\alpha_2 = 0$ ise bu kez üçüncü terim 0 olur. u , $-L$ nin $u(a) = u(b) = 0$ sınır değerlerine sahip bir özfonksiyonu olduğunda

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|^2 &= \int_a^b p(x)|u'(x)|^2 dx - \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \\ &\geq -\|u\|^2 \max \{ |r(x)| : a \leq x \leq b \}\end{aligned}\tag{2.27}$$

elde edilir. Bu yüzden $\ell = -\max \{ |r(x)| : a \leq x \leq b \}$ reel sayısı λ nın bir alt sınırıdır.

Diğer taraftan eğer u , $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$, $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$ ayrık sınır koşullarını sağlarsa bu takdirde $-L$ nin ℓ den daha küçük özdeğere sahip ikiden fazla lineer bağımsız özfonksiyonu olamaz. Bunu gösterebilmek için bir çelişki arayalım. $-L$ nin ℓ den daha küçük λ_1 , λ_2 ve λ_3 özdeğerlerine sahip üç tane lineer bağımsız u_1 , u_2 ve u_3 özfonksiyonuna sahip olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın, bu özfonksiyonların ortonormal olduğunu kabul edelim. Çünkü $i = 1, 2, 3$ için

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_i(a) + \alpha_2 u_i'(a) &= 0 \\ \beta_1 u_i(b) + \beta_2 u_i'(b) &= 0\end{aligned}$$

olmak üzere $(u_i(a), u_i'(a))$ ve $(u_i(b), u_i'(b))$ şeklindeki altı vektörden her biri $\mathbb{R}^2$ nin bir boyutlu bir alt uzayında yer alır. Bu yüzden $\gamma_i = (u_i(a), u_i'(a), u_i(b), u_i'(b))$ şeklindeki üç vektör de $\mathbb{R}^4$ ün iki boyutlu bir alt uzayında yer alır. O halde $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3$ biçiminde katsayıların tamamı sıfır olmayacak şekilde bir lineer kombinasyon oluşturulabilir öyle ki

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = 0$$

olur. Fakat bu,

$$c_1u_1(a) + c_2u_2(a) + c_3u_3(a) = 0$$

$$c_1u_1(b) + c_2u_2(b) + c_3u_3(b) = 0$$

anlamına gelir. O halde

$$v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x)$$

fonksiyonu $-L$ nin $v(a) = v(b) = 0$ şartını sağlayan bir özfonksiyonudur ve sonuç olarak bu özfonksiyonun özdeğerleri ℓ ile alttan sınırlıdır. Fakat bu durum

$$\langle -Lv, v \rangle = \lambda_1 |c_1|^2 + \lambda_2 |c_2|^2 + \lambda_3 |c_3|^2 < \ell (|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) = \ell \|v\|^2$$

eşitsizliğiyle çelişir.

Şimdi L operatörü için (2.24) ve (2.25) sınır koşulları altında Green fonksiyonunu inşaa edeceğiz. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için standart varlık teoremine göre $Lu = 0$ denklemi v_1 ve v_2 şeklinde aşıkâr olmayan öyle iki lineer bağımsız çözüme sahiptir ki

$$v_1(a) = \alpha_2, \quad v_1'(a) = -\alpha_1$$

$$v_2(b) = \beta_2, \quad v_2'(b) = -\beta_1$$

olur. Bu yüzden $x = a$ noktasında

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0$$

olup v_1 birinci sınır koşulunu ve

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0$$

olup v_2 de ikinci sınır koşulunu sağlar. v_1 ve v_2 nin lineer bağımsız oldukları açıktır. Aksi takdirde biri diğerinin bir sabit katı olurdu ve bu takdirde her ikisi de hem $Lu = 0$ denklemini hem de (2.24) ve (2.25) sınır koşullarını sağlardı. Fakat bu durum 0 ın L nin bir özdeğeri olmaması kabulüyle çelişirdi.

Şimdi

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c^{-1} v_1(\xi) v_2(x), & a \leq \xi \leq x \leq b \\ c^{-1} v_1(x) v_2(\xi), & a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} \quad (2.28)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada

$$c = p(x) [v_1(x) v_2'(x) - v_1'(x) v_2(x)] = p(x) W(v_1, v_2)(x) \quad (2.29)$$

sıfırdan farklı bir sabittir. Bunun nedeni $[a, b]$ üzerinde ne p ne de W fonksiyonlarının kökünün olmaması ve

$$[p(v_1 v_2' - v_1' v_2)]' = v_1 L v_2 - v_2 L v_1 = 0$$

Lagrange özdeşliğidir. Yukarda bahsedilen $G(\xi, x)$ fonksiyonunun tüm özelliklerinin sağlandığını göstermek artık kolaydır. Burada (2.26) denklemini doğrularız. (2.28) in türevini alırsak

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x + \delta) - \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x - \delta) = \frac{1}{c} [v_1(x) v_2'(x + \delta) - v_1'(x - \delta) v_2(x)]$$

elde ederiz. Burada $\delta > 0$ dır. (2.29) ifadesi ve v_1' ve v_2' fonksiyonlarının sürekliliğinden $\delta \rightarrow 0$ iken bu türev gösteriminin $\frac{1}{p(x)}$ e yaklaştığını söyleyebiliriz.

Şimdi $C([a, b])$ üzerinde bir T operatörünü

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlayalım ve Tf fonksiyonunun $C^2([a,b])$ sınıfından olduğunu ve $Lu = f$ diferansiyel denklemini çözdüğünü gösterelim. (2.30) ifadesini düzenledikten sonra türevlerini alırsak

$$(Tf)(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$(Tf)'(x) = \int_a^x G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + G_x(x, x^-) f(x^-) + \int_x^b G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi - G_x(x, x^+) f(x^+)$$

olur. Burada $(Tf)'(x)$ i elde edebilmek için G nin ve $\xi = x$ de f nin sürekliliğini kullandık. Ayrıca v_1 ve v_2 nin sürekliliğinden

$$G_x(x, x^-) - G_x(x, x^+) = \frac{1}{c} [v_1(x^-) v_2'(x) - v_1'(x) v_2(x^+)] = \frac{1}{p(x)}$$

olup

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{f(x)}{p(x)}$$

elde ederiz. O halde buradan Tf in $C^2([a,b])$ sınıfından olduğu sonucuna varırız.

Ayrıca tüm $\xi \neq x$ için $L_x G(x, \xi) = 0$ olması gerçeğinden yola çıkarak

$$\begin{aligned} L(Tf)(x) &= p(x)(Tf)''(x) + p'(x)(Tf)'(x) + r(x)(Tf)(x) \\ &= \int_a^x L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğu sonucuna varırız.

G fonksiyonunun (1) özelliğinden dolayı Tf fonksiyonunun (2.24) ve (2.25) sınır koşullarını sağladığı açıktır. Diğer taraftan eğer $u \in C^2([a, b])$ fonksiyonu (2.24) ve (2.25) sınır koşullarını sağlarsa bu takdirde kısmi integrasyon yöntemini, p , u , u' fonksiyonlarının sürekliliğini ve G nin özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
T(Lu)(x) &= \int_a^x G(x, \xi) Lu(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) Lu(\xi) d\xi \\
&= p(\xi) \left[u'(\xi) G(x, \xi) - u(\xi) G_\xi(x, \xi) \right] \Big|_a^x + \int_a^x u(\xi) L_\xi G(x, \xi) d\xi \\
&\quad + p(\xi) \left[u'(\xi) G(x, \xi) - u(\xi) G_\xi(x, \xi) \right] \Big|_x^b + \int_x^b u(\xi) L_\xi G(x, \xi) d\xi \\
&= p(\xi) u(\xi) G_\xi(x, \xi) \Big|_x^+ + p(\xi) \left[u'(\xi) G(x, \xi) - u(\xi) G_\xi(x, \xi) \right] \Big|_a^b \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Burada (2.26) denklemini ve ayrıca u ve G fonksiyonlarının ayırık sınır koşullarını sağlaması gerçeğini kullandık. Bu nedenle T operatörü L operatörünün bir tür tersi olarak hareket eder ve

$$\begin{aligned}
Lu + \lambda u &= 0 \\
\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0 \\
\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0
\end{aligned}$$

Sturm-Liouville denklem sistemi

$$Tu = \mu u$$

özdeğer denklemine denktir. Burada $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ dır. Sonuç olarak, Sturm-Liouville probleminin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonun u olması için gerek ve yeter şart $-\frac{1}{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonun T olmasıdır diyebiliriz.

BÖLÜM III

İKİNCİ MERTEBEDEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN SALINIM VE KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ VE PRÜFER DÖNÜŞÜMÜ

3.1. Karşılaştırma Teoremleri

Bu kısımda, reel ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin köklerinin yeri incelenecektir. Denklemin aşağıdaki formda olduğu varsayılacaktır:

$$Lx = (p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0, \quad (a < t < b). \quad (3.1)$$

Dikkat edilirse (3.1) denklemi $[a, b]$ kapalı aralığı yerine (a, b) açık aralığında ele alınmıştır. $x'' + f(t)x' + h(t)x = 0$ denklemi, $\exp\left(\int_a^t f(t)dt\right)$ ile çarpılarak (3.1) formunda yazılabilir. Bundan sonra $p(t) > 0$ olduğu ve p , p' ve g nin (a, b) üzerinde sürekli olduğu varsayılacaktır. (Buradaki süreklilik şartı esnetilebilir. Aslında g nin integrallenebilir ve p nin mutlak sürekli olması yeterlidir.)

(3.1) in aşık olmayan bir çözümünün kökü izole noktadır. Gerçekten de φ çözümünün t_0 da sıfır olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\varphi'(t_0) \neq 0$ dır, aksi takdirde $\varphi(t) \equiv 0$ olur. Bu da, t_0 ın izole bir kök olduğunu gösterir.

Teorem 3.1. Kabul edelim ki φ , (a, b) aralığında

$$(px')' + g_1(x) = 0 \quad (3.2)$$

denkleminin reel bir çözümü ve ψ da (a, b) aralığında

$$(px')' + g_2(x) = 0 \quad (3.3)$$

denkleminin reel bir çözümü olsun. Ayrıca (a,b) aralığında $g_2(t) > g_1(t)$ olsun. Eğer t_1 ve t_2 , (a,b) aralığında φ nin ardışık kökleri ise bu takdirde ψ , (t_1, t_2) aralığının bazı noktalarında sıfırlanmalıdır.

İspat: ψ in (t_1, t_2) aralığında sıfırlanmadığını varsayalım. Daha sonra (t_1, t_2) aralığı üzerinde hiçbir kısıtlama olmaksızın $\psi(t) > 0$ ve ayrıca $\varphi(t) > 0$ olduğu varsayılabilir. (3.2) nin ψ ve (3.3) ün φ ile çarpılması ve daha sonra da taraf tarafa çıkarılmaları sonucu

$$(p\varphi')'\psi - (p\psi')'\varphi - (g_2 - g_1)\varphi\psi = 0$$

elde edilir. Buradan

$$(p\varphi')'\psi - (p\psi')'\varphi = (g_2 - g_1)\varphi\psi$$

şeklinde yazılırsa, $g_2(t) > g_1(t)$ olduğundan yukardaki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. Dolayısıyla bu eşitlik integrallendiğinde

$$\int_{t_1}^{t_2} [(p\varphi')'\psi - (p\psi')'\varphi] dt > 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki parantezin içi $p(\varphi'\psi - \varphi\psi')$ in türevi olduğundan

$$[p(\varphi'\psi - \varphi\psi')]_{t_1}^{t_2} > 0$$

yazılır. Sınırlar yerine yazılır ve φ nin t_1 ve t_2 de sıfır olması dikkate alınır

$$p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1) > 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. t_2 nin hemen solunda $\varphi(t_2) = 0$ ve $\varphi(t) > 0$ olduğundan, $\varphi'(t_2) < 0$ dır. Benzer şekilde $\varphi'(t_1) > 0$ dır. Bu yüzden (3.4) ün solundaki ilk terim, ikincisi gibi, pozitif değildir bu da bize (3.4) ün imkansız olduğunu gösterir. Böylece ψ , (t_1, t_2) açık aralığının içindeki bir noktada sıfırlanır.

(a,b) üzerinde $g_1 \equiv g_2$ olması durumunda, φ ve ψ aynı denklemin çözümleridir. Eğer φ ve ψ bağımsızsa, o zaman (3.4) bir eşitlik tarafından değiştirilen eşitsizlik

ile geçerlidir ve yukarıdaki iddia ψ ın φ nin ardışık kökleri arasında sıfırlandığını göstermektedir. Şimdi φ ve ψ birbirinin yerine kullanılabildiğinden, φ nin ψ ın ardışık kökleri arasında sıfırlandığını da söyleyebiliriz. Böylece, bir reel ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin iki reel lineer bağımsız çözümlerinin kökleri birbiri içine girmiştir.

Yukarıdaki yöntemden daha fazla faydalanılabilir, ancak aşağıdaki yöntem daha basittir:

$p(t)x' = y$ olsun. Bu nedenle (3.1),

$$x' = \frac{y}{p(t)}, \quad y' = -g(t)x \quad (3.5)$$

şeklini alır. Kabul edelim ki

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta \quad (3.6)$$

olsun. (3.6) daki denklemlerin t ye göre türevleri alınır, x' ve y' yerine (3.5) deki değerleri yazılırsa

$$x' = \sin \theta \cdot r' + r \cos \theta \cdot \theta' = \frac{y}{p(t)}$$

$$y' = \cos \theta \cdot r' - r \sin \theta \cdot \theta' = -g(t)x$$

elde edilir. Bu denklem sistemi r' ve θ' için çözülürse

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{p(t)} \\ -g(t)x \end{bmatrix}$$

yazılır ve sonrasında da Cramer Kuralı'ndan

$$r' = \left(\frac{1}{p} - g \right) r \sin \theta \cos \theta \quad (3.7)$$

$$\theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + g \sin^2 \theta \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. (3.1) in bir φ çözümü için (3.7), (3.8) in $r = \rho(t)$ ve $\theta = \omega(t)$ çözümü vardır. O halde (3.5) ve (3.6) dan

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho^2 = \varphi^2 + (p\varphi')^2$$

ve

$$\tan \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \theta = \omega = \tan^{-1} \left(\frac{\varphi}{p\varphi'} \right)$$

yazılabilir. φ ve φ' aynı anda sıfır olamayacağından, (a, b) aralığında $\rho^2(t) > 0$ dır ve herhangi bir sınırlama olmaksızın $\rho(t) > 0$ olduğu varsayılabilir. Bu durumun bir sonucu olarak; $\varphi(t) = \rho(t) \sin \omega(t)$, sadece, $\omega(t)$, π nin bir tamsayı katı iken sıfır olur diyebiliriz.

$\cos^2 \theta$ ve $\sin^2 \theta$ düzgün sınırlı olduğundan, (3.8) denklemini, $p > 0$ ve p ve g nin parçalı sürekli olduğu herhangi bir aralık üzerinde bir çözüme sahiptir. Aslında, $1/p$ ve g nin integrallenebilir olması yeterlidir. (3.8) in sağ yanı θ ya göre türevlenebildiği için çözümün tek olduğu anlaşılmaktadır.

(3.6) daki birinci eşitliği $\cos \theta$ ile ikinci eşitliği de $\sin \theta$ ile genişletip taraf tarafa çıkarırsak

$$x(t) \cos \theta - y(t) \sin \theta = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $y(t)$ yerine (3.5) deki değeri kullanılırsa

$$x(t) \cos \theta - p(t)x'(t) \sin \theta = 0 \quad (3.9)$$

olur. Sınır değer problemlerinde en çok kullanılan sınır şartlarından biri de şudur: Bir aralığın uç noktası olan $t = a$ noktasında

$$x(a) \cos \alpha - p(a)x'(a) \sin \alpha = 0 \quad (3.10)$$

olmasıdır. (3.9) da $t = a$ alınıp (3.10) ile karşılaştırıldığında böyle bir koşulun daha basit koşul olan $\theta(a) = \alpha \pmod{\pi}$ ye eşdeğer olduğu açıktır. α nın iki farklı

değerinin farkı π nin katları olmadığı sürece, ya da $\varphi^2(a) + (p\varphi'(a))^2 = \rho^2(a) = 0$ olmadığı sürece, (3.10) un α nın bu iki farklı değeri için elde edilen $x = \varphi(t)$ çözümünün denklemi sağlamayacağını söyleyebiliriz. O halde, α_1 ve α_2 birbirinden farklı olsun. Öncelikle $\alpha_2 - \alpha_1 = k\pi$ iken (3.10) un sağlandığını gösterelim. Eğer (3.10) eşitliği

$$\varphi(a)\cos\alpha_1 - p(a)\varphi'(a)\sin\alpha_1 = 0$$

şeklinde α_1 için sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned} & \varphi(a)\cos\alpha_2 - p(a)\varphi'(a)\sin\alpha_2 \\ &= \varphi(a)\cos(\alpha_1 + k\pi) - p(a)\varphi'(a)\sin(\alpha_1 + k\pi) \\ &= \varphi(a)\cos\alpha_1 - p(a)\varphi'(a)\sin\alpha_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup α_2 için de sağlandığı görülür.

Şimdi de $\varphi^2(a) + (p\varphi'(a))^2 = \rho^2(a) = 0$ iken (3.10) un sağlandığını gösterelim. Eğer (3.10) eşitliği α_1 ve α_2 için

$$\begin{aligned} \varphi(a)\cos\alpha_1 - p(a)\varphi'(a)\sin\alpha_1 &= 0 \\ \varphi(a)\cos\alpha_2 - p(a)\varphi'(a)\sin\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\varphi^2(a)\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + (p(a)\varphi'(a))^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - p(a)\varphi(a)\varphi'(a)\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

elde edilir. Burada $(p\varphi'(a))^2 = -\varphi^2(a)$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\varphi(a)\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - p(a)\varphi'(a)\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

olduğu görülür. $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ olarak düşünülürse (3.10) un sağlandığı görülür.

Şimdi, (3.1) formundaki iki denklemin çözümlerinin davranışı karşılaştırılacaktır. 1 ve 2 alt indisleri iki denklem arasındaki farkı ayırt etmek için kullanılacaktır, yani, $L_i x = (p_i x')' + g_i x = 0$, $i = 1, 2$ şeklinde yazılacaktır.

Teorem 3.2. p_i ve g_i nin $[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli olduğunu ve $[a, b]$ üzerinde

$$0 < p_2(t) \leq p_1(t), \quad g_2(t) \geq g_1(t)$$

olduğunu kabul edelim. $L_1 \varphi_1 = 0$ ve $L_2 \varphi_2 = 0$ olduğunu ve $\omega_2(a) \geq \omega_1(a)$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\omega_2(t) \geq \omega_1(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (3.11)$$

dir. Ayrıca, eğer (a, b) üzerinde $g_2 > g_1$ ise bu takdirde

$$\omega_2(t) > \omega_1(t) \quad (a < t \leq b) \quad (3.12)$$

dir.

İspat: (3.11) i kanıtlamak için (3.8) den yazılabilecek olan

$$\omega_i' = \frac{1}{p_i} \cos^2 \omega_i + g_i \sin^2 \omega_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.13)$$

denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\omega_2 - \omega_1)' = \left(g_1 - \frac{1}{p_1} \right) (\sin^2 \omega_2 - \sin^2 \omega_1) + h \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada

$$h = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right) \cos^2 \omega_2 + (g_2 - g_1) \sin^2 \omega_2$$

dir. $h \geq 0$ olduğu açıktır. Eğer $\omega_2 - \omega_1 = u$ ise, bu takdirde (3.14) den

$$u' = fu + h \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada

$$f = \left(g_1 - \frac{1}{p_1} \right) (\sin \omega_2 + \sin \omega_1) \left(\frac{\sin \omega_2 - \sin \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)$$

dir. Böylece f parçalı sürekli ve düzgün sınırlıdır. $h \geq 0$ olduğundan (3.15) den

$$u' - fu \geq 0$$

elde edilir. Eğer $F(t) = \int_t^b j(s) ds$ ise, bu takdirde yukarıdaki eşitsizliği e^F ile çarparsak

$$e^F u' + F' e^F u \geq 0$$

elde edilir. Bu ifade $e^{F(t)} u(t)$ nin tam diferansiyeli olduğundan (a, t) üzerinde integrallenirse

$$e^{F(t)} u(t) \geq e^{F(a)} u(a) \geq 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu da (3.11) i ispatlar.

Eğer (3.12) sağlanmazsa, bu durumda bazı $c > a$ lar için

$$\omega_2(t) = \omega_1(t) \quad (a \leq t \leq c) \quad (3.17)$$

sağlanır. Aslında, durumun böyle olmadığını varsayalım. Daha sonra (3.11) den, $\omega_2(t_j) > \omega_1(t_j)$ olacak şekilde a nın bir yığılma noktası olduğu bir $\{t_j\}$ noktalar dizisi bulunmalıdır. Ancak eğer (3.16) da a ile t_j değiştirilirse, $t > t_j$ için $\omega_2(t) > \omega_1(t)$ sonucu bulunur. t_j keyfi olarak a nın yakınındayken, bu (3.12) anlamına gelir. Böylece (3.17) sağlanmak zorundadır.

(3.17) yi kullanırsak, bu takdirde (3.14), (a, c) aralığında $g_2 > g_1$ iken yalnızca şu durumlarda mümkündür: Eğer

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \pmod{\pi}$$

ise ve eğer $p_1 \equiv p_2$ ise. Ancak (3.13) de (a, c) aralığında

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \pmod{\pi}$$

olması açık bir şekilde imkansızdır. Bu da, eğer $g_2 > g_1$ ise (3.12) yi kanıtlar.

3.2. Özdeğerlerin Varlığı

Bir önceki kısımda (3.1) denkleminin çözümlerinin köklerinin yeri incelenmişti. Şimdi aynı uygulamayı

$$(px')' + (\lambda r - q)x = 0 \quad (3.18)$$

denklemine yapacağız. Burada λ reel bir parametredir ve p' , r ve q , $[a, b]$ üzerinde reel ve sürekli (veya parçalı sürekli) ve $[a, b]$ üzerinde $p > 0$, $r > 0$ dır. [İspatları biçimlendirerek, izole noktalar (a, b) aralığında olduğu sürece r nin a ve b de sıfırlanmasını yavaş yavaş mümkün hale getireceğiz.]

Reel α ve β verildiğinde, (3.18) in özdeş olarak sıfır olmayan bir çözüme sahip olduğu ve

$$x(a) \cos \alpha - p(a)x'(a) \sin \alpha = 0 \quad (3.19)$$

$$x(b) \cos \beta - p(b)x'(b) \sin \beta = 0 \quad (3.20)$$

eşitliklerinin sağlandığı λ değerleri özdeğerler olarak adlandırılır. (3.19) veya (3.20) koşullarından biri, bir çarpım sabiti hariç olmak üzere (3.18) in bir çözümünü tek şekilde belirler. Bir özdeğer için (3.18), (3.19) ve (3.20) yi sağlayan aşıkâr olmayan bir çözüme özfonksiyon denir.

Teorem 3.3. $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow \infty$ şeklinde bir monoton artan dizi oluşturan sonsuz sayıda $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerleri vardır. Ayrıca, λ_n ye karşılık gelen özfonksiyonun (a, b) üzerinde tam olarak n tane kökü vardır.

İspat: $0 \leq \alpha < \pi$ ve $0 < \beta \leq \pi$ şeklinde kabul etmemiz konusunda herhangi bir kısıtlama yoktur. (3.18) in

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad p(a)\varphi'(a, \lambda) = \cos \alpha$$

başlangıç şartı ile bulunan $\varphi = \varphi(t, \lambda)$ çözümünün, (3.19) u sağladığı açıktır. Dolayısıyla burada özdeğerler, φ nin (3.20) yi de sağladığı zamanki λ değerleridir. Şimdi $x = \varphi(t, \lambda)$ dersek ve $\omega(t, \lambda)$ nin $\varphi(t, \lambda)$ ile olan ilişkisini veren eşitlikte yukardaki başlangıç şartlarını kullanırsak

$$\omega(a, \lambda) = \tan^{-1} \left(\frac{\varphi(a, \lambda)}{p(a) \varphi'(a, \lambda)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \alpha$$

eşitliğini elde ederiz. Yani $\theta = \omega(t, \lambda)$, $\omega(a, \lambda) = \alpha$ başlangıç şartı ile belirlenir.

$a < t \leq b$ olmak üzere tespit edilmiş her bir t değeri için Teorem 3.2 den $\theta = \omega(t, \lambda)$ nin λ ya göre monoton artan bir fonksiyon olduğu açıktır. Çünkü eğer $\lambda_1 > \lambda_2$ dersek bunlara karşılık gelen (3.18) deki potansiyeller arasında da $\lambda_1 r - q > \lambda_2 r - q$ sıralaması oluşur. Dolayısıyla $\omega(t, \lambda_1) > \omega(t, \lambda_2)$ olur. Yani $\theta = \omega(t, \lambda)$, λ ya göre monoton artandır. Diğer taraftan $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ olduğu t noktalarında

$$\omega(t, \lambda) = \tan^{-1} \left(\frac{\varphi(t)}{p \varphi'(t)} \right) = 0(\text{mod } \pi)$$

olacaktır ki buradan $\frac{\varphi(t)}{p \varphi'(t)} = 0$ yani $\varphi(t) = 0$ olur. Dolayısıyla $\omega = 0(\text{mod } \pi)$

olduğu noktalarda $\varphi(t)$ sıfıra sahiptir. (3.8) den

$$\theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda r - q) \sin^2 \theta \quad (3.21)$$

yazılabilir ve $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ iken

$$\theta' = \frac{1}{p} \cos^2 0 + (\lambda r - q) \sin^2 0 = \frac{1}{p}$$

elde edilir. Dolayısıyla yine $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ iken $\omega' > 0$ olduğu ortaya çıkar. Bu da, $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ olduğu zaman ω nın t ye göre artan bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, eğer (a, b) üzerinde bazı t_k lar için $\omega(t_k, \lambda) = k\pi$ ise bu takdirde $t > t_k$ için $\omega(t, \lambda) > k\pi$ ve $t < t_k$ için $\omega(t, \lambda) < k\pi$ dir. Üstelik ω , λ ya göre

monoton olduğundan, φ nin kökleri, eğer varsa, λ arttıkça sola yani $t = a$ ya doğru hareket eder. ω , t ve λ ya göre sürekli ve $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ iken $\omega' > 0$ olduğu için, (a, b) üzerinde φ nin k . sıfırının yeri olan $t_k = t_k(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli ve monoton azalandır. Gerçekten $\omega(t_k(\lambda), \lambda) = 0(\text{mod } \pi)$ ifadesinde λ ya göre türev alırsak

$$\omega'(t_k, \lambda) \frac{dt_k}{d\lambda} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}(t_k, \lambda) = 0$$

elde edilir. Burada $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ olduğu zaman $\omega' > 0$ ve ω nın λ ya göre monoton artan olmasından $\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} > 0$ dır. Dolayısıyla $\frac{dt_k}{d\lambda} < 0$ dır yani $t_k = t_k(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre azalandır. $(a, b]$ deki herhangi bir sabitlenmiş $t = c$ için

$$\lambda \rightarrow \infty \text{ iken } \omega(c, \lambda) \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

ve ayrıca

$$\lambda \rightarrow -\infty \text{ iken } \omega(c, \lambda) \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

dır. Önce (3.22) nin ispatını verelim. $\alpha \geq 0$ olduğundan $\omega(a, \lambda) = \alpha \geq 0$ olur. Yine $\omega = 0(\text{mod } \pi)$ için $\omega' > 0$ olduğundan ω , $\alpha \geq 0$ dan başlayıp artan bir fonksiyondur yani $\omega(t, \lambda) \geq 0$ dır. Bu yüzden bazı t_0 , $a < t_0 < c$, için $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\omega(c, \lambda) - \omega(t_0, \lambda) \rightarrow \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $t_0 = (a + c)/2$ olsun. P , Q ve R , (t_0, c) üzerinde

$$p(t) \leq P \quad r(t) \geq R > 0 \quad q(t) \leq Q$$

şartlarını sağlayan sabitler olsun. Bu takdirde

$$Px'' + (\lambda R - Q)x = 0 \quad (3.24)$$

diferansiyel denklemi $\bar{\varphi}(t_0, \lambda) = \varphi(t_0, \lambda)$, $P\bar{\varphi}'(t_0, \lambda) = p(t_0)\varphi'(t_0, \lambda)$ başlangıç şartlarını sağlayan $\bar{\varphi}$ çözümü ile

$$\bar{\omega}(t_0, \lambda) = \arctan\left(\frac{\bar{\varphi}(t_0, \lambda)}{P\bar{\varphi}'(t_0, \lambda)}\right) = \arctan\left(\frac{\varphi(t_0, \lambda)}{p(t_0)\varphi'(t_0, \lambda)}\right) = \omega(t_0, \lambda)$$

eşitliğine sahiptir. Diğer taraftan Teorem 3.2 den $\omega(c, \lambda) \geq \bar{\omega}(c, \lambda)$ dır. Böylece

$$\omega(c, \lambda) - \omega(t_0, \lambda) \geq \bar{\omega}(c, \lambda) - \bar{\omega}(t_0, \lambda) \quad (3.25)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan (3.24) denkleminin

$$\bar{\varphi}(t, \lambda) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t\right)$$

çözümüne sahip olduğu görülebilir. Bu çözümde t yerine $t + \pi\sqrt{\frac{P}{\lambda R - Q}}$ yazarsak

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\left(t + \pi\sqrt{\frac{P}{\lambda R - Q}}, \lambda\right) &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t + \pi\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t + \pi\right) \\ &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda R - Q}{P}}t\right) \\ &= \bar{\varphi}(t, \lambda) \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $\bar{\varphi}$ nin ardışık kökleri arasındaki mesafe $\pi\left[P/(\lambda R - Q)\right]^{\frac{1}{2}}$ kadardır diyebiliriz. Bu mesafe de $\lambda \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaşır. Bu yüzden, t nin keyfi çokluktaki birçok değeri için $\bar{\omega} \equiv 0 \pmod{\pi}$ dır ve $\bar{\omega} \equiv 0 \pmod{\pi}$ de $\bar{\omega}' > 0$ olduğundan $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ dur. Bu nedenle (3.25) in sağ tarafı $\lambda \rightarrow \infty$ iken sonsuza yaklaşır, bu da bize sol tarafın da aynı şeyi yapması gerektiğini kanıtlar. Bu da (3.22) nin ispatını tamamlar.

Şimdi (3.23) ü ispatlayalım. $\delta > 0$ sayısını, $\alpha < \pi - \delta$ olacak şekilde yeterince küçük seçelim. Eğer $\delta \leq \omega \leq \pi - \delta$ ve $\lambda < 0$ ise ve eğer $0 < P \leq p$, $0 < R \leq r$ ve $Q \geq |q|$ ise (3.21) denkleminde

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{1}{p} \cos^2 \omega + (\lambda r - q) \sin^2 \omega \\ &= \frac{1}{p} \cos^2 \omega + \lambda r \sin^2 \omega - q \sin^2 \omega \end{aligned}$$

yazılabilir. λ negatif olduğundan bu eşitlik

$$\omega' = \frac{1}{p} \cos^2 \omega - |\lambda| r \sin^2 \omega - q \sin^2 \omega$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikte $0 < P \leq p$ ve $\cos^2 \omega \leq 1$ olduğu dikkate alınır

$$\omega' \leq \frac{1}{P} - |\lambda| r \sin^2 \omega - q \sin^2 \omega$$

olur. $Q \geq |q|$ olduğundan bu eşitsizlik

$$\omega' \leq \frac{1}{P} - |\lambda| r \sin^2 \omega + Q \sin^2 \omega$$

şeklini ve daha sonra $\sin^2 \omega \leq 1$ olmasından da

$$\omega' \leq \frac{1}{P} - |\lambda| r \sin^2 \omega + Q$$

şeklini alır. $0 < R \leq r$ olduğundan bu eşitsizlik de

$$\omega' \leq \frac{1}{P} - |\lambda| R \sin^2 \omega + Q$$

şeklinde yazılır. Son olarak $\delta \leq \omega \leq \pi - \delta$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\omega' \leq \frac{1}{P} - |\lambda| R \sin^2 \delta + Q$$

olur. Böylece eğer $-\lambda$ yeterince büyükse $\omega = \delta$ için $\omega' < 0$ dır. Üstelik $\delta \leq \omega \leq \pi - \delta$ için

$$\omega' < -\frac{\alpha - \delta}{c - a}$$

dır. Böylece yeterince büyük $-\lambda$ için $\omega(c, \lambda) \leq \delta$ olur. δ keyfi olduğundan, sonuç olarak (3.23) ün sağlandığı görülür.

$\lambda \rightarrow -\infty$ iken $\omega(b, \lambda) \rightarrow 0$ olur. $\beta > 0$ olduğundan ve $\omega(b, \lambda)$ nın λ ya göre monoton artan olmasından, $\omega(b, \lambda_0) = \beta$ olacak şekilde λ nın bir λ_0 değeri vardır.

$0 \leq \alpha < \pi$ ve $\beta \leq \pi$ olduğundan (a, b) de $0 < \omega(t, \lambda_0) < \pi$ olur ki $\varphi(t, \lambda_0)$ çözümü (3.20) yi sağlar ve (a, b) de sıfırlanmaz. λ nın λ_0 ın ötesinde arttığını kabul edersek

$$\omega(b, \lambda_1) = \beta + \pi$$

şartını sağlayan tek bir λ_1 değeri vardır. Açıkça görülür ki $\varphi(t, \lambda_1)$, (3.20) yi sağlar ve (a, b) de tam olarak bir köke sahiptir. n . özdeğer $\omega(b, \lambda_n) = \beta + n\pi$ şeklindeki eşitlikle belirlenir. Bu da ispatı tamamlar.

3.3. Periyodik Sınır Koşulları

Denklem (3.18), r , p' ve q nun parçalı sürekli olması ve $[a, b]$ üzerinde $p > 0$, $r > 0$ olması sınırlamalarına tabidir. Burada $p(a) = p(b)$ olduğu varsayılacaktır. Diğer yandan herhangi bir sınırlama olmaksızın $a = 0$, $b = 1$ ve $p(0) = p(1) = 1$ olduğu kabul edilebilir. Sınır şartı ise

$$x(0) = x(1) \quad x'(0) = x'(1) \quad (3.26)$$

ve

$$x(0) = -x(1) \quad x'(0) = -x'(1) \quad (3.27)$$

şeklinde düşünülecektir.

Teorem 3.4. (3.26) ile verilen (3.18) in λ_i , $i \geq 0$ özdeğerleri ve (3.27) ile verilen (3.18) in $\tilde{\lambda}_i$, $i \geq 1$ özdeğerleri

$$-\infty < \lambda_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \tilde{\lambda}_3 \leq \tilde{\lambda}_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (3.28)$$

şeklinde bir dizi oluşturur. $\lambda = \lambda_0$ için tek bir φ_0 özfonksiyonu vardır. Eğer bazı $i \geq 0$ için $\lambda_{2i+1} < \lambda_{2i+2}$ ise bu takdirde $\lambda = \lambda_{2i+1}$ de tek bir φ_{2i+1} özfonksiyonu ve $\lambda = \lambda_{2i+2}$ de tek bir φ_{2i+2} özfonksiyonu vardır. Bununla birlikte eğer $\lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$ ise bu takdirde $\lambda = \lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$ de iki bağımsız φ_{2i+1} , φ_{2i+2} özfonksiyonları vardır. Benzer sonuçlar $\tilde{\lambda}_{2i+1} < \tilde{\lambda}_{2i+2}$ ve $\tilde{\lambda}_{2i+1} = \tilde{\lambda}_{2i+2}$ durumları için de geçerlidir ki bu

durumda özfonksiyonlar $\tilde{\varphi}_{2i+1}$ ve $\tilde{\varphi}_{2i+2}$ ile gösterilir. Ayrıca, φ_0 ın $[0,1]$ de kökü yoktur; φ_{2i+1} ve φ_{2i+2} nin her biri $i \geq 0$ için $[0,1)$ de tam olarak $2i+2$ köke sahiptir; ve $\tilde{\varphi}_{2i+1}$ ve $\tilde{\varphi}_{2i+2}$ nin her biri $[0,1)$ de tam olarak $2i+1$ köke sahiptir.

İspat: φ ve ψ (3.18) in

$$\varphi(0, \lambda) = \psi'(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = \psi(0, \lambda) = 0 \quad (3.29)$$

şartlarını sağlayan çözümleri olsun. (3.18) i sırayla önce φ sonra da ψ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$\begin{aligned} & \varphi(p\psi')' - \psi(p\varphi')' = 0 \\ \Rightarrow & \varphi(p'\psi' + p\psi'') - \psi(p'\varphi' + p\varphi'') = 0 \\ \Rightarrow & p'(\varphi\psi' - \psi\varphi') + p(\varphi\psi'' - \psi\varphi'') = 0 \\ \Rightarrow & p'(\varphi\psi' - \psi\varphi') + p(\varphi\psi' - \psi\varphi')' = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}[p(\varphi\psi' - \psi\varphi')] = 0 \Rightarrow p(\varphi\psi' - \psi\varphi') = c \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de bu son eşitliğe (3.29) şartlarını uygularsak

$$p(0)[\varphi(0, \lambda)\psi'(0, \lambda) - \psi(0, \lambda)\varphi'(0, \lambda)] = c \Rightarrow c = 1$$

bulunur. Böylece

$$p(t)[\varphi(t, \lambda)\psi'(t, \lambda) - \varphi'(t, \lambda)\psi(t, \lambda)] = 1 \quad (3.30)$$

yazılabilir. (3.26) nın sağlanması için $C_1\varphi + C_2\psi$, (3.26) yı sağlayacak şekilde her ikisi birden sıfır olmayan C_1 ve C_2 sabitlerinin bulunması gerekli ve yeterlidir. O halde $C_1\varphi + C_2\psi$ çözümüne sırasıyla (3.26) nın şartları sağlatılırsa

$$\begin{aligned} C_1\varphi(0, \lambda) + C_2\psi(0, \lambda) &= C_1\varphi(1, \lambda) + C_2\psi(1, \lambda) \\ C_1\varphi'(0, \lambda) + C_2\psi'(0, \lambda) &= C_1\varphi'(1, \lambda) + C_2\psi'(1, \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de bu ifadelere (3.29) şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned} [\varphi(1, \lambda) - 1]C_1 + \psi(1, \lambda)C_2 &= 0 \\ \varphi'(1, \lambda)C_1 + [\psi'(1, \lambda) - 1]C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

olduğu görülür. İki lineer bağımsız çözümün (3.26) yı sağlaması için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi(1, \lambda) = \psi'(1, \lambda) = 1 \quad \psi(1, \lambda) = \varphi'(1, \lambda) = 0 \quad (3.32)$$

şeklindedir. Şimdi (3.31) denklem sisteminin matris gösterimini yaparsak

$$\begin{bmatrix} \varphi(1, \lambda) - 1 & \psi(1, \lambda) \\ \varphi'(1, \lambda) & \psi'(1, \lambda) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.31) in aşıkâr olmayan bir çözüme sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. O halde

$$(\varphi(1, \lambda) - 1)(\psi'(1, \lambda) - 1) - \varphi'(1, \lambda)\psi(1, \lambda) = 0$$

yazılır. Bu son eşitlikte $t = 1$ de (3.30) in kullanılmasıyla

$$\varphi(1, \lambda) + \psi'(1, \lambda) = 2$$

olduğu görülür. O halde

$$f(\lambda) = 2 \quad (3.33)$$

yazılabilir. Burada

$$f(\lambda) = \varphi(1, \lambda) + \psi'(1, \lambda) \quad (3.34)$$

şeklindedir. Diğer taraftan (3.27) şartına karşılık gelen koşul da

$$f(\lambda) = -2 \quad (3.35)$$

şeklindedir. (3.33) ü sağlayan λ değerleri (3.26) başlangıç koşullarıyla verilmiş (3.18) problemi için özdeğerlerdir ve benzer şekilde (3.35) i sağlayan λ değerleri (3.27) başlangıç koşullarıyla verilmiş (3.18) problemi için özdeğerlerdir. Eğer (3.33),

λ nın bir değeri için sağlanırsa, fakat burada (3.32) sağlanmayacak, λ nın bu değeri için (3.26) başlangıç koşullarıyla verilmiş (3.18) probleminin tam olarak bir özfonksiyonu vardır ve bu λ ya basit özdeğer denir. f sadece λ nın sürekli bir fonksiyonu değil, aynı zamanda aslında bir tam fonksiyondur.

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (3.36)$$

sınır koşulu ile verilen (3.18) in özdeğerleri $\mu_i, i = 0, 1, 2, \dots$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki sonuç, Teorem 3.4 ün ispatının tamamlanmasının ardından ispatlanacaktır.

Lemma 3.1. (3.36) nın μ_i özdeğerleriyle birlikte, bir v_0 vardır öyle ki

$$v_0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots$$

şartı sağlanır ve

$$f(v_0) \geq 2 \quad f(\mu_{2i}) \leq -2 \quad f(\mu_{2i+1}) \geq 2 \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (3.37)$$

dır. Eğer bazı $\hat{\lambda} \neq \mu_i$ ler için $f(\hat{\lambda}) = 2$ veya -2 ise bu takdirde böyle bir $\hat{\lambda}$, (3.26) veya (3.27) için bir basit özdeğerdir. Ayrıca böyle bir $\hat{\lambda}$ için

$$\frac{df}{d\lambda} < 0 \quad (\hat{\lambda} < \mu_0); \quad (-1)^i \frac{df}{d\lambda} > 0 \quad (\mu_i < \hat{\lambda} < \mu_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (3.38)$$

olur. Eğer $\lambda = \mu_{2i+1}$ de $f(\mu_{2i+1}) = 2$ ve $df/d\lambda \neq 0$ ise, bu takdirde μ_{2i+1} , (3.26) için bir basit özdeğerdir. $\lambda = \mu_{2i+1}$ de eğer $f(\mu_{2i+1}) = 2$ ve eğer $df/d\lambda = 0$ ise, bu takdirde μ_{2i+1} de (3.26) için iki bağımsız özfonksiyon vardır. Dahası, bu durumda,

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2}(\mu_{2i+1}) < 0 \quad (3.39)$$

dır. Eğer $f(\mu_{2i}) = -2$ ise benzer bir sonuç (3.27) için geçerlidir. Bu durumda (3.39) un benzerinin işareti değiştirilir.

Bu lemmanın hemen bir sonucu, (3.28) i sağlayan $\{\lambda_i\}$ ve $\{\tilde{\lambda}_i\}$ özdeğerlerinin varlığı ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların varlığıdır. Gerçekten, açıkça yazmak gerekirse

$$\lambda_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \mu_0 \leq \tilde{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 < \tilde{\lambda}_3 \leq \mu_2 \leq \tilde{\lambda}_4 < \lambda_3 \leq \dots \quad (3.40)$$

şeklinde olduğu görülür. Özfonksiyonların belirtilen sayıda köklerinin olduğunu göstermek için Teorem 3.1 kullanılır. (3.26) koşulundan φ_i özfonksiyonlarının $[0,1)$ de çift sayıda kökü vardır ve (3.27) koşulundan $\tilde{\varphi}_i$ özfonksiyonlarının tek sayıda kökü vardır. (3.36) nın özfonksiyonları $(0,1)$ de i kökü olan $\psi(t, \mu_i)$ dir (Teorem 3.3 e göre). $\lambda_0 < \mu_0$ olduğundan, φ_0 ın $[0,1)$ de iki kökü olamaz. φ_0 ın çift sayıda kökü olduğu için sayı sıfır olmalıdır. $\mu_{2i} < \lambda_{2i+1} \leq \lambda_{2i+2} < \mu_{2i+2}$, $i \geq 0$ olduğundan, φ_{2i+1} ve φ_{2i+2} nin $[0,1)$ de $2i+1$ den fazla ve $2i+4$ ten az kökü vardır ve dolayısıyla tam olarak $2i+2$ kökü olduğu anlaşılmaktadır.

$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 < \mu_1$ olduğundan, $\tilde{\varphi}_1$ ve $\tilde{\varphi}_2$ $[0,1)$ de üçten daha az köke sahiptir ve (3.27) ye göre en az bir köke sahiptir. Toplam sayı tek olduğu için de tam olarak bir tane olmalıdır. $\mu_{2i-1} < \tilde{\lambda}_{2i+1} \leq \tilde{\lambda}_{2i+2} < \mu_{2i+1}$ olduğunu kullanırsak, $i \geq 1$ için $\tilde{\varphi}_{2i+1}$ ve $\tilde{\varphi}_{2i+2}$ nin $[0,1)$ de tam olarak $2i+1$ kökü olduğu kolayca anlaşılır. Böylece ispatlanması gereken sadece lemma kalır.

Lemma 3.1 in İspatı: (3.36) ile verilen (3.18) in özdeğerleri μ_i ve özfonksiyonları $\psi(t, \mu_i)$ dir. Yani $\psi(1, \mu_i) = 0$ dır ve $\psi(t, \mu_i)$ nin $(0,1)$ de i kökü vardır. Bu yüzden i tek iken $\psi'(1, \mu_i) > 0$ ve i çift iken $\psi'(1, \mu_i) < 0$ dır. (3.30) dan

$$p(1) [\varphi(1, \mu_i) \psi'(1, \mu_i) - \varphi'(1, \mu_i) \psi(1, \mu_i)] = 1$$

yazılır ve buradan da kolaylıkla $\varphi(1, \mu_i) \psi'(1, \mu_i) = 1$ olduğu görülür, böylece (3.34) den

$$f(\mu_i) = \psi'(1, \mu_i) + \frac{1}{\psi'(1, \mu_i)}$$

olur. Herhangi bir reel $x > 0$ için $x + 1/x \geq 2$ olduğundan (3.37) sonuçları μ_i için sağlanır.

Eğer v_0 , $x'(0) = x'(1) = 0$ şartı ile verilen (3.18) in en küçük özdeğeri ise bu takdirde $\varphi(t, v_0)$ özfonsiyondur ve $[0, 1]$ de hiç kökü yoktur. Bu nedenle $v_0 < \mu_0$ dır ve $\varphi(1, v_0) > 0$ dır. $\varphi'(1, v_0) = 0$ olduğu için (3.30) dan

$$\varphi(1, v_0) \psi'(1, v_0) = 1$$

yazılır. Böylece

$$f(v_0) = \varphi(1, v_0) + \frac{1}{\varphi(1, v_0)} \geq 2$$

olur ki bu da (3.37) nin ispatını tamamlar.

$df/d\lambda$ yı ele almak için, burada $f = 2$ veya -2 dir, $u = \partial\varphi/\partial\lambda$ fonksiyonu dikkate alınır. (3.29) şartları dikkate alındığında $u(0, \lambda) = u'(0, \lambda) = 0$ olduğu açıktır ve (3.18) den de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[(p\varphi)' + (\lambda r - q)\varphi \right] &= 0 \\ \Rightarrow \left(p \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \right)' \right)' + \frac{\partial}{\partial\lambda} (\lambda r \varphi - q\varphi) &= 0 \\ \Rightarrow \left(p \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \right)' \right)' + r\varphi + \lambda r \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - q \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow (pu')' + (\lambda r - q)u &= -r\varphi \end{aligned}$$

yazılır. Bu son denklemin çözümü parametrelerin değişimi yöntemi kullanılarak bulunur. Şöyle ki: $\varphi(t, \lambda)$ ve $\psi(t, \lambda)$ bu lineer bağımsız iki çözümü olmak üzere, denklemin genel çözümü

$$u(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) \mathcal{G}_1(t, \lambda) + \psi(t, \lambda) \mathcal{G}_2(t, \lambda)$$

şeklindedir. Burada

$$\mathcal{G}_1(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} 0 & \psi' \\ -r\varphi & \psi' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix}} d\tau = \int_0^t r\varphi\psi d\tau$$

ve

$$\mathcal{G}_2(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} \varphi & 0 \\ \varphi' & -r\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix}} d\tau = -\int_0^t r\varphi\varphi d\tau$$

şeklindedir. Bu değerler genel çözümün içinde yazılırsa

$$u(t, \lambda) = \int_0^t [\varphi(t, \lambda)\psi(\tau, \lambda) - \varphi(\tau, \lambda)\psi(t, \lambda)] r(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

olduğu görülür. Bu yüzden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(1, \lambda) = \int_0^1 [\varphi(1, \lambda)\psi(\tau, \lambda) - \varphi(\tau, \lambda)\psi(1, \lambda)] r(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.41)$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}(1, \lambda) = \int_0^1 [\varphi'(1, \lambda)\psi(\tau, \lambda) - \varphi(\tau, \lambda)\psi'(1, \lambda)] r(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau$$

elde edilir. O halde (3.34) den dolayı

$$\frac{df}{d\lambda} = \int_0^1 [\psi^2(\tau)\varphi'(1) + \psi(\tau)\varphi(\tau)(\varphi(1) - \psi'(1)) - \varphi^2(\tau)\psi(1)] r(\tau) d\tau \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.42) de $\psi(\tau)$ ve $\varphi(\tau)$ nun ikinci dereceden bir formu olarak görülen parantez içindeki ifadenin işaret değiştirmemesi için diskriminantının sıfırdan küçük olması gerekir. Yani

$$(\varphi(1) - \psi'(1))^2 + 4\varphi'(1)\psi(1) \leq 0$$

olmalıdır. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\varphi^2(1) - 2\varphi(1)\psi'(1) + (\psi'(1))^2 + 2\varphi'(1)\psi(1) + 2\varphi'(1)\psi(1) \leq 0$$

yazılır ve burada (3.30) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi^2(1) + 2\varphi'(1)\psi(1) + (\psi'(1))^2 &\leq 2 \\ \Rightarrow \varphi^2(1) + 2(\varphi(1)\psi'(1) - 1) + (\psi'(1))^2 &\leq 2 \\ \Rightarrow \varphi^2(1) + 2\varphi(1)\psi'(1) + (\psi'(1))^2 &\leq 4 \\ \Rightarrow (\varphi(1) + \psi'(1))^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, eğer $-2 \leq f(\lambda) \leq 2$ ise, (3.42) deki parantez sabit bir işarete sahiptir. Eğer $f(\lambda) = 2$ ya da -2 ise, bu takdirde muhtemel bir -1 çarpanı dışında, parantez bir tam karedir ve parantez τ da özdeş olarak sıfır olmadığı sürece $df/d\lambda$ sıfır olamaz. $\psi(\tau)$ ve $\varphi(\tau)$ bağımsız olduklarından, parantezin özdeş olarak sıfır olması için gerek ve yeter koşul tüm katsayıların sıfır olmasıdır, ki bu da (3.5) ile birlikte (3.7) şartıdır eğer $f = 2$ ise ve eğer $f = -2$ ise. Böylece $\frac{df}{d\lambda} = 0$, burada $f = 2$ ya da -2 , olması için gerek ve yeter koşul özdeşlerin basit olmamasıdır.

Eğer $\lambda < \mu_0$ ya da eğer $\mu_i < \lambda < \mu_{i+1}$ ise bu takdirde λ , μ_i özdeşlerinden biri olmayıp (3.36) yı sağlamaz. Dolayısıyla $\psi(1, \lambda) \neq 0$ dır ve bu yüzden eğer $f = 2$ ya da -2 ise (3.42) deki parantez özdeş olarak sıfır değildir. Parantezin bir tam kare olması için $df/d\lambda$ nın $-\psi(1, \lambda)$ ile aynı işarete sahip olması gerekir, bu da (3.38) i ispatlar.

Böylece sadece (3.39) un ispatı kalmıştır. $\lambda = \mu_{2i+1}$ de $f = 2$ ve $df/d\lambda = 0$ olduğundan (3.32) sağlanır. Bu yüzden (3.32) de $\lambda = \mu_{2i+1}$ yazılırsa

$$\psi(1, \mu_{2i+1}) = \varphi'(1, \mu_{2i+1}) = 0, \quad \psi'(1, \mu_{2i+1}) = \varphi(1, \mu_{2i+1}) = 1 \quad (3.43)$$

olur.

$$\varphi_\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(1, \lambda), \quad \psi_\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(1, \lambda)$$

notasyonunu kullanalım ve benzer notasyon φ'_λ ve ψ'_λ için de kullanılırsa, bu takdirde (3.34) den

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2} = \varphi_{\lambda\lambda} + \psi'_{\lambda\lambda} \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.30) un λ ya göre türevi alındığında

$$\psi_\lambda \varphi' + \psi \varphi'_\lambda - \psi'_\lambda \varphi - \psi' \varphi_\lambda = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.43) şartları dikkate alındığında (3.45) den

$$\psi'_\lambda (1, \mu_{2i+1}) = -\varphi_\lambda (1, \mu_{2i+1}) \quad (3.46)$$

sonucu elde edilir. (3.45) in λ ya göre tekrar türevini alırsak ve (3.43) ve (3.46) yı de kullanırsak

$$2\psi_\lambda \varphi'_\lambda + 2\varphi_\lambda^2 - \psi'_{\lambda\lambda} - \varphi_{\lambda\lambda} = 0 \quad (\lambda = \mu_{2i+1})$$

yazılır. (3.44) de bu son bulduğumuz sonucu kullanırsak

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2} (1, \mu_{2i+1}) = 2 \left[\varphi_\lambda^2 (1, \mu_{2i+1}) + \psi_\lambda (1, \mu_{2i+1}) \varphi'_\lambda (1, \mu_{2i+1}) \right] \quad (3.47)$$

elde edilir. Tekrar (3.43) şartlarını kullanarak (3.41) eşitliğinden

$$\varphi_\lambda (1, \mu_{2i+1}) = \int_0^1 \psi(\tau, \mu_{2i+1}) \varphi(\tau, \mu_{2i+1}) r(\tau) d\tau$$

yazılır ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \psi_\lambda (1, \mu_{2i+1}) &= \int_0^1 \psi^2(\tau, \mu_{2i+1}) r(\tau) d\tau \\ \varphi'_\lambda (1, \mu_{2i+1}) &= - \int_0^1 \varphi^2(\tau, \mu_{2i+1}) r(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde edilir. ψ ve φ bağımsız olduğu için yukarıdaki bağıntılar ve Schwarz eşitsizliği, (3.47) nin sağ yanının negatif olduğu anlamına gelir, bu da (3.39) u ispatlar ve böylece lemmanın ispatı da tamamlanır.

BÖLÜM IV

PRÜFER DÖNÜŞÜMÜ İLE PERİYODİK STURM-LIOUVILLE

PROBLEMİNE YAKLAŞIM

Bu bölümde amacımız, periyodik bir Sturm-Liouville problemi verildiğinde bu problemin özdeğerlerinin varlığını Prüfer dönüşümü yardımıyla göstermektir. O halde $x \in (0, \pi)$ için

$$-(py')'(x) + (qy)(x) = \lambda(ry)(x) \quad (4.1)$$

Sturm-Liouville problemini ele alalım. Bu problemin, ayrık sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(0) \cos \alpha &= (py)'(0) \sin \alpha \\ y(\pi) \cos \beta &= (py)'(\pi) \sin \beta \end{aligned} \quad (4.2)$$

ve periyodik sınır koşulları ise

$$Y(0) = \pm Y(\pi) \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada $Y = [y \ y']^T$ biçiminde tanımlıdır.

Bu bölümü iki başlık altında inceleyeceğiz. Birinci kısımda hem standart (4.2) durumunun hem de (4.3) durumunun, $x = \pi$ de $\theta(\lambda, \alpha, x)$ Prüfer açısının analizine nasıl indirgenebileceğini gösteren Prüfer dönüşümünün bazı temel özelliklerini vereceğiz. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ nin bir fonksiyonu olan $\theta(\lambda, \alpha, x)$, sıfırdan sonsuza sürekli olarak artan bir fonksiyondur. Bu yüzden, $n \geq 0$ tamsayıları için $n\pi + \beta$ biçimindeki değerlere ulaşılır ve (4.1) ve (4.2) için özdeğerler üretilir. (4.3) sınır koşullarının, m ve M gibi iki fonksiyon aracılığıyla ele alınabileceği, böylece (aynı salınım sayısıyla) periyodik ve antiperiyodik özdeğer çiftlerinin üretilebileceği ortaya

çıkmiştir. Bu iki fonksiyon da θ Prüfer açısına bağlıdır. Diğer taraftan bu bölümün ikinci kısmında ise Prüfer dönüşümü ile ilgili verilen teori geliştirilmiştir.

4.1. Prüfer Dönüşümü

$p, r > 0$ ve $\frac{1}{p}, q, r \in \mathcal{L}^1(0, \pi)$ olduğunu kabul edelim. (4.1) denkleminin aşıkâr olmayan bir y çözümü için Prüfer dönüşümünün

$$y = \rho \sin \theta, \quad py' = \rho \cos \theta \quad (4.4)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan bu dönüşüm yardımıyla (4.1) denklemini

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\cos^2 \theta}{p} + (\lambda r - q) \sin^2 \theta \\ \rho' &= \rho \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

sistemine çevrilir ve bu sistemin başlangıç koşulları da

$$\theta(\lambda, \alpha, 0) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ ve } \rho(\lambda, \alpha, 0) = 1 \quad (4.6)$$

şeklindeir. Bu başlangıç koşullarından ikincisi y ölçeklendirilerek düzenlenebilir.

Bu tip başlangıç değeri problemlerinde θ ve ρ , (λ, α, x) in fonksiyonlarıdır.

α verildiğinde (4.2) ayrık sınır koşulları için özdeğer şartı

$$\theta(\lambda, \alpha, \pi) = \beta + k\pi, \quad \alpha, \beta \in [0, \pi) \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada k , λ nın salınım sayısıdır. (4.7) eşitliğini, λ ya karşılık gelen herhangi bir özfonksiyonun $(0, \pi]$ aralığındaki köklerinin sayısı olarak tanımlayabiliriz. Buradan yola çıkarak, sadece θ ile çalışmak yeterlidir diyebiliriz. Şimdi, ihtiyacımız olan bir takım bilinen özellikleri verelim. İlk olarak

$$\theta(\lambda, \alpha, x), \pi \text{ nin katları boyunca } x \text{ e göre artandır.} \quad (4.8)$$

Daha sonra

$$\theta(\lambda, \alpha, \pi), \text{ kesin artandır ve } \lambda \text{ ya göre süreklidir.} \quad (4.9)$$

Son olarak da

$$\lambda \rightarrow -\infty \text{ iken } \theta(\lambda, \alpha, \pi) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty \text{ iken } \theta(\lambda, \alpha, \pi) \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

dur. Tüm bu bilinenler doğrultusunda, her bir $k \geq 0$ için salınım sayısı k olan tek bir $\lambda = \lambda_k(\alpha, \beta)$ nin varlığından söz etmek mümkündür (Bu durumun tek bir istisnası vardır ki o da $\beta = 0$ iken $k \geq 1$ olmasıdır. Dirichlet şartları için $y(0) = y(\pi) = 0$ olması bu duruma bir örnektir).

Şimdi de, periyodik ya da periyodik olmayan (antiperiyodik) (4.3) şartları için altyapı oluşturalım. İlk olarak, $\theta(\lambda, \alpha, x)$ fonksiyonunun α ya göre C^1 sınıfından olduğunu söyleyelim. Gerçekten θ_α , (θ nin α ya göre kısmi türevi) (4.5) ve (4.6) daki θ denklemlerinden elde edilen

$$\theta'_\alpha = -2\theta_\alpha \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin \theta \cos \theta, \theta_\alpha(\lambda, \alpha, 0) = 1$$

başlangıç değer problemini sağlar. Bu problemin başlangıç şartı, (4.6) daki θ denkleminin dolay

$$\theta_\alpha(\lambda, \alpha, 0) = 1$$

dir. (4.5) deki ρ denkleminin

$$\begin{aligned} (\rho^2 \theta_\alpha)' &= 2\rho \rho' \theta_\alpha + \rho^2 \theta'_\alpha \\ &= 2\rho \left(\rho \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin \theta \cos \theta \right) \theta_\alpha + \rho^2 \left(-2\theta_\alpha \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin \theta \cos \theta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Buradan yola çıkarak, (4.6) kullanılırsa

$$\rho^2 \theta_\alpha = 1 \quad (4.11)$$

olur. Şimdi (4.6) yı kullanarak (4.3) şartlarını yeniden düzenleyelim. Öncelikle (4.3) şartlarını

$$y(0) = \pm y(\pi)$$

$$y'(0) = \pm y'(\pi)$$

şeklinde açıkça yazalım. Bu şartlara (4.4) dönüşümünü uygularsak

$$\rho(\lambda, \alpha, 0) \sin \theta(\lambda, \alpha, 0) = \pm \rho(\lambda, \alpha, \pi) \sin \theta(\lambda, \alpha, \pi)$$

$$\rho(\lambda, \alpha, 0) \cos \theta(\lambda, \alpha, 0) = \pm \rho(\lambda, \alpha, \pi) \cos \theta(\lambda, \alpha, \pi)$$

elde edilir. Bu son iki eşitliği taraf tarafa bölersek

$$\tan \theta(\lambda, \alpha, 0) = \tan \theta(\lambda, \alpha, \pi)$$

olur. Buradan da (4.6) başlangıç şartı kullanılarak

$$\theta(\lambda, \alpha, \pi) = \alpha + k\pi$$

bulunur. Burada periyodik şart için k çifttir. Çünkü k çift iken θ tam tur döneceği için işaret değiştirmez. Periyodik olmayan şart için de k tektir. Çünkü k tek iken θ yarım tur döneceği için işareti değişir. Ayrıca yine (4.3) den

$$y(0) = y(\pi)$$

$$\Rightarrow \rho(\lambda, \alpha, 0) \sin \theta(\lambda, \alpha, 0) = \rho(\lambda, \alpha, \pi) \sin \theta(\lambda, \alpha, \pi)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \rho(\lambda, \alpha, \pi) \sin(\alpha + k\pi)$$

$$\Rightarrow \rho(\lambda, \alpha, \pi) = 1$$

elde edilir. Bu son eşitlik ve (4.11) den

$$\theta_\alpha(\lambda, \alpha, \pi) = 1$$

yazılabilir. O halde yine, ρ olmadan sadece θ ile çalışmak yeterlidir diyebiliriz. Aslında başlangıç ve bitiş değerleri arasındaki fark olan

$$\delta(\lambda, \alpha) = \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \theta(\lambda, \alpha, 0) = \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha \quad (4.12)$$

şeklindeki bir denklemlerle çalışmak daha uygun olacaktır. Bu takdirde özdeğer şartı

$$\delta(\lambda, \alpha) = k\pi \text{ ve } \delta_\alpha(\lambda, \alpha) = 0 \quad (4.13)$$

şeklini alır.

4.2. Periyodik ve Antiperiyodik Özdeğerler

(4.13) de görüldüğü üzere δ nın α ya göre türevinin sıfır olmasından dolayı $k\pi$, $\delta(\lambda, \alpha)$ nın bir kritik değeridir denir. Bundan sonra kritik demek yerine de ekstrem demeyi tercih edeceğiz. Çünkü burada tüm kritik değerler aynı zamanda ekstrem değerler olacaktır. Şimdi $\delta(\lambda, \alpha)$ nın tanımını $\alpha \in [0, \pi)$ den $\alpha \in \mathbb{R}$ ye genişleterek başlayalım. Burada

$$\theta(\lambda, \alpha + \pi, x) = \theta(\lambda, \alpha, x) + \pi \quad (4.14)$$

olması gerçeğinden yola çıkarak δ nın π periyodik olduğunu gösterelim. (4.12) den

$$\begin{aligned} \delta(\lambda, \alpha + \pi) &= \theta(\lambda, \alpha + \pi, \pi) - (\alpha + \pi) \\ &= \theta(\lambda, \alpha, \pi) + \pi - \alpha - \pi \\ &= \alpha + k\pi - \alpha \\ &= k\pi \\ &= \delta(\lambda, \alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece δ nın π periyodik olduğu görülür.

$\delta(\lambda, \alpha)$ nın $\alpha \in \mathbb{R}$ üzerindeki minimumuna $m(\lambda)$ ve maksimumuna da $M(\lambda)$ dersek bu değerler $\alpha \in [0, \pi)$ üzerindekiyle eşittir. Şimdi de aşağıda m ve M fonksiyonları ile ilgili bazı temel özellikleri verelim.

Lemma 4.1.

- (a) m ve M fonksiyonları sürekli ve artandır.
- (b) Her bir λ için $m(\lambda) \leq M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ eşitsizliği geçerlidir.
- (c) Eğer $\lambda \rightarrow -\infty$ ise bu takdirde $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ ve $M(\lambda) \rightarrow 0$ dır.
- (d) Eğer $\lambda \rightarrow \infty$ ise bu takdirde $m(\lambda) \rightarrow \infty$ dur.

İspat:

- (a) Bu durum $\theta(\lambda, \alpha, \pi)$ deki λ için olan benzer özelliklerin α daki monotonluğundan kaynaklanır. Aslında θ , λ ya göre C^1 sınıfındandır.

Burada $\theta_\lambda = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}$ olup bu da aşağıdaki değişken problemine uyar

$$\theta'_\lambda = -2\theta_\lambda \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin \theta \cos \theta + r \sin^2 \theta.$$

Burada $\theta_\lambda(\lambda, \alpha, 0) = 0$ dır ve bu yüzden

$$|\theta'_\lambda| \leq 2|\theta_\lambda| \left| \frac{1}{p} + q - \lambda r \right|$$

olup bu son ifadenin de α dan bağımsız olduğu açıktır.

- (b) Verilen bir λ için, $m(\lambda) = \delta(\lambda, \alpha_0)$ olacak şekilde bir α_0 seçelim ve burada $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \pi]$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$\theta(\lambda, \alpha, \pi), \alpha \text{ ya göre artandır} \quad (4.15)$$

olması gerçeğini göz önünde bulunduralım. O halde θ artan bir fonksiyon ve $\alpha \leq \alpha_0 + \pi$ olduğundan $\theta(\lambda, \alpha, \pi) \leq \theta(\lambda, \alpha_0 + \pi, \pi)$ yazabiliriz ve şimdi de (4.12) ve (4.14) i kullanarak

$$\begin{aligned} \delta(\lambda, \alpha) &= \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha \\ &\leq \theta(\lambda, \alpha_0 + \pi, \pi) - \alpha \\ &= \theta(\lambda, \alpha_0, \pi) + \pi - \alpha + \alpha_0 - \alpha_0 \\ &= \delta(\lambda, \alpha_0) + \pi + \alpha_0 - \alpha \end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen bu son adımda $\alpha_0 - \alpha < 0$ olduğu dikkate alınırsa sonuç olarak

$$\delta(\lambda, \alpha) < m(\lambda) + \pi$$

elde edilir. $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \pi]$ iken $\delta(\lambda, \alpha)$ lardan biri $M(\lambda)$ olacaktır.

Dolayısıyla bu da bize $M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ olduğunu ispatlar.

- (c) (4.12) den $\delta(\lambda, 0) = \theta(\lambda, 0, \pi)$ yazılabilir. O halde ilk olarak

$$M(\lambda) \geq \theta(\lambda, 0, \pi) = k\pi > 0 \quad (4.16)$$

olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan herhangi bir $\alpha \in [0, \pi)$ için yine (4.12) yardımıyla

$$\delta(\lambda, \alpha) = \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha \geq -\alpha > -\pi$$

yazılabilir ki buradan $m(\lambda) > -\pi$ olduğu sonucu çıkarılabilir. O halde

$$-\pi < m(\lambda) \leq \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow -\infty$ iken limit alınırsa (4.10) dan $\theta(\lambda, \alpha, \pi) \rightarrow 0$ olup Sandwich teoremi gereğince $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ olduğu sonucuna varırız. Ayrıca (4.16) ve (b) seçeneğinin sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik aynı anda dikkate alındığında $0 < M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ yazılır ki bu son eşitsizlikte yine $\lambda \rightarrow -\infty$ iken limit alınırsa $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ olduğundan Sandwich teoremi gereğince $M(\lambda) \rightarrow 0$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

(d) (4.16) dan $M(\lambda) \geq \theta(\lambda, 0, \pi)$ olduğunu biliyoruz. Bu son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa (4.10) dan $\theta(\lambda, \alpha, \pi) \rightarrow \infty$ olup karşılaştırma testi gereğince $M(\lambda) \rightarrow \infty$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan yola çıkarak, (b) seçeneğinin sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik göz önüne alınırsa $\lambda \rightarrow \infty$ iken $m(\lambda) \rightarrow \infty$ olduğu sonucuna varırız.

Bu ispat ile birlikte, bu bölümde istediğimiz sonucu elde edebilmek için gerekli altyapıyı oluşturmuş duruma geliriz. Lemma 4.1 den, $k \geq 0$ için m nin ve $k \geq 1$ için de M nin her bir $k\pi$ değerini alacağını söyleyebiliriz. O halde, her bir $k \geq 0$ için $\lambda_k^- \leq \lambda_k^+$ uç noktaları ile birlikte

$$I_k = \{\lambda : m(\lambda) \leq k\pi \leq M(\lambda)\} = \{\lambda : \delta(\lambda, \alpha) = k\pi\} \quad (4.17)$$

aralıklarını tanımlayabiliriz. Burada $\lambda_0^- = -\infty$ olmasının dışında her bir $\lambda_k^\pm$ değeri sonludur. Ayrıca

$$m(\lambda_0^+) = 0 \text{ ve her } k \geq 1 \text{ için } m(\lambda_k^+) = k\pi = M(\lambda_k^-) \quad (4.18)$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.1.

- (a) λ_0^- hariç, her bir $\lambda_k^\pm$ değeri (4.1), (4.3) denkleminin salınım sayısı k olan bir özdeğeridir.
- (b) Her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun $m(\lambda)$ ve $M(\lambda)$ dışında kritik değeri yoktur. Yani (4.1), (4.3) denkleminin (a) seçeneğinde bahsedilen $\lambda_k^\pm$ değerlerinden başka özdeğeri yoktur.
- (c) I_k aralıkları ayrıktır. Yani her bir $k \geq 0$ için $\lambda_k^+ < \lambda_{k+1}^-$ dir.

İspat:

- (a) (4.18) e bakıldığında, λ_0^- hariç, $\delta(\lambda_k^\pm, \alpha)$ nın bir ekstrem değerinin $k\pi$ olduğu anlaşılır. Böylece (4.13) sağlanır. Bu da (a) seçeneğin ispatını tamamlar.
- (b) Bu ifadeyi gösterebilmek için tersini kabul etmemiz yeterlidir. Yani, bazı λ lar için $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun, $j = 0, 1, 2$ olmak üzere her bir $\alpha_j \in [0, \pi)$ ye karşılık gelen üç farklı δ_j kritik değeri olduğunu kabul edelim. $y_j(x)$ fonksiyonu (4.1) in, (4.4) e göre $\theta(\lambda, \alpha_j, x)$ Prüfer açılı ve $\rho(\lambda, \alpha_j, x)$ Prüfer yarıçaplı çözümü olsun. Burada yazım kolaylığı olması açısından $\theta_j = \theta(\lambda, \alpha_j, \pi)$ diyelim. Burada

$$\begin{aligned} & p(x)(y_0'(x)y_1(x) - y_0(x)y_1'(x)) \\ &= \rho(\lambda, \alpha_0, x)\rho(\lambda, \alpha_1, x)\sin(\theta(\lambda, \alpha_1, x) - \theta(\lambda, \alpha_0, x)) \end{aligned}$$

Wronskian determinanı sabittir. $x = 0$ ve $x = \pi$ deki değerleri kıyaslayarak ve (4.6), (4.11) ve (4.12) ifadelerinden $\rho(\lambda, \alpha_j, 0) = \rho(\lambda, \alpha_j, \pi) = 1$ olduğunu dikkate alarak

$$\sin(\theta_1 - \theta_0) = \sin(\alpha_1 - \alpha_0) \quad (4.19)$$

elde edilir. Şimdi $\alpha_j \in [0, \pi)$ olduğu için $|\alpha_1 - \alpha_0| < \pi$ yazabiliriz ve bu yüzden (4.14) ve (4.15) kullanılarak

$$|\theta_1 - \theta_0| < \pi \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.12) den $\delta_0 \neq \delta_1$, $\theta_1 - \theta_0 \neq \alpha_1 - \alpha_0$ olduğu için (4.19) ve (4.20) ifadelerinden

$$\theta_1 - \theta_0 + \alpha_1 - \alpha_0 = \pm\pi$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\theta_2 - \theta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi \text{ ve } \theta_0 - \theta_2 + \alpha_0 - \alpha_2 = \pm\pi$$

yazılabilir. Şimdi de elde edilen bu son üç eşitliği taraf tarafa toplarsak $0 = \pi$ çelişkisini elde ederiz. Bu çelişki $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun üç farklı kritik değeri olduğu kabulümüzden kaynaklanmaktadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(c) Bu seçeneğin ispatı Lemma 4.1 in (b) seçeneğinden kolaylıkla görülür.

BÖLÜM V

GEÇİŞ ŞARTI İLE VERİLMİŞ PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN PRÜFER ANALİZİ

Bu bölümde, daha önce literatürde çalışılmamış olan geçiş şartı ile verilmiş periyodik bir Sturm-Liouville probleminin Prüfer analizi ele alınacaktır. Böylece seçtiğimiz problemin özdeğerlerinin varlığını Prüfer dönüşümü yardımıyla gösterebileceğiz. O halde $J = (0, c) \cup (c, \pi)$ aralığı üzerinde tanımlı

$$-(py')' + qy = \lambda ry \quad (5.1)$$

Sturm-Liouville denklemini ele alalım. Fizikte bir çok problem, bu tür denklemlerden ortaya çıkar. Burada λ spektral parametre, r ise ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca bu bölüm boyunca $p(x), r(x) > 0$

olduğunu ve $\frac{1}{p(x)}, q(x), r(x) \in \mathcal{L}^1(J)$ olduğunu kabul edeceğiz. Literatürde bu tür

denklemler söz konusu olduğunda, çoğu zaman üzerinde çalışılan

$$\begin{aligned} y(0) \cos \alpha &= (py')'(0) \sin \alpha \\ y(\pi) \cos \beta &= (py')'(\pi) \sin \beta \end{aligned} \quad (5.2)$$

ayrık sınır şartlarını düşünelim. Ayrıca bu bölümde, (5.1) Sturm-Liouville probleminin bir iç süreksizlik noktasına sahip çözümleriyle çalışacağız. O halde, J aralığında (5.1) denklemini için

$$\begin{aligned} y(0) &= \pm y(\pi) \\ y'(0) &= \pm y'(\pi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

periyodik (antiperiyodik) sınır koşullarını ve

$$\begin{aligned} y(c+0) &= y(c-0) \\ y'(c+0) &= y'(c-0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

geçiş şartlarını ele alalım. Burada c , bir iç süreksizlik noktasıdır.

(5.1) denkleminin aşıkâr olmayan bir y çözümü için Prüfer dönüşümünün

$$y = \rho \sin \theta, \quad py' = \rho \cos \theta \quad (5.5)$$

olduğunu dikkate alalım. Bölüm 4 deki ilk başlık altında verdiğimiz bilgileri ve çıkardığımız sonuçları göz önünde bulunduralım. Bunlara ilave olarak, yine bu bölüm içerisinde kullanmak üzere vereceğimiz bazı bilgiler ve çıkaracağımız sonuçlar ise aşağıda yer almaktadır.

$(0, c) \cup (c, \pi]$ aralığındaki sabitlenmiş $x = a$ için

$$\theta(\lambda, \alpha, a), \text{ kesin artandır ve } \lambda \text{ ya göre sürekli} \quad (5.6)$$

ve

$$\lambda \rightarrow -\infty \text{ iken } \theta(\lambda, \alpha, a) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty \text{ iken } \theta(\lambda, \alpha, a) \rightarrow \infty \text{ dur.} \quad (5.7)$$

Ayrıca (5.4) geçiş şartlarını Prüfer dönüşümü altında yeniden düzenleyelim. O halde

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \alpha, c-) \sin \theta(\lambda, \alpha, c-) &= \rho(\lambda, \alpha, c+) \sin \theta(\lambda, \alpha, c+) \\ \rho(\lambda, \alpha, c-) \cos \theta(\lambda, \alpha, c-) &= \rho(\lambda, \alpha, c+) \cos \theta(\lambda, \alpha, c+) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitliği taraf tarafa bölersek

$$\begin{aligned} \tan \theta(\lambda, \alpha, c-) &= \tan \theta(\lambda, \alpha, c+) \\ \Rightarrow \theta(\lambda, \alpha, c-) &= \theta(\lambda, \alpha, c+) + k\pi \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre, 4. bölümde bilinenler de dikkate alındığında

$$\theta(\lambda, \alpha, x) = \begin{cases} \alpha, & x = 0 \\ \alpha + 2k\pi, & x \in (0, c) \\ \alpha + k\pi, & x \in (c, \pi] \end{cases}$$

yazabiliriz. Bundan sonra ise

$$\delta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha, c-) - \theta(\lambda, \alpha, 0), & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \theta(\lambda, \alpha, 0), & x \in (c, \pi] \end{cases} \quad (5.8)$$

farkıyla çalışmak daha kolay olacaktır. O halde özdeğer şartı da

$$\delta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} 2k\pi, & x \in [0, c) \\ k\pi, & x \in (c, \pi] \end{cases} \text{ ve } \delta_\alpha(\lambda, \alpha) = 0 \quad (5.9)$$

şeklini alır.

(5.9) da δ nın α ya göre türevinin sıfır olmasından dolayı $[0, c)$ aralığında $2k\pi$, $(c, \pi]$ aralığında da $k\pi$; $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun kritik değerleridir. Yine bundan sonra kritik demek yerine ekstrem demeyi tercih edeceğiz. Çünkü burada da tüm kritik değerler aynı zamanda ekstrem değerler olacaktır. $\delta(\lambda, \alpha)$ nın tanımını $\alpha \in [0, c) \cup (c, \pi]$ den $\alpha \in \mathbb{R}$ ye genişleterek başlayalım. Burada 4. bölümde verilmiş olan (4.14) eşitliğini göz önünde bulundurarak δ nın π periyodik olduğunu gösterelim. (5.8) eşitliğinden yola çıkarsak

$$\begin{aligned} \delta(\lambda, \alpha + \pi) &= \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha + \pi, c-) - \theta(\lambda, \alpha + \pi, 0), & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha + \pi, \pi) - \theta(\lambda, \alpha + \pi, 0), & x \in (c, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha, c-) + \pi - (\alpha + \pi), & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha, \pi) + \pi - (\alpha + \pi), & x \in (c, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha + 2k\pi + \pi - \alpha - \pi, & x \in [0, c) \\ \alpha + k\pi + \pi - \alpha - \pi, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2k\pi, & x \in [0, c) \\ k\pi, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\ &= \delta(\lambda, \alpha) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani δ , π periyodiktir.

$\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun $\alpha \in \mathbb{R}$ üzerindeki minimumuna $m(\lambda)$ ve maksimumuna da $M(\lambda)$ dersek, bu değerler $\alpha \in [0, c) \cup (c, \pi]$ üzerindekiyle eşittir. Şimdi, aşağıdaki lemma ile birlikte $m(\lambda)$ ve $M(\lambda)$ fonksiyonları ile ilgili bazı temel özellikleri verelim.

Lemma 5.1.

- (a) m ve M fonksiyonları sürekli ve artandır.
- (b) Her bir λ için $m(\lambda) \leq M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ eşitsizliği geçerlidir.
- (c) Eğer $\lambda \rightarrow -\infty$ ise bu takdirde $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ ve $M(\lambda) \rightarrow 0$ dır.
- (d) Eğer $\lambda \rightarrow \infty$ ise bu takdirde $m(\lambda) \rightarrow \infty$ dur.

İspat:

- (a) Bölüm 4 içerisinde yer alan Lemma 4.1 (a) da ispatı verilmiştir.
- (b) Verilen bir λ değeri için, $m(\lambda) = \delta(\lambda, \alpha_0)$ olacak şekilde bir α_0 seçelim ve burada $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + c) \cup (\alpha_0 + c, \alpha_0 + \pi]$ olduğunu kabul edelim. Burada θ nın α ya göre artan olması gerçeğini göz önünde bulunduralım. O halde θ artan bir fonksiyon ve $\alpha \leq \alpha_0 + \pi$ olduğundan, 4. bölümde verilmiş olan (4.14) eşitliğini ve (5.8) i kullanarak

$$\begin{aligned}
 \delta(\lambda, \alpha) &= \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha, c-0) - \alpha, & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\
 &\leq \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha_0 + \pi, c-0) - \alpha, & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha_0 + \pi, \pi) - \alpha, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha_0, c-0) + \pi - \alpha + \alpha_0 - \alpha_0, & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha_0, \pi) + \pi - \alpha + \alpha_0 - \alpha_0, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\
 &= \pi + \alpha_0 - \alpha + \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha_0, c-0) - \alpha_0, & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha_0, \pi) - \alpha_0, & x \in (c, \pi] \end{cases} \\
 &= \pi + \alpha_0 - \alpha + \delta(\lambda, \alpha_0)
 \end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen bu son adımda $\alpha_0 - \alpha < 0$ olduğu dikkate alınırsa sonuç olarak

$$\delta(\lambda, \alpha) < m(\lambda) + \pi$$

elde edilir. $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + c) \cup (\alpha_0 + c, \alpha_0 + \pi]$ iken $\delta(\lambda, \alpha)$ lardan biri $M(\lambda)$ olacaktır. Dolayısıyla bu da bize $M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ olduğunu ispatlar.

- (c) (5.8) den

$$\begin{aligned}\delta(\lambda, 0) &= \begin{cases} \theta(\lambda, 0, c-0), & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, 0, \pi), & x \in (c, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2k\pi, & x \in [0, c) \\ k\pi, & x \in (c, \pi] \end{cases}\end{aligned}$$

yazılır. O halde ilk olarak

$$M(\lambda) \geq \delta(\lambda, 0) > 0 \quad (5.10)$$

olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan herhangi bir $\alpha \in [0, c) \cup (c, \pi)$ için yine (5.8) yardımıyla

$$\delta(\lambda, \alpha) \geq -\alpha > -\pi$$

yazılabilir ki buradan $m(\lambda) > -\pi$ olduğu sonucu ortaya çıkar. O halde

$$-\pi < m(\lambda) \leq \delta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \theta(\lambda, \alpha, c-0) - \alpha, & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, \alpha, \pi) - \alpha, & x \in (c, \pi] \end{cases}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow -\infty$ iken limit alınır (5.7) den $\theta \rightarrow 0$ olup Sandwich teoremi gereğince $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ olduğu sonucuna varırız. Ayrıca (5.10) ve (b) seçeneğinin sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik aynı anda dikkate alındığında $0 < M(\lambda) < m(\lambda) + \pi$ yazılır ki bu son eşitsizlikte yine $\lambda \rightarrow -\infty$ iken limit alınır $m(\lambda) \rightarrow -\pi$ olduğundan Sandwich teoremi gereğince $M(\lambda) \rightarrow 0$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

(d) (5.10) eşitsizliğinden

$$M(\lambda) \geq \delta(\lambda, 0) = \begin{cases} \theta(\lambda, 0, c-0), & x \in [0, c) \\ \theta(\lambda, 0, \pi), & x \in (c, \pi] \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikte $\lambda \rightarrow \infty$ iken limit alınır (5.7) den $\theta \rightarrow \infty$ olup karşılaştırma testi gereğince $M(\lambda) \rightarrow \infty$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan yola çıkarak (b) seçeneğinin sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik göz önüne alınır $\lambda \rightarrow \infty$ iken $m(\lambda) \rightarrow \infty$ olduğu sonucuna varırız.

Şimdi, ele aldığımız problemin özdeğerlerinin varlığı ile ilgili olan aşağıdaki temel teoremimizi verebiliriz.

Teorem 5.1. Her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun $m(\lambda)$ ve $M(\lambda)$ dışında kritik değeri yoktur.

İspat: Bu ifadenin doğru olduğunu gösterebilmek için tersini kabul etmemiz yeterlidir. Yani, bazı λ lar için $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun, $j = 0, 1, 2$ olmak üzere her bir $\alpha_j \in [0, c) \cup (c, \pi)$ ye karşılık gelen üç farklı δ_j kritik değeri olduğunu kabul edelim. Burada $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ olarak seçebiliriz. $y_j(x)$ fonksiyonu (5.1) in, (5.5) e göre $\theta(\lambda, \alpha_j, x)$ Prüfer açılı ve $\rho(\lambda, \alpha_j, x)$ Prüfer yarıçaplı çözümü olsun. Burada yazım kolaylığı olması açısından $\theta_j = \theta(\lambda, \alpha_j, \pi)$ diyelim. Şimdi de $y_0(x)$ ve $y_1(x)$ çözümleri için (5.5) Prüfer dönüşümü altında Wronskian determinantını yazalım:

$$\begin{aligned} W(y_0, y_1) &= p(x)(y'_0(x)y_1(x) - y_0(x)y'_1(x)) \\ &= p(x) \left\{ \frac{\rho(\lambda, \alpha_0, x) \cos \theta(\lambda, \alpha_0, x)}{p(x)} \rho(\lambda, \alpha_1, x) \sin \theta(\lambda, \alpha_1, x) \right. \\ &\quad \left. - \rho(\lambda, \alpha_0, x) \sin \theta(\lambda, \alpha_0, x) \frac{\rho(\lambda, \alpha_1, x) \cos \theta(\lambda, \alpha_1, x)}{p(x)} \right\} \\ &= \rho(\lambda, \alpha_0, x) \rho(\lambda, \alpha_1, x) \sin(\theta(\lambda, \alpha_1, x) - \theta(\lambda, \alpha_0, x)). \end{aligned}$$

Bu determinantın değeri değişen x değerleri için sabit olup birbirinin aynıdır. O halde

$$W(y_0(\pi), y_1(\pi)) = W(y_0(0), y_1(0))$$

yazılabilir. Bu son eşitlik; $\rho(\lambda, \alpha_j, 0) = \rho(\lambda, \alpha_j, \pi) = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\sin(\theta(\lambda, \alpha_1, \pi) - \theta(\lambda, \alpha_0, \pi)) = \sin(\theta(\lambda, \alpha_1, 0) - \theta(\lambda, \alpha_0, 0))$$

şeklini alır. Buradan da $\theta_j = \theta(\lambda, \alpha_j, \pi)$ ve $\theta(\lambda, \alpha_j, 0) = \alpha_j$ olduğu dikkate alınarak

$$\sin(\theta_1 - \theta_0) = \sin(\alpha_1 - \alpha_0) \quad (5.11)$$

elde edilir. Şimdi, $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_0 + \pi$ olduğu için θ nın artan bir fonksiyon olmasını ve (4.14) ü kullanarak

$$\theta(\lambda, \alpha_0, x) < \theta(\lambda, \alpha_1, x) < \theta(\lambda, \alpha_0 + \pi, x) = \theta(\lambda, \alpha_0, x) + \pi$$

yazılır ki bu son eşitsizlikten de

$$\theta_0 < \theta_1 < \theta_0 + \pi$$

olduğu görülür. $\delta_0 \neq \delta_1$ olduğundan $\theta_0 - \alpha_0 \neq \theta_1 - \alpha_1$ ve dolayısıyla $\theta_1 - \theta_0 \neq \alpha_1 - \alpha_0$ diyebiliriz. Bu yüzden (5.11) eşitliğinden yola çıkarak

$$\theta_1 - \theta_0 + \alpha_1 - \alpha_0 = \pi$$

elde edilir. $y_0(x)$ ve $y_1(x)$ çözümlerinden yola çıkarak elde edilen bu son eşitliğe benzer olarak sırasıyla $y_2(x)$ ve $y_1(x)$ ile $y_2(x)$ ve $y_0(x)$ çözümlerinden yola çıkarak

$$\theta_2 - \theta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 = \pi$$

ve

$$\theta_0 - \theta_2 + \alpha_0 - \alpha_2 = -\pi$$

yazılabilir. Şimdi de elde edilen bu son üç eşitliği taraf tarafa toplarsak $0 = \pi$ çelişisini elde ederiz. Bu çelişki $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun üç farklı kritik değeri olduğu kabulümüzden kaynaklanmaktadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin ortaya çıkarmış olduğu sonuç aşağıdaki gibidir.

Sonuç 5.1. $\delta(\lambda, \alpha)$ fonksiyonunun kritik değerleri, (5.1)-(5.4) sınır değer probleminin tüm özdeğerlerine karşılık gelir.

Bu bölümde, Prüfer dönüşümü ile verilmiş Sturm-Liouville probleminin spektral analizini parçalı karakteristik fonksiyona sahip periyodik singüler Sturm-Liouville problemine genişlettik. Bu noktada, spektral analizi Prüfer dönüşümüyle yapmanın klasik yöntemlere kıyasla daha basit ve açık olduğunu vurgulayalım. Ele almış

olduğumuz, geçiş şartı ile verilen bu sınır değer probleminin özdeğerlerinin varlığını analiz ettik. Bu analizdeki en kritik nokta, ana teoremimiz için çok önemli olan karakteristik fonksiyonun, geçiş şartı dolayısıyla parçalı bir fonksiyon olarak karşımıza çıkmasıdır. Bu yüzden, [22] deki lemmayı yeni karakteristik fonksiyona göre tekrar ispatladık. Son olarak da, bu bölümün başında seçtiğimiz problemin özdeğerlerinin varlığını gösteren ana teoremimizi verdik.



BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu tez kapsamınsa öncelikle, Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi üzerine geçmişten günümüze kadar yapılan bazı çalışmalardan söz edilen giriş bölümü verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, Sturm-Liouville teorisi hakkında bilinmesi gereken bazı temel tanım ve teoremlere detaylı bir şekilde yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin salınım ve karşılaştırma teoremleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Ayrıca yine bu bölüm içinde Prüfer dönüşümünün tanıtımı yapılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde periyodik bir Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Bu problemin özdeğerlerinin varlığını gösterebilmek için Prüfer dönüşümü kullanılmıştır. Bu bölüm içindeki problem çözerken izlenen yol, beşinci bölümde ele aldığımız problemin çözüme kavuşması adına bizim için çıkış kapısı olmuştur.

Bu tez kapsamında son olarak beşinci bölüm verilmiştir. Bu bölümde geçiş şartına sahip periyodik bir Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Burada amacımız, seçmiş olduğumuz bu problemin özdeğerlerinin varlığını gösterebilmektir. Aslında literatürde aynı problemin özdeğerlerinin varlığını çeşitli metotlarla inceleyen çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalar hakkında detaylı bilgi de tezin giriş bölümünde verilmiştir. Fakat biz, daha önce kullanılan bu metotların dışında Prüfer dönüşümü yardımıyla bu incelemeyi gerçekleştirdik. Bu incelemeyi gerçekleştirirken öncelikle, elimizde mevcut olan geçiş şartına sahip sınır değer problemini ρ Prüfer yarıçapına ve θ Prüfer açısına bağlı bir sisteme çevirdik. Daha sonra, $\delta(\lambda, \alpha)$ ile gösterdiğimiz ve adına özdeğer şartı da dediğimiz parçalı bir karakteristik fonksiyona ulaştık. Yapmış olduğumuz incelemeler neticesinde, bu karakteristik fonksiyonun kritik değerlerinin ele aldığımız problemin özdeğerleri olduğunu gördük.

Beşinci bölüm kapsamında ele aldığımız problemin bir tane iç süreksizlik noktası vardı ve geçiş şartı da o noktada verilmişti. Buradan yola çıkarak bu tezin, $n > 1$ olmak üzere, n tane iç süreksizlik noktasına sahip bir Sturm-Liouville probleminin spektral analizinin Prüfer dönüşümü yardımıyla yapılabilmesinde önemli rol oynayacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Overview of Sturm-Liouville theory: the maths behind quantum mechanics. Published by Dr. Christian P. H. Salas: www.drchristianphsalas.com, 15.04.2020.
- [2] Ince, E. L. (1926). *Ordinary Differential Equations*. Reprinted, 1956.
- [3] Prüfer, H. (1926). Neue Herleitung der Sturm-Liouvillschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen, *Mathematische Annalen* **95**, 499-518.
- [4] Coddington, E. A., Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill.
- [5] Atkinson, F. V. (1964). *Discrete and Continuous Boundary Problems*. Academic Press.
- [6] Weidmann, J. (1987). *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*. Lecture Notes in Math. 1258, Springer-Verlag.
- [7] Brown, M., Eastham, M. S. P., Schmidt, K. M. (2013). *Periodic Differential Operators (Operator Theory: Advances and Applications)*. Birkhauser.
- [8] Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators*. George G. Harrap.
- [9] Titchmarsh, E. C. (1962). *Eigenfunction Expansions, part 1*. Oxford University Press, Oxford.
- [10] Levitan, B. M., Sargsjan, I. S. (1975). *Introduction to Spectral Theory*. AMS Publication.
- [11] Dunford, N., Schwartz, J. T. (1964). *Linear Operators, vol. II*. Interscience, New York.

- [12] Akhiezer, N. I., Glazman, I. M. (1961). *Theory of Linear Operators in Hilbert Space, vol. I and II*. Frederick Ungar, New York.
- [13] Krall, A. M. (1986). *The Singular Sturm-Liouville Problem*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- [14] Eastham, M. S. P. (1973). *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*. Scottish Academic Press, Edinburgh and London.
- [15] Manafov, M. Dzh., Kablan, A. (2015). Inverse Spectral and Inverse Nodal Problems for Energy-dependent Sturm-Liouville Equations with Delta-Interaction. *Electronic Journal of Differential Equations* **26**, 1-10.
- [16] Manafov, M. Dzh., Kablan, A. (2016). Sturm-Liouville Problems with Finitely Many Point Delta-Interactions and Eigen-parameter in Boundary Condition. *Miskolc Mathematical Notes* **2**, 17.
- [17] Guseinov, G. Sh. (2014). Construction of a Quadratic Sturm-Liouville Operator Pencil from Spectral Data. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan* **40**, Special Issue 203-214.
- [18] Mukhtarov, O. S., Kadakal, M., Muhtarov, F. S. (2004). On Discontinuous Sturm-Liouville Problem with Transmission Conditions. *Journal of Mathematics of Kyoto University* **44(4)**, 779-798.
- [19] Altinisik, N., Kadakal, M., Mukhtarov, O. S. (2004). Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-dependent Boundary Conditions. *Acta Mathematica Hungarica* **102(1-2)**, 159-193.
- [20] Chailos, G. (2009). Applications of Prüfer Transformations in the Theory of Ordinary Differential Equations. *Irish Mathematical Society Bulletin* **63**, 11-31.
- [21] Binding, P. (2013). Prüfer's Transformation. *Global Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Its Applications* **1838**, 149-160.

- [22] Binding, P., Volkmer, H. (2012). A Prüfer Angle Approach to the Periodic Sturm-Liouville Problem. *The American Mathematical Monthly* **119(6)**, 477-484.
- [23] Binding, P., Volkmer, H. (2013). A Prüfer Angle Approach to Semidefinite Sturm-Liouville Problems with Coupling Boundary Conditions. *Journal of Differential Equations* **255**, 761-778.
- [24] Binding, P., Volkmer, H. (2005). Prüfer Angle Asymptotics for Atkinson's Semidefinite Sturm-Liouville Eigenvalue Problem. *Mathematische Nachrichten* **278**, No. 12-13, 1458-1475.
- [25] Binding, P., Boulton, L., Browne, P. J. (2007). A Prüfer Angle Approach to Singular Sturm-Liouville Problems with Molcanov Potentials. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **208**, 226-234.
- [26] Al-Gwaiz, M. A. (2008). *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer – Verlag London Limited.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Mehmet Akif ÇETİN

Eğitim Bilgileri

<u>Derece</u>	<u>Alan</u>	<u>Üniversite</u>	<u>Yıl</u>
Lisans	Matematik	Atatürk Üniversitesi	2012
Yüksek Lisans	Uygulamalı Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2015
Doktora	Uygulamalı Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2022

Akademik Unvanlar

<u>Unvan</u>	<u>Üniversite</u>	<u>Yıl</u>
Araştırma Görevlisi	Gaziantep Üniversitesi	2012-2018
Öğretim Görevlisi	Alanya Alaaddin Keykubat Üniversitesi	2018-

YAYINLAR

Uluslararası Yayınlar

- [1] Kablan, A., Çetin, M. A., Manafov, M. Dzh. (2018). The Finite Spectrum of Sturm-Liouville Operator with Finitely Many δ – Interactions. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal* **13**, 496-507.
- [2] Kablan, A., Çetin, M. A. (2018). Equivalence of Sturm-Liouville with Finitely Many δ – Interactions and Matrix Eigenvalue Problems. *International Journal of Analysis and Applications* **16**, 25-37.
- [3] Çetin, M. A., Kablan, A., Manafov, M. Dzh. (2022). Prüfer Analysis of Periodic Singular Sturm-Liouville Problem with Piecewise Characteristic. *Fractals: Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society* DOI: 10.1142/S0218348X22401892.

Uluslararası Bildiriler

- [1] Kablan, A., Çetin, M. A., Bala, B., Ay, M. (2017). A Study on Finite Spectrum of Sturm-Liouville Problems with Delta Interactions. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 11-13 May, Şanlıurfa.
- [2] Kablan, A., Bala, B., Manafov, M. Dzh., Çetin, M. A. (2017). On Spectral Problem for Discrete Discontinuous Sturm-Liouville Problem. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 11-13 May, Şanlıurfa.
- [3] Çetin, M. A. (2015). Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Delta Interaction for Coupled Boundary Conditions. *7th International Workshop on Differential Equations and Applications*, 28-31 July, İzmir.

Ulusal Bildiriler

- [1] Kablan, A., Çetin, M. A., Karataş, H. (2015). Delta Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Matris Gösterimi. *10. Ankara Matematik Günleri*, 11-12 Haziran, Ankara.