

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEMEL EĞİTİM ANA BİLİM DALI
SINIF EĞİTİMİ BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

4. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNME YAPILARININ
GELİŞİMİNİ AMAÇLAYAN BİR ÖĞRETİM DENEYİ

SEDA YÜCE

Tez Danışmanı
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEYLAN ŞEN

YOZGAT-2022

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEMEL EĞİTİM ANA BİLİM DALI
SINIF EĞİTİMİ BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

4. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNME YAPILARININ
GELİŞİMİNİ AMAÇLAYAN BİR ÖĞRETİM DENEYİ

SEDA YÜCE

Tez Danışmanı
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEYLAN ŞEN

YOZGAT-2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

SEDA YÜCE

28/06/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

4. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL DÜŞÜNME YAPILARININ GELİŞİMİNİ AMAÇLAYAN BİR ÖĞRETİM DENEYİ

SEDA YÜCE

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEMEL EĞİTİM ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ CEYLAN ŞEN

Bu araştırmada, 4.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarının gelişimleri hedeflenmiş ve bu amaçla erken cebir öğretimi uygulanmıştır. Çalışmada nitel araştırma desenlerinden öğretim deneyi modeli gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar amaçlı örneklem yolu ile belirlenerek çalışmaya dahil edilmişlerdir. Öğretim deneyi kapsamında 14 oturumluk sayı ve şekil örüntülerinin yer aldığı genişleyen örüntü çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi süresince öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarını incelemek amacıyla odak grup görüşmeleri, katılımcı olmayan gözlem, öğrenci çalışma kağıtları, video ve ses kayıtları ile veriler elde edilmiştir. Elde edilen veriler betimsel analiz yolu ile analiz edilmiştir. Çalışmada öğrenciler örüntüyü devam ettirme, genişletme, eksik bırakılan ögeyi tamamlama ve örüntü kuralını tanımlama çalışmaları gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin gerçekleştirmiş oldukları örüntü çalışmalarında ise yazılı, sözel, matematiksel ve görsel temsilleri kullandıkları görülmüştür. Çalışma sonucunda, gerçekleştirilen öğretim deneyinde öğrencilerin sayma, modelleme, yinelemeli, bütüne genişletme, içeriksel ve doğrusal stratejileri kullanarak genellemeye vardıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra, öğrencilerin ulaşılmış olduklarını genellemelerini doğrulamada şekilsel/görsel, sayısal ve cebirsel stratejilerini kullandıkları görülmektedir. Öğrencilerin ortaya çıkan fonksiyonel düşünceleri incelendiğinde ise yinelemeli, kovaryasyonel ve ortak değişkenli düşüncelerinin etkili olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar doğrultusunda araştırmada gerçekleştirilen erken cebir öğretim deneyinin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarının çeşitli bileşenler bağlamında etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

2022-xi+122 SAYFA

ANAHTAR KELİMELE: Erken Cebir, Cebirsel Düşünme, İlkokul Öğrencileri, Öğretim Deneyi

ABSTRACT

MASTER THESIS

A TEACHING EXPERIMENT TO DEVELOP ALGEBRAIC THINKING STRUCTURES OF 4TH GRADE STUDENTS

SEDA YÜCE

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES**

DIVISION OF ELEMENTARY EDUCATION

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. CEYLAN ŞEN

In this research, the development of algebraic thinking structures of 4th grade students was aimed and for this purpose early algebra teaching was applied. In this study, a teaching experiment model, one of the qualitative research designs, was used. Participants were included in the study by being determined by purposeful sampling. Within the scope of the teaching experiment, expanding pattern studies involving number and shape patterns for 14 sessions were carried out. In order to examine the algebraic thinking structures of the students during the teaching experiment, data were obtained through focus group interviews, non-participant observation, student handouts, video and audio recordings. The obtained data were analyzed by descriptive analysis. In the study, the students carried out activities to continue the pattern, expand, complete the missing item, and define the pattern rule. It was observed that the students used written, verbal, mathematical and visual representations in their pattern studies. As a result of the study, it was seen that the students reached generalization by using counting, modeling, iterative, expansion to the whole, contextual and linear strategies in the teaching experiment. In addition, it is seen that students use figural, numerical, and algebraic strategies to confirm their generalizations. When the students' emerging functional thinking is examined, it is seen that iterative, covariational and covariate thinking are effective. In line with these results, it was concluded that the early algebra teaching experiment conducted in the research was effective in the context of various components of the students' algebraic thinking structures.

2022- xi+122 PAGE

KEYWORDS: Early Algebra, Algebraic Thinking, Elementary School Students, Teaching Experiment

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitim sürecinin her aşamasında akademik ve manevi destek ve emeğiyle her zaman yanımda olan, kıymetli vaktini bana ayıran, değerli katkılarıyla süreçte bana yol gösteren, hoşgörü ve sabrından güç aldığım, kendisinden çok şey öğrendiğim saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ceylan ŞEN'e sonsuz teşekkür ediyorum.

Tez çalışmamda bilgi ve tecrübelerini paylaşarak çalışmama görüş ve öneriyle katkı sağlayan Doç. Dr. Gürsel GÜLER ve Doç. Dr. Tuğrul KAR'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez çalışmamı gerçekleştirmemde yardımcı olan Şehit Binbaşı Lütfü Ceylan İlkokulu idareci ve öğretmenlerine, uygulama sürecinde katılımcı olarak yer almayı kabul ederek büyük bir özveri ile çalışan sevgili öğrencilerime ve manevi desteklerini sunan değerli velilerime teşekkür ediyorum. Tez uygulama sürecinde yer alarak katkılarını esirgemeyen çalışma arkadaşım Elif Merve YELLİCE'ye teşekkür ederim.

Hayatımın her anında varlıklarını hissettiğim, haklarını ödeyemeyeceğim, bugüne gelmemde en büyük desteği veren kıymetli babam Raşit YÜCE ve sevgili annem Hatice YÜCE başta olmak üzere tüm aileme minnet ve şükranlarımı sunuyorum.

SEDA YÜCE

28/06/2022

İÇİNDEKİLER

TEZ BEYANI.....	v
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
Problem Durumu	1
Araştırmanın Amacı ve Önemi	3
Araştırma Problemi	5
Sayıtlılar	5
Sınırlılıklar	6
Tanımlar	6
2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	7
Cebir	7
Cebirsel Düşünme	8
Erken Cebir	10
Fonksiyonel Düşünme	12
İlkokulda Fonksiyonel Düşünme	14
Genelleme	18
Gerekçelendirme.....	21
İlgili Çalışmalar.....	22
3. YÖNTEM	32
Araştırmanın Türü	32
Öğretim Deneyi	32
Çalışma Grubu.....	36
Veri Toplama Süreci	37
Veri Toplama Araçları	39
Odak Grup Görüşmesi	40
Gözlem	41
Doküman	41
Video Kayıtları	42

Gözlem Formu ve Alan Notları	42
Verilerin Analizi.....	42
Araştırmacının Rolü	46
Araştırmanın Etik Boyutu	46
Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliliği	47
Araştırmanın İnanılcılığı ve Transfer Edilebilirliği	47
Araştırmanın Tutarlılığı ve Doğrulanabilirliği	48
4. BULGULAR.....	49
Örüntü Çalışmaları İle İlgili Bulgular	50
Genelleme ve Gerekçelendirme Stratejileri İle İlgili Bulgular	54
Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri İle İlgili Bulgular	59
Cebirsel Düşünme Yapıları Arasındaki İlişki İle İlgili Bulgular	66
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	68
Örüntü Çalışmalarına İlişkin Sonuçlar	68
Genelleme Stratejilerine İlişkin Sonuçlar	69
Gerekçelendirme Stratejilerine İlişkin Sonuçlar	70
Fonksiyonel Düşünme Düzeylerine İlişkin Sonuçlar.....	71
Öğretim Deneyinin Etkililiğine İlişkin Sonuçlar	73
Öneriler.....	74
6. KAYNAKLAR	76
7. EKLER	94
EK-1: Erken Cebir Öğretim Deneyi İçeriği	94
Sayı Örüntüleri Çalışmaları	94
1. Oturum “Tekerleme” Etkinliği	94
2. Oturum “Tavşan Momi’yi Havuçlara Ulaştır” Etkinliği	94
3. Oturum “Sayı Örüntülerinin Kuralı” Etkinliği	95
4. Oturum “Kuralla Göre Sıralıyorum” Etkinliği	97
5. ve 6. Oturum “Fonksiyonel Kurallı Sayı Örüntüleri” Etkinliği.....	97
Şekil Örüntüleri Çalışmaları.....	98
1. Oturum “Kibrit Çöpleri- Geometrik Şekil Örüntüleri” Etkinliği.....	98
2. Oturum “Sarı Üçgenler” Etkinliği	99
3. Oturum “Uç Uca Küpler” Etkinliği	100
4. Oturum “Kareleri Diziyorum” Etkinliği	101
5. Oturum “Renkli Daireler” Etkinliği.....	103

6. Oturum “Yıldızlı Beşgenler” Etkinliği	104
7. Oturum “Ayşe’nin Örüntü Tasarımı” Etkinliği	105
8. Oturum “Kaç Ev Kaç Kişi?” Etkinliği.....	107
EK-2: Odak Grup Görüşme Soruları.....	110
Sayı Örüntüleri Görüşme Soruları.....	110
Şekil Örüntüleri Görüşme Soruları.....	112
EK-3: Gözlem Formu.....	118
EK-4: Etik Komisyonu Onay Bildiri.....	119
EK-5: MEB Araştırma İzni Bildirimi	120
EK-6: Gönüllü Katılım Öğrenci Formu	121



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3. 1. Katılımcıların bireysel özellikleri	37
Tablo 3. 2. Erken cebir öğretim deneyi içeriği	37
Tablo 3. 3. Çalışma kullanılan veri toplama araçları	39
Tablo 3. 4. Tema, kod ve örnek kodlamalar	43
Tablo 4. 1. Sayı örüntülerinde örüntü oluşturma örnek çalışmaları	50
Tablo 4. 2. Sayı örüntülerinde örüntü devam ettirme örnek çalışmaları	51
Tablo 4. 3. Şekil örüntülerinde tekrar birimini tanımlama örnek çalışmaları.....	53
Tablo 4. 4. L0 düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları.....	60
Tablo 4. 5. Yinelemeli (L1-L2) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları	60
Tablo 4. 6. Kovaryasyonel (L3) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları.....	61
Tablo 4. 7. L4 düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları.....	62
Tablo 4. 8. Ortak değişkenli (L5) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları	63
Tablo 4. 9. Ortak değişkenli (L6-L7/8) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları	64
Tablo 4. 10. Ortak değişkenli (L7/8) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları ..	64
Tablo 4. 11. Ortak değişkenli (L9/10) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları	65
Tablo 4. 12. Ortak değişkenli (L9/10) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları	65

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2. 1. Fonksiyonel düşünme düzeyleri (Stephens ve diğerleri, 2017).....	13
Şekil 2. 2. Stacey (1989) tarafın yapılan tanımlanan genelleme stratejileri	18
Şekil 2. 3. Lannin (2005) tarafından tanımlanan genelleme stratejileri.....	19
Şekil 2. 4. Gerekçelendirme stratejileri sınıflandırması	22



1. GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, araştırmanın amacı ve önemi, araştırma problemleri, sayıltılar, sınırlılıklar ve tanımlar açıklanmıştır.

Problem Durumu

Ortaokul matematik öğretim programı; sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılık alt öğrenme alanlarından oluşmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı, 2018). Alt öğrenme alanları arasında olan cebir, birçok matematik konusuna temel olması sebebiyle oldukça önemli olan ve öğreniminde oldukça zorluk yaşanan konular arasındadır (Kieran, 2011). Cebirde, genelleme ve soyutlamanın yer alması yaşanan zorlukların en temel sebebi olarak görülmektedir (Kaput, 2008). Bu sebeple okul matematiğinde cebir öğretimine öğrencilerin genelleme ve soyutlamanın yer aldığı ortaokul kademesinde başlanmaktadır (Altun, 2005). Buna karşın ilkökul matematik müfredatında cebire yer verilmemesine rağmen öğrencilerin matematiksel olarak yapılan sınıf içi tartışmalar ve görüşlerinde cebirsel düşünme öğelerinin yer aldığı görülmektedir. Bu bağlamda cebirin ileri sınıf seviyelerindeki matematik müfredatında yer alan bir öğrenme alanı olarak değil, öğrenim hayatına yayılmış cebirsel fikirlerin, kavramların ve cebirsel düşünmenin yer aldığı bir süreç olarak ele alınması gerekmektedir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorlukların önlenmesi ve cebirsel düşünmenin gelişimi için ilkökul düzeyinde cebirsel düşünme gelişimini destekleyen öğretim çalışmalarına yer verilmesi gerekmektedir (Lian ve Yew, 2011). Buna yönelik olarak yapılması gerekenlerin başında soyutlama ve değişken kavramlarının temeli olan örüntü çalışmaları gelmektedir (Turgut ve Doğan Temur, 2017). Örüntü kavramı, öğretim programında birinci sınıftan itibaren yer alır ve geometrik şekil örüntüleri ve sayı örüntülerinde kuralı bulma, eksik bırakılan örüntüyü tamamlama ve örüntü oluşturma şeklinde her sınıf düzeyinde karmaşıklılaşarak devam eder (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018).

Cebiri anlamak, öğrenim sürecinin ilk yıllarından itibaren yer verilen örüntü ve temsil çalışmaları ile gerçekleşmektedir. Örüntü çalışmalarında öğrenciler örüntülerle ilgili çalışmalar (devam ettirme, tamamlama, oluşturma) günlük yaşantılarında da birçok alanda karşılaşmaları muhtemel olduğundan somut olarak cebiri deneyimleme fırsatı bulmaktadırlar (Lee ve diğerleri, 2016). Literatürde aritmetik bilginin derinleştirilip bu bilginin cebire entegre edilmesine olanak sağlayan erken cebir döneminde, örüntü

alışmalarının etkililiğine ilişkin birçok neden sunulmaktadır. Örüntü alışmaları, öğrencilerin matematiği anlamlandırmalarına yardımcı olacak beceriler kazandırmaktadır (Schoenfeld, 2008). Örneğin, Barbosa (2011), örüntülerin öğrencilerin matematiği anlamlandırmalarını sağlamalarının yanı sıra problem çözme ve cebirsel düşünme becerilerini de geliştirmeye yardımcı olduğunu belirtmektedir. Benzer şekilde Samson ve Schafer (2007), örüntü çalışmalarının matematik öğrenme alanlarından önce öğrencilerin cebirsel düşünme fırsatı sunduğunu ifade etmiştir. Örüntü alışmaları öğrencilerin fark etme ve genelleme yapma süreci ile akıl yürütme becerilerini geliştirmektedir (Mason ve diğerleri, 2005). Bu sayede örüntüler öğrencilerin genellemeye varmalarını destekleyerek cebire giriş yapmalarını sağlamaktadırlar (Lins ve Kaput, 2004).

İlkokul dönemindeki öğrencilerinin hedeflenen cebirsel düşünmelerini geliştirecek faaliyetlerin temelinde örüntü çalışmaları ve genelleme yer almaktadır. Kaput (1999) erken cebirsel düşünmeyi *“bireyin matematiksel işlemler ve ilişkiler/ örüntüler ile ilgili genellemeler yapma ve bu genellemelerden varsayımlar yapmadır”* şeklinde tanımlanmaktadır (syf. 2). Örüntü görevlerinde gerçekleştirilen sayılar arasındaki ilişkileri belirlemeye yönelik çalışmalar beraberinde fonksiyonel ilişkilerin ortaya çıkarılmasını sağlamakta ve bu sayede örüntü çalışmalarında öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişimi sağlanmaktadır. Öğrencilerin fonksiyonel düşünmeleri ile birbirine bağlı değişen sayısal değerleri genellemeleri, temsil etmeleri ve fonksiyonel olarak davranışlarını tahmin etmeleri cebirsel düşünmelerinin temel göstergeleridir (Blanton ve diğerleri, 2015). Benzer şekilde öğrencilerin iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi fark etmeleri sayesinde bu bağıntıyı kelime veya semboller ile temsil etmeleri genelleme becerilerini etkili kılmaktadır (Wilkie, 2016). Bu sayede cebirsel düşünme yapıları olan genelleme, gerekçelendirme, temsil etme ve fonksiyonel düşünme bileşenlerinin erken yaşlardan itibaren gelişimi ve deneyimlenmesi sağlanmaktadır (Warren ve diğerleri, 2016).

Bu çalışmada, ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin erken cebir öğretimlerine ilişkin tasarlanan içerik doğrultusunda öğretim deneyi sürecinin ve bu öğretim deneyinin öğrencilerin cebirsel düşünmelerindeki etkililiğinin ortaya konulması amaçlanmaktadır. Gerçekleştirilecek bu çalışma ile dördüncü sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarında etkili olacak bir erken cebir öğretim içeriğinin hazırlanması ve bu öğretim içeriğinin öğrencilerin cebirsel düşünmelerinde ne şekilde etkili olduğunun sunulması planlanmıştır. Bu sayede ulusal ve uluslararası erken cebir öğretim literatürüne katkıda bulunulması hedeflenmektedir.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Cebir; denklem çözme, aritmetik ve hesaplama gibi alanlarda kullanılan temsil çeşitlerine ulaşmak için bir araç olarak görülmesi ile birlikte daha karmaşık problemler için uygun temsiller keşfetmenin bir adımı olarak kabul edilmektedir (Subramaniam ve Banerjee, 2011). Cebir, okul öncesinden liseye kadar öğretimin tüm kademelerinde problem çözme sürecinde kullanılan sembolleştirme ve kurallar sistemidir (Carraher ve Schliemann, 2015). Bu bağlamda matematik alanında önemli bir yeri olan cebirin amaçlarından biri örüntüleri, fonksiyonları ve ilişkileri anlamaktır (NCTM, 2000). Cebire temel oluşturmak için ilkokulun ilk yıllarından itibaren örüntü etkinliklerine yer verilmesi önemlidir (Herbert ve Brown, 1997). Çünkü örüntüler sembolleri yorumlamayı öğrenmede bir temel görevi görüp ileri sınıf seviyelerinde cebirde karşılaşılan sayılar ve şekillerle ilgili genel ifadeleri oluşturmaya ve tanımaya yardımcı olmaktadır (Threlfall, 1999). İlköğretim dönemindeki öğrencilerin bu dönemde örüntü ve cebir konusu ile tanışmaları ve bu konulara gerekli önemin verilmesi ile ileriki sınıf düzeylerinde cebir öğrenimlerine daha sağlam bir temelle başlayacakları düşünülmektedir.

Matematikte önemli bir yere sahip olan cebirin, öğretimi de önemlidir. Öğrencilerdeki temel cebirsel kavramların oluşmasıyla birlikte, cebirsel düşünme becerilerinin gelişimi ilkokul döneminde başlar ve cebir öğretimi ile devam eder. Öğrencilere cebiri öğretirken öğrenme ortamlarının çeşitlendirilmesi ve anlamlı öğrenmeyi destekleyecek etkinliklere yer verilmesi bu dönemde kritik bir öneme sahiptir. Özellikle cebir öğretiminde kullanılacak çoklu temsiller, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimini olumlu yönde etkilemektedir (NCTM, 2000). Tek bir temsil türüne bağlı kalan ya da temsiller arası ilişkilendirme becerisine sahip olmayan öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin de kısıtlı olduğu görülmektedir (Lesh ve Doerr, 2000). Cebir öğretimine temel oluşturan yollardan biri, sayılar arasındaki ilişkilerin, temsili ile oluşturulan modelleri, fonksiyonları ve genellemeleri formelleştirmektedir. Fonksiyonel düşünmenin öğrenci tarafından kazanımı hem cebir hem de fonksiyon kavramının öğrenimini kolaylaştırmaktadır (Kabael ve Tanışlı, 2010). Fonksiyonel düşünme, ilkokul matematiğinin ayrılmaz bir parçasıdır (Blanton ve Kaput, 2008). Öğrencilerin fonksiyonel düşünme ile birlikte değişen değerlerin genellemelerini, temsillerini ve fonksiyonel olarak davranışlarını tahmin ederek öğrencilerde var olan cebirsel düşünmedeki fonksiyonel düşünmenin rolü ortaya çıkmaktadır (Blanton ve diğerleri, 2015). Bu bağlamda cebirsel düşünme ile fonksiyonel düşünmenin birbiriyle ilişkili olduğu anlaşılmaktadır.

Matematik müfredatında aritmetik bilgisi, cebirsel kavramlar, temel düzeyde temsil ve ilişkisel durumlar yer almakla birlikte bu bileşenlerin etkili bir şekilde kullanımı ile öğrencilerin cebirsel düşünme gelişimleri desteklenmelidir (Nührenbörger, 2015; Nührenbörger ve Schwarzkopf, 2015). Bu sebeple cebirsel düşünmeyi geliştirmeyi amaçlayan ilkökul matematik öğretiminin cebirsel düşünme yapılarını destekleyecek şekilde düzenlenmesi ve farklılaştırılması gerekmektedir (Blanton ve Kaput, 2011). Cebirin ilkökul müfredatında yer alması gerektiği yönünde bir anlayış olmasına rağmen cebiri ilkökul matematiğine uyarlamak için yapılan çalışmalar henüz sınırlıdır (Carraher ve Schlieman, 2007). Bu çalışma ile ilkökul matematiğinde gerçekleştirilecek öğretim deneyi ile literatüre katkı sağlanması hedeflenmektedir.

İlkökul öğrencileriyle gerçekleştirilen cebir çalışmaları incelendiğinde cebire yönelik farklı çalışmalar yapıldığı görülmektedir. Cebir öncesi dönemde erken cebir öğretimi gerçekleştirme (Fonger ve diğerleri, 2018; Palabıyık ve Akkuş İspir, 2011) öğrencilerde fonksiyonel ilişkileri keşfetme ve geliştirme (Cañadas ve diğerleri, 2016; Ramirez ve diğerleri, 2020; Xolocotzin ve Rojano, 2015) fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini belirleme (Ayala-Altamirano ve Molina, 2021; Kabael ve Tanışlı, 2010; Türkmen ve Tanışlı, 2019), cebir öncesi dönemde yapılan öğretim etkinliklerinin akademik başarıya etkisi (Turgut ve Doğan Temur, 2017; Doğan Temur ve Turgut, 2020) ve fonksiyonel ilişkileri genelleme ve temsil etme becerilerine (Blanton ve diğerleri, 2015; Blanton ve diğerleri, 2017; 2019; Pinto ve diğerleri, 2021; Stephens ve diğerleri, 2017; Ureña ve diğerleri, 2019) ilişkin çalışmaların yapıldığı görülmektedir. Ulusal literatürde ilkökul öğrencileri ile genişleyen sayı ve şekil örüntülerinde fonksiyonel düşünme (Türkmen ve Tanışlı, 2019; Kabael ve Tanışlı, 2010; Gürbüz ve Toprak, 2014; Dinçer ve Cantürk, 2020), genelleme ve gerekçelendirme stratejileri (Temur ve Turgut, 2020; Tanışlı ve Özdaş, 2009; Girit ve Akyüz, 2016; Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011) çalışıldığı görülmektedir. Bu çalışmada ise erken cebir öğretiminde gerçekleştirilecek örüntü görevleri ile 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapıları fonksiyonel düşünme düzeyleri, genelleme ve gerekçelendirme becerileri bütünsel olarak ele alınacak olup bu sayede alan yazına katkıda bulunacaktır.

Bu çalışmada, dördüncü sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarını belirlemek amacıyla öğretim deneyi gerçekleştirilmiş ve bu öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları incelenmiştir. Çalışmada, genişleyen örüntü çalışmalarında öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi amaçlanmış ve bu gelişimi destekleyici

öğretim içeriği hazırlanmıştır. Bu amaçla örüntü oluşturma, devam ettirme, eksik bırakılan ögeyi tamamlama ve örüntü kuralını tanımlama çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Sayı ve şekil örüntülerinde öğrencilerin örüntü yapısına ilişkin ilişkisel durumu keşfetmeleri ve buna ilişkin genellemeye ulaşmalarına ilişkin çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Örüntü çalışmalarında ulaşılan genellemelerde ise öğrencilerin bu genellemeleri doğrulama ve/veya yanlışlamaları amaçlanarak gerekçelendirme yapmaları sağlanmıştır. Yapılan çalışma neticesinde erken cebir öğretiminin ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin genelleme ve gerekçelendirme stratejileri, fonksiyonel düşünme düzeylerini ve bu süreçte çoklu temsil kullanmalarını desteklediği görülmüştür. Bu bulgular, ilkokul dönemindeki öğrencilerin matematik eğitiminde uygulanacak cebir etkinliklerini uygulama ve içerik geliştirme konusunda yardımcı olacaktır.

Araştırma Problemi

Bu çalışmada ele alınacak problem ve alt problemler şu şekildedir;

1. Erken cebir öğretimi, ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarını nasıl etkilemektedir?
 - 1.1. Erken cebir öğretiminde öğrenciler hangi genelleme stratejilerini kullanmaktadırlar?
 - 1.2. Erken cebir öğretiminde öğrenciler, hangi gerekçelendirme stratejilerini kullanmaktadırlar?
 - 1.3. Erken cebir öğretiminde öğrencilerin hangi fonksiyonel düşünme düzeyleri (yinelemeli, kovaryasyonel ve ortak değişkenli) ortaya çıkmaktadır?
 - 1.4. Erken cebir öğretiminde öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları arasındaki ilişki nasıldır?

Sayıtlar

1. Araştırma boyunca katılımcıların veri toplama araçlarını içtenlikle cevapladıkları varsayılmaktadır.
2. Uygulama süresince öğretim deneyine katılım sağlayan tüm öğrencilerin kontrol altına alınamayan dışsal etkenlerden eşit düzeyde etkilendikleri kabul edilmektedir.
3. Araştırmanın geçerlilik ve güvenilirliği için uzman görüşünün yeterli olduğu kabul edilmektedir.

Sınırlılıklar

Araştırma 2021-2022 Güz Döneminde Erzurum ilinde bir devlet okulunun dördüncü sınıfında öğrenim görmekte olan altı öğrenciden elde edilen veriler ile sınırlıdır. Çalışmada uygulanan öğretim deneyinin etkililiği 14 oturumda gerçekleştirilen cebir etkinlikleri ile sınırlandırılmıştır.

Tanımlar

Erken cebir: Aritmetikten cebire geçişi sağlayan ve cebirsel düşünmenin gelişimini hedefleyen öğretim sürecidir (Linchevski, 1995).

Cebirsel düşünme: Sayı ve işlemlerden yola çıkarak genellemeler oluşturma bu genellemelere dayalı gerekçelendirmeler yapma ve oluşturulan genellemeleri temsiller yolu ile cebirsel kavram ve fonksiyonlara ulaşma sürecindeki zihinsel yapıdır (Carraher ve Schliemann, 2015).

Fonksiyonel düşünme: Birbiriyle ilişkisel olarak değişen iki veya daha fazla nicelik arasındaki ilişkiye odaklanan düşünme yapısıdır (Smith, 2008).

Genelleme: Üzerinde çalışılan var olan durum veya durumların ötesine geçerek kapsayıcı olarak düşünmedir (Kaput ve diğerleri, 2008).

Gerekçelendirme: Ulaşılan genellemelere ilişkin varsayımların doğruluğunu veya yanlışlığını göstermedir (Mason, 2008).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturan cebir, erken cebir ve cebirsel düşünme kavramları ve bu bağlamlara ilişkin ilgili ulusal ve uluslararası çalışmalara yer verilecektir.

Cebir

Cebir, matematiğin “özü” olarak tanımlanmaktadır (Cai ve Knuth, 2011). Matematik için önemli bir kavram olarak karşımıza çıkan cebirin literatürde birçok tanımı bulunmaktadır. Mason (2008) cebiri bir kültürel eser ve bilgi bütünü olarak tanımlar. Bu tanımda cebirin kültürel bir eser olması durağanlığı değil, aksine içerdiği semboller ile sürekli bir gelişim halinde olduğunu ifade etmektedir. Bu doğrultuda cebir, matematiğin dinamik bir alt dalı olarak kabul edilmektedir. Cebir, matematiğin bir alt dalı olmakla beraber aynı zamanda bir düşünme biçimidir (Gowers ve diğerleri, 2008). Cebir denklem çözme ve aritmetik hesaplama kullanılan temsil biçimlerini keşfetmek için bir araç olarak görülmekle birlikte daha karmaşık problemler için uygun temsiller keşfetmenin bir adımı olarak da görülmektedir (Boyer, 1991). Radford’a (2006) göre ise cebir, sadece sembolleştirme değil aynı zamanda analitik düşünme ve bilinmeyeni temsil etmenin bir yoludur.

Kaput ve diğerleri (2008) cebirin sembolleştirme ve matematiksel temsil ile ilişkili olduğunu kabul etmekle beraber genelleme ile de ilişkisini belirtmiş ve “*cebirseller kullanılarak oluşturulan genellemelerde sistematik akıl yürütme varsa bu temsil cebirseldir*” şeklinde ifade ederek ilişkiyi tanımlamışlardır (syf. 2). Benzer şekilde cebir ile genelleme ilişkilendirmesi Gattegno (1973) tarafından da yapılmış ve cebiri, aritmetik işlemler (dağıtma, birleştirme) sonucunda ulaşılan genellemenin sembolleştirilmesi ve bu genelleme sürecinde zihnin dinamiklerinin bir göstergesi olarak tanımlamıştır. Bunun yanı sıra Carpenter ve diğerleri (2003) cebirin sadece cebirsel ifadelerle gerçekleştirilen çözüm sistemi olarak görülmesinin eksik olacağını, ispat ve gerekçelendirmeyi de içerdiğini belirtmektedirler.

Kaput (2008) cebirin genelleme, gerekçelendirme ve sembolleştirme yönlerini bütüncül olarak ele alarak tanımlamıştır: (1) geleneksel sembol sistemini kullanarak sistematik bir biçimde genelleme ve sembolleştirme, (2) organize edilmiş sembolik sistemleri sözel olarak temsil etme. Cebire ilişkin yapılan bu tanımlama beraberinde cebirin ilişkisel olduğu üç alanın ortaya çıkmasını sağlamıştır: genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonlar ve modelleme (Kieran, 2004). Genelleştirilmiş aritmetik, aritmetikte

gerçekleştirilen işlem ve özelliklerinin genellemesini ifade ederken, fonksiyonlar ve modelleme cebirsel gösterim ve çoklu temsillerin kullanımını belirtmektedir (Kaput, 2008). Aritmetiksel işlemlerin aynı zamanda fonksiyon olmaları ile birlikte öğrencilerin işlemlerin genel özelliklerini keşfetmeleri ve genelleme yapmaları ile fonksiyonlar, aritmetiğin cebirsel yapısını anlamaya yardımcı olmaktadır. Aynı zamanda örüntü etkinliklerinin modellenmesi ile özellikle ilkökul çağındaki çocuklarda hem cebirin temeli atılmış hem de cebirsel düşünmenin desteklenmesi sağlanmış olacaktır (Akkan, 2016).

Cebir, okul öncesinden itibaren tüm eğitim-öğretim kademelerinde kullanılan sembolleştirme ve kurallar sistemidir (Carragher ve Schliemann, 2015). Okul matematiğinde önemli bir yeri olan cebirin amaçları NCTM (2000) tarafından tanımlanmıştır.

- Kalıpları, fonksiyonları ve ilişkileri anlamak;
- Cebirsel sembolleri çeşitli temsiller ile matematiksel yapıları temsil ve analiz etmek;
- Niteliksel ilişkileri anlama ve temsili için matematiksel modeller kullanmak;
- Çeşitli durumlarda oluşan değişiklikleri analiz etmek.

Cebirin tanımlanan bu amaçlar doğrultusunda oluşturulan alt dalları hakkında araştırmacılar (örn., Blanton ve Kaput, 2005; Kilpatrick ve Izsak, 2008; Usiskin, 1988) arasında bazı farklılıklar olsa da geliştirilmiş aritmetik, fonksiyonlar (örüntüler ve ilişkiler), ve denklem çözme konularını kapsadığına ilişkin ortak bir fikir birliği vardır. Cebirin alt dalları, her biri birbiriyle bağlantılı olup aynı zamanda birbirlerine entegre edilmiş sembolik algoritmalarından oluşmaktadır.

Cebirsel Düşünme

Cebir, matematik öğretiminin merkezinde yer almaktadır. Bu rolüyle cebir için cebirsel düşünmenin önemi ortaya çıkmaktadır. Carragher ve Schliemann (2015), cebirsel düşünmenin merkezinde sayılar ve işlemler arasındaki ilişki, fonksiyonlar ve matematiksel yapıların olduğunu belirtmektedir. Blanton ve Kaput'a (2004) göre cebirsel düşünme, matematiğin tümüne nüfuz eden ve öğrencilerin matematiksel yapı ve ilişkiler hakkında tahmin etme, gerekçelendirme ve ifade etmeyi içeren zihinsel bir süreci kapsamaktadır.

Cebirsel düşünme, bir dizi belirli örnekten genellemeye ulaşma ve bu genellemeleri çeşitli temsiller yolu ile ifade etmedir (Kaput, 1999). Cebirsel düşünme ve genelleme

ilişkisini ortaya koyan bu tanımlamaların yanı sıra temsil etme ve farklı yollarla temsil kullanımını ifade eden araştırmacıların olduğu da görülmektedir. Örneğin; Usiskin (1988), cebirsel düşünmeyi bilinmeyen, değişken ve sembol kullanarak karakterize etmektedir. Britt ve Irwin'e (2011) göre ise cebirsel düşünme, sayısal ve sözel temsilleri kullanarak aritmetik dönüşümlerinin gerçekleştirilmesini içermektedir. Problem çözümünde ise cebirsel düşünme fonksiyonel (ilişkisel) düşünme ile ortaya çıkar (Radford, 2003).

Kieran (1989), cebirin odak noktasının genelleme olduğunu ve bu sebeple cebir ve matematiğin tüm alanlarında cebirsel düşünmenin önemini vurgulamaktadır. Bunun yanı sıra cebirsel düşünme doğrudan cebir gerektirmemektedir (Kieran, 1989). Bu sebeple cebirsel düşünmenin gelişiminde ve ortaya çıkışında genellemenin önemi ortaya çıkmaktadır. Cebirsel düşünme, öğrenciler için matematiği daha anlamlı hale getirmeyi sağlamakta ve merkezinde genelleme yer almaktadır. Aritmetikte, sayılar ve sayılar arası ilişkilerin genellemesinde cebirsel düşünme sayesinde bu genellemeler anlamlı olmaktadır (Mason, 2018). Bununla birlikte cebirsel düşünme ve genellemeyi birbirinden ayırmak gerekir. Cebirsel düşünmede, sembolleştirme ile genelleme ve bu genelleme sürecinde sistematik akıl yürütme gerekmektedir (Kieran, 1989).

Kaput (2008), cebirsel düşünmenin iki temel yönü olduğunu vurgulamaktadır: sembolleştirme ile genelleme ve genellemeleri çoklu temsillerle temsil etme. Bu doğrultuda genelleme sürecinde sembolleştirmeye ulaşmada sözel ifade, tablo, grafik ve yazılı semboller kullanılarak bir sembol sistemine yer verilmesi gerekmektedir. Blanton ve diğerleri (2011) cebirsel düşünmede temel olan düşünsel yapıları temsil, genelleme, gerekçelendirme ve genellemelerle akıl yürütme olarak tanımlamıştır. Kieran (2004), öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin gelişiminde sayılar arası ilişkilere odaklanmayı, çözüme ulaşmada çoklu temsil kullanımını ve eşitliğin denge anlamına vurgulanması gerektiğini belirtmektedir. Bu nedenle, öğretimin ilk yıllarında cebire özgü sembollerin araç olarak kullanıldığı etkinliklerde sayılar arasındaki ilişkileri belirleme, genelleme yapma, modelleme, gerekçelendirme gibi düşünme biçimlerinin geliştirilmesi beraberinde cebirsel düşünmenin de gelişimini destekler (Kieran, 2004). Bu sebeple ilkökul düzeyinde öğrencilerin matematiksel ilişkileri anlamaları ve bu ilişkileri çoklu temsiller yolu ile genelleme yapmalarına fırsat sunulmalıdır. Öğrencilerin genelleme ile ilgili gerekçelendirme kapasitelerinin geliştirilmesi ileri sınıf seviyelerinde ispat yapabilmeleri için önemli katkı sağlar (Morris, 2009). Bu nedenle genellemeleri doğrulama ve buna paralel gerekçelendirmeleri cebirsel düşünme için önemli bir yere sahiptir (Schifter, 2009).

Blanton ve diğerkleri (2015), öğrencilere uygun özellikte hazırlanan öğretim içeriğı ve uygulamaları ile cebirsel düşünmelerinin gelişeceğini ve destekleneceğini belirtmektedir. Öğretmenlerin, öğretim uygulamalarında öğrencilerin cebirsel düşünmelerini desteklemek için gerçekçi problem durumları ve bu problem çözümünde ilişkisel durumların genellemesi ve çoklu temsil kullanımına yer vererek öğretim programlarında değişiklik yapabilirler (Blanton ve Kaput, 2005). Bununla birlikte birçok araştırmacı (Carpenter ve diğerkleri, 2005; Lins ve Kaput, 2004; Kieran, 2004), erken yaşlarda cebirsel düşünmenin temellerinin atılması ile öğrencilerin ileriki sınıf seviyelerinde yaşayacakları zorlukların önüne geçilmesinin mümkün olduğunu belirtmektedir. Ayrıca erken yaşlarda matematik öğretiminde cebirsel düşünmeyi destekleyici öğelere öğretimde yer vermek öğrencilere genellemeye teşvik etme fırsatı sağlayarak ileri sınıf seviyelerinde cebirde başarılarına olumlu katkı sağlayacaktır (Lins ve Kaput, 2004). Dolayısıyla erken sınıflarda cebir öğretiminin önemi ortaya çıkmaktadır.

Erken Cebir

Erken cebir, aritmetik bilgisini derinleştirip bu bilginin cebire entegre edilmesine olanak sağlar. Erken cebirde öğrencilerin aritmetik bilgisine paralel cebir bilgilerinin de gelişimi hedeflenmektedir. Bu sayede matematik müfredatında aritmetik ve cebir ayrı alanlar olarak değil bütünleşik olarak yer verilir. Oysaki matematik müfredatında cebirin ancak yeterli aritmetik bilgisine sahip olan öğrenciler tarafından öğreneceği yönünde bir anlayış vardır. Bu anlayışla beraber ilkökul matematiğın aritmetik, ortaokul ve lise matematiğinde ise cebire yer verilir Erken cebire ilkökul kademesinde aritmetik ve cebir entegre edilerek yer verildiğinde cebirsel düşünmenin gelişimi desteklenmektedir (Linchevski, 1995). Cebire, erken çocukluk döneminden itibaren öğretimin her kademesinde yer verilmesi gerektiğı vurgulanmaktadır (NCTM, 2000). Bunun yanı sıra cebire ilişkin ilkökulda aritmetik-cebir geçişi yapılmadan doğrudan ortaokulda cebir öğretimine başlanması bazı zorluklara sebep olmaktadır. Karşılaşılan zorlukların bazılarına aşağıda yer verilmiştir. Bunlar;

- Eşitlik anlamına ilişkin kısıtlı kavrayış (Booth, 1988; Kieran, 1981; Vergnaud, 1985),
- Harflerin sayıların yerine kullanılarak, bir değişkeni tanımladığını kabul etmede zorluk (Kieran, 1985; Küchemann, 1981; Vergnaud, 1985),
- Problem çözümünde ulaşılan cebirsel ifadeleri cevap olarak kabul etmede yaşanan zorluk (Sfard ve Linchevski, 1994).

Erken cebir ile cebirin sadece ortaokul ya da lisede yer verilen sembolleştirme anlamına değil öğretim sürecine yayılmış cebirsel fikirlerin, kavramların, düşünmenin yer aldığı bir süreç olarak ele alınması sağlanmaktadır (NCTM, 2000). Son yıllarda erken cebir araştırmalarına ve çalışmalarına yönelim gösterilmiştir (Blanton ve diğerleri, 2019; Cai ve Knuth, 2011; Chimoni ve diğerleri, 2018; Kaput ve diğerleri, 2008; Kieran, 2011; Rivera, 2013; Schifter, 2018; Stephens ve diğerleri, 2017; Pinto ve Cañadas, 2021; Vergel, 2015). Erken cebirle ilgili yapılan araştırmaların nedenleri arasında, erken yaşlarda öğrencilerin cebir öğrenmeye hazır olup olmadığı ve cebirsel kavramları erken yaşlarda öğrenmeye başlamanın ileri sınıf seviyelerinde yaşanan zorluklarına çözüm olup olamayacağıdır. Mason ve diğerleri (2009), erken cebirin genelleme anlamını ortaya koyarak bu anlayışın ilkokul matematiğinde yer verilmesinin erken olmayacağını belirtmektedirler. Cebirin matematiğin birçok alanında ve her öğretim düzeyinde etkili olması sebebiyle cebir tanımı farklılaştırılarak cebirsel düşünmenin okul öncesi ve ilkokul gibi temel düzeyden uzun bir süreç gerektiği düşüncesi ortaya çıkmıştır (NCTM, 2000; LaCampagne ve diğerleri, 1995). Cebire ilişkin farklılaşan bu anlayış ile “erken cebir” fikri doğmuş ve ilkokulda cebir öğretimi ortaya çıkmıştır.

Erken cebir, cebirin önemli fikirlerini öğrenciler için ulaşabilir ve ilgi çekici hale getirmenin bir yoludur (Blanton, 2008). Erken cebir öğretimi ile ilkokulda öğrencilerin matematiksel yapılarla anlam oluşturmaları ve bu yapılar arasındaki ilişkileri kendilerinin keşfederek genellemeye ulaşmalarına yardımcı olunur (Blanton, 2008). Bunun yanı sıra erken cebir ile öğrencilerin değişken kavramına ilişkin anlayış geliştirmeleri ve bunu sözel, yazılı ve görsel yollarla temsil etmeleri sağlanarak cebirsel kavramlara ilişkin anlayış geliştirmeleri sağlanmaktadır (Kaput ve Blanton, 2001).

Erken cebir, öğrencilerin matematiksel yapı ve ilişkileri keşfetmelerinde önemli bir yere sahiptir (Blanton ve diğerleri, 2011). Erken cebirin özünde ise genelleme, temsil etme, gerekçelendirme ve akıl yürütme vardır (Blanton ve diğerleri, 2011; Kaput, 2008). Buna dayalı olarak Kaput (2008), erken cebire ilişkin geliştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme ve modelleme bileşenlerini içeren öğretim çerçevesi tanımlamıştır. Bu çerçevede geliştirilmiş aritmetik sayı ve işlemler arasındaki özelliklerin keşfedilerek genellemesini, fonksiyonel düşünme ve modelleme ise ilişkisel durumların sembolleştirilmesini ifade etmektedir. Erken cebirde, öğrencilerin iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi keşfedip bu ilişkisel durumu kelime veya semboller ile genelleştirmeleri sağlanmaktadır (Wilkie, 2016). Bu sayede erken cebir öğretimi ile

öğrencilerin genelleme ve gerekçelendirmelerinin yanı sıra fonksiyonel düşünme gelişimleri de hedeflenmektedir. Buna göre erken cebir öğretiminde cebirsel düşünme becerisine bakıldığında fonksiyonel düşünme, genelleme ve gerekçelendirmenin cebirsel düşünmenin bileşenleri oldukları görülmektedir (Blanton ve diğerleri, 2011). Bu bileşenler, çalışmada hedeflenen cebirsel düşünme yapısının parçaları olduklarından ötürü aşağıdaki başlıklarda yer verilerek detaylı olarak açıklanmıştır.

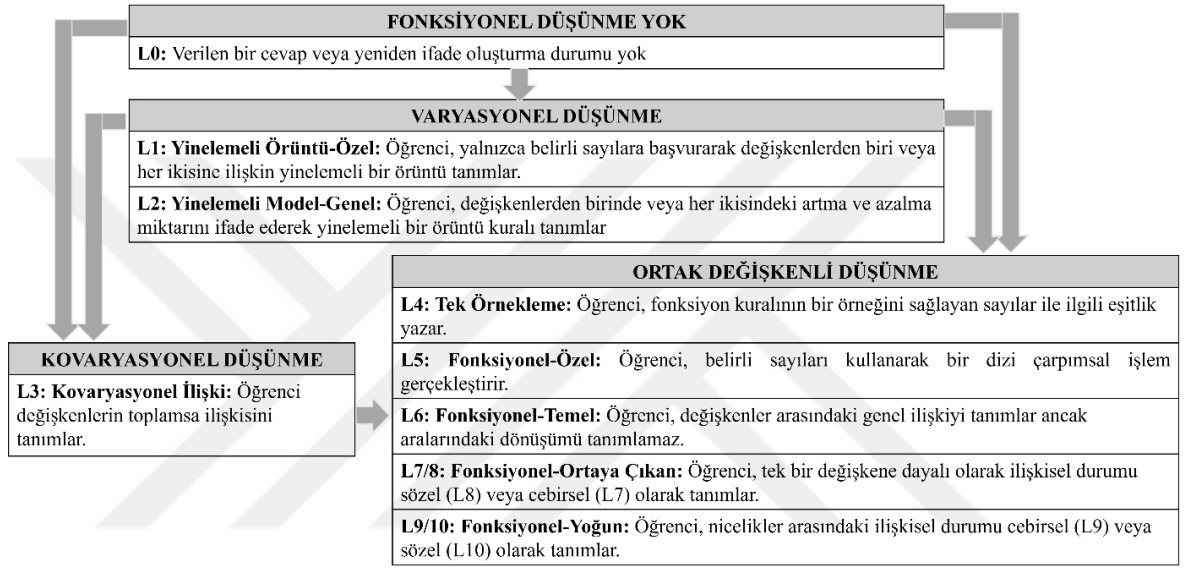
Fonksiyonel Düşünme

Fonksiyonel düşünme, birbiriyle ilişkisel olarak değişen iki veya daha fazla nicelik arasındaki ilişkiye odaklanan düşünme yapısıdır (Smith, 2008). Fonksiyonel düşünme, nicelikler arasındaki ilişkiler üzerine kuruludur. Fonksiyonel düşünmenin fonksiyon kavramı ile arasında güçlü bir bağ vardır (Vollrath, 1986). Fonksiyonel düşünme, bir fonksiyondaki sayısal değerin diğer sayısal değer korelasyonunun ortaya konulmasıdır (Chazan, 1996).

Fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin temelinde yer alan kavramların ve ilişkisel durumların keşfedilmesini sağlayan bir anlayıştır (Blanton ve diğerleri, 2015). Öğrencilerin bu ilişkileri keşfederek fonksiyonları tanımlamaları, bileşenlerin niceliksel miktarları ve şekilsel yönlerini ifade etmeleri ile fonksiyonel düşünme gelişimleri desteklenmektedir. Dolayısıyla fonksiyonel düşünmenin öğrenci tarafından kazanımı hem cebir hem de fonksiyon kavramının öğrenimini kolaylaştıracaktır (Kabael ve Tanışlı, 2010). Bu sebeple fonksiyonel düşünmenin erken yaşlardan itibaren öğrencilere kazandırılması gerekmektedir (Warren ve diğerleri, 2016).

Fonksiyonel düşünme, ilkökul matematiğinin ayrılmaz bir parçasıdır (Blanton ve Kaput, 2004). Öğrencilerin fonksiyonel düşünme ile değişen niceliklere ilişkin temsilleri ve genellemeleri cebirsel düşünmenin önemli bileşenleri arasındadır (Blanton ve diğerleri, 2015). Bu sebeple fonksiyonel düşünme cebirsel düşünmenin temel göstergelerinden biri olarak kabul edilmektedir (Blanton ve Kaput, 2011). Fonksiyonel düşünme üzerine gerçekleştirilen pek çok çalışmada (Blanton ve Kaput, 2004; 2011; Blanton ve diğerleri, 2015; Warren ve Cooper, 2008; Warren ve diğerleri, 2016) öğrencilerin erken yaşlardan itibaren fonksiyonel düşünme becerisine sahip olabildiğini göstermektedir. Örneğin; Blanton ve diğerleri (2015), ilkökul birinci sınıfa devam etmekte olan 115 öğrenci ile görüşme ve öğrenme döngüsü kapsamında 16 saatlik ders uygulaması yaptığı çalışmada fonksiyonel ilişkileri genelleştirmeye yönelik öğrencilerin düşüncelerini belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmada ilkökul düzeyindeki öğrencilerin çok daha derin

matematiksel düşünme kapasitelerinin olduğu ve birçok öğrencinin fonksiyonel ilişkiler konusunda tekrarlı düşünme ve akıl yürütme yapabildiği gözlenmiştir. Genel olarak öğrencilerde, kavram yanılgısı, nesne- nicelik gibi düşünmelerini zorlaştıran etmenler görülmemiştir. Bu araştırma ile erken dönem cebirsel düşünme uygulamalarının (genelleme, temsil etme, gerekçelendirme ve matematiksel ilişkiler ve yapı ile akıl yürütme) öğretiminin ilk yıllarına başarılı bir şekilde entegre edilebileceği görülmüştür. Stephens ve diğerleri (2017) öğrencilerin fonksiyonel düşünme yapılarından yola çıkarak düşünmelerini şematize etmiştir (Şekil 2.1).



Şekil 2. 1. Fonksiyonel düşünme düzeyleri (Stephens ve diğerleri, 2017)

Stephens ve diğerleri (2017) tarafından şematize edilen fonksiyonel düşünme düzeyleri; fonksiyonel düşünmenin ortaya çıkmadığı L0 düzeyinden başlayarak varyasyonel (L1, L2), kovaryasyonel (L3) ve ortak değişkenli düşünme (L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10) düzeylerinden oluşmaktadır. Öğrenci tarafından yeni bir duruma ulaşma olmadığında L0 düzeyinde olduğu kabul edilmektedir. Öğrencinin “*ilk önce 3 arttı, sonra 5 arttı. O zaman tekrar 3 sonra yine 5 artması gerekecek*” şeklinde ifade etmesi L0 düzeyine örnek oluşturmaktadır. Örnek durumda da görüldüğü gibi öğrencinin 3-5-3-5 şeklinde yinelemeli düşündüğü ancak herhangi bir fonksiyonel düşünmenin olmadığı görülmeyen L0 düşünme düzeyinde olduğu söylenebilir. Öğrencilerin sadece belirli sayıları dikkate alarak değişkenlerin biri veya her ikisine ilişkin yinelemeli örüntü tanımladığında L1 düzeyinde olduğu, değişkenlerin birinde veya her ikisinde artma veya azalma miktarını ifade ederek yinelemeli olarak kuralı tanımladığında ise L2 düzeyinde olduğu kabul edilmektedir. Yinelemeli düşünme düzeylerinin yanı sıra öğrencilerde

“yataydaki noktalar dikeydeki noktalardan 1 fazla” gibi değişkenlerin toplamsal ilişkisini tanımladığı L3 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu görülmektedir. Ortak değişkenli fonksiyonel düşünmenin başladığı L4 düzeyinde ise öğrenciler fonksiyonel kurala ulaşmada sadece istenilen adıma ilişkin fonksiyonel işlem yaptıkları örneğin 11. adım istenildiğinde ardışık adımlarda işlem yapmak yerine sadece istenilen adım olan 11. adımda işlemini gerçekleştirmeye yöneldikleri için L4 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu söylenebilir. L5 düzeyinde fonksiyonel düşünmede ise L4 düzeyinin aksine öğrenciler fonksiyonel kurala ulaşmak için ardışık adımlar arasında bir dizi çarpımsal işlem gerçekleştirir. Bu doğrultuda işlem yapan öğrencilerde fonksiyonel düşünmenin L5 düzeyinde etkili olduğu kabul edilmektedir. Öğrencilerin “...artının sayısını bulmak için kural; $\times 2 + 1$ ” gibi benzer çözümlerinde değişkenler arasında genel ilişkiyi tanımladığı ancak fonksiyonel ilişkiyi açıklayamadığı L6 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu kabul edilmekte olup bunun yanı sıra öğrencilerin tek bir değişkene dayalı olarak fonksiyonel kuralı cebirsel (L7) veya sözel (L8) olarak açıklayabildiği bununla birlikte öğrencilerde ileri fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu L9 ve L10 düzeylerinde ise öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkisel durumu cebirsel (L9) ve sözel (L10) olarak açıklayabildikleri kabul edilmektedir.

Brizuela ve diğerleri (2015) fonksiyonel ilişkileri belirlemeye yönelik öğrenme ortamının sağlanması durumunda öğrencilerin değişen nicelikler arasındaki ilişkileri ifade edebildikleri ve anlamlı gösterimler yapabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde Schliemann ve diğerleri (2007) yaptıkları çalışmada öğrencilerin fonksiyonel düşünebildikleri ve matematiksel genellemeler yapabildikleri sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmalarında yer verdikleri genişleyen şekil örüntülerinde, öğrencilerden belirli bir adımdaki öge sayısını, o şeklin bulunduğu adımla ilişkisini tanımlayan bir fonksiyonu keşfetmeleri istenmiştir. Çalışma sonucunda ilkokul öğrencilerinin şeklin bulunduğu adım ve şekildeki öge sayısı arasındaki ilişkisel durumu tanımlayabildikleri görülmüştür. Buna göre fonksiyon kavramının ilkokul düzeyindeki öğrencilerine tanıtılmasıyla öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri keşfedebildikleri görülmektedir.

İlkokulda Fonksiyonel Düşünme

Erken cebirde fonksiyonel düşünmenin gelişimi için fonksiyonlar araç görevi görmektedirler. Willoughby (1999), kavram öğretiminde somutlaştırma ile başlanmasını ve ardından yavaş yavaş soyutlamaya geçiş yapılmasını önermektedir. Fonksiyon gibi soyut olan bir kavramın da erken cebirde yer verilmesiyle öğrencilerin fonksiyon kavramına

temel oluşturulmasının yanı sıra cebirsel düşünmelerinin gelişimi de desteklenmektedir (Cañadas ve Molina, 2016).

Fonksiyon, fonksiyonel düşünmede etkili öğretim araçları olması sebebiyle ilkökul ve ortaokul matematiğinin en önemli konularından biridir (NCTM, 2000). Fonksiyonlar, gerçek yaşam problemlerini sayısal olarak düşünme ve nicelikler arasındaki değişimi anlamayı sağlamaktadır. Fonksiyonlar, matematiksel bir dönüşümdür (Gowers ve diğerleri, 2008). Örneğin, aritmetiksel işlem kombinasyonları olan “artı 2”, ve “3 kere” sözel ifadeleri “ $x+2$ ” ve “ $\times 3$ ” matematiksel işlemlerinin sözel dönüşümüdür. Bu sebeple aritmetiksel işlemler birer fonksiyondur (Radford, 2011). Aritmetiksel işlemlerin fonksiyon olmaları ile birlikte öğrencilerin işlemlerin genel özelliklerini keşfetmeleri ve genelleme yapmaları ile fonksiyonlar, aritmetiğin cebirsel yapısını anlamaya yardımcı olmaktadır. Bununla birlikte fonksiyonlar cebirde yer alan değişkenlerin öğrencilere tanıtılmasına ve bu kavramlara ilişkin öğrencilerin anlayış geliştirilmesine yardımcı olmaktadır.

Fonksiyonlar, matematik müfredatının merkezinden yer alan bütünleştirici bir konudur (Schwartz, 1990). MEB 2018 Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde fonksiyon kavramına yeterince yer verilmediği görülmektedir. Örneğin, “2 ile 5 çarpıp sonuçtan 3 çıkar” aritmetik işlemi $f(x)=7$ için $2x-3$, fonksiyon anlamı taşımaktadır. Örnekteki cebirsel ifade ise “hangi sayıyı 2 ile çarpıp 3 çıkarıldığında 7 elde edilir?” sorusunu temsil etmektedir. Bu temsil ile girdi ile çıktı arasında bağıntı kurulması sağlanır. Örnekte de görüldüğü üzere ilkökul matematik müfredatına fonksiyonların eklenmesi ile matematiksel problemleri çözerken sabit sayıların yanı sıra değişkenlerin de dahil edilmesi ile düşünme yapılarında farklılaştırma sağlanmaktadır. Bunun için seçilecek problemlerin öğrencilerin sayılar arasındaki ilişkileri fark ederek genellemeye ulaşmalarını destekleyecek nitelikte olması gerekmektedir (Brizuela, 2016; Brizuela ve diğerleri, 2015; Ellis, 2011; Moss ve London McNab, 2011).

İlkokulda cebire temel oluşturacak girişlerin yapılması, öğrencilerin problem durumlarına entegre edilen fonksiyonları analiz etmek için sözel kuralları, grafikleri, tabloları ve cebirsel ifadeleri kullanma becerilerini geliştirmektedir (Demana ve Waits, 1990; Heid, 1995). İlkokulda cebire yer verilmesi ile öğrencilerin soyut matematiksel sistemi tanıma ve işlem yapma becerilerinin gelişimi (Cuoco, 1995) ve tablo, grafik ve diyagram gösterimleri ile fonksiyonların anlaşılması sağlanmaktadır (Weisstein, 2017).

Fonksiyonel düşünme konusu ile ilgili araştırmalar incelendiğinde (Blanton, 2008; Brizuela ve Schliemann, 2004; Brizuela ve diğerleri, 2015; Carraher ve diğerleri, 2008a; Kaput ve Blanton, 2005; Moss ve diğerleri, 2008; Schliemann ve Carraher, 2002; Schliemann ve diğerleri 2003) ilkökul öğrencilerinin fonksiyonlar hakkında akıl yürütebildiklerini, fonksiyonları ifade etmek için çoklu temsilleri kullanabildiklerini ve değişkenler arası ilişkileri sözel ve sembolik olarak ifade edebildiklerini ortaya koymaktadır.

İlkökul düzeyinde fonksiyonlar, genişleyen örüntüler ile ele alınmaktadır (Moss ve diğerleri, 2008). Genişleyen örüntülerde, örüntü kuralının bulunabilmesi için adım sayısına bağlı değişimin tanımlanması ve bu sebeple fonksiyonel düşünme gerekmektedir (Lannin ve diğerleri, 2006; Mason ve diğerleri, 2009). Bunun yanı sıra genişleyen örüntülerde istenilen adımın bulunmasında değişen ve değişmeyen özelliklerin de belirlenmesi gerekmektedir. Bu sayede genişleyen örüntü çalışmalarında örüntü yapısına ilişkin benzerlik ve farklılıkların ve örüntüyü oluşturan adımların ortak özelliklerinin belirlenmesinde akıl yürütme etkili olmaktadır (Mason ve diğerleri, 2009; Rivera, 2013).

Örüntü kuralını keşfetme, örüntü oluşturma ve örüntü yapısı hakkında akıl yürütme temel örüntü çalışmalarıdır (NCTM, 2000). Örüntüler, cebirsel düşünmenin önemli bileşenlerinden olan genellemeye teşvik edeceğinden cebirsel düşünme için önemli etkinliklerdir (Kaput, 2008; Mason ve diğerleri, 2009). Genişleyen örüntü çalışmalarının etkililiğine yönelik yapılan araştırmalara (Bastable ve Schifter, 2008; Cooper ve Warren, 2011; Schliemann ve diğerleri, 2007) bakıldığında öğrencilerin genelleme ve bu genellemelerine ilişkin gerekçelendirme yapabildikleri görülmektedir. Örneğin; Cooper ve Warren (2011), 3. ve 5. sınıf öğrencileriyle birlikte gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin sembolik temsil genellemelerinde zorlandıkları buna karşın tek değişkenli genellemelerde çok değişkenli genellemelere göre daha başarılı oldukları sonucuna ulaşmıştır. Benzer şekilde Schliemann ve diğerleri (2003)'de yapmış oldukları çalışmada erken cebir etkinliklerine katılan 3. Ve 4. Sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri anlama ve cebirsel becerileri edinme kapasitesine sahip oldukları sonucuna ulaşmıştır. Örüntülerin ortaya konulan cebirsel düşünmedeki etkililiği sebebiyle erken yaşlardan itibaren öğretimde yer verilmesi gerekmektedir (NCTM, 2000). Çünkü, genellemeye temel oluşturan örüntü etkinlikleri bu özellikleri ile öğrencilerin değişken ve sembol kullanımı anlayışlarına da temel oluşturmaktadır (Michael ve diğerleri, 2006).

Örüntü çalışmalarının literatürde ortaya konulan cebirsel düşünmeyi destekleyici özellikleri şu şekildedir:

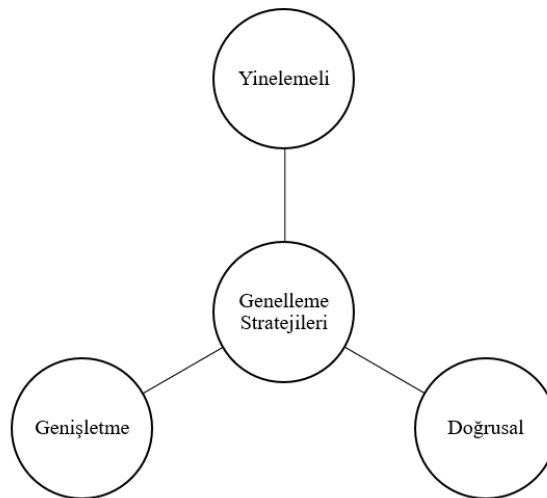
- Fonksiyonların temelindeki sayılar arasındaki bağımlı ilişkilerin anlaşılmasını destekler (Carraher ve diğerleri, 2008a).
- Cebirdeki soyutlama ve genellemelerden önce somut bir deneyim sağlar (Watson, 2000).
- Örüntü kuralları hakkında akıl yürütmelerini ifade etmede tahmin ve gerekçelendirme yapılmasını ve beraberinde matematiksel dil gelişimini sağlar (Kuchemann, 2008; Moss ve Beatty, 2006).

Örüntü çalışmalarının olumlu etkilerinin yanı sıra öğrencilerin genişleyen örüntü çalışmalarında bazı kısıtlı anlayışlarının olduğu görülmektedir. Örneğin, genişleyen örüntü çalışmalarında öğrencilerin iki değişkene (bağımlı ve bağımsız) odaklanmak yerine, tek bir değişkendeki artma/azalma miktarına odaklanmaktadır (Rivera, 2013; Rivera ve Becker, 2005; Warren, 2006). Bu yinelemeli yaklaşım, öğrencilerin yakın adımdaki terimi bulmalarını sağlarken fonksiyonel kuralı tanımlama ve bunun için ortak değişkenli düşünmeyi sınırlandırmaktadır. Bununla birlikte, bu yaklaşım öğrencilerin uzak adımdaki öge sayısını bulmaları konusunda yanlış genelleme yaklaşımı izlemelerine sebep olmaktadır (English ve Warren, 1998). Rivera ve Becker (2007), örüntüde sadece sayısal yönlere odaklanıldığında çocukların örüntü yapısı ile ilgili sınırlı bilgiye ulaşabileceklerini savunmuşlardır. Bu doğrultuda yapılan çalışmalarda çocukların örüntü yapısında tekrarlı bir yaklaşımla sadece ardışık terimler arasındaki matematiksel ilişkiye odaklandıkları gözlenmiştir (Lannin, 2005; Rivera ve Becker, 2005). Genişleyen örüntülerde örüntü kuralının bulunmasında öncelikle terimler arasındaki düzenliliğin farkına varılması ve bu düzenliliğin diğer terimlere genellemesi gerekmektedir (Radford, 2008). Öğrencilerin bu farkındalıklarını sağlamak için örüntü çalışmaları genellikle gerçekçi problem bağlamı eşliğinde sunulur (Moss ve diğerleri, 2008). Yapılan araştırmalar (Lannin, 2004; Rivera ve Becker, 2011) göstermektedir ki öğrencilerin örüntü kuralına ilişkin genellemelerinde yinelemeli bir yaklaşım eğiliminde oldukları ve ardışık terimler arasındaki ilişkileri belirlemeye çalıştıkları görülmektedir. Bu kısıtlı yaklaşımın önlenmesi için öğrencilere farklı öğrenme ortamları ve çeşitli öğrenme etkinlikleri ile rehberlik edilerek farkındalık kazanmaları sağlanmalıdır (Lannin ve diğerleri, 2006; Rivera ve Becker, 2011). Bu nedenle öğrencilerin genelleme stratejilerinin etkililiğinde genişleyen örüntü çalışmalarına yer verilmelidir (Lannin, 2005).

Genelleme

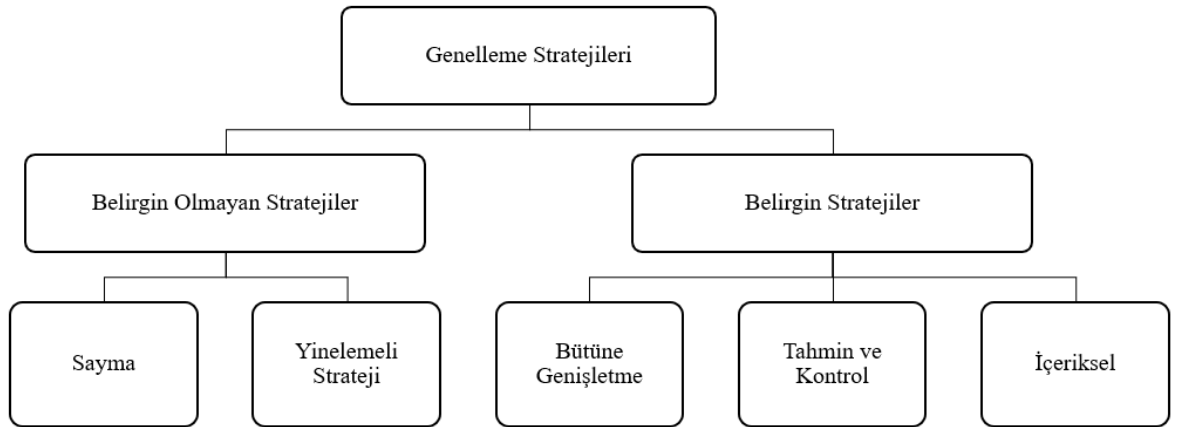
Genelleme, okul matematiğinin ve cebirin en önemli becerilerinden biridir (Kaput, 2008; Mason, 2018). Genelleme, genelde özeli görme becerisidir (Mason ve Pimm, 1984). Bu doğrultuda öğrencilerin çalıştıkları özel durumlar bağlamında geneli görme farkındalıklarının geliştirilmesi ve genellemeleri keşfetmeleri desteklenmelidir (Mason, 1996). Kaput ve diğerleri (2008), cebir ile genelleme arasındaki ilişkiye vurgu yaparak sistematik akıl yürütmeler sonucunda ulaşılan sembolleştirmeye dayalı genellemelerin cebirsel anlam taşıdığını belirtmektedir. Benzer bir yaklaşımla Mason ve diğerleri (2009), genellemeyi matematiğin can damarı cebiri ise genellemelerin ifade edildiği dil olarak açıklamışlardır. Bu tanımlara göre, genelleme birçok özel durumun bütünsel bir forma dönüşümünü sağlayan zihinsel bir süreçtir (Kaput ve diğerleri, 2008). Örneğin; tek ve çift sayıların toplamının gerçekleştirildiği örnekler dizisinin ardından öğrenciler tek ve çift sayılar toplamında elde edilen sonucun her zaman tek sayı olduğu sonucuna genelleştirmeleri ile bütünsel bir forma ulaşılmış olmaktadır.

Genelleme, matematiksel yapı ve ilişkilerin tanımlanma sürecidir (Mason ve diğerleri, 2009). Stacey (1989) doğrusal fonksiyonlu olan genişleyen örüntülerde yakın genelleme (örüntünün devamında en yakın terimi bulma) ve uzak genelleme (bir örüntüde genel bir kuralı bulma) kavramlarını tanımlamış ve üç temel genelleme stratejisini ortaya koymuştur (Şekil 2.2). Örüntünün bir önceki teriminden bir sonraki teriminin elde edildiği yinelemeli strateji, fonksiyonel bir ilişkinin arandığı doğrusal strateji, orantısal akıl yürütmenin uygulandığı genişletme stratejisi.



Şekil 2. 2. Stacey (1989) tarafın yapılan tanımlanan genelleme stratejileri

Radford (2003) örüntü çalışmalarından yola çıkarak öğrencilerin genelleme etkinliklerini olgusal, içeriksel (bağlamsal) ve sembolik genelleme olmak üzere sınıflandırmıştır. Olgusal genelleme, öğrencilerin tüm terimler için geçerli olan bir genellemeye ulaşamadıklarını fakat belirli terimlere ulaşmak için kullandıkları operasyonel şemalardır. Bağlamsal genellemeler, öğrencilerin tüm terimler için geçerli bir genelleme olmasa da “bir sonraki terime” veya genel bir terime atıfta bulunabilecekleri genelleme durumlarıdır. Sembolik genellemeler ise öğrencilerin cebirsel kavramları hesaplama yöntemlerine veya herhangi bir özel terime atıfta bulunmadan nesneleri soyut olarak ifade etmelerini göstermektedir. Radford (2006) bu sınıflandırmasını cebirsel bağlamda yorumlamıştır. Buna göre bir örüntüyü cebirsel olarak genellemek, terimler arasındaki ortak özelliği belirleme, ortak özelliğin tüm terimler için geçerli olduğunun farkına varma ve bu durumu herhangi bir terim için ifade etme yeteneğine dayanmaktadır (Radford, 2006). Lannin (2005) ise genellemeleri belirgin (explicit) ve belirgin olmayan (non-explicit) olarak tanımlamıştır (Şekil 2.3).



Şekil 2. 3. Lannin (2005) tarafından tanımlanan genelleme stratejileri

Belirgin olmayan stratejiler; sayma ve yinelemeli strateji, belirgin stratejiler ise bütüne genişletme (whole-object), tahmin ve kontrol (guess and check) ve içeriksel (contextual) stratejilerini içermektedir. Sayma stratejisinde öğrenciler istenilen terimi bulmak için örüntünün terimlerini sayarak genellemeye ulaşmaktadır. Buna karşın yinelemeli genelleme stratejisinde ise terimler arası farka göre örüntü devam ettirilerek istenen terime ulaşılmaya çalışılır. Örneğin; öğrencinin istenilen terime ulaşmak için 2-4-6-8-10-12-14-16 şeklinde yaptığı çözüm incelendiğinde terimler arası farktan yola çıkarak ikişer ikişer sayma ile genellemeye ulaştığı bu sebeple yinelemeli genelleme stratejisini kullanmayı tercih ettiği görülmektedir. Bütüne genişletme genelleme stratejisinde tekrar

birimi belirlenip ardından bu tekrar biriminin diğer adımlara genişletilmesi ile genellemeye ulaşılır. Örneğin; öğrencinin adımlar arasındaki artış miktarını fark ederek örüntü kuralının $\times 2$ olduğu şeklinde çıkarımda bulunması genellemede bütüne genişletme stratejisinin göstergesidir. Tahmin ve kontrol genelleme stratejisinde kural tahmin edilir ve bunu takiben kuralın doğruluğu adımlarda uygulanarak kontrol edilir. Örneğin; öğrencinin örüntü kuralını ne olacağına ilişkin tahminde bulunarak bu tahminini örüntünün herhangi bir adımında deneme yaparak doğrulama/yanlışlama yapması tahmin ve kontrol stratejisi kullanarak genellemeye ulaştığını göstermektedir. İçeriksel genelleme stratejisinde ise değişkenler arasındaki ilişkiyi keşfetmek için fonksiyonel bir bağıntıya ulaşılmaya çalışılır. Öğrencinin verilen örüntü kuralını ' $\times 3 + 1$ ' şeklinde tanımlaması içeriksel genellemeye örnek durumdur.

Harel (2001), iki tür genelleme olduğunu savunmaktadır: Birkaç örnekten yola çıkarak ulaşılan sonuçların genellemesi ve birkaç örnekten genellemeye ulaştıktan sonra bunun tüm terimlerde geçerli olduğunu gerekçelendirerek süreç genellemesi. Radford (2003, 2006) tarafından yapılan genelleme ayrımı tümevarım yaklaşımı, Lannin (2005) tarafından yapılan genelleme sınıflandırması ise ampirik doğrulamayı benimsenmektedir. Radford (2006), özel olanı fark edip bu anlayışı genele entegre etmek için kullanmayı önermiştir. Buna ilaveten Lannin (2005) genelleme türlerini görsel ve sayısal temsiller olarak ayırmış ve görsel temsillerin süreç genellemesi için daha uygun bir temsil türü olduğunu belirtmiştir.

Genelleme, genellemeyi destekleyen etkinlikler ile bireysel akıl yürütme ve kolektif akıl yürütme etkileşimi üzerine oluşturulan bir süreçtir (Ellis, 2007; 2011; Jurow, 2004). Bu süreçte genellemeler sözlü ve yazılı olarak ortaya çıkmakta ve ifade edilmektedir (Ellis, 2007). Ellis (2011), genellenenin aşağıda sunulan üç eylemden en az birinin gerçekleşmesi durumunda ortaya çıkacağını öne sürmektedir.

- Belirli örnekler arasındaki ortak özellikleri belirleme,
- Özel durum ve örneklerin dışında farklı örnekleri araştırma,
- Belirli durumları yeni durumlara entegre etme.

Cebir etkinliklerinde genellemeye yönelik çalışmalara yer verilmesi ile öğrencilerin cebirsel düşüncelerini geliştirmeye yardımcı olunurken aynı zamanda matematiksel ifadelerin sembolleştirme ve gerekçelendirme süreci de desteklenir (Blanton ve Kaput, 2008; 2011). Bu sayede öğrencilerin cebirsel etkinliklere dahil edilmelerinin temelinde

genelleme becerilerinin gelişimi amaçlanmaktadır. Aksi durumda öğrencilerin erken yaşlarda genellemeye ulaşmaları desteklenmediği takdirde beraberinde cebir öğrenimleri de olumsuz etkilenmektedir (Dienes, 1961). Birçok cebir etkinliğinde öğrencilerin genelleme potansiyelleri etkili olmaktadır.

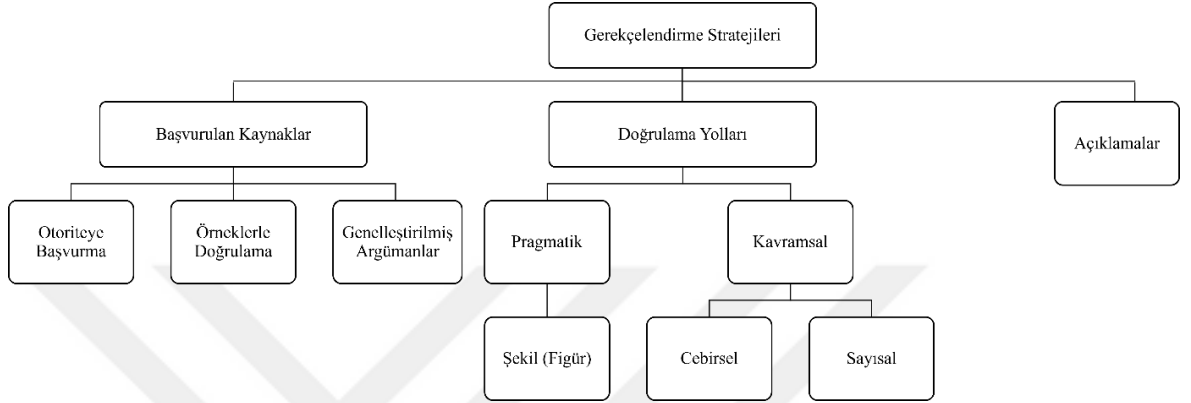
- Genişleyen sayı ve şekil örüntülerinde belirli adımlardan yola çıkarak örüntü kuralına ulaşma (Warren, 2006),
- Tablo gösterimleri ile sayılar arası ilişkilere, örüntülere ve fonksiyonel grafiklere ulaşma (Warren, 2005; Warren ve Cooper, 2008),
- Belirli örneklerden yola çıkarak genellemeye ulaşma (Dougherty ve Zilliox, 2003; Warren, 2006),
- Somut durumlardan yola çıkarak soyut temsillere ulaşma (Carragher ve diğerleri, 2006; Schliemann ve diğerleri, 2001; Warren, 2006).

Öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerinde düzenlilikleri ve yapıları keşfetme potansiyelleri bulunmaktadır ve bu da genellemelere ulaşmalarını, doğrulama yapmalarını ve gerekçelendirmede bulunmalarına temel sağlamaktadır (Schifter ve diğerleri, 2008). Erken cebir öğretimi ile bu bağlamdaki etkinliklerle öğrencilerin genelleme becerileri de dahil olmak üzere gerekçelendirme becerileri de desteklenmektedir (Breiteig ve Grevholm, 2006; Knuth ve diğerleri, 2002). Bu amaçla genellemeyi destekleyen cebir etkinliklerinde birbirleriyle uyum içinde olan uygulamalar ve yazılı/sözlü etkileşim ortamları, öğretmen-öğrenci-problem-temsil öğelerinin bağlantılı ve etkileşimli olması gerekmektedir (Ellis, 2011).

Gerekçelendirme

Gerekçelendirme, genellemelerin varsayım olarak ele alınması ile sonuçta bu varsayımların doğrulama veya yanlışlama yapılmasını sağlar (Mason, 2008). Balacheff (2001) gerekçelendirmeyi, bir ifadenin başka bireyler içinde geçerli olmasını hedefleyen açıklamalar olarak ifade etmektedir. Harel ve Sowder (1988), matematik önermelerini gerekçelendirmede üç genel şema ortaya koymuşlardır: Otoriteye başvurma, örneklerle doğrulama ve genelleştirilmiş argümanlar. Otoriteye başvurmada, dış kaynaklara (ders kitabı, öğretmen, vb.) dayalı olarak gerekçelendirme yapılır. Örneklerle doğrulamada ise deneysel örneklerle dayalı gerekçelendirme yapılmaktadır. Bu gerekçelendirme yaklaşımı her örneğin göz önünde bulundurulmaması gibi bazı durumlarda yanıltıcı olabilmektedir. Genelleştirilebilir argümanlarda ise matematiksel ifade, tanım, aksiyom ve postulatlarla

dayalı gerekçelendirmeler yolu ile genellemelere ulaşılır. Balacheff (2001) ise gerekçelendirmeleri örneklere ve gösterimlere dayalı pragmatik ve soyut formüllere veya matematiksel ilişkilere dayalı kavramsal gerekçelendirmeler olarak ayırım yapmıştır. Kirwan (2015) ise örüntülerdeki genellemelerinde gerekçelendirmeleri doğrulama ve açıklama olarak iki yolla tanımlamıştır. Gerekçelendirme stratejilerine ilişkin yapılan sınıflandırmalar Şekil 2.4'te şematize edilmiştir.



Şekil 2. 4. Gerekçelendirme stratejileri sınıflandırması

Öğrencilerle gerçekleştirilecek örüntü çalışmalarında gerekçelendirmede fırsatlar sunulması cebirin kritik yönlerinin keşfedilmesi sağlanacaktır (Carpenter ve diğerleri, 2003). İlkokul öğrencilerinin gerekçelendirme yolları incelendiğinde genellikle temel düzeyde olduğu görülmektedir. Öğrencilerin gerekçelendirme yollarına ilişkin yapılan araştırmalarda (Carpenter ve diğerleri, 2003; Schifter ve diğerleri, 2008) çok karmaşık olmayan genel formlarla doğrulama yaptıkları görülmektedir. Örneğin; öğrenciler keşfettikleri örüntü yapılarına ilişkin genellemelerini gerekçelendirmelerinde çizim veya model kullanmayı tercih etmektedirler (Schifter ve diğerleri, 2008).

İlgili Çalışmalar

Bu başlıkta, erken cebir konusuna ilişkin gerçekleştirilen çalışmalar cebirsel düşünme bağlamında değerlendirilerek ulusal ve uluslararası literatür kapsamında sunulmuştur.

Ayala-Altamirano ve Molina (2021) erken cebir bağlamında dördüncü sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişki içeren görevleri nasıl gerçekleştirdiklerine yönelik araştırmalarında, sınıfta öğrenciler gerekçelendirmeyi destekleyici sorular yöneltildiğinde öğrencilerin kendi genelleme ve gerekçelendirmelerini oluşturmaya başladıklarını hatta buna örnek olarak da iki katı, yarısı gibi ifadelerin öğrenciler tarafından sıklıkla

kullanıldığını belirtmişler. Bu kavramları öğrenciler açıkça anlayamamaları bile, ortak olarak değişen iki miktar arasındaki ilişki hakkında fikir yürütmek için yararlı oldukları ve bu durumun da fonksiyonel düşünmeye temel oluşturabileceği belirtilmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin tekrarlı olmayan örüntüler arasındaki ilişkileri belirlemede zorlandıkları görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilere tekrarlı örüntüler sorulduğunda, tekrarlı ilişkilerin kullanımının baskın olduğunu diğer taraftan öğrencilerin değişkenlerin değerlerinin farklılaşması, değişkenlerin nasıl değiştiğini belirleme konusunda zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Pinto ve diğerleri (2021), 24 ilkokul üçüncü sınıf öğrencisinin fonksiyonel ilişkileri keşfetme, değişkenler arasındaki ilişkileri anlamlandırmalarını belirlemek amacıyla yaptıkları araştırma ile üçüncü sınıf öğrencilerinin matematiksel ilişkilere odaklanmalarının yanı sıra değişkenler arasındaki ilişkileri nasıl ilişkilendirdikleri ve ifade ettikleri incelenmiştir. Araştırmada üç önemli sonuca ulaşılmıştır: (1) Öğrencilerin iki değişken arasındaki ilişkiyi fark etmelerini gerektirecek görevlerle cebirin temelini oluşmasına katkı sağlanmıştır. (2) Öğrencilerin düşüncelerini ifade etmek için farklı temsil türlerini kullanmalarının önemi ortaya konulmuştur. (3) Fonksiyonel düşünme için görsel örüntü görevlerinin kullanımının öğrencilerin görsel, sayısal ve genel ilişkileri görmeleri için uygun olduğu görülmüştür. Yapılan araştırma sonucunda öğrencilerin etkinliklerde sıklıkla doğal dili yani sözel olarak açıklamayı temsil olarak kullandıkları görülmüştür. Benzer şekilde Pinto ve Cañadas (2021) 30 ilkokul üçüncü sınıf öğrenci ile beşinci sınıfın sonuna kadar boylamsal bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Çalışmanın amacı fonksiyonel düşünme görevlerinde öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri nasıl tanımladıkları ve hangi temsil türünü kullandıklarını belirlemektir. Çalışmada, ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin genelleme yapabildiği ancak üçüncü sınıf öğrencilerinin genelleme yapamadığı görülmüştür. Üçüncü sınıf öğrencilerinin belirli değerlere (5, 8 ve 10 rakamlarını içeren) odaklanma eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Diğer taraftan ilkokulda fonksiyonel düşünme görevleri ile öğrenciler, genellemeler yapmaya ve verilen görevleri soyut fikirler ve kavramlarla ilişkilendirmeye teşvik edilmiş bu şekilde aritmetiksel etkinliklerin çeşitlenmesine yardımcı olmuştur. Araştırmada kullanılan “karo problemi” görevi, özellikle ilkokul öğrencilerinde fonksiyonel düşünmeyi teşvik etmek için tasarlanmıştır. Bu görevin öğrencilere genelleme yapabilecek duruma gelene kadar belirli değerleri içeren görevleri cevaplarken farklı çözüm yolları kullanma, fonksiyonel düşünme ile öğrencilerin çalışmalarında görsel veya manipülatif temsillerin tanıtılması ve öğrencilerin değişkenler

arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olmakla beraber birlikte değişen nicelikler hakkında düşünmeye başlamaları için temel oluşturmuştur.

Ureña ve diğerleri (2019) ilkökul dördüncü sınıfa devam etmekte olan 8 öğrenci ile genellemeye ulaşma ve temsil etme becerilerine yönelik yaptıkları araştırmalarında, fonksiyonel ilişki içeren bir görevde öğrenciler, fonksiyonel ilişkinin genelleştirilmesini farklı şekillerde fark edip temsil edebildikleri görülmüştür. Bununla birlikte fonksiyonel ilişki içeren görevlerde genellemenin belirli temsillerini öğrencilere tanıtmının önemli bir yeri olduğu ve bu temsilleri ilkökul öğrencilerinin kullanmasının fonksiyonel anlamda genelleme yapma yeteneklerinin etkili olduğu görülmüştür. Bu çerçevede öğrencilerin ortak değişken miktarları arasındaki ilişkileri belirlemenin yanı sıra fonksiyonel düşünmeyi içeren durumlarla da çalışabilecekleri ve tanımlayabilecekleri görülmüştür. Sonuç olarak öğrencilerin bilinmeyenleri sözel olarak ifade etme ile başlayan sürecin fonksiyonel ilişkiyi tanımlamak ve ifade etmek için sembollerin kullanılmasına doğru ilerleme göstermesiyle birlikte genelleme yapabildikleri ve temsil kullanabildikleri görülmüştür.

Chimoni ve diğerleri (2021) altıncı sınıfa devam etmekte olan 96 öğrenci ile erken cebirsel düşüncülerinin gelişimini desteklemek amacıyla iki alternatif öğretim yöntemi uyguladıkları araştırmalarında, öğrencilerin araştırma ve keşifler gibi yeni kavramları araştırmaya aktif olarak katılmalarını gerektiren görevlerin erken cebirsel düşünmenin gelişimi için uygun olduğu görülmüştür. Bununla birlikte 'uygulamalı açık keşiflerin' öğrencilerin sezgisel düşüncülerini geliştirdiği gözlenmiştir. Bu bağlamda araştırmanın literatüre en önemli katkısı matematik derslerinde farklı matematiksel görevlere yer verildiği takdirde öğrencilerin cebirsel düşüncülerinin geliştiği yönünde olmuştur. Aynı zamanda bu çalışma ile erken cebir dersleri tasarlanırken öğrencilerin erken cebirsel düşüncülerinin gelişimi için farklı matematik görevlerinin sunduğu fırsatlardan yararlanmanın dikkate alınması gerektiğinin önemi vurgulanmıştır.

Ramirez ve diğerleri (2020) çalışmalarında 25 ilkökul dördüncü sınıf öğrencisinin fonksiyonel düşüncülerini ortaya çıkarmak ve geliştirmek için tasarladıkları sözel problemlerde öğrencilerin problemlerdeki bilgileri belirli bir değişkenin farklı değerleri olarak algıladıkları ve sunulan beş sözel problemin en az birinde fonksiyonel ilişkiyi genelleştirebildikleri görülmüştür. Aynı zamanda öğrencilerin bir kez fonksiyonel ilişkiyi keşfettiklerinde, daha önce cebirsel gösterim kullanmamış olsa da sözel olarak veya genel örneklerle temsil edebildikleri görülmüştür. Fonksiyonel ilişkinin problem yönergelerinde açıkça belirtilmesi durumunda öğrencilerin fonksiyonel stratejileri daha kolay kullandıkları

saptanmıştır. Çalışmada değişken kullanımına yönelik öğrencilere önceden bir bilgi verilmemiş ve öğrencilerde fonksiyonel ilişkileri ifade ederken düşük düzeyde sembolik temsil kullanmışlardır. Problemlerde fonksiyonel stratejiler kullanıldığında öğrencilerin problemlerde var olan düzenliliği fark edip fonksiyonel ilişkiyi daha kolay belirledikleri görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin belirsiz niceliklerin ilişkisine ilişkin genelleme yaptıkları görülmüştür. Fonksiyonel ilişkilerin belirgin olduğu veya örüntünün bir çizimle örneklendiği problemlerde, öğrenciler başka özel durumlar üretebildikleri veya genel ifadeyle ilgili tahminlerini diğer örneklerle doğrulayabildikleri görülmüştür. Bununla birlikte fonksiyon makinesinin nasıl çalıştığını anlayan öğrenciler, sadece ilgili değişkenleri belirlemelerine yardımcı olacak fonksiyonel stratejiler kullanmışlardır. Diğer taraftan öğrencilerin problem durumunu anlamalarına yardımcı olmak için manipülatiflerin kullanılması, bazı durumlarda kolaylaştırıcı olurken bazı durumlarda bu tür materyallerin aşırı bağımlılığa sebebiyet verdiği sonucu ortaya çıkmıştır. Ayrıca dördüncü sınıf öğrencilerinin hiçbir fonksiyonel ilişkileri ifade etmek için sembolik temsiller kullanmamıştır.

Blanton ve diğerleri (2019) erken cebir dönemindeki ilkokul üçüncü sınıf öğrencileri ile beşinci sınıfa kadar genelleme ve genellemeleri temsil etmeye yönelik cebirsel düşünmelerini ve değişken gösterimlerini inceledikleri boylamsal araştırmalarında öğrencilerde, aritmetik odaklı eğitim alan akranlarına kıyasla önemli gelişmeler olduğu görülmüştür. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, üçüncü sınıf deneysel öğrenci grubunda cebire yönelik temellerin olabildiğince erken tanıtılmasının faydalı olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu yaş grubundaki öğrencilerin değişkenleri başarılı bir şekilde kullanmaları ileri sınıf düzeylerinde cebiri öğrenimlerini olumlu etkilediği ve cebirsel düşünme becerileri desteklediğini göstermektedir. Bunun yanı sıra var olan matematik programının uygulandığı kontrol grubunda cebirsel kavramlara giriş yapılmış ve öğrenci başarılarında artış olmuştur. Diğer taraftan deney grubundaki öğrencilerde cebirsel kavramlara temel oluşturulduğundan bu öğrencilerin ileri sınıf düzeylerinde cebir öğreniminde kolaylık yaşadıkları görülmüştür. Bu sonuçlardan hareketle öğrencilerin ilkokul matematik müfredatına cebir öğretimi yaklaşımın dahil edilmesi ile ileri sınıf düzeyleri için cebire hazır olma, genelleme yapabilme, değişken kullanabilme becerilerinin destekleneceği sonucuna ulaşılmıştır.

Türkmen ve Tanışlı (2019) cebir öncesi dönemde üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeylerini belirlemek amacıyla yaptıkları

araştırmalarında, Stephens ve diğerleri (2015) tarafından geliştirilen açık uçlu sorular ile araştırmacılar tarafından eklenen iki soru öğrencilere yöneltilerek öğrencilerin örüntü genelleme becerileri incelenmiştir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin tanımlanan fonksiyonel düşünme düzeylerine ek olarak alt düzeyler ve yeni düzeylere sahip oldukları görülmüştür. Katılımcıların yaklaşık yarısının kovaryasyonel düşünme düzeyinde oldukları görülmüştür. Bunun yanı sıra üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencilerinin birçoğunun sadece varyasyonel düşünme ile örüntüdeki artma/azalma miktarına yöneldikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi sözel olarak ifade etmeleri beşinci sınıf öğrencilerinde en düşük iken, fonksiyonel ilişkiyi değişken kullanarak açıklama beşinci sınıf öğrencilerinde en yüksek düzeyde olduğu belirlenmiştir. Buna ilaveten dördüncü ve beşinci sınıftaki bazı öğrenciler genel kuralı lineer fonksiyon ($y=mx$, $y=mx+n$) olan fonksiyonel ilişkileri genellemek için önce sözel olarak ifade edip sonra değişkenler yardımıyla temsil edebilmişlerdir. Üçüncü sınıf düzeyindeki bazı öğrencilerin genel kuralı $y=mx+n$ biçiminde olan örüntüleri genellerken 4. ve 5. sınıf öğrencilerine kıyasla daha fazla zorlandıkları ve ilişkilendirme yapamadıkları görülmüştür. Dördüncü sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünceleri incelendiğinde sadece bir kişinin fonksiyonel düşünme düzeylerinden en üst düzeye ulaştığı ve hem $y=mx$ hem de $y=mx+n$ şeklindeki ifadeleri genelleyerek fonksiyonel kuralı hem sözel hem de sembolik olarak ifade edebildiği görülmüştür. Benzer şekilde beşinci sınıf öğrencilerinin de birçoğunun fonksiyonel ilişkiyi doğru bir şekilde hem sözel hem de sembolik olarak temsil edebildikleri görülmüştür. Ayrıca 5. sınıf öğrencilerinin yazılı olarak ifade ettikleri genellemelerinde değişken kavramını farklı yorumlayarak harf ve sembollerini kullanabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Blanton ve diğerleri (2017), 40 birinci sınıf öğrencisi ile çalışma kağıtları temelli öğretim deneyi ve görüşme yapmışlardır. Çalışmanın amacı fonksiyonel düşünme görevleri aracılığıyla öğrencilerin değişken ve değişken gösterimleriyle karşılaştıklarındaki düşüncelerinin incelenmesidir. Birinci sınıf öğrencilerinin altıncı düzeyde fonksiyonel düşünme sergilediği gözlenmiştir. İlkokul öğrencilerine okula başladıkları yıldan itibaren değişken ve değişken gösterimi ile ilgili uzun süreli öğretim deneyinin yapılması halinde ileriki sınıf seviyelerinde yaşamaları muhtemel zorlukların önleneyeceği görülmüştür. İlkokul öğrencilerinin değişken ve değişken gösterimi hakkındaki düşüncelerinin geliştirilebileceği bunun sonucunda da cebirsel dil kullanımı ile okul öncesi ve ilköğretim düzeylerindeki öğrencilerin cebiri öğrenemeyeceği konusunda var olan algıyı değiştirebilecek matematiksel deneyimler tasarlanabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Aynı zamanda

öğrencilerin cebirsel durumlar için doğal dil kullanmalarının yanı sıra değişken gibi temsiller kullanmaları da önemlidir.

Pinto ve Cañadas (2017), ortaokul beşinci sınıfa devam etmekte olan 24 öğrencinin fonksiyonel düşüncelerini incelemek amacıyla gerçekleştirdikleri araştırmalarında, öğrencilerin “fayans problemi” ile tekrarlı örüntünün ötesine geçerek fonksiyonel düşüncelerinin farkına varmaları hedeflenmiştir. Bu görevde öğrencilerin, bir dizi değişken değerlerini kapsayan sözel açıklamalar yaptıkları ve kovaryasyonel düşünmeye dayalı genelleme yaptıkları görülmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin belirli (yakın veya uzak) durumlarla ilgili soruları cevaplarken genelleme yapması özellikle vurgulandığında genelleme yaptıkları görülmüştür. Bunun dışında üç öğrencinin kendiliğinden genelleme yaptığı da görülmüştür. Sonuç olarak, öğrencilerin genellemeyi, belirli durumları içeren soruları cevaplamak için kullandıkları anlaşılmıştır. Kendiliğinden genelleme yapan öğrenciler, değişkenler arasındaki genel ilişkiyi ifade etmek için cebirsel gösterimi ve sözlü temsili kullanmışlardır. Sadece istendiğinde genelleme yapan öğrencilerin ise temsillerinin sözel yollarla olduğu gözlenmiştir.

Stephens ve diğerleri (2017), ilkokul üçüncü sınıftan beşinci sınıfa kadar 100 öğrenci ile fonksiyonel ilişkileri genelleştirme ve temsil etmedeki ilerlemelerini incelemek amacıyla boylamsal olarak tasarladıkları araştırmalarında, öğrencilerin öğretimden önce genelleştirme ve fonksiyonel ilişkileri temsil etmede zorlandıkları görülmüştür. Üç yıllık erken cebir öğretim deneyleri ile öğrencilerin değişen nicelikler arasındaki ilişkiler hakkında giderek daha fazla akıl yürütebildikleri ve hem sözel hem de cebirsel olarak tekrar birimini tanımlayabildikleri görülmüştür.

Cañadas ve diğerleri (2016), 21 ikinci sınıf öğrencisinin çalışma kağıtlarını kullanarak fonksiyonel düşüncelerini belirlemeye çalıştıkları araştırmalarında örüntü çalışmalarında bazı öğrenciler iki nicelik arasında ilişki kurarak (masa sayısı, sandalye sayısının iki katı gibi) diğer öğrencilerin ise ikişer sayma, iki ekleme gibi yinelemeli olarak düşündükleri görülmüştür. Öğretim esnasında öğrencilerden uzak terimleri bulmaları istendiğinde öncelikle uzak değer tablo üzerinde tanıtılıp daha sonra öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi keşfedip belirlemeleri sağlanmıştır. Aynı zamanda öğrencilerin farklı değerlerle çalışmaları desteklenerek öğrencilerin değerleri deneyerek keşfetmeleri, genellemelerin geçerli olup olmadığını kontrol etme ve gerekçelendirmelerine de fırsat verilmiştir. Bunlara ilaveten öğrencilere değişkenler “herhangi bir sayı olarak” tanıtıldığında öğrencilerin cebirsel bağlamda harfleri değişken olarak kullanabildikleri ve

genel kuralı açıklayabildikleri görülmüştür. Ayrıca ikinci sınıf öğrencilerinin cebirsel gösterimlere dair ön bilgileri olmamalarına rağmen değişken gösterimini anlamlandırdıkları görülmüştür.

Blanton ve diğerleri (2015) ilkokul birinci sınıfta öğrenim görmekte olan 115 öğrenci ile görüşme ve öğrenme döngüsü kapsamında 16 saatlik ders uygulaması yapılmıştır. Fonksiyonel ilişkileri genelleştirmeye yönelik öğrencilerin düşüncelerini belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmada, ilkokul düzeyindeki öğrencilerin çok daha derin matematiksel düşünme kapasitelerinin olduğu ve birçok öğrencinin fonksiyonel ilişkiler konusunda tekrarlı düşünme ve akıl yürütme yapabildiği gözlenmiştir. Genel olarak öğrencilerde, kavram yanılgısı, nesne-nicelik gibi düşüncelerini zorlaştıran etmenler görülmemiştir. Bu araştırma ile erken dönem cebirsel düşünme uygulamalarının (genelleme, temsil etme, gerekçelendirme ve matematiksel ilişkiler ve yapı ile akıl yürütme) ilköğretimin alt sınıflarına başarılı bir şekilde entegre edilebileceği görülmüştür.

Wilkie (2016), 102 altıncı sınıf öğrencisi ile okul cebirinden önce genelleme yapma ve çoklu temsil kullanma bilgilerini incelemek amacıyla yaptığı çalışmasında katılımcıların birçoğu “restoran masaları” görevine kıyasla sıralı olan “kibrit çöpü” örüntüsü ile açıkça genelleme yapabildikleri görülmüştür. “Restoran Masaları” görevinde öğrenciler görsel stratejiler ile genellemeye ulaşırlarken örüntü çalışmasına ilişkin genellemede öğrencilerin sembolik ifadeler doğrusal denklem ifadeleri kullanarak eşitlik tanımladıkları görülmüştür. Bu sayede çalışma sonucunda örüntü görevlerinin etkililiğine ulaşılmıştır. Benzer şekilde Wilkie (2019) 12 ortaokul öğrencisinin fonksiyonel düşüncelerini incelediği çalışmada, genişleyen örüntü görevlerinde öğrencilerin modelleme/sayma yolu ile genelleme yapabildikleri ve bununla birlikte kovaryasyonel düşüncelerinin etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Xolocotzin ve Rojano (2015) ilkokul öğrencilerinin fonksiyonel düşüncelerini incelemek amacıyla gerçekleştirdikleri çalışmada, 29 ikinci sınıf öğrencisi, 33 dördüncü sınıf öğrencisi ve 32 altıncı sınıf öğrencisi olmak üzere toplamda 94 öğrenci yer almıştır. Öğrenciler farklı okullardan seçilmiş ve matematik başarı düzeylerinin birbirine yakın olmasına özen gösterilmiştir. Öğrencilerin fonksiyonel düşüncelerini aritmetik bilgileri ile ilişkilendirmeyi amaçlayan bu çalışmada, “Fonksiyonel Düşünme Değerlendirme” tablosu kullanılmıştır. Bu tablo, fonksiyonel düşünmenin dört yönünü içermektedir: kuralı tanıma, uygulama, sözel olarak kural oluşturma-kullanma ve değişken kullanarak kural oluşturmadır. Kuralı uygulamada en yüksek başarı ikinci sınıf öğrencilerinde görülmüştür.

Bu sonuç erken yaşlarda fonksiyonel düşünmeye yer verilmesinin önemini ortaya çıkarmaktadır. Sözlü ve sembolik temsil kullanımında ikinci sınıf ile dördüncü sınıf arasında anlamlı fark olmadığı ancak dördüncü sınıftan altıncı sınıf arasında anlamlı bir fark olduğu görülmüştür. Çalışma sonucunda fonksiyonel düşünme yönlerinin farklı sınıflarda farklı şekillerde değiştiği görülmüştür.

Zapatera (2018), 8-12 yaş aralığındaki 106 üçüncü ve dördüncü sınıf düzey öğrencinin katılımı ile örüntülerin genelleştirilmesi problemlerini nasıl çözdüklerini incelemek amacıyla çalışmasını gerçekleştirmiştir. Çalışmada, üçüncü sınıf öğrencilerinin yaklaşık %90'ının şekil çizip istenen terimi bulduğu, %80'inin yakın adıma ilişkin genelleme yapabildiği ve %10'undan fazlasının uzak adıma ilişkin sözel yollarla genelleme yapabildiği görülmüştür. Dördüncü sınıf öğrencilerinin ise yaklaşık %30'unun uzak adıma ilişkin sayısal ve cebirsel genellemeler yapabildiği, %25'nin ise örüntü kuralına ilişkin sözel genelleme yapabildiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçların yanı sıra araştırmada ilkökul öğrencilerinin örüntü terimlerinden yola çıkarak adım belirleme çalışmalarında yani tersine çevirme konusunda zorluk yaşadıkları görülmüştür. Tersine çevirme işleminde öğrencilerin farklı bir şey sorulduğu düşüncesinde oldukları gözlenmiştir. Öğrencilerin yaşadıkları bir başka zorluğun ise uzak adıma ilişkin genellemeler olduğu görülmüştür. Öğrencilerin yakın adıma ilişkin etkili genellemeler yaparken uzak adım genellemelerinde ve cebirsel temsilde güçlük yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin özellikle yakın adıma ilişkin kullandıkları modelleme/sayma ve yinelemeli stratejiler ile başarılı genellemelere ulaştıkları görülmüştür.

Yaman ve Umay (2013) 3-7. sınıf düzeylerindeki 317 öğrencinin kullanılan öğretim yöntemine göre örüntüleri anlamalarını incelemek ve örüntülerdeki devam ettirme, tanımlama ve sembolize etmenin öğretim yöntemine göre nasıl değiştiğini gözlemlemek amacıyla yaptıkları araştırmalarında, öğrencilerin öğretim biçimi ile örüntü başarıları arasında anlamlı bir farklılık olduğunu görülmüştür. Ayrıca öğretim esnasında yapılan etkinliklerde öğrencilerin en yüksek ortalamayı “tablo” biçiminde sunulan örüntülerde, ikinci yüksek ortalamayı “şekil” biçiminde sunulan örüntülerde ve en düşük ortalamayı da “sayı dizisi” biçiminde sunulan örüntülerde aldıkları saptanmıştır. Bu anlamlı farklılığın sebebi olarak da öğrencilere tablolarda örüntüler düzenli bir şekilde verilmekte ve her bir sütunda girdi ve çıktı sayıları sıralı olarak sunulmaktadır. Bu şekilde girdi ve çıktı sayılarının düzenli bir şekilde sunulması, öğrencilerin tablo biçimindeki örüntülerde daha

kolay genelleme yapmalarına ve tablo biçiminde sunulan örüntüleri daha kolay cevaplayabilmelerine olanak sağlaması olarak görülmektedir.

Akkan ve diğerleri (2011) cebir öncesi dönemin önemi üzerine yaptıkları araştırmalarında, aritmetik-cebir arasında güçlü bir ilişki olduğunu konusunda hemfikirdirler ancak aritmetikle cebirin farklı alanlar olmasından kaynaklı aritmetikten cebire geçişte cebirsel kavramları yorumlamada farklılıklar olabileceği ve bu farklılıklardan kaynaklanan zorlukların giderilmesinde aritmetikten cebire geçiş dönemi olan “cebir öncesi” dönemin önemli olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Diğer taraftan Kaya ve Keşan (2014) ilkokul öğrencileri için cebirsel düşünme ve cebirsel düşünme becerisinin önemi konusunda yaptıkları araştırmalarında cebirin soyut bir kavram olması sebebiyle öğrencilerin cebiri anlamakta zorlandıklarını, bunun sonucunda da ilkokul öğrencilerinin temel cebir bilgileri ve becerilerini kazanamayarak gerekli yeterliliklere ulaşamadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Benzer şekilde Doğan Timur ve Turgut (2020) ilkokul dördüncü sınıfa devam etmekte olan 39 öğrenci ile yaptıkları araştırmalarında iki farklı şehirde bulunan öğretmenlerin hazırladıkları ders planları üçer saat öğrencilere uygulamıştır. Hazırlanan ders planlarındaki öğretim süreçleri yönerge ve açıklamalar, muhakeme süreci, soru şekli ve genelleme süreci olmak üzere dört kategoride değerlendirilmiştir. Yönerge ve açıklamalar kısmında öğretmenlerin etkinliklerde yer alan görevlere yönelik yönerge sunmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu durumda öğrencilerin anlayamadıkları görevleri yarım bıraktıkları veya bitirmekte zorlandıkları görülmüştür. Muhakeme sürecinde ise öğretmenlerin aceleci davranarak öğrencilerin sorularının üzerinde durmadıkları gözlenmiştir. Buna rağmen muhakeme yapan öğrenciler olduğu bunun da görevlerde araç olarak “tablo” kullanmalarının sorgulayarak muhakeme yapabilmelerinde etkili olduğu düşünülmektedir. Soru şeklinde ise öğretmenler düşündürmeye yönelik sorular yerine rutin sorular yöneltmiştir. Bu durumda da öğretmenler, öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkaracak, genelleme ve gerekçelendirme yapmalarına fırsat verecek etkili soruları nadiren sorabildikleri görülmüştür. Genelleme sürecinde ise öğretmenler süreci iyi planlayamadıkları için öğrenciler genellemelere ulaşmakta zorlanmışlardır. Fakat tablo ve çeşitli görevler sayesinde öğrenciler genellemelere ulaşmayı başarmışlardır. Bu durumun da öğretmenlerin pedagojik alan bilgisi eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Sonuç olarak, sayı ve şekil örüntülerinin sınıf öğretmenleri tarafından nasıl öğretildiği ve öğretim sonuçlarını değerlendirmek amacıyla yaptıkları araştırmalarında; erken cebir konusunda hazırlanan öğretim etkinliklerinin öğrencileri keşfetmeye, fonksiyonel

düşünmeye ve genellemelere ulaşmayı desteklediği sonucuna ulaşmışlardır. Turgut ve Doğan Temur (2017) erken cebir ile ilgili yapılan öğretim etkinliklerinin 20 ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinin akademik başarılarına etkisini belirlemek amacıyla erken cebir başarı testi ve öğretim etkinlikleri kullandıkları araştırmalarında benzer sonuçlara ulaşmışlardır. Araştırma sonucu incelendiğinde sınıf öğretmenlerinin öğretime yönelik eksikliklerin olmasının yanı sıra öğretim etkinliklerinin öğrencileri düşünmeye, keşfetmeye, ilişkisel düşünmeye ve genellemelere ulaşmaya yönelttiği görülmüştür. Ayrıca ön test ve son test sonuçları incelendiğinde öğretim etkinliklerinin öğrencilerin matematiksel başarılarını artırdığı da görülmüştür. Sonuç olarak cebirin, cebirsel düşünme için bir ön koşul olduğu düşünüldüğünde sadece bir ders konusu olarak görülmemesi gerektiği ve günlük hayatta entegre edilmesinin önemi ortaya çıkmıştır.

Palabıyık ve Akkuş İspir (2011) yedinci sınıfa devam etmekte olan 40 öğrencinin örüntü temelli olan ve örüntü temelli olmayan cebir öğretimini cebirsel düşünme becerilerine ve matematiğe karşı tutumlarına yönelik etkilerini incelemek amacıyla yaptıkları altı hafta süren araştırmalarında “Kavramsal Cebir Testi”, işlemsel cebir başarılarını ölçmek için “İşlemsel Cebir Testi” ve matematiğe karşı tutumlarını belirlemek için “Matematiğe Karşı Tutum Ölçeği” kullanılmıştır. Deney grubunda 10 farklı etkinlik ve çalışma kağıdına yer verilmiştir. Etkinliklerin geneli örüntüyü keşfetme, devam ettirme ve örüntü kuralını bulmaya yöneliktir. Deney grubunda gerçekleştirdikleri örüntü temelli öğretim sonucunda cebir başarıları kontrol grubuna göre daha anlamlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Her iki grupta kavramsal cebir testinden elde edilen sonuçlar incelendiğinde; deney grubunun süreç boyunca kavramsal cebir başarıları yönünden daha fazla gelişim gösterdiği ancak süreç sonunda uygulanan işlemsel cebir testinde, iki grubun da işlemsel cebir başarılarının birbirinden çok da farklı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

3. YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın türü, çalışma grubu, veri toplama ve araştırma süreci, araştırmacının rolü, veri toplama araçları ve analizi ele alınacaktır.

Araştırmanın Türü

Çeşitli disiplinlere temel oluşturan nitel araştırma deseni, hem disiplinlere farklı açıdan bakmayı sağlamakta hem de yöntem olarak katkı sağlamaktadır (Bogdan ve Biklen, 1992; Goetz ve LeCompte, 1984; Patton, 2002). Nitel araştırma, çeşitli durumların, etkinliklerin ve ilişkilerin derinlemesine incelenmesine olanak sağlayan araştırma yaklaşımıdır (Fraenkel ve diğerleri, 2006). Nitel araştırmalar, olgu ve olayların doğal ortamlarında bütüncül olarak incelenmesini sağlayan yöntemdir (Patton, 2002).

Araştırmanın yöntemi, problem durumuna, araştırmacının rolüne ve araştırma sürecinde izlenen yola göre belirlenir (Yin, 2003). Bu araştırmadaki amaç, gerçekleştirilen cebir öğretimi deneyi sürecinde 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarındaki gelişiminin ayrıntılı bir şekilde incelenmesi olduğundan nitel araştırma yönteminin kullanılması uygun görülmüştür. Bu çalışma, nitel araştırma yönteminin özellikleri göz önüne alınarak katılımcı öğrencilerin öğrenim gördükleri sınıf ortamında (doğal ortam) gerçekleştirilmiş ve öğrencilerin öğretim deneyi süresince cebirsel düşünme yapılarının derinlemesine incelenmesinde öğrenci çalışma kâğıtları, ses ve görüntü kayıtları, görüşme transkriptleri, gözlemci notları veri toplama araçları olarak yer almıştır. Bunun yanı sıra dört ay süren öğretim deneyi gerçekleştirilerek veri çeşitliliğine ulaşılması hedeflenmiştir. Çalışmada elde edilen verileri kendi bağlamlarında değerlendirmek ve aralarındaki ilişkiyi incelemek betimsel analiz kullanılmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi modeli kullanılmış ve gerçekleştirilen öğretim deneyinin 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği değerlendirilmiştir.

Öğretim Deneyi

Matematik eğitimi çalışmalarında son yıllarda öğretim deneyi modeli sıkça kullanılmaktadır. Öğretim deneyi modeli, zamanla değişen matematik anlayışıyla birlikte deneysel araştırmaların yetersiz kalması üzerine klinik vakalardan esinlenerek geliştirilmiştir (Steffe, 1983; Steffe ve D'Ambrosio, 1996). Öğretim deneyinde, öğrencilerin öğretim etkinliklerini nasıl anlamlandırdıkları (Confrey, 2006; Steffe ve Ulrich, 2014) ve öğretim sürecindeki bilgi, beceri ve deneyimlerindeki değişimlerin nasıl olduğu (Sinclair, 1987) gibi sorulara cevap aranmaktadır. Literatürde henüz yeni bir model

olarak karşımıza çıkan öğretim deneyinin farklı tanımları mevcuttur. Öğretim deneyi, Engelhardt ve diğerleri (2004) tarafından “*matematik alanında uygulanması düşünülen yeni öğretim yöntem ve tekniklerinin uygulanabilirliğini görmek için uygun olan yöntem türü*” olarak tanımlanmaktadır (syf. 157). Öğretim deneyi, katılımcıların matematiksel önbilgileri ile tasarlanıp sonrasında uygulanan öğrenme etkinlikleri ile matematiksel bilgi ve becerilerindeki değişimlerin yakından gözlemlenebildiği araştırma modelidir (Czarnocha ve Maj, 2008). Cobb (2000) ise öğretim deneyini “*belirli bir amaç için tasarlanan öğretim sürecinin araştırmacı/öğretmen tarafından uygulanması*” şeklinde tanımlamaktadır (syf. 307). Öğretim deneyi, klinik görüşmelerin kapsamlı halidir ve süreç boyunca öğrencilerin bilgi, deneyim ve matematiksel akıl yürütmelerindeki değişimler anlamlandırılmaya çalışılmaktadır (Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim deneyinde belirlenen amaç doğrultusunda birçok öğretim etkinliği yer almaktadır (Cobb ve Steffe, 2001). Öğretim deneyleri en az bir katılımcı ile gerçekleşen ve katılımcı sayısı arttıkça sınıf ortamını anımsatan uygulamalardır (Engelhardt ve diğerleri, 2004). Bu amaçla öğretim deneyinde bireysel ya da küçük grupla araştırma gerçekleştirilmektedir (Cobb, 2000). Öğretim deneyinde araştırmacı, öğretmen rolünde (Steffe, 1983) olduğu gibi aynı zamanda araştırmacının gözlemci de olabileceği (Engelhardt ve diğerleri, 2004) belirtilmektedir. Öğretim deneyi uzun süreli bir süreç olduğundan araştırmacı/öğretmen ile katılımcılar arasında etkileşim oldukça fazladır (Cobb ve Steffe, 2011). Öğretim deneyinde araştırmacı bu rolüyle uzun süreli çalışmalar neticesinde katılımcıları yakından tanır, bu sayede de olaylara ya da durumlara katılımcıların gözünden bakabilme fırsatı bulur. Öğretim deneyinin nihai amacı ise katılımcılara uygulanan öğretim yöntemi ile var olan bilgi ve becerilerindeki gelişimi ortaya çıkarmak, öğretimin kararlarını bu doğrultuda tasarlamak ve etkili bir öğretim süreci sağlamaktır (Lesh ve Kelly, 2000). Bu bağlamda etkili bir öğretim yöntemi tasarlamak için gerekli olan aşamalar şu şekildedir (Cobb, 2000; Steffe ve Thompson, 2000).

Hipotez oluşturma, öğretim deneyinde araştırmacı ilk olarak araştırma amacı doğrultusunda hipotezlerini belirlemektedir. Öğretim deneyi süreci öncesinde oluşturulan hipotezlerin öğretim sürecinde ne derece gerçekleştiğine yönelik değerlendirmeler yapılması ve öğretim ile katılımcıların matematiksel bilgi ve becerilerindeki değişimlere ilişkin çıkarımlar yapılması esastır. Öğretim deneyinde oluşturulan hipotezlerin, nicel araştırmalardaki hipotezlerden farklı olduğu unutulmamalıdır. Öğretim deneyindeki hipotezler esnekler, süreç boyunca değerlendirmeye, değiştirilmeye açıktır (Steffe ve

Ulrich, 2014). Bu da öğretim deneyinin dinamik bir yapıda olduğunu göstermektedir (Confrey, 2006). Bu çalışmada ise 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarında erken cebir öğretim deneyinin etkili olması hipotez olarak belirlenmiş ve bu hipotez denenmiştir.

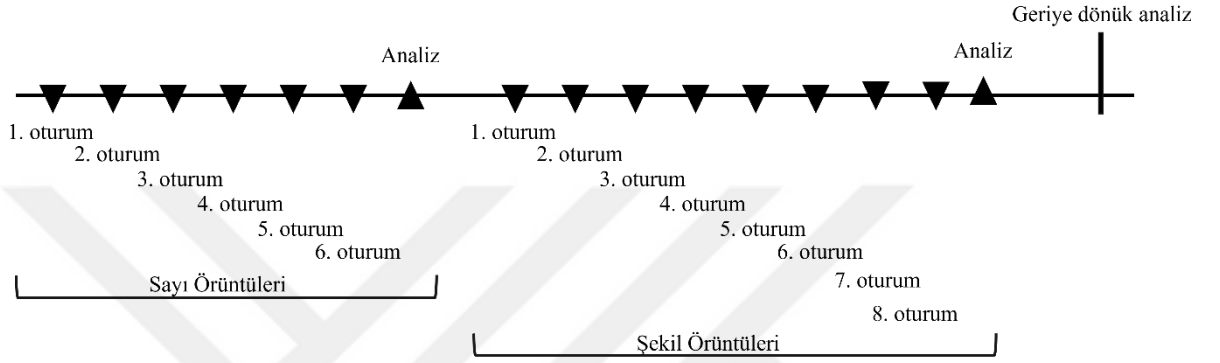
Hipotezlere uygun olarak öğretim sürecini planlama, öğretim deneylerinde öğretim ortamları tasarlanırken katılımcıların alışkın olduğu doğal ortamlarına benzer ortamlar olmasına dikkat edilmelidir (Engelhardt ve diğerleri, 2004). Bu şekilde katılımcıların öğrenme sürecindeki çıktıları aktarmaları ve araştırmacının da süreçte etkili olan ve olmayan yönleri görmesine yardımcı olmaktadır.

Öğretimin uygulaması ve verilerin toplanması, aşamasında araştırmacı/öğretmen, katılımcılar ve öğretim boyunca yapılan kayıtlar yer alır (Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim deneyinde yer alan araştırmacının iki önemli görevi vardır: (1) Katılımcıların öğrenme sürecinde aktif olarak yer alacakları öğrenme durumları tasarlayarak matematiksel akıl yürütmelerini ortaya çıkaracak sorulara yer vermek ve (2) Her öğretim uygulaması tamamlandığında süreci değerlendirmek için analiz yapmaktır (Cobb, 2000). Öğretim deneyinde araştırmacı, süreçte aktif olarak yer alır ve süreçte kullanılan veri toplama araçları ile katılımcıların matematiksel deneyimlerini yakından gözlemler. Öğretim deneyi bu yönüyle katılımcıların davranışlarını süreç boyunca ayrıntılı olarak detaylandırılmasına olanak sağlar. Öğretim deneyi sürecinin sorunsuz bir şekilde ilerleyebilmesi için araştırmacının katılımcılara nasıl davranılacağını, nasıl soru sorulacağını bilmesi kritik öneme sahiptir. Bu doğrultuda araştırmacı, süreçte katılımcıların bilgi ve becerilerine odaklanabilmeli ve öğretim deneyindeki “öğretimde” araştırmacı katılımcıların matematiksel düşüncelerini ve matematiksel düşüncelerindeki değişimlerin önemli olduğunun farkında olmalıdır (Steffe ve Thompson, 2000).

Öğretim deneyi sonucunda gelişim/değişimlerin incelenmesi ve hipotezlerin değerlendirilmesi aşamasında ise az sayıda katılımcı ile yürütülen öğretim deneyleri ile öğrenme süreci katılımcıların bilişsel süreçleri üzerinden incelenmektedir (Steffe ve Thompson, 2000; Steffe ve Ulrich, 2014). Öğretim deneyinde asıl istendik hedef, katılımcıların düşünme yapılarında değişikliklerin meydana gelmesidir (Lesh ve Kelly, 2000). Öğretim süreci sonunda ulaşılan veriler ise geriye dönük analizler yolu ile analiz edilmektedir. Geriye dönük analizler ile öğretim deneyi sonunda toplanan tüm veriler analiz edilerek uygulanan öğretim deneyinin güvenilirliği ve tutarlılığı ortaya konulmaktadır

(Cobb, 2000; Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim deneyi aşamaları döngüsel olarak devam etmektedir.

Öğretim deneyinin, matematik alanına en büyük katkısı öğretim sürecine yönelik ayrıntılı bilgiler sunması ve yapılacak araştırmalara matematik öğretimi ile ilgili yol gösterici olmasıdır. Bu araştırmada, 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi hedeflenmiş ve bu amaçla öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyi sürecine ait çalışma akışı Şekil 3.1’de sunulmuştur.



Şekil 3. 1. Çalışmada gerçekleştirilen erken cebir öğretim deneyi süreci

Bu çalışmanın amacı doğrultusunda öğretim deneyi sürecini ayrıntılı ve derinlemesine inceleyebilmek için az sayıda katılımcı araştırmaya dahil edilmiştir. Öğretim deneyi sürecine ilk olarak araştırmanın amacı doğrultusunda öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarındaki gelişim hedeflenmiştir. Bunu takiben öğretim deneyinin gerçekleştirileceği öğretim ortamı tasarlanırken öğrencilerin kendini rahatça ifade edebilecekleri ve alışkın oldukları sınıf ortamı uygun görülmüştür. Öğretim deneyi süreci birçok cebir etkinliklerini kapsayıcı olan oturumlardan oluşmaktadır. Bu oturumlar sürecinde öğrenci çalışma kâğıtları, ses ve görüntü kayıtları, görüşme transkriptleri, gözlemci notları veri toplama araçları olarak yer almıştır. Öğretim deneyi süresince araştırmacı hem öğretmen hem de gözlemci rolü ile katılımcılarla birlikte yaklaşık dört ay gibi uzun bir süre etkileşim halinde olmuştur. Araştırmacı/öğretmen, her oturum sonunda katılımcılardaki değişimleri gözlemlemiş ve oturumların işleyen ve işlemeyen taraflarını değerlendirerek iyileştirme yapmıştır. Araştırmacı/öğretmen bu sayede katılımcıları yakından tanıma fırsatı ile olay ya da durumlara onların gözünden bakabilmiştir. Öğretim deneyi sonunda katılımcıların cebirsel düşünme yapılarını değerlendirebilmek amacıyla veri toplama araçlarıyla elde edilen veriler bütüncül olarak geriye dönük analiz yöntemi ile analiz edilerek uygulanan

öğretim deneyinin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği çeşitli bileşenler bağlamında değerlendirilmiştir.

Çalışma Grubu

Nitel araştırmadaki en temel amaç araştırma sorusuna ilişkin ayrıntılı bilgi edinmektedir. Bu amaçla araştırma sorusuna ilişkin en zengin verinin elde edilebileceği çalışma grubu oluşturulur (Fraenkel ve diğerleri, 2006). Amaçlı örneklem, Patton (2002) tarafından çeşitli bilgiler ile olay, olgu veya durumlara yönelik ayrıntılı bilgiler sunan örneklem türü olarak tanımlanmaktadır. Amaçlı örneklem, araştırmanın amacına uygun olarak bilgi yönünden çeşitlilik gösteren durumların ayrıntılı bir şekilde incelenmesine olanak sağlayan örneklem türüdür (Patton, 2002).

Bu araştırmada, öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarının çeşitli bileşenler bağlamında incelenmesi hedeflendiğinden amaçlı örneklem yönteminin kullanılması uygun görülmüştür. Çalışma, 2021-2022 öğretim yılı güz döneminde Erzurum'da bir devlet ilkokulunda öğrenim görmekte olan 4. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmaya 6 öğrenci dâhil edilmiştir. Öğrencilerin çalışmaya dâhil edilmesinde amaçlı örneklem türlerinden ölçüt örneklem kullanılmıştır. Ölçüt örneklem, araştırmanın amacına uygun olarak belirlenen özelliklere sahip kişi, olay, durum ya da nesnenin örnekleme alınmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu doğrultuda katılımcıların çalışmaya dahil edilmesinde 4. sınıf öğrencisi olmaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Çalışmada etkililiği araştırılan öğretim deneyi müfredat dışı uygulama olması sebebiyle araştırma öğrencilerin ders saatleri dışında gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla araştırmada sürekliliğin olması ve öğrencilerin çalışmaya aktif olarak katılımlarının sağlanması için gönüllü katılımları esas alınmıştır. Araştırmacı, aynı zamanda öğrencilerin öğretmenleri olduğundan öğrencilerin bireysel özelliklerini bilmektedir. Bu doğrultuda katılımcıların kendilerini ifade edebilen ve dışa dönük olmalarına özen gösterilmiştir. Çalışmanın uygulamasında gerekli yasal izinlerin alınmasının yan sıra veli izinleri de alınarak çalışma gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların gizliliği amacıyla gerçek isimleri yerine kod isimler kullanılmıştır. Çalışmada yer alana katılımcılara ait bireysel özellikler Tablo 3.1'de sunulmuştur.

Tablo 3. 1. Katılımcıların bireysel özellikleri

Katılımcı	Cinsiyet	Yaş	Matematik Başarı Düzeyi*
Hale	Kadın	9	Orta
Bade	Kadın	10	İyi
Yağız	Erkek	10	İyi
Mert	Erkek	10	Orta
Mete	Erkek	10	İyi
Sarp	Erkek	11	İyi

*Orta= 55-69, İyi= 70-84, Çok iyi=85-100

Katılımcıların özellikleri incelendiğinde öğrencilerin okula kayıt yaşı ve ailelerin çocuklarını okula erken ya da geç göndermesi sebebiyle ile yaşlarının 9-11 yaş aralığında değiştiği görülmektedir. Katılımcıların öğrenim gördükleri dördüncü sınıf öğretmeni tarafından matematik başarı düzeyleri yazılı sınav puanlarına göre orta, iyi ve çok iyi düzeylerinde oldukları görülmektedir. Bu sebeple matematik başarılarının orta-iyi arasında değişkenlik gösterdiği söylenebilir. Ayrıca cinsiyet dağılımları arasında grup içinde homojenliğin olduğu görülmektedir.

Veri Toplama Süreci

Çalışmada, genişleyen şekil ve sayı örüntülerinin yer aldığı öğretim deneyi planlanmış ve uygulanarak 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği ortaya konulmuştur. Bu amaçla gerçekleştirilen öğretim deneyi kapsamı Tablo 3.2’de sunulmuştur.

Tablo 3. 2. Erken cebir öğretim deneyi içeriği

Örüntü Türü	Süre	Amaç
Sayı Örüntüleri	6 oturum (6 × 40dk oturum)	• Aralarında sabit fark olan sayı örüntülerini oluşturur
		• Aralarında sabit fark olan sayı örüntülerinde eksik öğeyi belirler ve tamamlar.
		• Artan ve azalan sayı örüntülerini genişletir.
		• Aralarında sabit fark olan sayılar arasındaki ilişkiyi belirler.
		• Sayı örüntüsü çalışmalarında çoklu temsilleri kullanır.

Şekil Örüntüleri	8 oturum (8 × 40dk oturum)	- Genişleyen sayı örüntülerinin fonksiyonel kuralına ilişkin genelleme yapar. - Örüntü kuralına ilişkin genellemelerin gerekçelendirmelerini yapar.
		- Geometrik şekil örüntülerini devam ettirir. - Geometrik şekil örüntülerinde şekil ve nesne sayısını ilişkilendirerek fonksiyonel kurala yönelik genellemeye ulaşır. - Fonksiyonel kurallı şekil örüntüsü ile ilgili eşitlik yazar. - Çoklu temsil gösterimini kullanır. - Örüntü kuralına ilişkin genellemelerin gerekçelendirmelerini yapar.

Uygulama öncesi İl Milli Eğitim Müdürlüğü tarafından gerekli yasal izinler alınmıştır. Araştırmacının eğitimci olduğu okulda uygulama yapılacak olan 4. sınıf öğrencilerine uygulamaya yönelik detaylı bilgilendirmeler yapılmıştır ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan 6 öğrenci belirlenmiştir. Çalışma kapsamında yaklaşık dört ay süren öğretim deneyi uygulaması gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi etkinlikleri Şen ve Güler (2022) tarafından geliştirilen etkinlikler doğrultusunda hazırlanmış ve ardından matematik eğitiminde uzman iki araştırmacının etkinlik görüşleri doğrultusunda; cebirsel düşünmeyi destekleyen etkinlikler seçilmiş ve uzman görüşleri doğrultusunda öğrencilerin düzeyine yönelik düzenlemeler yapılmıştır. Etkinliklerin ilkökul öğrencilerinin akademik düzeyine uygun olmasına dikkat edilerek çalışmada yer alan etkinliklere son hali verilmiştir. Görüşme soruları ise her etkinliğin bağlamına yönelik hazırlanmış olan soruların kapsamı uzman görüşleri doğrultusunda düzenlenmiştir. Burada soruların öğrenciler tarafından anlaşılabilirliği, soruların ilgili etkinliğin bağlamına uygunluğu dikkate alınarak düzenlenerek son hali verilmiştir (EK-1). Öğretim deneyi genişleyen sayı ve şekil örüntüleri bağlamında hazırlanmış ve uygulanmıştır. Genişleyen örüntü çalışmalarında öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi amaçlandığından bu gelişimi destekleyici öğretim içeriği hazırlanmıştır. Bu amaçla; örüntü oluşturma, devam ettirme, eksik bırakılan ögeyi tamamlama ve örüntü kuralını tanımlama çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Örüntü çalışmaları sürecinde ise çoklu temsillerin kullanımı

hedeflenmiş ve buna ilişkin destekleyici örüntü çalışmalarına yer verilmiştir. Sayı ve şekil örüntülerinde öğrencilerin örüntü yapısına ilişkin ilişkisel durumu keşfetmeleri ve buna ilişkin genellemeye ulaşmalarına ilişkin çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Örüntü çalışmalarında ulaşılan genellemelerde ise öğrencilerin bu genellemeleri doğrulama ve/veya yanlışlamaları amaçlanarak gerekçelendirme yapmaları sağlanmıştır. Erken cebir öğretim deneyi, her oturum 40 dakika olmak üzere toplam 14 oturumda gerçekleştirilmiştir. Çalışmada yer alan katılımcılar öğretim deneyinde gerçekleştirilen tüm etkinliklere eksiksiz katılım göstermişlerdir. Etkinliklerin uygulaması çalışmada yer alan altı öğrenci ile sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar öğretim deneyinde yer alan etkinlikleri bireysel olarak gerçekleştirmişlerdir. Her öğretim sonunda, öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarını daha iyi anlayabilmek için bireysel olarak gerçekleştirdikleri çalışmalar sonrası öğrencilere etkinlik bağlamına uygun sorular yöneltilerek soru-cevap etkinliği yapılmıştır. Bu sayede öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları hakkındaki görüşlerinin ortaya çıkarılması ve cebirsel düşünme yapılarının etkililiğinin ortaya konulması amaçlanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmalarda, birçok kaynaktan veri toplamak araştırma durumu hakkında daha detaylı, daha net ve doğru bir şekilde bilgiyi ulaşmayı sağlamaktadır. Bu çalışmada da araştırılan problem durumunun ayrıntılı olarak incelemek için birçok veri toplama aracından yararlanılmıştır (Yin, 2003). Bu amaçla çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyi sürecinde odak grup görüşmeleri, öğrenci çalışma kâğıtları, gözlemci notları, ses ve görüntü kayıtları veri toplama araçları olarak yer almıştır. Çalışmada yer alan veri toplama araçları ve kullanılan öğeler Tablo 3.3'te sunulmuştur.

Tablo 3. 3. Çalışma kullanılan veri toplama araçları

Veri Toplama Araçları	Görsel-İşitsel Öğeler
Odak grup görüşmeleri	Video kamera
	Ses kayıt cihazı
Katılımcı olmayan gözlemci	Gözlem formu
	Alan notları
Dokümanlar	Çalışma kâğıtları
	Transkriptler
	Fotoğraflar

Odak Grup Görüşmesi

Görüşmeler, araştırmacı ve katılımcı ile gerçekleştirildiği bireysel görüşmeler ve araştırmacının belirli bir grup ile yaptığı grup görüşmeleri olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Patton, 2002). Bu çalışmada öğrencilerin bireysel çalışmalarını gerçekleştirdikleri öğretim deneyi sürecinde bireysel görüşme ve odak grup görüşmeleri kullanılmıştır. Odak grup görüşmesi, araştırmacı ve katılımcılar arasında yapılandırılmış veya yapılandırılmamış şekilde gerçekleşen belirli bir amaca yönelik görüşlerin ortaya çıkarıldığı veri toplama aracıdır.

Odak grup görüşmeleri, katılımcıların rahat ve güvende hissedeceği bir ortamda önceden belirlenmiş bir konu hakkında düşüncelerini ortaya çıkarmak için yapılan görüşmelerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Odak grup görüşmelerinin olması için 6-8 kişiden oluşan küçük bir grup, rahat ve güvenli bir ortam ve katılımcıların görüş ve düşüncelerini özgürce ifade edilmeleri esastır. Odak grup görüşmelerinde bir araya gelen katılımcılar birbirlerinin konu hakkındaki görüş ve düşüncelerini duyarlar ve kendi görüşlerine buna göre ekleme yapma fırsatı bulurlar (Patton, 2002). Buradaki amaç, fikir hakkında hemfikir olmaktan ziyade herkesin fikrini rahatça ifade edebildiği özgür bir ortamın sağlanmasıdır. Odak grup çalışmaları 6-8 kişi ile en az 5 oturumun uygulanmasıyla gerçekleştirilir. Bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları çeşitli bileşenler bağlamında incelenmesi amaçlandığından görüş ve düşüncelerini paylaşımları ve bu süreçte cebirsel düşüncelerinin ortaya konulması hedeflenmiştir. Çalışmada, odak grup görüşmesinde 6 öğrenci yer almıştır. Öğretim deneyi 14 oturumdan oluşmakla birlikte her oturumda bireysel ve odak grup görüşmeleri gerçekleştirilmiştir.

Çalışmada, öğrencilerin çalışma kağıtları ile gerçekleştirdikleri bireysel uygulamalarını takiben odak grup görüşünün ortaya konulması amacıyla görüşme soruları yönlendirilmiştir. Odak grup görüşme sorularının anlaşılabilirliği için kolay sade ve net sorular olmasına, açık uçlu sorular ile konuyu detaylandırmaya, yönlendirmemeye, soruları birleştirmeden tek tek sormaya, soru çeşitliliğine yer vermeye ve gözlem formunda bir bütünlük oluşmasına yönelik hazırlanmaya dikkat edilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarını ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanan görüşme formunda soru çeşitliliği dikkate alınarak hazırlanmıştır. Bu amaçla sayı örüntüler ve şekil örüntülerinde her oturumun içeriğine özgü olarak öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları bağlamında genelleme, gerekçelendirme ve temsil etme becerilerinin ortaya çıkarılması

amacıyla sorular hazırlanmıştır. Bunun yanı sıra görüşme sorularında öğrencilerin fonksiyonel düşüncelerinin etkililiği ve ortaya konulması amacıyla sorulara yer verilmiştir (EK-2). Hazırlanan görüşme formu matematik alanında uzman iki araştırmacının incelenmesi ile yazılı dönütleri doğrultusunda yeniden düzenlenip son hali verilmiştir. Görüşmelerin gerçekleşmesi esnasında sürecin daha etkili ve verimli geçmesi için görüşme esnasında soruları konuşma tarzında sormaya, cevaplarına geri bildirimde bulunmaya, süreci etkili bir şekilde kontrol etmeye özen gösterilmiştir (Patton, 2002). Odak grup görüşmeleri ses ve görüntü cihazlarının kullanımı ile kaydedilmiştir. Bu amaçla öğretim deneyinin gerçekleştirildiği ortamda iki adet video kamera ve 2 adet ses kayıt cihazı bulundurulmuştur. Bu sayede veri kaybının önlenmesi sağlanmıştır.

Gözlem

Gözlem, araştırmacının çalışmaya katılım durumuna göre katılımcı ve katılımcı olmayan gözlemci olmak üzere sınıflandırılmaktadır (Creswell, 2012). Bu çalışmada katılımcı olmayan gözlemci yer almaktadır. Katılımcı olmayan gözlemci sürece müdahale etmeyen bulunduğu ortama dışarıdan bakan bir göz rolüyle yer almıştır. Çalışmada katılımcı olmayan gözlemci olarak matematik öğretmeni öğretim ortamında bulunmuş ve öğrencilerin cebirsel düşünceleri ve davranışlarına ilişkin hazırlanan genişleyen sayı ve şekil örüntü etkinliklerini bireysel olarak gerçekleştirdikleri ortamda gözlemde bulunmuştur. Katılımcı olmayan gözlemci gözlem formu ve alan notları ile gözlemini gerçekleştirmiştir. Bu amaçla her oturumun içeriğine ve her bir katılımcıya özgü olmak üzere gözlem formlarının yer aldığı gözlem kitapçığı oluşturulmuştur (EK-3). Gözlem formunun yanı sıra gözlemci alan notları da tutmuştur.

Doküman

Nitel araştırmalarda görüşme ve gözlem veri araçları ile birlikte doküman kullanılması araştırma problemiyle ilgili daha zengin verilere ulaşılmasına yardımcı olmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Dokümanların, gözlem ve görüşme veri kaynakları ile birlikte kullanılması ile araştırmadan elde edilen bulguların doğrulanabilirliğini güçlendirmektedir (Merriam, 2009). Bu çalışmada veri kaynağı olarak kullanılan dokümanlar; tüm öğretim deneyi sürecinin yazılı ve sözlü kayıtlarına ait transkriptler (odak grup görüşmeleri, gözlem formu ve notları), öğrencilerin çalışmalarına ait fotoğraflar ve çalışma kağıtlarından oluşmaktadır.

Video Kayıtları

Video kayıtları, öğrenme ve öğretme sürecini olduğu gibi yansıtan, plansız gerçekleşen her olayı kayıt altına alınmasını sağlayan araçlardır (Baecher ve diğerleri, 2012). Video kayıtları ile öğretim süresince öğrencilerin bilgilerinin nasıl ortaya çıktığı ve bilgilerindeki değişimleri ayrıntılı olarak inceleyebilmek için kullanılabilir (Lewis ve diğerleri, 2009). Bu çalışmada video kayıtları uygulama aşamasında ders anlatımları ve öğretim etkinlikleri temelli çalışma kağıtlarını kayıt altına almak için kullanılmıştır. Video kayıtları olay ya da durumları daha iyi ifade edebilmek ve gerekçelendirmek için verilerin kapsamlı analizine olanak sağlamaktadır (Latvala ve diğerleri, 2000).

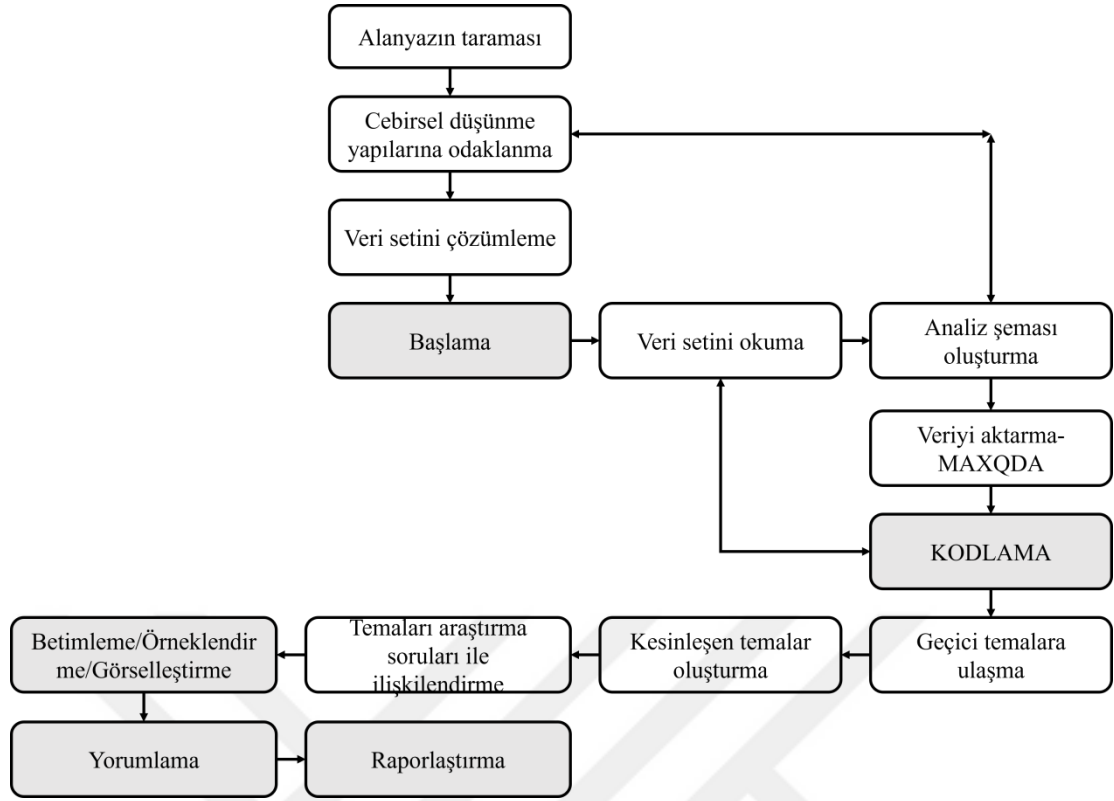
Gözlem Formu ve Alan Notları

Bu çalışmadan verilerin geçerlilik ve güvenilirliğini artırmak, öğretim deneyi sürecini ve öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarını daha detaylı ifade etmek amacıyla katılımcı olmayan gözlemci tarafından gözlem formu ve alan notları tutulmuştur. Gözlemci süreç boyunca uygulama yapılan sınıf ortamında dikkatini çeken önemli gördüğü noktaları alan notlarına kaydetmiştir. Bu sayede öğretim deneyinin öğrencilerin cebirsel düşünmelerindeki etkililiğini anlamaya yardımcı olmuştur.

Verilerin Analizi

İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi amacıyla gerçekleştirilen öğretim deneyinde öğrencilerin cebirsel düşünmelerine ilişkin görüşme, gözlem ve dokümanlar kullanılarak veri elde edilmiştir. Öğretim deneyi süresince elde edilen ses ve görüntü kayıtları transkript edilerek analizler için hazır hale getirilmiştir. Analizlere başlamadan tüm veri dokümanları öğretim deneyi kapsamında her bir oturumda her bir öğrenciye özgü olarak dosyalanmıştır. Bu sayede toplanan veriler analiz için hazır hale getirilmiştir.

Çalışmada elde edilen veriler öğrencilerin ortaya çıkan ve etkili olan cebirsel düşünme yapıları kapsamında analiz edilmiştir. Bu amaçla genelleme ve gerekçelendirme analiz şeması ile fonksiyonel düşünme düzeyleri kullanılmıştır. Elde edilen verilerin daha önceden belirlenen temalar doğrultusunda analiz edilmesi betimsel analiz olarak tanımlanmaktadır (Merriam, 2009). Bu amaçla çalışmada gerçekleştirilen betimsel analizde çok aşamalı bir süreç izlenmiştir (Şekil 3.2).



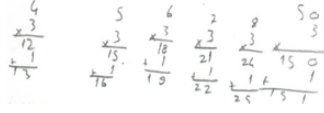
Şekil 3. 2. Çalışmanın veri analiz şeması

Çalışmada öncelikle literatürde erken cebirsel düşünmeye ilişkin tarama yapılmış ve cebirsel düşünme bileşenlerine ulaşılmıştır. Ardından bu çalışmada gerçekleştirilen erken cebir öğretim deneyinde öğrencilerin cebirsel düşüncelerine ilişkin veri seti çözümlenmiştir. Ardından tüm veriler okunmuş ve MAXQDA programına analizleri gerçekleştirmek üzere aktarılmıştır. Ardından literatürden yola çıkarak belirlenen analiz çerçevesi kapsamında veriler kodlanmıştır. Tablo 3.4'te çalışmada kullanılan analiz şemaları ve örnek kodlamalar sunulmuştur.

Tablo 3. 4. Tema, kod ve örnek kodlamalar

Tema	Kod	Örnek Kodlama
Genelleme	Modelleme	
	Sayma	1. adımda 3, 2. adımda 5, 3. adımda 7, 4. adımda 9, 5. adımda 11, 6. adımda 13.

	Yinelemeli	
	Bütüne genişletme	Artma miktarı 2 olduğu için kural ' $\times 2$ '
	İçeriksel	Adım sayısı $\times 2 + 1$
	Doğrusal	Eğer sayısı = adım sayısı $\times 2$
	Açıklama	...Demek ki 4. adımın her tarafında 4 tane siyah kare olacak. Önce çizdim, sonra da saydım. Toplam siyahlar 16 tane.
Gerekçelendirme	İçeriksel	Adım sayısı = Adım sayısı $\times 2 + 1$ Önce sayılardaki artışa baktım; $+3$. Demek ki kuralda '$\times 3$ olacak' ama artma/azalma var mı diye bakmam lazım. İlk önce 1. adımda denedim; $1 \times 3 = 3$ ama sonuç 4 olduğu için $+1$ olacak. Kare sayısını bulmak için kuralı 'şeklin bulunduğu $\text{adım} \times 3 + 1$' diye yazdım. 50. adım bulmak için de işlemleri yaptım.
	Şekilsel/Görsel	
Fonksiyonel Düşünme	L0	Bir sonraki adımdaki üçgen sayısı nedir? 12 ilk üçgen oldu, sonra beş üçgen oldu, sonra yine 3 arttı.
	L1	
	L2	4'er artıyor
	L3	Yataydaki noktalar dikeydeki noktalardan bir fazla. O yüzden 10. adımı bulmak için 11×10 yaptım. (L3)
	L4	

L5	
L6	...artının sayısını bulmak için kural; $\times 2 + 1$.
L7/L8	<u>Adım sayısı $\times 2 - 2$</u>
L9/L10	<u>Enine sayısı = Adım sayısı $\times 2 + 1$</u>

Fonksiyonel düşünme düzeylerinde ulaşılan sonuçlar neticesinde öğrencilerde yinelemeli (L1, L2), kovaryasyonel (L3) ve ortak değişkenli (L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10) olmak üzere fonksiyonel düşünmenin her düzeyine ait kodlara ulaşılmıştır. Kodlar belirlenirken öğrencilerin; sadece belirli sayıları dikkate alarak değişkenlerin biri veya her ikisine ilişkin yinelemeli örüntü tanımladığında L1 düzeyinde olduğu, değişkenlerin birinde veya her ikisinde artma veya azalma miktarını ifade ederek yinelemeli olarak kuralı tanımladığında L2 düzeyinde olduğu belirlenmiştir. Yinelemeli düşünme düzeylerinin yanı sıra öğrencilerde “yataydaki noktalar dikeydeki noktalardan 1 fazla” gibi değişkenlerin toplamsal ilişkisini tanımladığı L3 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu belirlenmiştir. Ortak değişkenli fonksiyonel düşünmenin başladığı L4 düzeyinde öğrenciler fonksiyonel kurala ulaşmada sadece istenilen adıma ilişkin fonksiyonel işlem yaptıkları örneğin; 10. adım istenildiğinde ardışık adımlarda işlem yapmak yerine sadece istenilen adım olan 10. Adımda işlemini gerçekleştirmeye yöneldikleri için L4 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu belirlenmiştir. L5 düzeyinde fonksiyonel düşünmede ise L4 düzeyinin aksine öğrenciler fonksiyonel kurala ulaşmak için ardışık adımlar arasında bir dizi çarpımsal işlem gerçekleştirir. Bu doğrultuda işlem yapan öğrencilerde fonksiyonel düşünmenin L5 düzeyinde etkili olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin “...artının sayısını bulmak için kural; $\times 2 + 1$ ” gibi benzer çözümlerinde değişkenler arasında genel ilişkiyi tanımladığı ancak fonksiyonel ilişkiyi açıklayamadığı L6 düzeyinde fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin tek bir değişkene dayalı olarak fonksiyonel kuralı cebirsel (L7) veya sözel (L8) olarak açıklayabildiği belirlenmiş olup öğrencilerde ileri fonksiyonel düşünmenin etkili olduğu L9 ve L10 düzeylerinde ise öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkiyi durumunu cebirsel (L9) ve sözel (L10) olarak açıklayabildikleri görülmüştür.

Yapılan kodlamalar sonucunda temalara ulaşılmıştır. Son olarak veriler MAXQDA programı kullanılarak görselleştirilmiş ve doğrudan alıntılar ile yorumlanarak bulgular bölümünde raporlaştırılmıştır.

Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacı, çalışmanın problem durumunun belirlenmesinden sonuçların yorumlanmasına kadar olan süreçte aktif olarak yer almaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu çalışmada araştırmacı ilk olarak katılımcıları belirlemek ve araştırma ortamını uygun hale getirmekle uygulamaya başlamıştır. Bu çalışmada araştırmacı öğretim deneyi süresince öğretim sürecini yöneten rehber ve gerçekleştiren eğitimci rolünde olmuştur.

Araştırmacı, çalışma ortamında dört ay bulunmuş ve uzun süreli çalışma araştırmacı ve katılımcılar arasındaki etkileşimi olumlu yönde etkilemiştir. Araştırmacı tarafından öğrencilerin öğretim deneyi süresince düşüncelerini paylaşımları, fikir öne sürmeleri ve yaptıklarını değerlendirmeleri için soru sorarak öğrencilerin kendilerini değerlendirmelerine fırsat verilmiştir. Araştırmacı öğrencilerin yaptıkları etkinliklerde “neden, niçin” şeklinde sorular yönelterek öğrencilerin sesli düşünceleri ve yaptıklarını gerekçelendirmeleri istenmiştir. Araştırmacı kendi görüş ve düşüncelerini çalışmanın doğal ortamını etkilememek ve öğrencileri yönlendirmekten kaçınmak için öğrencilere yansıtmamaya özen göstermiştir. Erken cebir öğretim deneyinde öğrencilerin bireysel çalışmaları araştırmacı tarafından bağlama uygun sorular ile desteklenmiştir. Gerçekleştirilen her bireysel çalışma sonrasında gerçekleştirilen grup görüşmelerinde araştırmacı soru sorma, görüşleri ortaya çıkarma ve genelleme süreçlerini yönetmiştir. Bu sayede gerçekleştirilen her öğretim etkinliğinde araştırmacı kontrolünde öğrencilerin cebirsel düşüncelerinin ortaya konulması sağlanmıştır.

Araştırmanın Etik Boyutu

Çalışma süresince dikkat edilen etik kurallar aşağıda sunulmuştur:

- Uygulama öncesi çalışmaların yürütülebilmesi amacı ile ilgili Erzurum İl Milli Eğitim Müdürlüğü AR-GE komisyonundan gerekli resmi izinler alınmıştır. Aynı zamanda bu süreçte Yozgat Bozok Üniversitesi Etik Kuruluna başvurularak araştırmanın gerekli izni alınmıştır. MEB izninin yanı sıra uygulamanın gerçekleştirileceği okul idarecileri ile görüşülerek uygulama içeriğine yönelik bilgilendirme yapılmıştır. Etik Komisyon formu (EK-4) ve Milli Eğitim izni EK-5’te sunulmuştur.

- Çalışmaya katılmaya gönüllü olan öğrencilerin kendilerinden ve velilerinden resmi izinler alınmıştır. Buna yönelik gönüllülük yazısı ve veli izin belgeleri EK-6'da sunulmuştur.
- Araştırma boyunca katılımcıların kimlik bilgilerinin gizliliği sağlanmış ve bu amaçla katılımcıların gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır.
- Uygulama ile ilgili fotoğraf kayıtlarında öğrenci kimliklerinin gizliliği göz önünde bulundurularak fotoğraf çekimi ve kullanımına dikkat edilmiştir.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmaların gerekli yeterliliğe sahip olması için geçerlilik ve güvenirliliğin sağlanması gereklidir (Patton, 2002). Nitel araştırmalarda iç geçerlilikte inandırıcılık, dış geçerlilikte aktarılabilirlik yer almaktadır. Güvenirlik için iç tutarlılık, dış güvenirlik için ise doğrulanabilirlik aranmaktadır (Lincoln ve Guba, 1985). Bu çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanıldığından inandırıcılık için uzun süreli çalışma, veri toplama araçlarında çeşitlilik; aktarılabilirlik için amaçlı örnekleme ve ayrıntılı betimlemeler, doğrulanabilirlik için ise doğrudan alıntılar kullanılmıştır.

Araştırmanın İnandırıcılığı ve Transfer Edilebilirliği

Nitel araştırmalarda geçerlilik; inandırıcılık ve transfer edilebilirlik kavramları ile ele alınır. İnandırıcılık, çalışmanın amacına bağlı olarak elde edilen verilerin inandırıcı olmasıdır. Bu çalışmada inandırıcılığın sağlanması için uzun süreli etkileşim içeren öğretim deneyi etkinlikleri, çeşitli veri kaynaklarından elde edilen veri çeşitliliği ve uzman incelemesi kullanılmıştır (Lincoln ve Guba, 1985).

Araştırmacı çalışma süresince katılımcılar ile uzun süreli etkileşimde bulunmuş ve bu sayede katılımcıların araştırmacıya ve bulundukları ortama güvenleri sağlanmıştır. Veri kaynaklarındaki çeşitlilik araştırmada inandırıcılığı artıran bir diğer faktördür. Çeşitleme olarak nitelendirilen bu strateji ile verilerin farklı veri toplama araçları (gözlem, görüşme ve doküman) ile elde edilmesi araştırmayı güçlendirmektedir (Patton, 2002). Bu çalışmada da görüşme, gözlem, ses ve görüntü kaydı ve yazılı dokümanların toplanması ve arşivlenmesi ile gerekli ve yeterli veri seti elde edilmiştir.

Araştırmanın transfer edilebilirliği (aktarılabilirlik) benzer ortamlara uyarlanabilir olmasıdır. Bu çalışmanın benzer ortamlara uyarlanabilmesi için detaylı ve kapsamlı bir şekilde araştırmanın betimlenmesi ve amaçlı örnekleme yöntemleri kullanılmıştır. Bu

çalışmada katılımcıların amaçlı örneklem ile çalışmaya dahil edilmesi ile çalışma sonuçlarının benzer özelliklere sahip öğrencilere aktarılabilirliği sağlanmıştır. Araştırmanın içeriği, konu ve kapsamı detaylı bir şekilde açıklanmış, katılımcıların seçimi, veri toplama süreci ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Ayrıntılı betimleme ve doğrudan alıntı aktarılabilirlik için önemlidir. Bu amaçla, bu çalışmada öğretim deneyi süreci ve kapsamı, katılımcı özellikleri ve araştırmacının rolünün sunulması ile çalışmanın transfer edilebilirliği sağlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

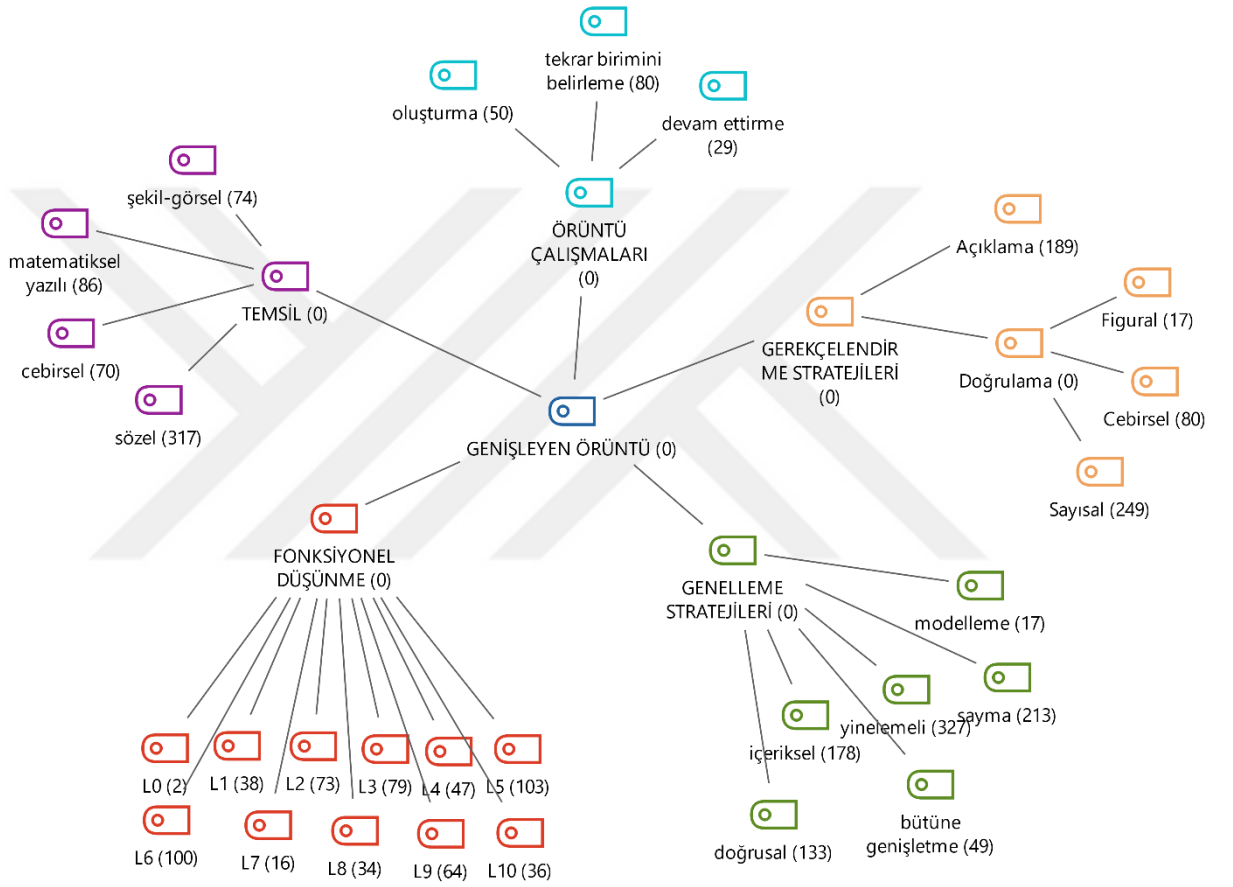
Araştırmanın Tutarlılığı ve Doğrulanabilirliği

Nitel araştırmalarda olay ve durumlar dinamik yapıdadır, değişebilir ve geliştirilebilirler. Bu değişkenliğin araştırmaya tutarlı bir şekilde yansıtılma süreci iç güvenirlik olarak tanımlanmaktadır (Lincoln ve Guba, 1985). Çalışmanın sonuçlarının güvenilir olmasının yanı sıra verilerin birbiri arasında uyumlu olması da tutarlılık açısından önemlidir ve bu uyum çalışmanın her aşamasının ayrıntılı olarak açıklanması ile mümkündür (Yin, 2003). Bu çalışmada tutarlılık, araştırma sürecinin ayrıntılı olarak açıklanması ve veri toplama sürecinin detaylı olarak sunulması ile sağlanmıştır.

Doğrulanabilirlik (teyit edilebilirlik), araştırma sonucunda elde edilen verilerin araştırmacı tarafından objektif olarak yorumlanmasıdır. Çeşitli veri toplama kaynaklarından elde edilen verilerin ayrıntılı bir şekilde açıklanması ile doğrulanabilirlik sağlanmaktadır. Bu çalışmada, elde edilen verilerin kodlanmasına ilişkin detayların, öğretim deneyi sürecinde öğrenci çalışmalarına ait fotoğrafların sunulması ve verilerin doğrudan alıntılar ile desteklenmesi ile doğrulanabilirlik sağlanmıştır.

4. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümünde 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi amacıyla uygulanan öğretim deneyi sonuçları, öğrencilerin örüntü çalışmalarındaki genelleme ve gerekçelendirme stratejileri ve fonksiyonel düşünme düzeyleri bağlamında analiz edilerek sunulmuştur. Bu amaçla gerçekleştirilen öğretim deneyi süresince öğrencilerde ortaya çıkan cebirsel düşünme yapıları şematize edilerek Şekil 4.1’de sunulmuştur.



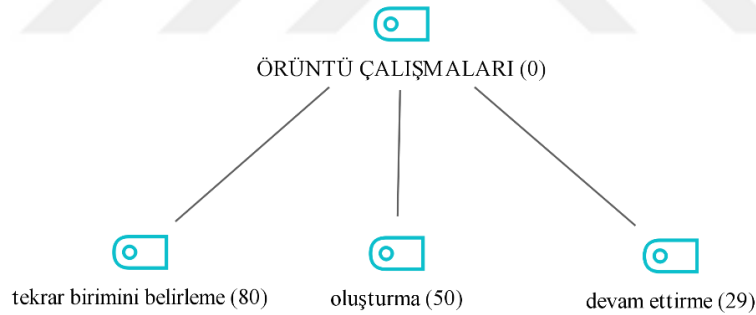
Şekil 4. 1. Cebir öğretim deneyinde öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları

Şemada görüldüğü üzere, bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyinde katılımcıların genişleyen örüntülerde örüntü oluşturma, devam ettirme ve tekrar birimini belirleme çalışmaları gerçekleştirdikleri görülmektedir. Örneğin; örüntü etkinliklerinde karışık olarak sayılar verilmiş ve öğrencilerden verilen sayıları kullanarak örüntü olma koşulundan yola çıkarak örüntü oluşturmaları ve devam etmeleri istenmiştir. Bu çalışmalar sürecinde ise öğrenciler sözel, yazılı, şekil/görsel ve cebirsal olmak üzere çoklu temsilleri kullanmışlardır. Örneğin; örüntü etkinliklerinde öğrenciler genellemeye modelleme ile şekilsel/ görsel temsil kullandıkları gibi fonksiyonel örüntü kuralını belirleme de Kare

sayısı= adım sayısı $\times 2+1$ şeklinde temsil ettikleri de görülmüştür. Genişleyen örüntülerde katılımcıların genelleme ve bu genellemelerinde ise gerekçelendirmelerde bulundukları bunlara paralel ise farklılaşan genelleme ve gerekçelendirme stratejilerinin ortaya çıktığı görülmektedir. Örneğin; “*Kareleri Diziyorum*” etkinliğinde bazı öğrenciler figural kontrol ile gerekçelendirme yaparken bazı öğrenciler ise cebirsel kontrol ile gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Nihayetinde, katılımcıların genişleyen örüntülerde cebirsel düşünmenin temeli olan fonksiyonel düşünmenin fonksiyonel düşünmenin olmadığı L0 düzeyinden başlayarak yinelemeli (L1, L2), kovaryasyonel (L3) ve ortak değişkenli düşünmenin (L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10) ortaya çıktığı ve etkili olduğu görülmektedir. Genişleyen örüntü görevlerinde öğrencilerin ortaya çıkan bu cebirsel düşünme yapıları ayrı başlıklar altında ele alınmış ve değerlendirilmiştir.

Örüntü Çalışmaları İle İlgili Bulgular

Öğrenciler gerçekleştirilen genişleyen örüntülerde örüntü oluşturma, devam ettirme ve tekrar birimini belirleme çalışmaları gerçekleştirmişlerdir. Şekil 4.2’de görüldüğü üzere yapılan kodlamaların sıklığına bakıldığında örüntü çalışmalarında en fazla (kodlama sayısı: 80) tekrar biriminin tanımlandığı görülmektedir.



Şekil 4. 2. Öğrencilerin örüntü oluşturmalarına ilişkin şemaları

Sayı örüntülerinde örüntü oluşturma çalışmalarında öğrencilere karışık olarak sayılar verilmiş ve bu sayıları kullanarak örüntü oluşturmaları istenmiştir. Öğrencilerin örnek örüntüdeki çalışmaları ve açıklamaları Tablo 4.1’de sunulmuştur.

Tablo 4. 1. “*Sayı Örüntülerinin Kuralı*” etkinliğinde örüntü oluşturma örnek çalışmaları

Hale: Ben sayıları tersten sıralamak istedim. Bu yüzden 48-39-30-21-12-12-3-0 sayılarını seçerek sıralama yaptım. O yüzden örüntü kuralı burada ‘9’ar azalan’.	48 39 30 21 12 3 0 Örüntü kuralı: 9’ar azalan
--	--

Mete: Ben farklı olarak önce kuralımı belirledim, dedim ki kural '4'er artan'. Buna göre de sayıları seçip 16-20-24-...diye sıralama yaptım.	~~16-20-24-28-32-36~~ 40-44-48	Örüntü kuralı: 4'er artan
Bade: Ben de aslında önce kuralımı belirleyip buna göre sayıları seçtim. Eğer rastgele sayıları alırsam örüntü olmazdı. 3-12-21-30...olarak örüntüyü oluşturdum, kuralı ise '9 artmış' oluyor.	~~3-12-21-30-39-48~~ 57-66-75	Örüntü kuralı: 9 artmış
Yağız: İlk gözüme çarpan sayıları seçtim, bu sayıların örüntü olabilmesi için de hepsinin arasındaki fark aynı olmalı. O yüzden 10-20-30-40-...diye sayıları sıraladım. İsterseniz 90-100-110 diye devam ettirebilirim.	~~10-20-30-40-50~~ 60-70-80	Örüntü kuralı: 10'er artan

Genişleyen örüntülerde yer verilen sayı örüntülerinde gerçekleştirilen örnek çalışmaya bakıldığında Mete, Bade ve Yağız'ın örüntü olma koşulundan yola çıkarak örüntü yapılarını oluşturdıkları görülmektedir. Bu öğrenciler ilk olarak örüntü kurallarını belirlemişler ardından belirlemiş oldukları bu kural doğrultusunda sayı örüntülerini oluşturmuşlardır. Hale'nin ise arkadaşlarından farklı olarak azalan örüntü oluşturmayı tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin örnek örüntü oluşturma çalışmalarında, örüntü olma/olmama, örüntü kuralına dayalı örüntü oluşturma ve örüntünün kuralını belirleme yapabildikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra Yağız oluşturmuş olduğu örüntüyü devam ettirebileceğini belirtmiştir. Genişleyen örüntülerde hem sayı hem de şekil örüntülerinde öğrencilerin verilen veya kendilerinin oluşturdıkları örüntüleri devam ettirmişlerdir. Bu amaçla öğrencilere ilgili örüntünün sonraki adımlarında gelmesi gereken sayı/lar ve şekil/ler sorulmuştur. Tablo 4.2'de öğrencilerin sayı örüntülerindeki örnek örüntü devam ettirme çalışmaları sunulmuştur.

Tablo 4. 2. Sayı örüntülerinde örüntü devam ettirme örnek çalışmaları

Sarp: Kural '118'den başla 5 azalt.' O yüzden önce 118'den başladım, 5 çıkardım; 113, 113'ten 5 çıkardım; 108. Böyle böyle devam ettim.	$118 \xrightarrow{-5} 113 \xrightarrow{-5} 108 \xrightarrow{-5} 103 \xrightarrow{-5} 98 \xrightarrow{-5} 93 \xrightarrow{-5} 88$
---	--

Araştırmacı: *Bu örüntüyü iki adım daha devam ettirebilir misin?*

Sarp: *Çıkarmaya devam ederim; 98-93-88.*

Mete: *Ben de önce 4 ile başladım, kuralımız '7 artan'.*

$$4 \rightarrow 11 \xrightarrow{+7} 18 \xrightarrow{+7} 25 \xrightarrow{+7} 32 \rightarrow 39 \rightarrow 46$$

O zaman; *4-11-18-25-... diye devam eder.*

Araştırmacı: *Peki, 32'den sonraki iki adım nedir?*

Mete: *39 ve 46 olur.*

Örnek örüntü çalışmasında öğrencilere örüntünün başlangıç noktası ve kuralı verilmiş ve buna dayalı olarak öğrencilerden örüntü oluşturmaları istenmiştir. Örnek olarak sunulan Sarp ve Mete'nin örüntü oluşturma çalışmalarında sıralamanın devamındaki adımlar sorulmuş ve kuralı uygulayarak devam ettirebildikleri görülmektedir. Öğrencilerin sayı örüntüsü örneğinde örüntüyü üzerine ekleme veya çıkarma işlemleri yaparak devam ettirdikleri görülmektedir.

Genişleyen örüntü çalışmalarında öğrencilerin en fazla (kodlama sayısı:80) örüntü tekrar birimini ve örüntü kuralını tanımladıkları görülmektedir. Sayı örüntüsü çalışmalarında öğrencilere 100'lük sayı tablosu verilmiş ve bu tabloda yer alan sayı örüntüleri ve ilişkilerini keşfetmeleri hedeflenmiştir. Bu duruma ilişkin örnek öğrenci açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Mert: *24-20-16-12-... şeklinde sıralama var.*

Araştırmacı: *Söylediğin sıralamada bir kural var mı?*

Mert: *Evet, 4'er azalma.*

Yağız: *Mesela dikeyde; 1-11-21-31-... burada kural, 10'ar artan. Ama eğer tersinden bakarsak aşağıdan yukarıya 10'ar azalma da yazabiliriz: 91-81-71-... şeklinde.*

Hale: *Bende soldan sağa çapraz (soldan sağa) baktım: 1-12-23-34-45-...örüntüsünü gördüm. Kuralı 11 artış.*

Bade: *Hale'nin yaptığı gibi çaprazdan baktığımda (sağdan sola) 10-19-28-37-... böyle devam ediyor. Bunda kural '9'ar artış'.*

Öğrencilerin sunulan 100'lük sayı tablosunda farklı sayı örüntülerini keşfettikleri görülmektedir. Öğrenciler, tanımlamış oldukları sayı dizilerinde ise sıralama kuralını artma/azalma ile ifade etmişlerdir. Öğrencilerin sunulan şekil örüntülerinde de tekrar

birimini benzer şekilde artma/azalma ile tanımladıkları görülmektedir. Buna ilişkin örnek çalışmalar Tablo 4.3'te sunulmuştur.

Tablo 4. 3. Şekil örüntülerinde tekrar birimini tanımlama örnek çalışmaları

Sarp: Adımdaki şekillerin sayılarını saydım. 3-5-7-9 diye sıralanmış, 3'ten 5'e 2, 5'ten 7'ye 2, 7'den 9'a 2 artmış. Öyleyse bunun kuralı '2 artış'.

Mete: Artı sayısını ve dikdörtgen sayısını ilk önce tabloya yazdım. Sonra baktığımda şunu gördüm; artı sayısı 1-2-3-4-5-... şeklinde, yani kuralı '1'er artan'.

a. Aşağıdaki tabloyu hazırlayarak Ayşe'nin bu örüntü kuralını bulmasına yardım ediniz.

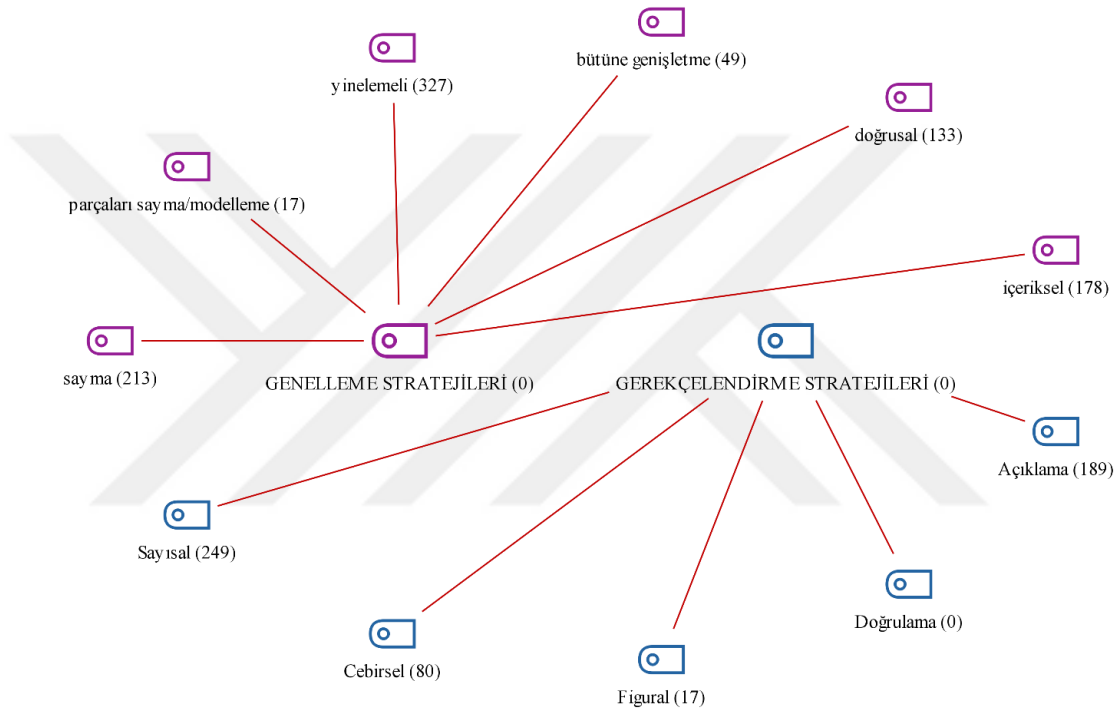
Şeklin bulunduğu adım	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
Artı sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
Dikdörtgen sayısı	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18...

Hale: Ben de aynı dikdörtgen sayısını bulmak için Mete'nin yaptığı gibi sayılara baktım; 0-2-4-6-8-10-... böyle sıralandığı için kuralı '2'ser artan'.

Sarp'ın yapmış olduğu çözüm ve açıklamalar incelendiğinde örnek örüntüdeki adımlarda yer alan şekillerin sayılarındaki artma/azalma durumuna dayalı olarak tekrar birimini tanımladığı görülmektedir. Benzer şekilde bir başka örüntü çalışmasında sunulan görselde artı sayısı ve dikdörtgen sayısına ilişkin tekrar birimini tanımlamaları istenmiştir. Bu örüntü çalışmasında, Mete ve Hale'nin sayı örüntülerinde olduğu gibi şekil sayısının sıralamasına bağlı olarak örüntü tekrar birimini artma/azalma miktarına dayalı olarak tanımladıkları görülmektedir. Öğrencilere her örüntü oluşturma ve devam ettirme etkinliklerinde “burada ne fark ettiniz? Tekrarlı durum nedir?” sorularının sorulmasının öğrencilerde tekrar birimini belirlemelerini ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin örüntü tekrar birimini tanımlamaları ile özelde çalıştıkları örnek durumun kuralını ifade etmeleri ve bu sayede genellemeye varmaları desteklenmiştir. Bu amaçla öğrencilerin gerçekleştirdikleri örüntü çalışmalarında örüntü tekrar birimini ve/veya örüntü kuralını tanımlamaları hedeflenmiştir. Bu sayede örüntü yapısına ilişkin genellemeye ulaşmaları desteklenmiş ve deneyim sahibi olmaları sağlanmıştır.

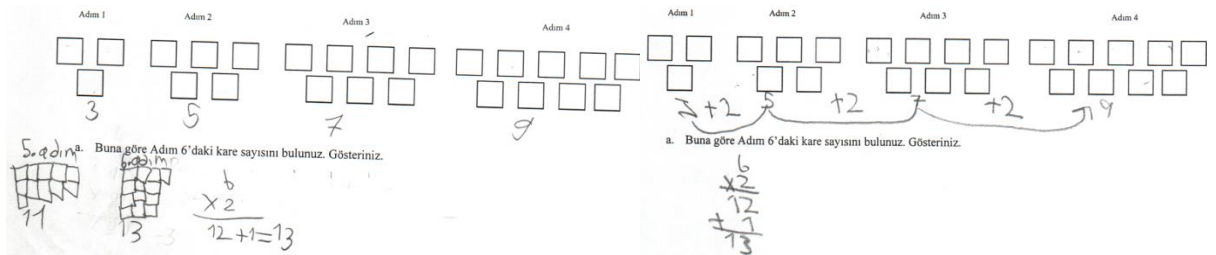
Genelleme ve Gerekçeleştirme Stratejileri İle İlgili Bulgular

Genişleyen örüntü görevlerinde gerçekleştirilen örüntü oluşturma, devam ettirme, tamamlama ve tekrar birimini tanımlama çalışmalarında öğrencilerin genelleme yaptıkları görülmektedir. Öğrencilerin genelleme ve gerekçeleştirme stratejilerine ilişkin şemada (Şekil 4.3) modelleme/sayma, yinelemeli/eklemeli, bütüne genişletme, içeriksel ve doğrusal genelleme yaklaşımlarını kullandıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrenciler genellemeye varmalarında figural, sayısal ve cebirsel doğrulamalar yapmışlar ve açıklamalar yolu ile de gerekçelerini sunmuşlardır.



Şekil 4. 3. Öğrencilerin genelleme ve gerekçeleştirme stratejilerine ilişkin şemaları

Öğrencilerin çalışma kağıtlarında yer alan örnek bir çalışmada yakın adım olan 6. adımdaki kare sayısı sorulmuştur. Bu örnek şekil örüntüsünde Mete ve Yağız'ın örnek çözüm ve açıklamaları Şekil 4.4'te sunulmuştur.

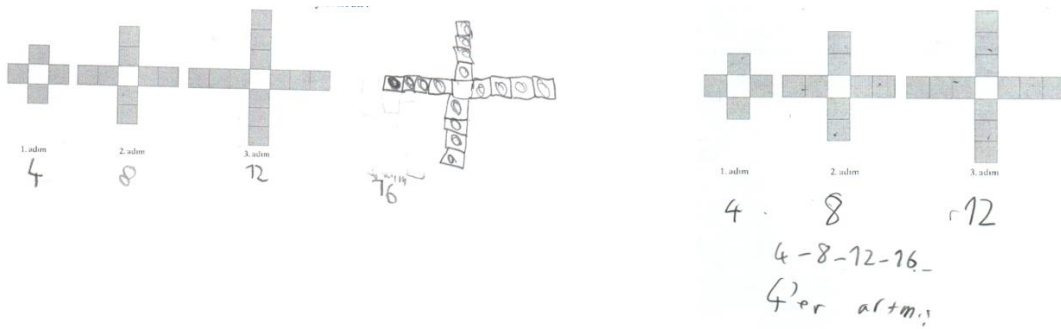


Şekil 4. 4. Modelleme/sayma ve bütüne genişletme genelleme stratejileri örnek çalışmaları

Mete: Adımdaki şekilleri saydım; 1. adımda 3, 2. adımda 5, 3. adımda 7, 4. adımda 9 tane kare var. O zaman 5. adımda 11 tane, 6. adımda 13 tane olacak. Çizerek baktım bunlara.

Yağız: Ben karelerin sayısını yazdım, sonra baktım ki aralarında 2'şer artış var. Eğer 2'şer artış varsa 6. adımdaki sayıyı bulmak için '2 ile çarparım' dedim. Sonra, adımlarda sağlıyor mu diye baktım 1. adımı 2 ile çarptığımda 2, ama kutu sayısı 3 olduğu için 'demek ki 1 fazlası olacak' dedim. Bunu diğer adımlarda da denediğimde sağladı. O yüzden 6. adımı bulmak için $6 \times 2 = 12$, $12 + 1 = 13$ yaptım.

Aynı örüntü görevinde iki farklı öğrenci farklı genelleme ve gerekçelendirme stratejileri ile sunulan örüntüdeki istenilen yakın adımı bulma çalışmaları yapmışlardır. Buna göre, Mete'nin çözüm ve açıklamaları incelendiğinde 6. adımı bulmada modelleme yaptığı ve örüntüdeki kareleri saydığı görülmektedir. Bu sayede öğrenci genellemede modelleme, gerekçelendirmede ise figural kontrol stratejilerini kullanmıştır. Yağız ise çözümünde öncelikle tekrar birimini tanımlamış (+2) ve ardından bu tekrar birimini diğer adımlara genişletmiştir ($\times 2$). Öğrencinin bütüne yaptığı genişletmesinin ardından ise artma/azalma durumunu da gözeterek doğrusal bir fonksiyona ($\times 2 + 1$) ulaştığı görülmektedir. Bu bulgulara dayalı olarak Yağız'ın bu örnek örüntüde doğrusal genelleme stratejisini kullandığı sonucuna ulaşılmaktadır. Öğrencinin doğrusal fonksiyona ulaşmadaki açıklamalarında ise, diğer adımlarda kuralın geçerliliğini kontrol ettiği ve doğruluğunu sağladığını belirterek sayısal kontrol yaptığı görülmektedir. Bu sayede, Yağız'ın örnek örüntüdeki örüntü kuralına ilişkin genellemesinde sayısal kontrol gerekçelendirmesi yaptığı sonucuna ulaşılmaktadır. Benzer şekilde yakın adımın sorulduğu bir başka örüntü çalışmasında Bade ve Mete'nin örnek çalışmaları Şekil 4.5'te sunulmuş ve genelleme ve gerekçelendirme stratejileri değerlendirilmiştir.



Şekil 4. 5. Modelleme/sayma genelleme stratejisi örnek çalışması

Bade: 4. adım sorulduğu için çizebilirim diye düşündüm. Verilen adımlara baktım; 1. adımda ortada 1 tane beyaz, o beyaz kutunun etrafında 1'er tane siyah toplamda 4 tane kare var. 2. adımda 8 tane, 3. adımda 12 tane siyah kare var. Demek ki 4. adımın her tarafında 4 tane siyah kare olacak. Önce çizdim, sonra da saydım. Toplam siyahlar 16 tane.

Mete: Sadece toplam siyah karelere baktım. 1. adımda 4, 2. adımda 8, 3. adımda 12. Demek ki sıralama '4-8-12-16-...' diye devam edecek yani 4'er artmışlar.

Örnek örüntü çalışmasında Bade yakın adımı bulmada çizim yapmasının daha kolay olabileceğini belirtmiş ve bu amaçla modeldeki beyaz ve siyah kareleri sayarak çizimini gerçekleştirmiştir. Ardından sayma yoluyla adımda olması gereken siyah kare sayısını bulmuştur. Bu sayede öğrenci modellemeye dayalı genellemede bulunurken, gerekçelendirmesinde şekilsel/görsel kontrol yapmış ve cevabının doğruluğunu açıklamıştır. Bu çözümün yanı sıra, Mete'nin adımlardaki siyah karelerin sayısındaki artış miktarına dayalı 4. adımı bulduğu görülmektedir. Mete'nin bu cevabına ilişkin ise neden doğru olduğuna dair açıklamalar yolu ile gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Öğrencilere bir başka örüntü sunulmuş ve bu örüntüde benzer şekilde Hale modelleme yolu ile genellemeye ulaşırken Mete'nin yinelemeli kontrol ile genelleme yaptığı görülmektedir (Şekil 4.6).



Şekil 4. 6. Modelleme/sayma ve yinelemeli genelleme stratejileri örnek çalışması

Sunulan örnek örüntü çalışmasında öğrencilere “resimdeki tavşan her sıçrayışta 2 kayadan atlayabilmektedir. Buna göre, tavşan 8. atlayışında toplam kaç kayadan atlamış olur?” sorusu yöneltilmiştir. Bu soruya ilişkin Hale'nin çözümünde kaya ve tavşan atlayışlarını modellediği, Mete'nin ise atlayış yapılan kaya sayılarının dizilimini yaptığı görülmektedir. Buna dayalı olarak Hale'nin örüntü çalışmasında modelleme/sayma yolu ile Mete'nin ise yinelemeli bir yaklaşımla genellemeye ulaştıkları sonucuna ulaşılmaktadır.

Yakın adım örüntü çalışmalarının yanı sıra uzak adıma ilişkin çalışmalar da gerçekleştirilerek öğrencilerin bu örüntülerdeki genelleme ve gerekçelendirme stratejileri

incelenmiştir. Bu amaçla Şekil 4.7’de sayı ve şekil örüntülerinde öğrencilerin örnek çalışmaları ve açıklamalarına yer verilmiştir.

6-11-16-21-26

Sayının bulunduğu adım	1	2	3	4	5	20
Kural	$\times 5 + 1$	$\times 5 + 1$	$\times 5 + 1$	$\times 5 + 1$	$\times 5 + 1$	$\times 5 + 1$
Sayı örüntüsü	6	11	16	21	26	101

Şekil 4. 7. Doğrusal/fonksiyonel genelleme stratejisi örnek çalışması

Sunulan sayı örüntüsü çalışmasında öğrencilerin tablo dönüşümü yapmaları ve bu sayede adım sayısı-sayı değeri arasındaki ilişkisel duruma dayalı örüntü kuralını keşfetmeleri desteklenmiştir. Örnekteki örüntüde, Sarp’ın sayının bulunduğu adımdan yola çıkarak örüntüdeki sayıya ulaşmada ‘ $\times 5 + 1$ ’ kuralını keşfettiği görülmektedir. Bu örüntü yapısına ilişkin Sarp’ın açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Sarp: Sayının bulunduğu adımdan sayıya nasıl ulaşabilirim’ diye düşündüm. Daha önceden yaptığımız gibi sayılardaki artışa baktım: 6-11-16-21-26-... Artış 5, demek ki kuralda ‘ $\times 5$ olacak’ dedim. Sonra bu kuralı 1. adımda denedim; $1 \times 5 = 5$. 6’yı bulmak için o zaman $+1$ de olacak. Yani kural ‘ $\times 5 + 1$ ’ olmalı. Bunu diğer adımlarda da denediğimde sağladı. 20. adımı da böyle buldum; $20 \times 5 = 100$, $100 + 1 = 101$.

Örnek örüntüde öğrencinin çözüm ve açıklamaları incelendiğinde ‘ $\times 5 + 1$ ’ fonksiyonel kuralı keşfettiği ve keşfettiği bu kurala dayalı olarak 20. adımdaki sayıyı bulduğu görülmektedir. Buna göre Sarp’ın sayısal kontrole dayalı gerekçelendirme yaptığı sonucuna ulaşılmaktadır. Benzer bir örüntü görevinde öğrencilere sayıların dizilimi verilmiş ve 20. adımdaki sayı değeri sorulmuştur. Bu örüntüye ilişkin Yağız’ın çözümü ve açıklamaları Şekil 4.8’de sunulmuştur.

8-17-26-35-44

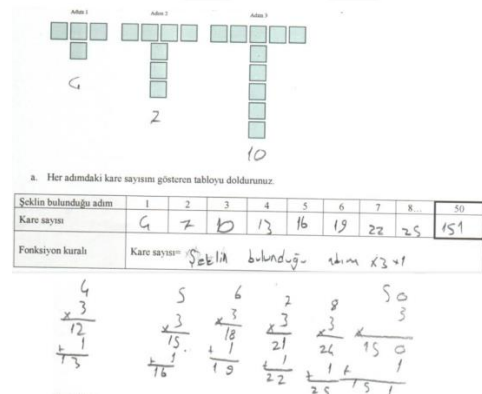
Sayının bulunduğu adım	1	2	3	4	5	20
Kural	$\times 9 - 1$	$\times 9 - 1$	$\times 9 - 1$	$\times 9 - 1$	$\times 9 - 1$	$\times 9 - 1$
Sayı örüntüsü	8	17	26	35	44	171

Şekil 4. 8. Doğrusal/fonksiyonel genelleme stratejisi örnek çalışması

Yağız: Ben 20. adımdaki sayıyı bulmak için önce bu örüntünün kuralını bulmak istedim. Kuralı bulabilmek için de tablo yaptım, çünkü daha kolay anlarım. Önceden yaptığımız gibi adım sayısı ile sayıları sıraladım. İlk önce sayılardaki artışa baktım; 9, öyleyse kuralda ' $\times 9$ olacak'. $1 \times 9 = 9$ ama 1. adımdaki sayı 8, demek ki -1 olacak. Öyleyse kural ' $\times 9 - 1$ ' olacak diyerek diğer adımlarda da denedim. Sağladığını görünce emin oldum. 20. adımı bulmak için de bu kuralı uyguladım, sonuç 179.

Sunulan bu örnek örüntü çalışmasında öğrencilere sadece sayıların dizilimi verilerek uzak adım olan 20. adımı bulmaları istenmiştir. Yağız'ın bu örüntüdeki çalışmasına bakıldığında sayılar arası ilişkileri ve adım sayısı-sayı değeri arasındaki ilişkiyi ortaya koymada kolaylaştırıcı olarak tablo gösterimi yapmayı tercih ettiği görülmektedir. Bu çözüm yaklaşımı ile öğrenci ' $\times 9 - 1$ ' şeklinde örüntü kuralına ilişkin sayısal yolla genellemeye ulaşmıştır. Öğrencinin bu doğrusal fonksiyon tanımında ise adımlara dayalı sayısal işlemler gerçekleştirerek doğruluğunu açıkladığı görülmektedir. Gerçekleştirilen bir başka şekil örüntüsü çalışmasında ise Bade'nin içeriksel yolla genellemeye ulaştığı görülmektedir. Buna ilişkin öğrencinin çözüm ve açıklamaları Şekil 4.9'da sunulmuştur.

Bade: Önce sayılardaki artışa baktım; +3. Demek ki kuralda ' $\times 3$ olacak' ama artma/azalma var mı diye bakmam lazım. İlk önce 1. adımda denedim; $1 \times 3 = 3$ ama sonuç 4 olduğu için +1 olacak. Kare sayısını bulmak için kuralı ' $\text{şeklin bulunduğu adım} \times 3 + 1$ ' diye yazdım. 50. adım bulmak için de işlemleri yaptım.



Şekil 4. 9. İçeriksel genelleme stratejisi örnek çalışması

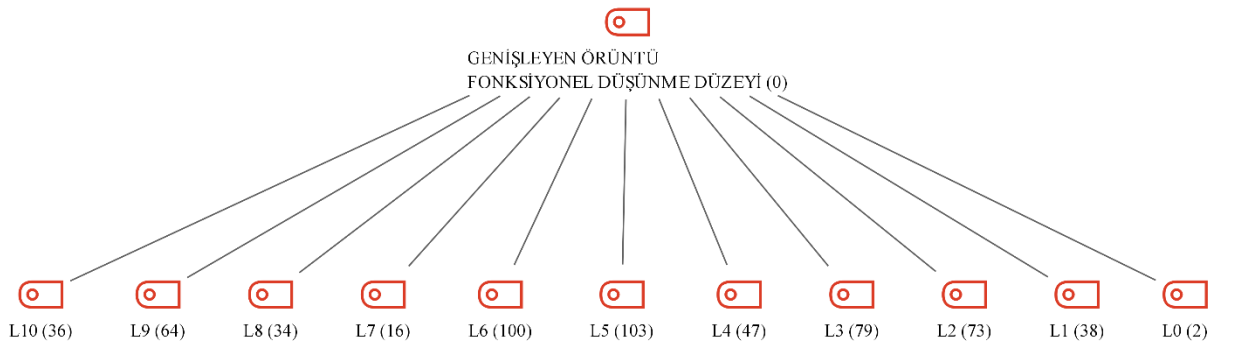
Bade'nin sunulan şekil örüntüsü çalışmasındaki çözüm ve açıklamalarına bakıldığında ilk önce artış miktarından yola çıkarak bütüne genişletme yaptığı, ardından çarpımsal durumu adım sayısı-kare sayısı ile deneme yaparak fonksiyonel bir bağıntıya ulaştığı görülmektedir. Öğrencinin tanımlamış olduğu ' $\text{şeklin bulunduğu adım} \times 3 + 1$ ' kuralında sembolleştirme olmaksızın içeriksel genelleme yaptığı görülmektedir. Bu

genellemesine ilişkin ise öğrenci sayısal kontrol yaparak doğruluğunu ortaya koymuş ve neden doğruluğunun sağlandığına ilişkin açıklamalar yolu ile gerekçelendirmede bulunmuştur.

Yakın adım ve uzak adım örüntü çalışmalarında öğrencilerin genelleme ve gerekçelendirme stratejileri incelendiğinde, yakın adımdaki örüntü birimini bulmada modelleme/sayma, yinelemeli ve bütüne genişletme genelleme stratejilerini kullanırlarken uzak adımdaki birimi bulmada ise doğrusal ve içeriksel genelleme stratejilerini kullandıkları görülmektedir. Bu sayede farklılaşan örüntü çalışmalarının öğrencilerin farklı genelleme stratejilerini ortaya çıkarmada etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Genelleme stratejilerine paralel olarak öğrencilerin gerekçelendirme stratejilerinin farklılaştığı görülmektedir. Öğrencilerin modelleme/sayma ve yinelemeli genellemelerinde figural kontrol ya da niçin doğru olduğuna dair açıklamalar yaptıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra içeriksel veya doğrusal genellemelerinde ise sayısal veya cebirsel kontroller ile gerekçelendirmelerde bulundukları görülmektedir. Buna dayalı olarak öğrencilerin genelleme stratejileri ve gerekçelendirme yollarının birbirleriyle ilişkisel olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Fonksiyonel Düşünme Düzeyleri İle İlgili Bulgular

Bu çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyinde öğrencilerin ortaya çıkan fonksiyonel düşünme düzeyleri şematize edilerek Şekil 4.10'da sunulmuştur.



Şekil 4. 10. Öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerine ilişkin şema

Şemada görüldüğü üzere öğrencilerin yinelemeli, kovaryasyonel ve ortak değişkenli olmak üzere her aşamada fonksiyonel düşünmelerinin etkili olduğu görülmektedir. Buna dayalı olarak gerçekleştirilen örüntü çalışmalarının öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Örnek örüntü

çalışmaları ve bu çalışmalarda ortaya çıkan öğrencilerin fonksiyonel düşünceleri bu başlık altında örneklendirilerek incelenmiştir.

Öğrencilerin gerçekleştirilen genişleyen örüntü çalışmalarında fonksiyonel düşüncelerinin olmadığı durumların oldukça az (kodlama sayısı: 2) olduğu görülmektedir. Bu az ortaya çıkan duruma ilişkin örnek durumlar Tablo 4.4'te sunulmuştur.

Tablo 4. 4. L0 düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Sarp: Bir masada 2 kişi oturuyormuş, 1 masa-2 kişi, 1 masa-2 kişi gibi mi tekrarlayacağız? (L0)	
Hale: İlk önce 3 arttı, sonra 5 arttı. O zaman tekrar 3 sonra yine 5 artması gerekecek.(L0)	

Öğrencilerin masa-oturan kişi sayısı arasındaki ilişkileri keşfetmelerinin hedeflendiği çalışmada, Sarp çözümünde 1-2-1-2-.. şeklinde yinelemeli bir düşünme ile çözüm yaklaşımı göstermiştir. Benzer şekilde Hale'nin de ilgili örüntüde Sarp gibi 3-5-3-5-... şeklinde yinelemeli düşündüğü görülmektedir. Buna göre öğrencilerin çözümlerine bakıldığında (Tablo 4. 4) herhangi bir fonksiyonel düşünmenin olmadığı görülmektedir. İlgili örüntü çalışmalarında öğrencilerin yapmış oldukları çözüm ve açıklamalar incelendiğinde yinelemeli düşünme eğiliminde oldukları fakat doğru bir düşünsel yaklaşım izlemedikleri görülmektedir.

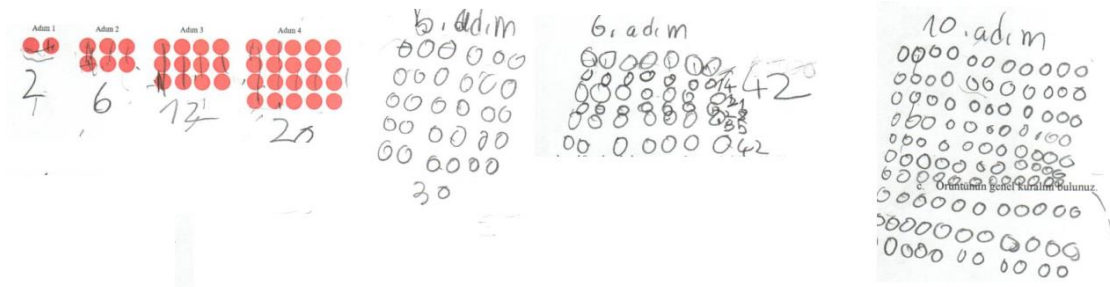
Genişleyen sayı ve şekil örüntülerinde yer verilen farklı çalışmalara bakıldığında öğrencilerin yinelemeli düşüncelerinin (L1-L2) ortaya çıktığı görülmektedir. Öğrencilerin bu düşünme düzeylerine ilişkin örüntü çalışmaları ve açıklamaları Tablo 4.5'te örneklendirilmiştir.

Tablo 4. 5. Yinelemeli (L1-L2) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Mete: Burada ilk olarak 16 ve 19'a baktım; fark 3. Aralarında üç adım olduğu için demek ki '1'er artma' var. (L2) O zaman 16-17-18-19 olacak. Yatayda 1 arttığını bulunca da diğer sıradaki sayıları da yazdım. Sonra	
---	--

dikeydeki kuralı bulmak için de 16-26'ya baktım, farkları 10.

Dikeyde kural 10'ar artar. (L2)



Mert: Burada adımdaki noktaları saydım. İlk önce 2-6-12-20. (L1) Sonra şunu gördüm; yatay 2-3-4-5 olmuş, demek ki 6-7-8-9-10 (L1) diye devam edecek. Dikeyde 1-2-3-4, o zaman 5-6-7-8-9 olacak. (L1) Böyle çizip de gösterdim. Sonra noktaları sayıp 5, 6, 10. adımları buldum.

Örnek örüntü çalışmalarında öğrencilerin L1 ve L2 düzeylerinde farklılaşan yinelemeli düşünme düzeylerinin etkili olduğu görülmektedir. Mete'nin sayı örüntüsü çalışmasında örüntü kuralını 'yatayda 1'er artıyor, dikeyde 10'ar artıyor' şeklinde artma miktarını tanımladığı görülmektedir. Buna dayalı olarak Mete'nin ilgili örüntü çalışmasında L2 fonksiyonel düşünme düzeyinde olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Gerçekleştirilen örnek şekil örüntüsü çalışmasında ise Mert'in şekillerin ardışık sıralamasına dayalı örüntü oluşturarak modellemeye dayalı örüntüyü devam ettirdiği görülmektedir. Buna dayalı olarak Mert'in L1 düzeyinde düşünmesinin ortaya çıktığı söylenebilir. Öğrencilerin yinelemeli düşüncelerinin yanı sıra değişkenler arasındaki ilişkileri artma/azalma miktarlarına dayalı olarak ifade ettikleri ve bu sebeple kovaryasyonel (L3) düşüncelerinin ortaya çıktığı görülmektedir (Tablo 4.6).

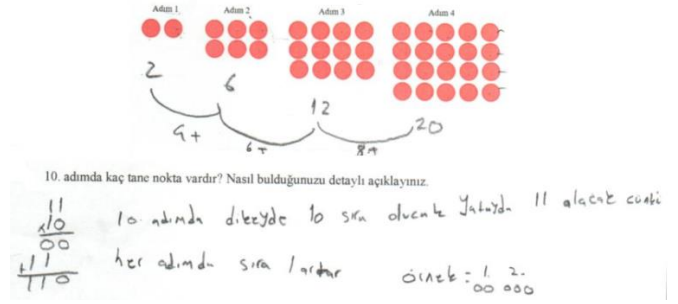
Tablo 4. 6. Kovaryasyonel (L3) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Bade: Adımlardaki artı sayılarına baktığımda; 1. adımda 1 artı, 2. adımda 2 artı, 3. adımda 3 artı var. Yani adım sayısı ile artı sayısı aynı oluyor. (L3)

Şeklin bulunduğu adım	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...	12
Artı sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12

Adım sayısı ile artı sayısı aynıdır

Yağız: Yataydaki noktalar dikeydeki noktalardan bir fazla. O yüzden 10. adımı bulmak için 11×10 yaptım. (L3)

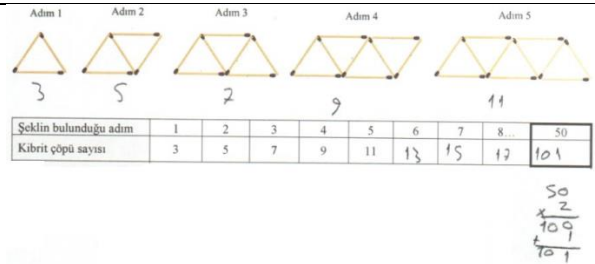


Gerçekleştirilen örnek şekil örüntüsü çalışmalarında Bade'nin adım sayısı ve şekilde yer alan artı sayısı arasında "adım sayısı ile artı sayısı aynı" şeklinde iki değişken arasında toplamsal ilişkilendirme yaptığı görülmektedir. Benzer şekilde bir başka örüntü de Yağız "yataydaki noktalar, dikeydeki noktalardan 1 fazla" şeklinde yatay ve dikey nokta sayısı arasında ilişkilendirmede bulunmuştur. Buna göre, öğrencilerin örnek örüntülerde değişkenler arası toplamsal ilişkilendirme yaptıkları ve bu ilişkilendirmelerinde kovaryasyonel (L3) düşüncelerinin etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

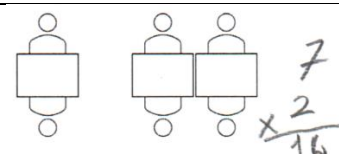
Şekil örüntülerinde yakın adım veya uzak adım sorulduğunda bazı örüntü çalışmalarında öğrencilerin sadece bu adıma özgü fonksiyonel işlem gerçekleştirdikleri görülmektedir. Örneğin, kibrit çöpleri ile oluşturulmuş genişleyen bir örüntüde öğrencilerden 50. adımı bulmaları istenmiştir. Bu soruda Yağız ve Bade'nin örnek çözüm ve açıklamaları Tablo 4.7'de verilmiştir.

Tablo 4. 7. L4 düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Yağız: 50. adım istenmiş. İlk önce her adımdaki kibrit çöpü sayısını yazdım, aralarındaki artışı görünce bu artışla çarpacağımı biliyorum. Kolayca $50 \times 2 = 100 + 1 = 101$ yapıp buldum. (L4)



Bade: 1 masada 2 kişi oturuyorsa 7 masada oturanı bulmak için 7 ile 2'yi çarptım. (L4)

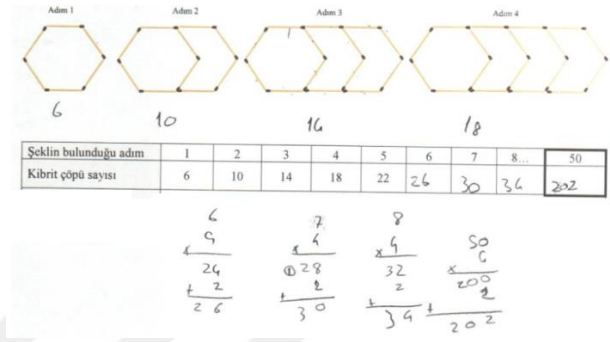


Örnek örüntü çalışmasında Yağız'ın örüntü kuralına ilişkin genellemeye ulaştığı ve bu genellemeye dayalı doğrudan ve sadece istenilen adımdaki toplam kibrit çöpü sayısını bulduğu görülmektedir. Benzer şekilde Bade'nin de orantı yolu ile genelleme varması sonucu tek bir adımda istenen terimi bulmuştur. Bu bulgulara dayalı olarak

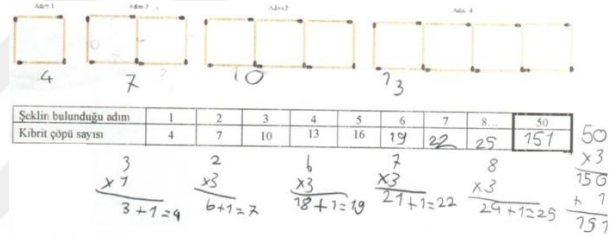
öğrencilerin bu örüntü çalışmalarında tek bir adıma odaklı fonksiyonel çözüm yapmaları ile L4 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Benzer şekilde gerçekleştirilen adım sayısına bağlı genişleyen kibrit çöpü sayısı örüntü çalışmalarında Hale ve Mete'nin örnek çözüm ve açıklamaları Tablo 4.8'de sunulmuştur.

Tablo 4. 8. Ortak değişkenli (L5) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Hale: Kibrit çöplerini saydım; 6, 10, 14, 18. Önceden de yaptığım gibi ilk önce artışa baktım 4, $\times 4$ olacak. Sonra 1. adımda yapıp kuralı buldum; $\times 4 + 2$. Tabloda boş bırakılan adımları çarpıp toplayıp buldum, sonra da 50. Adımı buldum. (L5)



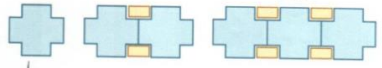
Mete: Bende burada aynı şekilde kuralı buldum; $\times 3 + 1$. Her adımda bu işlemleri yaptım sonra da 50. adımı buldum. (L5)



Bir önceki örnekte Yağız'ın tek bir adımda fonksiyonel işlem gerçekleştirerek sadece istenen adımı bulduğu görülmektedir. Hale ve Mete ise çözümünde genellemeye ulaştıkları doğrusal örüntü kuralını ardışık olarak adımlarda uyguladıkları görülmektedir. Fakat hem Yağız hem de bu örneklerde incelenen Hale ve Mete'nin değişkenler (adım sayısı-kibrit çöpü sayısı) arası ilişkilendirme yapmadan sadece fonksiyonel işlemler gerçekleştirdikleri görülmektedir. Bu sayede Hale ve Mete'nin bu örnek örüntü çalışmasında L5 düzeyi fonksiyonel düşüncelerinin etkili olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Bunun yanı sıra öğrencilerin daha gelişmiş fonksiyonel düşüncelerinin etkili olduğu örüntü çalışması örnekleri de bulunmaktadır. Tablo 4.9'da verilen örnek örüntülerde bu duruma ilişkin örnek öğrenci çözüm ve açıklamaları sunulmuştur.

Tablo 4. 9. Ortak değişkenli (L6-L7/8) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Mert: Burada artının sayısını bulmak için kural; $\times 2 - 2$. (L6)



a. Aşağıdaki tabloyu hazırlayarak Ayşe'nin bu örüntü kuralını bulmasına yardım ediniz.

Şeklin bulunduğu adım	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...	12
Artı sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Dikdörtgen sayısı	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	22
Artı sayısının kuralı	Adım sayısı ile aynıdır. Artı sayısı = adım sayısı										
Dikdörtgen sayısının kuralı	Adım sayısı $\times 2 - 2$ dir.										

Mete: *Dikdörtgenler 2'ser 2'ser artmış. O yüzden $\times 2$. Sonra $1 \times 2 = 2$, ama burası (1.adım) 0 olmalı o yüzden '-2' de olacak. Kuralı 'adım sayısı $\times 2 - 2$ ' diye buldum.* (L7/8)

Dikdörtgen sayısının kuralı	Adım sayısı $\times 2 - 2$
-----------------------------	----------------------------

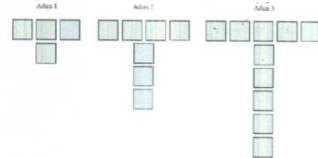
Hale: *Ben de böyle buldum. Bu yüzden 'adım sayısını 2 çarpar 2 eksiltirim' yazdım.* (L7/8)

Dikdörtgen sayısının kuralı	adım sayısını 2 çarpar 2 eksiltirim
-----------------------------	-------------------------------------

Sunulan örüntü çalışmasında öğrencilerin çözümlerine bakıldığında Mert'in örüntü kuralını fonksiyonel olarak tanımladığı fakat değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi açıklamadığı görülmektedir. Buna göre Mert'in bu çalışmada L6 düzeyinde fonksiyonel düşünmesinin etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bunun yanı sıra Mete ve Hale'nin örüntü kuralını adım sayısına bağlı olarak yazılı ve sözel temsil ederek 'adım sayısı $\times 2 - 2$ ' genellemesine ulaştıkları görülmektedir. Öğrencilerin tek değişkene dayalı yapmış oldukları bu genellemeleri sonucunda L7/8 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Öğrencilerin ileri fonksiyonel düşüncülerinin etkili olduğu bir başka örnek çalışmada ise Mete'nin tek değişkene dayalı fonksiyonel genelleme yaptığı ve L7/8 düzeyinde olduğu görülmektedir (Tablo 4.10).

Tablo 4. 10. Ortak değişkenli (L7/8) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

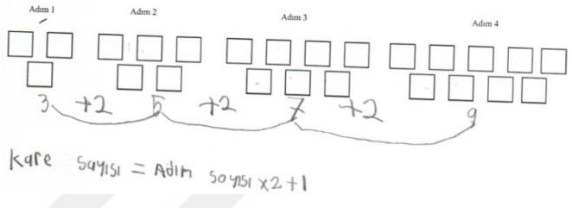
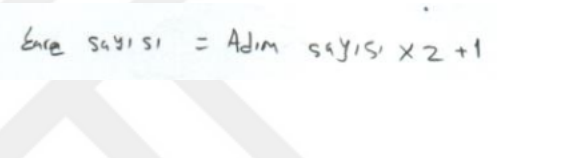
Mete: *Önce kare sayılarının arasındaki farka baktım +3. Demek ki adım sayısı $\times 3$ olacak. Artı/eksi olacak mı diye bulmak için de 1. adımda $1 \times 3 = 3$ sonuç 4 olduğu için +1. Kural; adım sayısı $\times 3 + 1$ ' (L7/8)*



Şeklin bulunduğu adım	1	2	3	4	5	6	7	8...	50
Kare sayısı	1	4	9	16	25	36	49	64	2501
Fonksiyon kuralı	Kare sayısı = Adım sayısı $\times 3 + 1$								

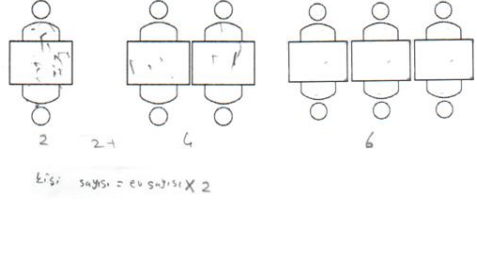
Örnek örüntü çalışmasında Mete'nin daha önce de yaptığı gibi adımlar arasındaki farktan yola çıkarak bütüne genişletme yaptığı ardından deneme yolu ile doğrusal fonksiyona ulaştığı görülmektedir. Öğrencinin ilgili örüntüdeki kuralı sözel ve yazılı olmak üzere temsil etmesi sonucunda L7/8 fonksiyonel düşünmesinin etkili olduğu görülmektedir. Mete'nin tek değişkene dayalı ulaştığı bu örnek genellemesinin yanı sıra iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi ortaya koyduğu örnek durumlar da görülmektedir (Tablo 4.11).

Tablo 4. 11. Ortak değişkenli (L9/10) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Mete: <i>Karelerin sayıları adımla değişmiş. Her adımda 2'şer artmış. Yine yaptığım gibi buldum; karelerin sayısını bulmak için 2 ile çarpıp 1 ekleyeceğim.</i> (L9/10)	
Bade: <i>Adım sayısını 2 ile çarpıp 1 eklediğimde kare sayısını buluyorum.</i> (L9/10)	

Tablo 11'de adım sayısına göre değişen kare sayılarının yer aldığı çalışmada Mete ve Bade'nin örnek çalışmaları sunulmuştur. Çalışmada Mete'nin kare sayısı ile adım sayısı arasındaki değişime odaklanarak açıklama yaptığı ve bu değişimi doğrusal fonksiyonla temsil ettiği görülmektedir. Benzer şekilde aynı çalışmada Bade de adım sayısının 2 katının 1 fazlasının kare sayısını verdiğini sözel olarak açıklamış ve bunu doğrusal denklem yazarak da temsil etmiştir. Öğrencilerin bu çalışmada değişkenler arasında fonksiyonel ilişki kurmaları ve bu ilişkisel durumu sözel ve cebirsel olarak tanımlamaları ile L9/10 düzeylerinde oldukları görülmektedir. Öğrencilere sunulan bir başka şekil örüntüsünde Hale'nin de iki değişken arası fonksiyonel ilişkiyi tanımladığı görülmektedir (Tablo 12).

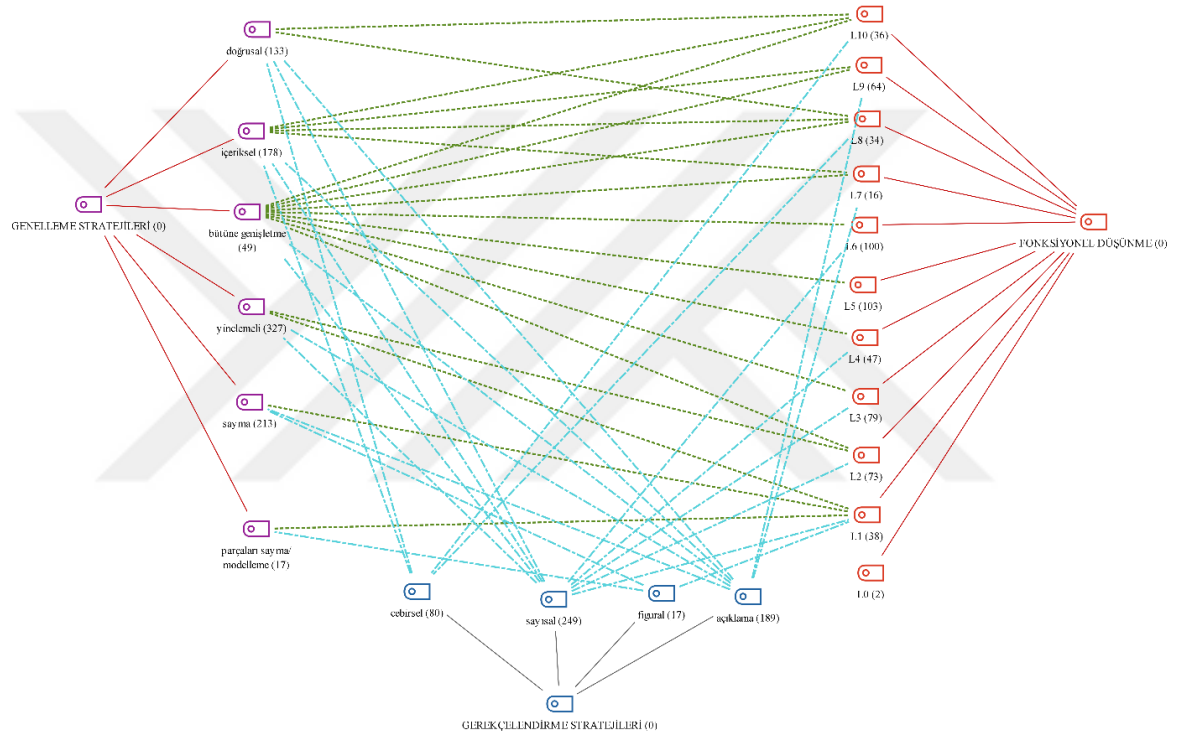
Tablo 4. 12. Ortak değişkenli (L9/10) düşünme düzeyine ilişkin örnek örüntü çalışmaları

Hale: <i>1. masada 2, 2. masada 4, 3. masada 6 kişi. Artışı buldum +2, demek kuralda $\times 2$ olacak. Adım sayısını 2 ile çarpınca kişilerin sayısını veriyor. O yüzden kişi sayısını bulmak için adım sayısı 2 ile çarpılacak.</i> (L9/10)	
---	--

Öğrencinin örüntüdeki çözüm ve açıklamalarına bakıldığında iki değişken (masa sayısı-kişi sayısı) arasında ilişkisel düşündüğü ve bu ilişkisel durumu sözel ve cebirsel olmak üzere temsil ettiği görülmektedir. Bu doğrultuda öğrencilerde ilgili örüntü çalışmasında L9/10 fonksiyonel düşünmesinin etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Cebirsel Düşünme Yapıları Arasındaki İlişki İle İlgili Bulgular

Bu çalışmada gerçekleştirilen cebir öğretim deneyinde, öğrencilerde etkili olan genelleme stratejileri, gerekçelendirme yolları ve fonksiyonel düşünme düzeyleri arasındaki ilişki incelenmiş ve bu ilişkisel durum Şekil 4.11’de sunulmuştur.



Şekil 4. 11. Öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları arasındaki ilişki

Şematize edilen bu yapı incelendiğinde doğruşal genelleme stratejisinin öğrenciler tarafından cebirsel, sayısal ve açıklamalar yolu ile gerekçelendirildiği görülmektedir. Aynı zamanda öğrencilerin doğruşal genelleme ile L8 ve L10 fonksiyonel düşünme düzeylerinin ilişkisel olduğu ortaya çıkmaktadır. Genelleme stratejileriden içeriksel genelleme yolu incelendiğinde cebirsel, sayısal ve açıklamalar yolu ile gerekçelendirmelere dayandırıldığı ve bu genelleme yolunun L7/8 ve L9/10 fonksiyonel düşünme düzeyleri ile ilişkisel olduğu görülmektedir. Bütüne genişletme genelleme stratejisinin ise sayısal ve açıklamalar yolu ile gerekçelendirildiği ve L2, L3, L4, L5, L6, L7/8 ve L9/10 fonksiyonel düşünme düzeyleri ile ilişkili olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra yinelemeli genellemede

öğrenciler sayısal ve açıklamalar yolu gerekçelendirme yaparken, sayma yolu ile genellemeye varmada figural ve açıklamalar yolu ile gerekçelendirmeler yapıldığı görülmektedir. Bu iki genelleme stratejisinin fonksiyonel düşünme ile ilişkisine bakıldığında ise yinelemeli genellenenin L1 ve L2, sayma genellemesinin ise sadece L1 ile ilişsel olduğu ortaya çıkmaktadır. Son olarak parçaları sayma/modelleme genellemesinin L1 fonksiyonel düşünme düzeyiyle ilişsel olduğu ve bu genellemede sadece figural gerekçelendirmelerin yapıldığı görülmektedir. Bu sonuçlara dayalı olarak fonksiyonel düşünme düzeylerinin gelişmişliği ile genelleme ve gerekçelendirme stratejilerinin karmaşıklığı arasında doğrusal bir ilişkinin olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.



5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 4. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi amacıyla erken cebir öğretim deneyi gerçekleştirilmiş ve bu öğretim süresince öğrencilerin etkili olan genelleme ve gerekçelendirme stratejileri ve fonksiyonel düşünme düzeyleri ortaya konulmuştur. Bu bölümde öğrencilerin etkili olan cebirsel düşünme yapıları sonucunda öğretim deneyinin etkililiği literatür ile ilişkilendirilerek tartışılacak ve öneriler sunulacaktır.

Örüntü Çalışmalarına İlişkin Sonuçlar

Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyi içeriğinde genişleyen şekil örüntüleri ile artan veya azalan sayı örüntülerine yer verilmiştir. Öğrenciler genişleyen örüntülerde örüntü oluşturma, eksik bırakılan öğeyi tamamlama, devam ettirme, kuralı verilen örüntüyü oluşturma ve örüntü tekrar birimini tanımlama çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin örüntü çalışmalarında ise yazılı, sözel ve görsel olmak üzere çeşitli temsil araçlarını kullanmıştır. Öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerinde örüntü tekrar birimini belirleme ve örüntü kuralına ulaşmada destekleyici öğretim unsuru olarak tablo kullanımlarına yer verilmiştir. Buna paralel öğrencilerin özellikle şekil örüntülerinde, adım sayısına bağlı nesne sayısı arasında ilişki kurmada çözümlerinde tablo dönüşümü yapmayı tercih etmişlerdir. Aynı zamanda öğrencilerin çözüm yollarında matematiksel işlemlere dayalı çözümler geliştirdikleri ve cebirsel olarak doğrusal denklem oluşturdukları görülmektedir. Bu sonuçlara dayalı olarak öğrencilerin öğretim deneyi süresince çoklu temsilleri kullandıkları ve çoklu temsiller arasında dönüşüm yapabildikleri sonucuna ulaşılmaktadır. Bunun yanı sıra öğrencilerin çoklu temsil kullanımlarının genişleyen örüntülerde örüntü kuralını keşfetmelerinde ve bu sayede örüntü kuralına ilişkin genellemeye varmalarında destekleyici öğeler oldukları görülmektedir. Bu çalışmada uygulanan öğretim deneyinde öğrencilerin matematiksel ilişkileri çoklu temsiller ile ortaya koymalarına fırsatlar sunulmuş ve bu matematik deneyimlerinin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarında etkili olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin gerçekleştirdikleri örüntü çalışmalarında en fazla genişleyen örüntülerde örüntü kuralını tanımladıkları görülmektedir. Öğretim deneyinde, gerçekleştirilen neredeyse tüm örüntü çalışmalarında öğrencilerden tekrar birimini tanımlamaları amacıyla sorular yönlendirilmiştir: “Sıralamada ne fark ettiniz?, Bu sıralamanın kuralı nedir?” gibi. Öğrencilerin bu sorulara cevap bulmasında örüntü tekrar

birimini tanımlamaları ve bu sayede örüntü kuralını keşfetmeleri hedeflenmiştir. Öğrencilerin örüntü çalışmalarında örüntü tekrar birimini ve kuralını tanımlamaları ile genellemeye ulaştıkları görülmüştür.

Genelleme Stratejilerine İlişkin Sonuçlar

Cebir ve matematik genellemelerden oluşmaktadır (Zazkis ve Liljedahl, 2002). Cebir ve matematik için önemli olan genellemelerin ilkokul düzeyindeki öğrencilerin etkili bir şekilde yapabilmesinde erken cebir öğelerinden biri olan örüntüler etkin rol oynamaktadır (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Bu sebeple bu araştırmada sayı ve şekil örüntülerinde öğrencilerin genellemeye varma bu genellemelerini doğrulamada gerekçelendirme stratejileri incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda öğrencilerin örüntü çalışmalarında parçaları sayma/modelleme, sayma, yinelemeli, bütüne genişletme, doğrusal ve içeriksel genelleme stratejilerini kullandıkları görülmektedir.

Örüntü çalışmalarında yakın adım ve uzak adım olmak üzere iki farklı durumda öğrencilerin istenilen terimi bulma ve örüntü kuralına ilişkin genellemeye ulaşmalarında kullandıkları stratejileri farklılaşmıştır. Yakın adımın sorulduğu örüntü çalışmalarında öğrenciler, genelleme stratejilerinden modelleme/sayma, yinelemeli ve bütüne genişletme genelleme stratejilerini kullanırlarken uzak adımdaki isteneni bulmada ise doğrusal ve içeriksel genelleme stratejilerini kullanmayı tercih etmişlerdir. Carraher ve diğerleri (2008a) üçüncü sınıf öğrencilerinin doğrusal denklem içeren örüntülerde genelleme stratejilerini incelemişlerdir. Çalışmada ilkokul düzeyindeki öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerinde büyük çoğunluğunun yakın adımdaki birimleri bulabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Buna ilaveten, çalışmada cebirsel düşünceleri gelişmiş olan öğrencilerin uzak adımlardaki birimleri tahmin edebildikleri ve sonuçlarına ilişkin cebirsel ve sözel olarak genelleme yapabildikleri görülmüştür. Literatürde yer alan çalışmalar da bu sonuçları destekleyecek biçimde erken yaştaki öğrencilerin matematiksel ilişkileri ve yapılarla ilişkin genelleme yapabildiklerini göstermektedir (Blanton ve diğerleri, 2015; Carraher ve diğerleri, 2008a; Martinez ve Brizuela, 2006; Stephens ve diğerleri, 2017; Warren, 2006; Wilkie, 2016). Ureña ve diğerleri (2019), dördüncü sınıf öğrencilerinin genelleme ve temsil etme becerilerini inceledikleri çalışmalarında fonksiyonel ilişki içeren durumlarda öğrencilerin fonksiyonel ilişkinin genelleştirilmesini farklı şekillerde fark edip temsil edebildikleri görülmüştür. Buna dayalı olarak bu çalışmada yer verilen yakın adım ve uzak adım birimlerinin sorulmasının öğrencilerin farklı genelleme stratejilerini ortaya çıkarmada etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğretim deneyinde genişleyen örüntüler sayı ve şekil örüntüleri olmak üzere farklı bağlamlara yer verilmiştir. Sayı örüntülerinde öğrenciler, sayıların sıralamasına dayalı olarak artma/azalma miktarında yola çıkarak modelleme/sayma, yinelemeli ve bütüne genişletme stratejilerini kullanmışlardır. Öğrencilerin şekil örüntülerindeki çalışmalarında ise şekillerin yapısal özelliklerin ziyade şekilden ulaştıkları sayısal değerleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu sonuç literatürdeki benzer çalışmaların (Amit ve Neria, 2008; Becker ve Rivera, 2007) sonuçları ile desteklenmektedir. Öğrencilerin şekil örüntüleri çalışmalarında sayı örüntülerinden farklı olarak doğrusal ve içeriksel genellemeye ulaştıkları görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretim deneyi içeriğindeki örüntü çalışmalarının öğrencilerin farklı genelleme stratejilerini ortaya çıkarmada etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Gerekçelendirme Stratejilerine İlişkin Sonuçlar

Araştırmada, öğrencilerin genellemelerini doğrulamalarında gerekçelendirme stratejilerine bakıldığında figural, sayısal ve cebirsel yollarla kontrol yaptıkları ve açıklamalar yolu ile ulaştıkları genellemelerinin neden doğru olduğunu ifade ettikleri görülmektedir. Figural gerekçelendirmelerin istenen adımın bulunmasında şekil çizme ve modelleme yapılması ile ortaya çıktığı görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrenciler, matematiksel işlem ve ifadeler kullanarak sayısal yollarla doğrulama yapmışlardır. En ileri düzey olan gerekçelendirmeler ise cebirsel ifadelerin kullanıldığı ve bu yolla doğrulamaların yapıldığı durumlarda görülmüştür.

Bu araştırmada, örüntü çalışmalarında öğrencilerin gerekçelendirmeye teşvik edilmelerinin, genelleme stratejilerinin ve fonksiyonel düşünmelerinin ortaya çıkmasında etkili olduğu görülmektedir. Ayrıca, öğrencilerin gerekçelendirme yollarının genelleme stratejilerine bağlı olarak çeşitlilik gösterdiği görülmüştür. Modelleme/sayma ve yinelemeli stratejilere dayalı ulaşılan genellemelerde figural kontrol ya da niçin doğru olduğuna dair açıklamalar yapıldığı görülürken içeriksel veya doğrusal genellemelerde sayısal veya cebirsel kontroller ile gerekçelendirmeler yapıldığı ortaya çıkmıştır. Buna dayalı olarak öğrencilerin genelleme stratejileri ve gerekçelendirme yollarının birbirleriyle ilişkisel olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde Ellis (2007) gerekçelendirme yapmanın bir öğrencinin genelleme yeteneğini etkilediğini belirtmiştir. Böylelikle, öğrencilerin gerekçelendirme yollarının genelleme stratejilerini etkilediği sonucuna ulaşılmaktadır.

Fonksiyonel Düşünme Düzeylerine İlişkin Sonuçlar

Öğretim deneyinde incelenen bir diğer cebirsel düşünme ögesi öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeyleridir. Öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinde değişkenleri (bağımlı-bağımsız) tanımlamaları ve birbirine bağlı değişen nicelikleri ilişkilendirme durumları incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar incelendiğinde öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin yinelemeli, kovaryasyonel ve ortak değişkenli düşünmelerinin etkili olduğu görülmektedir.

Öğrencilerde sayı ve şekil örüntülerinde yer verilen farklı örüntü çalışmalarında farklı fonksiyonel düşünme düzeylerinin etkili olduğu görülmüştür. Şekil örüntülerinde, yakın adıma ilişkin istenen terimin bulunmasında öğrencilerin çizim ve modelleme ile genellemeye ulaştıkları görülmüştür. Ayrıca, sayı örüntülerinde öğrencilerin birçoğu artma/azalma miktarına odaklı çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalar sürecinde öğrencilerin yinelemeli düşünmeleri etkili olmuş ve bu düşünme yapıları ortaya çıkmıştır. Yinelemeli düşünme fonksiyonel düşünmede en düşük (L1-L2) seviyedir fakat araştırmalar yinelemeli düşünmenin ilkökul düzeyindeki öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişiminde nicelikler arasındaki ilişkileri anlamalarının ön koşulu olabileceğini ve bu ilişkiler hakkında düşünmelerini kolaylaştırabileceğini savunmaktadırlar (Blanton ve diğerleri, 2015; Herbert ve Brown, 1997).

Öğrencilerde etkili olan yinelemeli düşünmelerinin yanı sıra değişkenlerin birbirine göre artma/azalma durumlarının ifade edildiği görülmektedir. Öğrencilerin değişen niceliklerin birbirine göre sadece ilişkisini tanımladıkları durumlarda kovaryasyonel düşünmelerinin etkili olduğu görülmüştür. Örneğin, öğrencilerin “adım sayısı ile artı sayısı aynı oluyor” veya bir başka örüntü çalışmasında “yıldız sayısı 1 artarken beşgen sayısı 2 artıyor” şeklinde örüntü kuralına ilişkin çıkarımlarda bulundukları görülmüştür. Buna dayalı olarak öğrencilerin değişen nicelikler arasındaki ilişkileri ortaya koyarak daha ileri düzey olan ortak değişkenli düşünmeye ilişkin deneyim sahibi olduklarına ulaşılmaktadır.

Fonksiyonel düşünmede değişen niceliklerin ilişkisel durumlarının ortaya konulduğu en ileri düşünme düzeyi ortak değişkenli düşünmedir (Stephens ve diğerleri, 2017). Araştırmada, öğrencilere birbirine göre ilişkisel değişen nicelikler içeren problem bağlamları sunulmuştur. Bu problemler bağlamında değişen niceliklerin değişimlerine ilişkin genellemeye varmaları ve cebirsel veya sözel olarak ifade etmeleri hedeflenmiştir. Öğrencilerin doğrusal denklem ifadeleri ile eşitlik yazdıkları ve bu ilişkisel durumu sözel olarak ifade ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi tek

değişkene veya iki değişkene dayalı olarak tanımlamalarına göre farklılaşan fonksiyonel düşüncülerinin olduğu görülmektedir. Örneğin, örnek bir örüntü çalışmasında “adım sayısı $\times$ 3+1” şeklinde öğrenci genellemesi olmuştur. Örnekte de görüldüğü üzere tek değişkene dayalı olarak gerçekleştirilen bu genellemelerde öğrencilerin L7 ve L8 düzeylerinde fonksiyonel düşünceleri etkili olmuştur. Tek değişkene dayalı örüntü kuralına ilişkin genellemelerin yanı sıra öğrencilerin iki değişkene dayalı tanımlama yapabildikleri örnek durumlar da olmuştur. Öğrencilerin ulaştıkları genellemelerindeki örnek ifadelerine bakıldığında “kare sayısı=adım sayısı $\times$ 2+1” veya “adım sayısının 2 katının 1 fazlası kare sayısını verir” şeklinde örüntü kuralının tanımlandığı görülmektedir. Öğrencilerin genellemelerinde doğrudan sembolleştirme olmasa dahi cebirsel ifade kullanabildikleri görülmektedir. Bu sayede öğrencilerin beraber değişen nicelikleri cebirsel ve sözel olarak temsil edebildikleri sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sonuçlar dahilinde bu genellemeler ile öğrencilerin L9 ve L10 düzeylerinde fonksiyonel düşüncülerinin etkili olduğu söylenebilir.

Fonksiyonel düşünme cebirsel düşünmenin temel göstergelerinden biridir (Blanton ve Kaput, 2011). Bu sebeple öğrencilerin genelleme ve gerekçelendirme yapabilmelerinin doğrudan fonksiyonel düşüncülerini etkilediği görülmektedir. Bu araştırmada ulaşılan sonuçlar doğrultusunda, öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeyleri arasında hiyerarşik bir yapının olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Yani herhangi bir öğrenci için fonksiyonel düşünmede kesin olarak şu düzeydedir demek mümkün olmamıştır. Öğrencilere sunulan örüntü örneklerinin içerik ve bağlamındaki farklılaşmaların öğrencilerin genelleme stratejilerini ve dolayısıyla fonksiyonel düşüncülerini etkilemektedir. Buna bağlı olarak problem bağlamı ve bu problem bağlamında öğrencilerin ortaya çıkan fonksiyonel düşünceleri ortaya konulmuştur. Bu sayede öğrencilere farklı örüntü problemleri içeren etkinlikler sunularak onların farklı fonksiyonel düşünme düzeylerinin etkili olması sağlanmalıdır.

Literatürde fonksiyonel düşünme üzerine gerçekleştirilen pek çok çalışmada (Blanton ve Kaput, 2004; 2011; Blanton ve diğerleri, 2015; Warren ve Cooper, 2008; Warren ve diğerleri, 2016) öğrencilerin erken yaşlardan itibaren fonksiyonel düşünme becerisine sahip olabildiğini göstermektedir. Bu çalışma, ilköğretim 4. sınıf öğrencilerinin nicelikler arasındaki ilişkileri genelleme ve farklı durumlarda belirsiz miktarları temsil etme ve bunlarla uğraşma gibi ilişkili becerileri geliştirmelerinin özellikle fonksiyonel düşünmelerindeki etkililiğini ortaya koymaktadır. Brizuela ve diğerleri (2015) altı

yaşlarındaki birinci sınıf öğrencilerinin değişken ve değişken notasyonu hakkındaki anlayışlarını araştırdıkları çalışmalarında, öğretim fırsatının sağlanması durumunda öğrencilerin değişen nicelikler arasındaki ilişkileri ifade edebildikleri ve anlamlı gösterimler yapabildikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretim Deneyinin Etkililiğine İlişkin Sonuçlar

İlkokul ve ortaokulda örüntüler ile başlayan fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünmenin kalbidir (Blanton ve Kaput, 2004; Carraher ve diğerleri, 2008b; Warren ve Cooper, 2008). Bu sebeple bu çalışmada fonksiyonel ilişki içeren genişleyen sayı ve şekil örüntüler ele alınmış ve bu örüntülerin öğrencilerin fonksiyonel düşünceleri yanı sıra genelleme ve gerekçelendirme stratejilerindeki etkililiği araştırılmıştır. Aynı zamanda öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları kapsamında genelleme, gerekçelendirme ve fonksiyonel düşünceleri ilişkisel olarak ele alınmıştır. Elde edilen bulgular göstermektedir ki bu çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyi öğrencilerin farklı stratejilerle genellemeye ulaşmalarını ve bu genellemelerini farklı doğrulama yolları ile gerekçelendirmelerine olanak sağlamaktadır. Bunun yanı sıra öğretim deneyinde yer alan farklı örüntü çalışmalarının öğrencilerinin farklı fonksiyonel düşüncelerinin ortaya çıkmasında etkili olmaktadır. Öğretim deneyinde yer verilen sayı ve şekil örüntüleriyle öğrencilerin tanıştırılması ve çeşitli bağlamlarla deneyim kazanmaları sayesinde genelleme, gerekçelendirme ve fonksiyonel düşüncelerinin etkili olduğu görülmektedir.

Bu çalışma sonucunda ulaşılan bulgular literatürdeki mevcut bilgileri desteklemektedir. Blanton ve diğerleri (2015) matematiksel ilişkileri ve yapıyı genelleme, temsil etme ve akıl yürütme gibi erken cebirsel düşünme uygulamalarının erken sınıf düzeylerine entegre edilebileceğini belirtmişlerdir. Benzer şekilde Stephens ve diğerleri (2017) cebir öncesi dönemdeki öğrencilerle gerçekleştirdikleri öğretim deneyi sonucunda öğrencilerin sayılar arasındaki genel kuralları belirleme becerilerinin geliştiği ve ilişkisel durumları içeren örüntülerin kurallarının öğrenciler tarafından sembollerle ve kelimelerle ifade edebildiğini ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada da gerçekleştirilen öğretim deneyinde erken cebir dönemindeki öğrencilerin genişleyen sayı ve şekil örüntülerinde genelleme ve gerekçelendirme yapabildikleri buna paralel sözel ve cebirsel örüntü kuralını tanımlayarak fonksiyonel düşüncelerinin etkili olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Öneriler

Bu bölümde, araştırma sonucunda elde edilen bulgular ve ulaşılan sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara, öğretmen ve öğrencilere yönelik önerilerde bulunulmuştur.

- Çalışmada uygulanan öğretim deneyinin etkililiği öğretim deneyinde yer alan öğrencilerin matematiksel başarı düzeyleri ve öğrenim gördükleri sınıf düzeyleri kapsamında sınırlıdır. Bu sebeple, farklı sınıf düzeyi ve matematik başarı düzeyine sahip öğrenciler ile gerçekleştirilecek aynı öğretim deneyi ile öğretim içeriğinin etkililiği değerlendirilebilir. Çalışmada, erken cebir dönemindeki ilkokul 4. sınıf öğrencileri yer almıştır. Öğretim deneyi, farklı sınıf ve yaşlardaki erken cebir dönemindeki öğrenciler ile uygulanarak öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği değerlendirilebilir.
- Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyinin etkililiği sonucunda sınıf öğretmenlerinin erken cebir konusunda hizmet içi eğitimler yolu ile farkındalıklarının geliştirilmesi yönünde çalışmalar yapılabilir. Bu doğrultuda öğretmenler, erken cebir konusunda edindikleri ve geliştirdikleri bilgiler ile müfredat entegrasyonunu sağlayarak öğrencilerin cebirsel düşüncelerine katkı sağlayabilir. Bununla birlikte de 4. sınıf öğrencilerine ileriki kademelerde cebir konusuna daha sağlam bir temelle başlama fırsatı oluşturulabilir.
- Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyinde doğrusal örüntülere yer verilmiştir. Bu formdaki örüntülerde ilişkisel durumların öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği değerlendirilmiştir. İleride gerçekleştirilecek çalışmalarda doğrusal örüntü etkinlikleri ve etkinliklerde yer alan görevler çeşitlendirilerek etkililiği ortaya konulabilir ve böylece erken cebir öğretiminde etkili olan genişleyen sayı ve şekil örüntüleri havuzu oluşturulabilir.
- Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyinde erken cebir öğretim etkinlikleri kullanılmış ve etkili olduğu görülmüştür. Erken cebir öğretim etkinlikleri çeşitlendirilerek ileride yapılması planlanan erken cebir öğretim uygulamalarında teknoloji araçları da entegre edilerek öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarındaki etkililiği değerlendirilebilir.
- Bu araştırmada, öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları genelleme stratejileri, gerekçelendirme stratejileri ve fonksiyonel düşünceleri kapsamında değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilecek çalışmalarda, öğrencilerin cebirsel

düşünmeleri bağlamında sembolleştirme, değişken, eşitlik ve denklik kavramlarını anlamlandırma durumları incelenebilir.



6. KAYNAKLAR

- Akkan, Y., Öztürk, M., & Akkan, P. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının örüntüleri genelleme süreçleri: strateji ve gerekçelendirmeler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(3), 513-550.
- Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademedeki matematik öğretimi*. Alfa Basım Yayım.
- Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM-Mathematics Education*, 40(1), 111-129. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5>
- Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2021). Fourth-graders’ justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 359-382. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Baecher, L., Rorimer, S., & Smith, L. (2012). Video-mediated teacher collaborative inquiry: Focus on English language learners. *The High School Journal*, 95(3), 49-61. <https://doi.org/10.1353/hsj.2012.0007>
- Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra: The core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 249–260). Kluwer Academic.
- Barbosa, A. (2011). Patterning problems: Sixth graders’ ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda, (Eds.), *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 410-428). ERME.
- Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-128). University of Melbourne.
- Blanton M., & Kaput, J. (2008). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 361–388). Lawrence Erlbaum Associates.

- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Pearson Education.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Hoines & A. Hoines (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen University College.
- Blanton, M., & Kaput, J. J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM-Mathematics Education*, 37(1), 34-42. <https://doi.org/10.1007/BF02655895>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181-202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., ... & Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930-1972. <https://doi.org/10.3102/0002831219832301>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1992). *Qualitative research for education* (2nd ed.). Allyn & Bacon.

- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 20–32). National Council of Teachers of Mathematics.
- Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed). Wiley.
- Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225-232). PME.
- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). Springer.
- Brizuela, B. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The Elementary School Journal*, 117(1), 46–71.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., & Sawrey, K., (2015). A first-grade student's exploration of variable and variable notation/Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology*, 36(1), 138-165. <https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027>
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939>
- Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33–40.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.
- Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. homenaje a luis rico* (pp. 209-218). Comares.

- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Berman, P., & Pligge, M. (2005). Developing algebraic reasoning in the elementary school. In T. Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 81-98). Lawrence Erlbaum.
- Carraher, D. W., & Schliemann (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). National Council of Teachers of Mathematics.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 191–218). Taylor & Francis.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008b). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, 40(1), 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008a). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.
- Carraher, D., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal of Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115. <https://doi.org/10.2307/30034843>
- Chazan, D. (1996). Algebra for all students? *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 455-477. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(96\)90030-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90030-9)
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 57-76. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x>
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking/El impacto

- de dos tipos diferentes de tareas instruccionales en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los estudiantes. *Journal for the Study of Education and Development*, 44(3), 503-552. <https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280>
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Lawrence Erlbaum Publishers.
- Cobb, P., & Steffe, L. (2011). *A journey in mathematics education research*. Springer.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). Cambridge University Press.
- Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Springer.
- Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Sage.
- Cuoco, A. (1995). Some worries about mathematics education. *Mathematics Teacher*, 88(3), 186-187. <https://doi.org/10.5951/MT.88.3.0186>
- Czarnocha, B. (2016). How to approach a teaching experiment? In B. Czarnocha, W. Baker, O. Dias, V. Prabhu (Eds.), *The creative enterprise of mathematics teaching research*, (pp. 163-170). Sense Publishers.
- Demana, F. D., & Waits, B. (1990). Instructional strategies and delivery systems. In E. L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone* (pp. 53-61). National Council of Teachers of Mathematics.
- Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, 31, 281-301.
- Doğan Temur, Ö., & Turgut, S. (2020). Sınıf öğretmenleri sayı ve şekil örüntülerini nasıl öğretiyorlar? ilköğretim dördüncü sınıf örneği. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(1), 182-200. <https://doi.org/10.17240/aibuefd.2020.20.52925-547220>

- Dougherty, B., & Zilliox, J. (2003). Voyaging from theory and practice in teaching and learning: A view from Hawaii. In N. Pateman, B. Dougherty, J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 31-46). University of Hawaii.
- Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, 25(4), 439–478.
<https://doi.org/10.1080/07370000701632397>
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization* (pp. 215-238). Springer.
- Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004). The Teaching Experiment-What it is and what it isn't. In *2003 Physics Education Research Conference* (pp. 157-160).
- English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.
<https://doi.org/10.5951/MT.91.2.0166>
- Fonger, N. L., Stephens, A., Blanton, M., Isler, I., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2018). Developing a learning progression for curriculum, instruction, and student learning: An example from mathematics education. *Cognition and Instruction*, 36(1), 30-55.
<https://doi.org/10.1080/073700008.2017.1392965>
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2006). *How to design and evaluate research in education*. Mac Graw Hill.
- Freeman, N. (1993). Drawing: Public instruments of representation. In C. Pratt & A. F. Garton (Eds.), *Systems of representation in children* (pp. 113-132). Wiley.
- Gattegno, C. (1973). *In the beginning there were no words: The universe of babies*. Educational Solutions.
- Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Academic Press.
- Gowers, T., Barrow-Green, J., Leader, I. (Eds.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press.

- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DRN based instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory, journal of mathematical behavior* (pp. 185–212). Albex.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 234–283). American Mathematical Society.
- Heid, M. K. (1995). *Algebra in a technological world*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344. <https://doi.org/10.5951/TCM.3.6.0340>
- İşler Baykal, I. (2019). İlkokulda cebir öğretimi. In K. Tarım & G. Hacıömeroğlu (Eds.). *İlkokulda matematik öğretimi* (pp. 245-261). Anı Yayıncılık.
- Jurow, A. S. (2004). Generalizing in interaction: Middle school mathematics students making mathematical generalizations in a population-modeling project. *Mind, Culture, and Activity*, 11, 279-300. https://doi.org/10.1207/s15327884mca1104_4
- Kabael, T. U., & Tanışlı, D. (2010). Teaching from patterns to functions in algebraic thinking process. *Elementary Education Online*, 9(1), 213-228.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.
- Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 344–351). The University of Melbourne.
- Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Lawrence Erlbaum Associates.

- Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way. In T. Romberg, T. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaya, D. & Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 3(2), 38-47.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>
- Kieran, C. (1985). Constructing meaning for equations and equation-solving. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (pp. 243–248). Shell Center for Mathematical Education.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579–594). Springer.
- Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 3-18). NCTM.
- Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric numerical patterning tasks*. Doctoral Dissertation. Illinois State University.
- Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of*

- the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1693-1700). PME-NA.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). John Murray.
- Kuchemann, D. (2008). *Looking for structure: A report of the proof materials project*. Book Printing.
- LaCampagne, C. B., Blair, W., & Kaput, J. (1995). *The algebra initiative colloquium*. Department of Education.
- Lannin, J. (2005). Generalization and justification the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
- Lannin, J. K., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18 (3), 3–28. <https://doi.org/10.1007/BF03217440>
- Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016). What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education*, 92(4), 305-310. <https://doi.org/10.1080/00094056.2016.1208009>
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 361–383). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Kelly, A., (2000) Multitiered teaching experiments. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Lawrence Erlbaum Publishers.
- Lian, L. H. & Yew, W. T. (2011). Developing pre-algebraic thinking in generalizing repeating pattern using SOLO Model. *US-China Education Review*, 6, 774-780.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 113-120. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90026-8](https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8)
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage Publishing.

- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 45–70). Kluwer Academic.
- Martínez, M., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 285-298.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.003>
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and practice* (pp. 65-86). Springer.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.
- Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 329–350). Springer.
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277–289.
<https://doi.org/10.1007/BF00312078>
- Mason, J., Johnston-Wilder, S., & Graham, A. (2005). *Developing thinking in Algebra*. Sage
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematics structure for all. *Mathematics Education Research Journal* 21(2), 10-32.
<https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case studies applications in education*. Jossey-Bass Publications.
- Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, A., & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 161-168). PME.

- Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Talim Terbiye Kurul Başkanlığı.
- Morris, A. K. (2009). Representations that enable children to engage in deductive arguments. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Taylor & Francis Group.
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441–465. <https://doi.org/10.1007/s11412-006-9003-z>
- Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Springer.
- Moss, J., Beatty, R., Shillolo, G., & Barkin, S. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build their understanding of patterns and functions on a collaborative database. In C. Greenes (Ed.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: The national council of teachers of mathematics 70th yearbook* (pp. 155–168). National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council for Teachers of Mathematics.
- Nührenbörger, M. (2015). Mathematical argumentation processes of children between calculation and conversion. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Developing mathematical language and reasoning* (pp. 18–29). Charles University.
- Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2015). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. In N. Vondrová & K. Krainer (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 316-323). ERME.
- Palabıyık, U., & İspir, O. A. (2011). The effects of pattern-based algebra instruction on students' algebraic thinking and attitude towards mathematics. *Pamukkale University Journal of Education*, 30(30), 111-123.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Sage Publications.

- Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49-56). PME.
- Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 113-134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Pinto, E., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of pattern: a semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM-Mathematics Education*, 40, 83–96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Springer.
- Ramírez, R., Brizuela, B. M., & Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*, 1-25. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7>
- Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer.

- Rivera, F. D., & Becker, J. (2005). Teacher to teacher: figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-204. <https://doi.org/10.5951/MTMS.11.4.0198>
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 140-155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001>
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323–366). Springer.
- Rivera, F., & Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 140–155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001>
- Samson, D., & Schafer, M. (2007). An analysis of the influence of question design on learners approaches to number pattern generalization tasks. *Pythagoras*, 66, 43–51.
- Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In D. A. Stylianou, M. Blanton, & E. Kieran (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 71-86). Routledge.
- Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure. A focus on structure. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 309-327). Springer.
- Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J., & Bastable, V. (2008). What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413–448). Routledge.
- Schliemann, A. D., & Carraher, D.W. (2002). The evolution of mathematical understanding: Everyday versus idealized reasoning. *Developmental Review*, 22(2), 242–266. <https://doi.org/10.1006/drev.2002.0547>
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum Associates.

- Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In M. van den Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145-152). Drukkerij Wilco.
- Schliemann, A., Carraher, D. W., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 127-134). PME, Honolulu, HI.
- Schliemann, A., Carraher, D. W., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127–134). PME.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 479–510). Lawrence Erlbaum.
- Schwartz, J. (1990). Getting students to function in and with algebra. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Mathematics Associations of America.
- Şen, C. & Güler, G. (2022). *Cebir uygulamaları ile ilkokul ve ortaokulda cebir öğretimi*. Vizetek Yayıncılık.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2/3), 191–228. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_4
- Sinclair, H. (1987). Constructivism and the psychology of mathematics. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference* (pp. 28-41).
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. L. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Taylor & Francis Group.

- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Sage Publications.
- Steffe, L. P. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Publishers.
- Steffe, L. P. (1983). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471). Birkhauser.
- Steffe, L. P., & D'Ambrosio, B. (1996). Using teaching experiments to understand students' mathematics. D. Treagust, R. Duit, & B. Fraser, (Eds.), *Improving teaching and learning in science and mathematics* (pp. 65-76). Teacher College Press.
- Steffe, L. P., & Ulrich, C. (2014). Constructivist teaching experiment. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 102-109). Springer.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective*. Springer.
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The arithmetic-algebra connection: a historical-pedagogical perspective. In J. Cai & D. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 87-105). Springer.
- Tanışlı, D., & Özdaş, A. (2009). The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School 5th Grade Students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 9(3), 1485-1497.

- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Cassell.
- Turgut, S., & Doğan Temur, Ö. (2020). Determining elementary teachers ideas about early algebra 2. *Elementary Education Online*, 16(4), 1469-1469. <https://doi.org/10.17051/ilkonline.2017.342968>
- Türkmen, H., & Tanışlı, D. (2019). Cebir Öncesi: 3, 4 ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 7(1), 344-372.
- Ureña, J., Ramírez, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation/Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020>
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.). *The ideas of algebra, K-12.1988 yearbook* (pp. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.
- Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics* (8th ed.). Allyn & Bacon.
- Vergel, R. (2015). Pattern generalization and forms of early algebraic thinking/ Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA Special Issue on Generalization*, 9(3), 193–215.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M., Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive view* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum.
- Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 387-400. <https://doi.org/10.1007/BF00311326>
- Warren, E. (2006). Learning comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 169–189. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-4627-5>

- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>
- Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, 7(2), 75-84.
- Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 73–108). Sense.
- Watson, A. (2000). Going across the grain: Generalisation in a group of low attainers. *Nordisk Matematikk Didaktikk (Nordic Studies in Mathematics Education)*, 8(1), 7–22.
- Weisstein, E. W. (2017). *Figurate Number*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html>
- Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 333-361. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x>
- Wilkie, K. J. (2019). Investigating secondary students' generalization, graphing, and construction of figural patterns for making sense of quadratic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100689. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.005>
- Willoughby, S. S. (1999). Functions from kindergarten through sixth grade. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 197-201). National Council of Teachers of Mathematics.
- Xolocotzin, U., & Rojano, T. (2015). The development and arithmetic foundations of early functional thinking. In *9th Congress of European Research in Mathematics Education*. ERME.
- Yaman H. & Umay A. (2013). The elementary students' perceptions of Mathematical patterns according to presentation forms. *Hacettepe University Journal of Education*, 28(1), 405-416.

- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (12. Baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research*. Sage Publishing.
- Zapatera, A. (2018). Cómo Alumnos De Educación Primaria Resuelven Problemas De Generalización De Patrones. Una Trayectoria De Aprendizaje/How Primary Education students solve problems of generalization of patterns: a learning trajectory. *Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87–114. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2114>
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in Mathematics*, 49(3), 379-402. <https://doi.org/10.1023/A:1020291317178>

7. EKLER

EK-1: Erken Cebir Öğretim Deneyi İçeriği

Sayı Örüntüleri Çalışmaları

1. Oturum “Tekerleme” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğe giriş kısmında sayı örüntüsü ve genişleyen örüntü kavramlarının öğretimine yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak amacıyla araştırmacı tarafından sunum gerçekleştirilmiştir. Tahtaya aralarındaki fark sabit olan tekrarlı kurallı örnek durumlar yazılarak sayı örüntülerinin öğrenciler tarafından keşfedilmesi amaçlanmıştır. Her örnek duruma ilişkin araştırmacı öğrencilerle karşılıklı etkileşimde bulunarak soru- cevap şeklinde süreci yürütmüştür. Aralarındaki farkın sabit olduğu genişleyen örüntülere ilişkin sabit artan sayı örüntülerinin ardından azalan sayı örüntü örnek durumları verilmiştir. Buradaki amaç ise genişleyen sayı örüntülerinin sadece sabit artan olduğu yönündeki kısıtlı kavrayışın önlenmek istenmesidir. Örnek durumlar ile öğrencilerin sayı örüntüsünü daha iyi anlamaları, sayılar arasındaki ilişkiyi fark edip örüntü kuralını ve verilmeyen sayıları bulmaları amaçlanmıştır. Etkinliğe girişin ardından öğrencilerin eğlenerek konuyu pekiştirmeleri için “Tekerleme Çalışma Kâğıdı” dağıtılmıştır. Öğrencilerden tekerlemelerde yer alan sayı ilişkilerini belirleyerek örüntü kuralını bulmaları istenmiştir. Bireysel olarak çalışan öğrencilere; tekerlemelerde yer alan sayı ilişkilerini nasıl belirlediği, örüntü kuralını nasıl bulduğu ve buldukları kurala alternatif bir kural keşfedip keşfedemeyeceği sorularak öğrencilerin aralarında sabit fark bulunan sayı örüntülerinde yalnızca artan örüntü kuralı bulmaya yönelik algılarının önlenmesi için azalan örüntü kurallarını da keşfetmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin etkinlik tamamlama ve etkinliği araştırmacı ile soru- cevap ile değerlendirme süreci sonunda tekerleme tüm öğrenciler ile birlikte söylenerek öğrencilerin artan ve azalan örüntülerdeki örüntü kuralını fark etmeleri hedeflenmiştir.

2. Oturum “Tavşan Momi’yi Havuçlara Ulaştır” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğe giriş kısmında öğrencilerin yüzölçüm sayma tablosunda aralarında sabit fark olan genişleyen sayı örüntüsü oluşturmaları amacıyla problem durumu öğrencilerin ilgisini çekmek ve merak uyandırmak için hikâye bağlamında öğrencilere sunulmuştur: Öğrencilere problem durumu sunulur: “Momi, sevimli mi sevimli bir tavşanmış. Havuç yemeyi de çok severmiş.

Gel gelelim, Momi'nin havuçlara ulaşması için bayağı yol gitmesi lazımmiş. Momi'nin gideceğı yer 1'den 100'e kadar sayıların yazılı olduğı taşlar ile kaplıymış. Çok iştahlı olan Momi 1,2,3,4...100 şeklinde tüm taşlara atlaya atlaya giderse yolun çok uzun olacağını düşünüp üzülyormuş. Momi bir an önce havuçlara nasıl ulaşabileceğini düşünürken kestirme bir yol bulmuş "2-4-6-8.." şeklinde 2'şer 2'şer atlayıvermiş ve 100 yazılı taşa ulaşmış" diye anlatıldıktan sonra öğrencilere "Tavşan Momi'yi Havuçlara Ulaştır" çalışma kâğıdı dağıtılmıştır. Etkinlik iki kısımdan oluşmaktadır. Bunlardan ilki sayı örüntülerinde eksik ögeyi tamamlama diğeri ise genişleyen sayı örüntüleri arasındaki ilişkiyi fark etmelerine yöneliktir. Öğrencilerden öncelikle sayma tablosunda yazılı olmayan, eksik verilen taşları numaralandırmaları istenmiş ve bunun için yeterli zaman verilmiştir. Her bir öğrenciye ile bireysel olarak Yazmış olduğunuz sayılar arasında nasıl ilişkiler fark ettiniz? Bu sayılar arasındaki artış/azalış nedir? Soruları yöneltilerek öğrencilerin artan veya azalan sabit farklı genişleyen örüntülerine yönelik farkındalık oluşturmak amaçlanmıştır. Aynı zamanda bu sorular ile öğrencilerin artan sabit farklı sayı örüntülerine yönelik kısıtlı kavrayışlarını da önlenmek istenmiştir. Sayı tablosundaki eksik taşları tamamlayan ve akabinde tüm öğrencilerle buna yönelik soru- cevap süreci gerçekleştirildikten sonra öğrencilere "Momi'nin gideceğı yoldaki tüm yaşları numaralandırdıysanız şimdi sırada Momi'yi havuçlara ulaştırma zamanı" diyerek etkinliğin ikinci kısmına geçilmiştir. Öğrencilere aşağıdaki sorular sorulmuştur:

- Momi'nin hangi numaralı taşlara sıçrayarak havuçlara ulaşmasını sağlayabilirsin?
- Başka hangi sayıları kullanabilirsin?
- Momi'nin havuçlara ulaşmasında kullandığın sayılar arasındaki ilişki nedir?
- Kaçar kaçır artış/azalış oluyor?

Öğrenciler bireysel olarak yöneltilerek öğrencilerin alternatif sayı örüntülerini keşfetmeleri sağlanmıştır. Etkinliğin uygulaması aşamasının tamamlanmasının ardından uygulama sürecine ilişkin değerlendirmeler gerçekleştirilmiştir.

3. Oturum "Sayı Örüntülerinin Kuralı" Etkinliğı

"Sayı Örüntülerinin Kuralı" etkinliğı ile öğrencilerin artan ve azalan sayı örüntülerinde örüntü kuralını tanımlama, örüntünün kuralını bulma, eksik ögeyi tamamlama ve örüntüyü devam ettirme çalışmalarına yer verilerek öğrencilerin konuyu pekiştirmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla öğrencilere bireysel çalışmalarını gerçekleştirecekleri çalışma kâğıtları dağıtılmıştır. Öğrencilerin çalışmalarını

gerçekleştirmeleri için yeterli ve gerekli zaman verilmiştir. Tüm öğrenciler etkinliği bitirdikten sonra bireysel soru- cevap kısmına geçilmiştir. Bu kısımda birinci çalışma sorusunda öğrencilere daire içinde karışık olarak verilen sayılar arasındaki ilişkiyi fark edip örüntüyü oluşturma, örüntü kuralını belirleme ve örüntüyü devam ettirmeleri istenmiştir. Bu soruya yönelik öğrencilere;

- Daire içinde yer alan sayılar arasında nasıl bir ilişki görüyorsun?
- Bu sayılar hangi kurala göre sıralanabilirler?
- Düşündüğün bu örüntüyü oluşturup kuralını yazar mısın?
- Belirtmiş olduğun bu örüntü kuralı doğrultusunda örüntünü 3 adım daha devam ettirir misin?

Soruları yöneltilerek öğrencilerin çözümü hakkındaki düşünceleri ve alternatif çözüm yolu olup olmadığı keşfedilmeye çalışılmıştır. İkinci çalışma sorusunda eksik öğeleri olan bir sayı örüntüsü verilmiştir. Öğrencilerden bu sayı örüntüsündeki ilişkiyi belirleyip örüntü kuralını belirlemeleri ve kural doğrultusunda eksik öğeleri bulmaları istenmiştir. Çözüm için yeterli zaman verilen öğrencilere soru hakkında;

- Sayılar arasında nasıl bir ilişki var?
- Bu sonuca nasıl vardın?
- Sayılar arasında ilişki artan mı yoksa azalan mı?
- Öyleyse, bu örüntünün kuralı nedir?

Soruları ile öğrencilerin çözüme nasıl ulaştıkları, akıl yürütmeleri anlamaya çalışılmıştır. İkinci soruya benzer olarak üçüncü soruda da eksik öğeleri olan bir tekrarlı sayı örüntüsü verilerek öğrencilerden önce kuralını bulmaları, kurala uygun olarak da eksik öğeleri tamamlamaları istenmiştir. Dördüncü soruda ise öğrencilere genellikle doğrusal bir düzende verilen tekrarlı sayı örüntülerinde sunum şekli değiştirilerek öğrencilerin tekrarlı sayı örüntülerinin hep aynı düzende görmelerine alıştıkları için aynı bağlamda olup farklı tarzdaki sunulan sorular ile karşılaştıklarında şaşkınlıklarını önlemek için 4×4'lük kafes içerisinde sayı örüntüleri sunulmuş ve kafeste yatay ve dikey dizileri tamamlamaları istenmiştir. Beşinci çalışma sorusunda ise yalnızca ilk iki adımı doğru olan sayı örüntüleri verilmiş ve bu sayı örüntülerinde yanlış sıralamanın kaçınıcı adımdan itibaren başladığını, örüntü kuralını bulmaları istenmiştir. Bu soru ile de öğrencilerin sayılar arasında artan ya

da azalan sabit farkın her terim arasında olması gerektiğini fark ettirmek amacıyla oluşturulmuştur.

4. Oturum “Kurala Göre Sıralıyorum” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında öğrencilerin aralarında sabit fark olan artan ve azalan sayı örüntülerini genişletme ve oluşturma amacıyla genişleyen örüntü görevleri sunulur. Bu amaçla öncelikle öğrencilerin sunulan örüntü görevlerini genişletme çalışmalarına yer verilmiştir. Sunulan görevlerden birisi “4 ile başla 7 ekle” şeklindedir. İlk görevde öğrencilere rehber olması açısından sayı örüntüsündeki ilk terimin 4 olacağı, örüntü kuralının ise 7 eklemek olduğu belirtilerek 4’ü takip eden 2. Terimin ise $4+7$ işlemi sonucu 11 olacağı şeklinde açıklama yapılmıştır. Diğer görevlerin öğrencilerin tarafından yapılması için öğrencilere yeterli süre verilmiştir. Etkinliğin giriş kısmındaki görevleri pekiştirmek için uygulama kısmında “Tekrar Kurallı Sayı Örüntüleri” çalışma kâğıdı öğrencilere dağıtılarak öğrencilerin çalışma sorusunda verilen kurala göre genişleyen örüntü oluşturmaları istenmiştir. Tüm öğrenciler çalışmalarını bitirdikten sonra bireysel olarak her bir öğrenci ile süreci değerlendirmeye yönelik aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Örüntü adımlarını oluştururken neye dikkat ettin?
- ... Adımda bulunan sayı nedir?
- Bu örüntüleri 2 adım ilerlettiğinde ulaşılan sayıları bulunuz.

5. ve 6. Oturum “Fonksiyonel Kurallı Sayı Örüntüleri” Etkinliği

Giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşan etkinlik iki oturumda yapılmıştır. İlk oturumda etkinliğin giriş kısmına yer verilmiştir. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için araştırmacı tarafından sunum gerçekleştirilmiştir. Sunuma ek olarak öğrencilere “sayı örüntülerini tanımlarken iki tür genişleyen türden bahsetmiştik. Bunlar: tekrarlı ve fonksiyonel kural idi. Tekrarlı sayı örüntülerinde sayıdan önceki adımda veya adımlarda yer alan sayıların artış ve azalışına bakarak sonraki adımlardaki sayıları buluyorduk. Fonksiyonel kurallı genişleyen örüntülerde ise sayının bulunduğu adımdaki kuralına bağlı olarak diğer adımları bulabileceğiz” şeklinde açıklama yapılarak fonksiyonel kurallı örüntü öğretimi giriş yapılmıştır. Sunulan bilgileri pekiştirmek amacıyla öğrencilere görevler yöneltilmiştir. Görevlerde öğrencilerin fonksiyonel kurallı genişleyen örüntülerde örüntü kuralını bulma

ve devam ettirmeleri istenmiştir. Görevlere ilişkin öğrencilerin çözüm sürecini anlamaya yönelik aşağıdaki sorular sorulmuştur:

- Örüntünün kuralı nedir?
- Söylemiş olduğun kuralın geçerliliğine nasıl karar verdin?
- Örüntüyü devam ettirmeye devam ettirdiğinde 6. adımdaki sayıyı nasıl buldun?
- Bu örneklerde daha önce yapmış olduğun sayı örüntülerinin kurallarına göre nasıl bir farklılık var?

Sunulan bir başka görevde ise öğrencilerin şimdiye kadar gerçekleştirmiş oldukları çözüm stratejilerinden yola çıkarak çözüm yapmaları beklenmiştir. Yaptıkları çözüm stratejisini takiben öğrencilerin fonksiyon oluşturma amacıyla araştırmacı rehberlik etmiştir. Bu noktada öğrencilere uzak bir terim söylenerek ilgili terimdeki sayıyı bulmalarına yönelik nasıl akıl yürüttükleri belirlenmeye çalışılır. Öğrencilerin sunduğu çözüm yollarının değerlendirilmesinin ardından sayının bulunduğu adıma göre fonksiyon kuralının öğrenciler tarafından daha kolay tanımlanabilmesi amacıyla tablo gösterimi kullanılmıştır. Giriş kısmının ardından fonksiyonel sayı örüntülerini pekiştirmek amacıyla öğrencilere çalışma kâğıtları dağıtılmıştır. Öğrencilerden sayıların sıralamasını dikkate alarak fonksiyonel kuralı belirleyip, istenilen adımdaki sayıları bulmalarının ardından üç adım devam ettirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin için yeni bir bilgi olan fonksiyonel kuralın iki işlemden oluştuğu ve çarpma işleminin ardından toplama ya da çıkarma işleminin geleceği bilgisi ipucu olarak çalışma kâğıtlarında öğrencilerin dikkatlerini çekecek bir konuma yerleştirilmiştir. Etkinliğin öğrencilerden tarafından yapılması için yeterli süre verilmiş ve etkinliğin ardından öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini ortaya çıkaracak değerlendirmeler yapılmıştır.

Şekil Örüntüleri Çalışmaları

1. Oturum “Kibrit Çöpleri- Geometrik Şekil Örüntüleri” Etkinliği

“Kibrit Çöpleri-Geometrik Şekil Örüntüleri” etkinliğinde genişleyen geometrik şekil örüntülerine yer verilmiştir. Bu amaçla genişleyen geometrik şekil örüntülerinin yer aldığı çalışma kâğıdı öğrencilerin bireysel çalışmalarını gerçekleştirmeleri amacıyla dağıtılmıştır. Öğrencilerin çalışma kâğıtlarında yer alan görevlere yönelik deneme yapmaları için fırsat verilmiştir. Öğrencilere örnek olması açısından bir görev katılımcı grubuyla beraber yapılmıştır.

- İlk şekil için kaç kibrit çöpü gerekmektedir?
- Bir sonraki şekil için kaç kibrit çöpü gerekmektedir?
- Geometrik şeklin bulunduğu adım ile şekilde yer alan kibrit çöpü sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bulduğunuz kuralın geçerliliğine nasıl karar verdiniz?
- Öyleyse, 50. adımdaki şekilde kaç tane kibrit çöpü vardır?

Soruları ile sınıf ortamında gerçekleştirilen tartışma ortamıyla geometrik şekil ve şekildeki nesne sayısının fonksiyon kuralına ilişkin genellemeye ulaşılmıştır. Gerçekleştirilen örnek görevin ardından öğrencilerin pekiştirmeleri amacıyla çalışma kâğıtlarındaki ilgili görevleri gerçekleştirmişlerdir. “Kibrit Çöpleri-Geometrik Şekil Örüntüleri” etkinliği ile öğrencilerin fonksiyonel kuralı sözcükle ya da sayı ile yazabildikleri, fonksiyonel kural ile ilgili eşitlik yazabildikleri, genellemeye ulaşabildikleri, tablo gösterimi ile çoklu temsil kullanabildikleri, öğrencilerin fonksiyonel düzeyde düşünebildikleri görülmüştür.

2. Oturum “Sarı Üçgenler” Etkinliği

“Sarı Üçgenler” etkinliğinde genişleyen şekil örüntülerine yer verilmiştir. Bu doğrultuda genişleyen geometrik şekil örüntülerinin yer aldığı çalışma kâğıdı öğrencilere bireysel çalışmalarını gerçekleştirmeleri amacıyla dağıtılmıştır. Öğrencilerin çalışma kâğıtlarında yer alan görevlerin çözümüne yönelik deneme yapmaları için fırsat verilmiştir. Öğrenciler ile etkinlikte yer alan geometrik şekil örüntülerine ilişkin aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- İlk 3 adımı verilen şekil örüntüsünü inceleyiniz. İlk adımdaki üçgen sayısı nedir?
- İkinci ve üçüncü adımdaki üçgen sayısı nedir?
- Şeklin bulunduğu adım ile o adımda yer alan üçgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Örüntünün kuralı sizce nedir? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misin?
- Belirttiğiniz kuraldan başka çözüm önerileriniz var mı?
- Örüntü kuralının her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

- Belirttiğiniz kural doğrultusunda üçgen sayılarını tabloya yerleştiriniz ve örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
- 20. adımdaki üçgen sayısını bulurken nasıl bir yol izlersiniz?
- Herhangi bir adımdaki toplam üçgen sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

Soruların yönlendirilmesinin ardından sınıf ortamında gerçekleştirilen tartışma ortamıyla geometrik şekil ve şekildeki nesne sayısının fonksiyon kuralına ilişkin genellemeye ulaşmaları ve gerekçelendirmeleri hedeflenmiştir. “Sarı Üçgenler” etkinliği ile öğrencilerin fonksiyonel kuralı kelime veya sembolle ifade edebildikleri, fonksiyonel kurala yönelik genelleme ve gerekçelendirme yapabildikleri, tablo gösterimi ile çoklu temsil kullanabildikleri, öğrencilerin fonksiyonel düzeyde düşünebildikleri görülmüştür.

3. Oturum “Uç Uca Küpler” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için küplerden oluşan geometrik şekil örüntüsü görseli öğrencilere sunulmuştur. Görselle ilişkin öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Görselde sunulan şekil örüntüsünü inceleyiniz. Görselde ilk 3 adımı verilen örüntüde küpler sizce nasıl dizilmiş?
- Her adımdaki küpler oluşturulurken hangi noktalara dikkat edilmiş olabilir?

Soruların yöneltilmesi ile öğrencilerin genişleyen geometrik şekil örüntüsüne ilişkin var olan düşünceleri ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Etkinliğe giriş kısmının ardından öğrencilerin geometrik şekil örüntüsüne ilişkin bireysel çalışmalarını gerçekleştirmeleri amacıyla “Uç uca küpler” çalışma kâğıdı dağıtılmıştır. Öğrencilerin çalışmalarını gerçekleştirmeleri için yeterli ve gerekli zaman verilmiştir. Tüm öğrenciler etkinliği bitirdikten sonra bireysel soru- cevap kısmına geçilmiştir. Öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Şeklin bulunduğu adım ile küp sayısı arasında sizce nasıl bir ilişki vardır?
- Belirttiğiniz adım sayısı ile küp sayısı arasındaki ilişkiye göre örüntüyü 5 adım devam ettirebilir misiniz?
- Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?

- Örüntü kuralını nasıl ifade edersiniz? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misiniz?
- Örüntü kuralınıza alternatif kural geliştirebilir misiniz?
- Belirttiğiniz kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- 50. adımdaki küp sayısını bulurken nasıl bir yol izlersiniz?
- Uzak terimdeki küp sayısını bulurken belirttiğiniz örüntü kuralları içerisinde sizce hangisi daha kullanışlıdır? Nedenini açıklar mısınız?
- Herhangi bir adımdaki toplam küp sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

Sorular, öğrencilerin adım sayısı ile küp sayısını nasıl ilişkilendirdiği, belirlediği ilişkiye göre örüntüyü devam ettirip ettiremediği buradan yola çıkarak küp sayısını veren fonksiyonel kuralı genelleme ve gerekçelendirmesine yönelik akıl yürütmeleri ortaya çıkarmak amacıyla sorulmuştur. Ayrıca öğrencilerin yakın adımdaki küp sayısı sorulduğunda üzerine ekleme, sayma, modelleme gibi çözüm yolları ile örüntüyü devam ettirirken uzak adımdaki küp sayısı soruları ile öğrencilerin kullandıkları çözüm yollarına alternatif olacak genellemelere ulaşmaları hedeflenmiştir. Öğrencilerden şeklin bulunduğu adıma bağlı olarak küp sayısını tabloya yerleştirmeleri istenerek aralarındaki ilişkiyi daha iyi fark edebilmeleri ve çoklu temsil kullanmalarını desteklenmiştir. Buna ilaveten öğrencilerin çoklu temsil kullanmalarına ilişkin genel kuralı oluştururken kelime veya sembol kullanmalarına yönelik bilgi verilmiştir. Uygulamanın ardından etkinliğe yönelik değerlendirmelerde bulunulmuştur.

4. Oturum “Kareleri Diziyorum” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için karelerden oluşan geometrik şekil örüntüsü görseli öğrencilere sunulmuştur. Görsele ilişkin öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Görselde sunulan şekil örüntüsünü inceleyiniz. Karelerin dizilişi hakkında görüşleriniz nelerdir?
- Her adımdaki kareleri yerleştirirken nelere dikkat edilmiş olabilir?

Sorular ile öğrencilerin genişleyen geometrik şekil örüntüsüne ilişkin var olan düşünceleri ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Etkinliğe giriş kısmının ardından öğrencilerin geometrik şekil örüntüsüne ilişkin gerçekleştirecekleri iki görevin yer aldığı “Kareleri Diziyorum” çalışma kâğıdı dağıtılmıştır. Öğrencilerden şekil örüntülerinde yer alan kare sayısı ile şeklin bulundurduğu adım arasındaki ilişkiyi belirleyerek örüntüyü devam ettirmeleri ve kare sayısını veren fonksiyonel kurala ulaşmaları istenmiştir. Öğrencilerin çalışmalarını gerçekleştirmeleri için yeterli ve gerekli zaman verilmiştir. Bireysel çalışan öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Şeklin bulunduğu adım ile kare sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Belirttiğiniz adım sayısı ile kare sayısı arasındaki ilişki doğrultusunda örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
- Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
- Örüntünün kuralı nedir? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misiniz?
- Örüntü kuralınıza alternatif bir kural daha oluşturabilir misiniz?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- 50. adımdaki kare sayısını nasıl bulursunuz?
- Herhangi bir adımdaki toplam kare sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

Soruları ile öğrencilerle değerlendirmeler yapılmıştır. İlk üç soru ile öğrencilerin şeklin bulunduğu adım ile kare sayısını ilişkilendirmeleri, genişleyen şekil örüntüsünü devam ettirmeleri sağlanmıştır. Dördüncü ve beşinci soru ile öğrencilerin fonksiyonel kuralı tanımlama, oluşturma, genel kuralı açıklamalarına yönelik akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin belirlediği fonksiyonel kural dışında alternatif kural belirlemeleri istenerek öğrencilerin fonksiyonel kuralı genelleyerek uzak adımdaki kare sayıları sorularını kolaylıkla bulmaları amaçlanmıştır. Altıncı soru ile öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri gerekçelendirmeleri istenmiştir. Çoklu temsil kullanmaları amacıyla şeklin bulunduğu adıma bağlı olarak kare sayısını tabloya yerleştirmeleri, kare sayısını veren genel kuralı oluştururken kelime veya sembolden yararlanabilecekleri söylenmiştir.

5. Oturum “Renkli Daireler” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya y6nelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için dairelerden oluşan geometrik şekil 6r6nt6s6 g6rseli 6đrencilere sunulmuştur. 6đrencilerin geometrik şekil 6r6nt6s6ne ilişkin var olan d6ř6ncelerini ortaya çıkarmak için “Dairelerin sıralanışında dikkatinizi çeken noktalar nelerdir?” sorusu ile etkinliğe giriş yapılmıştır. Uygulama kısmında 6đrencilerin bireysel olarak gerçekleştirecekleri “Renkli Daireler” alışma kâğıdı 6đrencilere dağıtılmıştır. 6đrencilerden şekil 6r6nt6lerinde yer alan daire sayısı ile şeklin bulunduğu adım arasındaki ilişkiyi belirleyerek 6r6nt6y6 devam ettirmeleri ve daire sayısını veren fonksiyonel kurala ulaşmaları istenmiştir. 6đrencilerin çalışmalarını gerçekleştirmeleri için yeterli ve gerekli zaman verilmiştir. 6đrencilerin deneme yanılma yoluyla 6z6me ulaşmaları için 6đrenciler cesaretlendirilmiştir. Bu amaçla bireysel çalışan 6đrencilere aşağıdaki sorular y6neltilmiştir:

- İlk adımda kaç tane daire vardır?
- İkinci adımda kaç tane daire vardır?
- 66nc6 ve d6rd6nc6 adımdaki daire sayıları nelerdir?
- Her adımda daireleri yerleştirirken nelere dikkate edilmiş olabilir?
- şeklin bulunduğu adım ile daire sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Belirtmiş olduğunuz adım sayısı ile daire sayısı arasındaki ilişkiye g6re 6. adımda kaç tane daire vardır? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklar mısınız?
- 10. adımda kaç tane nokta vardır? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklar mısınız?
- Daire sayısını veren genel 6r6nt6 kuralı nedir?
- 6r6nt6 kuralınıza alternatif bir kural daha oluşturabilir misiniz?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Sorularının y6neltilmesi ile 6đrencilerin şeklin bulunduğu adım ile daire sayısına ilişkin d6ř6nceleri, genişleyen şekil 6r6nt6s6n6 devam ettirmelerine y6nelik akıl y6r6tmelerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Buna ilaveten daire sayısını veren genel kuralı oluşurmaları istenerek 6đrencilerin genellemeye ulaşmaları ve genellemelerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. 6đrencilerin daire sayısını veren kurala alternatif kural

keşfetmeleri istenerek de fonksiyonel düşünme düzeyleri belirlenmeye çalışılmıştır. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Uygulamanın ardından etkinliğe yönelik değerlendirmelerde bulunulmuştur.

6. Oturum “Yıldızlı Beşgenler” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için problem durumu hikâye bağlamında sunulmuştur: “Ali, beşgen ve yıldız şekillerini kullanarak aşağıdaki örüntüyü hazırlamıştır. Ama örüntüsünü devam ettirmekte ve örüntü kuralını bulmakta biraz zorluk çekmektedir. Ali’nin “Yıldızlı Beşgenler” isimli örüntüsünü hem devam ettirip hem de örüntü kuralını bulmasına yardımcı olmak ister misiniz? O halde çalışma kâğıdında yer alan tabloyu verilen şekil örüntüsü doğrultusunda hazırlayarak başlayabilirsiniz.” Problem durumunun ardından öğrencilere bireysel olarak gerçekleştirecekleri “Yıldızlı Beşgenler” çalışma kâğıdı dağıtılmıştır. Bireysel olarak çalışan öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- İlk 3 adımı verilen şekil örüntüsünü inceleyiniz. İlk adımdaki yıldız ve beşgen sayısı nedir?
- İkinci ve üçüncü adımdaki yıldız ve beşgen sayısı nedir?
- Yıldız sayısı ile şeklin bulunduğu adım arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 10. adımdaki yıldız sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?
- Yıldız sayısını veren genel kural nedir?
- Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- Beşgen sayısı ile şeklin bulunduğu adım arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 15. adımdaki beşgen sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?
- Beşgen sayısını veren genel kural nedir?
- Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Sorularının yöneltilmesi ile öğrencilerin şeklin bulunduğu adım ile yıldız ve beşgen sayılarına ilişkin düşünceleri, genişleyen şekil örüntüsünü devam ettirmelerine yönelik akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Buna ilaveten yıldız ve beşgen sayısını veren genel kuralı oluşturmaları istenerek öğrencilerin genellemeye ulaşmaları ve genellemelerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin yıldız sayısını veren kurala alternatif kural keşfetmeleri istenerek de fonksiyonel düşünme düzeyleri belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilere ek olarak beşgen sayısını veren genel kurala ilişkin aşağıdaki sorular yöneltmiştir:

- Yıldız sayısı ile beşgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bu durumda beşgen sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
- Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Sorularının yöneltilmesinin ardından öğrencilerin ulaştıkları beşgen sayısını veren genel kurala alternatif başka bir kural daha geliştirmeleri hedeflenmiştir. Buna ilaveten öğrencilerin yıldız sayısının şeklin bulunduğu adım sayısı ile ilişkilendirmeleri sağlanarak beşgen sayısının genel kuralı için şeklin bulunduğu adım ile yıldız sayısı eşit ise “Yıldız Sayısı-1” ile de beşgen sayısını bulabilecekleri sonucuna ulaşmaları hedeflenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken tablo oluşturma, çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Uygulamanın ardından etkinliğe yönelik değerlendirmelerde bulunulmuştur.

7. Oturum “Ayşe’nin Örüntü Tasarımı” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için problem durumu hikâye bağlamında sunulmuştur: “Ayşe, şekiller kullanarak bir örüntüyü hazırlamaya başlamış ve üçüncü adımı da oluşturduktan sonra kafası karışmış ve yarım bırakmış. Sizler Ayşe’nin yarım bıraktığı tabloyu doldurmasına yardımcı olmak ister misiniz? O halde tabloyu doldurabilmek için öncelikle Ayşe’nin tasarladığı görselleri inceleyiniz” şeklinde problem durumu sunulduktan sonra öğrencilere bireysel olarak gerçekleştirecekleri iki etkinlik kısmından oluşan “Ayşe’nin Örüntü Tasarımı” çalışma kâğıdı dağıtılmıştır. İlk kısım için bireysel olarak çalışan öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltmiştir:

- (Etkinlik hikâye bağlamında sunulduktan sonra) ilk adımda artı sayısı nedir?

- İkinci ve üçüncü adımdaki artı sayısı nedir?
- Şeklin bulunduğu adım ile artı sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
- Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
- Artı sayısını veren genel kural nedir?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- İlk adımdaki dikdörtgen sayısı nedir?
- İkinci ve üçüncü adımdaki dikdörtgen sayısı nedir?
- Şeklin bulunduğu adım ile dikdörtgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
- Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
- Dikdörtgen sayısını veren genel kural nedir?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- 12. adımdaki artı ve dikdörtgen sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?

Sorularının yöneltilmesi ile öğrencilerin şeklin bulunduğu adım ile artı ve dikdörtgen sayılarına ilişkin düşünceleri, genişleyen şekil örüntüsünü devam ettirmelerine yönelik akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Buna ilaveten artı ve dikdörtgen sayısını veren genel kuralı oluşturmaları istenerek öğrencilerin genellemeye ulaşmaları ve genellemelerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin artı sayısını veren kurala alternatif kural keşfetmeleri istenerek de fonksiyonel düşünme düzeyleri belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilere ek olarak dikdörtgen sayısını veren genel kurala ilişkin aşağıdaki sorular yöneltmiştir:

- Artı sayısı ile dikdörtgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bu durumda dikdörtgen sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
- Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Sorularının yöneltilmesinin ardından öğrencilerin ulaştıkları dikdörtgen sayısını veren genel kurala alternatif başka bir kural daha geliştirmeleri hedeflenmiştir. Buna

ilaveten öğrencilerin artı sayısının şeklin bulunduğu adım sayısı ile ilişkilendirmeleri sağlanarak dikdörtgen sayısının genel kuralı için şeklin bulunduğu adım ile artı sayısı eşit ise “Artı Sayısı $\times$ 2-2” ile de dikdörtgen sayısını bulabilecekleri sonucuna ulaşmaları hedeflenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Etkinliğin ikinci kısmında “Merve, Ayşe’nin örüntüsünü devam ettirdiğinde görseldeki şekle ulaşmıştır. Sizlerden bu kısımda görseli inceleyip yönelteceğim sorular hakkındaki görüşlerinizi gerekçelendirerek belirtmenizdir. Hazırsanız, başlayalım” problem durumu öğrencilere sunulduktan sonra öğrencilerin akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak için aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Merve, Ayşe’nin örüntüsünü devam ettirmiş ve görselde sunulan şekle ulaşmıştır. Sizce bu şeklin bulunduğu adım nedir?
- Şeklin bulunduğu adımı belirlerken nelere dikkat ettiniz? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?

Sorularının yönlendirilmesinin ardından öğrencilerin şeklin bulunduğu adımı belirlerken artı sayısını mı yoksa dikdörtgen sayısını mı dikkate aldığı, artı sayısı ile dikdörtgen sayısını ilişkilendirerek bulduğu alternatif dikdörtgen sayısı genel kuralına çözümünde yer verip vermediğine gerekçelendirmesinde dikkat edilmiştir. Ayrıca bu etkinlik ile öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken tablo oluşturma, çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Uygulamanın ardından etkinliğe yönelik değerlendirmelerde bulunulmuştur.

8. Oturum “Kaç Ev Kaç Kişi?” Etkinliği

Etkinlik giriş, uygulama ve değerlendirme kısımlarından oluşmaktadır. Etkinliğin giriş kısmında konuya yönelik ilgi çekmek ve merak uyandırmak için dairelerden oluşan şekil örüntüsü görseli öğrencilere sunulmuştur. Öğrencilerin şekil örüntüsüne ilişkin var olan düşüncelerini ortaya çıkarmak için “Görselde yer alan örüntünün sıralanışında dikkatinizi çeken noktalar nelerdir?” sorusu ile etkinliğe giriş yapılmıştır. Uygulama kısmında öğrencilerin bireysel olarak gerçekleştirecekleri “Kaç Ev Kaç Kişi?” çalışma kâğıdı öğrencilere dağıtılmıştır. Öğrencilerden şekil örüntülerinde yer alan ev sayısı ile evlerde yaşayan kişi sayısını ilişkilendirerek örüntüyü devam ettirmeleri ve ev sayısını ve

yaşayan kişi sayısını veren fonksiyonel kurala ulaşmaları istenmiştir. Öğrencilerin çalışmalarını gerçekleştirmeleri için yeterli ve gerekli zaman verilmiştir. Bu amaçla bireysel çalışan öğrencilere aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- İlk 3 adımdaki ev sayısı nedir?
- Şeklin bulunduğu adım ile ev sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Örüntüyü 4 adım devam ettirdiğinizde 7. adımdaki ev sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
- Ev sayısını veren genel kural nedir?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
- İlk 3 adımdaki kişi sayıları nelerdir?
- Şeklin bulunduğu adım ile kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Örüntüyü 4 adım devam ettirdiğinizde 7. adımdaki kişi sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
- Kişi sayısını veren genel kural nedir?
- Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Sorularının yöneltilmesinin ardından öğrencilerin şeklin bulunduğu adım ile ev ve yaşayan kişi sayılarına ilişkin düşünceleri, genişleyen şekil örüntüsünü devam ettirmelerine yönelik akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak hedeflenmiştir. Buna ilaveten ev ve yaşayan kişi sayısını veren genel kuralı oluşturmaları istenerek öğrencilerin genellemeye ulaşmaları ve genellemelerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin yaşayan kişi sayısını veren kurala alternatif kural keşfetmeleri istenerek de fonksiyonel düşünme düzeyleri belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilere ek olarak yaşayan kişi sayısını veren genel kurala ilişkin aşağıdaki sorular yöneltilmiştir:

- Ev sayısı ile evlerde yaşayan kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bu durumda kişi sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
- Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

Soruları ile de öğrencilerin ulaştıkları yaşayan kişi sayısını veren genel kurala alternatif başka bir kural daha geliştirmeleri hedeflenmiştir. Buna ilaveten öğrencilerin ev sayısının şeklin bulunduğu adım sayısı ile ilişkilendirmeleri sağlanarak yaşayan kişi sayısının genel

kuralı için şeklin bulunduğu adım ile ev sayısı eşit ise “Ev Sayısı $\times$ 4” ile de yaşayan kişi sayısını bulabilecekleri sonucuna ulaşmaları hedeflenmiştir. Etkinlikte öğrencilerin genel kuralı oluştururken çizim, kelime, sembol gibi temsillerden yararlanabilecekleri belirtilerek çoklu temsil kullanmaları desteklenmiştir. Uygulamanın ardından etkinliğe yönelik değerlendirmelerde bulunulmuştur.



EK-2: Odak Grup Görüşme Soruları

Sayı Örüntüleri Görüşme Soruları

1. Oturum “Tekerleme” Etkinliğindeki Sorular

1. (Çeşitli genişleyen sayı örüntü görevlerinin ardından) sıralamada yer alan sayıları inceleyiniz. Sayılar artarak mı yoksa azalarak mı sıralanmıştır?
2. Belirttiğiniz sayı ilişkisine göre sayılar kaçar artarak/ azalarak devam ediyor?
3. Her sayı arasındaki artış/azalış aynı mıdır?
4. Bu şekilde aralarındaki artış ya da azalış sabit ise bu sıralama bir örüntü müdür? Nedenini açıklayınız?
5. Örüntüde verilmeyen sayılar nelerdir?
6. Verilmeyen sayıyı nasıl bulduğunuzu ve örüntüyü nasıl devam ettirdiğinizi açıklayabilir misiniz?
7. Örüntü kuralını nasıl ifade edersiniz?
8. Sınıfımızı incelediğinizde artan ya da azalan örüntülere örnekler verebilir misiniz?
9. Tekerlemeleri inceleyiniz. Tekerlemelerde yer alan sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır?
10. Sayılar arasındaki ilişkileri belirlerken nelere dikkat ettiniz?
11. Belirttiğiniz sayı ilişkisi/lerine yönelik dikkatinizi çeken başka bir özellik var mı?
12. Tekerlemede yer alan örüntü kurallarını nasıl ifade edersiniz? Belirttiğiniz örüntü kuralına alternatif olarak başka bir örüntü kuralı bulabilir misiniz?

2. Oturum “Tavşan Momi’yi Havuçlara Ulaştır” Etkinliğindeki Sorular

1. Öğrencilere problem durumu sunulur. Çalışma kağıdında Tavşan Momi’nin 100 yazılı taşa ulaşması için verilen yüzlük sayma tablosunda yazılı olmayan taşlar olduğunu görmektesiniz. Bu taşları nasıl numaralandırırsınız?
2. Numaralandırırken nelere dikkat ettiniz? Dikkatinizi çeken başka bir özellik var mı?
3. Yazmış olduğunuz sayılar arasında nasıl ilişkiler fark ettiniz?
4. Belirttiğiniz bu sayı ilişkileri arasındaki artış ya da azalış nedir?

5. Tavşan Momi'yi 100 yazılı taşa ulaştırmak için çözüm önerileriniz nelerdir?
6. Başka hangi sayıları kullanabilirsiniz?
7. Momi'nin havuçlara ulaşmasında kullandığınız sayılar arasındaki ilişki nedir?
8. Bu sayılar arasındaki artış/ azalış nedir?
9. Tüm sayılar arasındaki artan/azalan sayılar arasındaki fark sabit midir?
10. Momi'yi 100 yazılı taştaki havuca ulaştırmak için belirlediğiniz sayıları yuvarlak içine alır mısınız? Buradaki örüntü kuralını ifade edebilir misiniz?
11. Momi'yi havuca ulaştırmak için başka çözüm öneriniz var mı?

3. Oturum “Sayı Örüntülerinin Kuralı” Etkinliğindeki Sorular

1. Daire içerisinde yer alan sayıları inceleyiniz. Bu sayılar arasındaki ilişki için neler söyleyebilirsiniz?
2. Belirttiğiniz sayı ilişkisine alternatif olarak başka bir sayı ilişkisi fark ediyor musunuz?
3. Bu sayıları sıralayabilir misiniz? Sayıları sıralarken nelere dikkat ettiniz?
4. Sıralamana alternatif olarak başka bir sıralama daha oluşturabilir misiniz?
5. Sıraladığınız sayılar arasındaki fark her sayı arasında aynı mı farklı mı?
6. Sıralamanızdaki kural için neler söyleyebilirsiniz?
7. Belirtmiş olduğunuz örüntü kuralı doğrultusunda örüntünüzü 3 adım devam ettirir misiniz?
8. Örüntülerde verilmeyen sayılar olduğu görülmektedir. Sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu sonuca nasıl ulaştığınızı açıklayınız?
9. Verilmeyen sayıları nasıl bulursunuz?
10. Sayılar arasındaki ilişkiyi dikkate aldığınızda sayılar arasında artan mı yoksa azalan yönde mi bir ilişki vardır?
11. Bu örüntünün kuralı nedir?

4. Oturum “Kuralla Göre Sıralıyorum” Etkinliğindeki Sorular

1. Burada verilen kuralın artan ya da azalan örüntüye ait olduğuna nasıl karar verdiniz?

2. Verilen kurala göre örüntü adımlarını oluştururken nelere dikkat ettiniz?
 3. Kural doğrultusunda 3. adımda bulunan sayıyı nasıl belirlersiniz?
 4. Örüntüleri 2 adım ilerlettiginizde ulaştığınız sayılar nelerdir?
5. ve 6. Oturum “Fonksiyonel Kurallı Sayı Örüntüleri” Etkinliğindeki Sorular
1. (Çeşitli fonksiyonel kurallı genişleyen örüntü görevlerinin ardından) örüntü kuralını nasıl ifade edersiniz?
 2. Belirttiğiniz örüntü kuralının geçerliliğine nasıl karar verdiniz?
 3. Örüntüyü devam ettirdiğinizde 6.adımdaki sayıyı bulurken nelere dikkat ettiniz?
 4. 100. adım gibi uzak bir adımdaki sayıyı bulmanız istenildiğinde nasıl bir yol izlersiniz?
 5. Bu örnekler ile daha önce yapmış olduğunuz örnekler arasında benzerlik ve farklılıklar nelerdir?
 6. Verilen sayıları tabloya yerleştirmeniz istenildiğinde sayıları nelere dikkat ederek yerleştirirsiniz?
 7. Tabloya yerleştirdiğiniz sayılar arasındaki fonksiyonel kural nedir?
 8. Kuralı nasıl bulduğunuzu ve bulduğunuz kuralın her adımda geçerli olup olmadığını detaylı olarak açıklayabilir misiniz?

Şekil Örüntüleri Görüşme Soruları

1. Oturum “Kibrit Çöpleri” Etkinliğindeki Sorular
1. (Kibrit çöplerinden oluşan şekil örüntüleri görselinin ardından) bu görüntüler hakkında görüşleriniz nelerdir?
 2. Daha önce bu şekiller ile karşılaştınız mı? Örnek verir misiniz?
 3. Bu şekiller sizce nasıl oluşmuştur?
 4. İlk şekil için kaç kibrit çöpü gerekmektedir?
 5. Bir sonraki şekil için kaç kibrit çöpü gerekmektedir?
 6. Geometrik şeklin bulunduğu adım ile o adımda yer alan kibrit çöpü sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
 7. Bulduğunuz kurala alternatif çözüm öneriniz var mı?

8. Belirttiğiniz kuralın geçerliliğine nasıl karar verdiniz?

9. 50.adımdaki şekilde kaç kibrit çöpü yer alır?

2. Oturum “Sarı Üçgenler” Etkinliğindeki Sorular

1. İlk 3 adımı verilen şekil örüntüsünü inceleyiniz. İlk adımdaki üçgen sayısı nedir?

2. İkinci ve üçüncü adımdaki üçgen sayısı nedir?

3. Şeklin bulunduğu adım ile o adımda yer alan üçgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

1. Örüntünün kuralı sizce nedir? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misin?

4. Belirttiğiniz kuraldan başka çözüm önerileriniz var mı?

5. Örüntü kuralının her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

6. Belirttiğiniz kural doğrultusunda üçgen sayılarını tabloya yerleştiriniz ve örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?

7. 20. adımdaki üçgen sayısını bulurken nasıl bir yol izlersiniz?

8. Herhangi bir adımdaki toplam üçgen sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

3. Oturum “Uç Uca Küpler” Etkinliğindeki Sorular

2. Görselde sunulan şekil örüntüsünü inceleyiniz. Görselde ilk 3 adımı verilen örüntüde küpler sizce nasıl dizilmiş?

3. Her adımdaki küpler oluşturulurken hangi noktalara dikkat edilmiş olabilir?

4. Şeklin bulunduğu adım ile küp sayısı arasında sizce nasıl bir ilişki vardır?

5. Belirttiğiniz adım sayısı ile küp sayısı arasındaki ilişkiye göre örüntüyü 5 adım devam ettirebilir misiniz?

6. Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?

7. Örüntü kuralını nasıl ifade edersiniz? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misiniz?

8. Örüntü kuralınıza alternatif kural geliştirebilir misiniz?

9. Belirttiğiniz kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

10. 50. adımdaki küp sayısını bulurken nasıl bir yol izlersiniz?
11. Uzak terimdeki küp sayısını bulurken belirttiğiniz örüntü kuralları içerisinde sizce hangisi daha kullanışlıdır? Nedenini açıklar mısınız?
12. Herhangi bir adımdaki toplam küp sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

4. Oturum “Kareleri Diziyorum” Etkinliğindeki Sorular

1. Görselde sunulan şekil örüntüsünü inceleyiniz. Karelerin dizilişi hakkında görüşleriniz nelerdir?
2. Her adımdaki kareleri yerleştirirken nelere dikkat edilmiş olabilir?
3. Şeklin bulunduğu adım ile kare sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
4. Belirttiğiniz adım sayısı ile kare sayısı arasındaki ilişki doğrultusunda örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
5. Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
6. Örüntünün kuralı nedir? Buna nasıl karar verdiğini ayrıntılı bir şekilde açıklayabilir misin?
7. Örüntü kuralınıza alternatif bir kural daha oluşturabilir misiniz?
8. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
9. 50. adımdaki kare sayısını nasıl bulursunuz?
10. Herhangi bir adımdaki toplam kare sayısını veren kuralı kelime veya sembol kullanarak nasıl ifade edersiniz?

5. Oturum “Renkli Daireler” Etkinliğindeki Sorular

1. (İlk 4 adımı verilen şekil örüntüsü görselinin ardından) dairelerin sıralanışında dikkatinizi çeken noktalar nelerdir?
2. İlk adımda kaç tane daire vardır?
3. İkinci adımda kaç tane daire vardır?
4. Üçüncü ve dördüncü adımdaki daire sayıları nelerdir?
5. Her adımda daireleri yerleştirirken nelere dikkate edilmiş olabilir?
6. Şeklin bulunduğu adım ile daire sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

7. Belirtmiş olduğunuz adım sayısı ile daire sayısı arasındaki ilişkiye göre 6. adımda kaç tane daire vardır? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
8. 10. adımda kaç tane nokta vardır? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
9. Daire sayısını veren genel örüntü kuralı nedir?
10. Örüntü kuralınıza alternatif bir kural daha oluşturabilir misiniz?
11. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

6. Oturum “Yıldızlı Beşgenler” Etkinliğindeki Sorular

1. İlk 3 adımı verilen şekil örüntüsünü inceleyiniz. İlk adımdaki yıldız ve beşgen sayısı nedir?
2. İkinci ve üçüncü adımdaki yıldız ve beşgen sayısı nedir?
3. Yıldız sayısı ile şeklin bulunduğu adım arasında nasıl bir ilişki vardır?
4. 10. adımdaki yıldız sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
5. Yıldız sayısını veren genel kural nedir?
6. Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
7. Beşgen sayısı ile şeklin bulunduğu adım arasında nasıl bir ilişki vardır?
8. 15. adımdaki beşgen sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıkla mısınız?
9. Beşgen sayısını veren genel kural nedir?
10. Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
11. Yıldız sayısı ile beşgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
12. Bu durumda beşgen sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
13. Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

7. Oturum “Ayşe’nin Örüntü Tasarımı” Etkinliğindeki Sorular

1. (Etkinlik hikaye bağlamında sunulduktan sonra) ilk adımda artı sayısı nedir?
2. İkinci ve üçüncü adımdaki artı sayısı nedir?

3. Şeklin bulunduğu adım ile artı sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
4. Örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
5. Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
6. Artı sayısını veren genel kural nedir?
7. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
8. İlk adımdaki dikdörtgen sayısı nedir?
9. İkinci ve üçüncü adımdaki dikdörtgen sayısı nedir?
10. Şeklin bulunduğu adım ile dikdörtgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
11. Örüntüyü 5 adım devam ettirir misiniz?
12. Örüntüyü devam ettirirken nelere dikkat ettiniz?
13. Dikdörtgen sayısını veren genel kural nedir?
14. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
15. 12. adımdaki artı ve dikdörtgen sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?
16. Artı sayısı ile dikdörtgen sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
14. Bu durumda dikdörtgen sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
15. Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
17. Merve, Ayşe'nin örüntüsünü devam ettirmiş ve görselde sunulan şekle ulaşmıştır. Sizce bu şeklin bulunduğu adım nedir?
18. Şeklin bulunduğu adımı belirlerken nelere dikkat ettiniz? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?

8. Oturum “Kaç Ev Kaç Kişi?” Etkinliğindeki Sorular

1. İlk 3 adımı verilen örüntüyü inceleyiniz. İlk 3 adımdaki ev sayısı nedir?
2. Şeklin bulunduğu adım ile ev sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
3. Örüntüyü 4 adım devam ettirdiğinizde 7. adımdaki ev sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?
4. Ev sayısını veren genel kural nedir?

5. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
6. İlk 3 adımdaki kişi sayıları nelerdir?
7. Şeklin bulunduğu adım ile kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
8. Örüntüyü 4 adım devam ettirdiğinizde 7. adımdaki kişi sayısı nedir? Nasıl bulduğunuzu ayrıntılı olarak açıklayınız?
9. Kişi sayısını veren genel kural nedir?
10. Kuralınızın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?
11. Ev sayısı ile evlerde yaşayan kişi sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
12. Bu durumda kişi sayısının bir diğer genel kuralı ne olur?
13. Bu kuralın her adımda geçerli olduğuna nasıl karar verdiniz?

EK-3: Gözlem Formu

	İçerik	Evet	Hayır	Açıklama
Örüntü Çalışmaları	Şekil örüntüsünde örüntü kuralını bulur.			
	Şekil örüntüsünde eksik bırakılan öğeleri tamamlar.			
	Şekil örüntüsü oluşturur.			
	Aralarında sabit fark olan sayı örüntülerini tanır.			
	Sayı örüntülerinin kuralını bulur.			
	Sayı örüntülerinde eksik bırakılan öğeleri tanımlar.			
	Bir geometrik örüntüdeki kuralı kullanarak yeni örüntü oluşturur.			
	Sayı örüntüsünü genişletir.			
	Sayı örüntüsü oluşturur.			
	Artan veya azalan sayı örüntüsü oluşturur.			
	Artan veya azalan sayı örüntülerinin kuralını açıklar.			
	Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder.			
	Kuralı harfle ifade edilen örüntüde istenilen terimi bulur.			
Temsil	Tablo, grafik, şekil veya resim yolu ile gösterim yapar.			
	Sayısal ve matematiksel gösterimler kullanır.			
	Sözel olarak temsil yapar.			
	Kelime veya semboller ile cebirsel gösterim yapar.			
Genelleme	Modelleme yolu ile genellemeye varır.			
	Sayma ile genellemeye varır.			
	Yinelemeli strateji ile genellemeye varır.			
	Bütüne genişletme ile genellemeye varır.			
	Doğrusal yolla genellemeye varır.			
Gerekçe	Açıklama yolu doğrulama yapar.			
	Figural yolla doğrulama yapar.			
	Sayısal yolla doğrulama yapar.			
	Cebirsel yolla doğrulama yapar.			
Fonksiyonel Düşünme	L0			
	L1			
	L2			
	L3			
	L4			
	L5			
	L6			
	L7/L8			
	L9/L10			

Alan Notları:

EK-4: Etik Komisyonu Onay Bildiri



T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
ETİK KOMİSYONU
BAŞVURU DEĞERLENDİRME FORMU

BAŞVURU BİLGİLERİ	ARAŞTIRMANIN ADI	4. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Yapılarının Gelişimini Amaçlayan Bir Öğretim Deneyi	
	ARAŞTIRMANIN TÜRÜ	☒ Anket/Ölçek/Skala Çalışması ☐ Gözlemsel Çalışma ☐ Niteliksel Çalışma ☐ Diğer	
	GELEN EVRAK SAYISI ve TARİHİ	E-55135017-770-34968 sayılı yazı	
	YÜRÜTÜCÜ/DANIŞMAN (Unvan, Ad-Soyad, Kurum, Bölüm)	Dr. Öğr. Üyesi Ceylan ŞEN Yozgat Bozok Üniversitesi Eğitim Fakültesi	
	ARAŞTIRMACILAR (Unvan, Ad-Soyad, Kurum, Bölüm)	Seda YÜCE Şehit Binbaşı Lütflü Ceylan İlkokulu	
	ARAŞTIRMACILAR (Unvan, Ad-Soyad, Kurum, Bölüm)		
VARSA	RAPORTÖR (Unvan, Ad-Soyad, Kurum, Bölüm, Telefon, E-Posta)		Tarih/İmza
	DIŞ UZMAN (Unvan, Ad-Soyad, Kurum, Bölüm, Telefon, E-Posta)		Tarih/İmza

KARAR BİLGİLERİ	KARAR NO:25/10	TARİH: 29.09.2021
	Yukarıda bilgileri verilen Etik Komisyonu başvuru dosyası ile ilgili belgeler araştırmanın gerekçe, amaç, yaklaşım ve yöntemleri dikkate alınarak incelenmiş çalışmanın başvuru dosyasında belirtilen merkezlerde gerçekleştirilmesinde etik sakınca <u>bulunmadığına</u> karar verilmiştir.	
	Değerlendirme Sonucu	
	☒	Uygundur
	☐	Düzeltilme gereklidir (Açıklayınız)
	☐ Düzeltmeleri görmek istiyoruz ☐ Düzeltmeleri görmemize gerek yok	
	Uygun değildir (Açıklayınız)	
	Açıklama	

ÇALIŞMA ESASI	Yozgat Bozok Üniversitesi Etik Komisyonu Yönergesi
----------------------	--

EK-5: MEB Araştırma İzni Bildirimi



T.C.
ERZURUM VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-36648235-605.01-35520534

26/10/2021

Konu : Araştırma ve Uygulama İzni

VALİLİK MAKAMINA

İlgi: a) Atatürk Üniversitesi Rektörlüğünün 28.09.2021 tarihli ve E.2100260652 sayılı yazısı.
b) Yozgat Bozok Üniversitesi Rektörlüğünün 13.10.2021 tarihli ve E.38310 sayılı yazısı.

İlgi yazılar gereği; 1) Atatürk Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Çocuk Sağlığı ve Hastalıkları Hemşireliği Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gizem KILIÇ'ın; (Palandöken İlçesine bağlı Rehberlik ve Araştırma Merkezi Müdürlüğü (RAM) uzman personellerin görüşleri doğrultusunda) "Covid-19 Pandemisi Sürecinde Ergenlerin Yeme Tutumu ve Uyku Alışkanlıklarının İncelenmesi" konulu çalışması ile,

2) Yozgat Bozok Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Sınıf Eğitimi Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi **Seda YÜCE'nin**; "4.Sınıf Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapılarının Gelişimini Amaçlayan Bir Öğretim Deneyi" konulu araştırma ve uygulama çalışması için izin talebinde bulunulmuştur.

İlgi yazılar ve ekleri, Bakanlığımızın 21.01.2020 tarihli ve E.1563890 (2020/2) sayılı genelgesi çerçevesinde Komisyonumuzca incelenmiş olup; "Araştırmaların, Eğitim Öğretim Faaliyetlerini Aksatmayacak Şekilde, gönüllülük esasıyla ve varsa veli onay belgesinin onaylatılması" ve komisyon kararlarında belirtilen veri toplama araçlarının kullanılarak isimleri belirtilen okullarda uygulama ve anket çalışmasının yapılması, yapılan çalışmalarının sonuçlarının birer örneğinin Müdürlüğümüz, Strateji Geliştirme Şube Müdürlüğü (AR-GE Birimi)'ne gönderilmesi ve çalışmaların bir eğitim öğretim yılını kapsayacak şekilde yapılması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

EK-6: Gönüllü Katılım Öğrenci Formu

..../..../.....

Merhaba,

Yapacak olduğum çalışmaya gösterdiğin ilgi ve bana ayırdığın zaman için şimdiden çok teşekkür ederim. Bu formla, kısaca sana ne yaptığımı anlatmayı ve bu araştırmaya katılman durumunda neler yapacağımızı anlatmayı amaçladım.

Bu araştırma için Yozgat Bozok Üniversitesi Etik Komisyonu’ndan izin alınmıştır. Araştırma, “4. Sınıf Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapılarının Gelişimini Amaçlayan Bir Öğretim Deneyi” gerçekleşmek amacıyla Dr. Öğr. Üyesi Ceylan ŞEN danışmanlığında hazırlanacak bir yüksek lisans tezidir. Bu sebeple sınıfta yapılan etkinliklere katılman ve bu etkinliklerle ilgili görüşlerin çok önemlidir.

Araştırmaya gönüllü olarak katılım esastır. Katıldığın dersler kamera ile kaydedilecektir. Dersler ile ilgili seninle yapacağımız görüşme sırasında ses kaydı yapmak istiyorum. Aynı zamanda sınıf içerisinde yapılan etkinliklerde de fotoğraf çekmek ve gerekirse tezime eklemek istiyorum. Kayda alınmış olacak bu görüşme ve ders kayıtları, sadece bilimsel bir amaç için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Senin isteğin doğrultusunda kayıtlar silinebilecek ya da sana teslim edilebilecektir. Adının araştırmada kullanılması gerekecekse, bunun yerine takma bir isim kullanılacaktır. İstedığın zaman görüşmeyi kesebilir ya da çalışmadan ayrılabilirsin. Bu durumda yapılan kayıtlar ve görüşme verileri kullanılmayacaktır.

Bu bilgileri okuyup bu araştırmaya gönüllü olarak katılmanı ve sana verdiğim güvenceye dayanarak bu formu imzalamanı rica ediyorum. Sormak istediğin herhangi bir durumla ilgili benimle her zaman iletişime geçebilirsin. Araştırma sonucu hakkında bilgi almak için iletişim bilgilerimden bana ulaşabilirsin. Formu okuyarak imzaladığınız için çok teşekkür ederim.

Öğrenci

Öğrenci Velisi

Adı, soyadı

Adı, soyadı

İmza:

İmza: