



**T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPER HALKALARIN GENİŞLETİLMİŞ VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ MERKEZİ**

DOKTORA TEZİ

**Damla YILMAZ
(20169238001)**

**Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasret DURNA**

**SİVAS
MAYIS 2022**

Damla YILMAZ'ın hazırladığı ve “**HİPER HALKALARIN GENİŞLETİLMİŞ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MERKEZİ**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	Prof. Dr. Hasret DURNA Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Serkan ATMACA Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK Adıyaman Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.





Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Damla YILMAZ, 2022

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

16.05.2022

Damla YILMAZ

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca akademik bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her zaman bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Hasret DURNA'ya tezin her aşamasında vermiş olduğu destek, tavsiye ve rehberliğinden dolayı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Göstermiş oldukları maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme, özellikle canım ablam Dr. Öğr. Üyesi Pınar YILMAZ EKER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

HİPER HALKALARIN GENİŞLETİLMİŞ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MERKEZİ

Damla YILMAZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hasret DURNA

2022, 63+ix sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, hiper halka teorisindeki tezde kullanılan temel tanım ve teoremler örneklerle verilmiştir.

İkinci bölümde, hiper halkalar için genişletilmiş merkez tanımlanarak bir hiper cisim olduğu gösterilmiştir. Ayrıca hiper halkalarda genişletilmiş merkez ile türev arasında bazı bağıntılar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir yarı asal hiper halkanın genelleştirilmiş merkezi tanımlanarak regüler hiper halka olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, asal hiper halkalar üzerinde yarı türev kavramı analiz edilmiştir. Genişletilmiş merkez ile ilişkilendirerek yarı türevlerin asal hiper halkadaki yapısı elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hiper halka, (yarı) asal hiper ideal, genişletilmiş merkez, türev, quotient hiper halka.

ABSTRACT

EXTENDED AND GENERALIZED CENTROID OF HYPERRINGS

Damla YILMAZ

PhD Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hasret DURNA

2022, 63+ix pages

This thesis consists of four parts:

In the first part, the basic definitions and theorems used in the thesis in hyperring theory are given with examples.

In the second part, the extended centroid for hyperrings is defined and it is shown to be a hyperfield. Also, some relations between the extended centroid and derivation in hyperrings are given.

In the third part, the generalized centroid of a semiprime hyperring is defined and it is proved that it is a regular hyperring.

In the fourth part, semi-derivation notation on prime hyperrings is analyzed. By associating with the extended centroid, the structure of the semi-derivations in prime hyperring is obtained.

Key Words: Hyperring, (semi) prime hyper ideal, extended centroid, derivation, quotient hyperring.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
GİRİŞ	1
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2. HİPER HALKALARIN GENİŞLETİLMİŞ MERKEZİ.....	21
3. HİPER HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ MERKEZİ.....	36
4. HİPER HALKALAR ÜZERİNDE YARI TÜREVLER	49
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	62

GİRİŞ

Hiper cebirsel yapılar, klasik cebirsel yapıların uygun bir genellemesidir. Bir klasik cebirsel yapıda, iki elemanın işlem sonucu bir eleman olmasına rağmen bir hiper cebirsel yapıda iki elemanın işlem sonucu bir kümedir.

$H \neq \emptyset$ bir küme ve $P^*(H)$, H kümesinin boş kümeden farklı alt kümelerinin kümesi olmak üzere,

$$f_i : H \times H \rightarrow P^*(H), i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+$$

dönüşümlerine (ikili) hiper işlemler denir. $(H, f_1, \dots, f_n)$ cebirsel sistemine ise bir (ikili) hiper yapı denir. Genel olarak $n = 1$ veya $n = 2$ 'dir.

Belirli koşullar altında f_i dönüşümleri kullanılarak yarı hiper grup, hiper grup, hiper halka veya hiper cisim yapıları elde edilir.

Bazı durumlarda, dış (external) hiper işlemler yani;

$$R \neq H \text{ olmak üzere } h : R \times H \rightarrow P^*(H)$$

biçimindeki dönüşümler düşünülür. Burada R bir halka veya bir hiper halka yapısıdır. Hiper yapıların bir örneği, bir dış (external) hiper işlem ve bir iç (internal) hiper işlem ile verilir ve bu yapı hiper modül olarak adlandırılır. Sadece bir iç (internal) hiper işlem ile verilen (H, f) ikili yapısına bir hiper grupoid (hypergroupoid) denir.

Hiper grup yapısı ilk olarak 1934 yılında Fransız matematikçi F. Marty tarafından sunulmuştur. Hiper grup teorisinde ortaya çıkan durumlar, grup teoriye göre fazlasıyla çeşitli ve karmaşıktır. Örneğin, hiper gruplar arasında farklı homomorfizma türleri ve kapalı, terslenebilir, ultrakapalı, eşlenebilir gibi alt hiper grup çeşitleri vardır.

H boş kümeden farklı bir küme ve $\circ : H \times H \rightarrow P^*(H)$ bir hiper işlem olsun. Eğer

$$(1) \text{ Her } a, b, c \in H \text{ için } a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c,$$

$$(2) \text{ Her } a \in H \text{ için } a \circ H = H = H \circ a$$

koşulları sağlanıyor ise $(H, \circ)$ bir hiper gruptur.

1956 yılında M. Krasner, hiper halka ve hiper cisim yapılarını kurmuştur.

$(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir Krasner hiper halka olarak adlandırılır.

(1) $(R, +)$ bir kanonikal hiper gruptur, yani;

$$(i) \text{ Her } x, y, z \in R \text{ için } x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$(ii) \text{ Her } x, y \in R \text{ için } x + y = y + x,$$

$$(iii) \text{ Her } x \in R \text{ için } 0 + x = \{x\} \text{ olacak biçimde } 0 \in R \text{ vardır,}$$

$$(iv) \text{ Her } x \in R \text{ için } 0 \in x + x' \text{ olacak biçimde bir tek } x' \in R \text{ vardır,}$$

$$(v) z \in x + y \text{ iken } y \in -x + z \text{ ve } x \in z - y \text{ sağlanır.}$$

(2) $(R, \cdot)$ iki taraflı yutan elemanı 0 olan bir yarı gruptur,

$$(3) \text{ Her } x, y, z \in R \text{ için } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ ve } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \text{ geçerlidir.}$$

Bir hiper halkanın sıfırdan farklı elemanlarının kümesi çarpımsal bir grup oluyor ise bu hiper halkaya bir hiper cisim denir.

1970'li yıllarda hiper yapılar teorisi önemli bir gelişme göstermiştir. Örneğin, hiper yapılar üzerinde bağıntılar tanımlanmış, hiper yapılar ile sıralı sistemler özellikle latisler arasında bazı bağlantılar kurulmuştur. Devam eden yıllar boyunca hiper yapılar üzerinde birçok sonuç elde edilmiştir. Ayrıca hiper halkaların farklı iki türü daha tanımlanmıştır. Bunların ilki toplamının bir ikili işlem çarpmanın ise bir hiper işlem olduğu hiper halka türüdür. Diğer hiper halka türünde ise hem toplama hem de çarpma hiper işlem olarak alınmıştır.

Bizim çalışmamız Krasner hiper halka yapısını ele almaktadır.

Hiper cebirsel yapılar çeşitli bilimlerde birçok uygulamaya sahiptir. P. Corsini ve V. Leoreano özellikle geometri, hiper graflar, ikili bağıntılar, latişler, fuzzy kümeleri üzerinde hiper cebirsel yapıların bazı uygulamalarını sunmuşlardır. Hiper yapıların biyoloji, kimya, fizik, yapay zeka, kodlama, olasılık gibi farklı disiplinlerde de birçok uygulaması vardır.

Asal halkalar üzerinde türev kavramı 1957 yılında E. C. Posner tarafından verilmiştir ve halkanın değişmeli olma koşulları türev ile ilişkilendirilerek incelenmiştir.

R bir halka ve $d : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $r, s \in R$ için $d(rs) = d(r)s + rd(s)$ oluyor ise d dönüşümüne R halkasının bir türevi denir. İlerleyen yıllarda farklı türev tanımları yapılmış, bu türevlerin asal ve yarı asal halkalardaki özellikleri birçok araştırmacının konusu olmuştur. Farklı türevler ile ilgili yapılan bu çalışmalarda halkanın değişmeli olma koşulları araştırılmıştır.

Halkalar üzerinde türev kavramından daha genel olan yarı türev yapısı J. Bergen tarafından 1983 yılında verilmiştir.

R bir halka olsun. $f : R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü, $g : R \rightarrow R$ dönüşümü ile birlikte aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir yarı türev olarak adlandırılır. Her $r, s \in R$ için

$$f(rs) = f(r)g(s) + rf(s) = f(r)s + g(r)f(s) \text{ ve } f(g(r)) = g(f(r))$$

geçerlidir.

J. C. Chang, türevli halkalarda iyi bilinen bazı özellikleri yarı türevler için genelleştirmiştir. R asal halkası ve g (örten olması gerekmeyen) ile belirlenmiş f yarı türevi için g dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu göstermiştir ve

halkanın değişmeli olma koşullarını yarı türevler için incelemiştir.

Halka teoride yapılan çalışmalarda, Martindale Kesirler Halkası önemli bir rol oynamaktadır. Bu konu hakkındaki alışmalar, Martindale' ın 1969 yılındaki çalışması ile başlamıştır. 1989'da Passman ve 1995'te Beidar, Martindale III ve Mikhalev bu teoriye önemli katkılarda bulunmuştur.

U , R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. U idealinden R içine olan tüm sol R -modül homomorfizmalarının kümesine M diyelim.

$$M = \{f_U | f : U \rightarrow R \text{ sol } R\text{-modül homomorfizması}\}$$

kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

" $f_U \approx g_V \Leftrightarrow R$ 'nin sıfırdan farklı $W \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$ sağlanır."

M kümesinin bir f_U elemanının denklik sınıfını $\overline{f}_U$ ile gösterelim. M kümesinin denklik sınıflarının kümesine $Q_r(R)$ diyelim. $Q_r(R)$ kümesi

$$\begin{aligned} \overline{f}_U + \overline{g}_V &= \overline{f + g_{U \cap V}} \\ \overline{f}_U \overline{g}_V &= \overline{fg_{VU}} \end{aligned}$$

işlemleri ile R halkasını kapsayan bir asal halkadır ve R , $Q_r(R)$ içine $\lambda_r : R \rightarrow R$, $(x \mapsto \lambda_r(x) = rx)$ R -modül homomorfizmaları yardımı ile gömülebilir. Bu şekilde oluşturulan $Q_r(R)$ halkasına sağ Martindale kesirler halkası (quotients halkası) denir. Benzer şekilde $Q_l(R)$ sol Martindale kesirler halkası da tanımlanabilir. $Q_r(R)$ ($Q_l(R)$) halkasının merkezine R asal halkasının genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir ve C ile gösterilir. $Z(R)$, R 'nin merkezi olmak üzere $Z(R) \subseteq C$ olduğu açıktır. Üstelik bir R asal halkasının genişletilmiş merkezi bir cisimdir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde hiper halkalar teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde hiper halkalar için genişletilmiş ve genelleştirilmiş merkez tanımları verilerek özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise asal hiper halkalar üzerinde yarı türev kavramı sunularak bazı temel özellikleri incelenmiştir.



1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, hiper halka teorisindeki diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler örneklerle verilecektir.

Tanım 1.1: H boş kümeden farklı bir küme ve $P^*(H)$, H kümesinin boş olmayan alt kümelerinin kümesi olsun.

$$f_i : H \times H \rightarrow P^*(H), i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere (ikili) hiper işlemler denir.

Bu durumda $(H, f_1, \dots, f_n)$ cebirsel sistemi ise bir (ikili) hiper yapı olarak adlandırılır. Genel olarak $n = 1$ veya $n = 2$ 'dir.

Belirli koşulları sağlayan f_i dönüşümleri kullanılarak yarı hiper grup, hiper grup, hiper halka veya hiper cisim yapıları elde edilir.

Tanım 1.2: H boş kümeden farklı bir küme ve $\circ : H \times H \rightarrow P^*(H)$ bir hiper işlem olsun. Bu durumda $(H, \circ)$ ikili yapısına bir hiper grupoid (hypergroupoid) denir.

$\emptyset \neq A, B \subseteq H$ ve $x \in H$ için

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b, A \circ x = A \circ \{x\} \text{ ve } x \circ B = \{x\} \circ B$$

biçimindedir.

Tanım 1.3: $(H, \circ)$ bir hiper grupoid olsun. Eğer her $a, b, c \in H$ için

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

koşulu sağlanıyor ise $(H, \circ)$ bir yarı hiper gruptur denir.

Buradan, bir yarı hiper grup

$$\bigcup_{u \in a \circ b} u \circ c = \bigcup_{v \in b \circ c} a \circ v$$

özelliğine sahip bir hiper grupoid yapısıdır.

Tanım 1.4: Bir $(H, \circ)$ hiper grupoidi her $a \in H$ için

$$a \circ H = H \circ a = H$$

koşulunu sağlıyor ise hemen hemen hiper grup (quasi-hiper grup) olarak adlandırılır. Bu özelliğe "reproduction aksiyomu" denir.

Tanım 1.5: $(H, \circ)$ bir hiper grupoid olsun. Eğer H hem yarı hiper grup hem de quasi-hiper grup oluyor ise bu durumda $(H, \circ)$ bir hiper gruptur denir.

Örnek 1.6: $(G, \cdot)$ bir grup ve H , G 'nin bir normal alt grubu olsun. Her $x, y \in G$ için

$$x \circ y = xyH$$

biçiminde tanımlı işlem ile $(G, \circ)$ bir hiper gruptur. Gerçekten, her $x, y, z \in G$ için

$$(x \circ y) \circ z = \bigcup_{t \in xoy} t \circ z = \bigcup_{h_1 \in H} (xyh_1) \circ z = \bigcup_{h_1 \in H} xyh_1zH$$

sağlanır. Diğer taraftan, her $x, y, z \in G$ için

$$x \circ (y \circ z) = \bigcup_{t \in y \circ z} x \circ t = \bigcup_{h_2 \in H} x \circ (yzh_2) = \bigcup_{h_2 \in H} xyz h_2 H$$

geçerlidir. Burada H , G grubunun normal alt grubu olduğundan her $z \in G$ için $H z = z H$ yazılır. Dolayısıyla $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ olur. Ayrıca her $x \in G$ için

$$x \circ G = \bigcup_{g \in G} x \circ g = \bigcup_{g \in G} xgH = \bigcup_{k \in G} kH = G$$

geçerlidir. Çünkü, burada " $a, b \in H$ için $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ " denklik bağıntısı ile belirlenen denklik sınıflarının kümesi ya ikiye ikiye ayrılır ya da birbirine eşittir ve $\bigcup_{g \in G} gH = G$ 'dir. Böylece $(G, \circ)$ bir hiper grup yapısıdır.

Örnek 1.7: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde;

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \circ x = x \text{ ve } x \neq y \text{ olan her } x, y \in \mathbb{R} \text{ için } x \circ y = (x, y)$$

hiper işlemi tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}, \circ)$ bir hiper gruptur. Gerçekten, $x < y < z$ birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere

$$(x \circ y) \circ z = \bigcup_{k \in x \circ y} k \circ z = \bigcup_{k \in (x, y)} k \circ z = \bigcup_{k \in (x, y)} (k, z) = (x, z)$$

ve

$$x \circ (y \circ z) = \bigcup_{t \in y \circ z} x \circ t = \bigcup_{t \in (y, z)} x \circ t = \bigcup_{t \in (y, z)} (x, t) = (x, z)$$

sağlanır. Ayrıca her x reel sayısı için

$$x \circ \mathbb{R} = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} x \circ y = \left\{ \begin{array}{ll} \bigcup_{x, y \in \mathbb{R}} (x, y) & ; \quad x \neq y \\ \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} & ; \quad x = y \end{array} \right\} = \mathbb{R}$$

geçerlidir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, \circ)$ bir hiper gruptur.

Tanım 1.8: Aşağıdaki koşulları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir Krasner hiper halka denir.

- (1) $(R, +)$ bir kanonikal hiper gruptur, yani;
 - (i) Her $x, y, z \in R$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$,
 - (ii) Her $x, y \in R$ için $x + y = y + x$,
 - (iii) Her $x \in R$ için $0 + x = \{x\}$ olacak biçimde $0 \in R$ vardır,
 - (iv) Her $x \in R$ için $0 \in x + x'$ olacak biçimde bir $x' \in R$ vardır, (genel olarak x' elemanı yerine $-x$ yazılır ve x elemanının tersi diye adlandırılır.)
 - (v) $z \in x + y$ olduğunda $y \in -x + z$ ve $x \in z - y$ sağlanır.
- (2) $(R, \cdot)$ iki taraflı yutan elemanı 0 olan bir yarı gruptur,
- (3) Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ sağlanır.

Eğer $(R, \cdot)$ değişmeli yarı grup (birim elamana sahip) ise bu durumda $(R, +, \cdot)$

Krasner hiper halkası değişmeli (birimli) hiper halka olarak adlandırılır.

Örnek 1.9: $R = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde “+” hiper işlemi ve “.” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

+	0	1	2	·	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	1	R	1	0	1	2
2	2	R	2	2	0	1	2

Bu durumda $(R, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halkadır.

Örnek 1.10: $(A, \cdot)$ kümesi “0” ile bir yarı grup ve $(A - \{0\}, \cdot)$ bir grup olsun. A kümesi üzerinde

$$x + y = \left\{ \begin{array}{ll} y + x = \{x\} & , \quad y = 0 \\ A - \{x\} & , \quad x = y \neq 0 \\ \{x, y\} & , \quad x, y \in A - \{0\} \text{ ve } x \neq y \end{array} \right\}$$

hiper işlemi tanımlansın. Bu durumda $(A, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halkadır. Burada, her $x \in A$ için $x + 0 = 0 + x = \{x\}$ olduğundan A hiper halkasının toplamsal birimi 0’dır. Ayrıca $0 \in 0 + 0$ ve $x \neq 0$ için $0 \in x + x = A - \{x\}$ olduğundan her $x \in A$ elemanın tersi kendisidir.

Örnek 1.11: $(R, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halka olsun.

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} r & s \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| r, s \in R \right\}$$

kümesi üzerinde “ $\oplus$ ” hiper işlemi ve “ $\odot$ ” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\forall r_1, r_2, s_1, s_2 \in R,$

$$\left(\begin{array}{cc} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{cc} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| a \in r_1 + r_2, b \in s_1 + s_2 \right\}$$

ve

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & r_1 s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $(A, \oplus, \odot)$ bir Krasner hiper halkadır.

Bu tez boyunca hiper halkalar Krasner hiper halka olarak alınacaktır. Ayrıca $x \cdot y$ gösterimi yerine xy ve $0 + x = \{x\}$ gösterimi yerine de $0 + x = x$ kullanılacaktır.

Tanım 1.12: $(R, +, \cdot)$ bir hiper halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Eğer $(A, +, \cdot)$ bir hiper halka oluyor ise A kümesine R 'nin bir alt hiper halkası denir.

Tanım 1.13: R bir hiper halka ve A kümesi R 'nin bir alt hiper halkası olsun. Eğer her $r \in R$, her $a \in A$ için $ra \in A$ ($ar \in A$) oluyor ise A kümesine R hiper halkasının sol (sağ) hiper ideali denir. Eğer A hem sol hem sağ hiper ideal ise A bir hiper idealdir denir.

Lemma 1.14: R bir hiper halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Bu durumda, A kümesi R 'nin bir sol (sağ) hiper idealidir. $\Leftrightarrow$

- (1) $a, b \in A$ iken $a - b \subseteq A$,
- (2) $a \in A, r \in R$ iken $ra \in A$ ($ar \in A$) sağlanır.

İspat: Eğer A kümesi R 'nin bir sol (sağ) hiper ideali ise verilen koşulların sağlandığı açıktır. Tersine, kabul edelim ki (1) ve (2) koşulları sağlansın. $A \neq \emptyset$ olduğu verilmiştir. Her $a \in A$ için (1) koşulundan, $0 \in a - a \subseteq A$ ve $0 - a \subseteq A$ olduğundan $-a \in A$ koşulları sağlanır. Ayrıca A kümesi R 'nin bir alt kümesi olduğundan hiper halka olmanın diğer koşulları A kümesi için de geçerlidir. O halde A , R 'nin bir alt hiper halkasıdır. (2) koşulu da sağlandığı için A kümesi R hiper halkasının bir sol (sağ) hiper idealidir.

Örnek 1.15: $(R, +, \cdot)$ bir hiper halka olsun. Her $x \in R$ için

$$Ann_r(x) = \{y \in R \mid xy = 0\}$$

kümesi R 'nin bir sağ hiper idealidir. Gerçekten, $0 \in R$ ve her $x \in R$ için $x0 = 0$ olduğundan $0 \in Ann_r(x)$ sağlanır. Yani $Ann_r(x) \neq \emptyset$ 'dir. Herhangi $y_1, y_2 \in Ann_r(x)$ için $xy_1 = 0$ ve $xy_2 = 0$ olduğundan $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 = 0 + 0 = 0$ sağlanır. Buradan her $z \in y_1 + y_2$ için $xz = 0$ 'dır. O halde $y_1 + y_2 \subseteq Ann_r(x)$ olur. Ayrıca, herhangi $y \in Ann_r(x)$ ve $r \in R$ için $xy = 0$ olduğundan $x(yr) = (xy)r = 0r = 0$ yazıldığı için $yr \in Ann_r(x)$ geçerlidir. Böylece $Ann_r(x)$ kümesi R hiper halkasının bir sağ hiper idealidir. Bu hiper ideale x elemanının R 'de sağ sıfırlayanı denir.

Benzer şekilde R 'de x elemanı için sol sıfırlayan kümesi

$$Ann_l(x) = \{y \in R \mid yx = 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $Ann_r(x) = Ann_l(x)$ ise bu durumda $Ann(x)$ gösterimi kullanılır.

Örnek 1.16: $R = \{0, a, b, c\}$ kümesi üzerinde hiper toplama ve ikili çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	a	b	c	$\odot$	0	a	b	c
0	0	a	b	c	0	0	0	0	0
a	a	$\{0, b\}$	$\{a, c\}$	b	a	0	a	b	c
b	b	$\{a, c\}$	$\{0, b\}$	a	b	0	b	b	0
c	c	b	a	0	c	0	c	0	c

Bu durumda $(R, \oplus, \odot)$ bir Krasner hiper halkadır. Burada $Ann(0) = \{0, a, b, c\}$, $Ann(a) = \{0\}$, $Ann(b) = \{0, c\}$ ve $Ann(c) = \{0, b\}$ kümeleri R 'nin hiper idealidir.

Tanım 1.17: R bir hiper halka, $\emptyset \neq A, B \subseteq R$ olsun. Bu durumda

$$A + B = \{x \mid x \in a + b, a \in A, b \in B\}$$

ve

$$AB = \left\{ x \mid x \in \sum_{i=1}^n a_i b_i, a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer A ve B kümeleri R hiper halkasının hiper idealleri ise $A + B$ ve AB kümeleri de R 'nin hiper idealleridir.

Tanım 1.18: R bir hiper halka ve P , R 'nin bir hiper ideali olsun. Eğer R 'nin A ve B hiper idealleri için $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyor ise P hiper idealine R hiper halkasının asal hiper ideali denir.

Tanım 1.19: R bir hiper halka ve P , R 'nin bir hiper ideali olsun. Eğer R 'nin A hiper ideali için $A^2 \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ oluyor ise bu durumda P hiper idealine R 'nin yarı asal hiper ideali denir.

Açıktır ki R hiper halkasının her asal hiper ideali onun bir yarı asal hiper idealidir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 1.20: $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ kümesi üzerinde “ $\oplus$ ” hiper toplama işlemi ve “ $\odot$ ” ikili çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	b	$\{a, b, c, d\}$	b	f	f	$\{e, f, g, h\}$	f
c	c	$\{a, b, c, d\}$	c	c	g	$\{e, f, g, h\}$	g	g
d	d	b	c	a	h	f	g	e
e	e	f	g	h	$\{a, e\}$	$\{b, f\}$	$\{c, g\}$	$\{d, h\}$
f	f	f	$\{e, f, g, h\}$	f	$\{b, f\}$	$\{b, f\}$	R	$\{b, f\}$
g	g	$\{e, f, g, h\}$	g	g	$\{c, g\}$	R	$\{c, g\}$	$\{c, g\}$
h	h	f	g	e	$\{d, h\}$	$\{b, f\}$	$\{c, g\}$	$\{a, e\}$

$\odot$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	a	b	c	d
c	a	c	b	d	a	c	b	d
d	a	a	a	a	a	a	a	a
e	a	a	a	a	e	e	e	e
f	a	b	c	d	e	f	g	h
g	a	c	b	d	e	g	f	h
h	a	a	a	a	e	e	e	e

Bu durumda $(R, \oplus, \odot)$ bir Krasner hiper halkadır. Burada $\{a, d\}$ kümesi R hiper halkasının yarı asal hiper idealidir, fakat R 'nin bir asal hiper ideali değildir. Gerçekten, $\{a, b, c, d\} \odot \{a, d, e, h\} = \{a, d\}$ olmasına rağmen $\{a, b, c, d\} \not\subseteq \{a, d\}$ ve $\{a, d, e, h\} \not\subseteq \{a, d\}$ 'dir. Ayrıca $\{a, b, c, d\}$ ve $\{a, d, e, h\}$ kümeleri R 'nin asal hiper idealleridir.

Örnek 1.21: Örnek 1.16'da verilen $(R, \oplus, \odot)$ Krasner hiper halkasında $\{0\}$, R 'nin bir yarı asal hiper ideali olup asal hiper ideali değildir. Çünkü, $\{0, b\} \odot \{0, c\} = \{0\}$, fakat $\{0, b\} \not\subseteq \{0\}$ ve $\{0, c\} \not\subseteq \{0\}$ 'dir.

Tanım 1.22: R bir hiper halka olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyor ise R 'ye asal hiper halka denir.

Örnek 1.23: $R = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde “+” hiper işlemi ve “.” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	R
2	2	R	2

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	1	2

Bu durumda $(R, +, \cdot)$ bir asal hiper halkadır.

Tanım 1.24: R bir hiper halka olsun. Eğer her $x \in R$ için $xRx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyor ise R yarı asal hiper halkadır denir.

Açıktır ki, her asal hiper halka bir yarı asal hiper halkadır. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 1.25: $R = \{e, a, b, c, d, f\}$ kümesi üzerinde hiper toplama ve ikili çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

+	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	a	$\{e, a, b\}$	d	d	$\{c, d, f\}$
b	b	$\{e, a, b\}$	b	f	$\{c, d, f\}$	f
c	c	d	f	e	a	b
d	d	d	$\{c, d, f\}$	a	a	$\{e, a, b\}$
f	f	$\{c, d, f\}$	f	b	$\{e, a, b\}$	b

$\cdot$	e	a	b	c	d	f
e	e	e	e	e	e	e
a	e	a	b	e	a	b
b	e	a	b	e	a	b
c	e	e	e	c	c	c
d	e	a	b	c	d	f
f	e	a	b	c	d	f

Burada $(R, +, \cdot)$ bir yarı asal hiper halkadır. Fakat $aRc = e$ iken $a, c \neq e$ olduğu için R asal hiper halka değildir.

Tanım 1.26: R bir hiper halka olsun. Eğer $x \in R$ için $0 \in nx = \overbrace{x + x + \dots + x}^{n\text{-tane}}$ olduğunda $x = 0$ oluyor ise R 'ye n -torsion free hiper halka denir.

Örnek 1.27: Örnek 1.23'te verilen R hiper halkası bir 2-torsion free hiper halkadır. Örnek 1.25'te verilen R hiper halkası 3-torsion free olan fakat 2-torsion free olmayan bir hiper halka örneğidir. Çünkü $e \in 2c$ sağlanırken $c \neq e$ 'dir.

Tanım 1.28: R birimli, değişmeli bir hiper halka olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyor ise R 'ye hiper tamlık bölgesi (hyperdomain) denir.

Örnek 1.29: $R = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde hiper toplama ve ikili çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	1	2	3	$\cdot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	$\{0, 2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	1	0	1	2	3
2	2	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{2, 3\}$	2	0	2	3	1
3	3	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{0, 1, 2\}$	3	0	3	1	2

$(R, \oplus, \cdot)$, 1 birim elemanlı değişmeli hiper halkadır ve $xy = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ 'dır. Yani R bir hiper tamlık bölgesidir.

Tanım 1.30: R bir hiper halka olsun. Eğer $(R - \{0\}, \cdot)$ bir grup ise R hiper halkasına (Krasner) hiper cisim denir.

Örnek 1.31: $S = \{0, 1, -1\}$ kümesi üzerinde bilinen çarpma işlemi ve $1 \oplus 1 = \{1\}$, $-1 \oplus -1 = \{-1\}$, $x \oplus 0 = 0 \oplus x = \{x\}$ ve $1 \oplus -1 = -1 \oplus 1 = \{0, 1, -1\}$ hiper toplama işlemi verilsin. Bu durumda S bir hiper cisimdir.

Tanım 1.32: A ve B iki hiper halka, $f : A \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$f(x + y) \subseteq f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y) \text{ ve } f(0) = 0$$

oluyor ise f dönüşümüne bir homomorfizm denir. $\forall x, y \in A$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y) \text{ ve } f(0) = 0$$

sağlanıyor ise f dönüşümüne iyi (good) homomorfizm denir.

Eğer f good homomorfizması birebir ve örten ise f izomorfizm olarak adlandırılır ve $A \cong B$ yazılır. $f : A \rightarrow B$ bir izomorfizm ise $f^{-1} : B \rightarrow A$ bir izomorfizmdir.

$f : A \rightarrow B$ bir homomorfizm olsun. $\{x \in A \mid f(x) = 0\}$ kümesine f homomorfizmasının çekirdeği denir ve $\ker f$ ile gösterilir. $\{f(x) \mid x \in A\}$ kümesine ise f homomorfizmasının görüntü kümesi denir ve $\operatorname{Im} f$ ile gösterilir.

Örnek 1.33: $(G, \leq)$ tam sıralı değişmeli bir grup olmak üzere,

$$x \circ y = \{x + y, |x - y|\}$$

hiper işlemi tanımlansın. Bu işlem ile elde edilen hiper grubu $H(G)$ ile gösterebiliriz.

$$f : H(\mathbb{Z}) \rightarrow H(\mathbb{Z}), \quad f(n) = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ çift ise} \\ 1 & ; \quad n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dönüşümü bir homomorfizmadır, fakat bir good homomorfizma değildir.

Gerçekten, x ve y tek tamsayılar olmak üzere her $a \in f(x \circ y)$ için $a = f(s)$, $s \in x \circ y$ sağlanır. $s \in x \circ y = \left\{ \overbrace{x+y}^{\text{çift}}, \overbrace{|x-y|}^{\text{çift}} \right\}$ olduğundan $f(s) = 0$ 'dır.

Yani $a = 0$ olur. Diğer taraftan

$$f(x) \circ f(y) = 1 \circ 1 = \{1 + 1, |1 - 1|\} = \{2, 0\}$$

olur. Buradan $f(x \circ y) \subsetneq f(x) \circ f(y)$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem bir hiper halka homomorfizmasının genel özelliklerini vermektedir.

Teorem 1.34: A ve B hiper halkalar, $f : A \rightarrow B$ homomorfizm olsun.

Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$;
- (ii) $\ker f$, A 'nın bir hiper idealidir;
- (iii) f birebir ise $\ker f = \{0\}$;
- (iv) f good homomorfizm ve $\ker f = \{0\}$ ise f birebirdir;

(v) f bir good homomorfizm ise $f(A)$, B 'nin alt hiper halkasıdır.

İspat:

(i) $x \in A$ olsun. $0 \in x - x$ olduğundan

$$f(0) \in f(x - x) \subseteq f(x) + f(-x)$$

dir. f homomorfizma olduğundan $f(0) = 0$ ve $0 \in f(x) + f(-x)$ olur. Böylece $f(-x)$, $(B, +)$ kanonikal hiper grubunda $f(x)$ elemanının tersidir. O halde $f(-x) = -f(x)$ elde edilir.

(ii) $f(0) = 0$ olduğundan $0 \in \ker f$ 'dir.

$x, y \in \ker f$ alalım. Bu durumda $f(x) = 0 = f(y)$ sağlanır.

$$f(x + y) \subseteq f(x) + f(y) = 0 + 0 = \{0\}$$

olur ki $x + y \subseteq \ker f$ 'dir.

$x \in \ker f$ ve $z \in A$ için

$$f(zx) = f(z)f(x) = f(z)0 = 0 \text{ ve } f(xz) = f(x)f(z) = 0f(z) = 0$$

oldüğundan $zx, xz \in \ker f$ olur. O halde $\ker f$, A 'nın bir hiper idealidir.

(iii) f birebir olsun. $a \in \ker f$ alalım. Bu durumda $f(a) = 0 = f(0)$ 'dir.

f birebir olduğundan $a = 0$ olur. O halde $\ker f = \{0\}$ bulunur.

(iv) f bir good homomorfizm ve $\ker f = \{0\}$ olsun. $x, y \in A$ için $f(x) = f(y)$ olsun. O halde

$$0 \in f(x) - f(x) = f(x) - f(y) = f(x) + f(-y) = f(x - y)$$

olur. Buradan bir $z \in x - y$ için $f(z) = 0$ olur. Bu durumda $z \in \ker f = \{0\}$ 'dir. O halde $0 \in x - y$ bulunur. Yani $-y$, $(A, +)$ kanonikal hiper grubunda x elemanının tersidir. Böylece $-y = -x$ yani $x = y$ 'dir.

(v) Kabul edelim ki f bir good homomorfizm olsun. $\forall x, y \in A$,

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \subseteq f(A)$$

$$-f(x) = f(-x) \subseteq f(A)$$

$$f(x)f(y) = f(xy) \in f(A)$$

ifadeleri doğrudur. Böylece $f(A)$, B 'nin bir alt hiper halkasıdır.

Not: Teorem 1.34'te verilen (iv) ve (v) özellikleri f sadece homomorfizm olduğunda genelde sağlanmaz.

Örnek 1.35: $[0, 1]$ kapalı birim aralığı üzerinde

$$x \oplus y = \begin{cases} \{\max\{x, y\}\} & ; x \neq y \\ [0, x] & ; x = y \end{cases}$$

hiper işlemi ve bilinen çarpma işlemi tanımlansın. $([0, 1], \oplus, \cdot)$ bir hiper halkadır.

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(0) = 0 \text{ ve } \forall x \in (0, 1], f(x) = 1$$

biçiminde tanımlı dönüşüm bir homomorfizmdir, fakat good homomorfizm değildir. Burada

$$f(x \oplus y) = \begin{cases} f(\{0\}) = \{0\} = 0 \oplus 0 = f(x) \oplus f(y) & ; x = y = 0 \\ f(\{x\}) = \{1\} = 1 \oplus 0 = f(x) \oplus f(y) & ; x > y = 0 \\ f(\{x\}) = \{1\} \subsetneq [0, 1] = 1 \oplus 1 = f(x) \oplus f(y) & ; x > y > 0 \\ f([0, x]) = \{0, 1\} \subsetneq [0, 1] = 1 \oplus 1 = f(x) \oplus f(y) & ; x = y > 0 \end{cases}$$

ve

$$f(xy) = f(x)f(y) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \text{ veya } y = 0 \\ 1 & ; x \neq 0 \text{ ve } y \neq 0 \end{cases}$$

geçerlidir. Burada $\ker f = \{0\}$ olmasına rağmen f birebir değildir. Ayrıca $f([0, 1]) = \{0, 1\}$ kümesi $([0, 1], \oplus, \cdot)$ hiper halkasının bir alt hiper halkası değildir.

Tanım 1.36: $(R, +, \cdot)$ bir hiper halka ve $(M, +)$ bir hiper grup olsun.

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, (a, m) \mapsto a \cdot m$$

dönüşümü tanımlansın. Eğer $\forall a, b \in R$ ve $\forall m, m_1, m_2 \in M$,

- (i) $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$,
- (ii) $(a + b) \cdot m = (a \cdot m) + (b \cdot m)$,
- (iii) $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$,
- (iv) $0_R \cdot m = 0_M$

koşulları sağlanıyor ise M bir sol R -hiper modüldür denir.

Örnek 1.37: R bir hiper halka olsun. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_2$ değişmeli grupları R -hiper modüldür.

Tanım 1.38: R bir hiper halka, A ve B iki R -hiper modül olsun. $f : A \rightarrow B$ dönüşümü tanımlansın. Her $r \in R$, her $x, y \in A$ için

- (i) $f(x + y) \subseteq f(x) + f(y)$
- (ii) $f(xr) = f(x)r$

oluyor ise f dönüşümüne bir sağ R -homomorfizm denir.

2. HİPER HALKALARIN GENİŞLETİLMİŞ MERKEZİ

Bu bölümde "Extended Centroid of Hyperrings" adlı çalışmamız ayrıntılarıyla verilecektir. Hiper halkalar için genişletilmiş merkez tanımlanarak bir hiper cisim olduğu gösterilecektir. Ayrıca hiper halkalarda genişletilmiş merkez ile türev arasındaki bazı bağıntılar verilecektir.

R bir asal hiper halka olsun. R 'nin sıfırdan farklı tüm hiper ideallerinin kümesi $H = H(R)$ ile gösterilsin. Yani,

$$H = H(R) = \{U \mid \{0_R\} \neq U, R\text{'nin hiper ideali}\}$$

olsun.

$$F = \{f_U \mid U \in H \text{ ve } f : U \rightarrow R \text{ bir good sağ } R\text{-homomorfizm}\}$$

kümesi üzerinde,

$$f_U \approx g_V : \Leftrightarrow \exists K \subseteq U \cap V \text{ ve } K \in H \text{ vardır öyle ki } K \text{ üzerinde } f = g' \text{ dir.}''$$

bağıntısı tanımlansın. " $\approx$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Gerçekten, her $f_U \in F$ için $U \subseteq U \cap U$ ve U kümesi üzerinde $f = f$ olduğundan " $\approx$ " bağıntısı yansıyandır.

$f_U, g_V \in F$ için $f_U \approx g_V$ olsun. Bu durumda, $\exists K \subseteq U \cap V$ olacak biçimde bir $K \in H$ vardır ki K üzerinde $f = g'$ dir. Buradan $\exists K \subseteq V \cap U$ ve $K \in H$ vardır ki K üzerinde $g = f$ sağlanır. Dolayısıyla $g_V \approx f_U$ olur ve " $\approx$ " bağıntısı simetriktir.

$f_U, g_V, h_W \in F$ için $f_U \approx g_V$ ve $g_V \approx h_W$ olsun. Bu durumda $\exists K_1 \in H$ ve $K_1 \subseteq U \cap V$ vardır öyle ki K_1 üzerinde $f = g'$ dir. Yine $\exists K_2 \in H$ ve $K_2 \subseteq V \cap W$ vardır öyle ki K_2 üzerinde $g = h'$ dir. O halde

$$K_3 := K_1 \cap K_2 \subseteq (U \cap V) \cap (V \cap W) = (U \cap V) \cap W \subseteq U \cap W$$

alınırsa, her $x \in K_3$ için $f(x) = g(x) = h(x)$ olduğundan K_3 üzerinde $f = h$ elde edilir. Yani “ $\approx$ ” bağıntısı geçişmelidir. Böylece “ $\approx$ ” bağıntısı F üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Herhangi $f_U \in F$ elemanın denklik sınıfı $\bar{f}_U$ ve F kümesindeki bütün denklik sınıflarının kümesi Q_r ile gösterilsin.

Q_r kümesi üzerinde “+” hiper işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\forall \bar{f}_U, \bar{g}_V \in Q_r,$$

$$\bar{f}_U + \bar{g}_V := \overline{f + g_{U \cap V}}.$$

Kabul edelim ki her $x, y \in U \cap V$ için $x = y$ olsun.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(y) + g(y) = (f + g)(y)$$

olduğundan $f + g : U \cap V \rightarrow R$ iyi tanımlıdır.

$$\forall x, y \in U \cap V \text{ ve } \forall r \in R,$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f + g)(xr) &= f(xr) + g(xr) = f(x)r + g(x)r \\ &= (f(x) + g(x))r = ((f + g)(x))r \end{aligned}$$

olduğundan $f + g : U \cap V \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. Böylece $\overline{f + g_{U \cap V}} \in Q_r$ olur.

$\bar{f}_{1U_1} = \bar{f}_{2U_2}$ ve $\bar{g}_{1V_1} = \bar{g}_{2V_2}$ olsun. Bu durumda $f_{1U_1} \approx f_{2U_2}$ ve $g_{1V_1} \approx g_{2V_2}$ olur. Buradan $f_{1U_1} \approx f_{2U_2}$ olduğundan $\exists K_1 \in H$ ve $K_1 \subseteq U_1 \cap U_2$ vardır öyle ki K_1 üzerinde $f_1 = f_2$ sağlanır. Ayrıca $g_{1V_1} \approx g_{2V_2}$ olduğundan $\exists K_2 \in H$ ve $K_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ vardır öyle ki K_2 üzerinde $g_1 = g_2$ 'dir.

$$K := K_1 \cap K_2 \subseteq (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2)$$

alınırsa, her $x \in K$ için

$$\begin{aligned}
(f_1 + g_1)(x) &= f_1(x) + g_1(x) \\
&= \bigcup \{t(x) \mid t(x) \in f_1(x) + g_1(x)\} \\
&= \bigcup \{t(x) \in f_2(x) + g_2(x)\} \\
&= f_2(x) + g_2(x) = (f_2 + g_2)(x)
\end{aligned}$$

olur. Yani K üzerinde $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ sağlanır. Bu durumda $f_1 + g_1|_{U_1 \cap V_1} \approx f_2 + g_2|_{U_2 \cap V_2}$ olur. O halde Q_r üzerindeki toplama işlemi iyi tanımlıdır.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_W \in Q_r$ alalım. $U \cap (V \cap W) = (U \cap V) \cap W$ olduğundan $\forall x \in U \cap (V \cap W)$,

$$\begin{aligned}
[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\
&= \bigcup_{t(x) \in (f+g)(x)} t(x) + h(x) \\
&= \bigcup_{t(x) \in (f+g)(x)} \{k(x) \mid k(x) \in t(x) + h(x)\} \\
&= \bigcup \{k(x) \mid k(x) \in (f(x) + g(x)) + h(x)\} \\
&= \bigcup \{k(x) \mid k(x) \in f(x) + (g(x) + h(x))\} \\
&= \bigcup_{p(x) \in g(x) + h(x)} \{k(x) \mid k(x) \in f(x) + p(x)\} \\
&= \bigcup_{p(x) \in (g+h)(x)} f(x) + p(x) = f(x) + (g + h)(x) \\
&= [f + (g + h)](x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $U \cap (V \cap W)$ kümesi üzerinde $(f + g) + h = f + (g + h)$ sağlanır. O halde $(\bar{f}_U + \bar{g}_V) + \bar{h}_W = \bar{f}_U + (\bar{g}_V + \bar{h}_W)$ olur.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V \in Q_r$ için $U \cap V = V \cap U$ olduğundan $\forall x \in U \cap V$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

sağlanır. O halde $U \cap V$ üzerinde $f + g = g + f$ geçerlidir ve $\bar{f}_U + \bar{g}_V = \bar{g}_V + \bar{f}_U$ sağlanır.

$\theta : R \rightarrow R, x \mapsto 0$ dönüşümü bir good sağ R -homomorfizmdir. Dolayısıyla $\bar{\theta}_R \in Q_r$ 'dir. $\bar{f}_U \in Q_r$ alalım. $U \subseteq U \cap R$ olduğundan $\forall x \in U$,

$$(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

ve

$$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

olur. Buradan U üzerinde $\theta + f = f = f + \theta$ sağlanır. O halde $\bar{\theta}_R + \bar{f}_U = \bar{f}_U = \bar{f}_U + \bar{\theta}_R$ 'dir. $\bar{\theta}_R \in Q_r$ toplamsal birimdir.

$-f : U \rightarrow R, x \mapsto -f(x) = (-f)(x)$ olmak üzere $-\bar{f}_U \in Q_r$ alalım. Burada $-f(x)$, R hiper halkasında $f(x)$ elemanın tersi olduğundan $\forall x \in U$,

$$\theta(x) \in f(x) - f(x) = f(x) + (-f)(x)$$

geçerlidir. O halde $\bar{\theta}_R \in \bar{f}_U + (-\bar{f}_U)$ olur.

$\forall \bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_W \in Q_r, \bar{h}_W \in \bar{f}_U + \bar{g}_V$ olsun. Bu durumda $\exists f_1 \in \bar{f}_U$ ve $g_1 \in \bar{g}_V$ vardır öyle ki $h = f_1 + g_1$ sağlanır. Herhangi bir $x \in K(\in H) \subseteq U \cap V$ için

$$h(x) = (f_1 + g_1)(x) = f_1(x) + f_2(x) \subseteq f(x) + g(x)$$

olur. R bir hiper halka olduğundan $h(x) \in f(x) + g(x)$ iken $g(x) \in -f(x) + h(x)$ ve $f(x) \in h(x) - g(x)$ geçerlidir.

O halde $g(x) \in (-f + h)(x)$ ve $f(x) \in (h - g)(x)$ olur. Buradan $\bar{g}_V \in -\bar{f}_U + \bar{h}_W$ ve $\bar{f}_U \in \bar{h}_W - \bar{g}_V$ elde edilir.

Böylece $(Q_r, +)$ bir kanonikal hiper gruptur.

Q_r üzerinde “.” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın. $\forall \bar{f}_U, \bar{g}_V \in Q_r$

$$\bar{f}_U \bar{g}_V := \overline{f g_{VU}}.$$

Burada $f g : VU \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. Gerçekten, $x, y \in VU$ için $x = y$ olsun. O halde

$$(fg)(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = (fg)(y)$$

olduğundan $fg : VU \rightarrow R$ iyi tanımlıdır.

$\sum_{sonlu} b_i a_i, \sum_{sonlu} b_j a_j \subseteq VU$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i + \sum_{sonlu} b_j a_j \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i + \sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + g_1 \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right)
\end{aligned}$$

ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
& (fg) \left(\left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) r \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i \right) r \\
&= (fg) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) r
\end{aligned}$$

olduğundan $fg : VU \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. O halde $\overline{fg}_{VU} \in Q_r$ olur.

Kabul edelim ki $f_{1_{U_1}} \approx f_{2_{U_2}}$ ve $g_{1_{V_1}} \approx g_{2_{V_2}}$ olsun. Bu durumda $\exists K_1 (\in H) \subseteq U_1 \cap U_2$ vardır öyle ki K_1 üzerinde $f_1 = f_2$ 'dir ve $\exists K_2 (\in H)$ ve $K_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ vardır öyle ki K_2 üzerinde $g_1 = g_2$ 'dir. Ayrıca $V_1 U_1 \cap V_2 U_2 \subseteq (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$ olduğundan $\exists K \in H$ vardır öyle ki $K \subseteq V_1 U_1 \cap V_2 U_2$ olur. O halde $a_i \in V_1 \cap V_2$ ve $b_i \in U_1 \cap U_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right) &= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right) \right) \\
&= f_1 \left(\sum_{sonlu} g_1(a_i) b_i \right) \\
&= f_1 \left(\sum_{sonlu} g_2(a_i) b_i \right) \\
&= f_2 \left(\sum_{sonlu} g_2(a_i) b_i \right) \\
&= (f_2 g_2) \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece K üzerinde $f_1 g_1 = f_2 g_2$ geçerlidir. $f_1 g_{1_{V_1 U_1}} \approx f_2 g_{2_{V_2 U_2}}$ olduğundan “.” işlemi iyi tanımlıdır.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_W \in Q_r$ olsun. $W(VU) = (WV)U$ olduğundan her $x \in W(VU)$ için

$$\begin{aligned}
[(fg)h](x) &= (fg)(h(x)) = f(g(h(x))) \\
&= f((gh)(x)) = (f(gh))(x)
\end{aligned}$$

olur. Yani $W(VU)$ üzerinde $(fg)h = f(gh)$ sağlanır. O halde $(\bar{f}_U \bar{g}_V) \bar{h}_W = \bar{f}_U (\bar{g}_V \bar{h}_W)$ elde edilir. Her $\bar{f}_U \in Q_r$ için $RU \subseteq RU \cap R$ ve RU üzerinde $f\theta = \theta = \theta f$ olduğundan $\bar{f}_U \bar{\theta}_R = \bar{\theta}_R = \bar{\theta}_R \bar{f}_U$ geçerlidir.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_W \in Q_r$ olsun. $(V \cap W)U \subseteq VU \cap WU$ olduğundan her $a_i \in U$ ve $b_i \in V \cap W$ için

$$\begin{aligned}
&[f(g+h)] \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= f \left((g+h) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= f \left(g \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i + \sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i \right) + f \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(g \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + f \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (fg) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= (fg + fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $(V \cap W) U$ üzerinde $f(g + h) = fg + fh$ sağlanır.

Ayrıca $W(U \cap V) \subseteq WU \cap WV$ olduğundan her $b_i \in W, a_i \in U \cap V$ için

$$\begin{aligned}
&[(f + g)h] \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) = (f + g) \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (f + g) \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) + g \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + g \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (gh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= (fh + gh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $W(U \cap V)$ üzerinde $(f + g)h = fh + gh$ 'dir.

Böylece Q_r üzerinde “.” işleminin “+” işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

O halde $(Q_r, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halkadır.

$\bar{1}_R \in Q_r$, $1 : R \rightarrow R$, $x \mapsto x$ dönüşümünü alalım. $RU \subseteq U$ olduğundan her $x \in RU$ ve $\bar{f}_U \in Q_r$ için $(f1)(x) = f(1(x)) = f(x)$ ve $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$ sağlanır. Buradan $\bar{f}_U \bar{1}_R = \bar{1}_R \bar{f}_U = \bar{f}_U$ elde edilir. Yani, $\bar{1}_R$ elemanı Q_r hiper halkasının çarpımsal birimidir.

Teorem 2.1: R bir asal hiper halka olsun. Bu durumda R, Q_r içine bir alt hiper halka olarak gömülebilir.

İspat : $a \in R$ olsun. $\lambda_a : R \rightarrow R, r \mapsto \lambda_a(r) = ar$ dönüşümü tanımlansın. Buradan $r, s \in R$ için $r = s$ ise $ar = as$ olduğundan $\lambda_a(r) = \lambda_a(s)$ olur. $\forall r, s \in R,$

$$\lambda_a(r + s) = a(r + s) = ar + as = \lambda_a(r) + \lambda_a(s)$$

ve

$$\lambda_a(rs) = a(rs) = (ar)s = \lambda_a(r)s$$

olduğundan λ_a bir good sağ R -homomorfizmdir. Bu durumda $\overline{\lambda_{a_R}} \in Q_r$ 'dir.

$$\lambda : R \rightarrow Q_r, \lambda(a) = \overline{\lambda_{a_R}}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada λ iyi tanımlı ve bir good homomorfizmdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \ker \lambda &= \left\{ a \in R \mid \lambda(a) = \overline{\theta_R} \right\} = \left\{ a \in R \mid \overline{\lambda_{a_R}} = \overline{\theta_R} \right\} \\ &= \left\{ a \in R \mid \lambda_{a_R} \approx \theta_R \right\} = \{ a \in R \mid aR = 0 \} \\ &= \{ a \in R \mid a = 0 \} = \{0\} \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla λ birebirdir. Böylece R, Q_r içine gömülebilir.

Tanım 2.2: R bir asal hiper halka olsun.

$$Q_r = \left\{ \overline{f_U} \mid f : U \rightarrow R \text{ sağ good } R\text{-homomorfizm ve } U \in H \right\}$$

hiper halkasına, R 'nin sağ kesirler (quotients) hiper halkası denir.

Kullanımda kolaylık olması açısından $\overline{q_U} \in Q_r$ yerine q alınacaktır.

Lemma 2.3: R bir asal hiper halka olsun. Bu durumda sıfırdan farklı her $q \in Q_r$ için $q(U) \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı bir U hiper ideali

vardır.

İspat: $q \in Q_r$ alalım. Bu durumda $q = f_U$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı bir U hiper ideali vardır. Herhangi bir $a \in U$ için $\lambda_a : R \rightarrow R, r \mapsto \lambda_a(r) = ar$ bir good sağ R -homomorfizm olduğundan her $x \in U$ için

$$(f\lambda_a)(x) = f(\lambda_a(x)) = f(ax) = f(a)x = \lambda_{f(a)}(x)$$

olur ve buradan U üzerinde $f\lambda_a = \lambda_{f(a)}$ elde edilir. Dolayısıyla $f_U\lambda_{a_R} = \lambda_{f(a)_R}$ yazılır. O halde $q\lambda(U) \subseteq \lambda(R)$ 'dir. $R \cong \lambda(R)$ olduğundan $q(U) \subseteq R$ yazılabilir.

Lemma 2.4: R bir asal hiper halka olsun. Bu durumda R 'nin Q_r sağ kesirler (quotients) hiper halkası bir asal hiper halkadır.

İspat: $p, q \in Q_r$ ve $pQ_rq = \theta$ olsun. Eğer $p \neq \theta$ ve $q \neq \theta$ ise $p(U) \subseteq R$ ve $q(V) \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı U ve V hiper idealleri vardır. $p \neq \theta$ ve $q \neq \theta$ olduğundan sıfırdan farklı $u \in U$ ve $v \in V$ elemanları için $p(u) \neq 0_R$ ve $q(v) \neq 0_R$ geçerlidir. R, Q_r 'nin bir alt hiper halkası olduğundan

$$p(u)Rq(v) \subseteq p(u)Q_rq(v) = \{0_R\}$$

sağlanır. Buradan $p(u)Rq(v) = \{0_R\}$ elde edilir. R asal hiper halka olduğundan $p(u) = 0_R$ veya $q(v) = 0_R$ 'dir. Bu ise $p(u) \neq 0_R$ ve $q(v) \neq 0_R$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $pQ_rq = \theta$ iken $p = \theta$ veya $q = \theta$ elde edilir. Böylece Q_r bir asal hiper halkadır.

Tanım 2.5: R bir asal hiper halka ve Q_r, R 'nin sağ kesirler (quotients) hiper halkası olsun. Buna göre

$$C := \{g \in Q_r \mid \forall f \in Q_r, gf = fg\}$$

kümesine Q_r 'nin merkezi ve R hiper halkasının genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir.

C , Q_r 'nin bir alt hiper halkasıdır. Gerçekten, $0 \in Q_r$ için $0 \in C$ olduğundan $C \neq \emptyset$ 'dir. $C \subseteq Q_r$ olduğu açıktır. $g_1, g_2 \in C$ alalım. $\forall f \in Q_r$,

$$f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2 = g_1f + g_2f = (g_1 + g_2)f$$

ve

$$f(g_1g_2) = (fg_1)g_2 = (g_1f)g_2 = g_1(fg_2) = g_1(g_2f) = (g_1g_2)f$$

olduğundan $g_1 + g_2 \in C$ ve $g_1g_2 \in C$ 'dir.

$\theta \neq c \in C$ alalım. Herhangi bir $f \in C$ için $cf = \theta$ olsun. Buradan her $g \in Q_r$ için $gc f = \theta$ ve $c \in C$ olduğundan $cgf = \theta$ elde edilir. Q_r asal hiper halka ve $c \neq \theta$ olduğundan $f = \theta$ bulunur. Böylece C bir hiper tamlık bölgesidir.

Teorem 2.6: C bir hiper cisimdir.

İspat: $0 \neq c \in C$ alalım. Bu durumda $c \in Q_r$ olduğundan $cU \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı U hiper ideali vardır. R asal hiper halka olduğundan $cU \neq \{0_R\}$ 'dir. $c \in C$ olduğundan $\{0_R\} \neq V = cU$ alırsak, V kümesi R hiper halkasının bir hiper ideali olur. Gerçekten, her $cx, cy \in V$ için $cx + cy = c(x + y) \in V$ ve her $r \in R$ için $cxr \in V$ ve $rcx = crx \in V$ sağlanır. $d : V \rightarrow R$, $ca \mapsto a$ dönüşümünü tanımlayalım. $a, b \in U$ için $ca = cb$ olsun. $c \in C$ olduğundan $ac = bc$ olur. Buradan $c = f_U$ olmak üzere $\lambda_{a_R} f_U = \lambda_{b_R} f_U$ sağlanır. Dolayısıyla $\lambda_a f = \lambda_b f$ 'dir. Böylece $\exists K \in H$ ve $K \subseteq U$ vardır öyleki K üzerinde $\lambda_a f = \lambda_b f$ sağlanır. $\forall x \in K$, $\lambda_a(f(x)) = \lambda_b(f(x))$ olacağından $af(x) = bf(x)$ elde edilir. $c = f_U \neq \theta$ olduğundan bir $x \in K$ için $f(x) \neq 0_R$ olacaktır. Dolayısıyla $0 \in (a - b)f(x)$ yani $0 \in a - b$ olduğundan $a = b$ olur. d dönüşümü iyi tanımlıdır. Her $ca, cb \in V$ için

$$d(ca + cb) = d(c(a + b)) = a + b = d(ca) + d(cb)$$

ve her $r \in R$ için

$$d((ca)r) = d(c(ar)) = ar = d(ca)r$$

sağlanır. Dolayısıyla $d : V \rightarrow R$ bir sağ good R -homomorfizmdir. Bu durumda $d \in Q_r$ olur. Ayrıca her $a \in U$ için $d(ca) = (dc)a = a = 1(a)$ olduğundan $dc = 1$ elde edilir. Böylece $\theta \neq c \in C$ tersinirdir. Yani C bir hiper cisimdir.

Tanım 2.7: R asal hiper halka ve C , R 'nin genişletilmiş merkezi olmak üzere $S = RC$ kümesine R 'nin merkezi kapanışı (central closure) denir.

Lemma 2.8: $S = RC$ kümesi Q_r 'nin bir alt hiper halkasıdır. Ayrıca S bir asal hiper halkadır.

İspat: $\theta \in C$ olduğundan $\theta \in S$ 'dir. Herhangi $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 \in \sum_{sonlu} r_i c_i$ ve $s_2 \in \sum_{sonlu} r_j c_j, r_i, r_j \in R, c_i, c_j \in C$ olsun.

$$s_1 + s_2 \subseteq \sum_{sonlu} r_i c_i + r_j c_j \subseteq S$$

ve

$$s_1 s_2 \in \left(\sum_{sonlu} r_i c_i \right) \left(\sum_{sonlu} r_j c_j \right) \subseteq S$$

oldüğundan S , Q_r 'nin bir alt hiper halkasıdır.

S 'nin asal olduğu Q_r 'nin asallığına benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 2.9: R bir asal hiper halka ve S , R 'nin merkezi kapanışı olsun. Eğer $a, b \in S$ olmak üzere her $x \in R$ için $axb = bxa$ oluyor ise $qa = b$ olacak biçimde en az bir $q \in C$ vardır.

İspat: $a \neq \theta$ ve $b \neq \theta$ olsun. $S \subseteq Q_r$ olduğundan Lemma 2.3'ten, $aU \subseteq R$ ve $bU \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı bir U hiper ideali vardır. $V = UaU$

olarak alırsak,

$$f : V \rightarrow R, f \left(\sum_i x_i a y_i \right) = \sum_i x_i b y_i, x_i, y_i \in U$$

dönüşümü tanımlanır. Kabul edelim ki $\sum_i x_i a y_i = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= br \sum_i x_i a y_i = \sum_i (br) x_i a y_i = \sum_i b(r x_i) a y_i \\ &= \sum_i a(r x_i) b y_i = \sum_i (ar) x_i b y_i = ar \sum_i x_i b y_i \end{aligned}$$

olur. Böylece $aUR \left(\sum_i x_i b y_i \right) \subseteq aR \left(\sum_i x_i b y_i \right) = 0$ elde edilir. Yani

$(aU)R \left(\sum_i x_i b y_i \right) = 0$ olur ki R asal hiper halka olduğundan $\sum_i x_i b y_i = 0$ bulunur. Ö halde f iyi tanımlıdır.

$\sum_i x_i a y_i, \sum_i x_j a y_j \in V = UaU$ için

$$\begin{aligned} f \left(\sum_{sonlu} x_i a y_i + \sum_{sonlu} x_j a y_j \right) &= f \left(\sum_{sonlu} x'_i a y'_i \right) \\ &= \sum_{sonlu} x'_i b y'_i \\ &= \sum_{sonlu} x_i b y_i + \sum_{sonlu} x_j b y_j \\ &= f \left(\sum_{sonlu} x_i a y_i \right) + f \left(\sum_{sonlu} x_j a y_j \right) \end{aligned}$$

sağlanır.

$\sum_{sonlu} x_i a y_i \in V$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} f \left(\left(\sum_{sonlu} x_i a y_i \right) r \right) &= f \left(\sum_{sonlu} x_i a (y_i r) \right) \\ &= \sum_{sonlu} x_i b (y_i r) = \left(\sum_{sonlu} x_i b y_i \right) r \\ &= f \left(\sum_{sonlu} x_i a y_i \right) r \end{aligned}$$

olduğundan f bir sağ good R -homomorfizmdir.

$q = f_V \in Q_r$ olsun. Lemma 2.3'ten, herhangi $p \in Q_r$ için $pK \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı K hiper ideali vardır. O halde $x, y \in U$ ve $z \in K$ için

$$\begin{aligned} (qp)(zxy) &= q((pz)xay) = (pz)xy \\ &= p(zxy) = p(q(zxy)) = (pq)(zxy) \end{aligned}$$

olur. $KU \subseteq K \cap U$ ve KU kümesi üzerinde $qp = pq$ sağlanır. Buradan $q \in C$ elde edilir.

Özel olarak,

$$0 \in xby - xby = q(xay) - xby = xqay - xby = x(qa - b)y$$

sağlanır. O halde $U(qa - b)U = \{0\}$ olur. $V = UaU$ olduğundan

$$V(qa - b)V = UaU(qa - b)UaU = \{0\}$$

elde edilir. R asal hiper halka olduğundan $qa = b$ elde edilir.

Hiper halkalarda türev kavramı 2013 yılında A. Asokkumar tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Tanım 2.10: R bir hiper halka olsun. Eğer $d : R \rightarrow R$ dönüşümü her $x, y \in R$ için

(i) $d(x + y) \subseteq d(x) + d(y)$

(ii) $d(xy) \subseteq d(x)y + xd(y)$

koşullarını sağlıyor ise d dönüşümüne türev denir.

Önerme 2.11: R asal hiper halka olmak üzere d , R üzerinde bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer her $r \in R$ için $ad(r) = 0$ (veya $d(r)a = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya $d = 0$ 'dır. (Asokkumar, A. (2013))

İspat: $x, y \in R$ alalım. Kabul edelim ki her $r \in R$ için $ad(r) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= ad(xy) \in a(d(x)y + xd(y)) \\ &= ad(x)y + axd(y) \\ &= 0 + axd(y) \\ &= axd(y) \end{aligned}$$

elde edilir. R asal hiper halka olduğundan $a = 0$ veya $d(y) = 0$ olur. Eğer $a \neq 0$ ise her $y \in R$ için $d(y) = 0$ sağlanır. Yani, $d = 0$ bulunur.

Önerme 2.12: R bir asal hiper halka, C onun genişletilmiş merkezi olsun. R üzerinde sıfırdan farklı d_1 ve d_2 türevlerini alalım. Eğer her $x, y \in R$ için

$$d_1(x)d_2(y) = d_2(x)d_1(y) \quad (2.1)$$

oluyor ise bu durumda her $x \in R$ için $d_2(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: $x, y \in R$ için

$$0 \in d_1(x)d_2(y) - d_2(x)d_1(y) \quad (2.2)$$

geçerlidir. (2.2) bağıntısında x yerine xz yazılırsa,

$$0 \in d_1(x)zd_2(y) - d_2(x)zd_1(y)$$

olur. Buradan her $x, y \in R$ için

$$d_1(x)zd_2(y) = d_2(x)zd_1(y) \quad (2.3)$$

elde edilir. Teorem 2.9'dan, $d_2(x) = \lambda(x)d_1(x)$ olacak biçimde bir $\lambda(x) \in C$ vardır. O halde (2.3) eşitliğinden, $0 \in (\lambda(x) - \lambda(y))d_1(x)zd_1(y)$ elde edilir. Bu durumda bir $t \in \lambda(x) - \lambda(y)$ için $0 = td_1(x)zd_1(y)$ sağlanır. R asal hiper halka ve $d_1 \neq 0$ olduğundan Önerme 2.11'den, $t = 0$ bulunur. Yani, her $x, y \in R$

için $\lambda(x) = \lambda(y)$ olur. Böylece $d_2(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

Önerme 2.13: R bir asal hiper halka ve C onun genişletilmiş merkezi olmak üzere d, g, h ve f sıfırdan farklı türevler olsun. Kabul edelim ki her $x, y \in R$ için $d(x)g(y) = h(x)f(y)$ sağlansın. Eğer $d \neq 0$ ve $f \neq 0$ ise bu durumda $g(x) = \lambda f(x)$ ve $h(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: Hipotezden, her $x, y \in R$ için

$$0 \in d(x)g(y) - h(x)f(y) \quad (2.4)$$

sağlanır. (2.4) ifadesinde y yerine yz yazarsak,

$$\begin{aligned} 0 &\in d(x)g(yz) - h(x)f(yz) \subseteq d(x)(g(y)z + yg(z)) - h(x)(f(y)z + yf(z)) \\ &= (d(x)g(y) - h(x)f(y))z + d(x)yg(z) - h(x)yf(z) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $x, y, z \in R$ için

$$0 \in d(x)yg(z) - h(x)yf(z) \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) ifadesinde, y yerine $yf(t)$ yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &\in d(x)yf(t)g(z) - h(x)yf(t)f(z) = d(x)yf(t)g(z) - d(x)yg(t)f(z) \\ &= d(x)y(f(t)g(z) - g(t)f(z)) \end{aligned}$$

olur. $d \neq 0$ olduğundan Önerme 2.11'den $f(t)g(z) = g(t)f(z)$ elde edilir. Önerme 2.12'den, her $z \in R$ için $g(z) = \lambda f(z)$ sağlanır. O halde

$$0 \in d(x)y\lambda f(z) - h(x)yf(z) = (\lambda d(x) - h(x))yf(z)$$

bulunur. $f \neq 0$ olduğundan Önerme 2.11 kullanılarak her $x \in R$ için $h(x) = \lambda d(x)$ bulunur.

3. HİPER HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ MERKEZİ

Bu bölümde "Generalized centroid of hyperrings" adlı çalışmamız ayrıntılı olarak verilecektir. Yarı asal hiper halkaların genelleştirilmiş merkezi tanımlanarak bir regüler hiper halka olduğu ispatlanacaktır.

Lemma 3.1: R bir yarı asal hiper halka ve U , R 'nin sıfırdan farklı bir hiper ideali olsun. Bu durumda $Ann_r(U) = Ann_l(U)$ geçerlidir. O halde $Ann_r(U) = Ann_l(U) = Ann(U)$ yazılır.

İspat: $U Ann_r(U) = \{0_R\}$ ve $Ann_l(U)U = \{0_R\}$ sağlanır. R yarı asal hiper halka ve $Ann_r(U)(U Ann_r(U))U = \{0_R\}$ olduğundan $Ann_r(U)U = \{0_R\}$ 'dir. Yani $Ann_r(U) \subseteq Ann_l(U)$ olur. Benzer şekilde $Ann_l(U) \subseteq Ann_r(U)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $Ann_r(U) = Ann_l(U)$ elde edilir.

R bir yarı asal hiper halka olsun. R 'nin sıfırlayanı sıfır olan bütün sıfırdan farklı hiper ideallerinin kümesi M ile gösterilsin. Yani,

$$M = \{U \mid \{0_R\} \neq U, R\text{'nin hiper ideali ve } AnnU = \{0_R\}\}$$

olsun. Bu durumda M kümesi çarpma işlemi altında kapalıdır. Gerçekten, $U, V \in M$ alalım. Bu durumda her $x \in R$ için $UVx = \{0_R\}$ 'dir. Buradan $Vx \subseteq AnnU = \{0_R\}$ yani $Vx = \{0_R\}$ olur. O halde $x \in AnnV = \{0_R\}$ yani $x = 0_R$ bulunur. Böylece $UV \in M$ elde edilir.

$$\Gamma = \{f_U \mid f : U \rightarrow R \text{ sağ good } R\text{-homomorfizm ve } U \in M\}$$

kümesi üzerinde;

" $f_U \approx g_V :\Leftrightarrow \exists K \subseteq U \cap V$ ve $K \in M$ vardır öyle ki K üzerinde $f = g$ 'dir."

bağıntısı tanımlansın. M kümesi çarpmaya göre kapalı olduğundan bir $K \in M$ bulmak mümkündür ve " $\approx$ " bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı ile Γ denklik

sınıflarına ayrılır. Herhangi $f_U \in \Gamma$ elemanın denklik sınıfı $\overline{f_U}$ ile ve bütün denklik sınıflarının kümesi de Q_r ile gösterilsin.

Q_r üzerinde “+” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\forall \overline{f_U}, \overline{g_V} \in Q_r,$$

$$\overline{f_U} + \overline{g_V} := \overline{f + g_{U \cap V}}.$$

Burada $f + g : U \cap V \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir.

Kabul edelim ki her $x, y \in U \cap V$ için $x = y$ olsun.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(y) + g(y) = (f + g)(y)$$

olduğundan $f + g : U \cap V \rightarrow R$ iyi tanımlıdır. Her $x, y \in U \cap V$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f + g)(xr) &= f(xr) + g(xr) = f(x)r + g(x)r \\ &= (f(x) + g(x))r = ((f + g)(x))r \end{aligned}$$

olduğundan $f + g : U \cap V \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. Böylece $\overline{f + g_{U \cap V}} \in Q_r$ olur.

$\overline{f_{1U_1}} = \overline{f_{2U_2}}$ ve $\overline{g_{1V_1}} = \overline{g_{2V_2}}$ olsun. Bu durumda $f_{1U_1} \approx f_{2U_2}$ ve $g_{1V_1} \approx g_{2V_2}$ olur. Buradan $f_{1U_1} \approx f_{2U_2}$ olduğundan $\exists K_1 \in M$ ve $K_1 \subseteq U_1 \cap U_2$ vardır öyle ki K_1 üzerinde $f_1 = f_2$ sağlanır. Ayrıca $g_{1V_1} \approx g_{2V_2}$ olduğundan $\exists K_2 \in M$ ve $K_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ vardır öyle ki K_2 üzerinde $g_1 = g_2$ 'dir.

$$K := K_1 \cap K_2 \subseteq (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2)$$

alalım. $\forall x \in K$,

$$\begin{aligned} (f_1 + g_1)(x) &= f_1(x) + g_1(x) = \bigcup \{t(x) \mid t(x) \in f_1(x) + g_1(x)\} \\ &= \bigcup \{t(x) \in f_2(x) + g_2(x)\} = f_2(x) + g_2(x) = (f_2 + g_2)(x) \end{aligned}$$

olur. Yani K üzerinde $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ sağlanır. Bu durumda $f_1 + g_{1_{U_1 \cap V_1}} \approx f_2 + g_{2_{U_2 \cap V_2}}$ sağlanır. O halde Q_r üzerindeki toplama işlemi iyi tanımlıdır.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_H \in Q_r$ alalım. $U \cap (V \cap H) = (U \cap V) \cap H$ olduğundan her $x \in U \cap (V \cap H)$ için

$$\begin{aligned}
[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\
&= \bigcup_{t(x) \in (f+g)(x)} t(x) + h(x) \\
&= \bigcup_{t(x) \in (f+g)(x)} \{k(x) \mid k(x) \in t(x) + h(x)\} \\
&= \bigcup \{k(x) \mid k(x) \in (f(x) + g(x)) + h(x)\} \\
&= \bigcup \{k(x) \mid k(x) \in f(x) + (g(x) + h(x))\} \\
&= \bigcup_{p(x) \in g(x) + h(x)} \{k(x) \mid k(x) \in f(x) + p(x)\} \\
&= \bigcup_{p(x) \in (g+h)(x)} f(x) + p(x) = f(x) + (g + h)(x) \\
&= [f + (g + h)](x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $U \cap (V \cap H)$ kümesi üzerinde $(f + g) + h = f + (g + h)$ sağlanır. O halde $(\bar{f}_U + \bar{g}_V) + \bar{h}_H = \bar{f}_U + (\bar{g}_V + \bar{h}_H)$ olur.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V \in Q_r$ için $U \cap V = V \cap U$ olduğundan her $x \in U \cap V$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

sağlanır. O halde $U \cap V$ üzerinde $f + g = g + f$ geçerlidir ve $\bar{f}_U + \bar{g}_V = \bar{g}_V + \bar{f}_U$ olur.

$\theta : R \rightarrow R, x \mapsto 0$ dönüşümü bir good sağ R -homomorfizmdir. Dolayısıyla $\bar{\theta}_R \in Q_r$ 'dir.

$\bar{f}_U \in Q_r$ alalım. $U \subseteq U \cap R$ olduğundan her $x \in U$ için

$$(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

ve

$$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

olur. Buradan U üzerinde $\theta + f = f = f + \theta$ sağlanır. O halde $\bar{\theta}_R + \bar{f}_U = \bar{f}_U = \bar{f}_U + \bar{\theta}_R$ geçerlidir. $\bar{\theta}_R \in Q_r$ toplamsal birimdir.

$-f : U \rightarrow R, x \mapsto -f(x) = (-f)(x)$ olmak üzere $-\bar{f}_U \in Q_r$ alalım. Burada $-f(x)$, R 'de $f(x)$ elemanın tersi olduğundan her $x \in U$ için

$$\theta(x) \in f(x) - f(x) = f(x) + (-f)(x)$$

sağlanır. O halde $\bar{\theta}_R \in \bar{f}_U + (-\bar{f}_U)$ olur.

Kabul edelim ki $\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_H \in Q_r$ için $\bar{h}_H \in \bar{f}_U + \bar{g}_V$ olsun. Bu durumda $\exists f_1 \in \bar{f}_U$ ve $g_1 \in \bar{g}_V$ vardır öyle ki $h = f_1 + g_1$ sağlanır. Herhangi bir $x \in K(\in M) \subseteq U \cap V$ için

$$h(x) = (f_1 + g_1)(x) = f_1(x) + g_1(x) \subseteq f(x) + g(x)$$

olur. R bir hiper halka olduğundan $h(x) \in f(x) + g(x)$ iken $g(x) \in -f(x) + h(x)$ ve $f(x) \in h(x) - g(x)$ geçerlidir.

Buradan, $g(x) \in (-f + h)(x)$ ve $f(x) \in (h - g)(x)$ olur. Yani, $\bar{g}_V \in -\bar{f}_U + \bar{h}_H$ ve $\bar{f}_U \in \bar{h}_H - \bar{g}_V$ elde edilir.

Böylece $(Q_r, +)$ bir kanonikal hiper gruptur.

Q_r üzerinde “.” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın. $\forall \bar{f}_U, \bar{g}_V \in Q_r$

$$\bar{f}_U \bar{g}_V := \overline{f g_{VU}}.$$

Burada $f g : VU \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. Gerçekten, $x, y \in VU$ için $x = y$ olsun. Bu durumda

$$(fg)(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = (fg)(y)$$

olduğundan $fg : VU \rightarrow R$ iyi tanımlıdır. $\sum_{sonlu} b_i a_i, \sum_{sonlu} b_j a_j \subseteq VU$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i + \sum_{sonlu} b_j a_j \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i + \sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + g_1 \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right) \right) \\
&= (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} b_j a_j \right)
\end{aligned}$$

ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
(fg) \left(\left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) r \right) &= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i \right) r \\
&= (fg) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) r
\end{aligned}$$

olduğundan $fg : VU \rightarrow R$ bir good sağ R -homomorfizmdir. O halde $\overline{fg}_{VU} \in Q_r$ olur.

Kabul edelim ki $f_{1_{U_1}} \approx f_{2_{U_2}}$ ve $g_{1_{V_1}} \approx g_{2_{V_2}}$ olsun. Bu durumda $\exists K_1 (\in M) \subseteq U_1 \cap U_2$ vardır öyle ki K_1 üzerinde $f_1 = f_2$ dir ve $\exists K_2 (\in M)$ ve $K_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ vardır öyle ki K_2 üzerinde $g_1 = g_2$ 'dir. Ayrıca $V_1 U_1 \cap V_2 U_2 \subseteq (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$ ve $\exists K \in M$ vardır öyle ki $K \subseteq V_1 U_1 \cap V_2 U_2$ geçerlidir. Buradan $a_i \in V_1 \cap V_2$ ve $b_i \in U_1 \cap U_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(f_1 g_1) \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right) &= f_1 \left(g_1 \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right) \right) \\
&= f_1 \left(\sum_{sonlu} g_1(a_i) b_i \right) \\
&= f_1 \left(\sum_{sonlu} g_2(a_i) b_i \right) \\
&= f_2 \left(\sum_{sonlu} g_2(a_i) b_i \right) \\
&= (f_2 g_2) \left(\sum_{sonlu} a_i b_i \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece K üzerinde $f_1 g_1 = f_2 g_2$ 'dir. $f_1 g_1|_{V_1 U_1} \approx f_2 g_2|_{V_2 U_2}$ olduğundan “.” işlemi iyi tanımlıdır.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_H \in Q_r$ olsun. $H(VU) = (HV)U$ olduğundan her $x \in H(VU)$ için

$$\begin{aligned}
[(fg)h](x) &= (fg)(h(x)) = f(g(h(x))) \\
&= f((gh)(x)) = (f(gh))(x)
\end{aligned}$$

olur. Yani $H(VU)$ üzerinde $(fg)h = f(gh)$ 'dir. O halde $(\bar{f}_U \bar{g}_V) \bar{h}_H = \bar{f}_U (\bar{g}_V \bar{h}_H)$ 'dir.

Her $\bar{f}_U \in Q_r$ için $RU \subseteq RU \cap R$ ve RU üzerinde $f\theta = \theta = \theta f$ olduğundan $\bar{f}_U \bar{\theta}_R = \bar{\theta}_R = \bar{\theta}_R \bar{f}_U$ elde edilir.

$\bar{f}_U, \bar{g}_V, \bar{h}_H \in Q_r$ olsun. $(V \cap H)U \subseteq VU \cap HU$ olduğundan her $a_i \in U$ ve $b_i \in V \cap H$ için

$$\begin{aligned}
& [f(g+h)] \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= f \left((g+h) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= f \left(g \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i + \sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} g(b_i) a_i \right) + f \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(g \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + f \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (fg) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= (fg + fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde $(V \cap H)U$ üzerinde $f(g+h) = fg + fh$ 'dir. Ayrıca $H(U \cap V) \subseteq HU \cap HV$ olduğundan her $b_i \in H$, $a_i \in U \cap V$ için

$$\begin{aligned}
& (f+g) \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (f+g) \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) + g \left(\sum_{sonlu} h(b_i) a_i \right) \\
&= f \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) + g \left(h \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \right) \\
&= (fh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) + (gh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right) \\
&= (fh + gh) \left(\sum_{sonlu} b_i a_i \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde $H(U \cap V)$ üzerinde $(f+g)h = fh + gh$ 'dir.

Böylece Q_r üzerinde “.” işleminin “+” işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

Dolayısıyla $(Q_r, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halkadır.

$\bar{1}_R \in Q_r$, $1 : R \rightarrow R$, $x \mapsto x$ dönüşümünü alalım. $RU \subseteq U$ olduğundan her $x \in RU$ ve $\bar{f}_U \in Q_r$ için $(f1)(x) = f(1(x)) = f(x)$ ve $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$ sağlanır. Buradan $\bar{f}_U \bar{1}_R = \bar{1}_R \bar{f}_U = \bar{f}_U$ elde edilir.

O halde $(Q_r, +, \cdot)$, $\bar{1}_R$ çarpımsal birimli bir hiper halkadır.

R yarı asal hiper halka olsun. $a \in R$ için $\lambda_a : R \rightarrow R$, $r \mapsto \lambda_a(r) = ar$ dönüşümü bir sağ good R -homomorfizmdir. $\Psi : R \rightarrow Q_r$, $\Psi(a) = \bar{\lambda}_{a_R}$ dönüşümü ise birebir good homomorfizmdir. Böylece R , Q_r 'nin bir alt hiper halkasıdır.

Tanım 3.2: R bir yarı asal hiper halka olsun. Bu durumda

$$Q_r = \{ \bar{f}_U \mid f : U \rightarrow R \text{ sağ good } R\text{-homomorfizm ve } U \in M \}$$

hiper halkasına R 'nin sağ kesirler (quotients) hiper halkası denir.

Kullanımda kolaylık olması açısından $\bar{q}_U \in Q_r$ yerine q alınacaktır.

Tanım 3.3: R bir yarı asal hiper halka ve Q_r , R 'nin sağ kesirler (quotients) hiper halkası olsun. Buna göre

$$C := \{ g \in Q_r \mid gf = fg, \forall f \in Q_r \}$$

kümesine R hiper halkasının genelleştirilmiş merkezi denir.

Uyarı 3.4: Kabul edelim ki $q = f_U \in C$ olsun. $\forall r \in R$, $\lambda_{r_R} f_U = f_U \lambda_{r_R}$ olduğundan $\exists K(\in M) \subseteq RU$ vardır öyle ki K üzerinde $\lambda_r f = f \lambda_r$ sağlanır. Buradan her $x \in K$ için $(\lambda_r f)(x) = (f \lambda_r)(x)$ yani $rf(x) = f(rx)$ olur. Böylece f , K üzerinde bir R -homomorfizm olarak görev yapar.

Teorem 3.5: R bir yarı asal hiper halka ve Q_r , R 'nin sağ kesirler (quotients) hiper halkası olsun. Bu durumda Q_r hiper halkası aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) Q_r yarı asal hiper halkadır.
- (ii) Herhangi $q \in Q_r$ için $q : U \rightarrow R$ sağ good R -homomorfizm olmak üzere bir $U_q \in M$ vardır öyle ki $q(U_q) \subseteq R$ (veya $qU_q \subseteq R$) sağlanır.
- (iii) Bazı $U_q \in M$ için $q \in Q_r$ ve $q(U_q) = \{0_R\}$ (veya bazı $U_q \in F$ için $qU_q = \{0_R\}$) ise $q = 0$ 'dır.
- (iv) $U \in M$ ve $\Psi : U \rightarrow R$ sağ good R -homomorfizm ise her $u \in U$ için $\Psi(u) = q(u)$ (veya her $u \in U$ için $\Psi(u) = qu$) olacak biçimde $q \in Q_r$ vardır.
- (v) W , Q_r 'de alt hiper modül ve $\Psi : W \rightarrow Q_r$ sağ good R -homomorfizm olsun. Eğer W , R 'nin $\Psi(U) \subseteq R$ ve $AnnU = Ann_r W$ olacak biçimde U hiper idealini içerirse herhangi $b \in W$ için $\Psi(b) = q(b)$ (veya herhangi $b \in W$ için $\Psi(b) = qb$) ve herhangi $a \in Ann_r W$ için $q(a) = 0$ (veya herhangi $a \in Ann_r W$ için $qa = 0$) olacak biçimde $q \in Q_r$ vardır.

İspat: (i) $p \in Q_r$ için $pQ_rp = 0$ olsun. Eğer $p \neq 0$ ise $p(U) \subseteq R$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı bir U hiper ideali vardır. $p \neq 0$ olduğundan en az bir $x \in U$ için $p(x) \neq 0_R$ 'dir. R , Q_r 'nin alt hiper halkası olduğundan

$$p(x)Rp(x) \subseteq p(x)Q_rp(x) = \{0_R\}$$

olur. R yarı asal hiper halka olduğundan $p(x) = 0_R$ 'dir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden $p = 0$ 'dır. Q_r yarı asal hiper halkadır.

(ii) $q \in Q_r$ olduğundan $q = f_U$ olacak biçimde R 'nin sıfırdan farklı bir U hiper ideali vardır. Herhangi bir $a \in U$ için $\lambda_a : R \rightarrow R$, $r \mapsto ar$ dönüşümü bir sağ good homomorfizm olduğundan her $x \in U$ için

$$(f\lambda_a)(x) = f(\lambda_a(x)) = f(ax) = f(a)x = \lambda_{f(a)}(x)$$

olur. Buradan U üzerinde $f\lambda_a = \lambda_{f(a)}$ sağlanır. O halde $f_U\lambda_{a_R} \approx \lambda_{f(a)_R}$ yazılır. Yani $q\lambda(U) \subseteq \lambda(R)$ 'dir. $R \cong \lambda(R)$ olduğundan $qU \subseteq R$ yazılabilir.

(iii) Kabul edelim ki $q = f_V$ ve $qU_q = \{0_R\}$ olsun. Bu durumda her $a \in U_q \cap V$ için $f_V \lambda_{a_R} = \lambda_{f(a)_R}$ olduğundan $f(a) = 0$ 'dır. Böylece $f(U_q) = 0$ ve dolayısıyla $q = 0$ olur.

(iv) Her $u \in U$ için $\Psi_U \lambda_{u_R} = \lambda_{\Psi(u)_R}$ sağlanır. $q = \Psi_U$ olmak üzere $\Psi(u) = qu$ olur.

(v) $U \in M$ olduğundan (ii) ve (iii)'den açıktır.

Teorem 3.6: R yarı asal hiper halka ve C , R 'nin genelleştirilmiş merkezi olsun. Bu durumda C bir regüler hiper halkadır.

İspat: $a \in C$ olsun. Bu durumda $a, a^2 \in Q_r$ ve buradan U_a and U_{a^2} , R 'de sıfırlayıcı sıfır olan sıfırdan farklı hiper ideallerdir. O halde $J = U_a \cap U_{a^2} \in M$ olsun. $\Psi : J \rightarrow R$, $\Psi(a^2x) = ax$, $x \in J$ dönüşümünü alalım. Kabul edelim ki $a^2x = a^2y$ olsun. $a^2 \in C$ olduğundan $xa^2 = ya^2$ sağlanır. $a^2 = f_{U_{a^2}}$ olsun. Bu durumda $\lambda_{x_R} f_{U_{a^2}} = \lambda_{y_R} f_{U_{a^2}}$ sağlanır. O halde bir $K \in M$ vardır öyle ki $K \subseteq U_{a^2}R \cap U_{a^2}R$ ve K üzerinde $\lambda_x f = \lambda_y f$ geçerlidir. $\forall z \in K$, $(\lambda_x f)(z) = (\lambda_y f)(z)$ yani $xf(z) = yf(z)$ 'dir. Buradan $0 \in (x - y)f(z)$ olur. Dolayısıyla $x = y$ 'dir. Yani Ψ iyi tanımlıdır.

Ayrıca

$$\Psi(a^2x + a^2y) = \Psi(a^2(x + y)) = a(x + y) = ax + ay = \Psi(a^2x) + \Psi(a^2y)$$

ve

$$\Psi((a^2x)r) = \Psi(a^2xr) = axr = \Psi(a^2x)r$$

olduğundan Ψ sağ good R -homomorfizmdir. O halde bir $a_1 \in Q_r$ vardır öyle ki $\forall x \in J$, $a_1 a^2 x = ax$ geçerlidir. Buradan $0 \in (a_1 a^2 - a)x$ ve $a_1 a^2 = a$ olur. Şimdi bu a_1 elemanının C 'de olduğunu ispatlayalım. Keyfi bir $q \in Q_r$ alalım.

Bu durumda $(a_1a^2)^2q = q(a_1a^2)^2$ ve buradan $a^4a_1^2q = a^4qa_1^2$ 'dir. Bu eşitliği soldan aa_1^3 ile çarparsak,

$$\begin{aligned}
aa_1^3(a^4a_1^2q) &= aa_1^3(a^4qa_1^2) \\
aa_1a_1^2(a^2)^2a_1^2q &= aa_1^3a^2qa^2a_1^2 \\
aa_1a^2a_1^2q &= aa_1^3a^2qaa_1 \\
aaa_1^2q &= aa_1^3a^3qa_1 \\
a^2a_1^2q &= aa_1^2a_1a^2aqa_1 \\
a^2a_1^2q &= aa_1^2a^2qa_1 \\
a^2a_1^2q &= aa_1a_1a^2qa_1 \\
a^2a_1^2q &= aa_1aqa_1 \\
aa_1q &= aqa_1
\end{aligned}$$

olur. Buradan $0 \in aa_1q - aqa_1 = a(a_1q - qa_1)$ elde edilir. Böylece $0 = (a_1q - qa_1)0 \in (a_1q - qa_1)a(a_1q - qa_1)$ olur. O halde $0 \in a_1q - qa_1$ yani $a_1q = qa_1$ elde edilir. Böylece $a_1 \in C$ bulunur ve ispat biter.

Uyarı 3.7: Teorem 3.6'da, C 'nin tüm elemanlarının regüler olduğunu gösterdik. Eğer $a \in C$ ise $a_1a^2 = a$ olacak biçimde bir $a_1 \in C$ vardır. Buradan $(a_1a)^2 = (a_1a)(a_1a) = a_1(aa_1a) = a_1a$ olur. O halde $e = a_1a$ bir idempotent elemandır ve $ea = a$ 'dır. Böylece C üzerinde

$$e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow e_2e_1 = e_1$$

biçiminde tanımlı kısmi sıralı " $\leq$ " bağıntısı vardır.

Tanım 3.8: R bir yarı asal hiper halka, Q_r onun sağ kesirler (quotients) hiper halkası ve $S \subseteq Q_r$ olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $es = s$ olacak biçimde $e(S) = e \in C$ idempotent elemanlarından en küçüğüne S kümesinin destek (support) elemanı denir.

Lemma 3.9: R bir yarı asal hiper halka, Q_r onun sağ kesirler (quotients) hiper halkası ve $S \subseteq Q_r$ olsun. Eğer S kümesi $e(S) = e \in C$ support elemanına sahip ise bir $q \in Q_r$ için $qRS = 0$ eşitliği $qe(S) = 0$ eşitliğine denktir.

İspat: V kümesi Q_r 'de S tarafından üretilen bir alt R -hiper modül olsun. Bu durumda $U = V \cap R$, R 'nin bir hiper idealidir. U hiper idealinin R 'deki sıfırlayanı ile V 'nin R 'deki sıfırlayanının aynı olduğunu ispatlayalım. $qU = 0$ olsun. Eğer $v \in V$ ise $vU_v \in U$ ve $qvU_v = 0$ 'dır. Teorem 3.5 (iv) kullanılırsa $qv = 0$ olur. Bu durumda Teorem 3.5 (v)'den, $\Psi : V \rightarrow V$ birim dönüşüm için bir $e \in Q_r$ vardır öyleki her $v \in V$ için $ev = v$ sağlanır ve e , V kümesinin Q_r 'deki sıfırlayanı olan L kümesini sıfırlar. O halde $1 \in L$, $v \in V$ ve $q \in Q_r$ için $0 \in (eq - qe)(1 + v)$ ve $0 \in (e^2 - e)(1 + v)$ 'dir. $L + V$ kümesinin sıfırlayanı sıfır olduğundan $e \in C$ ve e idempotent eleman olur. Eğer e_1 her $s \in S$ için $e_1s = s$ olacak biçimde bir merkezi (central) idempotent ise $e_1v = v$, $v \in V$ olur. Buradan $1 - e_1 \in L$ yani $0 \in e(1 - e_1) = e - ee_1$ elde edilir. Dolayısıyla $ee_1 = e$ 'dir. Uyarı 3.7'den $e_1e = e$ ve $e_1 \in C$ olduğundan $e \leq e_1$ sağlanır. Kabul edelim ki $qRS = 0$ olsun. Bu durumda qR , V kümesinin sıfırlayanındadır ve $qRe = 0$ iken $Rqe = 0$ ve $qe = 0$ 'dır. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.10: R bir yarı asal hiper halka, Q_r onun sağ kesirler (quotients) hiper halkası ve $S \subseteq Q_r$ kümesi $e(S) = e \in C$ support elemanına sahip olsun. Eğer $0 \neq e_1 \leq e(S)$ ise $e_1S \neq 0$ 'dır.

İspat: Kabul edelim ki $e_1S = 0$ olsun. Bu durumda $f \in 1 - e_1$ idempotent elemanı için $fs \in (1 - e_1)s = s - e_1s$ olur. O halde $\forall s \in S$, $fs = s$ geçerlidir. Böylece $f \geq e(S) \geq e_1$ yani $fe_1 = e_1 = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. $e_1S \neq 0$ 'dır.

Önerme 3.11: R bir yarı asal hiper halka ve C , R 'nin genelleştirilmiş merkezi

olsun. Eğer C bir hiper cisim ise R bir asal hiper halkadır.

İspat: Kabul edelim ki $xRy = 0$ olsun. Lemma 3.10'dan $e(x)y = 0$ 'dır. Böylece $e(x)Ry = 0$ olur. C bir hiper cisim olduğundan $Ry = 0$ yani $y = 0$ bulunur. Dolayısıyla R asal hiper halka olur.



4. HİPER HALKALAR ÜZERİNDE YARI TÜREVLER

Bu bölümde "Semi-derivations on hyperrings" adlı çalışmamız ayrıntılı olarak verilecektir. Asal hiper halkalar üzerinde yarı türev kavramı analiz edilecektir. Asal hiper halkaların yarı türevlerinin bilinen türev kavramı ile çakıştığı veya $\forall r \in R, \lambda \in C$ olmak üzere $f(r) = \lambda(r - g(r))$ biçiminde olduğu ispatlanacaktır, burada C ; R 'nin genişletilmiş merkezidir.

Tanım 4.1: R bir hiper halka, $f : R \rightarrow R$ bir dönüşüm ve $g : R \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $r, s \in R$ için

- (i) $f(r + s) \subseteq f(r) + f(s)$
- (ii) $f(rs) \in f(r)g(s) + rf(s) = f(r)s + g(r)f(s)$,
- (iii) $f(g(r)) = g(f(r))$

koşulları sağlanıyor ise f dönüşümüne g ile belirlenmiş yarı türev denir.

Eğer f dönüşümü (ii), (iii) koşullarını ve her $r, s \in R$ için $f(r + s) = f(r) + f(s)$ özelliğini sağlar ise R 'nin bir strong yarı türevi olarak adlandırılır.

Örnek 4.2: $R = \{r, s, t, w\}$ kümesi üzerinde $\oplus$ hiper toplama işlemi ve $\odot$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	r	s	t	w	$\odot$	r	s	t	w
r	r	s	t	w	r	r	r	r	r
s	s	R	$\{s, t, w\}$	$\{s, t, w\}$	s	r	s	t	w
t	t	$\{s, t, w\}$	R	$\{s, t, w\}$	t	r	t	w	s
w	w	$\{s, t, w\}$	$\{s, t, w\}$	R	w	r	w	s	t

Bu durumda $(R, \oplus, \odot)$ bir Krasner hiper halkadır. $f : R \rightarrow R$, $f(r) = r$, $f(s) = t$, $f(t) = w$, $f(w) = s$ olarak tanımlayalım.

$g : R \rightarrow R$, $g(r) = r$, $g(s) = w$, $g(t) = s$, $g(w) = t$ biçiminde alırsak, f dönüşümü R hiper halkasının bir strong yarı türevi olur.

$f^* : R \rightarrow R$, $f^*(r) = r$, $f^*(s) = w$, $f^*(t) = w$, $f^*(w) = s$ dönüşümünü tanımlayalım. Eğer $g : R \rightarrow R$ birim dönüşüm ise f^* , R 'nin bir yarı türevidir. $f^*(s + w) = \{s, w\} \subsetneq f^*(s) + f^*(w) = \{s, t, w\}$ olduğundan f^* strong yarı türev değildir.

Örnek 4.3: R bir hiper halka ve $H(R) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in R \right\}$ olsun.

$H(R)$ kümesi üzerinde hiper toplama $\oplus$ işlemi

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_1 + r_2, y \in s_1 + s_2 \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Açık ki $(H(R), \oplus)$ toplamsal birimi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olan bir kanonikal hiper gruptur.

Ayrıca her $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H(R)$ için $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -r & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

olacak biçimde bir tek $\begin{pmatrix} -r & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H(R)$ matrisi vardır.

$H(R)$ kümesi üzerinde;

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 r_2 & s_1 s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde çarpma işlemi tanımlansın. Açık ki $\otimes$ çarpma işlemi iyi tanımlı ve birleşmelidir. Dolayısıyla $(H(R), \otimes)$ bir yarı gruptur. $\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H(R)$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \left\{ \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_2 + r_3, y \in s_2 + s_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 x & s_1 y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_2 + r_3, y \in s_2 + s_3 \right\}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} s_1 r_2 & s_1 s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} s_1 r_3 & s_1 s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in s_1 r_2 + s_1 r_3, t \in s_1 s_2 + s_1 s_3 \right\}
\end{aligned}$$

sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \left\{ \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\oplus \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $H(R)$ kümesi üzerinde sağ dağılma kuralı da sağlanır.

Böylece $H(R)$ bir Krasner hiper halkadır.

$$f : H(R) \rightarrow H(R), f \left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$g : H(R) \rightarrow H(R), g \left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın.

Her $\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H(R)$ için

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_1 + r_2, y \in s_1 + s_2\right\}\right) \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_1 + r_2\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \oplus f\left(\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in r_1 + r_2\right\} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} s_1 r_2 & s_1 s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} s_1 r_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{f\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \otimes g\left(\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right\} \\ &\quad \oplus \left\{\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes f\left(\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right\} \\ &= \left\{f\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &\quad \oplus \left\{g\left(\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \otimes f\left(\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right\} \end{aligned}$$

sağlanır. Son olarak her $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H(R)$ için $f\left(g\left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) =$

$g\left(f\left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ geçerlidir.

O halde f , $H(R)$ kümesinin bir strong yarı türevidir.

Lemma 4.4: R bir asal hiper halka $f : R \rightarrow R$ bir g fonksiyonu ile belirlenmiş yarı türev ve $r \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $rf(x) = 0$ (veya $f(x)r = 0$) ise bu durumda $r = 0$ veya $f = 0$ sağlanır.

İspat: $s, t \in R$ alalım ve kabul edelim ki her $x \in R$ için $rf(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= rf(st) \in r(f(s)g(t) + sf(t)) \\ &= rf(s)g(t) + rsf(t) \end{aligned}$$

olur. R asal hiper halka olduğundan $r = 0$ veya $f = 0$ elde edilir. $f(x)r = 0$ olduğunda ispat benzer olarak yapılır.

Lemma 4.5: R bir 2-torsion free asal hiper halka ve f , R üzerinde bir yarı türev olsun. Eğer $f^2 = 0$ ise $f = 0$ 'dır.

İspat: $f^2 = 0$ olsun. Kabul edelim ki $f \neq 0$ 'dır. Herhangi $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= f^2(rs) = f(f(rs)) \in f(f(r)g(s) + rf(s)) \\ &\subseteq f(f(r)g(s)) + f(rf(s)) \\ &\subseteq f^2(r)g^2(s) + f(r)f(g(s)) + f(r)g(f(s)) + rf^2(s) \\ &= f(r)f(g(s)) + f(r)f(g(s)) \end{aligned}$$

sağlanır. R hiper halkası 2-torsion free olduğundan $f(r)f(g(s)) = 0$ elde edilir. R asal hiper halka olduğundan Lemma 4.4'ten, her $r \in R$ için $f(r) = 0$ olur. Bu çelişkiden kabulümüz yanlıştır. $f = 0$ bulunur.

Lemma 4.6: R bir 2-torsion free asal hiper halka, f_1 ve f_2 sırasıyla g_1 ve

g_2 ile belirlenmiş R 'nin yarı türevleri olsun. Eğer $f_1 f_2 = 0$ ise $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ 'dır.

İspat: $r, s \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 &= (f_1 f_2)(rs) = f_1(f_2(rs)) \in f_1(f_2(r)g_2(s) + rf_2(s)) \\
&\subseteq f_1(f_2(r)g_2(s)) + f_1(rf_2(s)) \\
&\subseteq (f_1 f_2)(r)(g_1 g_2)(s) + f_2(r)(f_1 g_2)(s) + f_1(r)(g_1 f_2)(s) + r(f_1 f_2)(s) \\
&= f_2(r)(f_1 g_2)(s) + f_1(r)(g_1 f_2)(s)
\end{aligned}$$

olur. Burada r yerine $f_2(r)$ alırsak,

$$0 \in f_2(f_2(r))(f_1 g_2)(s) + (f_1 f_2)(r)(g_1 f_2)(s)$$

olur. Lemma 4.4'ten, $f_2^2 = 0$ ve Lemma 4.5 ile $f_2 = 0$ bulunur. O halde $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ elde edilir.

Lemma 4.7: R bir asal hiper halka olsun. Kabul edelim ki f_1 ve f_2 her $r, s, t \in R$ için $f_1(r)s f_2(t) = f_2(r)s f_1(t)$ koşulunu sağlayan yarı türevler ve $f_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $f_2(r) = \lambda f_1(r)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: Hipotezden $r \in R$ verildiğinde her $s \in R$ için $f_1(r)s f_2(r) = f_2(r)s f_1(r)$ geçerlidir. Eğer $f_1(r) \neq 0$ ise Teorem 2.9'dan, $f_2(r) = \lambda(r)f_1(r)$ olacak biçimde $\lambda(r) \in C$ vardır. Eğer $r, t \in R$ için $f_1(r) \neq 0$ ve $f_1(t) \neq 0$ ise $0 \in (\lambda(t) - \lambda(r))f_1(r)s f_1(t)$ olur. O halde bir $\alpha \in \lambda(t) - \lambda(r)$ elemanı için $0 = \alpha f_1(r)s f_1(t)$ elde edilir. R asal hiper halka olduğundan Lemma 4.4'ten, $\alpha = 0$ 'dır. Buradan her $r, s, t \in R$ için $\lambda(r) = \lambda(t)$ elde edilir. $f_1(r) \neq 0$ durumu için ispat biter. $f_1(r) = 0$ olsun. $f_1 \neq 0$ ve R asal hiper halka olduğundan $\forall r \in R, f_2(r) = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $f_2(r) = \lambda f_1(r)$ elde edilir.

Uyarı 4.8: R bir hiper halka olsun. Her $r, s \in R$ için $[r, s] = rs - sr$ ve $(r, s) = rs + sr$ komütatör kümelerini alalım. Bu durumda her $r, s, t \in R$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $[r + s, t] = [r, t] + [s, t]$,
- (ii) $[rs, t] \subseteq [r, t]s + r[s, t] = r[s, t] + [r, t]s$,
- (iii) $(r + s, t) = (r, t) + (s, t)$,
- (iv) $(rs, t) \subseteq (r, t)s + r[s, t] = r(s, t) - [r, t]s$.

İspat: (i) Her $r, s, t \in R$ için

$$\begin{aligned} [r + s, t] &= (r + s)t - t(r + s) = rt + st - tr - ts \\ &= rt - tr + st - ts = [r, t] + [s, t] \end{aligned}$$

sağlanır.

(ii) $r, s, t \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [rs, t] &= (rs)t - t(rs) = rst - trs + \{0\} \\ &\subseteq rts - trs + rst - rts \\ &= (rt - tr)s + r(st - ts) \\ &= r[s, t] + [r, t]s \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $[rs, t] \subseteq [r, t]s + r[s, t]$ elde edilir. Eğer $a \in r[s, t] + [r, t]s$ ise $a \in rst - trs$ yani $a \in [rs, t] \subseteq [r, t]s + r[s, t]$ olur. Buradan $r[s, t] + [r, t]s \subseteq [r, t]s + r[s, t]$ bulunur. Diğer kapsam benzer şekilde gösterilir. Böylece $[rs, t] \subseteq [r, t]s + r[s, t] = r[s, t] + [r, t]s$ olur. (iii) ve (iv) özellikleri (i) ve (ii) özelliklerine benzer olarak ispatlanır.

Teorem 4.9: R bir 2-torsion free asal hiper halka olmak üzere f , R 'nin g örten fonksiyonu ile belirlenmiş sıfırdan farklı bir yarı türevi ve $r \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $[r, f(x)] = 0$ ise $r \in Z(R)$ 'dir.

İspat: Kabul edelim ki $r \notin Z(R)$ olsun. Uyarı 4.8 ve hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= [r, f(xf(y))] \subseteq [r, f(x)f(y)] + [r, g(x)f^2(y)] \\ &\subseteq [r, g(x)]f^2(y) \end{aligned}$$

olur. g örten olduğundan her $y, z \in R$ için $0 \in [r, z]f^2(y)$ elde edilir. Buradan $f^2(y) = 0$ veya $0 \in [r, z]$ olmalıdır. $r \notin Z(R)$ kabul edildiği için $f^2(y) = 0$ 'dır. Lemma 4.5'ten $f = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $r \in Z(R)$ bulunur.

Teorem 4.10: R bir 2-torsion free asal hiper halka ve g, R 'nin birim dönüşümünden farklı bir örten dönüşümü olsun. Kabul edelim ki f, R 'nin g ile belirlenmiş sıfırdan farklı bir yarı türevi ve $r \in R$ olsun. Eğer $(f(R), r) = 0$ ise $f((R, r)) = 0$ 'dır.

İspat: İlk olarak $f(r) = 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $r = 0$ ise $f(r) = 0$ 'dır. Kabul edelim ki $r \neq 0$ olsun. Hipotezden her $x \in R$ için $(f(x), r) = 0$ dır. Bu durumda her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (f(xr), r) \subseteq (f(x)g(r) + xf(r), r) \\ &\subseteq f(x)[g(r), r] + (f(x), r)g(r) + x(f(r), r) - [x, r]f(r) \end{aligned}$$

ve buradan $0 \in [x, r]f(r)$ elde edilir. x yerine xy yazarsak, her $x, y \in R$ için $0 \in [x, r]yf(r)$ olur. O halde bir $s \in [x, r]$ için $0 = sRf(r)$ 'dir. R asal hiper halka olduğundan $r \in Z(R)$ veya $f(r) = 0$ 'dır. Kabul edelim ki $r \in Z(R)$ olsun. Bu durumda $0 = (f(r), r) = rf(r) + rf(r)$ olur. R hiper halkası 2-torsion free olduğundan $rf(r) = 0$ 'dır. $r \neq 0$ kabul ettiğimiz için Lemma 4.4'ten $f(r) = 0$ olur. Böylece her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} f((x, r)) &= f(xr + rx) \subseteq f(xr) + f(rx) \\ &\subseteq (f(x), r) + (g(x), f(r)) = \{0\} \end{aligned}$$

olur. O halde $f((R, r)) = 0$ 'dır.

Tanım 4.11: R bir hiper halka ve $P^*(R)$, R 'nin boş kümeden farklı alt kümelerinin kümesi olsun. $f : R \rightarrow P^*(R)$ dönüşümü her $r, s \in R$ için

- (i) $f(r + s) \subseteq f(r) + f(s)$,
- (ii) $f(rs) \subseteq f(r)g(s) + rf(s) = f(r)s + g(r)f(s)$,
- (iii) $f(g(r)) = g(f(r))$

koşullarını sağlıyor ise f dönüşümüne bir hiper yarı türev denir.

Eğer f dönüşümü her $r, s \in R$ için $f(r + s) = f(r) + f(s)$ ve (ii), (iii) koşullarını sağlıyor ise R 'nin bir strong hiper yarı türevi olarak adlandırılır.

Örnek 4.12: R bir hiper halka olsun. $f : R \rightarrow P^*(R)$, $f(r) = r - g(r)$ biçiminde tanımlansın. Burada g bir good endomorfizm olsun. Açıktır ki f dönüşümü iyi tanımlıdır. $x \in f(r + s)$ alalım. Bu durumda bir $t \in r + s$ için $x \in f(t)$ ve buradan $x \in t - g(t) \subseteq r + s - g(r + s) = r - g(r) + s - g(s) = f(r) + f(s)$ olur. O halde her $r, s \in R$ için $f(r + s) \subseteq f(r) + f(s)$ elde edilir. Her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} f(rs) &= rs - g(rs) = rs - g(r)g(s) + 0 \\ &\subseteq rs - rg(s) + rg(s) - g(r)g(s) = r(s - g(s)) + (r - g(r))g(s) \\ &= rf(s) + f(r)g(s) \end{aligned}$$

olur. Buradan $f(rs) \subseteq f(r)g(s) + rf(s)$ bulunur. Benzer şekilde her $r, s \in R$ için $f(rs) \subseteq f(r)s + g(r)f(s)$ sağlanır. Eğer $x \in f(g(r))$ ise $x \in g(r) - g(g(r)) = g(r - g(r)) = g(f(r))$ sağlanır.

Ayrıca $x \in g(f(r))$ ise $x \in g(r - g(r)) = g(r) - g(g(r)) = f(g(r))$ olduğundan her $r \in R$ için $f(g(r)) = g(f(r))$ geçerlidir.

Böylece f bir hiper yarı türevdir.

Aşağıdaki teorem, bir asal hiper halkada yarı türevin yapısını vermektedir.

Teorem 4.13: R bir asal hiper halka, f ise $g : R \rightarrow R$ good endomor-

fizmi ile belirlenmiş R 'nin bir yarı türevi olsun. Bu durumda aşağıda verilen koşullardan biri geçerlidir:

- (i) f bir türevdir,
- (ii) f bir hiper yarı türevdir ve her $r \in R$ için $f(r) = \lambda(r - g(r))$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: Yarı türev tanımından, her $r, s \in R$ için $0 \in f(r)(s - g(s)) - (r - g(r))f(s)$ geçerlidir. Özel olarak, her $r, s, t \in R$ için $0 \in f(r)(st - g(st)) - (r - g(r))f(st)$ olur. Burada, $f(r)(st - g(st)) \subseteq f(r)st - f(r)g(s)g(t) \subseteq f(r)(s - g(s))g(t) + f(r)s(t - g(t))$ ve $(r - g(r))f(st) \subseteq (r - g(r))f(s)g(t) + (r - g(r))sf(t)$ sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} 0 &\in f(r)(s - g(s))g(t) + f(r)s(t - g(t)) - (r - g(r))f(s)g(t) - (r - g(r))sf(t) \\ &= [f(r)(s - g(s)) - (r - g(r))f(s)]g(t) + f(r)s(t - g(t)) - (r - g(r))sf(t) \end{aligned}$$

ve buradan $0 \in f(r)s(t - g(t)) - (r - g(r))sf(t)$ elde edilir. Eğer g , R üzerinde birim dönüşüm ise f bir türevdir. 1, R üzerinde birim dönüşüm olmak üzere

kabul edelim ki $1 - g$ kümesi sıfırdan farklı olsun. Buradan her $r, s, t \in R$ için $f(r)s(1 - g)(t) = (1 - g)(r)sf(t)$ olur. Lemma 4.7'den istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Asokkumar, A.** (2007). Hyperlattice formed by the idempotents of a hyperring. *Tamkang Journal of Mathematics*, 38 (3), 209-215.
- [2] **Asokkumar, A.** (2013). Derivations in hyperrings and prime hyperrings. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 8, 1-13.
- [3] **Beidar, K. I., Martindale III, W. S. and Mikhalev, A.V.** (1996). Rings with generalized identities. *Marcel Dekker, Inc.*
- [4] **Bergen, J.** (1983). Derivations in Prime Rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 26, 267-270.
- [5] **Brešar, M.** (1990). Semiderivations of Prime Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 108, 859-860.
- [6] **Bordbar, H. and Cristea, I.** (2017). Height of prime hyperideals in Krasner hyperrings. *Filomat*, 31(19), 6153-6163.
- [7] **Corsini, P.** (1993). Prolegomena of hypergroup theory, second edition. *Aviani Editore.*
- [8] **Corsini, P. and Leoreanu, V.** (2003). Applications of Hyperstructure Theory. *Kluwer Academic Publishers, Advances in Math.*, 5.
- [9] **Davvaz, B.** (2004). Isomorphism theorems of hyperrings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35 , 321-331.
- [10] **Davvaz, B. and Leoreanu-Fotea, V.** (2007). Hyperring theory and applications. *International Academic Press.*
- [11] **Davvaz, B. and Salasi, A.** (2006). A realization of hyperrings. *Communications in Algebra*, 34, 4389-4400.
- [12] **Hila, K. and Davvaz, B.** (2014). An introduction to the theory of algebraic multihyperring spaces. *Analele Universitatii Ovidius Constanta. Seria Matematic*, 22, 59-72.
- [13] **Jafarpour, J., Aghabozorgi, H. and Davvaz, B.** (2015). A class of hyperrings connected to preordered generalized Γ -rings. *European Journal of*

Combinatorics, 44, 236-241.

[14] **Kamali Ardekani, L. and Davvaz, B.** (2015). On (θ, σ) -derivations of two types of hyperrings. *J. Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 25, 491-510.

[15] **Kou, Z., Kosari, S., Monemrad, M., Akhoundi, M., and Omid, S.** (2021). A note on the connection between ordered semihyperrings. *Symmetry*, 13(11), 2035.

[16] **Krasner, M.** (1983). A class of hyperrings and hyperfields. *Int. J. Math. Sci.*, 307-312.

[17] **Martindale, W. S.** (1969). Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. *Journal of Algebra*, 12, 576-584.

[18] **Marty, F.** (1934). Sur une generalization de la notion de group. *8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm*, 45-49.

[19] **Mirvakili, S. and Davvaz, B.** (2012). Applications of α^* -relation to Krasner hyperrings, *Journal of Algebra*, 362, 145-156.

[20] **Mirvakili, S. and Davvaz, B.** (2012). Strongly transitive geometric spaces: applications to hyperrings. *Revista de la Union Matematica Argentina* 53, 43-53.

[21] **Mirvakili, S. and Davvaz, B.** (2013). Relationship between rings and hyperrings by using the notion of fundamental relations. *Communications in Algebra* 41, 70-82.

[22] **Mortazavi, A. and Davvaz, B.** (2018). Krasner hypermodules of generalized fractions. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 9, 39-62.

[23] **Nakassis, A.** (1988). Recent results in hyperring and hyperfield theory. *Int. J. Math. Sci.*, 11, 209-220.

[24] **Norouzi, M. and Cristea, I.** (2017). Fundamental relation on m -idempotent hyperrings. *Open Mathematics*, 15, 1558-1567.

[25] **Omid, S. and Davvaz, B.** (2017). On ordered Krasner hyperrings.

- Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 12, 35-49.
- [26] **Omidi, S., Davvaz, B. and Corsini, P.** (2016). Operations on hyperideals in ordered Krasner hyperrings. *Analele Universitatii Ovidius Constanta. Seria Matematic*, 24, 275-293.
- [27] **Omidi, S. and Davvaz, B.** (2017). Characterizations of bi-hyperideals and prime bi-hyperideals in ordered Krasner hyperrings. *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 8, 64-82.
- [28] **Öztürk, M. A. and Jun, Y. B.** (2004). Regularity of the generalized centroid of semi-prime gamma rings. *Commun. Korean Math. Soc.*, 19, 233-242.
- [29] **Posner, E. C.** (1957). Derivations in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1093-1100.
- [30] **Utumi, Y.** (1956). On quotient rings. *Osaka J. Math.*, 8, 1-18.
- [31] **Vougiouklis, T.** (1991). The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, *Algebraic hyperstructures and applications (Xanthi, 1990)*, 203-211, *World Sci. Pub. Teaneck, NJ*.
- [32] **Yanehsari, E. R. and Asghari-Larimi, M.** (2013). Some properties of hyperrings. *Int. Res. J. App. Basic. Sci.*, 4, 2375-2380.
- [33] **Yazarlı, H., Davvaz, B. and Yilmaz, D.** (2020). Extended centroid of hyperrings. *Gulf Journal of Mathematics*, 8, 6-15.
- [34] **Yazarlı, H., Davvaz, B. and Yilmaz, D.** (2022). Generalized centroid of hyperrings. *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, 42(1), 5-16.
- [35] **Yilmaz, D. and Yazarlı, H.** (2022). Semi-derivations on hyperrings. *Bulletin of the International Virtual Institute*, 12(2), 309-319.