

HAZİRAN 2022

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

ZEYNEP İNCE

TÜRKİYE CUMHURİYETİ  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

APOSTOL-GENOCCHI POLİNOMLARINI İÇEREN  
OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP İNCE  
HAZİRAN 2022

**APOSTOL-GENOCCHI POLİNOMLARINI İÇEREN  
OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Gaziantep Üniversitesi  
Matematik  
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Mine MENEKŞE YILMAZ**

**Zeynep İNCE**

**Haziran 2022**



©2022[Zeynep İNCE]

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Zeynep İNCE**

## ABSTRACT

### APPROACH CHARACTERISTICS OF OPERATORS INVOLVING APOSTOL-GENOCCHI POLYNOMIALS

INCE, Zeynep

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mine MENEKSE YILMAZ

June 2022

60 pages

In this study, a new generalization of Kantorovich type operators including Apostol-Genocchi polynomials is given and its approximation properties are investigated. The moments and central moments of the operator are calculated, and the uniform approximation of the operator to a given continuous function  $f$  is shown by Korovkin's theorem. Moreover, the rate of convergence of the operator to the function  $f$  is calculated with mathematical tools such as modulus of continuity, second modulus of continuity, Peetre's  $K$ -function, Lipschitz condition. The error estimation obtained using the first modulus of continuity is supported with numerical examples. In addition, the approximation properties of our operator are also investigated in weighted space. Finally, a Voronovskaya type theorem is constructed for our operator.

**Key Words:** Apostol-Genocchi Polynomials, Kantorovich Type Operators, Modulus of Smoothness, Convergence in Weighted Space, Voronovskaya Type Theorem

## ÖZET

### APOSTOL-GENOCCHI POLİNOMLARINI İÇEREN OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

İNCE, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mine MENEKŞE YILMAZ

Haziran 2022

60 sayfa

Bu çalışmada, Apostol-Genocchi polinomlarını içeren Kantorovich tipi operatörlerin yeni bir genellemesi verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Operatörün momentleri ve merkezi momentleri hesaplanmış, Korovkin teoremi ile operatörün verilen sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yaklaşımı gösterilmiştir. Ayrıca; süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre  $K$ -fonksiyoneli, Lipschitz koşulu gibi matematiksel araçlarla operatörün  $f$  fonksiyonuna yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Birinci süreklilik modülü kullanılarak bulunan hata tahmini, sayısal örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, operatörümüzün yaklaşım özellikleri ağırlıklı uzayda da incelenmiştir. Son olarak, operatörümüz için Voronovskaya tipi bir teorem oluşturulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Apostol-Genocchi Polinomları, Kantorovich Tipi Operatörler, Süreklilik Modülleri, Ağırlıklı Uzayda Yaklaşım, Voronovskaya Tipi Teorem.



*“Canum aileme”*

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, kendisine ne zaman danıŐsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve bűyűk bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden geleni fazlasıyla sunan, her sorun yaŐadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, gűler yűzűnű ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekte mesleki hayatımda da bana verdiĐi deĐerli bilgilerden faydalanacaĐımı dűŐűndűğűm, her tűrlű konuda desteĐini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeĐi olan, Gaziantep Ŭniversitesi űĐretim űyelerinden çok kıymetli danıŐman hocam, Sayın Dr. ŐĐr. Ŭyesi Mine MENEKŐE YILMAZ'a sonsuz minnet ve teŐekkűrlerimi sunarım.

Lisansűstű eĐitimi almam konusunda bana ilham olan, eĐitim hayatımda bana olduĐa katkı saĐladıĐına inandıĐım Hacettepe Ŭniversitesi EĐitim Fakűltesi Matematik ve Fen Bilimleri EĐitimi Bűlűmű Matematik EĐitimi Anabilim Dalı akademisyenlerine ve Sayın Prof. Dr. Őenol DOST hocama teŐekkűrű bir borç bilirim.

Son olarak beni bu gűnlere sevgi ve sayĐı kelimelerinin anlamlarını bilecek Őekilde yetiŐtirerek getiren ve bana her zaman gűvenip benden hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen; sevgi, ilgi ve Őefkatlerini hep űzerimde hissettiĐim bu hayattaki en bűyűk Őansım olan canım annem ve canım babama ve deĐerli aileme sonsuz teŐekkűrler.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>ABSTRACT</b> .....	v
<b>ÖZET</b> .....	vi
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	viii
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	ix
<b>TABLolar LİSTESİ</b> .....	xi
<b>SEMBOLLER LİSTESİ</b> .....	xii
<b>BÖLÜM I: GİRİŞ</b> .....	1
1.1. Çalışmanın Amacı .....	1
<b>BÖLÜM II: GENEL BİLGİLER</b> .....	6
2.1. Temel Kavramlar.....	6
2.2. Birinci ve ikinci Süreklilik Modülleri .....	9
2.3. Lipschitz Sınıfı .....	10
2.4. Peetre K-Fonksiyoneli.....	11
<b>BÖLÜM III:BAZI POLİNOM DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI</b> 12	
3.1. Appell Polinomları .....	13
3.2. Euler Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları.....	14
3.2.1. Euler Sayıları .....	14
3.2.2. Euler Polinomları.....	15
3.2.3. Apostol-Euler Sayıları .....	15
3.2.4. Apostol-Euler Polinomları.....	16
3.2.5. Genelleştirilmiş Apostol-Euler Sayıları.....	16
3.2.6. Genelleştirilmiş Apostol-Euler Polinomları .....	16
3.3. Bernoulli Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları .....	16
3.3.1. Bernoulli Sayıları.....	16
3.3.2. Bernoulli Polinomları .....	17
3.3.3. Apostol-Bernoulli Sayıları.....	17
3.3.4. Apostol-Bernoulli Polinomları .....	17
3.3.5. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Sayıları .....	17

3.3.6. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomları.....	18
3.4. Genocchi Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları .....	18
3.4.1. Genocchi Sayıları .....	18
3.4.2. Genocchi Polinomları .....	18
3.4.3. Apostol-Genocchi Sayıları .....	19
3.4.4. Apostol-Genocchi Polinomları .....	19
3.4.5. Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Sayıları.....	20
3.4.6. Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Polinomları.....	20
<b>BÖLÜM IV: TEMEL YAKLAŞIM TEOREMLERİ.....</b>	<b>21</b>
4.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi .....	21
4.1.1. Weierstrass Trigonometrik Yaklaşım Teoremi .....	21
4.2. Klasik Korovkin Teoremi.....	24
<b>BÖLÜM V: OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI VE YAKINSAKLIK</b>	
<b>ÖZELLİKLERİ.....</b>	<b>27</b>
5.1. Apostol-Genocchi Polinomlarını İçeren Operatörün Kurulumu .....	27
5.2. $[0, a]$ Aralığında $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$ Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri.....	29
5.3. $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$ Operatörünün Yakınsaklık Hızı.....	34
<b>BÖLÜM VI: SAYISAL ÖRNEKLER.....</b>	<b>42</b>
<b>BÖLÜM VII: AĞIRLIKLIL UZAYDA YAKLAŞIM .....</b>	<b>44</b>
<b>BÖLÜM VIII: VORONOVSKAYA TİPİ TEOREM.....</b>	<b>49</b>
<b>BÖLÜM IX: SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>53</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>54</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ (CV) .....</b>	<b>59</b>
<b>YAYINLAR .....</b>	<b>60</b>

## TABLÖLAR LİSTESİ

	<b>Sayfa</b>
<b>Tablo 6.1</b>	Sürekli modül kullanılarak $f(x) = \sin(\pi x)$ nin hata tahmini ... 42
<b>Tablo 6.2</b>	Sürekli modül kullanılarak $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ nin hata tahmini ..... 42
<b>Tablo 6.3</b>	Sürekli modül kullanılarak $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ nin hata tahmini ..... 43

## SEMBOLLER LİSTESİ

$B_n(f; x)$	Bernstein Polinomları
$(f_n)$	Fonksiyon Dizisi
$(L_n)$	Operatör Dizisi
$\omega(f; \delta)$	Süreklilik Modülü
$\omega_2(f; \delta)$	İkinci Süreklilik Modülü
$Lip_M(\alpha)$	$\alpha$ . Mertebeden Lipschitz Sınıfı
$K(f; \delta)$	Peetre K – fonksiyoneli
$F(x, t)$	Üreteç Fonksiyonu
$F(\alpha, \beta; \gamma; x)$	Hipergeometrik Fonksiyon
$\{A_n(x)\}$	Appell Polinomlar Dizisi
$A(t)$	Appell Polinomlar Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$E_n$	Euler Sayıları
$E_n(x)$	Euler Polinomları
$E_n(\lambda)$	Apostol-Euler Sayıları
$E_n(x; \lambda)$	Apostol-Euler Polinomları
$E_n^\alpha(\lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Euler Sayıları
$E_n^\alpha(x; \lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Euler Polinomları
$B_n$	Bernoulli Sayıları
$B_n(x)$	Bernoulli Polinomları
$B_n(\lambda)$	Apostol-Bernoulli Sayıları
$B_n(x; \lambda)$	Apostol-Bernoulli Polinomları
$B_n^\alpha(\lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Sayıları
$B_n^\alpha(x; \lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomları
$G_n$	Genocchi Sayıları
$G_n(x)$	Genocchi Polinomları
$G_n(\lambda)$	Apostol-Genocchi Sayıları

$G_n^\alpha(\lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Sayıları
$G_n^\alpha(x; \lambda)$	Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Polinomları
$G_k^\alpha(x; \beta)$	Genocchi Polinomlarının Üreteç Fonksiyonu
$f_h$	İkinci Dereceden Steklov Fonksiyonu
$C(D)$	D üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$\rho$	Ağırlık fonksiyonu
$\Omega_\rho$	Ağırlıklı uzay
$\mathbb{R}$	Reel değerli sayılar kümesi



## BÖLÜM I

### GİRİŞ

#### 1.1 Çalışmanın Amacı

Euler, 1755 yılında yayınlanan *Institutiones calculi differentialis* kitabında fonksiyon kavramının genel bir tanımını şu şekilde verir: “*Belirli nicelikler, diğerlerine, ikincisi değiştiğinde bir değişikliğe uğrayacak şekilde bağlıysa, o zaman birincisine ikincinin fonksiyonu denir.*” [1]. Bu tanım, fonksiyon kavramını soyut olarak tanımlar ve formülize eder. Yaklaşım teorisinde, nicelikler arasındaki karşılıklı bağımlılık da işte bu tanıma karşılık gelir.

Polinom olmayan fonksiyonlar sonsuz sayıda terim içeren polinomlarla ifade edilir mi?

Bu noktadan sonra, aşkın (transcendental) fonksiyonların nasıl temsil edileceğine dair fikirler oluşmaya başladı. Üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar aşkın fonksiyon sınıfındadırlar ve bir polinom denklemini karşılamayan analitik fonksiyonlardır. Aşkın fonksiyonların yaklaşımına yardım için Taylor teoremi ve Newton’ a dayanan bazı interpolasyon formülleri geliştirildi. Böylece, basit bir şey ile karmaşık bir şeye yaklaşmak fikri uygulanmaya devam etti ve bu da yaklaşım teorisinin temel tekniğidir [2].

Bir  $X$  uzayındaki keyfi bir  $f$  fonksiyonuna,  $Y \subset X$  alt kümesinden basit ve daha iyi özellikleri olan bir  $\varphi$  fonksiyonu ile yaklaşma probleminde,  $X$  uzayı, sürekli fonksiyonlar uzayı,  $p$ . mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar uzayı gibi normlu bir uzay veya diğer Banach fonksiyon uzaylarından birisidir.  $\varphi$  fonksiyonu,  $[a, b]$  aralığında derecesi  $\leq n$  tüm cebirsel polinomların uzayı  $\mathbf{P}$  den seçilen bir  $\varphi = P_n$  fonksiyonu şeklinde olabilir:

$$P := P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n;$$

ya da  $2\pi$  periyotlu, derecesi  $\leq n$  trigonometrik polinomların sınıfı  $\mathbf{T}$  den aşağıdaki formda bir  $\varphi$  seçilebilir:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Weierstrass, yaklaşım teorisi için milat sayılan 1885 yılında yayınlanan çalışmasında, kapalı bir aralıkta tanımlı, sürekli bir  $f$  fonksiyonuna cebirsel polinomlar ve trigonometrik polinomlar ile düzgün yaklaşımın mümkün olduğunu kanıtlamıştır. Teoremlerin orjinal kanıtı 1885’de Weierstrass tarafından [3]’de verilmiştir.

1912’ de [4]’ de Sergey N. Bernstein kendi adıyla anılan Bernstein polinomlarını  $[0,1]$  aralığında sürekli  $f$  fonksiyonu için

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde oluşturmuştur. Bernstein, bu polinomların,  $[0,1]$  aralığında sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlamıştır. Weierstrass teoreminde, kullanılan dizinin varlığı biliniyorken, Bernstein’nın sunduğu teorem ile artık bu dizinin ne olduğu da bilinmektedir. Bernstein’ nın kanıtının gücü algoritmanın açık ve elementer işlemler kullanılmış olmasındadır.

Bernstein polinomlarının sunulmasından itibaren bu polinomun çok sayıda genellemesi yapılmıştır. Bu genellemelerle geniş bir lineer pozitif operatör sınıfı oluşmuştur. Bunun dışında Korovkin tipi yaklaşım teorisi olarak anılan yeni bir teori de oluşmuştur. 1950 yılında H. Bohman [5], 1953 yılında P.P. Korovkin [6] tarafından Bernstein’nın kanıtından türetilmiş güçlü bir yaklaşım teoremi sunulmuştur. Bu teorem, bir lineer pozitif operatör dizisinin, kompakt bir bölgedeki sürekli bir fonksiyona yaklaşımı olabilmesi için ne çeşit kriterlere ihtiyaç duyduğunu belirler. Böylece yakınsaklık özellikleri araştırılırken, belirli bir operatör için özel teknikler oluşturmaya ihtiyaç kalmamıştır.

Bernstein polinomlarının, 1937 yılında Chlodowsky [7] ve 1950 yılında Szasz [8] ve 1960 yılında Mejer-König ve Zeller [9] sonsuz aralıklardaki yaklaşım özelliklerini incelemiştirler; 1930 yılında Wright [10] ve 1931 yılında Kantorovich [11], kompleks düzlemdeki bölgeler içindeki yakınsaklıklarını çalışmışlardır; 1929 yılında

Chlodowsky [12], 1930 yılında Kantorovich [13] ve 1937 yılında Lorentz [14] sürekli olmayan fonksiyonlar için yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. [15]

Bir dizinin yakınsamasının veya ıraksamasının belirlenmesi yeterli değildir; ne kadar hızlı yakınsadığını veya ıraksadığını tam olarak bilmemiz gerekir. Bunun için bazı süreklilik modülleri, onların kombinasyonları, Peetre K-fonksiyoneli veya Lipschitz uzayı gibi araçlarla “yakınsaklık hızı” hesaplanır. Süreklilik modülü tanımı, la Vallee Poussin tarafından verilmiştir; sürekli bir  $f$  fonksiyonu için  $|x - y| \leq \delta$  iken  $|f(x) - f(y)|$  nin maksimum değerine süreklilik modülü denir ve  $\omega(\delta)$  sembolü ile gösterilir.

1932 yılında Voronovskaya [16], ikinci türevin sıfırdan farklı olması durumunda Bernstein polinomlarının yakınsaklık hızı ile ilgili bir teorem sunmuştur. 1935 yılında Popoviciu, süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık hızını aşağıdaki şekilde hesaplamıştır [17]:

$$|B_n(f)(x) - f(a)| \leq M\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Yukarıda sözü geçen çalışmalarda bazı operatörleri örnek olması adına verelim. 1930 yılında, Leonid Vitaliyevich Kantorovich, Bernstein polinomunun bir genellemesini integrallenebilir fonksiyonlar uzayına taşımıştır:

$$K_u(f; x) := (u + 1)e^{-ux} \sum_{k=0}^u p_{u,k}(x) \int_{\frac{k}{u+1}}^{\frac{k+1}{u+1}} f(s) ds.$$

1950 yılında, Otto Szasz, Bernstein polinomlar dizisinin bir genellemesi  $[0, \infty)$  aralığındaki sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki gibi vermiştir:

$$S_u(f; x) := e^{-ux} \sum_{k=0}^u \frac{(ux)^k}{k!} f\left(\frac{k}{u}\right),$$

Burada  $0 \leq x < \infty$  dır.

1960 yılında, W. Meyer-König ve K. Zeller tarafından tanımlanan operatör aşağıdaki şekildedir:

$$M_n(f; x) := (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{k!} f\left(\frac{k}{k+n}\right).$$

1964 yılında, Cheney ve Sharma, Meyer-König ve Zeller'in tanımladığı operatörde yaptığı değişiklikle lineer pozitif operatörü şu şekilde ifade ettiler [18]:

Belirlenmiş bir  $t \leq 0, f, [0,1]$  üzerinde sürekli ve  $x \in [0,1)$  için

$$L_{n,t}(f; x) := (1 - x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(t) f\left(\frac{k}{k+n}\right) x^k$$

burada  $L_k^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{n+k}{k-j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j$  genelleştirilmiş Laguerre polinomudur.

1969 yılında, A. Jakimovski ve D. Leviaten Appell polinomlarını içeren bir genel operatör sunmuştur [19]:

$$P_n(f; x) := \frac{e^{-ux}}{g(1)} \sum_{k=0}^u \frac{(ux)^k}{k!} f\left(\frac{k}{u}\right),$$

burada,  $g(z), |z| < r$  ( $r > 1$ ) diski içinde analitik fonksiyon ve

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^u p_k(x)u^k$$

dır.

1972 yılında, Jain, Szasz-Mirakyan operatörünün genellemesini şu şekilde yapmıştır [20]:

$$B_n^{(\alpha)}(f; x) := \sum_{k=0}^{\infty} L_{n,k}^{(\alpha)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) x^k,$$

burada  $x \in [0, \infty)$   $L_{n,k}^{(\alpha)}(x) = \frac{nx(nx+ak)^{k-1}}{k!} \exp(-nx - k\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ .

Bu genellemelere ek olarak, yakın zamanda [21-28] makalelerinde genel veya belirli polinomları içeren operatörler tanımlanarak çeşitli yaklaşım özellikleri ve hızları incelenmiştir. Özel olarak, Apostol-Genocchi polinomlarını ve varyasyonlarını içeren operatörler üzerine yapılan çalışmalar için Menekşe Yılmaz [29], C.B.Corcino [30,31], Prakash ve diğerleri [32], N. Deo [33], N. S. Mishra ve N. Deo [34]' nun makalelerine bakılabilir.

Bu çalışmada Apostol-Genocchi polinomunun üreteç fonksiyonu yardımıyla kurulan bir operatörün yaklaşım özellikleri ve yaklaşımının hızı çeşitli matematiksel araçlar kullanılarak incelenecektir.

Tezin birinci bölümünde yaklaşım teorisi ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölümde tez için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bilinen bazı polinomlar ve üreteç fonksiyonları ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Weierstrass ve Korovkin teoremlerinden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde,  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörü oluşturulmuştur. Ardından operatörün momentleri, merkezi momentleri hesaplanmış, Korovkin teoremi ile  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörünün verilen sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yaklaşımı gösterilmiştir. Ayrıca, süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre  $K$ -fonksiyoneli, Lipschitz koşulu kavramlarıyla  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Altıncı bölümde birinci süreklilik modülü kullanılarak elde edilen yaklaşım sonucu, üç sayısal örnekle desteklenmiştir. Veriler, Maple programı kullanılarak elde edilmiştir.

Yedinci bölümde operatörümüzün yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçları ağırlıklı uzayda incelenmiştir.

Sekizinci bölümde operatörümüz için Voronovskaya tipi bir teorem oluşturulmuştur.

Son bölüm sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

## BÖLÜM II

### GENEL BİLGİLER

#### 2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

**Tanım 2.1.1.**  $D$ ,  $\mathbb{R}$ ' nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere;  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $a \in D$  olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $|x - a| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna  $a$  noktasında *süreklidir* denir.

**Tanım 2.1.2.**  $K$ ,  $\mathbb{R}$ ' nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere;  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x, y \in K$  olmak üzere, her  $\varepsilon > 0$  için  $|x - y| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  bulunabiliyorsa;  $f$  fonksiyonu  $K$  üzerinde *düzgün süreklidir* denir.

**Tanım 2.1.3.** Kapalı bir  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bütün reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye *fonksiyon uzayı* denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır ve  $C[a, b]$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.4.** Boştan farklı  $D$  kümesindeki her  $x$  elemanı ve her  $\varepsilon > 0$  için  $n > n_0$  olduğunda  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  olacak şekilde en az bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  doğal sayısı varsa  $(f_n)$  dizisi  $C[a, b]$  üzerinde  $f$  fonksiyonuna  $D$  üzerinde *düzgün yakınsaktır* denir ve  $(f_n) \Rightarrow f$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.5.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayı olsun.  $X$  kümesinden  $Y$  kümesine olan bir  $L$  dönüşümüne *operatör* denir. Buna göre,  $X$  uzayında tanımlı her  $f$  fonksiyonuna  $Y$  bir  $L_f$  fonksiyonu karşılık gelir. Bu  $L_f$  fonksiyonunun  $x$  noktasında aldığı değer  $L(f; x)$

ile gösterilir [35].  $L(f; x) = L(f(t); x) = L(f)$  şeklinde de kullanımları vardır. Burada  $L$  operatörü  $f$  fonksiyonuna bağlı olduğundan  $t$  değişkenine göre uygulanmaktadır.

**Tanım 2.1.6.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L : X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörü için  $L$  operatörü her  $f, g \in X$  ve her  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  için

$$L(a_1f + a_2g) = a_1L(f) + a_2L(g)$$

koşulunu sağlıyorsa,  $L$  operatörüne *lineer operatör* denir .

**Tanım 2.1.7.**  $L : X \rightarrow Y$  bir operatör ve  $f \in X$  olsun. Eğer

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

oluyorsa  $L$  operatörüne *lineer pozitif operatör* denir [36].

Bir operatör hem lineerlik hem de pozitiflik koşullarını sağlarsa operatöre lineer pozitif operatör denir.

**Lemma 2.1.1.**  $L$  bir lineer pozitif operatör olsun. O halde,

1.  $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$  sağlanır (Monotonluk).
2.  $|L(f)| \leq L(|f|)$  sağlanır.

**Tanım 2.1.8.**  $A \subset \mathbb{R}$  ve  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n(x)$ 'e bir *fonksiyon dizisi* denir ve  $(f_n)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.9.** Bir  $f_n$  fonksiyon dizisinin  $f$  fonksiyonuna  $C[a, b]$  normunda *düzgün yakınsak* olması için gerek ve yeter şart :

$\forall x \in [a, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

ya da daha açık olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Düzgün yakınsama  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.10.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L : X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörü ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $L_n(f; x)$  e bir *operatör dizisi* denir ve  $(L_n)$  ile gösterilir.  $L_n(f; x)$ ,  $L_n$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna uygulandığını ve sonucun  $x$  değişkenine bağlı olduğunu gösterir [37].

**Tanım 2.1.11.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere;  $L : X \rightarrow Y$  şeklindeki  $L$  operatörü ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(L_n)$  operatör dizisi verilsin.

$$L_n((t-x)^k; x), \quad \{k = 0, 1, 2, \dots\}$$

ile tanımlanan ifadelere operatör dizisinin  $k$ . *merkezi momenti* denir [38].

**Tanım 2.1.12 (Taylor Teoremi).**  $k \geq 1$  bir tam sayı olsun ve  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $a \in \mathbb{R}$  noktasında  $k$  kez türevlenebilir olsun. O zaman bir  $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  işlevi vardır, öyle ki

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k$$

ve  $\lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0$  olur.  $h_k(x)$  terimine *kalanın Peano formu* denir.

$f$  fonksiyonunun  $a$  noktasında  $k$  nıncı dereceden Taylor polinomu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$f(x) = p(x) + h_k(x)(x-a)^k, \quad \lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0$$

olacak şekilde bir  $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve bir  $k$ . dereceden  $p$  polinomu varsa, bu durumda  $p = P_k$  dır ve benzersiz “asimptotik en uygun” polinomdur.

Taylor teoremi, kalan terimin yani  $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$ , asimptotik davranışını tanımlaması  $f$  fonksiyonuna Taylor polinomuyla yaklaşırken en iyi hatayı verir. Küçük- $o$  gösterimini kullanarak, Taylor teoremindeki ifade şu şekilde okunur:

$$R_k(x) = o(|x-a|^k), \quad x \rightarrow a.$$

**Tanım 2.1.13.**  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n \leq \beta_n$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $\alpha_n \rightarrow 0$  ve  $\beta_n \rightarrow 0$  koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda  $(\alpha_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\beta_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızından daha hızlıdır denir.

**Tanım 2.1.14.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  ise  $(\alpha_n)$  dizisine sonsuz küçülendir denir.  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$  dizileri sonsuz küçülen diziler olsun. Buna göre,

- i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$  ise  $(\alpha_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\beta_n)$  dizisinden daha hızlıdır denir.
- ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$  ise  $(\beta_n)$  dizisinin sıfıra yaklaşma hızı  $(\alpha_n)$  dizisinden daha hızlıdır denir.
- iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$  ise  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$  dizilerinin sıfıra yaklaşma hızı aynıdır denir.
- iv.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c$  ise  $c$  ye asimptotik değer,  $(\beta_n)$  dizisine de  $(\alpha_n)$  dizisinin asimptotik hızı denir. Yani  $(\alpha_n)$ ' nin sıfıra yaklaşım hızı  $(\beta_n)$ ' nin sıfıra yaklaşım hızıyla belirlenir. Çünkü  $c$ ,  $n$  ye bağlı olmayan bir sabittir.

Operatörlerde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{L_n(f; x) - f(x)}{\beta_n} \right| = A(n, x)$$

ise  $A(n, x)$  fonksiyonu *asimptotik değer*,  $(\beta_n)$  dizisi de  $|L_n(f; x) - f(x)|$ ' in *asimptotik hızıdır*.

**Tanım 2.1.15.**  $f$  ve  $h$  fonksiyonları lineer bağımlı ve  $[a, b]$  aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$\left( \int_a^b f(x)h(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b h(x)^2 dx \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adı verilir.

## 2.2 Birinci ve İkinci Süreklilik Modülleri

Bu kısımda birinci süreklilik modülü, birinci süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan Lipschitz sınıfı, ikinci süreklilik modülü ve Peetre K-fonksiyonelinin tanımları ve bazı temel özellikleri verilecektir.

Tez boyunca kullanacağımız uzayların tanımlarını verelim:

$$E := \{f: \forall x \in [0, \infty), |f(x)| \leq ae^{bx}, a \in [0, \infty) \text{ ve } b \in \mathbb{R}\}$$

$$C_E[0, \infty) := C[0, \infty) \cap E$$

$\|f\| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$  normu ile donatılmış  $C_B[0, \infty)$  uzayı,  $[0, \infty)$  üzerinde tanımlı reel değerli, sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

**Tanım 2.2.1.**  $f \in C[a, b]$  olsun.  $\forall \delta > 0$  için

$$\omega(f; \delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

ile tanımlanan  $\omega(f; \delta)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i)  $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii)  $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$  ise  $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii)  $m \in \mathbb{N}$  için  $\omega(f; m\delta) \leq m \omega(f; \delta)$
- (iv) Süreklilik modülü artan ve sınırlıdır.
- (v)  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında düzgün sürekli  $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0$

**Tanım 2.2.2.**  $f \in C_B[0, \infty)$  olsun.  $\delta > 0$  için,

$$\omega_2(f; \delta) = \sup\{|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| : x \in [0, \infty), 0 < h \leq \delta\}$$

ile tanımlanan  $\omega_2(f; \delta)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun *ikinci süreklilik modülü* denir.

### 2.3 Lipschitz Sınıfı

**Tanım 2.3.1.**  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M > 0$  için,

$$Lip_\alpha(M) := \{f \in C_B[0, \infty) : |f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha, t, x \in [0, \infty)\}$$

ile tanımlanan  $Lip_\alpha(M)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun  *$\alpha$ . mertebeden Lipschitz sınıfı* denir.

## 2.4 Peetre K-Fonksiyoneli

**Tanım 2.4.1.**  $f \in C_B[0, \infty)$  olsun.

$$K(f; \delta) := \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \{ \|f - g\|_{C_B} + \delta \|g\|_{C_B^2} \}$$

ile tanımlanan  $K(f; \delta)$  ifadesine *Peetre K-fonksiyoneli* adı verilir. Burada,

$$C_B^2[0, \infty) := \{g \in C_B[0, \infty): g', g'' \in C_B[0, \infty)\} \text{ ve}$$

$$\|g\|_{C_B^2} := \|g\|_{C_B} + \|g'\|_{C_B} + \|g''\|_{C_B} \text{ dir.}$$

**Teorem 2.4.1.**  $f \in C_B[0, \infty)$  ve  $\delta > 0$  olsun. Bu durumda Peetre K-fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasında

$$K(f; \delta) \leq M \{ \omega_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \|f\|_{C_B} \}$$

biçiminde bir ilişki vardır. Burada  $M$  pozitif bir sabittir [39].

## BÖLÜM III

### BAZI POLİNOM DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde öncelikle Appell polinomlarından bahsedeceğiz ardından Euler, Bernoulli, Genocchi sayıları ve polinomlarının klasik, Apostol ve genelleştirilmiş formlarını gösterip üreteç fonksiyonlarını sunacağız ve aralarındaki ilişkiden bahsedeceğiz.

**Tanım 3.1.** İki değişkenli bir  $F(x, t)$  fonksiyonu  $t$  nin kuvvetleri cinsinden

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n \quad |t| < K, \quad K \in \mathbb{R}$$

şeklinde bir seriye açılabilirse  $F(x, t)$  fonksiyonuna  $\{f_n(x)\}$  fonksiyonlar ailesinin bir *üreteç fonksiyonu* denir. Burada  $c_n$  ler  $x$  ve  $t$  den bağımsız  $n$  nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilir. Eğer  $c_n = 1$  seçilirse,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n$$

adi üreteç fonksiyonunu;  $c_n = \frac{1}{n!}$  seçilirse,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!} t^n$$

üstel üreteç fonksiyonunu elde ederiz.

**Tanım 3.2.**  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan hipergeometrik seri literatürde  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  ile gösterilir ve bu fonksiyona *hipergeometrik fonksiyon* denir. Burada,

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1), & n > 0 \end{cases}$$

şeklinindedir. *Genelleştirilmiş hipergeometrik seri ise*

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n x^n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n n!}$$

biçiminde tanımlanır.

### 3.1 Appell Polinomları

$n$ . mertebeden verilen  $\{A_n(x)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  polinomlar dizisi  $a_0 \neq 0$  ve

$$\frac{d}{dx} A_n(x) = n A_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

olmak üzere

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

kuvvet serisi için

$$A(t)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği gerçeklerse  $\{A_n(x)\}$  dizisine Appell polinomlar dizisi denir [40-42]. Buradaki  $A(t)e^{xt}$  fonksiyonu  $\{A_n(x)\}$  dizisinin üreteç fonksiyonudur.

[43] birinci çeşit genelleştirilmiş Appell kümesini

$$A(w)B(zg(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)w^n \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada  $A(w)$ ,  $B(t)$ ,  $g(w)$  kuvvet serileridir:

$$A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)w^n, \quad a_0 \neq 0$$

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad b_n \neq 0, \quad n \geq 0$$

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n w^n, \quad g_1 \neq 0.$$

Genelleştirilmiş Appell polinomları birçok standart kümeyi içerir. (3.1) denklemi

$g(w) = w$  ve  $B(t) = e^t$  alındığında Appell polinomlarını,

$g(w) = w$  alındığında Brenke polinomlarını,

$B(t) = e^t$  alındığında Sheffer polinomlarını verir.

Bu sınıf ayrıca Laguerre, Hermite, Chebyshev, Gegenbauer ve Jacobi polinomları ile de ilişkilidir.

Appell polinomları ile Bernoulli, Euler, Genocchi ve ailelerinin ilişkileri aşağıdaki şekildedir:

Appell polinomlarında;

i.  $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$  seçimi ile polinom Bernoulli polinomu:

$$A_n(x) = B_n(x)$$

ii.  $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$  seçimi ile polinom Euler polinomunu:

$$A_n(x) = E_n(x)$$

iii.  $A(t) = \frac{2t}{e^t+1}$  seçimi ile polinomu Genocchi polinomu:

$$A_n(x) = G_n(x)$$

iv.  $A(t) = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^\alpha$  seçimi ile genelleştirilmiş Bernoulli polinomu:

$$A_n(x) = B_n^\alpha(x), \alpha \in \mathbb{C}$$

v.  $A(t) = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^\alpha$  seçimi ile genelleştirilmiş Euler polinomu:

$$A_n(x) = E_n^\alpha(x), \alpha \in \mathbb{C}$$

vi.  $A(t) = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^\alpha$  seçimi ile genelleştirilmiş Genocchi polinomu:

$$A_n(x) = G_n^\alpha(x), \alpha \in \mathbb{C}$$

elde edilir.

Şimdi bu polinomları özel olarak inceleyelim.

## 3.2 Euler Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları

### 3.2.1 Euler Sayıları, $E_n$ ;

$E_0 = 1$  ve  $n \geq 1$  için

$$E_n = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k$$

şeklinde tanımlanır. Euler sayıları,

$$E_0 = 1, E_1 = -\frac{1}{2}, E_2 = 0, E_3 = \frac{1}{4}, E_4 = 0, E_5 = -\frac{1}{2}, E_6 = 0, E_7 = \frac{17}{8} \dots$$

şeklinde devam eder. Euler sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.2.2 Euler Polinomları, $E_n(x)$ ;

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} E_k$$

biçiminde tanımlanır. Euler polinomları;

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x, \quad E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4},$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x, \quad E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

.....

şeklinde devam eder. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.2.3 Apostol-Euler Sayıları, $E_n(\lambda)$ ;

$$\frac{2}{\lambda e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |2t + \log \lambda| < \pi$$

şeklindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.2.4 Apostol-Euler Polinomları, $E_n(x; \lambda)$ ;

$$\frac{2}{\lambda e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |2t + \log \lambda| < \pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.2.5 Genelleştirilmiş Apostol-Euler Sayıları, $E_n^\alpha(\lambda)$ ;

$$\left( \frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^\alpha(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < \pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.2.6 Genelleştirilmiş Apostol-Euler Polinomları, $E_n^\alpha(x; \lambda)$ ;

$$\left( \frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^\alpha(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < \pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

## 3.3 Bernoulli Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları

### 3.3.1 Bernoulli Sayıları, $B_n$ ;

$$\sum_{n=0}^{k-1} n^p = \sum_{n=0}^p \frac{B_0}{0!} \frac{k^{p+1}}{p+1} + \frac{B_1}{1!} k^p + \frac{B_2}{2!} p k^{p-1} + \frac{B_3}{3!} p(p-1) k^{p-2} + \dots + \frac{B_p}{1!} k$$

biçiminde tanımlanır. Bernoulli sayıları;

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \dots$$

şeklinde devam eder. Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < 2\pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.3.2 Bernoulli Polinomları, $B_n(x)$ ;

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$$

biçiminde tanımlanır. Bernoulli polinomları;

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

.....

şeklinde devam eder. Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.3.3 Apostol-Bernoulli Sayıları, $B_n(\lambda)$ ;

$$\frac{t}{\lambda e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < 2\pi$$

şeklindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.3.4 Apostol-Bernoulli Polinomları, $B_n(x; \lambda)$ ;

$$\frac{t}{\lambda e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < 2\pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.3.5 Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Sayıları, $B_n^\alpha(\lambda)$ ;

$$\left( \frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^\alpha(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < 2\pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.3.6 Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomları, $B_n^\alpha(x; \lambda)$ ;

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^\alpha(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < 2\pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

## 3.4 Genocchi Sayıları ve Polinomlarının Bazı Formları

### 3.4.1 Genocchi Sayıları, $G_n$ ;

$G_0 = 0$  olmak üzere,

$$(G + 1)^n + G_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

ifadesi ile tanımlanır. Genocchi sayıları,

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_2 = -1, \quad G_3 = 0,$$

$$G_4 = 1, \quad G_5 = 0, \quad G_6 = -3, \quad G_7 = 0, \quad G_8 = 17 \dots$$

şeklinde devam eder. Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.4.2 Genocchi Polinomları, $G_n(x)$ ;

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} G_k$$

biçiminde tanımlanır. Genocchi polinomları;

$$G_0(x) = 0, \quad G_1(x) = 1,$$

$$G_2(x) = 2x - 1, \quad G_3(x) = 3x^2 - 3x,$$

$$G_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1, \quad G_5(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x,$$

$$G_6(x) = 6x^5 - 15x^4 + 15x^2 - 3, \quad G_7(x) = 7x^6 - 21x^5 + 35x^3 - 21x,$$

.....

şeklinde devam eder. Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$\frac{2t}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.4.3 Apostol-Genocchi Sayıları, $G_n(\lambda)$ ;

$$\frac{2t}{\lambda e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < \pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır. Apostol-Genocchi sayıları,

$$G_0(\lambda) = 0, \quad G_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda + 1},$$

$$G_2(\lambda) = -\frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2}, \quad G_3(\lambda) = \frac{6\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)^3},$$

$$G_4(\lambda) = -\frac{8\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 1)}{(\lambda + 1)^4}, \quad G_5(\lambda) = \frac{10\lambda(\lambda^3 - 11\lambda^2 + 11\lambda - 1)}{(\lambda + 1)^5},$$

.....

şeklinde devam eder.

### 3.4.4 Apostol-Genocchi Polinomları, $G_n(x; \lambda)$ ;

$$\frac{2t}{\lambda e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < \pi$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır. Apostol-Genocchi polinomları,

$$G_0(x; \lambda) = 0,$$

$$G_1(x; \lambda) = \frac{2}{\lambda + 1},$$

$$G_2(x; \lambda) = \frac{4}{\lambda + 1}x - \frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2},$$

$$G_3(x; \lambda) = \frac{6}{\lambda + 1}x^2 - \frac{12\lambda}{(\lambda + 1)^2} + \frac{6\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)^3},$$

.....

şeklinde devam eder.

### 3.4.5 Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Sayıları, $G_n^\alpha(\lambda)$ ;

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^\alpha(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < |\log(-\lambda)|)$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

### 3.4.6 Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi Polinomları, $G_n^\alpha(x; \lambda)$ ;

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^\alpha(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < |\log(-\lambda)|)$$

biçimindeki üreteç fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır.

## BÖLÜM IV

### TEMEL YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Bu kısımda öncelikle, Weierstrass tarafından verilen ve yaklaşım teorisinin temeli olan teoremleri biçimsel olarak ifade edeceğiz, ardından Weierstrass teoreminin Bernstein tarafından yapılan kanıtını vereceğiz.

#### 4.1 Weierstrass Yaklaşım Teoremi

1885 yılında Weierstrass [3] herhangi bir  $f \in C[a, b]$  fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona keyfi yakınlıkta bir cebirsel polinomun olduğunu aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

**Teorem 4.1.1.**  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli reel değerli bir  $f$  fonksiyonuna cebirsel polinomlarla düzgün yaklaşılabilir; yani  $f$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b$$

sağlayacak bir  $P$  polinomu vardır.

#### 4.1.1 Weierstrass Trigonometrik Yaklaşım Teoremi

Bir çember üzerindeki sürekli fonksiyonlara, trigonometrik polinomlarla yaklaşılır; yani  $f$ ,  $[-\pi, \pi]$  aralığında sürekli ve  $f(-\pi) = f(\pi)$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  ise

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

sağlayacak bir  $T(x)$  trigonometrik polinomu vardır.

Weierstrass yaklaşım teoreminin en şık kanıtı Bernstein tarafından oluşturulan ve adıyla anılan polinomlar ile yapılmıştır. Şimdi bu polinomların kurulumunu yapalım. Bu kısım [44]' den alınmıştır.

Her  $x \in \mathbb{R}$  ve her  $n > 0$  tamsayısı için binom hesabından aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$1 = (x + (1 - x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

Eşitliğin sağ tarafında toplanan ifadeleri  $f\left(\frac{k}{n}\right)$  sayıları ile çarparak toplarsak

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde bir polinom dizisi elde ederiz. Bu polinom dizisine *Bernstein Polinom dizisi* denir [44].

**Teorem 4.1.2 (S.N. Bernstein).**  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f) = f$$

düzgün yakınsar.

Teoremin kanıtına geçmeden önce bir lemma vereceğiz.

**Lemma 4.1.1.1. i.**  $B_n(x) = x$ .

**ii.**  $B_n(x^2) = x^2$ .

**İspat.**

**i.**

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \frac{k}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n - k)!} x^k (1 - x)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{(n - 1)!}{(k - 1)! (n - k)!} x^{k-1} (1 - x)^{n-k} \\ &= x \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n - 1)!}{l! (n - 1 - l)!} x^l (1 - x)^{n-1-l} = x \end{aligned}$$

**ii.**  $m = n - 1, l = k - 1, p = m - 1, r = l - 1$  olsun.

$$\begin{aligned}
B_n(x^2) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{l=0}^m (l+1) \frac{m!}{l!(m-l)!} x^l (1-x)^{m-l} \\
&= \frac{x}{n} \left\{ \sum_{l=1}^m l \frac{m!}{l!(m-l)!} x^l (1-x)^{m-l} + 1 \right\} \\
&= \frac{x}{n} \left\{ mx \sum_{l=1}^m l \frac{(m-1)!}{(l-1)!(m-l)!} x^{l-1} (1-x)^{m-l} + 1 \right\} \\
&= \frac{x}{n} \left\{ mx \sum_{r=0}^p l \frac{p!}{r!(p-r)!} x^r (1-x)^{p-1} + 1 \right\} \\
&= \frac{x}{n} (mx + 1) = \frac{x}{n} ((n-1)x + 1) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

**İspat.**  $\varepsilon > 0$  olsun. Yeteri kadar büyük  $n$  için

$$\|B_n(f) - f\| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğruluğunu kanıtlayacağız.  $f$  sürekli ve  $[0,1]$  kompakt olduğundan  $f$  düzgün süreklidir. Yani öyle bir  $\delta > 0$  vardır ki, eğer  $|x - a| < \delta$  ise  $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$  olur.  $M = \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$  olsun.  $f$  bir kompakt küme üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olduğu için  $M$  diye bir sayı vardır. Diğer taraftan eğer  $|x - a| > \delta$  ise  $2M \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\delta^2}\right) < 0 < \frac{\varepsilon}{2}$  olduğundan  $|f(x) - f(a)| \leq$  ise

$$|f(x)| + |f(a)| \leq 2M < 2M \frac{(x-a)^2}{\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Demek ki  $[0,1]$  aralığının her  $x$  ve  $a$  elemanları için her iki durumda da

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2M}{\delta^2} (x - a)^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Şimdi  $a \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} |B_n(f) - f(a)| &\leq B_n(|f - f(a)|) \leq B_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(x - a)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} B_n((x - a)^2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{2M}{\delta^2} (B_n(x^2) - 2aB_n(x) + a^2) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

olur. i ve ii den

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(a)| &\leq \frac{2M}{\delta^2} \left\{ \left( x^2 + \frac{x - x^2}{n} \right) - 2ax + a^2 \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \left( (x - a)^2 + \frac{x - x^2}{n} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Özel hal olarak  $a \in [0,1]$  için geçerli olan

$$|B_n(f)(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \frac{a - a^2}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\delta^2 n}$$

Eğer  $n$  yeteri kadar büyük alınırsa mesela  $n > \frac{8M}{\delta^2 \varepsilon}$  seçilirse

$$|B_n(f)(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur.

## 4.2 Klasik Korovkin Teoremleri

Bernstein polinomlarının inşasından sonra 1950 yılında H. Bohman [5], 1953 yılında P.P. Korovkin [6] tarafından birbirlerinden bağımsız bir şekilde yeni bir teorem verilmiştir. Bu teoreme göre lineer pozitif operatör dizisinin, kompakt bir bölgedeki sürekli bir fonksiyona yaklaşımı olabilmesi 1,  $t$ ,  $t^2$  fonksiyonlarının operatör altında 1,  $x$ ,  $x^2$  fonksiyonlarına düzgün yaklaşımlarının kontrol edilmesi yeterliydi.

**Teorem 4.2.1.**  $x \in [0,1]$ ,  $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ ,  $p_{k,n} \geq 0$  olmak üzere,

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) p_{k,n}(x)$$

pozitif operatör dizisinin  $n \rightarrow \infty$  için  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşulları

- i.  $L_n(1; x) \Rightarrow 1$
- ii.  $L_n(t; x) \Rightarrow x$
- iii.  $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

şeklinde ifade edilmiştir [5].

1953'te P.P. Korovkin bu teoremdeki  $[0,1]$  aralığını  $[a, b]$  aralığına genişletmiştir.

**Teorem 4.2.2 (Korovkin teoremi).**  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatör dizisi,  $\forall i = 0, 1, 2$  için  $e_i = t^i$  olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_i) - e_i\|_{C[a,b]} = 0$$

şartları sağlıyorsa  $[a, b]$  aralığındaki sürekli olan her fonksiyon için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır [37].

**İspat.**  $f$  fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir  $M$  pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm  $x$  ler için,

$$|f(x)| \leq M \quad (4.1)$$

sağlanır.  $f \in C[a, b]$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $\delta > 0$  bulabiliriz ki  $t \in (-\infty, \infty)$  ve  $x \in [a, b]$  için  $|t - x| < \delta$  olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (4.2)$$

sağlanır.

$x, t \in [a, b]$  olduğunda (4.2) eşitsizliği  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  de sürekli olduğu için gerçekleşir.  $x \in [a, b]$ ,  $t \notin [a, b]$  olduğunda ise (4.2) eşitsizliği  $f$  fonksiyonu  $a$  ve  $b$  noktalarından, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçekleşir.

(4.1) ve (4.2) eşitsizliklerinden dolayı tüm  $t \in (-\infty, \infty)$  ve  $x \in [a, b]$  için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 \quad (4.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Çünkü  $|t - x| < \delta$  olduğunda (4.3) eşitsizliği (4.2) eşitsizliğinden dolayı  $\frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$  ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.  $|t - x| \geq \delta$  olduğunda ise  $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$  olacağından  $\frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 \geq 2M$  eşitsizliği sağlanır. Bu durumda  $\varepsilon > 0$  olduğu için (4.1) eşitsizliğinden (4.3) eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|L_n(f; x) - f(x)\|_C &= \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)L_n(1; x) - f(x)\|_C \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_C + \|f\|_C \|L_n(1; x) - 1\|_C \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim  $n \rightarrow \infty$  için  $L_n(1; x) \Rightarrow 1$ ' den dolayı sifira yakınsar. Yani  $\|f\|_C \|L_n(1, x) - 1\|_C \leq \varepsilon_n, \varepsilon_n \rightarrow 0$  dir. O halde

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_C \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_C + \varepsilon_n$$

eşitsizliği geçerlidir.

Daha genel bir hali aşağıdaki gibidir.

**Teorem 4.2.3.**  $f, [a, b]$  aralığında sürekli, tüm reel ekseninde sınırlı olsun.  $L_n(f; x)$  lineer pozitif operatörler dizisi, her  $x \in [a, b]$  için  $\vartheta_n(x), \tau_n(x), \gamma_n(x)$ , sifira düzgün yakınsayan diziler olmak üzere

$$L_n(1; x) = 1 + \vartheta_n(x)$$

$$L_n(s; x) = x + \tau_n(x)$$

$$L_n(s^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa  $L_n(f; x)$  operatörü  $[a, b]$  aralığında  $f(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsar [6].

## BÖLÜM V

### OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak operatörümüzü inşa edeceğiz. Ardından momentleri, merkezi momentleri hesaplayıp Korovkin teoremi ile operatörümüzün verilen sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yaklaşımını göstereceğiz. Ayrıca, süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre  $K$ -fonksiyoneli, Lipschitz koşulu kavramlarıyla operatörümüzün  $f$  fonksiyonuna yaklaşım hızını hesaplayacağız.

#### 5.1 Apostol-Genocchi Polinomlarını içeren operatörün kurulumu

$\alpha$  nıncı mertebeden Apostol-Genocchi polinomları  $G_k^\alpha(x; \beta)$  üreteç fonksiyonu yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$A(t)B(t) = \left(\frac{2t}{\beta e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k^\alpha(x; \beta) \frac{t^k}{k!}, \quad (|t| < |\log(-\lambda)|) \quad (5.1)$$

Burada  $G_k^\alpha(x; \beta)$  ifadesinin açık hali hipergeometrik fonksiyonların yardımıyla şu şekildedir [45,46]:

$$G_k^\alpha(x; \beta) = 2^\beta \beta! \binom{k}{\beta} \sum_{n=0}^{k-\beta} \binom{k-\beta}{n} \binom{\beta+n-1}{n} \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{\beta+n}} \\ \times \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (x+j)^{k-n-\beta} {}_2F_1\left(\beta+n-k, n; n+1; \frac{j}{x+j}\right).$$

Burada  $\{k, \beta\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  dir.

**Uyarı.** (5.1)' de  $\lambda \neq -1$  olduğunda  $\alpha$  nıncı mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomları  $G_k^\alpha(x; \beta)$  nın negatif olmayan tamsayı değerleriyle sınırlandırıldığı kabul edilmelidir [47].

(5.1)'de  $t = 1$  seçimi ile

$$1 = \left( \frac{2}{\beta e + 1} \right)^{-\alpha} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(x; \beta)}{k!}$$

olduğu görülür. Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonunun tanımından faydalanarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$A(t)B(\alpha_n x) = \left( \frac{2}{\beta e + 1} \right)^{\alpha} e^{\alpha_n x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!}.$$

Eşitliğin sağ tarafındaki toplanan terimleri  $\beta_n \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} f(t) dt$  ile önce çarpıp sonra  $k$  ya göre toplama geçtiğimizde

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) = \beta_n e^{-\alpha_n x} \left( \frac{2}{\beta e + 1} \right)^{-\alpha} \left\{ \frac{G_0^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{0!} \int_0^{\frac{1}{\beta_n}} f(t) dt + \frac{G_1^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{1!} \int_{\frac{1}{\beta_n}}^{\frac{2}{\beta_n}} f(t) dt + \dots \right\}$$

şeklindeki operatör dizisine ulaşırız.

Toplam sembolüne geçtiğimizde aşağıdaki Apostol-Genocchi polinomlarını içeren Kantorovich-tipi bir operatör dizisi elde ederiz:

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) = \beta_n e^{-\alpha_n x} \left( \frac{2}{\beta e + 1} \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} f(t) dt \quad (5.2)$$

Burada  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$  pozitif sayıların artan bir dizisidir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} = 0 \quad \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1 + o\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \quad (5.3)$$

şeklinindedir. Burada “ $O$ ” sembolü “büyük  $O$ ” notasyonudur.

Apostol-Genocchi polinomlarını ve üreteç fonksiyonlarını kullanarak genelleştirilmiş Kantorovich tipi bir operatör oluşturmuş olduk. Şimdi, oluşturduğumuz bu operatörün düzgün yaklaşımını ve yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

## 5.2 $[0, a]$ Aralığında $L_n^{\alpha, \beta}$ Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri

Momentlerin hesaplanmasında Ç. Atakut ve İ. Büyükyazıcı' nın "Approximation by Kantorovich-Szasz Type Operators Based on Brenke Type Polynomials" makalesindeki operatörün moment hesaplamaları ve Maple programından faydalanılmıştır.

Tez boyunca kullanacak olduğumuz  $A'(t)$ ,  $A''(t)$ ,  $A'''(t)$  ve  $A^{(iv)}(t)$  ifadeleri için aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 5.2.1.**  $A(t) = \left(\frac{2t}{\beta e^t + 1}\right)^\alpha$  olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçekleşir.

$$i. A'(t) = \frac{\alpha(1 - (t - 1)\beta e^t)(2t)^\alpha}{t(\beta e^t + 1)^{\alpha+1}} \Rightarrow A'(1) = \frac{\alpha 2^\alpha}{(\beta e + 1)^{\alpha+1}}$$

$$ii. A''(t) = \frac{\alpha}{(\beta e^t + 1)^2 t^2} \left(\frac{t}{\beta e^t + 1}\right)^\alpha \left(-\alpha t \beta e^{2t} - (1 - (t - 1)\alpha)2^{\alpha+1} \beta e^t + 2^\alpha((\alpha t^2 + \alpha - 1)\beta^2 e^{2t} - t^2 \beta e^t + \alpha - 1)\right) \\ \Rightarrow A''(1) = \frac{\alpha 2^\alpha(-\beta^2 e^t - 3\beta e + \alpha - 1)}{(\beta e + 1)^{\alpha+2}}$$

$$iii. A'''(t) = \frac{1}{t^3(\beta e^t + 1)^3} \left( \alpha \left(\frac{t}{\beta e^t + 1}\right)^\alpha \left( (-\beta^3 e^{3t} - 1)2^{\alpha+1} + 2^\alpha((-3(t - 1)^2 \alpha^2 - (3t^3 - 3t^2 + 6t - 9)\alpha - t^3 - 6)\beta^2 e^{2t} + \alpha(-3 + (t - 1)^2 \alpha)(t - 1)\beta^3 e^{3t} + (3(t - 1)\alpha^2 + (3t^2 - 3t + 9)\alpha + t^3 - 6)\beta e^t - \alpha^2 + 3\alpha) \right) \right)$$

$$\Rightarrow A'''(1)$$

$$= \alpha \frac{(\beta^3 e^3 + 1)2^{\alpha+1} + ((-3\alpha + 7)\beta^2 e^2 + (-9\alpha + 5)\beta e + \alpha^2 - 3\alpha)2^\alpha}{(\beta e + 1)^{\alpha+3}}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv. } A^{(iv)}(t) = & \frac{1}{(\beta e^t + 1)^4 t^4} \left( \alpha 2^\alpha \left( \frac{t}{\beta e^t + 1} \right)^\alpha \left( (-6 + (t-1)^4 \alpha^3 - 6(t-1)^2 \alpha^2 \right. \right. \\
& + (-8t + 11)\alpha) \beta^4 e^{4t} \\
& + (-4(t-1)^3 \alpha^3 - (6t^4 - 12t^3 + 18t^2 - 36t + 24)\alpha^2 \\
& - (4t^4 - 4t^3 - 6t^2 + 24t - 44)\alpha - t^4 - 24) \beta^3 e^{3t} \\
& + (6(t-1)^2 \alpha^3 + (12t^3 - 18t^2 + 18t - 36)\alpha^2 \\
& + (7t^4 + 12t^2 - 24t + 66)\alpha + 4t^4 - 36) \beta^2 e^{2t} \\
& + (-4(t-1)\alpha^3 - (6t^2 - 12t + 24)\alpha^2 - (4t^3 - 6t^2 + 8t - 44)\alpha \\
& \left. \left. - t^4 - 24) \beta e^t + \alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A^{(iv)}(1) = & \alpha 2^\alpha \frac{1}{(\beta e + 1)^{\alpha+4}} \left( (3\alpha - 6)\beta^4 e^4 + (26\alpha - 25)\beta^3 e^3 \right. \\
& - (6\alpha^2 - 61\alpha + 32)\beta^2 e^2 + (-18\alpha^2 + 38\alpha - 25)\beta e \\
& \left. + (\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6) \right).
\end{aligned}$$

Şimdi, (5.2) operatörünün momentlerini verelim.

**Lemma 5.2.2.**  $x \in [0, \infty)$  için

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) = 1$$

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t; x) = \frac{\alpha_n}{\beta_n} x + \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{2\beta e + 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^2; x) = & \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} x^2 + \frac{2\alpha_n}{\beta_n^2} \left( \frac{\beta e + \alpha + 1}{\beta e + 1} \right) x \\
& + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{((-3\alpha + 1)\beta^2 e^2 - (3\alpha - 2)\beta e + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)}{3(\beta e + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^3; x) = & \frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3} x^3 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^3} \left( \frac{9\beta e + 6\alpha + 9}{2(\beta e + 1)} \right) x^2 \\
& + \frac{\alpha_n}{\beta_n^3} \left( \frac{(-6\alpha + 7)\beta^2 e^2 + 14\beta e + 6\alpha^2 + 12\alpha + 7}{(\beta e + 1)^2} \right) x \\
& + \frac{1}{\beta_n^3} \left( \frac{(-10\alpha + 1)\beta^3 e^3 + (-12\alpha^2 - 30\alpha + 3)\beta^2 e^2}{4(\beta e + 1)^3} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(-18\alpha^2 - 24\alpha + 3)\beta e + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1}{4(\beta e + 1)^3}$$

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^4; x)$$

$$= \frac{\alpha_n^4}{\beta_n^4} x^4 + \frac{\alpha_n^3}{\beta_n^4} \left( \frac{8\beta e + 4\alpha + 8}{\beta e + 1} \right) x^3$$

$$+ \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^4} \left( \frac{(-6\alpha + 10)\beta^2 e^2 + (6\alpha + 30)\beta e + 6\alpha^2 + 18\alpha + 15}{(\beta e + 1)^2} \right) x^2$$

$$+ \frac{\alpha_n}{\beta_n^4} \left( \frac{(-12\alpha^2 - 38\alpha + 18)\beta^2 e^2 + (-12\alpha^2 - 16\alpha + 18)\beta e}{(\beta e + 1)^3} \right.$$

$$\left. + \frac{(-16\alpha + 6)\beta^3 e^3 + 4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 14\alpha + 6}{(\beta e + 1)^3} \right) x$$

$$- \frac{1}{\beta_n^4} \left( \frac{(15\alpha^2 - 25\alpha + 1)\beta^4 e^4 + (10\alpha^2 - 110\alpha + 4)\beta^3 e^3}{5(\beta e + 1)^4} \right.$$

$$\left. + \frac{(30\alpha^3 + 100\alpha^2 + 190\alpha - 6)\beta^2 e^2 + (50\alpha^3 + 140\alpha^2 + 130\alpha - 4)\beta e}{5(\beta e + 1)^4} \right.$$

$$\left. + \frac{5\alpha^4 + 10\alpha^3 + 10\alpha^2 + 5\alpha + 1}{5(\beta e + 1)^4} \right)$$

elde edilir.

### İspat.

(5.1)'in  $t$  ye göre her iki tarafının türevini alırsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(x) t^{k-1} = \frac{-e^{xt} t^{\alpha-1} 2^\alpha \left( ((\alpha - x)t - \alpha)\beta e^t - xt - \alpha \right)}{(\beta e^t + 1)^{\alpha+1}}$$

$t = 1$  ve  $x = \alpha_n x$  için

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(\alpha_n x) = \frac{2^\alpha (e^{\alpha_n x + 1} \beta \alpha_n x + \alpha_n x e^{\alpha_n x} + \alpha e^{\alpha_n x})}{(\beta e + 1)^{\alpha+1}}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(\alpha_n x) \\
&= \frac{1}{(\beta e + 1)^2} \left( \left( ((\alpha_n^2 x^2 + \alpha_n x(\alpha + 1) - \alpha)\beta e + \alpha \alpha_n x) 2^{\alpha+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + ((\alpha_n^2 x^2 + \alpha_n x - \alpha)\beta^2 e^2 + \alpha_n^2 x^2 + \alpha^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha_n x) 2^\alpha \right) \frac{e^{\alpha_n x}}{(\beta e + 1)^\alpha} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} k^3 p_k(\alpha_n x) \\
&= \frac{1}{(\beta e + 1)^3} \left( e^{\alpha_n x} \left( \frac{1}{\beta e + 1} \right)^\alpha 2^\alpha \left( (\alpha_n^3 x^3 + 3\alpha_n^2 x^2 - (3\alpha - 1)\alpha_n x - \alpha)\beta^3 e^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (3\alpha_n^3 x^3 + (3\alpha + 9)\alpha_n^2 x^2 - (6\alpha - 3)\alpha_n x - 3\alpha^2 - 4\alpha)\beta^2 e^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (3\alpha_n^3 x^3 + (6\alpha + 9)\alpha_n^2 x^2 + 3(\alpha^2 + 1)\alpha_n x - 6\alpha^2 - 5\alpha)\beta e \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha_n^3 x^3 + 3(\alpha + 1)\alpha_n^2 x^2 + (3\alpha^2 + 3\alpha + 1)\alpha_n x + \alpha^3 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} k^4 p_k(\alpha_n x) \\
&= \frac{1}{(\beta e + 1)^4} \left( e^{\alpha_n x} \left( \frac{1}{\beta e + 1} \right)^\alpha \right. \\
&\quad \left( (\alpha_n^4 x^4 + 6\alpha_n^3 x^3 - (6\alpha - 7)\alpha_n^2 x^2 - (10\alpha - 1)\alpha_n x + 3\alpha^2 - \alpha)\beta^4 e^4 \right. \\
&\quad \left. + (4\alpha_n^4 x^4 + (4\alpha + 24)\alpha_n^3 x^3 - (12\alpha - 28)\alpha_n^2 x^2 - (12\alpha^2 + 40\alpha - 4)\alpha_n x \right. \\
&\quad \left. + 8\alpha^2 - 5\alpha)\beta^3 e^3 + (6\alpha_n^4 x^4 + 12(\alpha + 3)\alpha_n^3 x^3 + 6(\alpha^2 + \alpha + 7)\alpha_n^2 x^2 \right. \\
&\quad \left. - 6(5\alpha^2 + 9\alpha - 1)\alpha_n x - 6\alpha^3 - 4\alpha^2 - 13\alpha)\beta^2 e^2 + (4\alpha_n^4 x^4 \right. \\
&\quad \left. + (12\alpha + 24)\alpha_n^3 x^3 + (12\alpha^2 + 24\alpha + 28)\alpha_n^2 x^2 \right. \\
&\quad \left. + 4(4\alpha^3 - 12\alpha^2 - 20\alpha + 4)\alpha_n x - 12\alpha^3 - 20\alpha^2 - 15\alpha)\beta e \right. \\
&\quad \left. + \alpha_n^4 x^4 + (4\alpha + 6)\alpha_n^3 x^3 + (6\alpha^2 + 12\alpha + 7)\alpha_n^2 x^2 \right)
\end{aligned}$$

$$+ (16\alpha^3 + 24\alpha^2 + 16\alpha + 4)\alpha_n x + \alpha^4)2^\alpha)$$

elde edilir. Bu eşitlikleri ve (5.2) kullanarak istenilen sonuçları elde ederiz.

**Lemma 5.2.3.**  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörünün merkezi mometleri aşağıdaki şekildedir:

$$i. L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t - x; x) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)x + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \left(\frac{\beta e + 2\alpha + 1}{2\beta e + 2}\right)$$

$$ii. L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x) = \left(\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1\right)x^2$$

$$+ \frac{2\alpha_n}{\beta_n^2} \left(\frac{\beta e + \alpha + 1}{(\beta e + 1)} - \frac{1}{\beta_n} \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{\beta e + 1}\right)x$$

$$+ \frac{1}{\beta_n^2} \frac{(-3\alpha + 1)\beta^2 e^2 + (-3\alpha + 2)\beta e + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(\beta e + 1)^2}$$

$$iii. L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^4; x)$$

$$= \alpha_n^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha_n^4}{\beta_n^4} x^4 + \frac{\alpha_n^3}{\beta_n^4} \left(\frac{8\beta e + 4\alpha + 8}{\beta e + 1}\right) x^3 \right. \right.$$

$$+ \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^4} \left(\frac{(-6\alpha + 15)\beta^2 e^2 + (6\alpha + 30)\beta e + 6\alpha^2 + 18\alpha + 15}{(\beta e + 1)^2}\right) x^2$$

$$+ \frac{\alpha_n}{\beta_n^4} \left(\frac{(-16\alpha + 6)\beta^3 e^3 - (12\alpha^2 + 38\alpha - 18)\beta^2 e^2 + (-12\alpha^2 - 16\alpha + 18)\beta e}{(\beta e + 1)^3}\right.$$

$$\left. + \frac{4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 14\alpha + 6}{(\beta e + 1)^3}\right) x$$

$$+ \frac{1}{\beta_n^4} \left(\frac{-(30\alpha^3 + 100\alpha^2 + 190\alpha - 6)\beta^2 e^2 + (-50\alpha^3 - 140\alpha^2 - 130\alpha + 4)\beta e}{5(\beta e + 1)^4}\right.$$

$$+ \frac{(15\alpha^2 - 25\alpha + 1)\beta^4 e^4 + (10\alpha^2 - 110\alpha + 4)\beta^3 e^3}{5(\beta e + 1)^4}$$

$$\left. + \frac{5\alpha^4 + 10\alpha^3 + 10\alpha^2 + 5\alpha + 1}{5(\beta e + 1)^4}\right) \Bigg]$$

$$\begin{aligned}
& -4x \left[ \frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3} x^3 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^3} \left( \frac{9\beta e + 6\alpha + 9}{2(\beta e + 1)} \right) x^2 \right. \\
& + \frac{\alpha_n}{\beta_n^3} \left( \frac{14\beta e - 6 \left( \alpha - \frac{7}{6} \right) \beta^2 e^2 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 7}{(\beta e + 1)^2} \right) x \\
& + \frac{1}{\beta_n^3} \left( \frac{(-10\alpha + 1)\beta^3 e^3 + -(12\alpha^2 + 30\alpha - 3)\beta^2 e^2 + (-18\alpha^2 - 24\alpha + 3)\beta e}{4(\beta e + 1)^3} \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1}{4(\beta e + 1)^3} \right) \right] \\
& + 6x^2 \left[ \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} x^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n^2} \left( \frac{2\beta e + 2\alpha + 2}{\beta e + 1} \right) x \right. \\
& + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{(-3\alpha + 2)\beta e - 3(3\alpha - 1)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(\beta e + 1)^2} \right) \left. \right] \\
& - 4x^3 \left[ \frac{\alpha_n}{\beta_n} x + \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{2\beta e + 2} \right) \right] + x \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 5.2.1.** Eğer  $f \in C_E[0, \infty)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) = f(x)$$

ise  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörleri her kompakt  $[0, a]$  aralığında düzgün bir şekilde yakınsar.

**İspat.** Lemma 5.2.2'den, her kompakt  $[0, a]$  aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^i; x) = x^i, i = 0, 1, 2$$

elde edilir. Daha sonra, [48]'deki Teorem 4.1.4'ün evrensel Korovkin tipi özelliği (vi) kullanılarak ispat tamamlanır.

### 5.3. $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$ Operatörünün Yakınsaklık Hızı

İlk olarak operatörümüzün birinci süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık hızına bakacağız. Ardından sırasıyla Lipschitz uzayı, Peetre K-fonksiyoneli kullanarak yakınsaklık hızını inceleyeceğiz.

**Teorem 5.3.1.** Eğer  $f \in C_E[0, \infty]$  ise

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\lambda_n(x)}\right)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n(x) &= L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x) = \left( \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1 \right) x^2 \\ &+ \frac{2\alpha_n}{\beta_n^2} \left( \frac{\beta e + \alpha + 1}{\beta e + 1} - \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{\beta e + 1} \right) \right) x \\ &+ \frac{1}{\beta_n^2} \frac{(-3\alpha + 2)\beta e - (3\alpha - 1)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(\beta e + 1)^2} \end{aligned}$$

dir.

**İspat.**

$$\begin{aligned} &\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \\ &\leq \beta_n e^{-\alpha_n x} \left( \frac{2}{\beta_e + 1} \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |f(t) - f(x)| dt \\ &\leq \beta_n e^{-\alpha_n x} \left( \frac{2}{\beta_e + 1} \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \left( \frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta) dt \\ &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \beta_n e^{-\alpha_n x} \left( \frac{2}{\beta_e + 1} \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |t-x| dt \right\} \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

İntegral için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} 1 \cdot |t - x| dt \leq \sqrt{\frac{1}{\beta_n}} \left( \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |t - x|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Bu ifadeyi eşitsizlikte yerine koyarsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |t - x| dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \sqrt{\frac{1}{\beta_n}} \left( \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |t - x|^2 dt \right)^{1/2}$$

Son denklemdaki toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği düşünülürse,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(\alpha)}(\alpha_n x; \beta)}{k!} \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} |t - x| dt \\ \leq \sqrt{\frac{1}{\beta_n}} \sqrt{\left(\frac{2}{\beta e + 1}\right)^\alpha e^{\alpha_n x} \left(\frac{1}{\beta_n} \left(\frac{2}{\beta e + 1}\right)^\alpha e^{\alpha_n x} L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x)\right)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{1}{\beta_n} \left(\frac{2}{\beta e + 1}\right)^\alpha e^{\alpha_n x} \left(L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \left( L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x) \right)^{1/2} \right\} \omega(f; \delta).$$

Burada  $\delta = L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x)$  alınırsa istenilen sonuç elde edilir.  $\square$

Şimdi Lipschitz koşulu kavramlarıyla  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna yakınsama hızını inceleyeceğiz.

**Teorem 5.3.2.**  $f \in \text{Lip}_\alpha(M)$  olsun.  $x \geq 0$  için

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq M \delta_n^\alpha(x)$$

sağlanır. Burada  $\delta_n(x) := \sqrt{L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x)}$  dır.

**İspat.**  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörlerinin monotonluk özelliklerinden şunu elde ederiz:

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq L_n^{\alpha_n, \beta_n}(|f(t) - f(x)|; x) \leq M L_n^{\alpha_n, \beta_n}(|t - x|^\alpha; x).$$

Hölder eşitsizliği uygulanarak, [33]' den sonuç çıkarılabilir.

$$\begin{aligned} \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| &\leq M L_n^{\alpha_n, \beta_n}(|t - x|^2; x) \\ &\leq M \left( L_n^{\alpha_n, \beta_n}(|t - x|^2; x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( L_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \\ &= M \left( L_n^{\alpha_n, \beta_n}(|t - x|^2; x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} = M(\delta_n(x))^\alpha \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

İkinci süreklilik modülü ve Peetre  $K$ -fonksiyoneli yardımıyla  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna yakınsama hızını vereceğiz.

**Teorem 5.3.3.**  $f \in C_B^2[0, \infty)$  olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq \gamma \|f\|_{C_B^2}.$$

Burada

$$\begin{aligned} \gamma := \gamma_n(x) &= \left( \frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\beta_n + \beta_n^2}{2\beta_n^2} \right) x^2 \\ &+ \left( \frac{2(\beta e + \alpha + 1)\alpha_n - \beta_n(\beta e + 2\alpha + 1) + 2\beta_n(\alpha_n - \beta_n)}{2\beta_n^2(\beta e + 1)} \right) x \\ &+ \frac{6\beta_n(\alpha_n - \beta_n)(\beta e + 1)^2 + (-3\alpha + 2)\beta e - (3\alpha - 1)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{6\beta_n^2(\beta e + 1)^2} \end{aligned}$$

dır.

**İspat.** Öncelikle  $c \in (x, t)$  için  $f$  nin Taylor açılımını yazalım:

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{f''(c)}{2!}(t - x)^2,$$

ardından,  $f$  fonksiyonunun Taylor açılımına  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x)$  operatörünü uygulayalım.

Operatörün lineer olması ve  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) = 1$  eşitliğinin sağladığı kolaylıktan faydalanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) = f'(x)L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t - x; x) + \frac{f''(c)}{2}L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x)^2; x). \quad (5.3)$$

Buradan  $x \leq t$  ve

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(t - x; x) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)x + \frac{\alpha_n \beta e + 2\alpha + 1}{\beta_n (2\beta e + 2)} \geq 0$$

için (5.3)'de Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.2.3 den faydalanırsak,

$$\begin{aligned} & \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \\ & \leq \left\{ \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 \right) x + \frac{\alpha_n \beta e + 2\alpha + 1}{\beta_n (2\beta e + 2)} \right\} \|f'\|_{C_B} \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1 \right) x^2 + \left( \frac{2\alpha_n \beta e + \alpha + 1}{\beta_n^2 (\beta e + 1)} - \frac{1}{\beta_n} \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{\beta e + 1} \right) x \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3\beta_n^2} \frac{(-3\alpha + 2)\beta e - 3\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\beta e + 1)^2} \right\} \|f''\|_{C_B} \\ & \leq \left[ \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 \right) x + \frac{\alpha_n \beta e + 2\alpha + 1}{\beta_n (2\beta e + 2)} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1 \right) x^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{2\alpha_n \beta e + \alpha + 1}{\beta_n^2 (\beta e + 1)} - \frac{1}{\beta_n} \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{\beta e + 1} \right) x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{3\beta_n^2} \frac{(-3\alpha + 2)\beta e - 3\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\beta e + 1)^2} \right\} \right] \|f\|_{C_B^2} \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1 \right) x^2 + \left( \frac{\alpha_n (\beta e + \alpha + 1)}{\beta_n^2 (\beta e + 1)} - \frac{1}{2\beta_n} \frac{\beta e + 2\alpha + 1}{\beta e + 1} + \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 \right) x \\ & \quad + \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 + \frac{1}{6\beta_n^2} \frac{(-3\alpha + 2)\beta e - 3\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\beta e + 1)^2} \\ & = \frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n \beta_n + \beta_n^2}{2\beta_n^2} x^2 \\ & \quad + \frac{2(\beta e + \alpha + 1)\alpha_n - \beta_n(\beta e + 2\alpha + 1) + 2\beta_n(\alpha_n - \beta_n)}{2\beta_n^2(\beta e + 1)} x \end{aligned}$$

$$+ \frac{6\beta_n(\alpha_n - \beta_n)(\beta e + 1)^2 + (-3\alpha + 2)\beta e - 3\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{6\beta_n^2(\beta e + 1)^2}$$

elde edilir. Bu durumda istenilen sonuca ulaşılmış olduk.  $\square$

**Sonuç 5.3.1.**  $f \in C[0, \infty)$  ve  $K(f; \delta)$  Peetre  $K$ -fonksiyoneli olsun. Bu durumda

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2K(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Açıkthatır ki

$$f(t) - f(x) = f(t) \pm g(t) \pm g(x) - f(x)$$

yazılabilir. Şimdi  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  nin lineerlik özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| &\leq \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f - g; x) - f(x) \right| + \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(g; x) - g(x) \right| \\ &\quad + |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

elde ederiz.  $g \in C_B^2[0, \infty)$  fonksiyonu için bir önceki teoremden

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\|f - g\| + \gamma\|f\|_{C_B^2} \leq 2[\|f - g\| + \delta\|f\|_{C_B^2}]$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı  $g \in C_B^2[0, \infty)$  fonksiyonundan bağımsız olduğu için Peetre  $K$ -fonksiyoneli tanımından aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2K(f; \delta).$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Tanım 5.3.1 (Steklov).** Sonlu aralıkta integrallenebilen bir  $f$  fonksiyonu  $(-\infty < x < \infty)$  için Steklov fonksiyonu

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t) dt$$

şeklindedir. Bu tanımdan faydalanarak hemen hemen her  $x$  için

$$f'_h(x) = \frac{1}{h} \left\{ f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right\} \quad (5.4)$$

olduğu açıktır. (5.4)'den faydalanarak aşağıdakileri söyleyebiliriz:

(a) Eğer  $\mathbb{R}$  boyunca  $f(x)$  düzgün yakınsak ise bu durumda

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - f_h(x)| \leq \omega\left(\frac{h}{2}; f\right),$$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f'_h(x)| \leq \frac{1}{h} \omega(h; f)$$

[49].

(b)  $f \in C[a, b]$  ve  $h \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$  ise  $f_h$  fonksiyonuna eklenmiş *ikinci dereceden Steklov fonksiyonu* denir ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$i. \quad \|f_h - f\|_\infty \leq \frac{3}{4} \omega^{(2)}(f; h)$$

$$ii. \quad \|f_h''\|_\infty \leq \frac{3}{2} \frac{\omega^{(2)}(f; h)}{h^2}$$

yazılır [50].

**Lemma 5.3.1.**  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörü,  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) = 1$  özelliğini sağlayan bir pozitif operatör dizisi olsun.  $g \in C^2[0, a]$  için [51]'den

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(g; x) - g(x) \right| \leq \|g'\| \sqrt{L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x)} + \frac{1}{2} \|g''\| L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x)$$

elde edilir.

Şimdi, ikinci dereceden süreklilik modülü yardımıyla  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörlerinin yakınsama hızı ile ilgileniyoruz.

**Teorem 5.3.4.**  $f \in C[0, a]$  olsun. O halde aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq \frac{2}{a} h_n^2 \|f\|_\infty + \frac{3}{4} (h_n^2 + a + 2) \omega^{(2)}(f; h_n)$$

Burada  $h_n = L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x)^{\frac{1}{4}}$ .

**İspat.**  $f_h, f'$  ye karşılık gelen Steklov fonksiyonu olsun.  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) = 1$  olduğundan

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\|f - f_h\|_\infty + \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f_h; x) - f_h(x) \right|,$$

yazılır.  $f_h \in C^2[0, a]$  gerçeğini hesaba katarak, Lemma 5.3.1'den şu sonuç çıkar:

$$\begin{aligned} & \left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f_h; x) - f_h(x) \right| \\ & \leq \sqrt{L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x)} \|f_h'\|_\infty + \frac{1}{2} L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x) \|f_h''\|_\infty \end{aligned}$$

Landau eşitsizliği [52] ve Tanım 5.3.1 (b) kullanılırsa

$$\|f_h'\|_\infty \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_\infty + \frac{a}{2} \|f_h''\|_\infty \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_\infty + \frac{3a}{4} \frac{\omega^{(2)}(f; h)}{h^2}.$$

Son eşitsizlik,  $h = \left( L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^2; x) \right)^{1/4}$  olarak seçersek

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f_h; x) - f_h(x) \right| \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_\infty h^2 + \frac{3}{4} (a + h^2) \omega^{(2)}(f; h).$$

yazılır ve ispat tamamlanır.  $\square$

## BÖLÜM VI

### SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde birinci süreklilik modülü kullanılarak elde edilen yaklaşım sonuçlarını, Maple programı kullanılarak sayısal örneklerle destekleyeceğiz.

**Örnek 6.1.**  $\alpha_n = n + 10$ ,  $\beta_n = n$  olsun.  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  nin  $f(x) = \sin(\pi x)$  fonksiyonuna yaklaşımı  $[0, \infty)$  üzerindeki  $\alpha$  parametresine bağlıdır ve Tablo 6.1’ de gösterilmiştir.

**Tablo 6.1** Süreklilik modülü kullanılarak  $f(x) = \sin(\pi x)$  nin hata tahmini

$n$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
2.10	2	2	2
2.10 <sup>2</sup>	0.6384937400	0.7784956378	0.8928587554
2.10 <sup>3</sup>	0.1773736175	0.2293341526	0.2713912808
2.10 <sup>4</sup>	0.05519747822	0.07189754184	0.08538743600
2.10 <sup>5</sup>	0.01742633021	0.02271596012	0.02698787380
2.10 <sup>6</sup>	0.005509782336	0.007182782694	0.008533871292
2.10 <sup>7</sup>	0.001742317469	0.002271375252	0.002698633020

**Örnek 6.2.**  $\alpha_n = n + 10$ ,  $\beta_n = n$  olsun.  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  nin  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$  fonksiyonuna yaklaşımı  $[0, \infty)$  üzerindeki  $\alpha$  parametresine bağlıdır ve Tablo 6.2’ de gösterilmiştir.

**Tablo 6.2** Süreklilik modülü kullanılarak  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$  nin hata tahmini

$n$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
2.10	1.307379851	1.343505132	1.369175647
2.10 <sup>2</sup>	0.3410053914	0.4125651450	0.4706865170
2.10 <sup>3</sup>	0.0981008330	0.1262509630	0.1488628112
2.10 <sup>4</sup>	0.0308859774	0.0401641288	0.0476370238
2.10 <sup>5</sup>	0.0097882006	0.0127524504	0.0151440682
2.10 <sup>6</sup>	0.0030985788	0.0040387412	0.0047977654
2.10 <sup>7</sup>	0.0009802216	0.0012777982	0.0015180916

**Örnek 6.3.**  $\alpha_n = n^2 + 10$ ,  $\beta_n = n^2$  olsun.  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  nin  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$  fonksiyonuna yaklaşımı  $[0, \infty)$  üzerindeki  $\alpha$  parametresine bağlıdır ve Tablo 6.3' de gösterilmiştir.

**Tablo 6.3** Süreklilik modülü kullanılarak  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$  nin hata tahmini

$n$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
2.10	0.1941081828	0.1949742230	0.1958616454
2.10 <sup>2</sup>	0.0176465752	0.0176476362	0.0176487292
2.10 <sup>3</sup>	0.0017672196	0.0017672206	0.0017672222
2.10 <sup>4</sup>	0.0001767710	0.0001767710	0.0001767710
2.10 <sup>5</sup>	0.0000176782	0.0000176782	0.0000176782
2.10 <sup>6</sup>	0.0000017684	0.0000017684	0.0000017684
2.10 <sup>7</sup>	0.0000001772	0.0000001772	0.0000001772

Tablo 6.1, Tablo 6.2 ve Tablo 6.3 incelendiğinde  $n$  değerleri artarken  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  değerleri için hata miktarının giderek azaldığı görülmüştür.

## BÖLÜM VII

### AĞIRLIKLILIKLI UZAYDA YAKLAŞIM

Korovkin teoremi,  $[a,b]$  aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı  $C[a,b]$ ,  $m$ -boyutlu uzayda sınırlı  $D$  bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı  $C_{\mathbb{R}^m}(D)$  ve  $[a,b]$  aralığında  $p$ -ninci mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar uzayı  $L_p[a,b]$  de geçerlidir. Ancak sınırsız bölgelerde tanımlanmış uzaylar için bu teorem geçerli değildir [37]. Gadjiev,  $C_\rho$  uzayından  $B_\rho$  uzayına dönüşüm yapan pozitif lineer operatörler için Korovkin teoreminin bir benzerinin  $B_\rho$  uzayındaki normda sağlanmadığını ters bir teoremle göstermiştir [53]. Bu teoremi vermeden önce Gadjiev' in çalışmasında kullandığı ve bizim de kullanacağımız kavramları verelim:

$\rho(x) = x^2 + 1$  ağırlık fonksiyonu,  $[0, \infty)$  üzerinde artan bir fonksiyondur.

$B_\rho[0, \infty)$  uzayı,  $[0, \infty)$  üzerinde tanımlı,  $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$  eşitsizliğini sağlayan tüm gerçel değerli fonksiyonların kümesidir, burada  $M_f$  yalnızca  $f$  ye bağlı bir sabittir.

$B_\rho[0, \infty)$  uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \quad (7.1)$$

şeklindedir.

$$C_\rho[0, \infty) = \{f \in B_\rho[0, \infty) : f \text{ sürekli}\}$$

$$C_\rho^k[0, \infty) = \{f \in C_\rho[0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty\}$$

$$C_\rho^k[0, \infty) \subset C_\rho[0, \infty) \subset B_\rho[0, \infty)$$

olduğu görülür. Son olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  olmak üzere  $\|f\|_{\rho, [0, a_n]} = \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ .

$C_\rho$  uzayı üzerinde tanımlı bir pozitif lineer operatör  $L_n$  için (7.1) denkleminde

$L_n(f; x) \leq \|f\|_\rho L_n(\rho; x)$  eşitsizliği açıktır. Buradan  $L_n$ ,  $C_\rho$  dan  $B_\rho$  ya dönüşümdür ancak ve ancak  $L_n(\rho; x) \leq M\rho(x)$ . Bu eşitsizlikten  $L_n$  operatörünün sınırlılığı sağlanır.

**Teorem 7.1.**  $\{L_n\}$ ,  $C_\rho[0, \infty)$  den  $B_\rho[0, \infty)$  ye lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^r; x) - x^r\|_\rho = 0, \quad r = 0, 1, 2$$

sağlandığı takdirde her  $f \in C_\rho^k[0, \infty)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f\|_\rho = 0$$

sağlanır ve bir  $f \in C_\rho \setminus C_\rho^k$  fonksiyonu için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f\|_\rho \geq 1$  olur [53].

Aşağıdaki sonuç, [54]'den alınmıştır ve Teorem 7.1' den doğrudan elde edildiğinden kanıtsız bir şekilde verilmiştir.

**Teorem 7.2.**  $\{a_n\}$  dizisi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ve  $\{A_n\}$ ,  $C_\rho[0, a_n]$  den  $B_\rho[0, a_n]$  ye pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.

Eğer  $f = 1, t, t^2$  seçimleri ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f; x) - f\| = 0$$

olursa, her  $f \in C_\rho^k[0, a_n]$ ,

$$A_n(f; x) = \begin{cases} L_n(f; x); & x \in [0, a_n] \\ f(x); & x \notin [0, a_n] \end{cases} \quad \text{ve} \quad \|f\|_{\rho, a_n} = \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \quad \text{için}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f; x) - f\|_{\rho, a_n} = 0$$

sağlanır [54].

[23]' de verilen Teorem 11' in bir versiyonunu kendi operatörümüz için oluşturacağız; bunun için  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörlerinin yardımıyla lineer pozitif operatörü aşağıdaki şekilde tanımlıyoruz:

$$A_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(f; x) := \begin{cases} L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x); & x \in [0, a_n] \\ f(x); & x \notin [0, a_n]. \end{cases}$$

Şimdi vereceğimiz teoremden,  $C_\rho^k[0, a_n]$  ağırlıklı uzayında,  $\rho(x) = 1 + x^2$  ağırlık fonksiyonu,  $A_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x)$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayacağız.

**Teorem 7.3.**  $f \in C_\rho^k[0, a_n]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f \right\|_{\rho, a_n} = 0$$

olur.

**İspat.** Lemma 5.2.2 den  $\left\| A_n^{\alpha_n, \beta_n} \right\|_{\rho, a_n} \leq M$  sağlanır.  $\{A_n^{\alpha_n, \beta_n}\}$  dizisinin,  $C_\rho[0, a_n]$  uzayı ile  $B_\rho[0, a_n]$  uzayı arasında bir lineer pozitif operatör dizisi olduğunu gösterelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_n^{\alpha_n, \beta_n}(1; x) - 1 \right\|_{\rho, a_n} = 0$$

olduğu açıktır. Lemma 5.2.3 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{|A_n^{\alpha_n, \beta_n}(t; x) - x|}{1 + x^2} \\ &= \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 \right) \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{2^{-1-\alpha} (\beta e + 1)^{\alpha+1} + \alpha}{\beta e + 1} \right) \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

olur. Bu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_n^{\alpha_n, \beta_n}(t; x) - x \right\|_{\rho, a_n} = 0$  olduğunu gösterir. Ayrıca Lemma 5.2.3 (ii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{|A_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^2; x) - x^2|}{1 + x^2} = \left( \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} + 1 \right) \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{x^2}{1 + x^2} \\ &+ \left( \frac{2\alpha_n \beta e + \alpha + 1}{\beta_n^2 (\beta e + 1)} - \frac{1}{\beta_n} \frac{2^{-\alpha} (\beta e + 1)^{\alpha+1} + 2\alpha}{\beta e + 1} \right) \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{x}{1 + x^2} \\ &+ \frac{1}{3\beta_n^2} \frac{((-3\alpha + 2)\beta e - (3\alpha - 1)\beta^2 e^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)}{(\beta e + 1)^2} \sup_{x \in [0, a_n]} \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_n^{\alpha_n, \beta_n}(t^2; x) - x^2 \right\|_{\rho, a_n} = 0$$

olup, Teorem 7.2' den istenen sonuç elde edilir.  $\square$

Bir operatör dizisinin yakınsaklık hızını bulmak için süreklilik modülü  $\omega(\delta; f)$  kullanırız, ancak sonsuz bir aralıkta süreklilik modülü,  $\delta \rightarrow 0$  durumunda sıfıra yakınsamaz. Bu sebepten yeni bir tip süreklilik modülü tanımına ihtiyaç vardır. Yeni tanımlanacak bu modül sonsuz aralıkta  $\delta \rightarrow 0$  iken sıfıra yakınsayacak şekilde [55] ve [56]' da verilmiştir. [23]' de bu modül, (7.2) denklemindeki gibi ifade edilmiştir.

$f \in C_\rho^k[0, a_n]$  için ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega_{a_n}(f; \delta) = \sup_{x, t \in [0, a_n]} \sup_{|t-x| \leq \delta} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + (t-x)^2)(1 + x^2)} \quad (7.2)$$

ile tanımlanır.

Her  $f \in C_\rho^k[0, a_n]$  fonksiyonu ve tüm  $x, t \in [0, a_n]$  için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_{a_n}(f; \delta) = 0,$
  - ii.  $|f(t) - f(x)| \leq 2 \left( \frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) (1 + x^2)(1 + (t-x)^2)(1 + \delta^2) \Omega_{a_n}(f; \delta)$
- (7.3)

yazılır.

Şimdi,  $\Omega_{a_n}(f; \delta)$  süreklilik modülünü kullanarak  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  operatörlerinin yakınsama hızını  $C_{\rho^3}^k[0, a_n]$  uzayında elde edeceğiz. 3 sayısından küçük bir kuvvet için ( $1 \leq \alpha < 3$ ) ile  $(1 + x^2)^\alpha f$  üzerine  $f \in C_\rho^k[0, a_n]$  olması dışında da koşullar koyulması gerektiği [55] de ifade edilmiştir.

**Teorem 7.4.**  $f \in C_\rho^k[0, a_n]$  ise

$$\left\| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right\|_{\rho^3, a_n} \leq M \Omega_{a_n}(f; \delta)$$

olup,  $M$ ,  $n$  den bağımsız bir sabittir ve bu durum yeterince büyük olan tüm  $n$  ler için geçerlidir.

**İspat.**  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}$  tanımından ve Lemma 5.2.2 kullanarak,

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) = \frac{\beta_n}{e^{\alpha_n x}} \left( \frac{\beta e + 1}{2} \right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\alpha_n x) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} [f(t) - f(x)] dt$$

yazabiliriz. (7.3)'e göre;

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 2(1+x^2)(1+\delta^2)L_n^{\alpha_n, \beta_n}(g(t); x)\Omega_{a_n}(f; \delta)$$

yazılır, burada  $g(t) = \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)(1+(t-x)^2)$  ve  $\Omega_{a_n}$ , (7.1) ile tanımlanan ağırlıklı süreklilik modülüdür. [55] de elde edilen aşağıdaki temel sonucu kullanarak,

$$g(t) \leq 2(1+\delta^2)\left(1 + \frac{1}{\delta^4}(t-x)^4\right)$$

$x \in [0, a_n]$ ,  $t \in [0, \infty)$  için,

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 8(1+x^2)\Omega_{a_n}(f; \delta) \left[ 1 + \frac{1}{\delta^4} L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^4; x) \right] \quad (7.4)$$

elde edilir. Bazı hesaplamalar yardımı ve (5.3) koşulu ile aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t-x)^4; x) = O\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \sum_{i=0}^4 x^i.$$

Dolayısıyla, yukarıdaki eşitliği (7.4)'de yerine koyarsak;

$$\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right| \leq 8(1+x^2)\Omega_{a_n}(f; \delta) \left[ 1 + \frac{1}{\delta^4} O\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \sum_{i=0}^4 x^i \right]$$

elde ederiz ve  $\delta = \frac{1}{\beta_n}$  alınırsa, yeterince büyük her  $n$  için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur:

$$\frac{\left| L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x) \right|}{(1+x^2)^3} \leq M\Omega_{a_n}(f; \delta).$$

Bu da teoremin ispatını tamamlar.  $\square$

## BÖLÜM VIII

### VORONOVSKYA-TİPİ BİR TEOREM

Voronovskaya,  $f''(x) \neq 0$  olduğu zaman,  $B_n(f, x)$  Bernstein polinomu olmak üzere,  $B_n(f, x) - f(x)$  in derecesi  $\frac{1}{n}$  den daha iyi olmadığını kanıtlamıştır. Böylece belirli operatörler için fonksiyonlar düzgün fonksiyon (yani, bir tanım kümesi üzerinde istenen bir dereceye kadar sürekli türevleri olan fonksiyon) bile olsa yakınsamanın çok hızlı olamayabileceğini söylemiştir. Aşağıdaki teorem, 1932'de Voronovskaya teoreminin ilk halini ifade etmektedir [15].

**Teorem 8.1 (Voronovskaya).**  $[0,1]$  aralığında sınırlı bir  $f$  fonksiyonu için  $x \in [0,1]$  noktasında ikinci mertebeden türev sürekli ise bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

eşitliği sağlanır [16].

**İspat.**  $f$  nin Taylor açılımından,

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2!}f''(x) + \eta(t-x)(t-x)^2$$

yazılabilir. Burada  $\eta(t-x)(t-x)^2$  ifadesi sınırlıdır ve  $h \rightarrow 0$  için  $\eta(h) \rightarrow 0$  koşulunu sağlar. Operatörün lineerliğini ve Tanım 4.2.1' i kullanarak,

$$\begin{aligned} B_n(f; x) - f(x) &= f'(x)B_n((t-x); x) + \frac{1}{2}f''(x)B_n((t-x)^2; x) \\ &\quad + B_n(\eta(t-x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 5.2.3' den

$$B_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x(1-x)}{n} - \frac{5n+3}{12n(n+1)^2} \right) f''(x) + B_n(\eta(t-x)(t-x)^2; x)$$

sağlanır. Buradaki  $B_n(\eta(t-x)(t-x)^2; x)$  ifadesi şu şekilde elde edilir:

$\varepsilon > 0$  ve  $|h| \leq \delta$  için  $|\eta(h)| \leq \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  seçilsin.

$B_n(\eta(t-x)(t-x)^2; x)$  ifadesi  $T_1 + T_2$  olarak yazılırsa,

$$T_1 = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^k \left( 1 - \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^{n-k}$$

$$\times \int_{|t-x| < \delta} \eta(t-x)(t-x)^2 dt$$

$$T_2 = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^k \left( 1 - \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^{n-k}$$

$$\times \int_{|t-x| \geq \delta} \eta(t-x)(t-x)^2 dt$$

olup ilk terim için bir sınır bulunabilir. Bu sebeple  $T_1$  in modülü alınırsa,

$$\begin{aligned} T_1 &< \varepsilon(n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^k \left( 1 - \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} (t-x)^2 dt \\ &= \varepsilon B_n((t-x)^2; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} n|T_1| = 0$  dir. Buradan  $K = \sup\{|\eta(h)| : |h| \geq \delta\}$  olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} |T_2| &< \frac{K}{\delta^2} (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^k \left( 1 - \frac{(n+1)x-1}{2n} \right)^{n-k} \\ &\quad \times \int_{|t-x| \geq \delta} (t-x)^4 dt \leq \frac{K}{\delta^2} B_n((t-x)^4; x) \end{aligned}$$

olur.  $B_n((t-x)^4; x) = O(n^{-2})$  olduğundan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n|T_2| = 0$  olduğu görülür. Böylece

$\lim_{n \rightarrow \infty} n|T_1| = 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} n|T_2| = 0$  olduğundan ispat tamamlanır.  $\square$

Sınırlı ve integrallenebilir  $f$  fonksiyonunun,  $x \in [0,1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için belirli bir  $x \in [0,1]$  noktasında  $f''$  ikinci mertebeden türevi var ise,  $B_n$  operatörleri,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1-2x}{2}f'(x) - \frac{1}{2}x(1+x)f''(x)$$

koşulunu sağlar.

Şimdi, kendi operatörümüz için Voronovskaya-tipi bir teorem kuracağız.

**Teorem 8.2.**  $f \in C[0, a]$  ve  $f$ ,  $[0, a]$  aralığında birinci ve ikinci mertebeden türeve sahip olsun. Bu durumda her  $x \in [0, a]$  için,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n [L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x)] \\ = \left( \frac{2^{-1-\alpha} (\beta e + 1)^{\alpha+1} + \alpha}{\beta e + 1} \right) f'(x) \\ + \left( 1 - 2^{-1-\alpha} \left( \frac{1}{\beta e + 1} \right)^{-\alpha} \right) x f''(x) \end{aligned}$$

sağlanır.

**İspat.**  $x_0 \geq 0$  olsun. Taylor formülünden, her  $x \in [0, \infty)$  için aşağıdaki ifade açıktır:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x) + h(x, x_0)(x - x_0)^2,$$

burada  $h(x, x_0) \in C_B[0, \infty)$  öyle ki  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x, x_0) = 0$ . Böylece

$$\begin{aligned} \alpha_n [L_n^{\alpha_n, \beta_n}(f; x) - f(x_0)] \\ = \alpha_n f'(x_0) L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0); x_0) + \alpha_n \frac{1}{2} f''(x) L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0)^2; x_0) \\ + \alpha_n L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h(t, x_0)(t - x_0)^2; x_0) \end{aligned}$$

$x_0 \in [0, \infty)$  için geçerlidir. Lemma 5.2.3 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0); x_0) = \left( \frac{2^{-1-\alpha} (\beta e + 1)^{\alpha+1} + \alpha}{\beta e + 1} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0)^2; x_0) = \left( 2 - 2^{-\alpha} \left( \frac{1}{\beta e + 1} \right)^{-\alpha} \right)$$

olduğunu görürüz. Şimdi,  $L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h(t, x_0)(t - x_0)^2; x_0)$  terimini ele alalım. Cauchy-Schwarz eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$\alpha_n L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h(t, x_0)(t - x_0)^2; x_0) \leq \sqrt{\alpha_n^2 L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0)^4; x_0)} \sqrt{L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h^2(t, x_0); x_0)}.$$

Lemma 5.2.2' e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 L_n^{\alpha_n, \beta_n}((t - x_0)^4; x_0) = 3 x_0^2.$$

yazılır.  $h^2(t, x_0) \in C_B[0, \infty)$  olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h^2(t, x_0); x_0) = h^2(x_0, x_0) = 0$$

eşitliğinin geçerli olduğu açıktır. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n, \beta_n}(h(t, x_0)(t - x_0)^2; x_0) = 0$$

olup ispat tamamlanmış olur.  $\square$

## BÖLÜM IX

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, analitik sayılar teorisinde birçok özelliği elde edilmiş olan, yineleme bağıntısı, türev, integral operatörü altındaki özellikleri gibi, Apostol-Genocchi polinomlarının yaklaşım teorisi alanında bazı özellikleri incelenmiştir. Apostol-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu yardımıyla kurulan Kantorovich tipi bir operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bununla ilgili gerekli olan temel kavramlar, belirli polinomlar ve üreteç fonksiyonları, iyi bilinen lineer pozitif operatörler ve bazı özellikleri verilmiştir. Operatörün momentleri ve merkezi momentleri hesaplanmış, Korovkin teoremi ile operatörün verilen sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yaklaşımı gösterilmiştir. Ayrıca; süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli, Lipschitz koşulu gibi matematiksel araçlarla operatörün  $f$  fonksiyonuna yaklaşım oranı hesaplanmıştır. Birinci süreklilik modülü kullanılarak bulunan hata tahmini, sayısal örneklerle desteklenmiştir. Veriler, Maple programı kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, operatörümüzün yaklaşım özellikleri ağırlıklı uzayda incelenmiş, bu uzayda çalışan ağırlıklı süreklilik modülü kavramından bahsedilerek bu uzayda operatörümüzün yaklaşımı ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Son olarak, operatörümüz için Voronovskaya tipi bir teorem oluşturulmuştur.

Daha sonraki çalışmalar için diğer süreklilik modülleri ile yakınsaklık hızlarına bakılabilir, türev operatörü altında operatörün yakınsaklık koşulları incelenebilir, Apostol-Genocchi polinomlarını içeren farklı operatörler kurulabilir.  $q$ -kalkülüs araçlarıyla Apostol-Genocchi polinomlarını içeren operatörler oluşturulup yakınsaklık özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis I.* (Vol. 1). St. Petersburg: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, Inc. 880 p.
- [2] Steffens, K. G. (2006). *The history of approximation theory: from Euler to Bernstein.* Birkhäuser: Boston.
- [3] Weierstrass, K. (1885). Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Functionen einer Reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2. 633-639.
- [4] Bernstein, S. (1912). Sur les équations du calcul des variations. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* **29**, 431-485.
- [5] Bohman, H. (1952). On Approximation of Continuous and of Analytic Functions. *Arkiv för Matematik*, **2(1)**, 43-56.
- [6] Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk.* **90**, 961-964.
- [7] Chlodowsky, I. (1937). Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynômes de MS Bernstein. *Compositio Mathematica.* **4**, 380–393.
- [8] Szasz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards.* **45(3)**, 239-245.
- [9] Meyer-König, W., Zeller, K. (1960). Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Mathematica.* **19(1)**, 89-94.
- [10] Wright, E. M. (1930). The Bernstein Approximation Polynomials in the Complex Plane. *Journal of the London Mathematical Society.* **1(4)**, 265-269.
- [11] Kantorovich, L. V. (1931). Convergence of sequential Bernstein polynomials beyond the basic range. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otd. Mat.-Est. Nauk*, 1103-1115.
- [12] Chlodovsky, M. (1929). Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynômes de MS Bernstein. *Fundamenta Mathematicae.* **13(1)**, 62-72.

- [13] Kantorovich, L. V. (1930). Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II, *CR Academy URSS*, 563, 568.
- [14] Lorentz, G. (1937). Zur Theorie der Polynome von S. Bernstein. *Математический сборник*. **2(3)**, 543-556.
- [15] DeVore, R. A., Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation* (Vol. 303). Springer Science & Business Media: Berlin.
- [16] Voronovskaja, E. (1932). Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein. *CR Academy Science URSS*. **79**, 79-85.
- [17] Popoviciu, T. (1935). Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. *Mathematica*. **9**, 129-145.
- [18] Cheney, E. W., Sharma, A. (1964). On a Generalization of Bernstein Polynomials. *Rivista die Matematica della Università die Parma*. **5(2)**, 77-84.
- [19] Jakimovski, A., Leviatan, D. (1969). Generalized Szász Operators for the Approximation in the Infinite Interval. *Mathematica (Cluj)*. **11(34)**, 97-103.
- [20] Jain, G. C. (1972). Approximation of Functions by a New Class of Linear Operators. *Journal of the Australian Mathematical Society*. **13(3)**, 271-276.
- [21] Varma, S., Sucu, S., İçöz, G. (2012). Generalization of Szász Operators Involving Brenke Type Polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*. **64(2)**, 121-127.
- [22] Taşdelen, F., Aktaş, R., Altın, A. (2012). A Kantorovich type of Szász operators including Brenke-type polynomials. *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012).
- [23] Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ. (2016). Approximation by Kantorovich-Szász Type Operators Based on Brenke Type Polynomials. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. **37(12)**, 1488-1502.
- [24] İçöz, G., Varma, S., Sucu, S. (2016). Approximation by Operators Including Generalized Appell Polynomials. *Filomat*. **30(2)**, 429-440.
- [25] Çekim, B., Aktaş, R., İçöz, G. (2019). Kantorovich-Stancu Type Operators Including Boas-Buck Type Polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. **48(2)**, 460-471.
- [26] Karateke, S., Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ. (2019). Approximation by generalized integral Favard-Szász type operators involving Sheffer polynomials. *Filomat*. **33(7)**, 1921-1935.

- [27] Sucu, S. (2020). Approximation by Sequence of Operators Including Dunkl–Appell Polynomials. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. **43(3)**, 2455–2464.
- [28] Acar, E., Serenbay, S. K., Izgi, A. (2021). Approximation properties of King type Szász-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky operators. *Nonlinear Studies*. **28(2)**.
- [29] Menekşe Yılmaz, M. (2022). Approximation by Szasz Type Operators Involving Apostol-Genocchi Polynomials. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*. **130(1)**, 287-297.
- [30] Corcino, C. B., Corcino, R. B. (2020). Asymptotics of Genocchi Polynomials and Higher Order Genocchi Polynomials Using Residues. *Afrika Matematika*. **31(5)**, 781-792.
- [31] Corcino, C. B. (2021). Asymptotic Approximations of Apostol-Genocchi Numbers and Polynomials. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. **14(3)**, 666-684.
- [32] Prakash, C., Verma, D. K., Deo, N. (2021). Approximation by a New Sequence of Operators Involving Apostol-Genocchi Polynomials. *Mathematica Slovaca*. **71(5)**, 1179-1188.
- [33] Deo, N., Kumar, S. (2021). Durrmeyer Variant of Apostol-Genocchi-Baskakov Operators. *Quaestiones Mathematicae*. **44(12)**, 1817-1834.
- [34] Mishra, N. S., Deo, N. (2024). Approximation by a Composition of Apostol-Genocchi and Paltanea-Durrmeyer Operators. *Kragujevac Journal of Mathematics*. **48(4)**, 629-646.
- [35] Kreyszig, E (1978). *Introductory functional analysis with applications*. 17<sup>nd</sup> edition. John Wiley & Sons: New York.
- [36] Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. 3<sup>rd</sup> edition. Delhi : Hindustan Publishing Corporation, Inc. 222 p.
- [37] Hacısalıhoğlu, H. H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları: Ankara.
- [38] Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein polynomial*. University of Toronto Press: Toronto.
- [39] Ciupa, A. (1995). A class of integral Favard- Szász Type Operators. *Studia University Babeş-Bolyai Mathematica*. **40 (1)**, 39–47.

- [40] Dattoli, G., Ricci, P. E., Cessarano C. (2002). Differential Equations for Appell Type Polynomials. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. **5(1)**, 69-75.
- [41] Lu, D.Q. (2011). Some Properties of Bernoulli Polynomials and Their Generalizations. *Applied Mathematics Letters*. **24(5)**, 746-751.
- [42] Tremblay R., Gaboury S., Fugere B.J. (2011). A New Class of Generalized Apostol-Bernoulli Polynomials and Some Analogues of the Srivastava-Pinter Addition Theorem. *Applied Mathematics Letters*. **24(11)**, 1888-1893.
- [43] Boas, R. P., Buck, R. C. (2013). *Polynomial expansions of analytic functions* (Vol. 19). Springer Science & Business Media: Berlin.
- [44] Nesin, A. (1956). *Analiz II*. Nesin Yayıncılık.
- [45] Luo, Q. M. (2009). q-Extensions For The Apostol-Genocchi Polynomials. *General Mathematics*. **17(2)**, 113–125.
- [46] Luo, Q. M. (2011). Extensions of The Genocchi Polynomials and Their Fourier Expansions and Integral Representations. *Osaka Journal of Mathematics*. **48(2)**, 291–309.
- [47] Deo, N. (2021). Integral modification of Apostol-Genocchi operators. *Filomat*. **35(8)**, 2533-2544.
- [48] Altomare, F., Campiti, M. (1994). *Korovkin-type approximation theory and its applications*. Berlin: Walter de Gruyter & Co, Inc. 627 p.
- [49] Achieser, N.I., (1992). *Theory of approximation*. Dover Publications, Inc. 320 p.
- [50] Zhuk, V. V. (1989). Functions of the Lip1 class and SN Bernstein's polynomials. *Vestnik Leningrad University Mathematica Mekhanika Astronom*. **1**, 25–30.
- [51] Gavrea, I., Rasa I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*. **22(2)**, 173-176.
- [52] Von Landau, E. (1913). Einige Ungleichungen für zweimal differentiiierbare funktionen. *Proceedings of the London Mathematical Society*. **2(1)**, 43-49.
- [53] Gadjiev A. D. (1976). On P. P. Korovkin type theorems. *Matematicheskie Zametki*. **20(5)**, 781–786.

- [54] Gadjiev A. D., Efendiev R. O., Ibikli E. (1998). Generalized Bernstein-Chlodowsky polynomials. *The Rocky Mountain journal of mathematics*. **28(4)**, 1267-1277.
- [55] Ispir N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish Journal of Mathematics*. **25(3)**, 355-365.
- [56] Akhiezer, N. I. (1965). *Lectures on approximation theory*. Nauka: Moskow.



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zeynep İNCE

### ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2022
Lisans	Matematik	Hacettepe Üniversitesi	2017
Lise		Düzce Anadolu Öğretmen Lisesi	2011

### İŞ DENEYİMLERİ

2019 -	Gaziantep Şehit Veysel Gündoğdu Anadolu Lisesi Matematik Öğretmenliği
2017 - 2019	Özel Rota Kişisel Gelişim Kursu Matematik Öğretmenliği
2017 - 2018	Düzce Zübeyde Hanım Mesleki ve Teknik Anadolu lisesi Ücretli Matematik Öğretmenliği
2017-2016	Ankara Ümitköy Anadolu Lisesi (Staj)

## YAYINLAR

### **Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler**

Z. İNCE, “A Note on the Order of Convergence of Kantorovich Type Operators Including Apostol-Genocchi Polynomials presented at 5th International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2022)”, Yıldız Technical University Istanbul, May 11-14, 2022.