



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**e^{-2x} 'İ KORUYAN BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV
OPERATÖRLERİNİN İNCELENMESİ**

FEYZA TANBERK OKUMUŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. FUAT USTA**

DÜZCE, 2022

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**e^{-2x} 'İ KORUYAN BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV
OPERATÖRLERİNİN İNCELENMESİ**

Feyza TANBERK OKUMUŞ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 31/05/2022

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

31/05/2022

Feyza TANBERK OKUMUŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında desteğini esirgemeyen, değerli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Fuat USTA'ya ve "Düzce Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü" hocalarıma teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bu süreç içerisinde çalışmamda yardımcı olan arkadaşlarıma, hayatımı kolaylaştıran ve her zaman destek olan kıymetli aileme, değerli eşim Ekrem OKUMUŞ'a, sevgili çocuklarım Kerem ve Begüm'e teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

31/05/2022

Feyza TANBERK OKUMUŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	vi
KISALTMALAR.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. BAZI GEREKLİ TANIMLAR.....	5
2.2. LİNEER OPERATÖRLER.....	8
2.3. WEIESTRASS TEOREMİ	10
2.4. BERNSTEIN OPERATÖRÜ	10
2.4.1. Özellikleri	10
2.4.2. Momentleri.....	10
2.5. BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRÜ	11
2.6. KOROVKİN TEOREMİ.....	11
2.7. SZASZ-MIRAKJAN-BETA OPERATÖRÜ	15
2.8. TEZ İLE İLGİLİ BAZI NOTASYONLAR	15
3. e^{-2x} 'i KORUYAN BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV TİPİ OPERATÖRLER	17
4. $(\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1})_{n \geq 1}$ 'İN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	22
5. VORONOVSKYA TİPİ TEOREM.....	27
6. NÜMERİK ÖRNEKLER	30
6.1. ÖRNEK 1:	30
6.2. ÖRNEK 2:	31
7. SONUÇ	33
8. KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	36

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 6.1. Kesin fonksiyon (kırmızı), Klasik Bernstein-Chlodowsky Operatörü (Yeşil-Elmas), Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Mavi-Halka), ve yeni tanımlanan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Magenta-Yıldız).....	31
Şekil 6.2. Kesin fonksiyon (kırmızı), Klasik Bernstein-Chlodowsky Operatörü (Yeşil-Elmas), Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Mavi-Halka), ve yeni tanımlanan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Magenta-Yıldız).....	32

KISALTMALAR

$B_n(f; x)$	Bernstein operatörü
$B_{n, p_n}^*(f; x)$	Bernstein-Chlodovsky operatörü
$\mathcal{G}_n^{\alpha, \beta}(f; x)$	Bernstein-Chlodovsky-Gadjiev operatörü
$C_b(I_n)$	$C(I_n)$ üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzay
$\omega^*(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ \cdot\ _\infty$	Banach normlu uzayı



ÖZET

e^{-2x} 'İ KORUYAN BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV OPERATÖRLERİNİN İNCELENMESİ

Feyza TANBERK OKUMUŞ

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Fuat USTA

Mayıs 2022, 35 sayfa

Tezimizde, $x \geq 0$ için e^{-2x} 'i koruyan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörleri koruyan fonksiyonları genelleştirilmiştir. Farklı fonksiyon uzayı türleri için yeni tanımlanan operatörlerin yaklaşım özellikleri sağlanmıştır. Buna ek olarak uygun süreklilik modülünü kullanarak yakınsama hızına odaklanılmıştır. Ve bu yeni operatörler için Voronovskaya tipi teoremi sağlanmıştır. Son olarak, teorik sonuçlarımızı doğrulamak için, MATLAB tarafından üretilen bazı sayısal deneyler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörü, Pozitif lineer operatör, Üstel fonksiyonlar, Voronovskaya tipi teorem, Yaklaşım.

ABSTRACT

ON APPROXIMATION BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV TYPE OPERATORS PRESERVE e^{-2x}

Feyza TANBERK OKUMUŞ

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fuat USTA

May 2022, 35 pages

In this manuscript, we generalize the Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev type operators which fix the function e^{-2x} for $x \geq 0$. Then we provide the approximation properties of this newly defined operators for different type function spaces and rate of convergence. Additionally, we focus on the rate of convergence utilizing appropriate modulus of continuity. In addition to these, we provide the Voronovskaya type theorem for this new operators. Finally, in order to validate our theoretical results, we provide the numerical experiments which produced by MATLAB compiler.

Keywords: Approximation, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Type Operators, Exponential Functions, Linear positive operators, Voronovskaya Type Theorem.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde anahtar fikrin, en yalın ifadeyle; karmaşık tanımlanmış bir şeyi basit bir şeyle değiştirmek olduğunu söyleyebiliriz. Burada ana hedef, değişimi yaparken, karmaşık diye addettiğimiz ifadenin orijinalini koruyarak, onu büyük bir özenle basitleştirmek ve aynı bilgiyi verebilmektir. Bu amaçla, bir polinom dizisinin sürekli bir fonksiyona doğru, tek biçimde yakınsaması için bir kriter sağlayan, yaklaşım teorisinin başlangıcı olarak addedilen, Weierstrass Yaklaşım Teoremi [1], 1885 yılında ünlü Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından verilmiştir. Kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona reel katsayılı bir polinom dizisi ile yaklaşılabileceğini belirten bu teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

" f fonksiyonu, $[a, b]$ sonlu kapalı aralığı üzerinde tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ olan, $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsayan, reel katsayılı, bir $p_n(x)$ cebirsel polinomlar dizisi vardır."

Bir çok matematikçi bu ünlü teoremin ispatıyla ilgilenmiş fakat kısa ve basit olması yönüyle verilen en seçkin ispat, 1912 yılında Sergei Natanoviç Bernstein'in ispatı olmuştur. Bernstein [2], Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı için, kendi adıyla anılan aşağıdaki tanımı vermiştir. Daha detaylı olarak, Bernstein polinomları, $[0, 1]$ aralığı üzerinde her sınırlı fonksiyon için,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \geq 1 \quad \text{ve} \quad x \in [0, 1],$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bernstein polinomları o dönemde önemi tam olarak anlaşılammış olsa da yaklaşım teorisinde yeni bir dönem başlamış ve ilerleyen yıllarda matematik dünyasının ilgisini çekmiş ve fizik, mühendislik bilimi, bilgisayar teknolojileri vb. birçok disiplinde kullanışlı yapı ve uygulamaları ile aktif bir çalışma konusu olmuştur. Ayrıca

Bernstein polinomlarının birtakım genelleme ve modifikasyonları literatürde çalışılmıştır. Bu genelleme ve modifikasyonlarda bazı ana hedeflerin, kompakt aralıklar üzerinde sürekli fonksiyonların yaklaşımına ve istenen fonksiyona ait olduğu sınıfı genişletmeye izin veren Bernstein polinomlarını sınırsız aralıklar üzerinde hareket ettirmek olduğu söylenebilir. Örneğin, Chlodowsky [3], Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonunu elde ederek polinomları $(p_n \rightarrow \infty, \frac{p_n}{n} \rightarrow 0)$ $[0, 1]$ den $[0, p_n]$ e hareket ettirmiştir. Ayrıntı verecek olursak, Chlodowsky, $n \geq 1$ ve $x \geq 0$ için Bernstein tipi operatörleri;

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 0$ olan $(p_n)_{n \geq 1}$ pozitif reel sayı dizisi olmak üzere

$$B_{n,p_n}(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{p_n k}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{p_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{p_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanıtmıştır. Görüldüğü gibi yukarıda verilen operatör pozitif bir operatör değildir. Bu sebeple, Bernstein-Chlodowsky operatörleri olarak adlandırılan operatörler;

$$B_{n,p_n}^*(f;x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{p_n k}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{p_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{p_n}\right)^{n-k}, & 0 \leq x \leq p_n \\ f(x) & , x \geq p_n \end{cases}$$

olarak tanımlanmış ve [4], [5] de daha detaylı çalışılmıştır. Bernstein polinomları üzerinde devam eden çalışmaların diğer bir amacı, yaklaşım hızını artırmak ve yaklaşım işleminin doğal sonucu olan hata miktarını azaltmak olmuştur. Bu çalışmalardan biri Gadjiev ve Ghorbanalizadeh tarafından 2010 yılında yapılmıştır [6]. Yapılan çalışmada, operatörler, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ olmak üzere

$$\mathcal{G}_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \begin{cases} \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) \binom{n}{k} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-k}, & \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} \\ f(x) & , x \in \left[0, \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right] \cup \left[\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlandı. Bu çalışmada yazarlar, bu operatörlerin, $[0, 1]$ 'e genişledikçe hareketli bir aralıkta yakınsama özelliklerine odaklanmışlardır. Ve bu çalışmadan hareketle Aral ve

Acar [7], Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi lineer pozitif operatörlerin yeni bir yorumunu, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $\alpha_3 + \beta_3 = 1$ ve p_n olmak üzere

$$\mathcal{G}_{n,p_n}^{\alpha,\beta}(f;x) = \begin{cases} \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{k=0}^n f\left(\alpha_3 x + p_n \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \beta_3\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{p_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{n-k}, \\ p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq p_n \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} \\ f(x) \quad , x \in \left[0, p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right] \cup \left[p_n \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}, \infty\right] \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Aral ve Acar, öncelikle bu yeni tanımlanan operatörlerin ağırlıklı yaklaşım özelliklerini çalışmış ve onların üstün özelliklerini göstermiştir. Ve bu yeni operatörlerin türevlerinde odaklanıp ve Lipschitz uzayında ağırlıklı bir yaklaşım teoremi vermişlerdir. Diğer taraftan King'in fikri [8] birtakım iyi tanımlanmış operatörler dizisine başarıyla uygulanmıştır. King'in ana motivasyonu, öncekine kıyasla daha iyi yakınsayan klasik Bernstein operatörleri için x fonksiyonu yerine x^2 fonksiyonunu korumaktır. King'in parlak fikriyle ilgili olarak, e^{2ax} , $a > 0$ ve sabitleri koruyan, modifiye edilmiş Szasz-Mirakyan operatörlerini tanıtan, Acar ve diğerleri [9], [10] tarafından yenilikçi makaleler sunulmuştur. Bu fikir yaklaşım teorisinde birtakım kaliteli makaleye ilham kaynağı olmuş ve birçok iyi bilinen operatörler dizisine de başarıyla uygulanmıştır. Daha detaylı olarak [11], [12] de sabit ve $a > 0$ için e^{ax} [13], [14], [15] de $a > 0$ için e^{ax} ve e^{2ax} iyi bilinen pozitif operatörlerle modifiye edilerek korunmuştur. Hemen sonra [16], [17], [18] de sabit ve e^{-x} , [16], [19], [20] de sabit ve e^{-2x} benzer şekilde korunmuştur. Benzer bir motivasyonla ilgili olarak en yeni makale; uygun bir fonksiyon ve Voronovskaya türü teoremleri kullanmaya tasarlanan sınırlı ve sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanmış lineer pozitif yaklaşım süreçlerinin genel bir sınıfını elde eden Acar ve arkadaşları [21] sayesinde olmuştur.

Bu noktada, tezimizin amacı ise $\alpha_3 = 0$ ve $\beta_3 = 1$ için sabit ve e^{-2x} i koruyan bir versiyonunu açıklamaktır. Bu sayede, bu yeni tanımlanan fonksiyonların yaklaşım özelliklerini hem sürekli fonksiyon uzaylarında hem de bazı ağırlıklı fonksiyon uzaylarında sunmuş olacağız. Bunlara ek olarak yeni tanımlanmış Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Tipi operatörler için bir Voronovskaya tipi teorem sağlamış olacağız.

Tezimizin genel yapısı bu bölümle birlikte yedi bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın geri kalanı şu şekilde organize edilmiştir.

İkinci bölümde ana olgu ve tanımlara yer verilerek temel kavramlara dair hatırlatmalar yapılmış ve operatör kavramı üzerine bazı tanım ve teoremler açıklanmıştır. Üçüncü bölümde tezimize konu olan sabit ve e^{-2x} i koruyan yeni tip Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde yeni tanımlanan operatörlerin yaklaşım özellikleri sunulmuş ve yakınsama oranını sağladığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde Voronovskaya tipi teorem verilirken altıncı bölümde sayısal deneyler verilmiştir. Bazı sonuçlar ve araştırmanın ileri yönleri yedinci bölümde tartışılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. BAZI GEREKLİ TANIMLAR

Tanım 2.1. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi A olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \leq b$ ise b sayısına A 'nın bir üst sınırı denir. A kümesinin üst sınırları kümesi boş değilse A kümesi üstten sınırlıdır. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne supremumu denir ve $\sup A$ olarak yazılır.

Tanım 2.2. $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x \in A$ için $a \leq x$ ise, a reel sayısına A kümesinin bir alt sınırı denir. A kümesinin alt sınırları kümesi boş değilse A kümesi alttan sınırlıdır. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne infimumu denir ve $\inf A$ olarak yazılır.

Tanım 2.3. A kümesi hem alttan, hem üstten sınırlı ise A 'ya sınırlı küme denir.

Tanım 2.4. Boştan farklı bir X kümesi için, aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik adını alır.

1. X 'in her x, y eleman çifti için $d(x, y) \geq 0$.
2. X 'in her x, y eleman çifti için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $(x, y) = 0$ bağıntısı $x = y$ 'ye eşdeğerdir.
3. X 'in her eleman çifti için $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)
4. X 'in x, y, z elemanları ne olursa olsun $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)
 $d(x, y)$ reel sayısına x, y arasındaki uzaklık denir.

Tanım 2.5. Bir uzaklık fonksiyonuna sahip bir kümeye metrik uzay denir.

Tanım 2.6. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq m$ olacak şekilde bir m pozitif reel sayısı varsa X uzayına sınırlı metriğe sahip uzay denir.

Tanım 2.7. \mathbb{R}^1 bir boyutlu Euclid uzayında, $a \in \mathbb{R}^1$ ve $r > 0$ olmak üzere $C_r = \{x \in \mathbb{R}^1 : d(x, a) < r\}$ kümesine a noktasının r yarıçaplı civarı (komşuluğu) denir.

Tanım 2.8. $a \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında sürekliliği; her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in \mathbb{R}$ için, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ile tanımlanır.

Tanım 2.9. \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin \mathbb{R}^1 bir boyutlu Euclid uzayına her tasvirine, $n \rightarrow x(n) = x_n$ bir reel sayı dizisi denir.

Tanım 2.10. $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^1$ fonksiyonunun verilmesi ile \mathbb{R}^1 uzayının noktalarından meydana gelen bir x_n dizisi verilmiş olsun. $l \in \mathbb{R}^1$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısına her $n \geq \mathbb{N}(\varepsilon)$ için $|x_n - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\mathbb{N}(\varepsilon)$ doğal sayısı karşılık getirilebiliyorsa x_n dizisi l noktasına yakınsar denir ve $x_n \rightarrow l$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. Bir I aralığı üzerinde tanımlı fonksiyon $f(x)$ olsun. Her ε sayısına bir $\eta(\varepsilon) > 0$ sayısı I 'nin $|x' - x''| < \eta$ şartını sağlayan her (x', x'') nokta çifti için $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ gerçekleşecek şekilde karşılık getirilebiliyorsa $f(x)$ fonksiyonu üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.12. Birinci Mertebeden Süreklilik Modülü:

g fonksiyonu $I = [c, d]$, kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde sürekli fonksiyon ise, her $\delta > 0$ için, $\omega(g, \delta)$ süreklilik modülü

$$\omega(g, \delta) = \sup_{x, y \in I, |x-y| < \delta} |g(x) - g(y)|$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikleri

1. Her n doğal sayısı için, $\omega(g, n\delta) \leq n\omega(g, \delta)$ dir.
2. Her pozitif ve reel λ değişkeni için $\omega(g, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(g, \delta)$ dir.
3. $0 < \delta_1 < \delta_2$ olmak üzere, $\omega(g, \delta)$ artan fonksiyon ise, $\omega(g, \delta_1) \leq \omega(g, \delta_2)$ olur.
4. g fonksiyonu, (c, d) aralığında düzgün sürekli ise,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(g, \delta) = 0$$

dır.

Tanım 2.13. İkinci Mertebeden Süreklilik Modülü:

g fonksiyonu $I = [c, d]$, kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde sürekli fonksiyon ise, her $\delta > 0$

için, ikinci mertebeden süreklilik modülü,

$$\omega^2(g, \delta) = \sup_{y, u, v \geq 0} \sup_{|u-v| \leq \delta} |g(y+2u) - 2g(y+u+v) + g(y+2v)|$$

şeklindedir.

Tanım 2.14. K-fonksiyoneli:

$[0, \infty)$ aralığı üzerinde tüm düzgün ve sınırlı sürekli fonksiyonların uzayı $C_B[0, \infty)$ olmak üzere, $\delta > 0$ için, $W^2 = f_B[0, \infty) : f'' \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere, K-fonksiyoneli;

$$K_2(g, \delta) = \inf_{f \in W^2} \|g - f\| + \delta \|f''\|$$

şeklinde tanımlanır.

$$\omega^2(g, \sqrt{\delta}) = \sup_{0 < |h| \leq \sqrt{\delta}} \sup_{y \in [0, \infty)} |g(y+2h) - 2g(y+h) + g(y)|$$

ile verilen g fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü olmak üzere

$$K_2(g, \delta) \leq A \omega_2(g, \sqrt{\delta})$$

olan bir $A > 0$ sabiti vardır.

Tanım 2.15. Vektör Uzayı:

X boş olmayan bir küme ve \mathbb{F} cisim olsun.

1. X , "+" işlemine göre değişmeli gruptur. Yani, $\forall x, y, z \in X$ için;
 - (a) $x + y \in X$ (kapalılık özelliği)
 - (b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)
 - (c) $x + y = y + x$ (değişme özelliği)
 - (d) $x + \theta = x = \theta + x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır. (sıfır vektörü)
 - (e) $x + (-x) = \theta = -x + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır. (ters eleman)
2. $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olsun.
 - (a) $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için $\alpha x \in X$ (kapalılık özelliği)
 - (b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
 - (c) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

$$(d) 1 \cdot x = x$$

şartları sağlanıyorsa X 'e \mathbb{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 2.16. Normlu Uzay: X bir vektör uzayı, $x, y \in X$ keyfi vektörler ve α bir skaler olsun.

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_x$, θ_x = Sıfır Vektörü
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan fonksiyona X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

2.2. LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 2.17. M ve N lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer M 'den alınan herhangi bir f fonksiyonuna N 'de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir \mathcal{K} kuralı varsa bu durumda M uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = \mathcal{K}(f, x)$$

biçiminde gösterilir. M uzayı \mathcal{K} operatörünün tanım bölgesidir ve $M = D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. Bu durumda $g(x) = \mathcal{K}(f, x)$, N uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine operatörün değer kümesi denir. Bu kümede $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. F cisim, M fonksiyon uzayı, $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall f_1, f_2 \in M$ için;

$$\mathcal{K}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{K}(f_1) + \beta \mathcal{K}(f_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa \mathcal{K} 'ya lineer operatör denir.

Tanım 2.19. Eğer bir \mathcal{K} operatörü pozitif değerli fonksiyona dönüştürüyorsa, yani, $\forall f \geq 0$ için $\mathcal{K}(f) \geq 0$ oluyorsa \mathcal{K} operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım 2.20. Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.21. M ve N lineer uzay olmak üzere, $\mathcal{K} : M \rightarrow N$ lineer operatör olsun. Burada $D(\mathcal{K})$, \mathcal{K} 'nin tanım kümesi olarak ifade edildiğinde; $\forall x \in D(\mathcal{K})$ için $\|\mathcal{K}(x)\|_N \leq n \cdot \|x\|_M$ olacak şekilde bir $n \in \mathbf{R}$ varsa \mathcal{K} operatörü sınırlıdır denir.

Yardımcı Teorem 2.22. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Her $f, g \in M$ için,

$$f \leq g \quad \text{ise} \quad \mathcal{K}(f) \leq \mathcal{K}(g)$$

eşitliği sağlanır. Yani lineer pozitif operatörler monoton artandır.

İspat. $f \leq g$ olduğunu kabul edelim. Buradan $0 \leq g - f$ elde edilir.. \mathcal{K} operatörü pozitif operatör olduğundan $0 \leq \mathcal{K}(g - f)$ yazılabilir ve \mathcal{K} operatörü lineer olduğundan $0 \leq \mathcal{K}(g - f) = \mathcal{K}(g) - \mathcal{K}(f)$ 'dir. O halde $\mathcal{K}(f) \leq \mathcal{K}(g)$ eşitsizliği sağlanır. \square

Yardımcı Teorem 2.23. \mathcal{K} operatörün tanım kümesindeki her f fonksiyonu için

$$|\mathcal{K}(f)| \leq \mathcal{K}(|f|)$$

dir.

İspat. \mathcal{K} operatörünün tanım kümesindeki her f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

yazılabilir. Ve \mathcal{K} operatörü lineer olduğundan

$$-\mathcal{K}(|f|) \leq \mathcal{K}(f) \leq \mathcal{K}(|f|)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$|\mathcal{K}(f)| \leq \mathcal{K}(|f|)$$

ifadesi elde edilmiş olur. \square

Tanım 2.24. Lineer Operatörlerin Sürekliliği:

\mathcal{X} ve \mathcal{Y} normlu uzaylar olup, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tanımlı lineer operatör olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en

az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa \mathcal{T} operatörüne x_0 'da süreklidir denir.

2.3. WEIESTRASS TEOREMİ

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom karşılık gelir. Diğer bir deyişle; Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir P polinomu vardır ki $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ olur.

2.4. BERNSTEIN OPERATÖRÜ

$[0, 1]$ aralığı üzerinde tüm sınırlı fonksiyonların uzayı $B[0, 1]$ ve $v_{m,k}(y) = \binom{m}{k} y^k (1-y)^{m-k}$ olmak üzere $f \in B[0, 1]$ için, Bernstein polinomları,

$$P_m(f, y) = \sum_{k=0}^m v_{m,k}(y) f\left(\frac{k}{m}\right), \quad 0 \leq y \leq 1$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.1. Özellikleri

1. Eğer $f(y) \geq g(y)$ ise $P_m(f, y) \geq P_m(g, y)$ olur, yani P_m monoton operatördür.
2. n. derece için, Bernstein polinomları negatif değildir.
3. Bernstein operatörü, lineer fonksiyonları korur.
4. $\sum_{k=0}^m v_{m,k}(y) = 1$.
5. Aralığın uç noktaları 0 ve 1'de, yalnızca ilk ve son Bernstein polinomu sıfır değildir.
6. $v_{m,k}(1-y) = v_{m,m-k}(y)$.

2.4.2. Momentleri

1. $P_m(1, y) = 1$
2. $P_m(t, y) = y$
3. $P_m(t^2, y) = y^2 + \frac{y(1-y)}{m}$

Dolayısıyla $j = 0, 1, 2$ için $e_j(t) = t^j$ olmak üzere $P_m(e_j(t), y)$, $[0, 1]$ 'de $e_j(y)$ 'ye düzgün yakınsar. Bernstein polinomları pozitif lineer operatörler olduğundan Korovkin teoreminin

tüm koşullarını sağlar. Böylece $P_m(f, y)$, $[0, 1]$ 'de $f(y)$ sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsar.

2.5. BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRÜ

$I = [0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli reel fonksiyonların lineer uzayı $\mathcal{D} \subset B(I)$ olsun. $0 \leq x \leq p_n$ ve $B_n^*(f; x) = f(x)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 0,$$

özelliklerine sahip pozitif reel sayılar dizisi $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olmak üzere, $B_n^* : \mathcal{D} \rightarrow B(I)$ tanımlı,

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{p_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{p_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n} p_n\right)$$

fonksiyon Chlodowsky tarafından [3] Bernstein-Chlodowsky Operatörü olarak adlandırılmıştır.

2.6. KOROVKİN TEOREMİ

$(T_m)_{m \geq 1}$, $C[c, d]$ 'den $C[c, d]$ ye bir pozitif lineer operatör dizisi ise, öyle ki $e_j(t) = t^j$, ($j = 0, 1, 2, 3$) olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m(g) = g$$

$[c, d]$ 'de düzgündür, o zaman $[c, d]$ aralığında her bir $f \in [c, d]$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m(f) = f$$

koşulu sağlanır.

Teorem 2.25. $f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı olsun. Eğer $\mathcal{L}_n(f; x)$ lineer pozitif operatörleri dizisi $[a, b]$ üzerinde

$$\mathcal{L}_n(1; x) = 1 \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_n(t; x) = x \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_n(t^2; x) = x^2 \tag{2.3}$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $\mathcal{L}_n(1;x)$ dizisi $[a,b]$ aralığında $\mathcal{L}_n(f;x) = f(x)$
 $\mathcal{L}_n(f;x) = f(x)$ 'dir. Yani $f(x)$ 'e düzgün yakınsar.

İspat.

f fonksiyonu reel ekseninde sınırlı olduğundan tüm x 'ler için

$$|f(x)| \leq \mathcal{M}_f \quad (2.4)$$

olacak şekilde $\mathcal{M}_f > 0$ sayısı vardır. $f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle
bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|t - x| < \delta$$

olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. $|t - x| < \delta$ olduğundan (2.4)'den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2\mathcal{M}_f$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$|t - x| \geq \delta \quad \text{ise} \quad \frac{|t - x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.5)$$

sağlanır. Ve (2.4) ve (2.5)'den dolayı

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\mathcal{M}_f \leq 2\mathcal{M}_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$$|t - x| \leq \delta \quad \text{için} \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$|t - x| > \delta \quad \text{için} \quad |f(t) - f(x)| < 2\mathcal{M}_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

olduğunu elde ederiz. $\forall t \in \mathbf{R}$ ve $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\mathcal{M}_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.6)$$

dır. Eğer (2.1), (2.2), ve (2.3) koşullarını sağlayan (\mathcal{L}_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Lineerlikten;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); x) - f(x)| = |\mathcal{L}_n(f(t); x) - f(x) + \mathcal{L}_n(f(x); x) - \mathcal{L}_n(f(x); x)|$$

$$|\mathcal{L}_n(f(t); x - \mathcal{L}_n(f(x); x) + \mathcal{L}_n(f(x); x - f(x))|$$

$$|\mathcal{L}_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(\mathcal{L}_n(1; x) - 1)|$$

dir. Üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|\mathcal{L}_n(f(t); x) - f(x)| \leq |\mathcal{L}_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |\mathcal{L}_n(1; x) - 1|$$

olur. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t) - f(x)) \leq |f(t) - f(x)|$$

olduğundan

$$|\mathcal{L}_n((f(t) - f(x)); x)| \leq \mathcal{L}_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

olarak yazılır. Operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|\mathcal{L}_n|f(t) - f(x); x| \leq \mathcal{L}_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde

$$\mathcal{L}_n(f(t);x) - f(x) \leq \mathcal{L}_n(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)| |\mathcal{L}_n(1;x) - 1| \quad (2.7)$$

olduğunu göstermiş olduk. (2.4)'ü kullanarak

$$|\mathcal{L}_n(f(t);x) - f(x)| \leq \mathcal{L}_n\left(\varepsilon + 2\mathcal{M}_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right) + \mathcal{M}_f |\mathcal{L}_n(1;x) - 1|$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n\left(\varepsilon + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2};x\right) &= \mathcal{L}_n(\varepsilon;x) + \mathcal{L}_n\left(\frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2};x\right) \\ &= \varepsilon \mathcal{L}_n(1;x) + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2} \mathcal{L}_n(t^2 + 2tx + x^2;x) \\ &= \varepsilon \mathcal{L}_n(1;x) + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2} [\mathcal{L}_n(t^2) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2x\mathcal{L}_n(t;x) + x^2 \mathcal{L}_n(1;x)] \\ &= \varepsilon \mathcal{L}_n(1;x) + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2} [\mathcal{L}_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2x\mathcal{L}_n(t;x) + x^2 \mathcal{L}_n(1;x) - x^2] \\ &= \varepsilon \mathcal{L}_n(1;x) + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2} [(\mathcal{L}_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - \mathcal{L}_n(t;x) + x^2(\mathcal{L}_n(1;x) - 1))] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son bulunan ifadenin (2.7)'de kullanılmasıyla

$$\mathcal{L}_n(f(t);x) - f(x) \leq \varepsilon \mathcal{L}_n(1;x) + \frac{2\mathcal{M}_f}{\delta^2} [(\mathcal{L}_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - \mathcal{L}_n(t;x) + x^2(\mathcal{L}_n(1;x) - 1)) + x^2(\mathcal{L}_n(1;x) - 1) + \mathcal{M}_f |\mathcal{L}_n(1;x) - 1|] \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.1), (2.2), (2.3) koşullarını (2.6)' i kullanarak

$$|\mathcal{L}_n(f(t);x) - f(x)| < \varepsilon$$

olduğu bulunur. Öyleyse;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |\mathcal{L}_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır. □

2.7. SZASZ-MIRAKJAN-BETA OPERATÖRÜ

Her $M > 0, \gamma > 0$ için, $f \in C[0, \infty)$ yani $|f(t)| \leq M(1+t)^\gamma$ olmak üzere, Szasz-Mirakjan-Beta operatörü;

$$S_m(f, y) = e^{-my} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(my)^k}{k! B(m+1, k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{m+k+1}} f(t) dt + e^{-my} f(0)$$

şeklinde tanımlanır.

Szasz-Mirakjan operatörlerinin momentleri:

1. $S_m(e_0, y) = 1$
2. $S_m(e_1, y) = y$
3. $S_m(e_2, y) = \frac{my^2 + 2y}{m-1}$

şeklindedir.

2.8. TEZ İLE İLGİLİ BAZI NOTASYONLAR

Çalışmamız içerisinde $[0, \infty)$ kümesini \mathcal{S} ile belirteceğiz ve \mathcal{S} üzerinde tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı için ise $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ notasyonunu kullanacağız. $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ üzerinde tüm sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzay için $\mathcal{C}_b(\mathcal{S})$ 'yi kullanacağız. Ek olarak $\mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ ve $\mathcal{C}_0(\mathcal{S})$, \mathcal{S} 'de tüm reel değişkenli sınırlı sürekli fonksiyonların Banach alt örgüleri olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{C}_*(\mathcal{S}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) : \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{S}) = \{f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{S}) : \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

$k \geq 1$ ve $x \geq 0$ için $\bar{\omega}_k(x) = \frac{1}{1+x^k}$ ağırlıklı fonksiyon olmak üzere

$$\Omega_k := \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) : \sup_{x \geq 0} \bar{\omega}_k |f(x)| \in \mathbb{R}\}$$

ağırlıklı uzayını düşünelim. $f \in \Omega_k$ ve onun doğal alt uzayları,

$$\Omega_k^* = \{f \in \Omega_k : \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\omega}_k f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\Omega_k^0 = \{f \in \Omega_k : \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\omega}_k f(x) = 0\}$$

için, ağırlıklı uzayın

$$\|f\|_k = \sup_{x \geq 0} \bar{\omega}_k |f(x)|$$

normu ile donatıldığı aşikardır. Burada $\mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ 'nin Stone-Weierstrass teoreminin bir sonucu olarak Ω_k^0 'da yoğun olduğuna dikkat edilmelidir. Bunlara ek olarak bu ve gelecek bölümlerde $\mu > 0$ sabit bir reel parametre ve f_μ üstel fonksiyonunu

$$f_\mu(t) = e^{-\mu t} \quad (2.9)$$

şeklinde düşüneceğiz. Ve $t \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$ için $e_i(t) = t^i$ ile tanımlanan polinom fonksiyonları e_i ile belirteceğiz. Şimdi kolaylık sağlamak açısından $\alpha_3 = 0$ ve $\beta_3 = 1$ için yeni operatör elde etmek için, her $n \geq 1$ $x \leq p_n$ için, $G_n^{\alpha, \beta}(f_\mu; x)$ sonucunu çıkarmaya ihtiyaç duyarız. Şöyle ki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ için

$$B_{n, p_n}^{\alpha, \beta}(f_\mu)(x) = \left[1 + \frac{\alpha_2}{n} \left(1 - e^{(-\mu p_n / (n + \beta_1))} \right) - x \left(\frac{n + \beta_2}{n p_n} \left(1 - e^{(-\mu p_n / (n + \beta_1))} \right) \right) \right]^n e^{(-\mu p_n / (n + \beta_1))} \quad (2.10)$$

dir. Böylece, verilen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty \quad (2.11)$$

hipotezleri altında \mathcal{S} 'de düzgün her $f \in \mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n, p_n}^{\alpha, \beta}(f) = f$$

sonucuna ulaşılabilir.

3. e^{-2x} 'i KORUYAN BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJIEV TİPİ OPERATÖRLER

Bu bölümde Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörlerin genel bir versiyonunun f_2 fonksiyonunu koruduğunu açıklayacağız. Bunun için öncelikle $f_2(x)$ fonksiyonunu koruyan

$$\mathcal{G}_n^{\alpha,\beta} := G_n^{\alpha,\beta} \circ s_n \quad (3.1)$$

operatörleri gibi reel fonksiyonların bir dizisi olan $(s_n)_{n \geq 1}$ 'i tanıtmayalım. $f(x)$ 'i koruyan yeni operatör inşa etmek amacıyla (2.10) nin yardımıyla $s_n(x)$ 'i hesaplamalıyız. Öyle ki, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ olmak üzere

$$\left[1 + \frac{\alpha_2}{n} \left(1 - e^{(-2p_n/(n+\beta_1))} \right) - s_n(x) \left(\frac{n+\beta_2}{np_n} \left(1 - e^{(-2p_n/(n+\beta_1))} \right) \right) \right]^n e^{(-2p_n/(n+\beta_1))} = f_2$$

den $s_n(x) \leq p_n$ için

$$s_n(x) = \frac{p_n}{n+\beta_2} \left(\alpha_2 + n \frac{1 - e^{2p_n\alpha_1/n(n+\beta_1)-2x/n}}{1 - e^{-2p_n/(n+\beta_1)}} \right)$$

olur. Burada düşünülen nokta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = x$$

dir. Ayrıca

$$x \geq \frac{p_n\alpha_1}{n+\beta_1}$$

için

$$1 - e^{-x} \leq x$$

olduğundan, $n \geq 1$ için

$$N_n := \frac{2p_n}{(n+\beta_2)(1 - e^{-2p_n/(n+\beta_1)})}$$

olmak üzere

$$s_n \left(\frac{p_n \alpha_1}{n + \beta_1} \right) = \frac{p_n \alpha_2}{n + \beta_2}$$

ve

$$\frac{p_n \alpha_1}{n + \beta_2} \leq s_n(x) \leq \frac{p_n \alpha_2}{n + \beta_2} + N_n x \quad (3.2)$$

sonucuna varabiliriz. Buna ek olarak (2.11) yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = 1$$

sonucuna varılabilir. Tüm bunları göz önünde bulundurarak her bir $n \geq 1$, $x \geq 0$, ve $f \in C_*(\mathcal{S})$ için yeni bir Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Tipi Operatörler $(\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1})_{n \geq 1}$ şöyle tanımlanabilir. $\mathcal{I}_n = \left[p_n \frac{\alpha_1}{n + \beta_1}, p_n \frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right]$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ olmak üzere

$$\mathcal{G}_{n, p_n}^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n f \left(p_n \frac{k + \alpha_1}{n + \beta_1} \right) \binom{n}{k} \left(\frac{1 - e^{2p_n \alpha_1 / n(n + \beta_1) - 2x/n}}{1 - e^{-2p_n / (n + \beta_1)}} \right)^k \left(1 - \frac{1 - e^{2p_n \alpha_1 / n(n + \beta_1) - 2x/n}}{1 - e^{-2p_n / (n + \beta_1)}} \right)^{n-k}, & x \in \mathcal{I}_n \\ f(x) & , x \in \mathcal{S} / \mathcal{I}_n \end{cases} \quad (3.3)$$

'dir. Bu önerilen operatör ve onun klasik yazımı

$$\mathcal{G}_{n, p_n}^{\alpha_1, \beta_1} f(x) = \mathcal{B}_{n, p_n}^{\alpha, \beta} f(s_n(x)) \quad (3.4)$$

olarak gözlemleniyor. Şimdi adı geçen operatörleri kullanarak yeni tanımlanan operatörlerin momentlerini elde edebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.1. $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ olmak üzere, her bir $x \in \mathcal{I}_n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

- (i) $\mathcal{G}_{n, p_n}^{\alpha_1, \beta_1}(e_0; x) = 1$,
- (ii) $\mathcal{G}_{n, p_n}^{\alpha_1, \beta_1}(e_1; x) = \frac{p_n}{n + \beta_1} \left(\alpha_1 - \alpha_2 + s_n(x) \frac{n + \beta_2}{p_n} \right) = \frac{p_n}{n + \beta_1} \left(\alpha_1 + n \frac{1 - e^{2p_n \alpha_1 / n(n + \beta_1) - 2x/n}}{1 - e^{-2p_n / (n + \beta_1)}} \right)$,

$$(iii) \mathcal{G}_{n,p_n}^{\alpha_1,\beta_1}(e_2;x) = \left[2p_n \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} \right) \left(s_n(x) - p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right) + p_n \frac{1}{n+\beta_1} \right] \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} \right) \left(s_n(x) - p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right) + \left(p_n \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2.$$

(ii) ve (iii)'deki sonuçların $e_1(x)$ ve $e_2(x)$ 'e, $(n \rightarrow \infty)$ limit durumunda yakınsadığı kolaylıkla görülebiliyor ki, bu da (3.4)'de tanıtılmış olan yeni operatörlerin Korovkin test fonksiyonlarını koruduğunu gösteriyor. Bu çalışmada yer alan tüm sonuçlar MAPLE yazılımı tarafından hesaplanmıştır. Bu sonuçlar yeni tanımlanan operatörün Korovkin test fonksiyonlarını limit durumunda koruduğunu da göstermektedir. Özellikle, her $x \geq 0$ için tanımlanan fonksiyon;

$$E_t^m = (e_1(t) - xe_0(t))^m$$

şeklinde düşünülürse aşağıdaki lemmaya ulaşılır.

Yardımcı Teorem 3.2. $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ olmak üzere, $x \in \mathcal{I}_n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özdeşlikler korunur.

$$(i) \mathcal{G}_n^{\alpha_1,\beta_1}(E_t^0;x) = 0,$$

$$(ii) \mathcal{G}_n^{\alpha_1,\beta_1}(E_t^1;x) = \frac{p_n}{n+\beta_1} \left(\alpha_1 + n \frac{1 - e^{2p_n\alpha_1/n(n+\beta_1)-2x/n}}{1 - e^{2p_n/n(n+\beta_1)}} \right) - x$$

$$(iii) \mathcal{G}_{n,p_n}^{\alpha_1,\beta_1}(e_2;x) = \left[2p_n \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} \right) \left(s_n(x) - p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right) + p_n \frac{1}{n+\beta_1} \right] \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} \right) \left(s_n(x) - p_n \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right) + \left(p_n \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 - 2x \frac{p_n}{n+\beta_1} \left(\alpha_1 - \alpha_2 + s_n(x) \frac{n+\beta_2}{p_n} \right) + x^2$$

Sonuç olarak (2.9)'de verilen üstel fonksiyon için aşağıdaki eşitlik çıkartılabilir.

$$\mathcal{G}_n^{\alpha_1,\beta_1}(f_\mu;x) = e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n+\beta_1)} \left[1 - \left(1 - e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n+\beta_1)} \right) \left(s_n(x) \frac{n+\beta_2}{np_n} - \frac{\alpha_2}{n} \right) \right]^n, \quad (3.5)$$

$$= e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n+\beta_1)} \left[1 - \left(1 - e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n+\beta_1)} \right) \left(\frac{1 - e^{2p_n\alpha_1/n(n+\beta_1)-2x/n}}{-e^{-2p_n/n(n+\beta_1)}} \right) \right]^n$$

$n \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f_\mu; x) \rightarrow f_\mu$ olduğu aşikardır. Sonuç olarak $(\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1})_{\geq 1}$, $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 'de bir yaklaşım sürecidir; yani, her $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f) = f$$

\mathcal{S} üzerinde düzgündür. Özellikle her $x \geq 0$ için tanımlanan fonksiyon;

$$F_t^m = (e^{-t} - e^{-x})^m$$

şeklinde düşünelimse aşağıdaki lemmaya ulaşılabilir.

Yardımcı Teorem 3.3. $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ olmak üzere, her $x \in \mathcal{S}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özellikler korunur.

$$(i) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^0; x) = 1,$$

$$(ii) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^1; x) = e^{-p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} \left[1 - \left(\frac{1 - e^{-p_n \alpha_1 / (n + \beta_1) - 2x/n}}{1 + e^{-p_n / (n + \beta_1)}} \right) \right]^n - e^{-x},$$

$$(iii) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^2; x) = 2e^{-2x} - 2e^{-x} e^{-p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} \left[1 - \left(\frac{1 - e^{-p_n \alpha_1 / (n + \beta_1) - 2x/n}}{1 + e^{-p_n / (n + \beta_1)}} \right) \right]^n.$$

Önerme 3.4. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ olmak üzere, her $n \geq 1$ ve $x \in \mathcal{S}$ için

$$s_n(x) \geq \left(\frac{n + \beta_1}{n + \beta_2} \right) x - p_n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n + \beta_2} \quad (3.6)$$

dir.

İspat. Öncelikle, $n \geq 1$ için, $s_n, -f_{2/n}(x)$ 'nin bir fonksiyonu olduğu için \mathcal{I}_n 'de dışbükey olarak aşağı doğru artan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Buna ek olarak,

$$s_n \left(p_n \frac{\alpha_1}{n + \beta_1} \right) = p_n \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \quad \text{ve} \quad s_n \left(p_n \frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right) = p_n \frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2}$$

olduğundan, $x \in \mathcal{I}_n$ için

$$s_n(x) \geq \left(\frac{n + \beta_1}{n + \beta_2} \right) x - p_n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n + \beta_2}$$

olduğunu kolayca çıkarabiliriz. Böylece ispat tamamlanır. \square

Önerme 3.5. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{R}$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ için \mathcal{S} 'nin kompakt alt aralalıklarında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e_1(x)$$

düzgün yakınsar.

İspat. Açıkça görülüyor ki, \mathcal{S} 'de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e_1(x)$ noktasal yakınsar. Ek olarak $s_n(x)$ dışbükeydir yakınsama gerçekten de \mathcal{S} 'nin her kompakt aralığında düzgündür. \square



4. $(\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1})_{n \geq 1}$ 'İN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölüme kadar, e^{-2x} fonksiyonunu koruyan yeni tanımlanmış Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörlerin özelliklerini sağladık. Şimdi sürekli fonksiyonların farklı uzayları için bu yeni operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini sunabiliriz. Ek olarak $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}$, in yakınsama oranını da sağlarız.

Teorem 4.1. $x > 0$ sabit ve $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}, n \geq 1$ için (3.3)'de tanımlanan operatör olsun. $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}, \mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ 'den kendisine lineer pozitif operatördür. Ek olarak $\|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}\|_{\mathcal{C}_*(\mathcal{S})} = 1$.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n(x)$ artan ve konveks reel sürekli fonksiyonun

$$s_n \left(p_n \frac{\alpha_1}{n + \beta_1} \right) = p_n \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \quad \text{ve} \quad s_n \left(p_n \frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right) = p_n \frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2}$$

sağladığı kolayca gösterilebilir. (3.1) ve (3.2) denklemlerinin açık bir sonucu olarak $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}$, in pozitif bir operatör olduğu sonucuna varılabilir. Ayrıca $f \in \mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ ise, $B_{n, p_n}^{\alpha, \beta}(f) \in \mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ 'nin $B_{n, p_n}^{\alpha, \beta}(f) \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ 'yi veren (1.1)'den kaynaklandığı söylenebilir. O zaman, $s_n(x)$ 'nin yukarıdaki özellikleri ve () ilişkisini sağladığı için $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f) \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f)(x) \in \mathbb{R}$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak her $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}$, in pozitifliğinden dolayı

$$\|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}\|_{\mathcal{C}_*(\mathcal{S})} = \|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_0)\|_{\infty} = 1$$

dir. □

Teorem 4.2. Teorem 4.1'in benzer varsayımları için,

$$\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\mathcal{C}_0(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}_0(\mathcal{S}))$$

ifadesi sağlanır.

İspat. Teorem 1 'in direkt sonuçlarından ve $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ iken

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f)(x) = 0$$

olduğundan teoremin ispatı kolayca gösterilebilir. \square

Teorem 4.3. $n \geq 1$ sabiti için, (3.3) ile tanımlanan $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}$ operatürünü düşünelim. Eğer $f \in \mathcal{C}_*(\mathcal{S})$ ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f) = f$$

\mathcal{S} üzerinde düzgündür.

İspat. Teoremin ispatını denerken , her $\mu > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f_\mu) = f_\mu \quad (4.1)$$

\mathcal{S} 'de düzgün olduğunu göstermeye ihtiyaç duyarız. Bu amaçlar doğrultusunda , her $z > 0$, $(z_n)_{n \geq 1}$ pozitif gerçekte sayılar dizisi için $v_n = \frac{1 - e^{-z_n}}{z_n}$ olmak üzere [22], Yardımcı Teorem(3.1)'de verilen, aşağıdaki eşitsizliği kullanırız.

$$e^{z v_n} - e^{-z} < \frac{z_n}{2e}, n \geq 1 \quad (4.2)$$

Daha sonra, aşağıdaki gibi [22], (3.4) 'in ispatının benzer basamaklarından, (2.11) için $\ln x \leq x - 1$, $\frac{[1 - e^{-\mu p_n/(n+\beta_1)}]}{\mu p_n/(n+\beta_1)} \leq 1$ olduğundan ve (3.6) eşitsizliği geçerli olduğundan,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f_\mu)(x) - (f_\mu)(x)| \leq e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} \dots \\ & \dots \left[1 - \left(1 - e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} \right) \left(s_n(x) \frac{n + \beta_2}{n p_n} - \frac{\alpha_2}{n} \right) \right] - e^{-\mu x} \\ & = e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} e^{n \ln [1 - (1 - e^{-\mu p_n / (n + \beta_1)}) (s_n(x) \frac{n + \beta_2}{n p_n} - \frac{\alpha_2}{n})]} - e^{-\mu x} \\ & \leq e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} e^{-n s_n(x) [n + \beta_2] / n p_n [1 - e^{-\mu p_n / (n + \beta_1)}]} e^{\alpha_2 [1 - e^{-\mu p_n / (n + \beta_1)}]} - e^{-\mu x} \\ & = e^{-\mu p_n \alpha_1 / (n + \beta_1)} e^{[\alpha_2 \mu p_n / (n + \beta_1)]} \frac{[1 - e^{-\mu p_n / (n + \beta_1)}]}{\mu p_n / (n + \beta_1)} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots e^{-ns_n(x)[(n+\beta_2)/np_n][\mu p_n/(n+\beta_1)]} \frac{[1 - e^{-\mu p_n/(n+\beta_1)}]}{\mu p_n/(n+\beta_1)} - e^{-\mu x} \\ & \leq e^{-\mu p_n(\alpha_1 - \alpha_2)/(n+\beta_1)} \left(e^{-\mu s_n(x)[(n+\beta_2)/(n+\beta_1)]} \frac{[1 - e^{-\mu p_n/(n+\beta_1)}]}{\mu p_n/(n+\beta_1)} - e^{-\mu s_n(x)[(n+\beta_2)/(n+\beta_1)]} \right) \end{aligned}$$

elde edebiliriz. Ardından $z = -\mu s_n(x) \frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}$ ve $z_n = \frac{\mu p_n}{(n+\beta_1)}$ için (4.2) yi kullanarak $x \in \mathcal{S}$ için

$$|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f_\mu)(x) - f_\mu(x)| \leq e^{-\mu p_n(\alpha_1 - \alpha_2)/(n+\beta_1)} \frac{\mu p_n}{2e(n+\beta_1)}$$

ve

$$\|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f_\mu) - f_\mu\|_\infty \leq e^{-\mu p_n(\alpha_1 - \alpha_2)/(n+\beta_1)} \frac{\mu p_n}{2e(n+\beta_1)} \quad (4.3)$$

ifadesini çıkarabiliriz ve (4.1)'in ispatı tamamlanır. O zaman doğrudan (4.1)'in sonucuna ve [23]'ye dayanarak teoremi ispatlayabiliriz. \square

Teorem 4.4. 4.3 ün benzer varsayımları için \mathcal{S} 'nin kompakt altkümeleri üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f) = f$$

düzgün ise $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{S})$ dir.

İspat. Yukarıda sağlanan sonuçlardan;

$$\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_0)(x) - e_0(x) = 0$$

$$|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_1)(x) - e_1(x)| \leq p_n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n + \beta_2} + p_n \frac{\alpha_2}{n + \beta_1} + x \left(N_n \frac{n + \beta_2}{n + \beta_1} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_2)(x) - e_2(x)| & \leq x^2 \left(\frac{n-1}{n} \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} \right)^2 N_n^2 - 1 \right) + p_n \frac{(2\alpha_1 + 1)(n + \beta_2)}{(n + \beta_1)^2} N_n x + \dots \\ & \quad \dots \left(p_n \frac{\alpha_1}{n + \beta_1} \right)^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = 1$ ile ilişkili olarak, \mathcal{S} 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_0, e_1, e_2) = e_0, e_1, e_2$ düzgün yakınsar. Sonuç olarak, [24], Teorem (3.5)'den $e_0, e_1, e_2 \subset \Omega_2^*$ sonucu gelir. Teorem 4.3'de $n \geq 1$ için $(\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f))$ 'nin f 'ye yakınsama

oranını tahmin etmek için, süreklilik modülü hakkında bilgimizi artırmalıyız. Bu tahmini yaparken, [22]'de tanımlanan aşağıdaki süreklilik modülü tanımından yararlanacağız. \square

Tanım 4.5. $f \in C_*(\mathcal{S})$ olsun. Bir fonksiyonun süreklilik modülü $\omega^*(f, \delta)$ olmak üzere, $\Delta \geq 1$ için

$$\omega^*(f, \delta) = \sup_{x, t \geq 0, |e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta} |f(x) - f(t)| \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer bir deyişle, süreklilik modülü, standart süreklilik modülü ile ilişkili olarak, $\mathbf{f} : C_*(\mathcal{S}) \rightarrow C(\mathcal{S})$ fonksiyonu

$$\mathbf{f}(\theta) = \begin{cases} f(-\ln \theta), & \text{if } \theta \in (0, 1] \\ 1, & \text{if } \theta = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan sürekli fonksiyon olmak üzere $\omega^*(f, \delta) = \omega(\mathbf{f}, \delta)$ ile ifade edilebilir. Aşağıdaki teorem, sonraki teoremleri ifade etmek için yardımcı olacaktır.

Teorem 4.6. $n \rightarrow \infty$ iken $\rho_n, \xi_n, \kappa_n \rightarrow 0$ için

$$\rho_n = \|Q_n(e_0) - e_0\|_\infty$$

$$\xi_n = \|Q_n(f_1) - f_1\|_\infty$$

$$\kappa_n = \|Q_n(f_2) - f_2\|_\infty$$

olmak üzere, $n \geq 1$ için $Q_n : C_*(\mathcal{S}) \rightarrow C(\mathcal{S})$ pozitif lineer operatörler dizisi ise, her $f \in C_*(\mathcal{S})$ için

$$\|Q_n(f) - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \rho_n + (2 + \rho) \omega^*\left(f, \sqrt{\rho_n + 2\xi_n + \kappa_n}\right)$$

dir.

Bununla ilgili olarak, $C_*(\mathcal{S})$ uzayı için seçilen özel Korovkin altkümesi ile $\omega^*(f, \delta)$ arasında yakın ilişki olduğu açıkça görülür, [22]. Yukarıdakilerin yardımıyla bir sonraki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.7. Teorem (4.3)'ün benzer varsayımları altında, her $f \in C_*(\mathcal{S})$ ve $n \geq 1$ için

$$\|\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f) - f\|_\infty \leq 2\omega^*\left(f, \sqrt{e^{-p_n(\alpha_1 - \alpha_2)/(n + \beta_1)} \frac{p_n}{e(n + \beta_1)}}\right)$$

dir.

İspat. Tanımlarından dolayı ρ_n ve ξ_n 'nin sıfıra eşit olduğu aşıkardır. Diğer taraftan, her $n \geq 1$ için, $\lambda = 1$ ile (4.3)'den

$$\xi_n = e^{-p_n(\alpha_1 - \alpha_2)/(n + \beta_1)} \frac{p_n}{2e(n + \beta_1)}$$

olduğu kolayca gösterilir.

□



5. VORONOVSKYA TİPİ TEOREM

Tezimizin bu aşamasında ise e^{-2x} 'yi koruyan Bernstein-Chlodowsky Tipi operatörlerin noktasal yakınsaması sağlayacağız. Nicel anlamda, hedeflenen yaklaşım derecesi ve yaklaşım hatası için bir üst sınır bulmamıza yardımcı olan Voronovksya teoremi ile ilgileneceğiz. Sınırlı ve sınırsız aralıklar üzerinde hareket eden Bernstein-Chlodowsky tipi operatörler için nicel Voronovskaya tipi teorem, sırasıyla [25, 26, 27, 28] makalelerde bulunabilir. Burada (4.4)'de verilen süreklilik modülünü düşünerek bu bölümün teoremini sunabiliriz.

Teorem 5.1. $f, f'' \in C_*(\mathcal{S})$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(x) &= \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^1; x) - x \\ \mathcal{B}_n(x) &= \frac{1}{2} \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) - x \\ \mathcal{C}_n(x) &= \frac{n^2}{p_n} \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^4; x)} \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^4; x)} \end{aligned}$$

olmak üzere, her $x \in \mathcal{S}$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{n}{p_n} [\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x)] - x f'(x) - \frac{1}{2} x f''(x) \right| \leq \\ &|f'(x)| |\mathcal{A}_n(x)| + |f''(x)| |\mathcal{B}_n(x)| + 2|2\mathcal{B}_n(x) + x| + 2\mathcal{C}_n(x) \omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x \in \mathcal{S}$ noktasında, f 'nin Taylor açılımı yardımıyla,

$$\Delta(t, x) := \frac{f''(\varepsilon) - f''(x)}{2}$$

ve ε x ile t arasında bir sayı olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2}(t-x)^2 + \Delta(t, x)(t-x)^2 \quad (5.1)$$

sonucu çıkarılabilir. $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}$, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörlerini, (5.1) eşitliğinin her iki tarafına uygulayarak ve $\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(e_0) = (e_0)$ 'ı kullanarak

$$\left| \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x) - f'(x)\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^1; x) - \frac{1}{2}f''(x)\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) \right| \leq |\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\Delta E_t^2; x)|$$

sonucunu çıkarırız. Daha sonra, yukarıdaki eşitsizliği yeniden düzenleyerek;

$$\left| \frac{n}{p_n} [\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x)] - xf'(x) - \frac{1}{2}f''(x) \right| \leq |f'(x)| \left| \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^1; x) - x \right| + \frac{1}{2}|f''(x)| \left| \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) - x \right| + \left| \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\Delta E_t^2; x) \right|$$

elde ederiz. Kolaylık olması açısından;

$$\mathcal{A}_n(x) = \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^1; x) - x$$

$$\mathcal{B}_n(x) = \frac{1}{2} \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) - x$$

olarak ifade edeceğiz. Yardımcı teorem (3.2)'nin sonuçlarından, her $x \in \mathcal{S}$ noktasında, $n \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{A}_n \rightarrow 0$ ve $\mathcal{B}_n(x) \rightarrow 0$ olduğu açıktır. Buradan

$$\left| \frac{n}{p_n} [\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x)] - xf'(x) - \frac{1}{2}xf''(x) \right| \leq |f'(x)| |\mathcal{A}_n(x)| + |f''(x)| |\mathcal{B}_n(x)| + \dots$$

$$\dots \left| \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\Delta E_t^2; x) \right|$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Teoremin kanıtını tamamlamak için son adım olarak yukarıdaki ifadenin en sonundaki $|\frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\Delta E_t^2; x)|$ terimini tahmin etmeliyiz. Holhos'un [22] makalesindeki eşitsizlik yardımıyla,

$$|\Delta(t, x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f''; \delta)$$

ve

$$\begin{cases} |\Delta(t, x)| \leq 2\omega^*(f''; \delta) & , |e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta, \\ |\Delta(t, x)| \leq 2\frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} \omega^*(f''; \delta) & , |e^{-x} - e^{-t}| > \delta \end{cases}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $|\Delta(t, x)| \leq 2 \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f''; \delta)$ eşitsizliğine sahip oluruz. Bunun yardımıyla

$$\left| \frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(\Delta E_t^2; x) \right| \leq \frac{2n}{p_n} \omega^*(f''; \delta) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) + \frac{2n}{\delta^2 p_n} \omega^*(f''; \delta) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2 F_t^2; x)$$

elde ederiz ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayarak;

$$\frac{n}{p_n} \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(|\Delta E_t^2|; x) \leq \frac{2n}{p_n} \omega^*(f''; \delta) \mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^2; x) + \dots$$

$$\dots \frac{2n}{\delta^2 p_n} \omega^*(f''; \delta) \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^4; x)} \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^4; x)}$$

elde ederiz. $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçerek ve $C_n(x) = \frac{n^2}{p_n} \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(E_t^4; x)} \sqrt{\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(F_t^4; x)}$ ile belirterek;

$$\left| \frac{n}{p_n} [\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x)] - x f'(x) - \frac{1}{2} x f''(x) \right| \leq |f'(x)| |\mathcal{A}_n(x)| + |f''(x)| |\mathcal{B}_n(x)|$$

$$+ 2|2\mathcal{B}_n(x) + x| + 2C_n(x) \omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p_n} [\mathcal{G}_n^{\alpha_1, \beta_1}(f; x) - f(x)] = x f'(x) + \frac{1}{2} x f''(x)$$

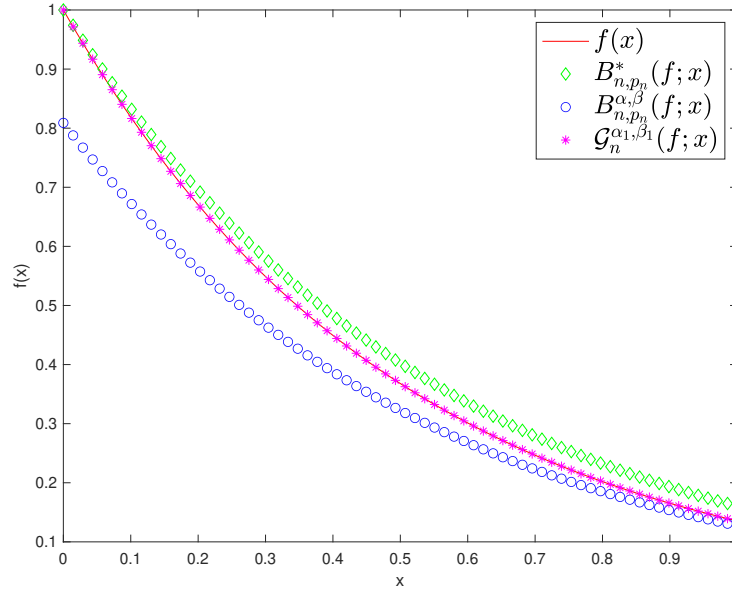
sonucuna ulaşırız ve ispat tamamlanır. □

6. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde, çalışmamızda yeni tanımlanmış operatörler için nümerik deneyler serisini sağladığımızı göstererek devam edeceğiz. Bunun için, klasik Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörü ve tezimizde tanımlanan operatörümüz için grafik sunumunu vereceğiz. Yapılan deneylerde, üç farklı test fonksiyonu ve farklı parametreler kullanılmış ve yeni tanımlanan operatörlerin tüm uygulamaları MATLAB'da gerçekleştirilmiştir.

6.1. ÖRNEK 1:

Klasik benzerlerini temel alan yeni tip Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörünün yakınsamasını örneklendirelim. Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörünün yeni yapısı ve onun standart algoritması, $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 3, \beta_2 = 4$ ve $\beta_3 = 1$ olmak üzere, $p_n = n^{1/2}$ ve $n = 100$ $f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, test fonksiyonuna uygulanır. Şekil (6.1)'de, standart Bernstein-Chlodowsky operatörü, Bernstein-Gadjiev operatörü, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörlerinin yeni yapısı ve test fonksiyonunun sonuçlarını çizdik. Önerilen operatörün, benzerlerinden daha iyi yakınsama gösterdiği açıktır.



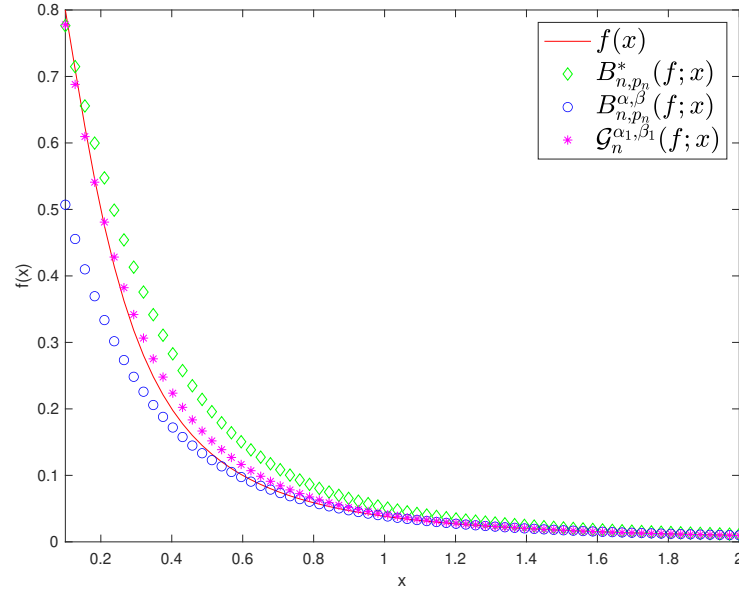
Şekil 6.1. Kesin fonksiyon (kırmızı), Klasik Bernstein-Chlodowsky Operatörü (Yeşil-Elmas), Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Mavi-Halka), ve yeni tanımlanan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Magenta-Yıldız)

6.2. ÖRNEK 2:

İkinci kez, klasik benzerlerine dayanarak, yeni tip Bernstein-Chlodowsky operatörünün yakınsamasını göstereceğiz. Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörünün yeni yapısı ve onun standart versiyon algoritması, $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 3, \beta_2 = 4, \beta_3 = 1$ olmak üzere, test fonksiyonu $f(x) : [0.1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, p_n = n^{1/2}$ ve $n = 100$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

'na uygulandı. Benzer şekilde, Şekil 6.2'de, standart Bernstein-Chlodowsky operatörü, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörü, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörü ve test fonksiyonunun sonuçlarını çizdik. Önerilen operatörün, benzerlerinden daha iyi yakınsama gösterdiği açıktır.



Şekil 6.2. Kesin fonksiyon (kırmızı), Klasik Bernstein-Chlodowsky Operatörü (Yeşil-Elmas), Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Mavi-Halka), ve yeni tanımlanan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operatörü (Magenta-Yıldız)

7. SONUÇ

Bu çalışmada, $x \geq 0$ için, sabit ve e^{-2x} 'i koruyan Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörlerinin bir genellemesi açıklandı. Bu yeni tanımlanan operatörlerin yaklaşım özelliklerini göstermek için birkaç farklı fonksiyon uzayı kullanıldı. Ayrıca, Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev tipi operatörü için Voronovksya tipi teorem ve yakınsama oranı sağlamış olundu.



8. KAYNAKLAR

- [1] K. Weierstrass, "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885.
- [2] S. Bernstein, "Demonstration du theoreme de Weierstrass, fondee sur le calculus des probabilities," *Commun. Soc. Math., Kharkow*, c. 13, ss. 1-2, 1913.
- [3] I. Chlodowsky, "Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein," *Compositio Mathematica*, c. 4, ss. 380-393, 1937.
- [4] F. Altomare ve M. Campiti, "Korovkin-Type approximation theory and its applications," *de Gruyter Studies in Mathematics*", c. 17, Berlin, 1994.
- [5] A. Attalienti ve M. Cambiti, "Bernstein-type operators on the half line," *Czechoslov. Math. J.*, c. 127, sayı 127, ss. 851-860, 2002.
- [6] A. D. Gadjiev ve A. M. Ghorbanalizadeh, "Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables," *Appl. Math. Comput.*, ss. 216, 890-901, 2010.
- [7] A. Aral ve T. Acar, "Weighted approximation by new Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operators," *Filomat*, c. 27, sayı 2, ss. 371-380, 2013.
- [8] J. P. King, "Positive linear operators which preserve x^2 ," *Acta Math. Hung.*, c. 99, sayı 3, ss. 203-208, 2003.
- [9] T. Acar, A. Aral, D. Cardenas-Morales ve P. Garrancho, "Szász-Mirakyan type operators which fix exponentials," *Results Math.*, c. 72, ss. 1393-1404, 2017.
- [10] T. Acar, A. Aral ve H. Gonska, "On Szász-Mirakyan operators preserving e^{2ax} , $a > 0$," *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 14, sayı 1, ss. 6, 2017.
- [11] M. Bodur, O. G. Yılmaz ve A. Aral, "Approximation by Baskakov-Szász-Stancu operators preserving exponential functions," *Constr. Math. Anal.* c. 1, sayı 1, ss. 1-8, 2018.
- [12] O. G. Yılmaz, V. Gupta ve A. Aral, "On Baskakov operators preserving the exponential function," *Journal of Numerical Analysis Approximation Theory*, c. 46, sayı 2, ss. 150-161, 2017.
- [13] A. Aral, D. Cardenas-Morales ve P. Garrancho, "Bernstein-type operators that reproduce exponential functions," *Journal of Mathematical Inequalities*, c. 12, sayı 3, ss. 861-872, 2018.
- [14] A. Aral, M.L. Limmam ve F. Ozsarac, "Approximation properties of Szász-Mirakyan-Kantorovich type operators," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, ss. 1-8, 2018.

- [15] F. Ozsarac ve T. Acar, "Resconstruction of Baskakov operators preserving some exponential functions," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, ss. 1-9, 2018.
- [16] V. Gupta ve A. M. Acu, "On Baskakov-Szasz-Mirakyan type operators preserving exponential type functions," *Positivity*, c. 22, ss. 919-929, 2018.
- [17] V. Gupta ve A. Aral A "A note on Szasz-Mirakyan-Kantorovich type operators preserving e^{-x} ," *Positivity*, c. 22, ss. 415-423, 2018.
- [18] V. Gupta ve G. Tachev, "On approximation properties of Philips operators preserving exponential functions," *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 14, sayı 4, ss. 177, 2017.
- [19] T. Acar, M. C. Montano, P. Garrancho ve V. Leonessa, "On Bersntein-Chlodovsky operators preserving e^{-2x} ," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, c. 26, ss. 681-698, 2019.
- [20] V. Gupta ve N. Malik, "Approximation with certains Szasz-Mirakyan operators," *Khayyam J. Math.*, c. 3, sayı 2, ss. 90-97, 2017.
- [21] T. Acar, A. Aral ve I. Rasa, "Positive lineer operators preserving τ and τ^2 ," *Constr. Math. Anal.*, c. 2, sayı 3, ss. 98-102, 2019.
- [22] A. Holhos, "The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators," *Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica*, c. 2, ss. 133-142, 2010.
- [23] B. D. Boyanov ve V. M. Veselinov, "A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators," *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum.* c. 14, sayı 62, ss. 9-13, 1970.
- [24] F. Altomare, "Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators," *Surv. Approx. Theory*, c. 5, ss. 92-164, 2010.
- [25] T. Acar, A. Aral ve I. Rasa, "The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces," *Positivity*, c. 20, ss. 25-40, 2016.
- [26] P. L. Butzer ve H. Karsli, "Voronovskaya-type theorems for derivatives of the Bernstein-Cholodovsky polynomials and the Szasz-Mirakyan operator," *Comment. Math.* c. 49, ss. 33-58, 2009.
- [27] H. Gonska, P. Pitul ve I. Rasa, "On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators," *Cluj-Napoca, Proc. International Conf. Numer. Anal. Approx. Theory*, ss. 55-80, 2006.
- [28] H. Karsli, "A Voronovskaya-type theory for the second derivate of the Bernstein-Chlodovsky polynomials," *Proc. Est. Acad. Sci.* c. 61, ss. 9-19, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Feyza TANBERK OKUMUŞ

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	DÜZCE Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Matematik	SAKARYA Üniversitesi	2007
Lise		Güner Akın Lisesi	2003