



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AKIŞKAN İLE TEMAS EDEN METAL  
ÖZELLİKLİ BİR PLAKADAKİ  
TİTREŞİMLERİN OPTİMAL KONTROLÜ**

**Mehmet ŞİMŞEK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



T.C.  
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞKAN İLE TEMAS EDEN METAL  
ÖZELLİKLİ BİR PLAKADAKİ  
TİTREŞİMLERİN OPTİMAL KONTROLÜ

Mehmet ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Kenan YILDIRIM

Haziran-2022  
MUŞ  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL ve ONAYI

Mehmet Şimşek tarafından hazırlanan “Akışkan ile Temas Eden Metal Özellikli Bir Plakadaki Titreşimlerin Optimal Kontrolü” adlı tez çalışması 01/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV  
Üniversitesi, Fakülte, Bölüm

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Kenan YILDIRIM  
Üniversitesi, Fakülte, Bölüm

.....

#### Üye

Doç. Dr. Sertan ALKAN  
Üniversitesi, Fakülte, Bölüm

.....

#### Üye

Unvanı Adı SOYADI  
Üniversitesi, Fakülte, Bölüm

.....

#### Üye

Unvanı Adı SOYADI  
Üniversitesi, Fakülte, Bölüm

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... Tarih ve ...../..... nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Mehmet ŞİMŞEK

01/06/2022

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## AKIŞKAN İLE TEMAS EDEN METAL ÖZELLİKLİ BİR PLAKADAKİ TİTREŞİMLERİN OPTİMAL KONTROLÜ

**Mehmet ŞİMŞEK**

**Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Kenan YILDIRIM**

Bu tezde, akışkan zemin ile temas ettirilmiş, harici bir kuvvet etkisine maruz kalan, dikdörtgenel, magneto-elektrik elastik yapıya sahip metal özellikli bir plakadaki titreşimlerin kontrolü için maksimum prensip yöntemiyle optimal kontrol fonksiyonun elde edilmesi ve sistemde meydana gelen titreşimlerin sönümlenmesi amaçlanmaktadır. Öncelikle sistemin kontrol edilebilir olduğu varsayılmış olup, sisteme ait çözümünün varlığı ve tekliği ile beraber kontrol fonksiyonun tekliği araştırıldı. Maksimum prensip yönteminin kullanımı için sisteme ait eşlenik sistem ve terminal koşullar belirlendi. Optimal kontrol fonksiyonu maksimum prensip ile elde edildi. Sistemde bulunan kısmi diferansiyel denklem sistemi çözüldükten sonra elde edilen sonuçlar grafiklerle sunuldu.

**2022, 33 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Eşlenik, Maksimum Prensip, Metal Plaka, Optimal Kontrol, Titreşim

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**OPTIMAL CONTROL OF VIBRATIONS ON A METAL PLATE CONTACTED  
A FLUID**

**Mehmet ŞİMŞEK**

**Muş Alparslan University  
Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Kenan YILDIRIM**

In this thesis, it is aimed to obtain the optimal control function for the control of vibrations in a rectangular metallic plate with magneto-electric elastic structure, which is in contact with the fluid, exposed to an external force, and to dampen the vibrations that occur in the system. First of all, it is assumed that the system under consideration is controllable. The existence and uniqueness of the solution of the system, uniqueness of the control function were investigated. For using of the maximum principle method, the conjugate system and terminal conditions of the system were determined. The optimal control function was obtained by means of maximum principle. After the partial differential equation system in the system was solved, the results obtained were presented with tables and graphics.

**2022, 33 Pages**

**Keywords:** Adjoint, Maximum Principle, Metallic Plate, Optimal Control, Vibration

## TEŐEKKÖR

Öncelikle sadece yüksek lisans boyunca değil hayatımda verdiğim her kararım ve her sürecim de yanımda olan, koŐulsuz beni destekleyen ve cesaretlendiren canım eŐim Fatma BATIK ŞİMŞEK' e teŐekkÖr ederim. Hayatım boyunca yanımda olan, benim iÇin Őabalayan ve varlığını hep hissettiğim Annem'e teŐekkÖr ederim. Yüksek lisans sürecini en iyi Şekilde değerlendirmemde yardımcı olan, tez ŐalıŐması boyunca yardımını esirgemeyen DoÇ. Dr. Kenan YILDIRIM' a teŐekkÖr ederim.

Mehmet ŞİMŞEK  
MUŞ-2022



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM .....	5
4. DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	18
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR .....	31
EKLER .....	33

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4. 1. Yer değiştirme .....	24
Şekil 4. 2. Hız .....	24
Şekil 4. 3. Yer değiştirme .....	25
Şekil 4. 4. Hız .....	25
Şekil 4. 5. Yer Değiştirme .....	26
Şekil 4. 6. Hız .....	26
Şekil 4. 7. Yer değiştirme .....	27
Şekil 4. 8. Hız .....	27
Şekil 4. 9. Yer değiştirme .....	28
Şekil 4. 10. Hız .....	28
Şekil 4. 11. Yer değiştirme .....	29
Şekil 4. 12. Hız .....	29



## 1. GİRİŞ

J. Bernoulli 17. yüzyılda çağdaşlarına şöyle bir soru sordu. Dik bir düzlemde alt alta olmayan iki nokta düşünülürse, bu iki nokta arasına istenilen uzunlukta ve şekilde telden bir yol yapılır. Ortası delik bir boncuğun içinden bu tel geçirilir ve sadece yer çekiminin etkisinde boncuk serbest olarak bırakılırsa, boncuk tel üzerinde yukarıdaki noktadan aşağıdaki noktaya en kısa sürede hangi yol üzerinden gider (Boyer ve Merzbach, 1991)?

Bernoulli'nin yukarıdaki sorusu ile ortaya çıkan bu ilginç probleme kadar matematiğin geldiği aşama kısaca şöyle özetlenebilir; temel ticari matematiksel işlemler ve bazı problemlerin değişken kullanılarak çözülmesi, yüksek dereceden denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerinin bulunması, çevre, alan hesabı (geometri), katı cisimlerin hacimlerinin bulunması, türev ve türev yardımıyla tek ya da çok değişkenli fonksiyonların ekstremum nokta hesabı, integral ve belirli integralin bazı temel uygulamaları (alan, hacim, eğri uzunluğu) vb. yapılarıdır. Bernoulli esasında bu soru ile boncuğun iki nokta arasındaki mesafeyi en kısa sürede nasıl bir yol/yörünge üzerinden alması gerektiğini soruyordu. Bu soruya kadar, matematik bir fonksiyonun max/min değerine ulaştığı noktayı belirleme problemlerini ya da ekstremum problemleri olarak tarif edilen problemleri, türevin bir uygulaması olarak ya da türev ile birlikte Lagrange çarpanı kullanarak çözüyordu. Fakat bu soru ile ortaya, aslında kimsenin beklemediği ilginç bir problem çıktı. Bu problemde, fonksiyonların fonksiyonu olan yani tanım kümesi fonksiyonlardan, değer kümesi sayılardan oluşan fonksiyonelleri maksimum/minimum yapan fonksiyonların ne olması gerektiği sorusu vardı ve böylece yeni bir problem türü ortaya çıkmıştı. Peki, bu soruya nasıl gelindi?

Probleme geri dönülürse ve soru daha açık ifade edilirse, sürtünmesiz ortamda,  $B$  noktasındaki bir cisim yerçekimi kuvvetinin etkisiyle  $A$  noktasına ulaşacaktır. Cismin,  $B$  noktasından  $A$  noktasına ulaşma süresinin en küçük olması için, cismin gideceği/izlemesi gereken yol nasıl olmalıdır?

“Hesabı kolaylaştırmak için çözüm pozitif ekseninde yapılacaktır.  $B(b, d)$  noktasından  $A(0,0)$  noktasına gidileceğini varsayalım. Bu sistemde yerçekimi vektörü  $g = 0,98$  olarak tanımlanabilmektedir.  $x$ , cismin yataydaki konumu olmak üzere,  $y = u(x)$  fonksiyonu cismin dikey konumunu belirlesin. ( $0 < x < b \rightarrow 0 < y < d$ ).

Yapılacak hesaplama aslında oldukça basit olmakla birlikte, cismin takip edeceği  $S$  yolu  $dS$ 'lik küçük parçalara ayrılır ve her birinde harcanan zaman bulunup toplanır. Bilindiği üzere  $dS$  parçasının uzunluğunu, o parçadaki hıza bölünürse, o parçayı geçmek için harcanan zaman bulunur. Bu durumda toplam süre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\int_A^B \frac{dS}{V}$$

Öncelikle hızı nasıl hesaplayacağımızı hatırlayalım;

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gu}$$

Yer değiştirmeyi de eğri uzunluğu formülü yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz;

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (u')^2}$$

Bunlardan yararlanarak, aşağıdaki fonksiyonel elde edilir. “

$$\tau[u] = \int_0^b \sqrt{\frac{1+(u')^2}{2gu}} dx$$

$$u(0) = 0, u(b) = d$$

Aranan fonksiyon,  $\tau[u]$  fonksiyoneli minimize edecek olan  $u$  fonksiyonudur. Bu problem ile Bernoulli ve çağdaşları, fonksiyonelleri maksimum/minimum yapan fonksiyonları bulma problemi ile karşılaştı ve böylelikle optimal kontrol teorisinin temelleri atılmış oldu. Sanayi devriminden sonra, eşitlik veya eşitsizlik şeklinde çeşitli şartlara ve kısıtlara bağlı, maksimize/minimize edilecek olan fonksiyonellerinde yer aldığı integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözümüne ihtiyaç duyulan problemler ortaya çıktı. Böylelikle asıl manada optimal kontrol teorisi şekillendi.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Maksimum prensip ilkesi, ilk olarak 1962’de Pontragin ve arkadaşları (1962) tarafından adi diferansiyel denklem ile modellenen bir roket problemi için sistemin optimal kontrol fonksiyonunun sağlanması gereken gerekli koşul olarak elde edildi. Pontragin’in maksimum prensip ilkesi, esasında bir optimal kontrol problemini bir denklem sistemini çözme problemine dönüştüren oldukça zarif bir yöntemdir. Maksimum prensip yönteminin kullanımı için öncelikle optimal olarak kontrol edilmek istenen sistemin matematiksel modelinin eşlenik denklemi uygun sınır ve terminal koşulları ile elde edilir ve bu eşlenik denklemin çözümü üzerinden asıl sistem ve sistemin performans indeks fonksiyoneli arasında bir ilişki elde edilir. Böylelikle, optimal kontrol fonksiyonu sistemin eşlenik denkleminin çözümünün bir fonksiyonu olarak elde edilir. Optimal kontrol fonksiyonu elde edildikten sonra probleme genel olarak bakıldığında, asıl kontrol probleminin denklem sistemi çözme problemine indirgendiği görülür. Literatürde maksimum prensip yöntemi ile ilişkili çalışmalar genel olarak aşağıdaki şekilde özetlenebilir;

Egorov (1967) yaptığı çalışmada, Maksimum prensip yönteminin kısmi diferansiyel denklem ile modellenen optimal kontrol problemleri için de optimal kontrol probleminin sağlanması gereken gerekli koşul olduğunu gösterdi.

Kontrol fonksiyonu için tanımlanan koşullar üzerine bazı konvekslik koşulları eklendiğinde maksimum prensibin optimal kontrol fonksiyonu için gerekli koşul olmanın yanı sıra yeterli koşul olduğu gösterildi (Lee, 1963; Barnes, 1971).

Maksimum prensip yöntemi Euler-Bernoulli tipindeki mekaniksel sistemler için titreşim kontrolü problemlerine uygulandı (Russell, 1966; Komkov, 1968).

Maksimum prensip yöntemi hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin en genel hali için gerekli ve yeterli koşul olarak tanımlandı (Sloss ve ark., 1995).

Maksimum prensip, birden fazla kontrol fonksiyonu içeren hiperbolik tipteki bir kısmi diferansiyel denklem için gerekli ve yeterli koşul olduğu teorik olarak gösterildi (Kucuk ve Yildirim, 2014).

Maksimum prensip, optimal kontrol fonksiyonunda gecikme argümanı içeren bir sistem için gerekli ve yeterli koşul olarak kullanıldı (Yildirim ve Alkan, 2016).

Maksimum prensip harici bir kuvvet etkisi altında titreşime zorlanan bir metal plaka ve teldeki titreşimin optimal olarak sönümlenmesi için kullanıldı (Kucuk ve ark., 2013; Kucuk ve ark., 2015).

Maksimum prensip parabolik ve eliptik bir kontrol problemi için gerekli ve yeterli koşul olarak sunuldu (Mincsovcics, 2010).

Maksimum prensip akıllı malzeme ile güçlendirilmiş, harici bir kuvvet etkisi altında titreşime maruz kalan bir plakadaki titreşimlerin optimal olarak sönümlenmesi için kullanıldı (Yıldırım, 2016).

Maksimum prensip yöntemi, Timoshenko kiriş modeline göre modellenen bir titreşim probleminde optimal kontrol probleminin sağlanması gerekli gerek ve yeter koşul olarak elde edildi (Yıldırım, 2022).

Maksimum prensipin, bazı ek koşullar altında, lineer olmayan titreşim problemleri içinde gerek ve yeter koşul olduğu gösterildi ve sisteme ait optimal kontrol fonksiyonu lineerleştirme yapılmadan elde edildi (Yıldırım ve Küçük, 2017).

Maksimum prensip, ısısal etkilerden dolayı titreşime sahip olan magneto-elektro-elastik bir teldeki titreşimlerin minimum enerji kullanılarak sönümlenmesi için kullanıldı (Yıldırım, 2021).

Maksimum prensip yöntemi, lineer olmayan bir kısmi denklem ile modellenen bir kanal probleminde, kanaldaki dalgaların zararlı etkilerinin minimum olması için kanal derinliğini belirleme probleminde kullanıldı (Yıldırım, 2020).

Optimal kontrol fonksiyonunun sağlanması gerekli şart Dubovitski-Milyutin yaklaşımı kullanılarak maksimum prensip formunda türetildi (Sun, 2010).

Optimal kontrol fonksiyonunun sağlanması gerekli olan koşul, kontrol fonksiyonu üzerinde sınırlılık veya kapalılık şartı olmadan maksimum prensip ilkesine benzer olarak ifade edildi (Clarke, 1976).

Optimal kontrol fonksiyonunun sağlanması gerekli olan koşul, kontrol fonksiyonu üzerinde diferansiyellenebilme şartı olmadan maksimum prensip formunda türetildi (Clarke, 1975).

Bu tezde literatürde ele alınan ve maksimum prensibin kullanıldığı çalışmalardan farklı olarak, akışkan zemin ile temas ettirilmiş, magneto-elektro-elastik yapıdaki bir plakadaki titreşimlerin optimal olarak sönümlenmesi için maksimum prensip yöntemiyle kontrol fonksiyonunun ne olması gerektiği araştırılmış olup, elde edilen sonuçlar grafiklerle sunulmuştur.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Akışkan ile temas ettirilmiş, harici bir kuvvet etkisine maruz kalan, dikdörtgensel, magneto-elektro-elastik elastik yapıya sahip metal özellikli bir plakadaki titreşimin matematiksel modeli aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir (Chang, 2013);

$$(D + E + M)\nabla^4 \bar{W} + (C_s + C_f)\bar{W}_t + (\rho_{ph} + M_f)\bar{W}_{tt} = \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + \bar{C}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \quad (3.1)$$

Denklem (3.1)'de,  $\bar{W}$ ; plaka üzerindeki bir noktanın zamana bağlı olarak yer değiştirmesini gösteren fonksiyon,  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ ; dışarıdan plakaya etki eden ve titreşime sebep olan kuvvet fonksiyonu,  $\bar{C}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{C}_0(\bar{x}, \bar{y})C(\bar{t})$  sistemdeki titreşimi sönmölemek için uygulanan kontrol fonksiyonu,  $\bar{C}_0(\bar{x}, \bar{y})$  kontrol fonksiyonunun koordinata göre ne şekilde uygulandığını gösteren fonksiyon,  $C(\bar{t})$  zamana bağlı olarak uygulanan kontrol miktarını göstermektedir.  $\Omega = (0, l) \times (0, l) \times (0, \bar{t}_f)$ ,  $(x, y) \in (0, l) \times (0, l)$ ,  $l$  plakanın boyunu,  $\bar{t} \in (0, \bar{t}_f)$  zaman değişkeni olmak üzere,  $\bar{t}_f$  önceden belirlenmiş kontrol süresini,  $D, E, M$  metal özellikli plakanın karakteristik özelliklerini gösteren katsayılar,  $\rho_{ph}$  plakanın kütlesi,  $M_f$  plaka ve akışkanın toplam kütlesi,  $C_s$  plaka ile ıslak zemin arasındaki sürtünme kuvvetini,  $C_f$  plakanın kendi iç sönmöleme etkisini göstermektedir.

Denklem (3.1), aşağıda verilen homojen sınır koşullarına,

$$\bar{W}(0, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{W}(1, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}}(0, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}}(1, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{W}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{W}(\bar{x}, 1, \bar{t}) = \bar{W}_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{W}_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, 1, \bar{t}) = 0 \quad (3.3)$$

ve aşağıda tarif edilen başlangıç koşullarına bağlıdır.

$$\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \bar{W}_0(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{W}_t(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}). \quad (3.4)$$

$\bar{W}_0, \bar{W}_1$  fonksiyoları  $\Omega$  kümesi üzerinde sınırlı ve sürekli fonksiyonlar olarak seçilsin.

Bu tez boyunca aşağıdaki norm ve iç çarpım kullanılacaktır;

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle_{\Omega} \quad , \quad \langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega} = \int \alpha \beta d\Omega .$$

Tezin ileri ki kısımlarında, özellikle bilgisayar yazılımı ile sonuçların elde edildiği bölümde, mühendislik açısından daha tutarlı sonuçlar elde etme açısından aşağıdaki şekilde boyutsuz değişken ve fonksiyonlar dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = \frac{\bar{y}}{l}, \quad t_f = \frac{\bar{t}_f}{l^2} \sqrt{\frac{D+E+M}{\rho_p h + M_f}}, \quad \xi = (C_s + C_f) \sqrt{\frac{D+E+M}{\rho_p h + M_f}}, \\ P(x, y, t) &= \frac{\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{D+E+M} l^4, \quad C(x, y, t) = \frac{\bar{C}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{D+E+M} l^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

hareketin denklemi aşağıdaki formda yazılır;

$$\nabla^4 W + \xi W_t + W_{tt} = P(x, y, t) + C(x, y, t) \quad (3.6)$$

Denklem (3.6) aşağıda verilen homojen sınır koşullarına,

$$W(0, y, t) = W(1, y, t) = W_{xx}(0, y, t) = W_{xx}(1, y, t) = 0 \quad (3.7)$$

$$W(x, 0, t) = W(x, 1, t) = W_{yy}(x, 0, t) = W_{yy}(x, 1, t) = 0 \quad (3.8)$$

ve aşağıda tarif edilen başlangıç koşullarına bağlıdır.

$$W(x, y, 0) = W_0(x, y) \quad W_t(x, y, 0) = W_1(x, y) \quad (3.9)$$

Kontrol süresinin sonunda (3.6) denkleminde (3.9) denklemine kadar olan sistemine ait, minimum olarak elde edilmek istenen performans indeks fonksiyonu ya da sistemin amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilmiştir;

$$J(W) = \int_0^1 \int_0^1 (\mu_1 W^2(x, y, t_f) + \mu_2 W_t^2(x, y, t_f)) dx dy + \mu_3 \int_0^{t_f} C^2(t) dt \quad (3.10)$$

denkleminin sol tarafında yer alan fonksiyonel sistemin modifiye edilmiş kinetik enerjisini tarif etmek amacıyla, plaka üzerinde yer alan bir noktanın yer değiştirmesinin karesinin ve hızının karesinin toplamı olarak seçilmiştir. (3.10) denkleminin sağ tarafında yer alan fonksiyonel ise kontrol süresince kullanılan kontrol miktarının toplamını ifade etmektedir. (3.6) denkleminde (3.10) denklemine kadar ki denklemleri içeren denklem sistemi bir bütün olarak ele alındığında elde edilmek istenen amaç, sistemin performans indeks fonksiyonunu kontrol süresi sonunda minimum yapan  $C^0(x, y, t)$  kontrol fonksiyonunu elde ederek, sistemin (3.6) ve (3.9) denklemlerini sağlayan optimal çözüm fonksiyonu olan  $W^0$ 'yi bulmaktır. Optimal kontrol fonksiyonunu ve optimal yer değiştirme fonksiyonunu bulma işlemine geçilmeden önce, sistemin çözümünün varlığının, tekliliğinin, sistemin kontrol edilebilirliğinin ve tek olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada (3.6) denkleminde (3.10) denklemine kadar ki denklem sisteminin kontrol edilebilir olduğu varsayılmış olup, (3.10) denklemi ile verilen sisteme ait performans indeks fonksiyonunun konveks olduğu göz önüne alınırsa, sisteme ait optimal kontrol fonksiyonunun varlığının tekliliği elde edilmiş olur. Diğer hususlar tezin ileri ki kısımlarında ele alınacaktır.

Maksimum prensip yöntemi ile (3.6) ve (3.10) denklem sistemine ait optimal kontrol fonksiyonu olan  $C^0(t)$ 'yi elde etmek için (3.6) ve (3.9) ile tanımlanan denklem sisteminin eşlenik denklem sistemi tanımlanmalıdır.  $V(x, y, t)$ ; eşlenik denklem sisteminin çözümü olmak üzere, (3.6) ile tanımlanan denklem sisteminin eşlenik denklem sistemi;

$$\nabla^4 V - \xi V_t + V_{tt} = 0 \quad (3.11)$$

ile ifade edilmektedir. (3.11) denklemi,

$$V(0, y, t) = V(1, y, t) = V_{xx}(0, y, t) = V_{xx}(1, y, t) = 0 \quad (3.12)$$

$$V(x, 0, t) = V(x, 1, t) = V_{yy}(x, 0, t) = V_{yy}(x, 1, t) = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanan sınır koşullarına ve

$$2\mu_1 W(x, y, t_f) = \xi V(x, y, t_f) - V_t(x, y, t_f) \quad (3.14)$$

$$2\mu_2 W_t(x, y, t_f) = V(x, y, t_f) \quad (3.15)$$

olarak tanımlanan terminal koşullara bağlıdır.

**Teorem 3.1.** Maksimum Prensip:

$$\mathcal{H}(C^o, t; W^o) = -C^o(t)G(t) - \mu_3 C^{o2}(t), \quad G(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(x, y) V(x, y, t) dx dy \quad (3.16)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{H}(W^o, C^o, t) = \max \mathcal{H}(W, C, t) \quad (3.17)$$

ise

$$\min J(x, y, C; W) = J(x, y, C^o; W^o). \quad (3.18)$$

**İspat:**

(3.6) ile gösterilen sistemin hareket denklemi için ve sistemin (3.11) ile tarif edilen eşlenik denklemi için aşağıdaki şekilde iki operatör tanımlansın.

$$\gamma(W) = \nabla^4 W + \xi W_t + W_{tt} \quad (3.19)$$

$$\gamma^*(V) = \nabla^4 V - \xi V_t + V_{tt} \quad (3.20)$$

$W$  yer değiştirme fonksiyonunu,  $W^o$  optimal yer değiştirme fonksiyonunu,  $C$  kontrol fonksiyonunu,  $C^o$  optimal kontrol fonksiyonunu göstermek üzere, fark operatörleri; yer değiştirme, hız ve kontrol fonksiyonları için

$$\Delta W = W - W^o, \quad (3.21)$$

$$\Delta W_t = W_t - W_t^o, \quad (3.22)$$

$$\Delta C(x, y, t) = C(x, y, t) - C^o(x, y, t) \quad (3.23)$$

olarak tanımlansın.

$$\gamma(\Delta W) = \nabla^4 \Delta W + \xi \Delta W_t + \Delta W_{tt} = \Delta C(x, y, t) \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir ve (3.24) denklemi aşağıda verilen homojen sınır koşullarına;

$$\Delta W(0, y, t) = \Delta W(1, y, t) = \Delta W_{xx}(0, y, t) = \Delta W_{xx}(1, y, t) = 0 \quad (3.25)$$

$$\Delta W(x, 0, t) = \Delta W(x, 1, t) = \Delta W_{yy}(x, 0, t) = \Delta W_{yy}(x, 1, t) = 0 \quad (3.26)$$

ve homojen başlangıç koşullarına

$$\Delta W(x, y, 0) = 0, \quad \Delta W_t(x, y, 0) = 0 \quad (3.27)$$

bağlıdır. Aşağıdaki eşitlik dikkate alınır;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 [V\gamma(\Delta W) - \Delta W\gamma^*(V)] d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V\Delta C(x, y, t) d\theta \quad (3.28)$$

ve eşitlik aşağıdaki şekilde düzenlenirse

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 [V\nabla^4\Delta W + V\xi\Delta W_t + V\Delta W_{tt} - \Delta W\nabla^4V + \Delta W\xi V_t - \Delta W V_{tt}] d\theta = \\ \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V\Delta C(x, y, t) d\theta \end{aligned} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. (3.29) denklemini terimlerin türev mertebesine göre aşağıdaki gibi ortak parantezde yazılsın;

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V\nabla^4\Delta W - \Delta W\nabla^4V)}_1 + \underbrace{(V\xi\Delta W_t + \Delta W\xi V_t)}_2 + \underbrace{(V\Delta W_{tt} - \Delta W V_{tt})}_3 \right] d\theta = \\ \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V\Delta C(x, y, t) d\theta \end{aligned} \quad (3.30)$$

Denklem (3.30) ile tanımlanan eşitliği kısım kısım aşağıdaki gibi inceleyelim. Denklem (3.30)'da yer alan 1 numaralı parçayı göz önüne alalım;

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 [V(\nabla^4\Delta W) - \Delta W(\nabla^4V)] d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 [V(\Delta W_{xxxx} + 2\Delta W_{xxyy} + \\ \Delta W_{yyyy}) - \Delta W(V_{xxxx} + 2V_{xxyy} + V_{yyyy})] d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V\Delta W_{xxxx} - \Delta W V_{xxxx})}_{1a} + \right. \\ \left. \underbrace{(V2\Delta W_{xxyy} - \Delta W 2V_{xxyy})}_{1b} + \underbrace{(V\Delta W_{yyyy} - \Delta W V_{yyyy})}_{1c} \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$1a = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V\Delta W_{xxxx} - \Delta W V_{xxxx}) d\theta \quad (3.32)$$

eşitliği kısmi integrasyon yöntemi ile (0,1) aralığında integre edilirse ve (3.12) ve (3.25) ile verilen sınır koşulları dikkate alınır, aşağıdaki sonuç gözlemlenir;

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{xxxx} d\theta &= \int_0^{t_f} \int_0^1 [V(1, y, t) \Delta W_{xxx}(1, y, t) - V(0, y, t) \Delta W_{xxx}(0, y, t) - \\ V_x(1, y, t) \Delta W_{xx}(1, y, t) + V_x(0, y, t) \Delta W_{xx}(0, y, t) - V_{xxx}(1, y, t) \Delta W(1, y, t) + \\ V_{xxx}(0, y, t) \Delta W(0, y, t)] dy dt + \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{xxxx} \Delta W d\theta \end{aligned} \quad (3.33)$$

Buradan

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{xxxx} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \Delta W V_{xxxx} d\theta \quad (3.34)$$

ve böylelikle

$$1a = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_{xxxx} - \Delta W V_{xxxx}) d\theta = 0 \quad (3.35)$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. Şimdi

$$1b = 2 \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_{xxyy} - \Delta W V_{xxyy}) d\theta \quad (3.36)$$

Eşitliğini göz önüne alalım. (3.36) denklemini ile verilen integral (0,1), (0,1) aralığında sırasıyla  $x, y$  değişkenleri için integre edilir ve (3.12)-(3.13) ve (3.25) ile tanımlanan homojen sınır koşulları kullanılırsa,

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{xxyy} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 (V \Delta W_{xxyy} - V_y W_{xx}) dx dt + \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yy} \Delta W_{xx} d\theta \quad (3.37)$$

yani

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{xxyy} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yy} \Delta W_{xx} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 (V_{yy} \Delta W_x - V_{yyx} \Delta W) dy dt + \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yyxx} \Delta W d\theta \quad (3.38)$$

ve buradan

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yy} \Delta W_{xx} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yyxx} \Delta W d\theta \quad (3.39)$$

elde edilir ve (3.38) ve (3.39) denklemlerinden

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{xxyy} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yy} \Delta W_{xx} d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{yyxx} \Delta W d\theta \quad (3.40)$$

elde edilir. Böylelikle

$$1b = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_{xxyy} - \Delta W V_{xxyy}) d\theta = 0 \quad (3.41)$$

olduğu sonucu çıkarılır.

$$1c = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_{yyyy} - \Delta W V_{yyyy}) d\theta \quad (3.42)$$

eşitliğide (3.32) denklemin çözüm gibi kolaylıkla gösterilir.

$$1c = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_{yyyy} - \Delta W V_{yyyy}) d\theta = 0 \quad (3.43)$$

Böylelikle (3.30) denkleminin 1 nolu kısmı;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V \nabla^4 \Delta W - \Delta W \nabla^4 V)}_1 \right] d\theta = 0 \quad (3.44)$$

elde edilir. Şimdi (3.30) denkleminde ki 2 ile belirtilen parçayı göz önüne alalım;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V \xi \Delta W_t + \Delta W \xi V_t)}_2 \right] d\theta = \xi \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_t + \Delta W V_t) d\theta \quad (3.45)$$

eşitliğine  $(0, t_f)$  aralığında kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.27) ile gösterilen başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \xi \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_t d\theta &= \xi \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W - \int_0^{t_f} V_t \Delta W d_t) dx dy = \\ \xi \left[ \int_0^1 \int_0^1 (V(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f) - V(x, y, 0) \Delta W(x, y, 0)) dx dy \right] - \\ \xi \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_t \Delta W d\theta \end{aligned} \quad (3.46)$$

eşitliği elde edilir ve buradan denklem (3.45) aşağıdaki şekilde gözlemlenir;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V \xi \Delta W_t + \Delta W \xi V_t)}_2 \right] d\theta = \xi \int_0^1 \int_0^1 V(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f) dx dy \quad (3.47)$$

Şimdi (3.30) denkleminde 3 ile belirtilen parçayı göz önüne alalım;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V \Delta W_{tt} - \Delta W V_{tt})}_3 \right] d\theta = \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 [V \Delta W_{tt} - \Delta W V_{tt}] d\theta \quad (3.48)$$

(3.48) denkleminde,  $(0, t_f)$  aralığında aşağıdaki gibi kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.27) ile temsil edilen başlangıç koşulları dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{tt} d\theta &= \int_0^1 \int_0^1 (V \Delta W_t - V_t \Delta W) dx dy + \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{tt} \Delta W d\theta = \\
\int_0^1 \int_0^1 (V(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f) - V(x, y, 0) \Delta W_t(x, y, 0) - V_t(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f) + \\
V_t(x, y, 0) \Delta W(x, y, 0)) dx dy &+ \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{tt} \Delta W d\theta \quad (3.49)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\left[ \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta W_{tt} d\theta - \int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V_{tt} \Delta W d\theta \right] &= \int_0^1 \int_0^1 (V(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f) - \\
V_t(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f)) dx dy &\quad (3.50)
\end{aligned}$$

ve böylelikle

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{(V \Delta W_{tt} - \Delta W V_{tt})}{3} \right] d\theta &= \int_0^1 \int_0^1 (V(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f) - \\
V_t(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f)) dx dy &\quad (3.51)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle, (3.30) ile gösterilen aşağıdaki eşitlikte

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \underbrace{(V \nabla^4 \Delta W - \Delta W \nabla^4 V)}_1 + \underbrace{(V \xi \Delta W_t + \Delta W \xi V_t)}_2 + \underbrace{(V \Delta W_{tt} - \Delta W V_{tt})}_3 \right] d\theta &= \\
\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta C(x, y, t) d\theta &
\end{aligned}$$

1, 2 ve 3. parçalar yerine yazılırsa ve düzenlenirse, aşağıdaki eşitlik gözlemlenir;

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 ([\xi V(x, y, t_f) - V_t(x, y, t_f)] \Delta W(x, y, t_f) + V(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f)) dx dy &= \\
\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta C(x, y, t) d\theta &\quad (3.52)
\end{aligned}$$

Şimdi (3.28) denklemin sağ tarafına bakalım;

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 \int_0^1 V \Delta C(x, y, t) d\theta = \int_0^{t_f} \Delta C(t) G(t) dt \quad (3.53)$$

Denkleminde  $G(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(x, y) V(x, y, t) dx dy$  olmak üzere denklem (3.54), aşağıdaki şekilde gözlemlenir;

$$\int_0^1 \int_0^1 ([\xi V(x, y, t_f) - V_t(x, y, t_f)] \Delta W(x, y, t_f) + V(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f)) dx dy = \int_0^{t_f} \Delta C(t) G(t) dt \quad (3.54)$$

(3.54) denkleminde (3.14) ve (3.15) ile verilen terminel koşullar yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\int_0^1 \int_0^1 [2\mu_1 W(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f) + 2\mu_2 W_t(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f)] dx dy = \int_0^{t_f} \Delta C(t) G(t) dt \quad (3.55)$$

Optimal olmayan yer değiştirme fonksiyonu  $W$  için performans indeks fonksiyonu denklem (3.10) ile aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$J(W) = \int_0^1 \int_0^1 (\mu_1 W^2(x, y, t_f) + \mu_2 W_t^2(x, y, t_f)) dx dy + \mu_3 \int_0^{t_f} C^2(t) dt$$

Optimal yer değiştirme fonksiyonu  $W^o$  için performans indeks fonksiyonu

$$J(W^o) = \int_0^1 \int_0^1 [\mu_1 W^{o2}(x, y, t_f) + \mu_2 W_t^{o2}(x, y, t_f)] dx dy + \mu_3 \int_0^{t_f} C^{o2}(t) dt \quad (3.56)$$

olmak üzere (3.10) denklemini ile (3.56) denklemlerin farkını bulalım.

$$J(W) - J(W^o) = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \mu_1 \left( W^2(x, y, t_f) - W^{o^2}(x, y, t_f) \right) + \mu_2 \left( W_t^2(x, y, t_f) - W_t^{o^2}(x, y, t_f) \right) \right] dx dy + \mu_3 \int_0^{t_f} (C^2(t) - C^{o^2}(t)) dt \geq 0 \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) denkleminde ilk satırdaki integral  $W^o$  civarında Taylor serisine açılırsa ve yüksek dereceli terimler ihmal edilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$J(W) - J(W^o) = \int_0^1 \int_0^1 [2\mu_1 W(x, y, t_f) \Delta W(x, y, t_f) + 2\mu_2 W_t(x, y, t_f) \Delta W_t(x, y, t_f)] dx dy + \int_0^{t_f} \mu_3 (C^2(t) - C^{o^2}(t)) dt \geq 0 \quad (3.58)$$

Burada, (3.52) denklemi ile (3.58) denklemi birlikte gözlemlenirse ve (3.58) deki eşitliğin sağ tarafındaki ilk kısma  $\int_0^{t_f} \Delta C(t) G(t) dt$  yazılırsa;

$$\int_0^{t_f} \Delta C(t) G(t) dt + \int_0^{t_f} \mu_3 (C^2(t) - C^{o^2}(t)) dt \geq 0 \quad (3.59)$$

elde edilir ve integral içindeki terimler açılırsa

$$C(t)G(t) - C^o(t)G(t) + \mu_3 C^2(t) - \mu_3 C^{o^2}(t) \geq 0 \quad (3.60)$$

ve buradan

$$C(t)G(t) + \mu_3 C^2(t) \geq C^o(t)G(t) + \mu_3 C^{o^2}(t) \quad (3.61)$$

olur.

Eşitsizlik (3.61)'de  $\mathcal{H} = -C^o(t)G(t) - \mu_3 C^{o^2}(t)$  hep maksimum olarak elde edilir ve Hamiltonian fonksiyonelinin kontrol fonksiyonu  $C(t)$ 'ye göre birinci

varyasyonu alınırsa, optimal kontrol fonksiyonu aşağıdaki gibi analitik olarak elde edilir;

$$-G(t) - 2\mu_3 C^o(t) = 0 \Rightarrow C^o(t) = \frac{-G(t)}{2\mu_3} \quad . \quad (3.62)$$



#### 4. DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Optimal kontrol fonksiyonunu maximum prensip yöntemiyle elde ettikten sonra, sistemde var olan denklemler sırasıyla tekrar hatırlanırsa; sisteme ait hareketin denklemi

$$\nabla^4 W + \xi W_t + W_{tt} = P(x, y, t) + \tilde{C}(x, y, t) \quad (4.1)$$

$$\tilde{C}(x, y, t) = C(t)C_o(x, y), C_o(t) = \frac{-G(t)}{2\mu_3} \quad (4.2)$$

$$G(t) = \int_0^1 \int_0^1 V(x, y, t) C_o(x, y) dx dy \quad (4.3)$$

olmak üzere ve (4.1) denkleminin bağlı olduğu sınır koşulları

$$W(0, y, t) = W(1, y, t) = W_{xx}(0, y, t) = W_{xx}(1, y, t) = 0 \quad (4.4)$$

$$W(x, 0, t) = W(x, 1, t) = W_{yy}(x, 0, t) = W_{yy}(x, 1, t) = 0 \quad (4.5)$$

ve (4.1) denkleminin bağlı olduğu başlangıç koşulları

$$W(x, y, 0) = W_0(x, y), W_t(x, y, 0) = W_1(x, y) \quad (4.6)$$

(4.1) denkleminin eşlenik denklemi

$$\nabla^4 V - \xi V_t + V_{tt} = 0 \quad (4.7)$$

olmak üzere ve (4.7) eşlenik denkleminin bağlı olduğu sınır koşulları

$$V(0, y, t) = V(1, y, t) = V_{xx}(0, y, t) = V_{xx}(1, y, t) = 0 \quad (4.8)$$

$$V(x, 0, t) = V(x, 1, t) = V_{yy}(x, 0, t) = V_{yy}(x, 1, t) = 0 \quad (4.9)$$

şeklindedir. (4.1) ve (4.9) arasında tanımlanan denklem sisteminin bağlı olduğu terminal koşullar ise aşağıdaki gibidir;

$$2\mu_1 W(x, y, t_f) = \xi V(x, y, t_f) - V_t(x, y, t_f) \quad (4.10)$$

$$2\mu_2 W_t(x, y, t_f) = V(x, y, t_f) \quad (4.11)$$

(4.1) ile (4.11) denklemleri ile tanımlı denklem sisteminin çözümü için öncelikle eşlenik denklemin çözümünü arayalım. (4.7) denkleminin çözümü olarak aradığımız çözüm

$$V(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\wp} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} Z_{nm}(t) \sqrt{2} \sin(n\pi x) \sqrt{2} \sin(m\pi y) \quad (4.12)$$

şeklinde olsun. Yeterli olması ve kolaylık açısından  $Z_{nm} = Z$ ,  $\wp = 1$ ,  $\mathcal{M} = 1$  olarak alalım. (4.12) ile temsil edilen çözüm (4.7) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (Z(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + 2Z(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + \\ & Z(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y)) - \xi Z'(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + \\ & Z''(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

denklemi elde edilir ve (4.13) denkleminin her iki tarafı sırasıyla  $\sqrt{2} \sin(\pi x)$  ve  $\sqrt{2} \sin(\pi y)$  ile iç çarpım yapıp, her iki tarafın  $x, y$  değişkenlerine göre  $(0,1), (0,1)$  aralığında integre edilirse,

$$Z(t)(\pi^4 + 2\pi^4 + \pi^4) - \xi Z'(t) + Z''(t) = 0 \quad (4.14)$$

şeklinde sabit katsayılı adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin karakteristik kökleri  $a \pm ib$  şeklinde kompleks olur. Dolayısıyla, (4.14) denkleminin çözümü,

$$Z(t) = e^{at} [M \cos(bt) + N \sin(bt)] \quad (4.15)$$

şeklinde olur. Burada  $M$  ve  $N$  şuan için bilinmeyen, (4.10) ve (4.11) ile terminal koşullar olarak tanımlanan koşullar yardımıyla hesaplanacak olan katsayılardır. Şimdi denklem (4.1) in çözümünü

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} S_{nm}(t) \sqrt{2} \sin(n\pi x) \sqrt{2} \sin(m\pi y), \quad S_{nm} = S \quad (4.16)$$

olarak alalım.

$$\begin{aligned} & [S(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + 2S(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + \\ & S(t)\pi^4 \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y)] + \xi S'(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) + \\ & S''(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) = P(x, y, t) + C(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitliği elde edilir. (4.17) denkleminin her iki tarafı sırasıyla  $\sqrt{2} \sin(\pi x)$  ve  $\sqrt{2} \sin(\pi y)$  ile iç çarpım yapıp, her iki tarafın  $x, y$  değişkenlerine göre  $(0,1)$ ,  $(0,1)$  aralığında integre edilirse,

$$S(t)(\pi^4 + 2\pi^4 + \pi^4) + \xi S'(t) + S''(t) = P(t) + C(t)L \quad (4.18)$$

$$L = \int_0^1 \int_0^1 C_o(x, y) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) dx dy \quad (4.19)$$

$$P(t) = \int_0^1 \int_0^1 P(x, y, t) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) dx dy \quad (4.20)$$

şeklinde sabit katsayılı adi diferansiyel denklem elde edilir. (4.18) denkleminin karakteristik denkleminin kökleri  $c \pm id$  şeklindedir ve buradan (4.18) denkleminin homojen kısmının çözümü,  $A$  ve  $B$  katsayılar olmak üzere,

$$S(t) = e^{ct} [A \cos(dt) + B \sin(dt)] \quad (4.21)$$

şeklindedir. Şimdi sabitlerin değişimi metodu ile (4.21) denkleminin genel çözümünü arayalım.

$$S(t) = e^{ct}[A(t) \cos(dt) + B(t) \sin(dt)] \quad (4.22)$$

olsun.

$S'(t)$  ve  $S''(t)$  aşağıdaki şekilde elde edilirse,

$$\begin{aligned} S'(t) &= A(t)[ce^{ct} \cos(dt) - de^{ct} \sin(dt)] + B(t)[ce^{ct} \sin(dt) + de^{ct} \cos(dt)], \\ A'(t)e^{ct} \cos(dt) + B'(t)e^{ct} \sin(dt) &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} S''(t) &= A'(t)[ce^{ct} \cos(dt) - de^{ct} \sin(dt)] + A(t)[ce^{ct} \cos(dt) - de^{ct} \sin(dt)]' + \\ &B'(t)[ce^{ct} \sin(dt) + de^{ct} \cos(dt)] + B(t)[ce^{ct} \sin(dt) + de^{ct} \cos(dt)]' \end{aligned} \quad (4.24)$$

ve  $S(t)$ ,  $S'(t)$  ve  $S''(t)$  (4.18) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$A'(t)(-d)e^{ct} \sin(dt) + B'(t)de^{ct} \cos(dt) = K(t) \quad (4.25)$$

$$K(t) = P(t) + C(t)L \quad (4.26)$$

$$A'(t)e^{ct} \cos(dt) + B'(t)e^{ct} \sin(dt) = 0 \quad (4.27)$$

Denklemleri birlikte çözümlerse, (4.18) denkleminin çözümü;

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{ct}[\tilde{A} \cos(dt) + \tilde{B} \sin(dt)] + e^{ct} \cos(dt) \left[ \int_0^t \frac{-K(t) \cos(dt)}{de^{ct}} dt \right] + \\ &e^{ct} \sin(dt) \left[ \int_0^t \frac{K(t) \cos(dt)}{de^{ct}} dt \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak elde edilir.  $Z(t)$  ve  $S(t)$  fonksiyonlarında bulunan bilinmeyen katsayıların bulunması için sırasıyla denklem (4.6) ile tanımlanan başlangıç koşullarını adi diferansiyel denklem için uyarlayalım. Bu durumda, (4.18) denklemi için başlangıç koşulları;

$$S(0) = \int_0^1 \int_0^1 W_0(x, y) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) dx dy \quad (4.29)$$

$$S'(0) = \int_0^1 \int_0^1 W_1(x, y) \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y) dx dy \quad (4.30)$$

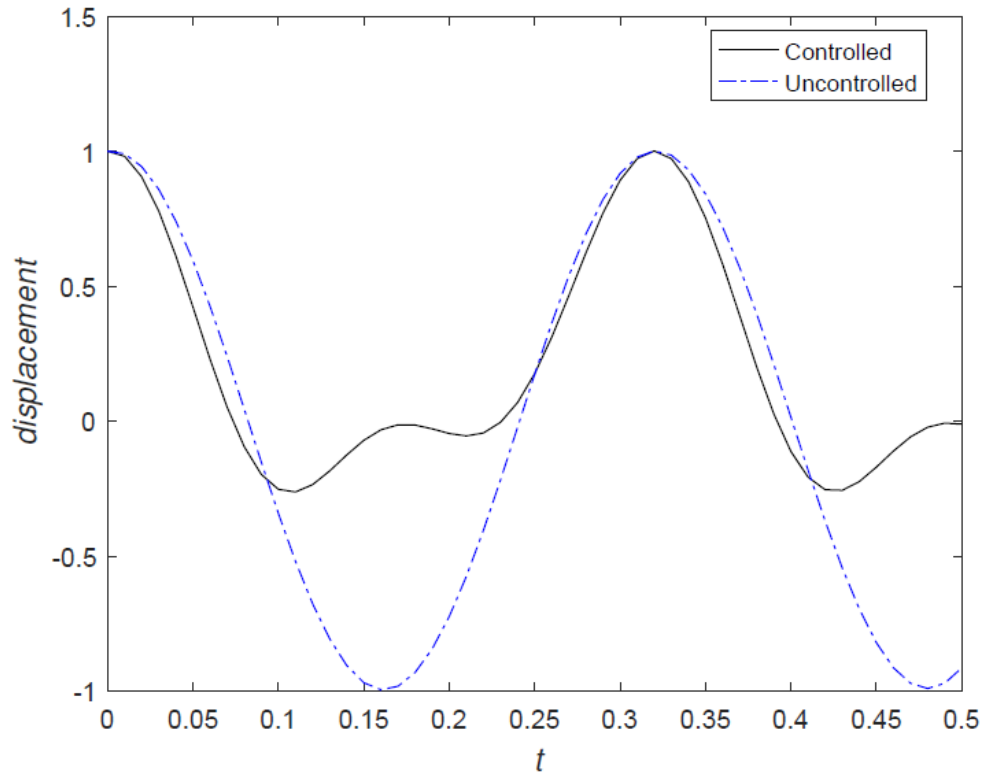
olarak elde edilir. Denklem (4.18), denklem (4.29) ve denklem (4.30) ile beraber değerlendirildiğinde, (4.18) ile gösterilen denklemin çözümü vardır ve bu çözüm tektir (Coddington,1984). Aynı teorem, denklem (4.14) ile aşağıdaki şekilde tanımlanan denklem (4.31) ve (4.32) beraber değerlendirildiğinde de geçerlidir. Denklem (4.10) ve (4.11) denklemleri ile tanımlanan terminal koşullar, adi diferansiyel denklem formuna uygun olarak elde edilirse;

$$2\mu_1 S(t_f) = \xi Z(t_f) - Z'(t_f) \quad (4.31)$$

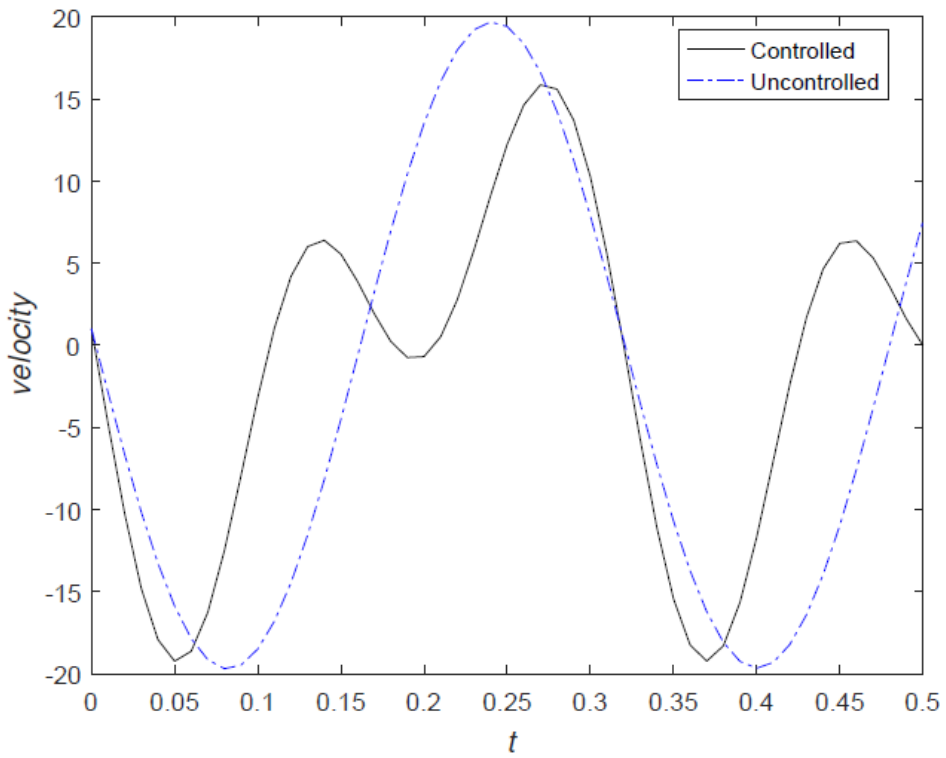
$$2\mu_2 S'(t_f) = Z(t_f) \quad (4.32)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1) denkleminde (4.32) denklemine kadar olan eşitlikler ve denklemler bir bütün olarak ele alınıp çözüldüğünde sistemin optimal çözümü elde edilmiş olur. (4.1) denkleminde (4.32) denklemine kadar ki denklemler ile sistemin optimal çözümü matematiksel yazılım marifetiyle elde edilmiş olup, sonuçlar grafiklerle sunulmuştur. Matematiksel yazılım ile sistemin optimal çözümü aranırken, elde edilen sonuçlar 4 farklı durum için incelenmiştir. İlk iki durumda sistemde sönümlenme etkisi sıfır olarak kabul edilmiş olup, ilk durumda kontrol süresi  $t_f = 0.5$ , dışarıdan yapılan harici kuvvet  $P(x, y, t) = P(t)\tilde{P}(x, y) = e^{2t}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , sisteme kontrolün uygulandığı durumlar için  $\mu_3 = 10^{-6}$ , kontrolün uygulanmadığı durumlar için  $\mu_3 = 10^6$  olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca başlangıç koşulları  $w_0(x, y) = w_1(x, y) = \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y)$  olarak hesaplamaya dahil edilmiş olup sonuçlar şekil 4.1 ve şekil 4.2 ile görselleştirilmiştir. İkinci durumda, yine sistemde sönümlenme

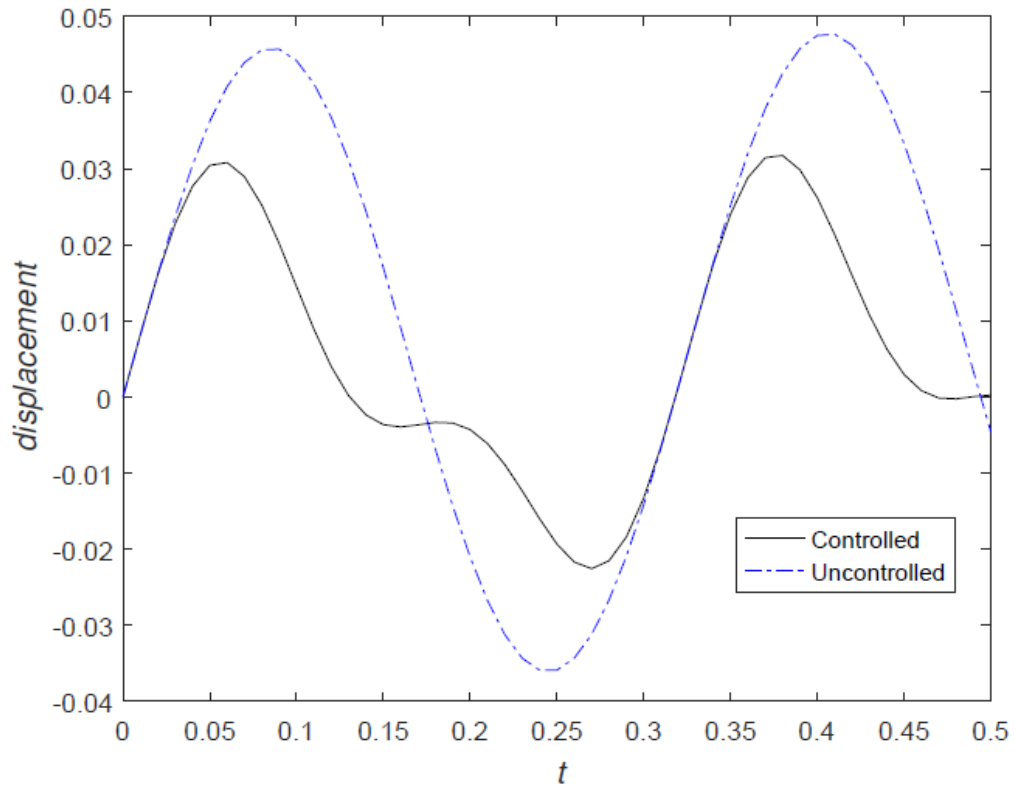
etkisi sıfır olarak kabul edilmiş olup, kontrol süresi  $t_f = 0.5$ , dışarıdan yapılan harici kuvvet  $P(x, y, t) = P(t)\tilde{P}(x, y) = 2e^t$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , sisteme kontrolün uygulandığı durumlar için  $\mu_3 = 10^{-6}$ , kontrolün uygulanmadığı durumlar için  $\mu_3 = 10^6$ ,  $w_0(x, y) = 0$ ,  $w_1(x, y) = x + y$  olarak hesaplamaya dahil edilmiş olup, sonuçlar şekil 4.3 ve şekil 4.4 ile sunulmuştur. Üçüncü ve dördüncü durumlarda, sistemdeki sönümleme etkisi  $\xi = 0.1$  olarak ele alınmış olup, kontrol süresi  $t_f = 0.1$ , sisteme kontrolün uygulandığı durumlar için  $\mu_3 = 10^{-5}$ , kontrolün uygulanmadığı durumlar için  $\mu_3 = 10^5$  olarak alınmıştır. Üçüncü durum için  $P(x, y, t) = P(t)\tilde{P}(x, y) = xye^t$ ,  $w_0(x, y) = w_1(x, y) = 0$ , olarak hesaba katılmış olup sonuçlar şekil 4.5 ve şekil 4.6 ile sunulmuştur. İçsel sönümlemenin etkisinin daha iyi gözlenmesi amacıyla  $t = 0.09 - 0.1$  arasındaki yerdeğişime ve hıza ait görseller daha detaylı olarak şekil 4.7 ve şekil 4.8 ile sunulmuştur. Dördüncü durum için  $P(x, y, t) = P(t)\tilde{P}(x, y) = 0$ ,  $w_0(x, y) = 0$ ,  $w_1(x, y) = \sqrt{2} \sin(\pi x) \sqrt{2} \sin(\pi y)$  olarak hesaba katılmış olup sonuçlar şekil 4.9 ve şekil 4.10 ile sunulmuştur. İçsel sönümlemenin etkisinin daha iyi gözlenmesi amacıyla dördüncü durum için  $t = 0.09 - 0.1$  arasındaki yerdeğişime ve hıza ait görseller daha detaylı olarak şekil 4.11 ve şekil 4.12 ile sunulmuştur.



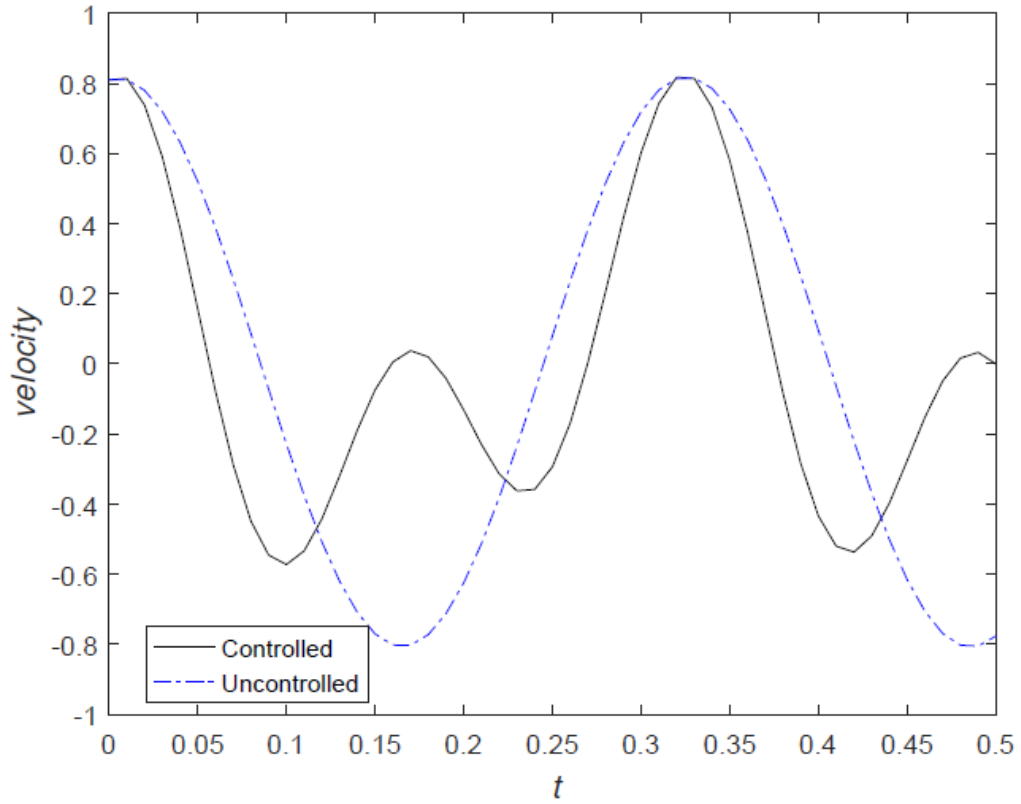
Şekil 4. 1. Yer değiştirme



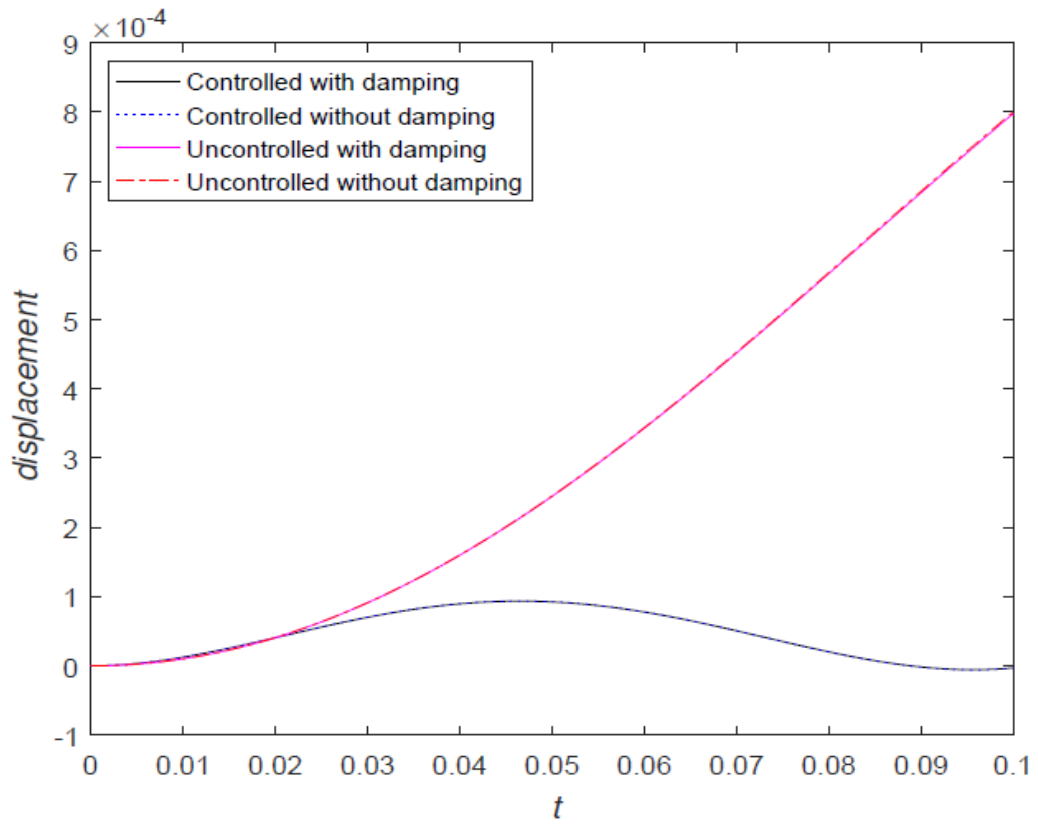
Şekil 4. 2. Hız



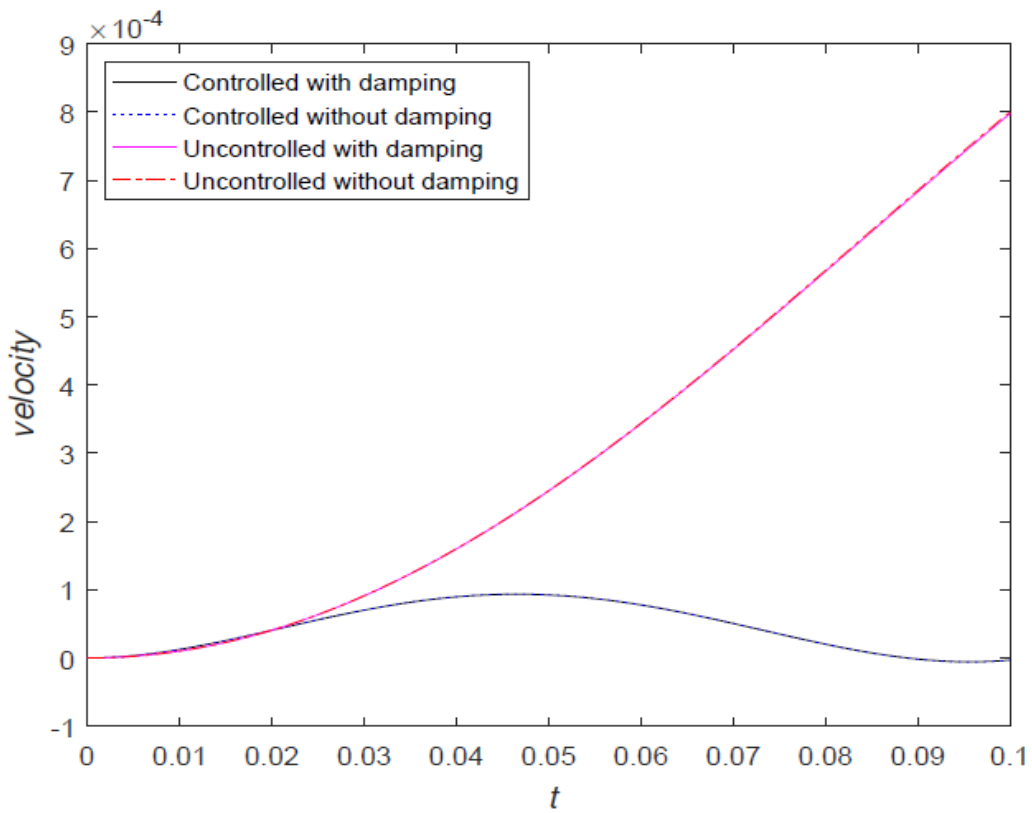
Şekil 4. 3. Yer değiştirme



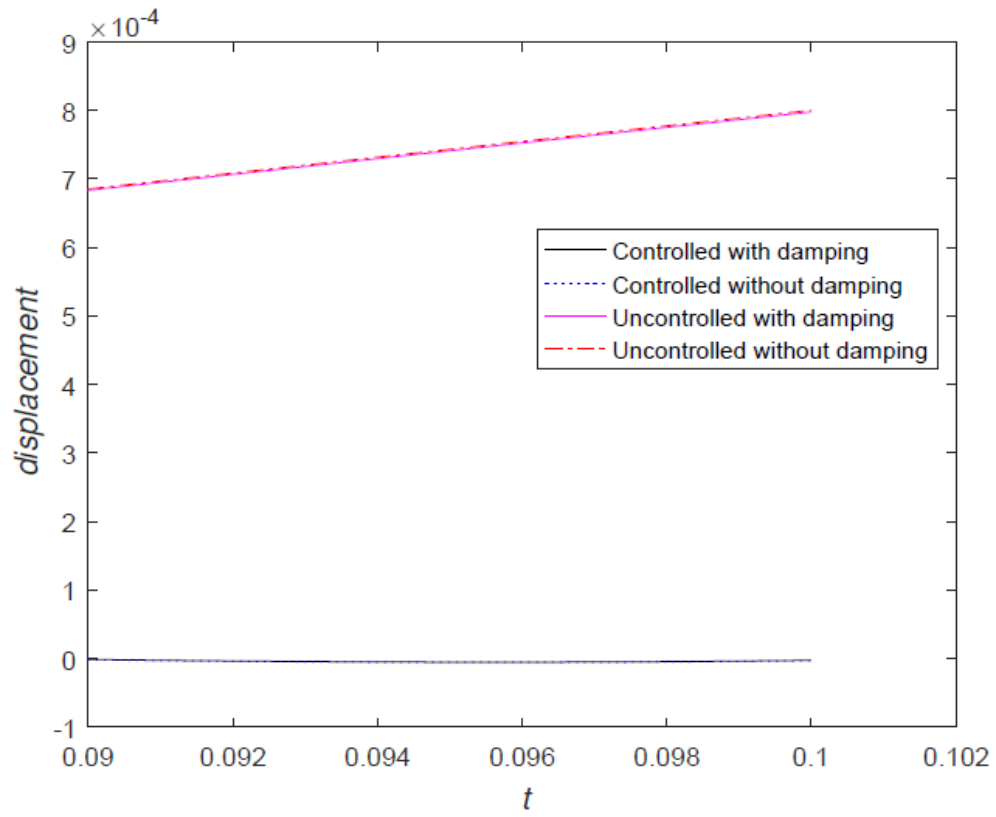
Şekil 4. 4. Hız



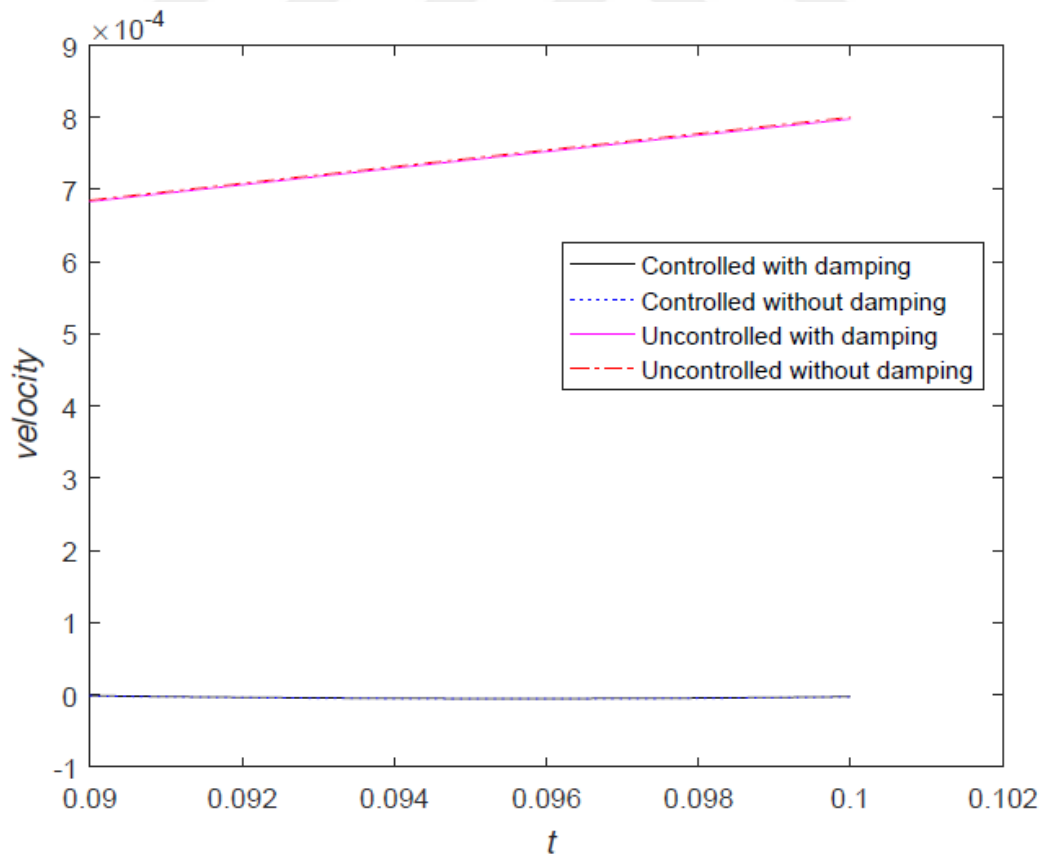
Şekil 4. 5. Yer Değiştirme



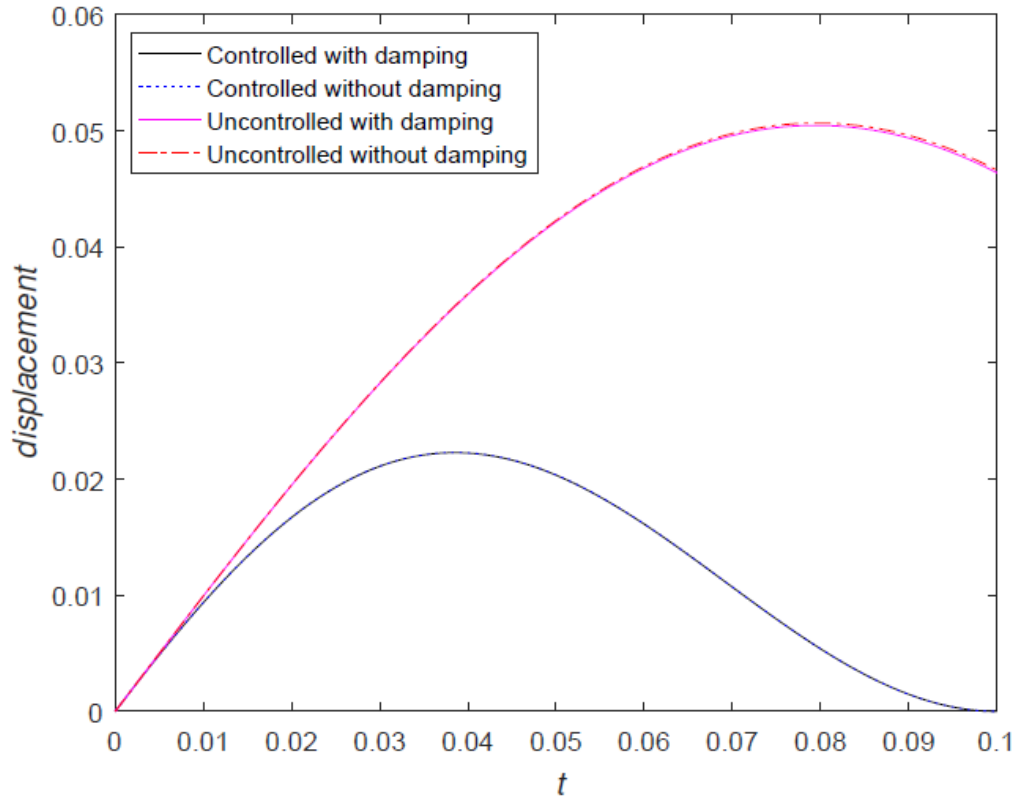
Şekil 4. 6. Hız



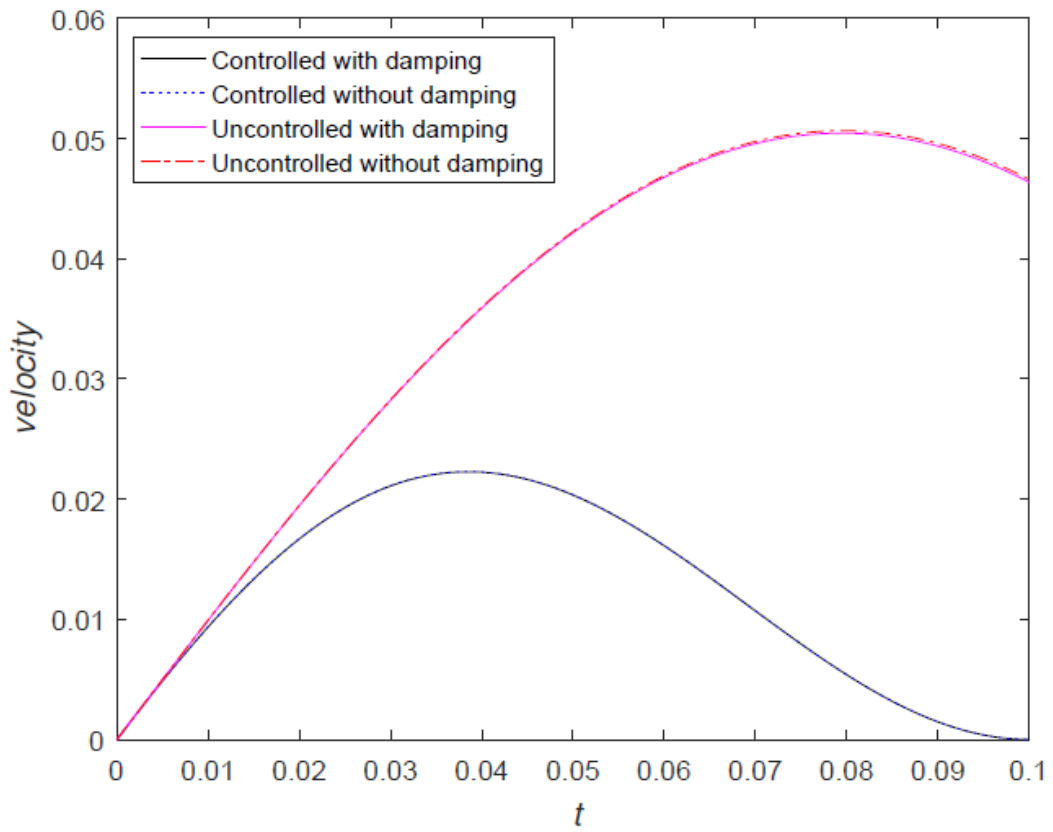
Şekil 4. 7. Yer değiştirme



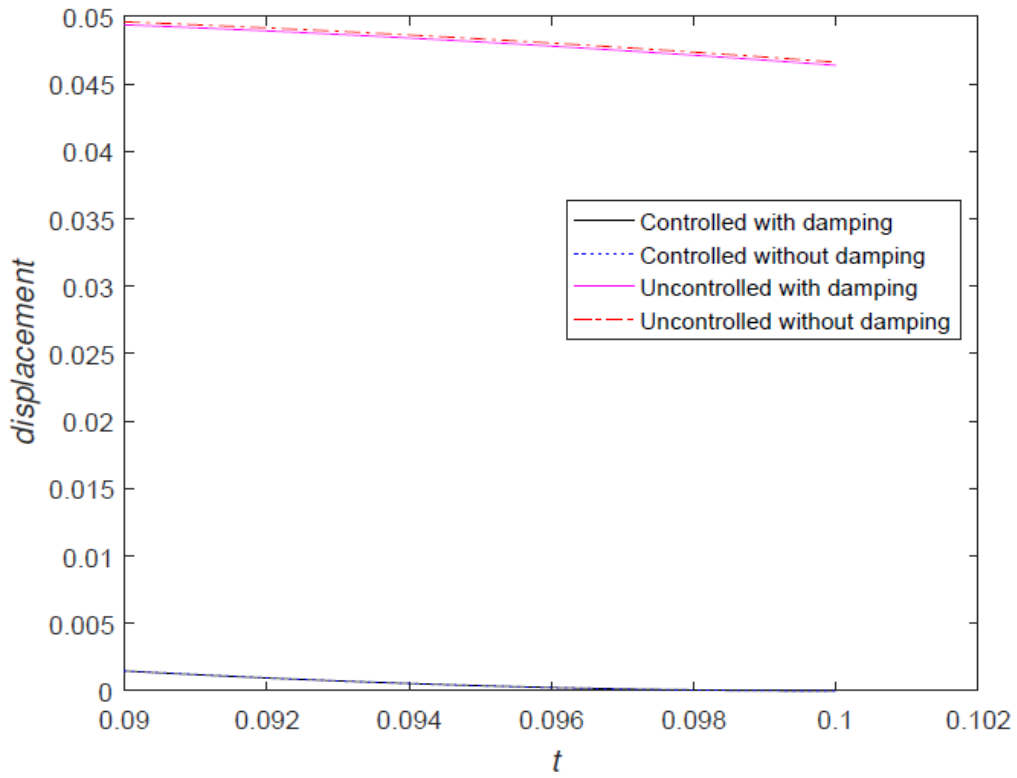
Şekil 4. 8. Hız



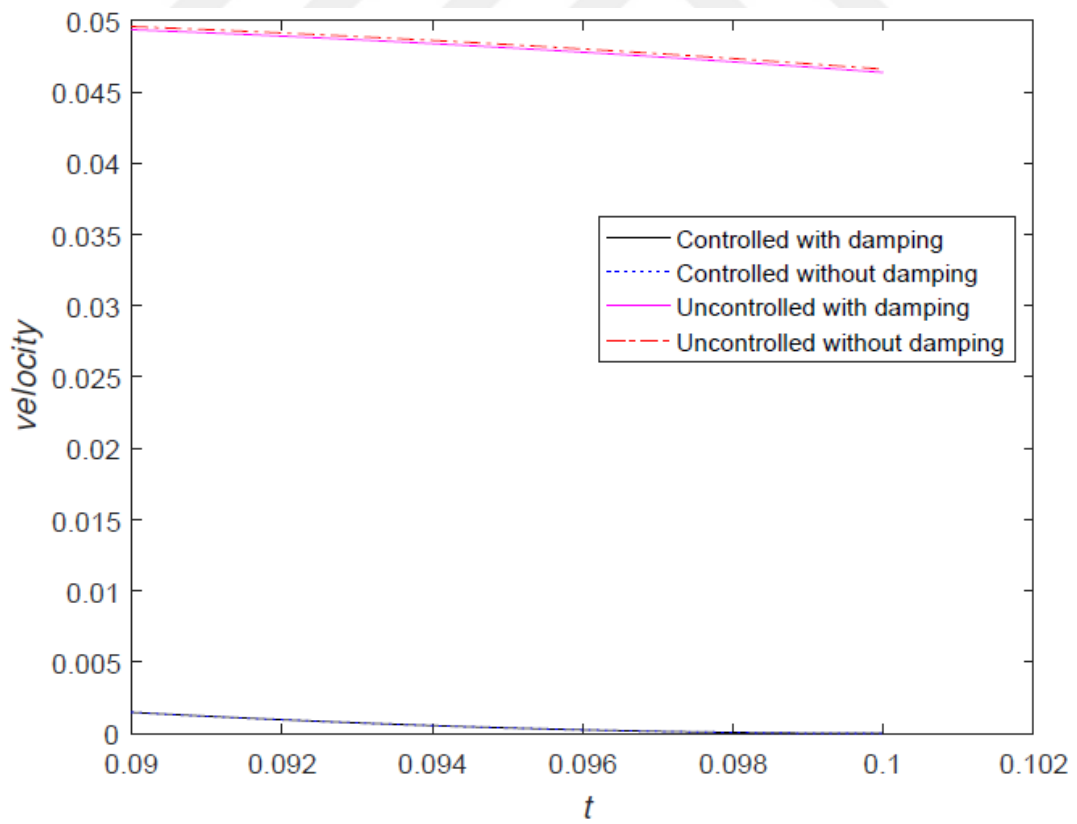
Şekil 4. 9. Yer değiştirme



Şekil 4. 10. Hız



Şekil 4. 11. Yer değiştirme



Şekil 4. 12. Hız

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Harici bir kuvvet etkisine maruz kalan, akışkan ile temas ettirilmiş, magneto-elektro elastik yapıya sahip metal özellikli bir plakadaki titreşimlerin minimum enerji kullanılarak kontrolü için, öncelikle sistemin çözümünün varlığı ve tekliği, sisteme ait optimal kontrol fonksiyonunun tekliği araştırıldı. Maksimum prensip yöntemiyle sisteme ait kontrol fonksiyonunu elde etmek için, öncelikle sisteme ait eşlenik denklem sistemi ve uygun terminal koşullar belirlendi. Daha sonra, sisteme ait optimal kontrol fonksiyonu maksimum prensip yöntemi ile elde edildi. Maksimum prensip yöntemiyle optimal kontrol fonksiyonu elde edilince, yani kontrol problemi esas olarak denklem sistemi çözme problemine indirgenince, denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi için matematiksel yazılım kullanıldı. Önceki kısımlarda elde edilen teorik bilgilerin doğruluğu, matematiksel yazılım ile de doğrulandı. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, plakadaki titreşimlerin maksimum prensip yöntemiyle elde edilen optimal kontrol fonksiyonunun uygulanmasından sonra, etkin bir şekilde sönümlendiği sonucuna varıldı. Bunun yanında, literatürde elde edilen sonuçlarla tutarlı olarak, sistemde var olan sürtünme kuvveti ve sistemin iç sönümleme etkisi ihmal edilmediğinde, sistemde var olan titreşimlerin büyüklüğünün, sistemde var olan sürtünme kuvveti ve sistemin iç sönümleme etkisi ihmal edildiği duruma kıyasla daha az olduğu sonucuna ulaşıldı.

**KAYNAKLAR**

- Barnes, E. R., 1971. Necessary and sufficient optimal conditions for a class of distributed parameter control systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 9, 62-82.
- Boyer, C. B. and Merzbach, U. C., 1991, A History of Mathematics, *Wiley*, New York.
- Chang, T-P, 2013. On the natural frequency of transversely isotropic magneto-electro-elastic plates in contact with fluid, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 2503-2515.
- Clarke, F. H., 1975. Maximum principles without differentiability, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81 (1), 219-222.
- Coddington, E. A. and Levinson, N., 1984, Theory of Ordinary Differential Equations, *Mc Graw-Hill*, New York.
- Clarke, F. H., 1976. The maximum principle under minimal hypotheses, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14 (6), 1078-1091.
- Egorov, A. I., 1967. Necessary optimality conditions for distributed parameter systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 5 (3), 352-408.
- Komkov, V., 1968. The optimal control of a transverse vibration of a beam, *SIAM Journal of Control*, 6, 401-421.
- Kucuk, I., Yildirim, K., Sadek, I. and Adali, S., 2013. Optimal control of a beam with Kelvin-Voigt damping subject to forced vibrations using a piezoelectric patch actuator, *Journal of Vibration and Control*, 21 (4), 701-713.
- Kucuk, I. and Yildirim, K., 2014. Necessary and Sufficient Conditions of Optimality for a Damped Hyperbolic Equation in One-Space Dimension, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 10 pages.
- Kucuk, I., Yildirim, K. and Adali, S., 2015. Optimal piezoelectric control of a plate subject to time-dependent boundary moments and forcing function for vibration damping, *Computer & Mathematics with Applications*, 69, 291-303.
- Lee, E. B., 1963. A sufficient condition in the theory of optimal control, *SIAM Journal on Control*, 1, 241-245.
- Mincsovcics, M. E., 2010. Discrete and continuous maximum principles for parabolic and elliptic operators, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (2), 470-477.
- Pontryagin, L., Boltyanski, V., Gamkrelidze, R. and Mishchenko, E., 1962, Mathematical Theory of Optimal Processes, *Wiley*, Chichester, UK.
- Russell, D. L., 1966. Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with infinite dimensional controls, *SIAM Journal of Control*, 4, 276-295.

- Sloss, J. M., Sadek, I. S., Bruch Jr, J. C. and Adali, S., 1995. Maximum principle for the optimal control of a hyperbolic equation in one space dimension, part 1: Theory, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 87 (1), 33-45.
- Sun, B., 2010. Maximum principle for optimal boundary control of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Journal of the Franklin Institute*, 347 (2), 467-482.
- Yıldırım, K., 2020. Active control of an improved Boussinesq system, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15 (58), 1-14.
- Yıldırım, K., 2021. Thermally induced suppression in a thermoelastic beam structure, *Thermal Science*, 3 (3), 1-10.
- Yildirim, K. and Kucuk, I., 2017. A nonlinear plate control without linearization, *Open Mathematics*, 15 (1), 179-186.
- Yildirim, K., 2016. Optimal forced vibration control of a smart plate, *Applied Mathematical Modelling*, 40 (13), 6424-6436.
- Yildirim, K., 2022. Optimality conditions for a Timoshenko beam model, *Mathematical Methods in Applied Sciences*(Accepted)
- Yildirim, K. and Alkan, S., 2016. A time-delay equation: well-posedness to optimal control, *Open Physics*, 14 (1), 212-220.

## EKLER

### EK-1 Hesaplamlarda kullanılan Matematiksel Yazılım Programı

restart:

```

g1:=1: g2:=1: a:=1: g3:=1: mu:=10^(5): tf:=0.3:
w0:=unapply(0,x,y): w1:=unapply(0,x,y):
C:=unapply(1,x,y): P:=unapply(0,x,y,t):
Y5:=unapply(sqrt(2)*sin(Pi*y)*sqrt(2)*sin(Pi*x),x,y):
Ad:=solve( g1*r^2-a*g2*r+g3*4*(Pi^4)=0,r): ak1:=Re(subs(Ad[2]]):
ak2:=Im(subs(Ad[2]]):
Z:=unapply(exp(ak1*t)*(Z1*cos(ak2*t)+Z2*sin(ak2*t)),Z1,Z2,t):
Y1:=unapply(int(int(P(x,y,t)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1),t):
Y2:=unapply(int(int(C(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1),t):
Y3:=unapply(Z(Z1,Z2,t)*Y2(t),Z1,Z2,t):
K:=unapply(-Y3(Z1,Z2,t)/(2*mu),Z1,Z2,t):
Y4:=unapply(Y1(t)+K(Z1,Z2,t)*Y2(t),x,y):
S:=unapply( exp(-ak1*t)*(A*cos(ak2*t)+B*sin(ak2*t))+exp(-ak1*t)*
cos(ak2*t)*int(-Y4(Z1,Z2,tau)*sin(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),
tau=0..t) + exp(-ak1*t)*sin(ak2*t)*int(Y4(Z1,Z2,tau)*cos
(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),tau=0..t), Z1,Z2,t ):
St:=unapply(diff(S(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):
aeq1:=S(Z1,Z2,0)=int(int(w0(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1):
aeq2:=St(Z1,Z2,0)=int(int(w1(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1):
SC:=solve({aeq1,aeq2},{A,B}): AA:=rhs(SC[1]): BB:=rhs(SC[2]):
SS:=unapply( exp(-ak1*t)*(AA*cos(ak2*t)+BB*sin(ak2*t))+exp(-ak1*t)*
cos(ak2*t)*int(-Y4(Z1,Z2,tau)*sin(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau))
),tau=0..t) + exp(-ak1*t)*sin(ak2*t)*int(Y4(Z1,Z2,tau)*cos
(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),tau=0..t), Z1,Z2,t ):
SSt:=unapply(diff(SS(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):
Zt:=unapply(diff(Z(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):
eq1:=2*SS(Z1,Z2,tf)=a*g2*Z(Z1,Z2,tf)-g1*Zt(Z1,Z2,t):
eq2:=2*SSt(Z1,Z2,tf)= g1*Z(Z1,Z2,tf):
AB:=solve({eq1,eq2},{Z1,Z2}): ZZ1:=rhs(AB[1]):
ZZ2:=rhs(AB[2]):plot(SS(ZZ1,ZZ2,t),t=0..tf):

```