T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVİN EĞRİLERİN AFİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİNE UYGULAMALARI

Şeyma KAYA

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

HAZİRAN 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ TÜREVİN EĞRİLERİN AFİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİNE UYGULAMALARI

Tez Yazarı
Şeyma KAYA

Danışman
Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN

HAZİRAN 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Kesirli Türevin Eğrilerin Afin Diferansiyel Geometrisine Uygulamaları
Yazarı:	Şeyma KAYA
İlk Teslim Tarihi:	26.04.2022
Savunma Tarihi:	17.06.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Erdal BAŞ — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Prof. Dr. Erol KILIÇ — Onayladım
İnönü Üniversitesi. Fen Edebiyat Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Kesirli Türevin Eğrilerin Afin Diferansiyel Geometrisine Uygulamaları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

17.06.2022

Şeyma KAYA

ÖNSÖZ

Diferansiyel Geometri alanında kesirli analiz tekniklerinin kullanılması nispeten yeni ve ilgi çekici bir alandır. Bu tez çalışmasının esas amacı da bahsi geçen yeni alana katkılar sunmaktır.

Literatürde düzlem eğrilerinin eş afin değişmezleri, Caputo tipi kesirli türevin bileşke fonksiyonları üzerine bir sadeleştirme formülünü kullanan bir teknik sayesinde, analiz edilmiştir. Bu argümanı 3-boyutlu duruma genelleştirme çabası bu tez çalışmasının temel esin kaynağıdır.

Lisans eğitimimin başından bu yüksek lisans tezinin oluşturulması sürecinin sonuna kadar tüm imkânlarından istifade ettiğim Fırat Üniversitesi'nin, başta danışman hocam Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN olmak üzere, tüm akademik ve idari personellerine teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışmasına desteklerini sağlayan Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne ayrıca şükranlarımı ifade etmek isterim. Son olarak tüm eğitim hayatım boyunca vermiş oldukları destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunmak isterim.

Bu tez çalışması, Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (FÜBAP) tarafından **FF.21.05** protokol numaralı proje ile desteklenmiştir.

Şeyma KAYA
ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Kesirli Türevin Eğrilerin Afin Diferansiyel Geometrisine Uygulamaları

Şeyma KAYA

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2022,   Sayfa: ix + 43

Parametrik nesnelerin diferansiyel geometrisi üzerine yapılacak çalışmalar için zincir kuralı, yani bileşke fonksiyonların türev formülü, elzemdir. Bu gereklilik literatürde mevcut olan çeşitli kesirli türev operatörlerinin eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerine yapılacak çalışmalara uygulanmasında önemli bir engel teşkil etmektedir. Bu engeli aşmak için matematikçiler tarafından bileşke fonksiyonların Caputo kesirli türevine dair bir sadeleştirme formülü öne sürülmüştür.

Bu sadeleştirme formülünü kullanan bir teknik sayesinde parametrik düzlem eğrilerin Öklitsel değişmezleri, yani Frenet eğriliği ve vektörleri çalışılmıştır. Bu teknik ile bir parametrik eğri için Frenet tipi yeni bir eğrilik tanımlanabilir, ancak yeni Frenet vektörleri elde edilememektedir. Bu başlı başına önemli bir katkı olmakla birlikte, kesirli türevin geometrik özelliklerinin daha iyi gözlemlenebilmesi için parametrik eğrilerin kesirli türev vektörlerinin klasik olanlardan farklı olması beklenir.

Bu beklentiden esinlenerek, literatürde parametrik düzlem eğrilerin Caputo kesirli türev yardımıyla eş afin Frenet değişmezleri çalışılması fikri ortaya atılmıştır. Bunun sebebi bahsi geçen teknik ile Frenet tipi yeni eş afin eğrilik ve vektörlerin elde edilmesi ve dolayısıyla kesirli türevin daha iyi bir geometrik gözlemi yapılabilmesidir.

Bu akımı takiben bu yüksek lisans tezinde parametrik uzay eğrilerin eş afin Frenet değişmezleri bahsi geçen teknik sayesinde yeniden analiz edilmiştir. Daha açık bir şekilde 3-boyutlu reel afin uzayda bir parametrik eğrinin yeni eş afin Frenet eğrilikleri ve vektörleri tanımlanmıştır. Klasik olanlarla arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Grafik ve şekillerle zenginleştirilerek çeşitli örnekler ifade edilmiştir.

Ayrıca sonuç bölümünde bu tez içerisinde kullanılan teknik ile olası yeni araştırma problemi önerileri ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli türev, parametrik eğri, afin uzay, eş afin eğrilik, eş afin Frenet vektörleri

ABSTRACT

Applications of Fractional Derivative to Affine Differential Geometry of Curves

Şeyma KAYA

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2022, Pages: ix + 43

Chain rule, the derivative formula of composite functions, is essential for the studies on differential geometry of parametric objects. This necessity poses an important obstacle for applying various fractional derivative operators existing in the literature to the studies on differential geometry of parametric curves. A simplification about the Caputo fractional derivative of composite functions was put forward by mathematicians to overcome this obstacle.

Euclidean invariants of parametric plane curves, namely Frenet curvature and vectors, were considered through a technique using this simplification. Thanks to this technique, a new curvature of Frenet type could be defined, but it is not possible to introduce new vectors of Frenet type. Besides this is a remarkable contribution in itself, it is expected that the fractional derivative vectors of parametric curves are different from the classical ones in order to better observe geometric properties of fracitonal derivative.

Inspired by this expectation the idea of studying equiaffine invariants of parametric plane curves via Caputo fractional derivative was put forward. This is because, by the mentioned technique, new equiaffine curvature and vectors of Frenet type could be obtained and hence a better geometric observation of fractional derivative could be presented.

Following this strategy, in this thesis the equiaffine Frenet invariants of parametric space curves are re-analyzed via the technique. More clearly, new equiaffine Frenet curvatures and vectors are introduced. The relations between the new and classical invariants are provided. The examples are given by graphs and figures.

Furthermore new perspectives and problems are expressed by the used technique in this thesis.

Keywords: Caputo fractional derivative, parametric curve, affine space, equiaffine curvature, equiaffine Frenet vectors.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

B_a	: Eş afin binormal vektörü
$B_a^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden eş afin binormal vektörü
B_f	: Öklitsel birim binormal vektörü
$g(,)$	: Öklitsel iç çarpım fonksiyonu
N_a	: Eş afin normal vektörü
$N_a^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden eş afin normal vektörü
N_f	: Öklitsel birim normal vektörü
r	: Parametrik eğri
$\mathbb{R}^n$	: n −boyutlu standart reel afin uzay
s	: α −mertebeden eş afin yay parametresi
t	: Keyfi parametre
T_a	: Eş afin teğet vektörü
$T_a^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden eş afin teğet vektörü
T_f	: Öklitsel birim teğet vektörü
$\tilde{u}$	: Öklitsel yay parametresi
u	: α −mertebeden Öklitsel yay parametre
V_{ia}	: i −yinci eş afin Frenet vektörü
V_{if}	: i −yinci Öklitsel Frenet vektörü
κ_f	: Öklitsel Frenet eğriliği
κ_a	: Eş afin Frenet eğriliği
$\kappa_f^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden Öklitsel Frenet eğriliği
$\kappa_a^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden eş afin Frenet eğriliği
σ	: Eş afin yay parametresi
τ_f	: Öklitsel Frenet burulması
τ_a	: Eş afin Frenet burulması
$\tau_f^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden Öklitsel Frenet burulması
$\tau_a^{\{\alpha\}}$	: α −mertebeden eş afin Frenet burulması
$\Vert\cdot\Vert$	: Öklitsel norm fonksiyonu

1. GİRİŞ

Afin diferansiyel geometri uzun bir tarihi sürece sahiptir. Bilinen ilk çalışma 1841 yılında Transon tarafından yapılmıştır ve bir eğrinin afin normali tanımlanmıştır. Ancak eğriler ve yüzeylere dair sistematik ve kapsamlı çalışmalar 1900lerin başlarında karşımıza çıkmaktadır. Felix Klein'in 1872 yılında Erlangen'deki ünlü programında anlattığı fikirleri takip eden Pick, Tzitzeica ve diğer geometriciler farklı dönüşüm gruplarına göre eğri ve yüzeyleri çalışma fikrini ortaya atmışlardır.

1907 yılında Tzitzeica bugünlerde *afin küre* (yani tüm afin normalleri aynı sabit noktadan geçen hiperyüzey) adı verilen nesneleri tanımlamıştır. Bu tarihten yaklaşık on yıl sonra ilk paragrafta bahsi geçen geometricilerin geniş bir grubu eş afin dönüşümlere göre eğriler ve yüzeylerin özelliklerinin sistematik bir çalışmasına başlamışlardır. Geometrinin bu alanın nasıl geliştiğine dair daha kapsamlı bilgiler [1] numaralı kaynakta mevcuttur.

$\mathbb{R}^n$ $n-$boyutlu standart afin uzay olmak üzere bu uzayda değişken bir x noktasında karşılık gelen sütun matris X ile gösterilsin. Ayrıca A ve B ile, sırasıyla, n mertebeden bir kare matris ve bir sütun matris gösterilsin. Eğer A matrisinin determinantı 1 e eşit ise o zaman $f(X) = AX + B$ şeklindeki dönüşüme $\mathbb{R}^n$ uzayının bir *eş afin dönüşümü* denir. Bu uzayın eş afin dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerinin incelenmesine ise *eş afin geometri* adı verilir (bakınız [2]).

$n = 2$ özel durumu daha yakın bir ilgiyi hak etmektedir. Keyfi $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ noktaları ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ sabitleri verilsin. $\mathbb{R}^2$ düzleminin bir eş afin dönüşümü matris formunda

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

ile verilir. Geometriksel olarak $ad - bc = 1$ şartı, kenarları (a, b) ve (c, d) vektörlerine karşılık gelen paralelkenarın birim alana sahip olması demektir. Buna göre $\mathbb{R}^2$ de bir koordinat sisteminin bir eş afin sistem olması için (1,0) ve (0,1) vektörleri ile belirlenen paralelkenarının birim alana sahip olması gerek ve yeterdir. Bir başka deyişle birim alanlı paralelkenar eş afin dönüşümler ile bir başka birim alanlı paralelkenara dönüşür.

$\mathbb{R}^n$ uzayında eğrilerin afin değişmezlerin incelenmesi önemli bir çalışma alanıdır ve tam bir liste olmaksızın [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] numaralı kaynaklara bu tez içerisinde atıf yapılmaktadır.

Diğer taraftan matematiğin önemli alt dallarından biri olan *Kesirli Analiz* adi diferansiyel ve integral kavramlarının keyfi mertebelere bir genellemesidir. Bu tez kapsamında kesirli analiz teknikleri ele alınacaktır. Matematiğin bu alt dalı oldukça ilginç bir tarihsel gelişim sürece sahip olup (bakınız [11], [12]), uygulama alanları oldukça geniştir; örneğin viskoelastisite ([13]), akışkanlar mekaniği ([14]), dinamik sistemler ([15]), tıp ([16]) ve fiziksel olaylar ([17]).

Kesirli analiz teknikleri diferansiyel geometri alanında da kullanılmaktadır, bakınız [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. Bu yüksek lisans tezinde kesirli analiz teknikleri eğrilerin afin diferansiyel geometrik özelliklerini çalışmak için kullanılacaktır. Literatürde pek çok kesirli türev operatörü olmasına rağmen bu çalışmada Caputo kesirli türev operatörü kullanılacaktır ([26], [27], [28], [29]). Düzgün bir $f(x)$ fonksiyonunun $0 < \alpha < 1$ mertebeden klasik *Caputo kesirli türevi*

$$D_x^\alpha f(x) = I_x^{1-\alpha}\left(\frac{df}{dx}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^\alpha}\frac{df(\xi)}{d\xi}d\xi$$

ile tanımlanır. Burada

$$I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}}d\xi$$

ile $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden *Riemann-Liouville kesirli integrali* ve

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

ile de *Euler gama fonksiyonu* gösterilmektedir.

Bu tez kapsamında Caputo kesirli türev operatörü kullanılmasının ana sebebi *sabit fonksiyon üzerinde sıfır etkisine sahip olmasıdır.* Oldukça önemli bir avantaj olan bu prensip sayesinde tanımlanabilecek geometrik kavramların afin dönüşümler grubu altında değişmez kalabileceği olasılığı ortaya çıkmaktadır.

Bu avantajın yanında Caputo kesirli türev operatörü önemli dezavantajlara da sahiptir: Caputo anlamında Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi, düzgün $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlar için,

$$(D_x^\alpha fg)(x) = \sum_{i=0}^\infty \binom{\alpha}{i}\frac{d^i f}{dx^i}\left(D_x^{\alpha-i}g\right)(x) - \frac{f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}$$

ve bileşke fonksiyonun türevi

$$(D_x^\alpha f)\big(g(x)\big) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty \binom{\alpha}{i}\frac{x^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}\frac{d^i f(g(x))}{dx^i} + \frac{f(g(x))-f(g(0))}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \tag{1.1}$$

şeklinde sonsuz seriler yardımıyla ifade edilmektedir (bakınız [30]).

Ancak iyi bilindiği eğriler, yüzeyler ve daha yüksek boyutlu geometrik nesnelerin diferansiyel geometrik özellikleri çalışılırken en gereksinim duyulan argümanlardan ikisi Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevidir. Özellikle; eğer bu nesneler parametrik anlamda ele alınmışsa, geometrik özelliklerinin parametrizasyonun seçiminden bağımsız olması gerekir. Bu prensibin sağlanması için bileşke fonksiyonun türevi ya da bilinen adıyla *zincir kuralı* elzemdir. Ayrıca Leibniz kuralı işlemler içerisinde olmazsa olmaz yardımcı bir araçtır. Bu gerekçelerden ötürü [20] numaralı araştırma makalesinde aşağıdaki gibi bir *sadeleştirme formülü* ele alınmıştır: $t = g(x)$ olmak üzere

$$(D_x^{\alpha} f)\big(g(x)\big) = \frac{\alpha x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{df}{dt} \frac{dg}{dx}. \tag{1.2}$$

Dikkat edilirse (1.2) sadeleştirme formülü aslında (1.1) içerisindeki sonsuz serinin $i = 1$ terimine karşılık gelmektedir. (1.2) formülü kısmen kesirli türevin etkisini içermektedir ve klasik adi türeve dayandırılmıştır. [20] numaralı araştırma makalesinde (1.2) ile verilen türev formülü vektör değerli fonksiyonlara uygulanarak Öklit düzleminde parametrik eğriler için *kesirli mertebeden yay parametresi* ve *Frenet eğriliği* gibi yeni değişmezler tanımlanmıştır. Daha sonra bu fikir [23] numaralı araştırma makalesinde 3-boyutlu duruma genelleştirilmiştir. Düzlem ve uzay eğrileri için bir eğriyi kesirli mertebeden Frenet eğrilikleri cinsinden inşa etme metotları verilmiştir.

(1.2) sadeleştime formülü kullanılarak bir eğrinin herhangi bir noktasında yeni türden eğrilikler tanımlanabilir ama oluşturulacak Frenet çatısı bir tektir. Çünkü bir eğrinin Frenet çatısı parametrizasyon seçiminden bağımsızdır (bakınız [31, 2.3.1 Teorem]). Ancak bu durum bir eğrinin eş afin Frenet çatısı için değişmektedir. Daha açık bir şekilde [24] numaralı araştırma makalesinde bir düzlem eğrisinin kesirli mertebeden *eş afin yay parametresi*, *eğrilik* ve *Frenet çatısı* gibi kavramlar tanımlanmış ve standart kavramlar arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir. Ayrıca sabit kesirli mertebeden eş afin eğriliğine sahip düzlem eğrileri sınıflandırılmıştır.

Bu tezin temel amacı (1.2) sadeleştirme formülünü vektör değerli fonksiyonlara uygulayarak 3-boyutlu reel afin uzay $\mathbb{R}^3$ te yeni değişmezler tanımlamak ve zaten var olan değişmezlerle arasındaki ilişkiyi ifade etmektir. Ayrıca yeni kavramları kesirli analiz penceresinden mümkün olduğunca yorumlamaktır. Bu çalışma nezdinde, karışıklığı önlemek amacıyla, yeni argümanları ayırt etmek için 'α −mertebeden' ve zaten var olanları ifade etmek için de 'klasik' niteleme sıfatları kullanılacaktır.

Bu amaca binaen, çalışmanın özgün kısmı olan 5. Bölümde, (1.2) sadeleştirme formülü kullanılarak $\mathbb{R}^3$ te α −mertebeden eş afin yay parametresi ve α −mertebeden eş afin Frenet vektörler tanımlanacaktır (bakınız Tanım 5.1 ve Önerme 5.1). α −mertebeden eş afin Frenet vektörler ile klasik eş afin vektörler arasındaki ilişki matris formunda verilecektir (Önerme 5.2). Bu önerme (1.2) sadeleştirme formülünün Öklit ve afin uzaylarda uygulanması ile elde edilecek argümanların ortaya çıkardığı farklılıkları ifade etmektedir. Daha belirgin bir ifade ile (1.2) sadeleştirme formülü kullanılarak elde edilecek Öklitsel Frenet vektörleri klasik metotla elde edilen ile birebir aynıdır. Ancak eş afin Frenet vektörleri için durum değişmektedir. Tanım 5.2 ve 5.3 te α −mertebeden eş afin eğrilikler ve Frenet formülleri ifade edilecektir. Ayrıca Teorem 5.1 de α −mertebeden eş afin eğrilikler ile klasik eş afin eğrilikler arasındaki ilişki ortaya konacaktır. Gene aynı teoremde α −mertebeden eş afin eğriliklerin uzayın eş afin dönüşümleri altında verilen eğrinin birer değişmezi olduğu ispatlanacaktır.

Teorem 5.1 de ifade edilen ilişkiler, yani (5.13) ve (5.14) eşitlikleri, bize bir başlangıç anında $\alpha-$ mertebeden eş afin eğriliklerin çok yüksek değerlere ulaştığını ve zaman ilerledikçe bu değerlerin azaldığını ifade etmektedir. Bu ise kesirli analiz penceresinden kesirli türevin zamanla azalan 'hafıza etkisine' işaret etmektedir. $\alpha -$mertebeden Caputo kesirli türev lokal olarak tanımlanmamakla birlikte bir kapalı aralık üzerinde tam mertebeden türevin etkilerinin tamamına bağlı olarak hesaplandığından, hafıza etkisi ibaresi burada ön plana çıkmaktadır [32].

Teorem 5.1 in geometrik sonuçları anlamında eğer bir eğrinin klasik eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır ise o zaman bu eğrinin $\alpha -$mertebeden ikinci ve birinci eş afin eğriliklerin oranı $\alpha -$mertebeden eş afin yay parametresinin negatifine eşittir (bakınız Sonuç 5.1). Bu durum $\alpha -$mertebeden eş afin eğrilikler özdeş olarak sıfır olduğunda da ortaya çıkmaktadır. Daha açık bir şekilde eğer bir eğrinin $\alpha -$ mertebeden eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır ise o zaman klasik ikinci ve birinci eş afin eğriliklerin oranı klasik eş afin yay parametresinin negatifine eşittir (Sonuç 5.2).

Bu sonuçlar geometrik olarak ilginç bir fikrin ortaya çıkmasına sebep olabilir. Daha da netleştirmek gerekirse eğer 3-boyutlu Öklit uzayında bir eğrinin Frenet eğriliklerinin oranı kendi yay parametresinin bir doğrusal fonksiyonu ise bu eğriye literatürde *Chen eğrisi* ya da daha bilinen adıyla *rektifiye eğri* adı verilir [33]. Bizim durumumuzda bir eğrinin klasik eş afin eğrilik fonksiyonları özdeş olarak sıfır olduğunda $\alpha -$mertebeden eş afin eğrilikleri Chen eğri olma karakteri ortaya koymaktadır. Tersine $\alpha -$mertebeden eş afin eğrilikler özdeş olarak sıfır olduğunda klasik eş afin eğrilikleri Chen eğri olma şartını sağlamaktadır. Bu kavramlardan 7. Bölümde daha detaylı bahsedilmektedir.

6. Bölümde iki adet parametrik eğri örneği analiz edilmiştir (Örnek 6.1 ve 6.2). Bunlardan ilkinde, klasik eş afin eğrilik fonksiyonları özdeş olarak sıfır olan klasik eş afin yay parametreli bir eğri alınacak ve $\alpha -$mertebeden eş afin yay parametresi ile yeniden ifade edilecektir. Daha sonra $\alpha -$mertebeden eş afin Frenet vektörleri ve eğrilikleri elde edilecektir. Bu eğrinin ve $\alpha -$mertebeden eş afin eğrilik fonksiyonlarının grafikleri α nın farklı değerlerine göre resmedilecektir (Şekil 6.1, Şekil 6.2 ve Şekil 6.3). Ayrıca 5. Bölümde tanımlanacak olan argümanların Örnek 6.1 de karşılıkları birer birer vurgulanacaktır. Örnek 6.2 de $\alpha -$mertebeden eş afin eğrilik fonksiyonları özdeş olarak sıfır olan $\alpha -$mertebeden eş afin yay parametreli bir eğri incelenecektir. Bu eğrinin $\alpha -$mertebeden eş afin Frenet vektörleri ve klasik eş afin eğrilik fonksiyonları ifade edilecektir. Ele alınan eğrinin ve klasik eş afin eğrilik fonksiyonlarının grafikleri α nın farklı değerlerine göre resmedilecektir (Şekil 6.4, Şekil 6.5 ve Şekil 6.6).

Sonuç bölümü olan 7. Bölümde bir takım açık problemler önerilecektir. Bu problemlerden biri (1.2) sadeleştirme formülünün keyfi sonlu boyutlu bir afin uzayda nasıl uygulanacağı ile ilgilidir. Bunun için ilk ve önemli bir adım olan $\alpha -$mertebeden eş afin yay parametresinin nasıl tanımlanacağı ifade edilecektir. Bir diğer açık problem önerisi sabit $\alpha -$mertebeden eş afin eğriliğine sahip parametrik eğrileri bulmak olacaktır. Son olarak ise bir parametrik eğrinin Chen eğri olma durumlarının klasik ve $\alpha -$mertebeden argümanlarla nasıl karakterize edilebileceği ile ilgili olacaktır. Bu problemler gerçekçi olup nasıl uygulanacağı hakkında fikirler verilecektir. Gene bu bölümde bazı özeleştirilerde de bulunulacaktır.

Hülasa bu tez çalışmasına, [24] numaralı araştırma makalesinde sunulan araçların ve elde edilen sonuçların büyük bir kısmının 3-boyutlu duruma bir genellemesi olarak bakılabilir.

Ele alınacak tüm parametrik nesnelerin yeterli mertebeden düzgün fonksiyonlarla tanımlandığı kabul edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Diferansiyel Geometriye Dair Temel Kavramlar

Tanım 2.1. A boş kümeden farklı bir küme ve V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki fonksiyon verilsin:

$f: A \times A \to V, (P,Q) \mapsto f(P,Q) = Q - P.$

Her $P, Q, R \in A$ ve her $\alpha \in V$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$ ve $PQ = \alpha$ olduğunda Q tek bir şekilde bulunabiliyorsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir *afin uzay* denir [31].

Uyarı 2.1. boy V = boy A dir. Bir afin uzayda iki nokta bir vektör belirtir. Ayrıca bir referans nokta tespit edildiğinde uzaydaki her noktaya bir vektör karşılık gelir [31].

Tanım 2.2. V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ vektör kümesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir afin çatısı denir [31].

Teorem 2.1. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. A da belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı vardır [34].

Tanım 2.3. V, $\mathfrak{I}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ cismi üzerinde vektör uzayı, A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay ve $S = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesi de A da bir afin çatı olsun. $x_i: A \to \mathfrak{I}$ fonksiyonu $1 \leq i \leq n$ için $P_0P = \sum_{i=1}^{n} a_i\, P_0P_i$ ve $P \to x_i(P) = a_i$, $a_i \in \mathfrak{I}$, olmak üzere $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$ sıralı n-lisine P noktasının $S = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısına göre afin koordinatları, her bir $x_i(P)$ ye P noktasının i-yinci afin koordinatı, x_i fonksiyonuna da A da S afin çatısına göre i-yinci afin koordinat fonksiyonu denir. Ayrıca P_0P vektörüne ise P noktasının başlangıç noktası P_0 olan S afin çatısına göre *konum (yer) vektörü* denir [34].

Tanım 2.4. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına bir *Öklit Uzayı* denir. Bu uzayda klasik iç çarpım ve norm fonksiyonları sırasıyla $g(,)$ ve $\|\cdot\|$ sembolleri ile gösterilecektir [34].

Tanım 2.5. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ sistemi V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemi A için bir *Öklid çatısı* adını alır [34].

Tanım 2.6. A n-boyutlu Öklit uzayı ve $S = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısı verilsin. $\{P_0P_i : i = 1, \dots, n\}$ sistemi V de ortonormal baz ise S afin çatısına bir *dik çatı* ve karşılık gelen afin koordinat sistemine *dik koordinat sistemi* denir. Ayrıca bu sistemin fonksiyonlarına da *Öklit koordinat fonksiyonları* denir [34].

Tanım 2.7. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ sırasıyla $n-$ ve $m-$ boyutlu iki reel vektör uzayı ve $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ olsun. $f: U \to V,\ p \mapsto f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p))$ vektör değerli fonksiyonu için eğer

$f_1, f_2, \dots, f_m$ reel değerli fonksiyonların tamamı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise o zaman f fonksiyonuna düzgün fonksiyon adı verilir [31].

Tanım 2.8. $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (a,b)$ bir açık alt aralık olmak üzere,

$r : I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$

düzgün bir fonksiyon olsun. Bu durumda $r(I) \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesine *düzgün bir eğri* (*veya parametrik bir eğri*) denir. Ayrıca I alt kümesine *eğrinin parametre aralığı* ve $t \in I$ reel sayısına da *eğrinin parametresi* denir [31].

Tanım 2.9. $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri $r(\tilde{u})$ olsun. Eğer parametre aralığındaki her bir $\tilde{u}$ değeri için $r'(\tilde{u}) \neq 0$ ise eğriye *düzenli* (*regüler*) eğri adı verilir. Gene parametre aralığındaki her bir değer için $\| r'(\tilde{u}) \| = 1$, ise $r(\tilde{u})$ eğrisine *birim hızlı eğri* denir ve bu durumda $\tilde{u}$ parametresine de *eğrinin yay parametresi* adı verilir [31].

Tanım 2.10. $r : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ ve $q : (c, d) \to \mathbb{R}^n$ eğrileri için $q = r \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) > 0$ olacak şekilde $h : (c,d) \to (a,b)$ düzgün fonksiyonu varsa q eğrisine r nin *yön koruyan bir yeniden parametrizasyonu* denir. Benzer şekilde, $q = r \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) < 0$ olacak şekilde $h : (c,d) \to (a,b)$ düzgün fonksiyonu varsa q ya r nin *yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyonu* adı verilir. Bu durumda h fonksiyonuna da, sırasıyla, *pozitif ya da negatif parametre değişimi* (*parametre değişim fonksiyonu*) denir [31].

Tanım 2.11. $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri $r(\tilde{u})$ ve parametre aralığı I olsun. $a, b \in I$ olmak üzere a dan b ye *yay uzunluğu* diye eğrinin $r(a)$ ve $r(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığa karşılık tutulan $\int_a^b \| r'(t) \| \, dt,\ t \in I$ reel sayısına denir [31].

Teorem 2.2. $\mathbb{R}^n$ de her düzenli eğri kendi yay parametresi cinsinden ifade edilebilir [31].

Tanım 2.12. $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri $r(t)$ olsun. $r(t)$ nin türev vektörlerinden lineer bağımsız olanlarına Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulanması ile elde edilen baz vektörlerine *Frenet-Serret vektörleri* denir. Eğer bu vektörler $\{V_{1f}, \dots, V_{kf}\}, k \leq n$, ise $\kappa_{if} = \langle V'_i, V_{i+1} \rangle, 1 \leq i < k$, fonksiyonuna $i-$yinci *Frenet eğriliği* adı verilir.

2.2. Kesirli Türevler

Tanım 2.13. Gama fonksiyonu, n nin pozitif değerleri için Euler integrali olarak adlandırılan

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

ile tanımlanır [12].

Tanım 2.14. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha-$mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx$$

ile tanımlanır [12].

Tanım 2.15. $f(t)$ fonksiyonu, $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha-$inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}\left(I_t^{1-\alpha} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{f(x)}{(x-t)^{\alpha}} dx\right)$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 2.16. $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ olmak üzere bir f fonksiyonunun α −inci mertebeden Caputo kesirli türev yaklaşımı

$$D_t^{\alpha} f(t) = I_t^{1-\alpha}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{df(x)/dx}{(x-t)^{\alpha}} dx\right)$$

ile tanımlıdır [12].

Örnek 2.1. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevini Caputo kesirli türevi ile hesaplayalım. O halde $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ olur ve Caputo formülünde $a = 0$ için integral alırsak;

$$D_t^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \,,$$

$u^2 = x - t$ dönüşümü yapılırsa;

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2u}{u} du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x}}^0 2\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} 2\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi} - 0\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir.

3. EĞRİLERİN EŞ AFİN ÖZELLİKLERİ

3.1. Düzlem Eğrileri

Bu alt bölümde $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir eğri için eş afin yay parametresi ve eğrilik gibi değişmezler tanımlanacaktır.

Tanım 3. 1. $\mathbb{R}^2$ düzleminde düzgün bir parametrik eğri

$r: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto r(t) = (x(t), y(t))$

olsun. Matris formunda $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ ve $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ve $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$ olmak üzere eğer her $t \in I$ için $det(\dot{r}\ (t), \ddot{r}(t)) \neq 0$ ise $r(t)$ eğrisine *dejenere olmayan* bir eğri denir. Böyle bir eğri için, $t_0 \in I$ olmak üzere

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} det(\dot{r}\ (u), \ddot{r}(u))^{\frac{1}{3}}\, du \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı $\sigma: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *eş afin yay uzunluğu* fonksiyonu denir [2].

Uyarı 3. 1. σ değişkenine göre türevler tire işareti ile gösterilmek üzere zincir kuralı gereğince

$$r' = \dot{r}\ \frac{dt}{d\sigma},$$

$$r'' = \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 \ddot{r} + \frac{d^2t}{d\sigma^2}\dot{r}$$

olduğundan

$$det(r', r'') = \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3 det(\dot{r}\ , \ddot{r}) \tag{3.2}$$

yazılır. Diğer yandan (3.1) eşitliğinde Analizin Temel Teoremi gereğince t değişkenine göre türev alındığında $det(\dot{r}\ (t), \ddot{r}(t)) = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3$ bulunur. Bu ifade (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında her $\sigma \in I$ için $det(r', r'') = 1$ elde edilir ve bu nedenle σ parametresine *eş afin yay parametresi* denir [2].

Tanım 3. 2. $\mathbb{R}^2$ düzleminde $r(\sigma)$ parametrik eğrisi dejenere olmayan ve eş afin yay parametresi ile ifade edilmiş olsun. $\{r, r', r''\}$ üçlüsüne *eş afin Frenet çatısı* adı verilir [2].

Uyarı 3. 2.

1. Dejenere olmayan bir eğri daima eş afin yay parametresi ile ifade edilebilir. $det\big(r'(\sigma), r''(\sigma)\big) = 1$ şartı geometriksel olarak eğri boyunca $r'(\sigma)$ ve $r''(\sigma)$ üzerine kurulan paralelkenarın birim alana sahip olması demektir. $r'(\sigma)$ ve $r''(\sigma)$ vektör alanları Öklit diferansiyel geometrisinde bir eğrinin 'teğeti' ve 'normali' kavramlarının eş afin karşılıklarıdır ve $r'(\sigma) = T_a(\sigma)$ ve $r''(\sigma) = N_a(\sigma)$ ile gösterilir. $N_a(\sigma)$ vektör alanına *Blaschke normali* de denilmektedir (bakınız [2]). $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times2}: detA = 1\}$

olmak üzere $r(\sigma)$ eğrisi için açıkça $[T_a \;\; N_a]^{\mathrm{T}} \in SL(2,\mathbb{R})$, burada T ile bir matrisin devriği ifade edilmektedir.

2. $r(t),\ t \in I$, dejenere olmayan bir parametrik eğri olsun. Aşağıdaki gibi bir geometrik yorum ifade edilir: Kabul edelim ki her $t \in I$ için $det(\dot{r}\,(t), \ddot{r}(t)) > 0$ olsun. Dolayısıyla yeterince küçük bir δ için Taylor açılımı gereğince $r(t+\delta) - r(t) = \delta\dot{r}\,(t) + \frac{1}{2}\delta^2\ddot{r}(t) + \cdots$ yazılabilir. Kalan terimler ihmal edilerek $det(\dot{r}\,(t), r(t+\delta) - r(t)) = \frac{1}{2}\delta^2 det(\dot{r}\,(t), \ddot{r}(t)) > 0$ olur. Bu ise $r(t)$ ile $r(t+\delta)$ noktalarını birleştiren kirişin $r(t)$ noktasında çizilen teğetin yalnızca bir tarafında yani, eğrinin $r(t)$ civarındaki tüm noktaları $r(t)$ deki teğetin bir tarafında yatması anlamına gelir. Bu ise eğrinin bir büküm noktasına sahip olmaması demektir.

Tanım 3. 3. $r(\sigma)$ ile $\mathbb{R}^2$ de eş afin yay parametreli bir eğri gösterilsin. Bu durumda

$$\kappa_a(\sigma) = det\big(r''(\sigma), r'''(\sigma)\big)$$

ifadesine $r(\sigma)$ nin *eş afin eğrilik fonksiyonu* adı verilir [2].

Uyarı 3. 3. $\mathbb{R}^2$ de $r(\sigma)$ eş afin yay parametreli bir eğri olmak üzere

$$det\big(r'(\sigma), r''(\sigma)\big) = 1$$

eşitliğinde türev alınırsa

$$det\big(r''(\sigma), r''(\sigma)\big) + det\big(r'(\sigma), r'''(\sigma)\big) = 0$$

ya da

$$det\big(r'(\sigma), r'''(\sigma)\big) = 0$$

elde edilir ki bu $r'(\sigma)$ ve $r'''(\sigma)$ vektör alanlarının lineer bağımlı olması demektir. Düzgün bir $f(\sigma)$ fonksiyonu için $r'''(\sigma) = f(\sigma)r'(\sigma)$ denilsin. Diğer yandan

$$\kappa_a(\sigma) = det\big(r''(\sigma), r'''(\sigma)\big) = -f(\sigma)det\big(r'(\sigma), r''(\sigma)\big) = -f(\sigma)$$

olup

$$r'''(\sigma) + \kappa_a(\sigma)r'(\sigma) = 0 \qquad (3.3)$$

vektör diferansiyel denklemi elde edilir.

Ayrıca eş afin Frenet denklemleri

$$r'(\sigma) = T_a(\sigma),$$

$$T_a'(\sigma) = N_a(\sigma),$$

$$N_a'(\sigma) = -\kappa_a(\sigma)T_a(\sigma)$$

ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} r'(\sigma) \\ T_a'(\sigma) \\ N_a'(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\sigma) \\ T_a(\sigma) \\ N_a(\sigma) \end{bmatrix}$$

ifade edilir.

Önerme 3. 1. Eş afin yay parametresi ve eğrilik $\mathbb{R}^2$ nin bir eş afin dönüşümü altında değişmez kalırlar. Yani eğer $r(\sigma)$, σ eş afin yay parametreli bir eğri ve F ile $\mathbb{R}^2$ nin bir eş afin dönüşümünü göstermek üzere, $\tilde{r}(\sigma) = F(r(\sigma))$ eğrisi de σ eş afin yay parametresine sahiptir. Ayrıca $\tilde{r}$ nin eş afin eğriliği ile r nin eğriliği aynıdır [2].

Aşağıda ifade edilen edilecek olan sonuç Öklit düzlemindeki eğriler için Temel Teoremin eş afin karşılığıdır.

Teorem 3. 1. Bir I aralığı üzerinde, bir düzgün $\kappa_a = \kappa_a(\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda σ yı eş afin yay parametresi ve κ_a fonksiyonunu da eş afin eğrilik kabul eden bir düzlem eğrisi mevcuttur. Üstelik düzlemin bir eş afin dönüşümüne göre bir tektir. [2]

Eş afin eğriliği önceden tayin edilen düzlem eğrilerini elde etmenin bir yolu (3.3) vektör diferansiyel denkleminin çözümlerinden geçmektedir. Daha açık bir şekilde $\kappa_a(\sigma) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, olmak üzere λ sabitinin durumuna göre 2 durum mevcuttur (bakınız [2]):

Durum 1: $\lambda = 0$ ise düzlemin uygun eş afin dönüşümlerine göre Kartezyen formda $y = \frac{x^2}{2}$ gibi bir parabol elde edilir.

Durum 2: $\lambda \neq 0$ ise düzlemin uygun eş afin dönüşümlerine göre Kartezyen formda $\lambda x^2 + \lambda^2 y^2 = 1$ gibi bir eğri elde edilir. $\lambda > 0$ ise bu eğri bir elips, aksi durumda bir hiperboldür.

Teorem 3. 2. Sabit eş afin eğriliğine sahip bir düzlem eğrisi bir kuadratiktir [2].

Tanım 3. 4. Eş afin dönüşümlerin 1-parametreli grubu altında bir noktanın yörüngesi olan düzlem eğrilerine *homojen*dir denir [2].

Uyarı 3. 4. Bir homojen eğri üzerinde iki nokta p ve q olsun. Bu eğri p yi q ya götüren bir eş afin dönüşüm ile çizilebilir. Eş afin eğrilik bir eş afin değişmez olduğundan bu homojen eğri çizilirken her noktasında eş afin eğrilik değişmez kalmak zorundadır. Dolayısıyla her homojen eğri sabit eş afin eğriliğe sahiptir. Tersine sabit eş afin eğrilikli bir dejenere olmayan eğri homojendir. Şimdi yukarıda ifade edilen kuadratik eğrilerin aslında birer yörünge eğrisi olduğu ifade edilsin: İlk olarak $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ele alınsın. Bunun eş afin eğriliği $(ab)^{-\frac{2}{3}}$ dir. Bu elips aslında $\delta = \frac{a}{b}$ olmak üzere

$$A(t) = \begin{bmatrix} cost & -\delta sint \\ \frac{1}{\delta} sint & cost \end{bmatrix}$$

ile verilen eş afin dönüşümlerin 1-parametreli grubu altında $(a, 0)$ noktasının yörüngesidir. Gerçekten de

$$\begin{bmatrix} cost & -\delta sint \\ \frac{1}{\delta} sint & cost \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acost \\ \frac{a}{\delta} sint \end{bmatrix}$$

dir. Daha sonra $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü ele alınsın. Eş afin eğriliği $-(ab)^{-\frac{2}{3}}$ dir. Bu hiperbol aslında $(a, 0)$ noktasının,

$$A(t) = \begin{bmatrix} cosht & \delta sinht \\ \frac{1}{\delta} sinht & cosht \end{bmatrix}$$

ile verilen eş afin dönüşümlerin 1-parametreli grubu altında $(a, 0)$ noktasının yörüngesidir, yani

$$\begin{bmatrix} cosht & \delta sinht \\ \frac{1}{\delta} sinht & cosht \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acosht \\ bsinht \end{bmatrix}$$

dir. $y = \frac{1}{2}x^2$ parabolünün eş afin eğriliği sıfırdır. Bu parabol

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilen eş afin dönüşümlerin 1-parametreli grubu altında $(0,0)$ noktasının yörüngesine karşılık gelmektedir. Gerçekten de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Böylece aşağıdaki ifade edilebilir:

Teorem 3. 3. Dejenere olmayan bir eğrinin sabit eş afin eğriliğe sahip olması için bu eğrinin eş afin dönüşümlerin 1-parametreli grubu altında bir noktanın yörüngesi olması gerek ve yeterdir [2].

Örnek 3. 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin eğriliği aşağıdaki gibi elde edilebilir: $r(t) = (acost, bsint)$ için $\dot{r}(t) = (-asint, bcost)$, $\ddot{r}(t) = (-acost, -bsint)$ ve $det\big(\dot{r}(t), \ddot{r}(t)\big) = ab$ dir. Eş afin yay uzunluk fonksiyonu

$$\sigma(t) = \int_0^t (ab)^{\frac{1}{3}} dt = (ab)^{\frac{1}{3}} t$$

ve yay parametresi cinsinden, $t = (ab)^{-\frac{1}{3}} \sigma$,

$$r(\sigma) = \left(acos\left((ab)^{-\frac{1}{3}} \sigma \right), bsin\left((ab)^{-\frac{1}{3}} \sigma \right) \right)$$

olur. Buna göre eş afin eğrilik

$$\kappa_a(\sigma) = det\big(r''(\sigma), r'''(\sigma)\big) = (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü için $\kappa_a(\sigma) = -(ab)^{-\frac{2}{3}}$ olduğu gösterilebilir.

3.2. Uzay Eğrileri

Bu alt bölümde $\mathbb{R}^3$ uzayında bir parametrik eğri için eş afin değişmezler tanımlanacaktır.

Tanım 3. 5. $\mathbb{R}^3$ uzayında düzgün bir parametrik eğri

$r: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

olsun. Matris formunda $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ ve $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$ ve $\dddot{r} = \frac{d^3r}{dt^3}$ olmak üzere eğer her $t \in I$ için $det(\dot{r}\,(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t)) \neq 0$ ise $r(t)$ eğrisine *dejenere olmayan* bir eğri denir. Böyle bir eğri için, $t_0 \in I$ olmak üzere

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} det(\dot{r}\,(u), \ddot{r}(u), \dddot{r}(t))^{\frac{1}{6}}\, du \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlı $\sigma: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *eş afin yay uzunluğu fonksiyonu* denir [8].

Uyarı 3. 5. σ değişkenine göre türev tire işareti ile gösterilmek üzere Uyarı 3.1 dekine benzer bir yolla

$$det(r', r'', r''') = \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3 det(\dot{r}\,, \ddot{r}, \dddot{r}) \tag{3.5}$$

bulunur. Diğer yandan (3.4) eşitliğinde Analizin Temel Teoremi gereğince t değişkenine göre türev alındığında $det(\dot{r}\,(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t)) = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^6$ olur ve dolayısıyla her $\sigma \in I$ için $det(r', r'', r''') = 1$ elde edilir. Bu nedenle σ parametresine *eş afin yay parametresi* denir.

Tanım 3. 6. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r(\sigma)$ parametrik eğrisi eş afin yay parametresi ile ifade edilmiş olsun. $r'(\sigma) = T_a(\sigma)$, $r''(\sigma) = N_a(\sigma)$ ve $r'''(\sigma) = B_a(\sigma)$ olmak üzere $\{r(\sigma), T_a(\sigma), N_a(\sigma), B_a(\sigma)\}$ dörtlüsüne *eş afin Frenet çatısı* adı verilir [8].

Burada $r(\sigma)$ eğrisi için açıkça $[T_a \;\; N_a \; B_a]^{\mathrm{T}} \in SL(3, \mathbb{R})$ dir.

Tanım 3. 7. $r(\sigma)$ ile $\mathbb{R}^3$ de eş afin yay parametreli bir eğri gösterilsin. Bu durumda *eş afin Frenet denklemleri*

$r'(\sigma) = T_a(\sigma)$,

$T_a'(\sigma) = N_a(\sigma)$,

$N_a'(\sigma) = B_a(\sigma)$,

$B_a'(\sigma) = -\kappa_a(\sigma)T_a(\sigma) - \tau_a(\sigma)N_a(\sigma)$

ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} r'(\sigma) \\ T_a'(\sigma) \\ N_a'(\sigma) \\ B_a'(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_a(\sigma) \\ 0 & -\kappa_a & -\tau_a(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\sigma) \\ T_a(\sigma) \\ N_a(\sigma) \\ B_a(\sigma) \end{bmatrix}$$

ifade edilir. Burada ki

$$\kappa_a(\sigma) = -det\left(r''(\sigma), r'''(\sigma), r^{(4)}(\sigma)\right)$$

ve

$$\tau_a(\sigma) = det\left(r'(\sigma), r'''(\sigma), r^{(4)}(\sigma)\right)$$

ifadelerine $r(\sigma)$ nin *eş afin eğrilik fonksiyonları* adı verilir [8].

Buna göre $\mathbb{R}^3$ uzayında $r(\sigma)$ parametrik eğrisi için

$$\kappa_a(\sigma)T_a(\sigma) + \tau_a(\sigma)N_a(\sigma) + B_a'(\sigma) = 0$$

olduğundan

$\kappa_a(\sigma)r'(\sigma) + \tau_a(\sigma)r''(\sigma) + r^{(4)}(\sigma) = 0$

vektör diferansiyel denklemi her σ için sağlanır. Bu denklem değişken katsayılı, lineer ve homojendir. Eğer $\kappa_a(\sigma)$ ve $\tau_a(\sigma)$ fonksiyonları sabit seçilip ilgili diferansiyel denklem çözülürse aşağıdaki sonuç ifade edilir. Bu sonuç $\mathbb{R}^3$ uzayında sabit eş afin eğriliklere sahip parametrik eğriler için bir sınıflandırmadır.

Teorem 3. 4. Sabit eş afin eğriliklerine sahip dejenere olmayan bir $r(\sigma)$ parametrik eğrisi aşağıdakilerden birine eş afin anlamda kongrüenttir ([7]):

1. $r(\sigma) = \left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{6}\right)$

2. $r(\sigma) = \left(e^{c\sigma}, ce^{c\sigma}, -\frac{e^{-2c\sigma}}{18c^5}\right)$,

3. $r(\sigma) = \tau_a^{-1}\left(-\tau_a^{1/2}\sigma, sin\left(\tau_a^{1/2}\sigma\right), cos\left(\tau_a^{1/2}\sigma\right)\right)$,

4. $r(\sigma) = \left(\frac{e^{-2c_1\sigma}}{c_2}, e^{c_1\sigma}sin(c_3\sigma), e^{c_1\sigma}cos(c_3\sigma)\right)$,

5. $r(\sigma) = -\tau_a^{-1}\left(-(-\tau_a)^{\frac{1}{2}}\sigma, sinh\left((-\tau_a)^{\frac{1}{2}}\sigma\right), cosh\left((-\tau_a)^{\frac{1}{2}}\sigma\right)\right)$,

6. $r(\sigma) = \left(\frac{e^{-2c_1\sigma}}{c_2}, e^{c_3\sigma}, e^{c_4\sigma}\right)$.

Teorem 3.4 aslında Teorem 3.2 nin 3-boyutlu duruma bir genellemesidir.

Teorem 3. 5. Dejenere olmayan iki parametrik eğrinin aynı eş afin eğriliklerine sahip olması için bu eğrilerin eş afin anlamda kongrüent olması gerek ve yeterdir [8].

4. KESİRLİ MERTEBEDEN DEĞİŞMEZLER

4.1. Öklitsel Değişmezler

$\mathbb{R}^2$ uzayında $a > 0$ olmak üzere $r: (0, a) \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{u} \mapsto r(\tilde{u})$, bir düzgün parametrik eğri ve $\tilde{u}$ Öklitsel anlamda yay parametresi olsun, yani her $\tilde{u}$ için $\left\| \frac{dr}{d\tilde{u}} \right\| = 1$ dir. $(D_{\tilde{u}}^{\alpha} r)(\tilde{s})$ ile $r(\tilde{u})$ eğrisinin $0 < \alpha < 1$ mertebeden Caputo türevi gösterilsin. (1.2) ile verilen sadeleştirme formülünün $r(\tilde{u})$ vektör değerli fonksiyonuna uygulanmasından

$$(D_{\tilde{u}}^{\alpha} r)(\tilde{u}) = \frac{\alpha \tilde{u}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dr}{d\tilde{u}} \tag{4.1}$$

olur. Dikkat edilirse $(D_{\tilde{u}}^{\alpha} r)(\tilde{u})$ ve $\frac{dr}{d\tilde{u}}$ türev vektörleri lineer bağımlıdır ve aynı yönlüdür. $\|(D_{\tilde{u}}^{\alpha} r)(\tilde{u})\| = \frac{\alpha \tilde{u}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ olup $(D_{\tilde{u}}^{\alpha} r)(\tilde{u})$ birim vektör değildir. Dolayısıyla eğer (1.2) türev formülü kullanılacaksa yeni bir 'yay parametresi' ne ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 4.1. $r: (0, \theta) \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{u} \mapsto r(\tilde{u})$, Öklitsel anlamda yay paramtresi ile verilen bir eğri olsun. Buna göre

$$u: (0, \theta) \to (0, \theta),\ \tilde{u} \mapsto u(\tilde{u}) = \left(\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} \tilde{u} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan u fonksiyonuna α *−mertebeden Öklitsel yay uzunluk fonksiyonu* adı verilir [20].

Uyarı 4.1. (4.2) ile verilen u düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\frac{du}{d\tilde{u}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{u}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > 0 \tag{4.3}$$

olduğundan $u(\tilde{u})$ fonksiyonu bileşke işlemine göre ters fonksiyona sahiptir ve dolayısıyla $\tilde{u}$ parametresi de aslında u nin düzgün bir fonksiyonudur. Bir başka deyimle (4.2) ile verilen $u(\tilde{u})$ fonksiyonu bir diffeomorfizm (düzgün terse sahip olan düzgün fonksiyon) olup düzgün bir parametre değişimidir. O halde bu yeni u parametresi ile $r: (0, \theta) \to \mathbb{R}^2,\ u \mapsto r(u)$ eğrisi için

$$(D_u^{\alpha} r)(u) = \frac{\alpha u^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dr}{du}$$

ya da zincir kuralı sayesinde

$$(D_u^{\alpha} r)(u) = \frac{\alpha u^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dr}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{du}. \tag{4.4}$$

Diğer yandan (4.2) eşitliğinden $\tilde{u} = \frac{\Gamma(2-\alpha) u^{\alpha}}{\alpha^2}$ ve

$$\frac{d\tilde{u}}{du} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} u^{\alpha-1} \tag{4.5}$$

olup (4.4) gereğince

$$(D_u^{\alpha} r)(u) = \frac{dr}{d\tilde{u}} (\tilde{u}(u)) \tag{4.6}$$

bulunur ve $\|(D_u^\alpha r)(u)\| = 1$ dir. Böylece (4.2) ile verilen u parametresine α *−mertebeden Öklitsel yay parametresi* adı verilir (bakınız [20]). (4.6) ifadesi sayesinde, r parametrik eğrisinin (4.1) sadeleştirme formülü ve (4.2) ile verilen kesirli mertebeden Öklitsel yay parametresi kullanılarak elde edilen türev vektörünün, klasik anlamda elde edilen birim teğet vektörü ile aynı olduğu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla bu iki yaklaşımla elde edilecek Frenet çatıları aynıdır. Ayrıca (4.6) eşitliğinde zincir kuralı gözetilerek u parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d(D_u^\alpha r)}{du} = \frac{d\tilde{u}}{du}\frac{d^2r}{d\tilde{u}^2}$$

ya da (4.5) ten

$$\frac{d(D_u^\alpha r)}{du}(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}\frac{d^2r}{d\tilde{u}^2}\tilde{u}(u) \tag{4.7}$$

bulunur. Buna göre (4.6) ve (4.7) den parametreden bağımsız olarak

$$det\left(\frac{d(D_u^\alpha r)}{du}, D_u^\alpha r\right) = det\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}\frac{d^2r}{d\tilde{u}^2}, \frac{dr}{d\tilde{u}}\right) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}det\left(\frac{d^2r}{d\tilde{u}^2}, \frac{dr}{d\tilde{u}}\right)$$

yazılır. Bu eşitlikten, eğer bir noktada $\frac{dr}{d\tilde{u}}$ ve $\frac{d^2r}{d\tilde{u}^2}$ vektör alanları lineer bağımlı (bağımsız) ise o zaman karşılık gelen noktada $\frac{d(D_s^\alpha r)}{du}$ ve $D_u^\alpha r$ vektör alanlarının da lineer bağımlı (bağımsız) olacağı anlamına gelir.

Tanım 4.2. $r: (0, \theta) \to \mathbb{R}^2,\ u \mapsto r(u),\ \alpha$ −mertebeden Öklitsel yay paramtresi ile verilen bir eğri olsun. $\{r(u), T_f(u), N_f(u)\}$ Frenet çatısı ve $g(,)$ Öklitsel iç çarpım olmak üzere

$$\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = g\left(\frac{dT_f}{du}, N_f\right)(u)$$

ile tanımlı $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonuna $r(u)$ nin α *−mertebeden Frenet eğriliği* adı verilir. $\alpha = 1$ için $\kappa_f^{\{1\}} = \kappa_f$ klasik Frenet eğriliğidir [20].

Teorem 4.1. $r: (0, \theta) \to \mathbb{R}^2,\ u \mapsto r(u),\ \alpha$ −mertebeden Öklitsel yay paramtresi ile verilen bir eğri olsun. $\kappa_f^{\{\alpha\}}$ ve κ_f sırasıyla α −mertebeden ve klasik Frenet eğrilikleri olmak üzere

$$\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}\kappa_f(u)$$

dir [20].

Örnek 4.1. $r: (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{u} \mapsto r(\tilde{u}) = \left(\rho cos\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right), \rho sin\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)\right)$, ile verilen orijin merkezli $\rho > 0$ yarıçaplı S çemberi göz önüne alınsın. Burada $\tilde{u}$ Öklitsel yay parametresidir ve (4.2) gereğince $\tilde{u} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha^2}u^\alpha$ olduğundan

$$r(u) = \left(\rho cos\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right), \rho sin\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right)\right)$$

parametrizasyonu S çemberinin α −mertebeden Öklitsel yay parametresi ile ifade edilmiş halidir. (4.1) sadeleştirme formülü göz önünde bulundurulduğunda

$$T_f(u) = (D_u^\alpha r)(u) = \frac{\alpha u^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{dr}{du} = \left(-sin\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right), cos\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right)\right)$$

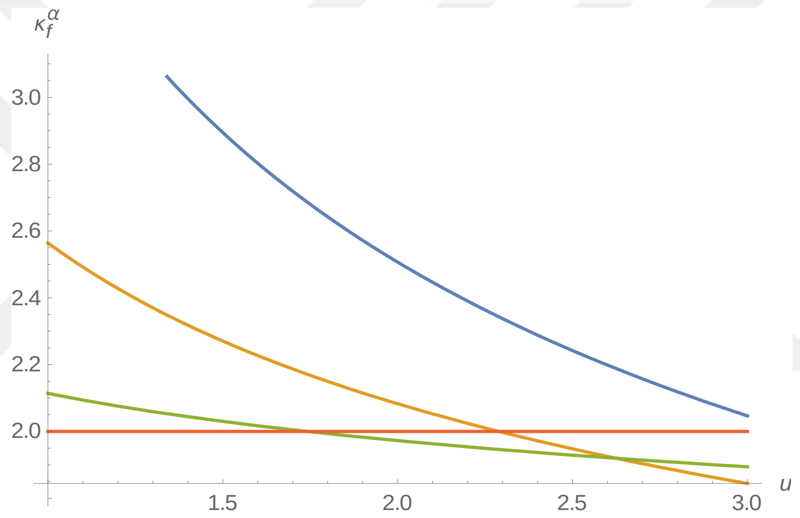
ve birim normal vektör alanı

$$N_f(u) = \left(-cos\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right), -sin\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha^2}u^\alpha\right)\right)$$

elde edilir. Tanım 4.2 den

$$\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = g\left(\frac{dT_f}{du}, N_f\right)(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\rho\alpha}u^{\alpha-1}$$

olur. $\kappa_f(u) = \frac{1}{\rho}$ olduğundan $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}\kappa_f$ açıktır. $\rho = \frac{1}{2}$ olmak üzere $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9, 1$ değerleri için $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonun grafiği Şekil 4.1 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 4.1. $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = \frac{2\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}u^{\alpha-1}, u \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri

Şekil 4.1 den görüldüğü üzere α değerleri 1 e yaklaştıkça $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonunun $\kappa_f(u)$ nin grafiğine yaklaşmaktadır. Aşağıda bir düzlem eğrisini α −mertebeden eğriliği cinsinden inşa etmek için bir metot verilmiştir (bakınız [23]): α −mertebeden eğriliği $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ olan bir parametrik eğri, düzlemin bir Öklitsel dönüşümüne göre

$$r(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\int_{u_0}^{u} t^{\alpha-1}cos\theta(u)dt\,, \int_{u_0}^{u} t^{\alpha-1}sin\theta(t)dt\right)$$

şeklinde ifade edilir ve burada $\theta(u) = \int_u^u \kappa_f^{\{\alpha\}}(t)dt$ dir.

Yukarıda ifade edilen bu yaklaşım 3-boyutlu duruma da genelleştirilmiştir.

Tanım 4.3. $r: (0,\theta) \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto r(u),\ \alpha$ −mertebeden Öklitsel yay parametresi ile verilen bir eğri ve $\{r(u), T_f(u), N_f(u), B_f(u)\}$ Frenet çatısı olmak üzere

$$\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = g\left(\frac{dT_f}{du}, N_f\right)(u)$$

ve

$$\tau_f^{\{\alpha\}}(u) = g\left(\frac{dN_f}{du}, B_f\right)(u)$$

ile tanımlı $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ ve $\tau_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonlarına $r(u)$ nin α *−mertebeden Frenet eğriliği* ve *burulması* adı verilir. $\alpha = 1$ için $\kappa_f^{\{1\}} = \kappa_f$ ve $\tau_f^{\{1\}} = \tau_f$ klasik Frenet eğriliği ve burulmasıdır [23].

Ayrıca $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ ve $\tau_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonları Öklitsel dönüşümler altında değişmezdir (bakınız [23]). Bir uzay eğrisini $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ ve $\tau_f^{\{\alpha\}}(s)$ cinsinden inşa etme yolu [23] numaralı çalışmada ifade edilmiştir. $\kappa_f^{\{\alpha\}}(u)$ ve $\tau_f^{\{\alpha\}}(u)$ fonksiyonları ile klasik eğriler arasındaki ilişki aşağıdaki sonuç ile ifade edilir:

Teorem 4.2. $r: (0, a) \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto r(u),\ \alpha$ −mertebeden Öklitsel yay paramtresi ile verilen bir eğri olsun. $\kappa_f^{\{\alpha\}}$ ve κ_f sırasıyla α −mertebeden ve klasik Frenet eğrilikleri olmak üzere

$$\kappa_f^{\{\alpha\}}(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} u^{\alpha-1} \kappa_f(u)$$

dir. Ayrıca $\tau_f^{\{\alpha\}}$ ve τ_f sırasıyla α −mertebeden ve klasik Frenet burulması olmak üzere

$$\tau_f^{\{\alpha\}}(u) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} u^{\alpha-1} \tau_f(s)$$

dir [23].

4.2. Eş Afin Değişmezler

$\mathbb{R}^2$ düzleminde dejenere olmayan düzgün bir parametrik eğri

$r: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto r(t) = (x(t), y(t))$

olsun. $\sigma: I \to \mathbb{R}$ ile $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} det\left(\frac{dr}{du}, \frac{d^2r}{du^2}\right)^{\frac{1}{3}} du$ olacak şekilde eş afin yay uzunluğu fonksiyonu ve $\{T_a, N_a, \kappa_a\}$ ile $r(\sigma)$ nin eş afin Frenet elemanları gösterilsin, burada $T_a = \frac{dr}{d\sigma}$, $N_a = \frac{d^2r}{d\sigma^2}$ ve $\kappa_a = det\left(N_a, \frac{dN_a}{d\sigma}\right)$ dir.

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere (1.2) ile verilen sadeleştirme formülü $r(\sigma)$ vektör değerli fonksiyonuna uygulanırsa

$$(D_\sigma^\alpha r)(\sigma) = \frac{\alpha\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dr}{d\sigma} \tag{4.8}$$

yazılır. Buna göre aşağıdaki kavramlar ifade edilir.

Tanım 4.4. $\mathbb{R}^2$ düzleminde $r(\sigma)$ ile eş afin yay uzunluğa sahip bir parametrik eğri gösterilsin. $0 < \alpha < 1$ ve

$$\rho(\alpha) = \left[\frac{2\alpha+1}{3}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2\alpha+1}}$$

olmak üzere

$$s: I \to \mathbb{R},\ \sigma \mapsto s(\sigma) = \rho(\alpha)\sigma^{\frac{3}{2\alpha+1}} \tag{4.9}$$

fonksiyonuna r nin α *−mertebeden eş afin yay uzunluğu fonksiyonu* denir. Ayrıca eğri boyunca

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = (D_s^\alpha r)(s)$$

ve

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d(D_s^\alpha r)}{ds}(s)$$

ile tanımlı vektör alanlarına α *−mertebeden eş afin teğet* ve *normal vektör alanı* adı verilir [24].

Uyarı 4.2. (4.9) den

$$\sigma = \left[\frac{3}{2\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-2}{3}}\right] s^{\frac{2\alpha+1}{3}}$$

ya da

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-2}{3}} \tag{4.10}$$

yazılabilir. Bu durumda zincir kuralı ve (4.8) formülü kullanılarak

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = (D_s^\alpha r)(s) = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d\sigma}{ds}T_a$$

ya da (4.10) den

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}} T_a(s) \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada $T_a(s(\sigma)) = \frac{dr}{d\sigma}(\sigma)$ ve $T_a^{\{1\}}(s) = T_a(s)$ dir. (4.11) eşitliğinde zincir kuralı göz önünde bulundurularak s e göre adi türev alınırsa

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = \frac{1-\alpha}{3}\left(\frac{\alpha s^{-(\alpha+2)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}} T_a(s) + \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-\frac{1}{3}} N_a(s) \tag{4.12}$$

olur, burada $N_a(s(\sigma)) = \frac{dT_a}{d\sigma}(\sigma)$ ve $N_a^{\{1\}}(s) = N_a(s)$ dir. Ayrıca her $s \in I$ için

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}\right) = det(T_a, N_a) = 1 \tag{4.13}$$

olduğundan s parametresine α −mertebeden eş afin yay parametresi denilmektedir. Açıktır ki $\alpha = 1$ olduğunda σ ve s parametrelerinin çakışmaktadır. (4.13) eşitliğinde s e göre adi türev alınırsa

$$det\left(N_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}\right) + det\left(T_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right) = 0$$

ya da

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right) = 0$$

olur. Görülebilir ki $T_a^{\{\alpha\}}$ ve $\frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}$ vektör alanları her $s \in I$ için lineer bağımlı olmaktadır. O halde

$$\frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = -\kappa_a^{\{\alpha\}} T_a^{\{\alpha\}}$$

olacak şekilde s parametresine bağlı bir $\kappa_a^{\{\alpha\}}$ fonksiyonunun varlığına işaret eder.

Böylece aşağıdaki ifade verilebilir:

Tanım 4.5. $\mathbb{R}^2$ de $r(s)$ α −mertebeden eş afin yay parametresine sahip bir eğri olsun. O zaman

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = det\left(N_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right)(s)$$

fonksiyonuna r nin α *−mertebeden eş afin Frenet eğrilik fonksiyonu* adı verilir [24].

Uyarı 4.3. $\mathbb{R}^2$ de $r(s)$ α −mertebeden eş afin yay parametresi ile verilen bir eğrinin α −mertebeden eş afin Frenet denklemleri parametreden bağımsız

$$(D_s^\alpha r) = T_a^{\{\alpha\}},$$

$$\frac{d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = N_a^{\{\alpha\}},$$

$$\frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = -\kappa_a^{\{\alpha\}} T_a^{\{\alpha\}}$$

ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} D_s^\alpha r \\ d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)/ds \\ d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\kappa_a^{\{\alpha\}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ T_a^{\{\alpha\}} \\ N_a^{\{\alpha\}} \end{bmatrix}$$

yazılır.

Teorem 4.3. $\mathbb{R}^2$ de dejenere olmayan bir parametrik eğrinin α −mertebeden ve klasik eş afin Frenet vektörleri arasında

$$\mathcal{A}^{\{\alpha\}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ \frac{1-\alpha}{3}\left(\frac{\alpha s^{-(\alpha+2)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \mathcal{A},$$

şeklinde matris formunda bir ilişki vardır, burada $\mathcal{A}^{\{\alpha\}} = \left[T_a^{\{\alpha\}}\ N_a^{\{\alpha\}}\right]^{\mathrm{T}}$ ve $\mathcal{A} = [T_a\ N_a]^{\mathrm{T}}$ için $\mathcal{A}^{\{\alpha\}}$, $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{R})$ dir [24].

Teorem 4.2 dikkat edildiğinde α −mertebeden eş afin Frenet vektörlerin klasik eş afin Frenet vektörlerden farklı olduğu ve dolayısıyla Öklitsel durumdan farklı bir sonuç elde edildiği gözlemlenebilir.

Teorem 4.4. $\mathbb{R}^2$ de dejenere olmayan bir parametrik eğrinin α −mertebeden ve klasik eş afin eğrilikleri arasında

$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{9s^2} + \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{3}} \kappa_a(s),$ şeklinde bir ilişki vardır [24].

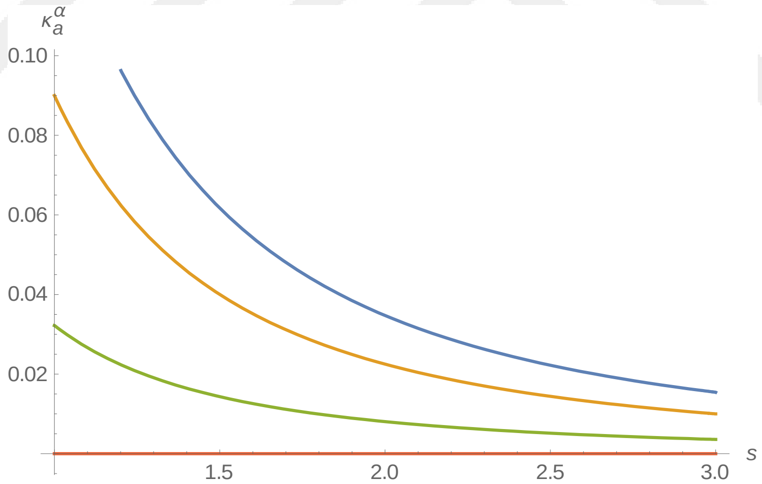
Örnek 4.2. $r(s)$ ile $\mathbb{R}^2$ de $\kappa_a(s) = \lambda \in \mathbb{R}$ klasik eş afin eğrilikli kuadratik eğri gösterilsin. O zaman

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{9s^2} + \lambda\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Özellikle eğer $r(s)$ bir parabol ise (yani $\lambda = 0$ ise) bu durumda $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{9s^2}$ olur ve Şekil 4.2 deki gibi resmedilebilir. Eğer $r(s)$ Öklitsel manada bir birim çember ise (yani $\lambda = 1$ ise) o zaman

$$\kappa^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{9s^2} + \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

olur.



Şekil 4.2. $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{9s^2}$, $s \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri

Aşağıda $\mathbb{R}^2$ de eş afin düzlem eğrileri için Temel Teorem'in α −mertebeden eş afin eğrilik cinsinden benzeri ifade edilecektir. Sonra α −mertebeden sabit eş afin eğrilikli düzlem eğrilerinin sınıflandırmalarından bahsedilecektir.

Teorem 4.5. Bir I aralığı üzerinde düzgün bir fonksiyon $\kappa_a^{\{\alpha\}}$ olsun. Bu durumda, $\mathbb{R}^2$ nın bir eş afin dönüşümüne göre $\kappa_a^{\{\alpha\}}$ fonksiyonunu α −mertebeden eş afin eğrilik olarak kabul eden bir tek parametrik eğri vardır [24].

Teorem 4.6. $r(s)$ ile $\mathbb{R}^2$ de α −mertebeden eş afin yay uzunluğuna sahip bir eğri gösterilsin. Eğer $r(s)$ α −mertebeden $\kappa_\alpha^{\{\alpha\}} = c \in \mathbb{R}$ sabit eş afin eğriliğe sahip ise o zaman aşağıdakilerden birine eş afinsel anlamda denktir ([24]):

$$r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}, \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right),$$

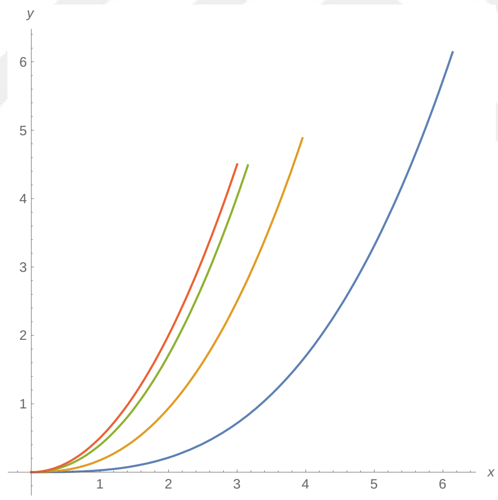
$$r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\int s^{\alpha-1}\cos(\sqrt{c}s)\,ds, \int \frac{s^{\alpha-1}}{-\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}s)ds\right), c \neq 0,$$

$$r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\int s^{\alpha-1}\cos h(\sqrt{-c}s)\,ds, \int \frac{s^{\alpha-1}}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}s)ds\right), c \neq 0.$$

Örnek 4.3. $r(s)$ ile $\mathbb{R}^2$ de α −mertebeden eş afin yay uzunluğuna sahip ve $\kappa_\alpha^{\{\alpha\}} = 0$ bir eğri gösterilsin. Bu durumda Teorem 4.6 gereğince

$$r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}, \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)$$

dir ve Şekil 4.3 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 4.3. $r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}, \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right), s \in [0,3]$, eğrisinin; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri

5. UZAY EĞRİLERİNİN KESİRLİ MERTEBEDEN DEĞİŞMEZLERİ

$\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan düzgün bir parametrik eğri

$r: (0,\theta) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

olsun, burada $\theta > 0$ reel pozitif sabittir. $\sigma: (0,\theta) \to \mathbb{R}$ ile $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} det\left(\frac{dr}{du}, \frac{d^2r}{du^2}, \frac{d^3r}{du^3}\right)^{\frac{1}{6}} du$ olacak şekilde eş afin yay uzunluğu fonksiyonu ve $\{T_a, N_a, B_a, \kappa_a, \tau_a\}$ ile $r(\sigma)$ nin eş afin Frenet elemanları gösterilsin, burada $T_a = \frac{dr}{d\sigma}$, $N_a = \frac{d^2r}{d\sigma^2}$, $B_a = \frac{d^3r}{d\sigma^3}$ ve $\kappa_a = -det\left(N_a, B_a, \frac{dB_a}{d\sigma}\right)$, $\tau_a = det\left(T_a, B_a, \frac{dB_a}{d\sigma}\right)$ dir.

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere (1.2) ile verilen sadeleştirme formülü $r(\sigma)$ vektör değerli fonksiyonuna uygulanırsa

$$(D_\sigma^\alpha r)(\sigma) = \frac{\alpha\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dr}{d\sigma} \tag{5.1}$$

yazılır. Buna göre

Tanım 5.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r: (0,\theta) \to \mathbb{R}^3,\ \sigma \mapsto r(\sigma)$ ile eş afin yay uzunluğa sahip düzgün bir parametrik eğri gösterilsin. $0 < \alpha < 1$ ve

$$\rho(\alpha) = \left[\frac{\alpha+1}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{\alpha+1}}$$

olmak üzere

$$s: (0,\theta) \to (0,\epsilon),\ \sigma \mapsto s(\sigma) = \rho(\alpha)\sigma^{\frac{2}{\alpha+1}} \tag{5.2}$$

fonksiyonuna r nin α *−mertebeden eş afin yay uzunluğu fonksiyonu* adı verilir. Ayrıca eğri boyunca

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = (D_s^\alpha r)(s), \tag{5.3}$$

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d(D_s^\alpha r)}{ds}(s), \tag{5.4}$$

$$B_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d^2(D_s^\alpha r)}{ds^2}(s) \tag{5.5}$$

ile tanımlı vektör alanlarına α *−mertebeden eş afin teğet, normal* ve *binormal vektör alanı* adı verilir.

Önerme 5.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r(s)$ ile α −mertebeden eş afin yay uzunluğuna sahip düzgün bir parametrik eğri gösterilsin. Bu durumda (5.3), (5.4) ve (5.5) ile tanımlı vektör alanları ve her s için

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right) = 1 \tag{5.6}$$

dir.

İspat: (5.2) den

$$\sigma(s) = \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ya da

$$\frac{d\sigma}{ds}(s) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} \tag{5.7}$$

yazılabilir. Bu durumda zincir kuralı ve (5.1) formülü ve zincir kuralı kullanılarak

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = (D_s^\alpha r)(s) = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\right)(s) = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{d\sigma}{ds}T_a\right)(s)$$

ya da (5.7) den

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) \tag{5.8}$$

elde edilir. Burada $T_a\big(s(\sigma)\big) = \frac{dr}{d\sigma}(\sigma)$ ve $T_a^{\{1\}}(s) = T_a(s)$ dir. (5.8) eşitliğinde zincir kuralı göz önünde bulundurularak s e göre adi türev alınırsa

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = \frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) + N_a(s) \tag{5.9}$$

olur, burada $N_a\big(s(\sigma)\big) = \frac{dT_a}{d\sigma}(\sigma)$ ve $N_a^{\{1\}}(s) = N_a(s)$ dir. Gene (5.9) eşitliğinde zincir kuralı göz önünde bulundurularak s e göre adi türev alınırsa

$$B_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = -\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) + \frac{1-\alpha}{2}s^{-1}N_a(s) + \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} B_a(s) \tag{5.10}$$

olur, burada $B_a\big(s(\sigma)\big) = \frac{dB_a}{d\sigma}(\sigma)$ ve $B_a^{\{1\}}(s) = B_a(s)$ dir. Ayrıca her $s(\sigma)$ için

$$det(T_a, N_a, B_a) = 1$$

ifadesi ile birlikte (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitlikleri ve determinant fonksiyonunun özellikleri göz önüne alınırsa

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} det\big(T_a(s), N_a(s), B_a(s)\big) = 1$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Uyarı 5.1. Önerme 4.1 gereğince $det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right) = 1$ sağlandığından (5.2) ile tanımlı s parametresine α −mertebeden eş afin yay parametresi denilmektedir. Açıktır ki $\alpha = 1$ olduğunda σ ve s parametreleri çakışmaktadır. Ayrıca verilen eğrinin σ klasik eş afin parametresi uzayın eş afin dönüşümleri altında değişmez olduğundan, (5.2) eşitliğinden açıktır ki s de eş afin dönüşümler altında değişmezdir. Şimdi (5.6) eşitliğinde s e göre adi türev alınırsa

$$det\left(N_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right) + det\left(T_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right) + det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right) = 0$$

ya da

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right) = 0$$

yazılır. Görülebilir ki $T_a^{\{\alpha\}}$, $N_a^{\{\alpha\}}$ ve $\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}$ vektör alanları her $s \in I$ için lineer bağımlı olmaktadır. Bu ise

$$\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = -\kappa_a^{\{\alpha\}} T_a^{\{\alpha\}} - \tau_a^{\{\alpha\}} N_a^{\{\alpha\}}$$

olacak şekilde s parametresine bağlı düzgün $\kappa_a^{\{\alpha\}}$ ve $\tau_a^{\{\alpha\}}$ fonksiyonlarının varlığına işaret eder.

Böylece aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 5.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r(s)$ ile dejenere olmayan ve düzgün bir parametrik eğri olsun. O zaman

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = -det\left(N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right)(s) \tag{5.11}$$

ve

$$\tau_a^{\{\alpha\}}(s) = det\left(T_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}, \frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right)(s) \tag{5.12}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara r nin α −mertebeden eş afin Frenet eğrilik fonksiyonları adı verilir.

Tanım 5.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r(s)$ ile α −mertebeden eş afin yay parametresi ile verilen bir eğri gösterilsin. α −mertebeden eş afin Frenet denklemleri parametreden bağımsız

$$(D_s^{\alpha} r) = T_a^{\{\alpha\}},$$

$$\frac{d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = N_a^{\{\alpha\}},$$

$$\frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = B_a^{\{\alpha\}},$$

$$\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = -\kappa_a^{\{\alpha\}} T_a^{\{\alpha\}} - \tau_a^{\{\alpha\}} N_a^{\{\alpha\}}$$

ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} D_s^{\alpha} r \\ d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)/ds \\ d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)/ds \\ d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\kappa_a^{\{\alpha\}} & -\tau_a^{\{\alpha\}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ T_a^{\{\alpha\}} \\ N_a^{\{\alpha\}} \\ B_a^{\{\alpha\}} \end{bmatrix}$$

dir.

Önerme 5.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan bir parametrik eğrinin α −mertebeden ve klasik eş afin Frenet vektörleri arasında matris formunda

$$\mathcal{A}^{\{\alpha\}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-1-\alpha}{2}} & 1 & 0 \\ = -\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{1-\alpha}{2} s^{-1} & \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} \end{bmatrix} \mathcal{A},$$

şeklinde matris formunda bir ilişki vardır, burada $\mathcal{A}^{\{\alpha\}} = \left[T_a^{\{\alpha\}}\ N_a^{\{\alpha\}}\ B_a^{\{\alpha\}}\right]^{\mathrm{T}}$ ve $\mathcal{A} = [T_a\ N_a\ N_a]^{\mathrm{T}}$ için $\mathcal{A}^{\{\alpha\}}, \mathcal{A} \in SL(2,\mathbb{R})$ dir.

İspat: (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitliklerinin matris formunda yazılması ile ispat tamamlanır.

Uyarı 5.2. Önerme 5.2 gereğince α −mertebeden eş afin Frenet vektörler klasik eş afin Frenet vektörlerden farklıdır ve dolayısıyla Öklitsel durumdan farklı bir sonuç elde edilmiştir.

Teorem 5.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan bir parametrik eğrinin α −mertebeden eş afin eğrilikleri eş afin dönüşümler altında invaryanttır. Üstelik klasik α −mertebeden ve klasik eş afin eğrilikleri arasında

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4} s^{-3} + \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-3}{2}} \kappa_a(s) - \frac{(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2\alpha} s^{\alpha-2} \tau_a(s) \tag{5.13}$$

ve

$$\tau_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(3+\alpha)(1-\alpha)}{4} s^{-2} + \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1} \tau_a(s) \tag{5.14}$$

şeklinde ilişkiler vardır.

İspat: Öncelikle (5.13) ve (5.14) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilsin. (5.10) eşitliğinde zincir kuralı ve (5.7) kullanılarak s e göre adi türev alınırsa

$$\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = D(s)T_a(s) + E(s)N_a(s), \tag{5.15}$$

burada

$$D(s) = \left(\frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\right)\left(\frac{\alpha s^{-5-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1} \kappa_a(s),$$

$$E(s) = \frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4} s^{-2} - \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1} \tau_a(s).$$

Diğer yandan (5.9), (5.10) ve (5.15) eşitlikleri (5.11) de yerine yazılırsa

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = -det(GT_a + N_a, HT_a + KN_a + LB_a, DT_a + EN_a)(s) \tag{5.16}$$

olur, burada

$$G(s)=\frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$H(s)=-\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$K(s)=\frac{1-\alpha}{2}s^{-1},$$

$$L(s)=\left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

dir. Determinant fonksiyonunun özellikleri ve $det(T_a,N_a,B_a)=1$ kullanılarak (5.16) eşitliğinden

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)=EGL-DL,$$

bulunur. E,D,G ve L fonksiyonlarının değerlerinin yerine yazılması ile (5.13) elde edilir. Benzer şekilde (5.8), (5.10) ve (5.15) eşitlikleri (5.12) de yerine yazılırsa

$$\tau_a^{\{\alpha\}}(s)=det\left(\left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}T_a,HT_a+KN_a+LB_a,DT_a+EN_a\right)(s)$$

olur. Determinant fonksiyonunun özellikleri ve $det(T_a,N_a,B_a)=1$ kullanılarak (5.14) eşitliği elde edilir. Son olarak Uyarı 5.1 gereğince s parametresinin eş afin dönüşümler altında değişmez kaldığı bilinmektedir. Üstelik $\kappa_a$ve τ_a verilen eğrinin eş afin değişmezleri olduğundan, (5.13) ve (5.14) eşitliklerinin sağ taraflarındaki ifadeler eş afin dönüşümler altında değişmez kalacaktır. Bu ise $\kappa_a^{\{\alpha\}}$ ve $\tau_a^{\{\alpha\}}$ fonksiyonlarının verilen eğrinin eş afin dönüşümler altında birer değişmezi olacağı anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.1 için aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir.

Sonuç 5.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan bir parametrik eğrinin klasik eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda α −mertebeden eş afin eğrilikler

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)=\frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4}s^{-3} \tag{5.17}$$

ve

$$\tau_a^{\{\alpha\}}(s)=\frac{(3+\alpha)(1-\alpha)}{4}s^{-2} \tag{5.18}$$

formundadır. Ayrıca

$$s\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)+\tau_a^{\{\alpha\}}(s)=0 \tag{5.19}$$

dir.

İspat: Eğer klasik eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır, yani $\kappa_a(\sigma(s)) = \tau_a(\sigma(s)) = 0$ ise o zaman (5.13) ve (5.14) eşitliklerinden, sırasıyla (5.17) ve (5.18) eşitlikleri elde edilebilir. Üstelik (5.19) ifadesi (5.17) ve (5.18) eşitliklerinin bir sonucudur.

Sonuç 5.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan bir parametrik eğrinin α −mertebeden eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda klasik eş afin eğrilikler

$$\kappa_a(\sigma) = \frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{1+\alpha}{2}\sigma\right)^{-3} \tag{5.20}$$

ve

$$\tau_a(\sigma) = -\frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{-3}\sigma^{-2} \tag{5.21}$$

formundadır. Ayrıca

$$\sigma\kappa_a(\sigma) + \tau_a(\sigma) = 0 \tag{5.22}$$

dir.

İspat: Eğer α −mertebeden eş afin eğrilikleri özdeş olarak sıfır ise o zaman (5.14) ten

$$\tau_a(s) = \frac{\alpha(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4\Gamma(2-\alpha)} s^{-1-\alpha} \tag{5.23}$$

yazılır. (5.2) eşitliği burada yerine yazılırsa (5.20) elde edilir. Şimdi her s için $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = 0$ olması ve (5.23) ifadesi (5.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\kappa_a(s) = \frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

bulunur. Burada (5.2) eşitliği göz önüne alındığında (5.20) elde edilir. Üstelik (5.23) eşitliği (5.21) ve (5.22) nin bir sonucu olup ispat tamamlanır.

6. ÖRNEKLER

5. Bölümde ortaya atılan fikirler ve elde edilen sonuçlar bu bölümde örneklendirilerek karşılık bulacaktır. Ayrıca çeşitli grafiklerle desteklenecektir.

Örnek 6.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdaki gibi bir parametrik eğri verilsin.

$$r(\sigma) = \left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{6}\right), \sigma \in (0, \varepsilon), \varepsilon > 0,$$

Bu eğri Şekil 6.1 deki gibi ifade edilir. Burada

$$det\left(\frac{dr}{d\sigma}, \frac{d^2r}{d\sigma^2}, \frac{d^3r}{d\sigma^3}\right)(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \frac{\sigma^2}{2} \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan σ parametresi $r(\sigma)$ eğrisi için eş afin yay parametresidir. Buna göre bu eğrinin klasik eş afin vektörleri

$$T_a(\sigma) = \frac{dr}{d\sigma}(\sigma) = \left(1, \sigma, \frac{\sigma^2}{2}\right),$$

$$N_a(\sigma) = \frac{d^2r}{d\sigma^2}(\sigma) = (0,1,\sigma),$$

$$B_a(\sigma) = \frac{d^3r}{d\sigma^3}(\sigma) = (0,0,1)$$

şeklindedir. $\frac{dB_a}{d\sigma} = (0,0,0)$ olduğundan Tanım 3.7 gereğince klasik eş afin eğrilik fonksiyonları parametreden bağımsız sıfır fonksiyonlarıdır, yani $\kappa_a = \tau_a = 0$. Şimdi $r(\sigma)$ parametrik eğrisinin α −mertebeden nicelikleri elde edilecektir: Bunun için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$s: (0, \theta) \to \mathbb{R}^+, \sigma \mapsto s(\sigma) = \left[\frac{\alpha + 1}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma\right]^{\frac{2}{\alpha+1}}$$

α −mertebeden eş afin yay uzunluğu fonksiyonunu alalım. Burada açıktır ki

$$\sigma(s) = \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ve böylece $\tilde{r}(s) = r(\sigma(s))$ için

$$\tilde{r}(s) = \left(\frac{2}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} s^{\frac{\alpha+1}{2}}, \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} s^{\frac{\alpha+1}{2}}\right]^2, \frac{1}{6}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} s^{\frac{\alpha+1}{2}}\right]^3\right) \tag{6.1}$$

olur. Ayrıca klasik eş afin vektörler s parametresi cinsinden

$$T_a(s) = \left(1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}, \frac{2}{(1+\alpha)^2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1}\right),$$

$$N_a(s) = \left(0,1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}\right),$$

$B_a(s) = (0,0,1)$

şeklinde yazılır. Şimdi (5.1) sadeleştirme formülü kullanılarak (6.1) eşitliğinde s parametresine göre türev alınırsa

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d\tilde{r}}{ds}(s) = \left(\left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\alpha+1}s, \frac{2}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}\right) \tag{6.2}$$

bulunur. (6.2) de s parametresine göre adi türev alınırsa

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{dT_a^{\{\alpha\}}}{ds}(s) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-1-\alpha}{2}}, \frac{2}{\alpha+1}, \frac{3+\alpha}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} s^{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \tag{6.3}$$

olur. Gene (6.3) de s parametresine göre adi türev alınırsa

$$B_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{dN_a^{\{\alpha\}}}{ds}(s) = \left(\frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-3-\alpha}{2}}, 0, \frac{3+\alpha}{2(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} s^{\frac{-1+\alpha}{2}}\right) \tag{6.4}$$

şeklinde α −mertebeden eş afin Frenet vektörleri bulunur. Burada determinant özellikleri kullanılarak

$$det\left(T_a^{\{\alpha\}}, N_a^{\{\alpha\}}, B_a^{\{\alpha\}}\right)(s) = \frac{2s^{-2}}{(1+\alpha)^2}\begin{vmatrix} s^2 & s & \dfrac{2}{1+\alpha}s^2 \\ \dfrac{1-\alpha}{2}s & 1 & \dfrac{3+\alpha}{1+\alpha}s \\ \dfrac{\alpha^2-1}{4} & 0 & \dfrac{3+\alpha}{2} \end{vmatrix} = 1$$

olduğu elde edilir ki Önerme 5.1 karşılık bulmaktadır, yani s α −mertebeden eş afin yay parametresidir. Şimdi (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitliklerinin bu örnek nezdinde karşılıkları ifade edilecektir. (6.2) eşitliğine yeniden bakılırsa açıktır ki (5.8) eşitliği sağlanmaktadır, yani

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) = \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}, \frac{2}{(1+\alpha)^2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1}\right).$$

(6.3) eşitliği için kolayca görülür ki

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) + N_a(s) =$$

$$\frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}, \frac{2}{(1+\alpha)^2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1}\right) + \left(0,1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}\right)$$

olup, (5.9) sağlanmaktadır. Gene (6.4) eşitliğinden

$$B_a^{\{\alpha\}}(s) = -\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} T_a(s) + \frac{1-\alpha}{2}s^{-1}N_a(s) + \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}} B_a(s) =$$

$$-\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha s^{-3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}, \frac{2}{(1+\alpha)^2}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1}\right) + \frac{1-\alpha}{2}s^{-1}\left(0,1, \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}\right) +$$

$$\left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}(0,0,1)$$

olduğu görülebilir. Yani (5.10) eşitliği de sağlanmaktadır. Burada Önerme 5.2 karşılık bulmuştur çünkü bu önermenin hipotezi (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitliklerinin matris formunda yazılmasından ibarettir. Şimdi Teorem 5.1 için bu örnek nezdinde doğrulama yapılacaktır. α −mertebeden eş afin eğrilikler için

$$\frac{dB_a^{\{\alpha\}}}{ds}(s)=\left(\frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-5-\alpha}{2}},0,\frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{-3+\alpha}{2}}\right)$$

hesaplansın. Buna göre Tanım 5.2 den

$$\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)=-det\left(N_a^{\{\alpha\}},B_a^{\{\alpha\}},\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right)(s)$$

$$=-\begin{vmatrix} \frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-1-\alpha}{2}} & \frac{2}{\alpha+1} & \frac{3+\alpha}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{1+\alpha}{2}} \\ \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-3-\alpha}{2}} & 0 & \frac{3+\alpha}{2(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-5-\alpha}{2}} & 0 & \frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{-3+\alpha}{2}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1+\alpha)(3+\alpha)}{4}s^{-3}$$

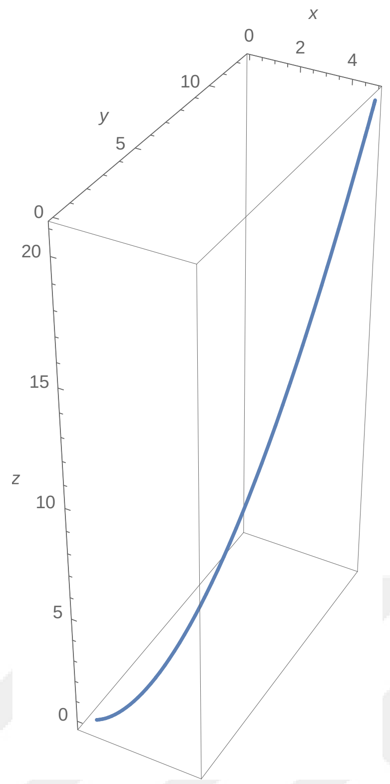
ve

$$\tau_a^{\{\alpha\}}(s)=det\left(T_a^{\{\alpha\}},B_a^{\{\alpha\}},\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}\right)(s)$$

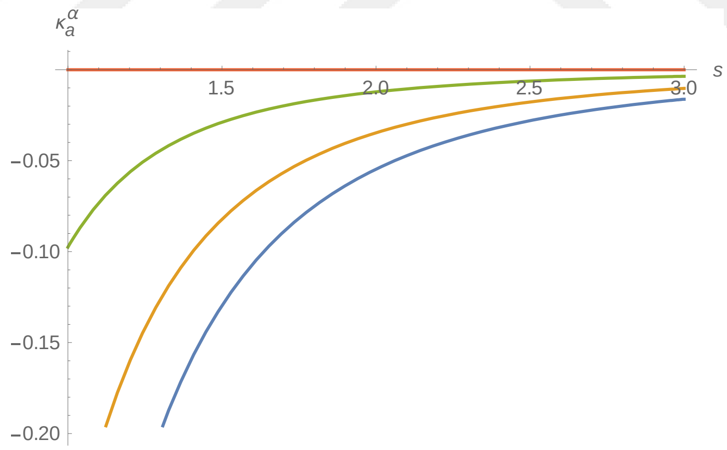
$$=\begin{vmatrix} \left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1-\alpha}{2}} & \frac{2s}{\alpha+1} & \frac{2}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{3+\alpha}{2}} \\ \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-3-\alpha}{2}} & 0 & \frac{3+\alpha}{2(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{-5-\alpha}{2}} & 0 & \frac{(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{-3+\alpha}{2}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(1-\alpha)(3+\alpha)s^{-2}}{4}$$

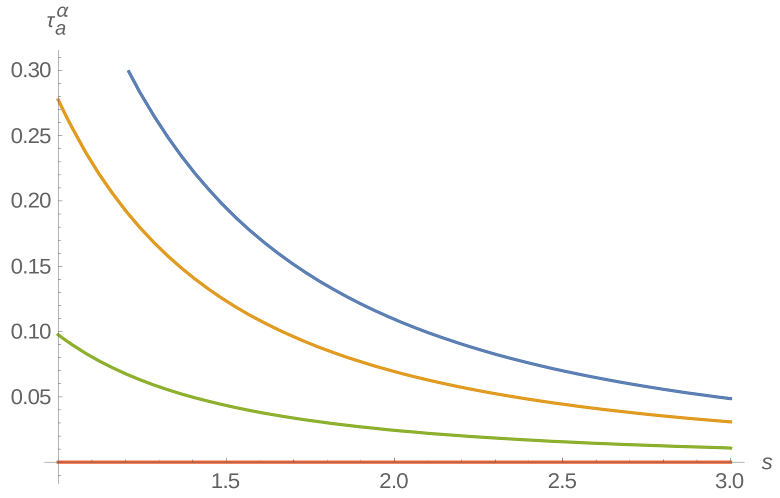
elde edilir. Buradan da görülür ki Teorem 5.1 de yani (5.13) ve (5.14) eşitliklerinde $\kappa_a=\tau_a=0$ alındığında meydana gelen sonuçlar Örnek 5.1 ile örtüşmektedir. $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)$ ve $\tau_a^{\{\alpha\}}(s)$ α −mertebeden eş afin eğrilik fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.2 ve Şekil 6.3 deki gibi resmedilebilir. Burada eğer $\alpha\neq 1$ ise açıktır ki $\tau_a^{\{\alpha\}}(s)+s\kappa_a^{\{\alpha\}}(s)=0$ dir, yani sonuç 5.1 deki iddialar burada gene karşılık bulmaktadır.



Şekil 6.1. $r(\sigma) = \left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{6}\right), \sigma \in [0.5,5]$, parametrik eğrisi



Şekil 6.2. $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(-1+\alpha)(3+\alpha)}{4} s^{-3}, s \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri



Şekil 6.3. $\tau_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{(1-\alpha)(3+\alpha)}{4} s^{-2}, s \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri

Örnek 6.2. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdaki gibi bir parametrik eğri verilsin

$$r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}, \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \frac{s^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)}\right), s \in (0,\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

α nın farklı değerlerine göre bu parametrik eğri Şekil 6.4 deki gibi ifade edilebilir. (5.1) sadeleştirme formülü kullanılarak s parametresine göre türev alınırsa

$$(D_s^\alpha r)(s) = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{dr}{ds} = \left(1, s, \frac{s^2}{2}\right)$$

bulunur. Yeniden s parametresine göre klasik türev alınırsa

$$\frac{d(D_s^\alpha r)}{ds}(s) = (0,1,s)$$

ve

$$\frac{d^2(D_s^\alpha r)}{ds^2}(s) = (0,0,1)$$

olmaktadır. Buna göre

$$det\left(D_s^\alpha r, \frac{d(D_s^\alpha r)}{ds}, \frac{d^2(D_s^\alpha r)}{ds^2}\right)(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & \frac{s^2}{2} \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan s parametresi $r(s)$ eğrisi için α −mertebeden eş afin yay parametresidir.

Uyarı 6.1. Burada (5.1) sadeleştirme formülü kullanılmadan klasik türev işlemi alınırsa s parametresinden yay parametresi olma özelliği elde edilemez. Gerçekten de

$$\frac{dr}{ds}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(s^{\alpha-1}, s^\alpha, \frac{s^{\alpha+1}}{2}\right),$$

$$\frac{d^2r}{ds^2}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left((\alpha-1)s^{\alpha-2}, \alpha s^{\alpha-1}, \frac{\alpha+1}{2}s^\alpha\right),$$

$$\frac{d^3r}{ds^3}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left((\alpha-1)(\alpha-2)\mathrm{s}^{\alpha-3}, \alpha(\alpha-1)\mathrm{s}^{\alpha-2}, \alpha\frac{\alpha+1}{2}\mathrm{s}^{\alpha-1}\right)$$

olup

$$det\left(\frac{dr}{ds},\frac{d^2r}{ds^2},\frac{d^3r}{ds^3}\right)(s) = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\right)^3\begin{vmatrix} \mathrm{s}^{\alpha-1} & \mathrm{s}^{\alpha} & \frac{\mathrm{s}^{\alpha+1}}{2} \\ (\alpha-1)\mathrm{s}^{\alpha-2} & \alpha\mathrm{s}^{\alpha-1} & \frac{\alpha+1}{2}\mathrm{s}^{\alpha} \\ (\alpha-1)(\alpha-2)\mathrm{s}^{\alpha-3} & \alpha(\alpha-1)\mathrm{s}^{\alpha-2} & \alpha\frac{\alpha+1}{2}\mathrm{s}^{\alpha-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)\mathrm{s}^{\alpha-1}}{\alpha}\right)^3$$

yazılır. Bu ifade s ve α parametrelerine bağlı olduğundan eş afin yay parametre özelliği göstermemektedir. Bunun gerçekleşmesi için öncelikle (5.2) eşitliğindeki gibi s yerine $s = \left[\frac{\alpha+1}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right]^{\frac{2}{\alpha+1}}$ yazılmalıdır, burada σ eğrinin klasik eş afin yay parametresidir.

Örnek 6.2 ye devam edilsin: α −mertebeden eş afin Frenet vektörleri

$$T_a^{\{\alpha\}}(s) = (D_s^\alpha r)(s) = \left(1, s, \frac{\mathrm{s}^2}{2}\right),$$

$$N_a^{\{\alpha\}}(s) = (0,1,s),$$

$$B_a^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = (0,0,1)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre $\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = (0,0,0)$ olduğundan (5.11) ve (5.12) eşitlikleri gereğince açıkça $\kappa_a^{\{\alpha\}}(s) = 0$ ve $\tau_a^{\{\alpha\}}(s) = 0$ dir. Bir başka deyimle $r(s)$ parametrik eğrisinin α −mertebeden eş afin eğrilik fonksiyonları özdeş olarak sıfırdır. Sonuç 5.2 den bu eğrinin klasik eş afin eğrilik fonksiyonları s parametresi cinsinden

$$\tau_a(s) = \frac{\alpha(3+\alpha)(-1+\alpha)}{4\Gamma(2-\alpha)}s^{-1-\alpha}$$

ve

$$\kappa_a(s) = \frac{(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8}\left(\frac{\alpha s^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

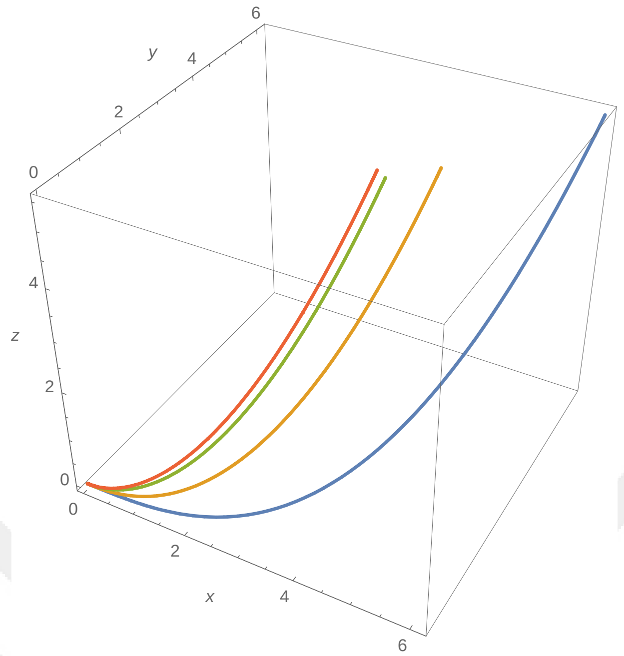
ya da σ klasik yay parametresi cinsinden

$$\kappa_a(\sigma) = (3+\alpha)(1-\alpha^2)\big((1+\alpha)\sigma\big)^{-3}$$

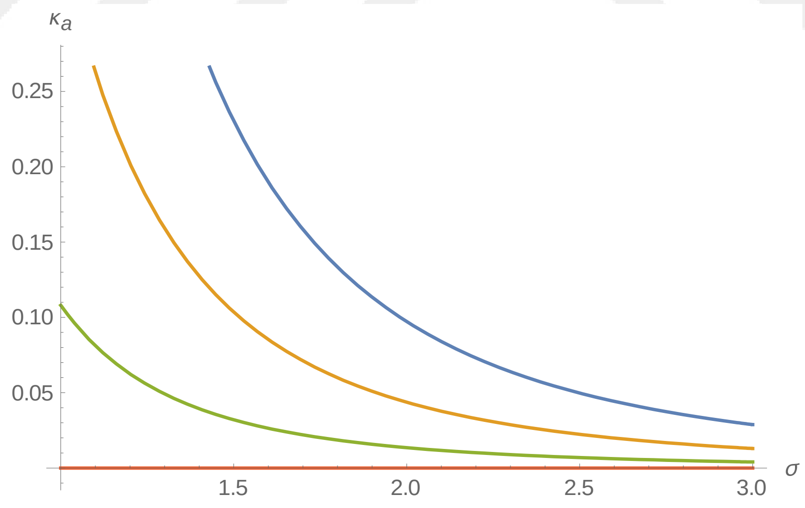
ve

$$\tau_a(\sigma) = -(3+\alpha)(1-\alpha^2)(1+\alpha)^{-3}\sigma^{-2}$$

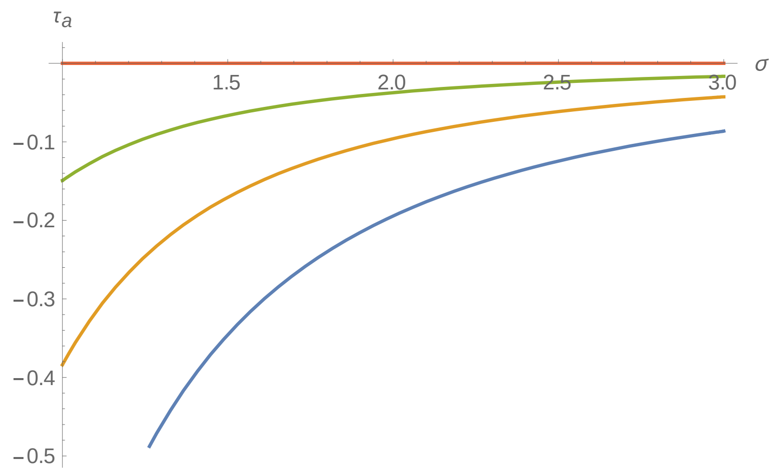
şeklinde olur. Burada $\sigma\kappa_a(\sigma) + \tau_a(\sigma) = 0$ olduğu görülebilir. $\kappa_a(\sigma)$ ve $\tau_a(\sigma)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.5 ve 6.6 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 6.4. $r(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}, \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \frac{s^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)}\right), s \in [0,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri



Şekil 6.5. $\kappa_a(\sigma) = (3+\alpha)(1-\alpha^2)((1+\alpha)\sigma)^{-3}, \sigma \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri



Şekil 6.6. $\tau_a(\sigma) = -(3+\alpha)(1-\alpha^2)(1+\alpha)^{-3}\sigma^{-2}, \sigma \in [1,3]$, fonksiyonunun; $\alpha = 0.5$ için mavi, $\alpha = 0.7$ için turuncu, $\alpha = 0.9$ için yeşil ve $\alpha = 1$ için kırmızı renkte çizilen grafikleri

7. SONUÇ

Kesirli analiz teknikleri (özellikle Caputo kesirli türev operatörü) kullanılarak eğrilerin diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bunu yaparken Caputo kesirli türev operatörünün doğası gereği bileşke fonksiyonu ve Leibniz kuralına dair bazı dezavantajlarından ötürü, Giriş bölümünde ifade edilmiş olan (1.2) sadeleştirme formülünün kullanılması elzemdi. Bu sadeleştirme formülü ile birlikte kesirli türevin çalışmamızdaki etkisi kısıtlı oldu, maalesef! Yani bu tezde elde edilen sonuçlar kesirli analiz tarafında değil de daha çok diferansiyel geometrik kısımda karşılık buldu. Elde edilen sonuçlar Diferansiyel Geometri ve kesirli analiz pencerelerinden aşağıdaki gibi yorumlanabilir:

1. (1.2) sadeleştirme formülünün vektör değerli fonksiyonlara uygulanması ile $\mathbb{R}^3$ uzayında dejenere olmayan düzgün bir parametrik eğrinin $\alpha -$mertebeden geometrik nicelikleri ifade edilmiştir. Açıkça $\alpha -$mertebeden eş afin yay parametresi, Frenet vektörleri, Frenet formülleri ve eğrilik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu tanımlanan araçların klasik olanlarla arasındaki ilişkiler analiz edilmiştir. Örnekler ve çizilen grafikler sayesinde teorik sonuçlar detaylı olarak irdelenmiştir. Sunulan tez çalışmasına [24] numaralı araştırma makalesinde ortaya atılan fikrin 3-boyutlu duruma genelleştirilmişi olarak bakılabilir.
2. Kesirli analiz penceresinden (5.13) ve (5.14) eşitlikleri daha yakın bir alakayı hak etmektedir. Bu eşitlikler bize bir eğrinin başlangıç anında çok yüksek $\alpha -$ mertebeden eş afin eğriliklere sahip olduğunu ve zamanla bu değerlerin azaldığını ima etmektedir. Bu ise kesirli türevin zamanla azalan hafıza etkisini işaret eder.

ÖNERİLER

Bu alt bölümde üç farklı araştırma problemi önerilerinde bulunulacaktır. Problemlerin çözümlerine dair fikirler de ifade edilecektir.

1. Problem: $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir parametrik eğrinin $\alpha-$mertebeden eş afin argümanlarının tanımlanması, yani (1.2) sadeleştirme formülünün uygulanması için aşağıdaki gibi bir parametreleme yapılması gerekmektedir ([24]):

$$s=\left[\frac{2\alpha+1}{3}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{2}{3}}\sigma\right]^{\frac{3}{2\alpha+1}}. \tag{7.1}$$

Ayrıca (5.2) formülü burada tekrardan yazılsın ve yeni bir denklem numarası verilsin:

$$s=\left[\frac{\alpha+1}{2}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right]^{\frac{2}{\alpha+1}}. \tag{7.2}$$

(7.1) ve (7.2) eşitlikleri açıkça birbirinden farklıdır ve dolayısıyla (1.2) sadeleştirme formülünün $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarında uygulanabilir olması için farklı parametre ifadeleri kullanılması gerekmektedir. Bu sayede şöyle bir geometrik sorgulama yapılabilir: $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, *uzayında (1.2) sadeleştirme formülünü uygulayabilecek ve* n *değerine bağlı bir genel eş afin yay parametresi ifadesi var mıdır?* Bu sorunun yanıtı evettir ve cevabı kısaca aşağıdaki gibi verilebilir: $\mathbb{R}^n$ uzayında klasik eş afin yay parametreli bir $r(\sigma)$ eğrisi ve bu eğrinin klasik eş afin Frenet vektörleri $\{V_{1a},V_{2a},\dots,V_{(n-1)a},V_{na}\}$ olsun, burada $V_{1a}=\frac{dr}{d\sigma}, V_{2a}=\frac{d^2r}{d\sigma^2},\dots,V_{(n-1)a}=\frac{d^{n-1}r}{d\sigma^{n-1}}, V_{na}=\frac{d^nr}{d\sigma^n}$ ve her σ için $det(V_{1a},V_{2a},\dots,V_{na})(\sigma)=1$ dir. Ayrıca $x,y\neq 0$ reel sabitler olmak üzere

$$s=\left(\frac{1}{y}\sigma\right)^{\frac{1}{x}} \tag{7.3}$$

tanımlansın. Bunun için $\sigma=ys^x$ ve dolayısıyla

$$\frac{d\sigma}{ds}=xys^{x-1} \tag{7.4}$$

dir. Buna göre (1.2) ve (7.4) eşitliklerinden ve zincir kuralından

$$V_{1a}^{\{\alpha\}}(s)=(D_s^\alpha r)(s)=\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\right)(s)=\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}xys^{x-\alpha}V_{1a}(s)$$

şeklinde $V_{a1}^{\{\alpha\}}$ vektörü tanımlansın. Sonra zincir kuralı kullanılarak

$$V_{2a}^{\{\alpha\}}(s)=\frac{d\left(V_{1a}^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s)=(\dots)V_{1a}(s)+\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}(xy)^2s^{2x-\alpha-1}V_{2a}(s),$$

yazılır burada $(\dots)$ ifadesi ile işlemler içerisinde etkisi olmayacak terimler kast edilmektedir. Devam edilirse

$$V_{3a}^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(V_{2a}^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s) = (\dots)V_{1a}(s) + (\dots)V_{2a}(s) + \frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}(xy)^3 s^{3x-\alpha-2} V_{3a}(s).$$

Benzer şekilde zincir kuralı gözetilerek türev işlemine devam edilirse

$$V_{4a}^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(V_{3a}^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s)$$
$$= (\dots)V_{1a}(s) + (\dots)V_{2a}(s) + (\dots)V_{3a}(s) + \frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}(xy)^4 s^{4x-\alpha-3} V_{3a}(s)$$

bulunur. Açıktır ki bu süreç böyle devam edildiğinde

$$V_{na}^{\{\alpha\}}(s) = \frac{d\left(V_{(n-1)a}^{\{\alpha\}}\right)}{ds}(s)$$
$$= (\dots)V_{1a}(s) + (\dots)V_{2a}(s) + \cdots + (\dots)V_{(n-1)a}(s)$$
$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}(xy)^n s^{nx-\alpha-n+1} V_{na}(s)$$

elde edilir. $det\left(V_{1a}^{\{\alpha\}}, V_{2a}^{\{\alpha\}}, \dots, V_{(n-1)a}^{\{\alpha\}}, V_{na}^{\{\alpha\}}\right) = 1$ olacak şekilde bir s parametresi aranmaktadır. Buna göre determinant özellikleri kullanılarak

$$det\left(V_{1a}^{\{\alpha\}}, V_{2a}^{\{\alpha\}}, \dots, V_{(n-1)a}^{\{\alpha\}}, V_{na}^{\{\alpha\}}\right)(s)$$
$$= \left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^n (xy)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{\frac{n(n+1)}{2}x - n\alpha - \frac{n(n-1)}{2}} det(V_{1a}, V_{2a}, \dots, V_{na})(s)$$

ve dolayısıyla

$$det\left(V_{1a}^{\{\alpha\}}, V_{2a}^{\{\alpha\}}, \dots, V_{(n-1)a}^{\{\alpha\}}, V_{na}^{\{\alpha\}}\right)(s) = \left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^n (xy)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{\frac{n(n+1)}{2}x - n\alpha - \frac{n(n-1)}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin 1 e eşit olmasını istediğimizden $s^{\frac{n(n+1)}{2}x - n\alpha - \frac{n(n-1)}{2}}$ teriminin yok olması gerekir ve dolayısıyla

$$x = \frac{2\alpha + n - 1}{n + 1}$$

ve

$$\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^n (xy)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$$

eşitliğinden

$$y = \frac{n+1}{2\alpha + n - 1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-\frac{2}{n+1}}$$

elde edilir ki böylece istenen parametre (7.3) eşitliğinden

$$s = \left(\frac{2\alpha+n-1}{n+1}\left(\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sigma\right)^{\frac{n+1}{2\alpha+n-1}} \tag{7.5}$$

şeklinde bulunabilir. Burada kolayca görülebilir ki n yerine sırasıyla 2 ve 3 yazıldığında (7.1) ve (7.2) parametreleri elde edilebilir. Böylece (7.5) ile verilen parametreleme formülü kullanılarak

[24] ve bu tez içerisinde ortaya atılan fikirler keyfi (sonlu) boyutlu uzaylarda uygulanabilir. Bu ise araştırmacılar için yeni ve değerli bir çalışma alanını doğurma potansiyeline sahip bir açık problemdir.

2. Problem: Diferansiyel Geometride en merkezi araştırma problemlerinden biri sabit eğrilikli nesneleri bulmak ve bunlar üzerinde çalışmalar yapmaktır. Bu bakış açısı ile $\mathbb{R}^3$ uzayında sabit α −mertebeden eş afin eğriliğine sahip bir eğrinin parametrik denklemini elde etme problemi ilginç olabilir. Bu problemi çözmek için α −mertebeden eş afin denklemlerinden

$$\frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} + \tau_a^{\{\alpha\}} N_a^{\{\alpha\}} + \kappa_a^{\{\alpha\}} T_a^{\{\alpha\}} = 0$$

vektör diferansiyel denklemi ele alınmalıdır. Bu denklemde eğer $\kappa_a^{\{\alpha\}} = c \in \mathbb{R}$, $\tau_a^{\{\alpha\}} = d \in \mathbb{R}$ ve

$$T_a^{\{\alpha\}} = Y, \qquad N_a^{\{\alpha\}} = \frac{d\left(T_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = Y', \qquad B_a^{\{\alpha\}} = \frac{d\left(N_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = Y'', \qquad \frac{d\left(B_a^{\{\alpha\}}\right)}{ds} = Y'''$$

gösterimleri kullanılırsa

$$Y''' + dY' + cY = 0 \tag{7.6}$$

şeklinde 3. mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen vektör diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümlerine karşılık gelen parametrik nesneler 2. Problemin çözümünü ifade eder. (7.6) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 + d\lambda + c = 0 \tag{7.7}$$

şeklinde 3. dereceden cebirsel denklemle ifade edilir. (7.6) denklemini çözmenin yolu (7.7) cebirsel denkleminin çözümlerinden geçer.

3. Problem: Bu tez içerisinde çıkarım yapılabilecek bir diğer yeni konu 3-boyutlu durumda Chen eğrileri ile alakalıdır. 3-boyutlu Öklit uzayında bir parametrik eğri $r(t)$, tanım aralığındaki her bir değer için eğer

$$r(t) \in Span\{T_f(t), B_f(t)\} \tag{7.8}$$

bağıntısını sağlar ise o zaman *Chen eğrisi* (*rektifiye eğri*) adını alır. Burada T_f ve B_f ile birim teğet ve binormal vektör alanları gösterilmektedir. $r(t)$ eğrisinin Frenet eğrilik fonksiyonları κ_f ve τ_f ile temsil edilsin. Chen eğrilerine dair önemli bir karakterizasyon mevcuttur: Bir $r(t)$ eğrisinin Chen eğri olması için

$$\frac{\tau_f}{\kappa_f}(t) = pt + q$$

bağıntısının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada $p \neq 0$ ve $p, q \in \mathbb{R}$ dir. Şimdi bu karakterizasyon Sonuç 5.1 ile kıyaslansın. Açık bir ifade ile $r(s)$ ile 3-boyutlu afin uzayında α −mertebeden eş afin yay uzunluğuna sahip bir eğri gösterilsin. Eğer bu eğri özdeş olarak sıfır olan klasik eş afin eğriliklere sahip ise o zaman bu eğrinin α −mertebeden eş afin eğrilikleri

$$\left(\frac{\tau_a^{\{\alpha\}}}{\kappa_a^{\{\alpha\}}}\right)(s) = -s \tag{7.9}$$

şeklindedir, yani Chen eğri kriterini sağlar ($p = -1$ ve $q = 0$). Ancak bu durumda $r(s)$ konum vektörünün

$$r(s) \in Span\left\{T_a^{\{\alpha\}}(s), B_a^{\{\alpha\}}(s)\right\} \tag{7.10}$$

şartını sağlayıp/sağlamadığını kontrol etmek bir problem olarak durmaktadır. Burada $T_a^{\{\alpha\}}$ ve $B_a^{\{\alpha\}}$ ile α −mertebeden teğet ve binormal vektör alanları gösterilmektedir. Daha genel olarak şöyle bir soru zihinde canlanmaktadır: *Eğer bir eğri (7.10) şartını gerçeklediğinde α −mertebeden eş afin eğrilikleri (7.9) eşitliğini sağlar mı?* Bu sorunun cevabının olumlu/olumsuz olduğu yazar ve danışman tarafından henüz bilinmemektedir. Eğer cevap olumsuzsa o zaman şöyle bir sorgulama gerekmektedir: *Bir parametrik eğrinin (7.10) şartını gerçekleşmesi için hangi kriterleri taşıması gerekmektedir?* Bu yeni bir araştırma problemini ortaya çıkarmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Li, A.-M., Simon, U., Zhao, G., Hu,Z. (2015). *Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces*, W. de Gruyter, Berlin

[2] Nomizu, K., Sasaki, T. (1994). *Affine Differential Geometry. Geometry of Affine Immersions,* Cambridge University Press, Cambridge

[3] Davis, D. (2006). Generic affine differential geometry of curves in $\mathbb{R}^n$, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, cilt 136 ss. 1195-1205

[4] Calabi, E., Olver, P.J., Tannenbaum, A. (1996). Affine geometry, curve flows, and invariant numerical approximations, *Advences in Mathematics*, cilt 124, ss. 154-196.

[5] Izumiya, S, Sano, T. (1998). Generic affine differential geometry of plane curves, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, cilt 41, ss. 315-324

[6] Sagiroglu, Y., Peksen, O. (2010). The equivalence of equi-affine curves, *Turkish Journal of Mathematics*, cilt 34, ss. 95-104

[7] Hu, N. (2012). Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces, Doktora Tezi, Hokkaido Üniversitesi

[8] Clelland J.N. (2017). *From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island

[9] Cansu, G. (2015). Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

[10] Aydın, M.E., Erdem, E., Yılmaz, M.Y. (2021). Plane curves with same equi-affine and Euclidean invariants, *International Journal of Maps in Mathematics,* cilt 4(1), ss. 40-52

[11] Baleanu, D., Fernandez, A. (2019). On fractional operators and their classifications, *Mathematics* cilt7, ss.830

[12] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, London, UK

[13] Yajima, T., Nagahama, H.: Differential geometry of viscoelastic models with fractional-order derivatives. J. Phys. A: Math. Theor. 43 (38) (2010), 385207; doi: 10.1088/1751-8113/43/38/385207

[14] Kulish, V. V.,Lage, J. L., (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics *J. Fluids Eng.* 124, doi:10.1115/1.1478062

[15] Tarasov, V. E., (2005). Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems *J. Phys. A: Math.Gen* 38, doi: 10.1088/0305-4470/38/26/007

[16] Dokuyucu, M.A., Celik, E., Bulut, H., Baskonus, H.M. (2018). Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative. *Eur. Phys. J. Plus* cilt 133(92). doi:10.1140/epjp/i2018-11950-y

[17] Bas, E., Ozarslan, R. (2018). Real world applications of fractional models by Atangana–Baleanu fractional derivative. *Chaos Solit. Fractals* cilt 116, ss. 121-125

[18] Yajima, T. ve Yamasaki K. (2012). Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows, *J. Phys. A: Math. Theor.* cilt 45(6), 065201; doi:10.1088/17518113/45/6/065201.

[19] Baleanu, D. ve Vacaru, S.I. (2011). Fractional almost Kahler–Lagrange geometry *Nonlinear Dyn.* cilt 64(4), doi: 10.1007/s11071-010-9867-3

[20] Yajima, T., Oiwa, S. ve Yamasaki, K. (2018). Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret formulas, *Fract. Calc. Appl. Anal.* cilt 21(6), ss. 1493-1505

[21] Gozutok, U., Coban H.A. ve Sagiroglu, Y. (2019). Frenet frame with respect to conformable derivative, *Filomat* cilt 33(6), ss. 1541-1550

[22] Lazopoulos, K.A. and Lazopoulos, A.K. (2016). Fractional differential geometry of curves & surfaces. *Progr. Fract. Differ. Appl*. cilt 2(3), ss. 169–186.

[23] Aydin, M.E., Bektas, M., Ogrenmis, A.O., Yokus, A. (2021). Differential geometry of curves in Euclidean 3-space with fractional order, *Int. Electron. J. Geom.* cilt 14(1), ss. 132-144

[24] Aydin, M.E., Mihai, A., Yokus, A. (2021). Applications of fractional calculus in equiaffine geometry: plane curves with fractional order, *Math. Meth. Appl. Sci.* doi. 10.1002/mma.7649

[25] Barış, R. (2021). Uyumlu türev ve eğriler teorisinin karakterizasyonları, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

[26] Tarasov VE. (2013). No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. cilt 18, ss. 2945-2948.

[27] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose *Q* is almost frequency independent: II *Geophys. J. R. Astron.Soc.* 13.

[28] Kilbas, A., Srivastava, H. ve Trujillo, J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Math. Studies., North-Holland, New York.

[29] Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives*. London, UK: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers

[30] Baleanu, D., Trujillo, J.J. (2010). A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations within Caputo fractional derivatives. *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* cilt 15(5), ss. 1111-1115

[31] Hacısalihoğlu, H.H. (1998). Diferansiyel Geometri Cilt:1, Hacısalihooğlu Yayıncılık.

[32] Wang, J.-L., Li, H.-F. (2011). Surpassing the fractional derivative: Concept of the memory-dependent derivative, *Comp. Math. Appl.* cilt 62, ss. 1562-1567

[33] Chen, B.-Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? Amer. Math. Monthly cilt 110, ss. 147-152

[34] Yüce, S. (2017). *Öklit Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem A Yayıncılık.

ÖZGEÇMİŞ

Şeyma KAYA

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

AKADEMİK FAALİYETLER

Tebliğler:

1. Aydın, M.E., Kaya, Ş. (2022). Use of Fractional Derivative in Differential Geometry, 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-22 May 2022, Ordu, Turkey

Makaleler:

1. Aydın, M.E., Kaya, Ş. Fractional equiaffine curvatures of curves in 3-dimensional affine space, incelemede.

Projeler:

1. Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (FÜBAP) tarafından **FF.21.05** protokol numaralı proje ile desteklenmiştir. Proje Adı: Kesirli Analizin Eğrilerin Afin Dfieransiyel Geometrisime Uygulamaları. Proje Ekip Üyeleri: Yürütücü: Doç. Dr. Muhittin Evren Aydın. Araştırmacı: Şeyma Kaya.