



TENSÖR OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI

Kübra ATASEVER

Danışman: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2022

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TENSÖR OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI
(Tensor Operators and Their Applications)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ATASEVER

Danışman: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

Erzurum
Haziran, 2022

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Kübra ATASEVER tarafından hazırlanan “**TENSÖR OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI**” başlıklı çalışması 29 / 06 / 2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Doç. Dr. Çağrı KARAMAN Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Nejmi CENGİZ Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Dr. Öğretim Üyesi Sibel TURANLI Erzurum Teknik Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun
....../.../.... tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü
Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Nejmi CENGİZ danışmanlığında sunulan “Tensör Operatörleri ve Uygulamaları” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	14	30
Materyal ve Metot	13	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	2	20
Sonuçlar ve Öneriler	0	20
Tezin Geneli	12	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Kübra ATASEVER	Prof. Dr. Nejmi CENGİZ
29.6.2022	29.6.2022
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarında ve tezin hazırlanışında yardımlarından çokça istifade ettiğim kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Nejmi CENGİZ'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu alanda çalışmalar yapmam için bana yol gösteren Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU ve Sayın Prof. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Beni bir tez çalışması yapabilecek sürece hazırlayan tüm öğretmenlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Destekleri ile beni her zaman daha ileriye taşıyan ve tez sürecinde de beni yalnız bırakmayan kıymetli aileme özellikle biricik annem Sevilay ATASEVER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ve son olarak Kalemle yazmayı Öğretene en özel teşekkürlerimi sunarım.

Kübra ATASEVER

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ TENSÖR OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI

Kübra ATASEVER

Danışman: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

Amaç: Bu çalışmada C^∞ -sınıfından olan M_n manifoldu üzerinde Tachibana, Vishnevskii ve Yano-Ako operatörlerini tanımlayarak bu operatörleri pür tensör alanlarına uygulamak, özel durumda ise invaryant altmanifoldda Tachibana operatörünü uygulamak amaçlanmıştır.

Yöntem: Tez ile ilgili olarak kuramsal temel, genel metodlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdakiler kullanılacaktır:

1. Manifold üzerindeki pür tensör alanlarını tanıtmak
2. Tachibana ve Nijenhuis tensör operatörlerini tanıtmak
3. İnvaryant alt manifoldu tanıtmak
4. g_{ij} Riemann metrik tensörünün, ϕ -tensörü olması durumunda g_{AB} Riemann metrik tensörüne ϕ -operatörünü uygulamak

Bulgular: Bu tezde, invaryant alt uzaylar üzerindeki afinor yapılar bakıldığında g_{AB} Riemann metrik tensörünün ϕ -tensörü olduğu bulunmuştur. Ayrıca manifold üzerinde Nijenhuis tensörünün sıfır olması ile birlikte invaryant altmanifoldda da sıfır olduğu bulunmuştur. Bir kompleks manifoldun invaryant alt uzayının indirgenmiş yapısıyla analitik olduğu gösterilmiştir.

Sonuç: Diferensiyel Geometri’de yapının integrallenebilmesi ve analitik olması önemli konulardan biridir. Tachibana operatörünün veya bunun özel hali olan Nijenhuis operatörünün incelenmesi ve bunun sıfır olması durumu önemli bir sonuçtur. Dolayısıyla invaryant altmanifoldlar üzerinde elde edilen sonuçlar gelecekteki çalışmalara yön verecektir.

Anahtar Kelimeler: metrik tensör, pür tensör, Tachibana operatörü, Nijenhuis tensörü, Vishnevskii operatörü, Yano-Ako operatörü.

Haziran 2022, 67 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

TENSOR OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

Kübra ATASEVER

Supervisor: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

Purpose: The aim of this thesis is to define Tachibana, Vishnevskii and Yano-Ako operators on the M_n manifold that C^∞ class and apply these operators to pure tensor fields, in the special case, applying the Tachibana operator to the invariant submanifold.

Method: The following will be used as theoretical basis, general methods and research techniques in this study:

1. Study of pure tensor fields on a manifold
2. Study of Tachibana and Nijenhuis tensor fields
3. To introduce invariant submanifold
4. To apply the ϕ -tensor to g_{AB} Riemann metric tensor when g_{ij} Riemann metric tensor is ϕ -operator

Findings: In this thesis, it is found that the Riemann metric tensor g_{AB} is ϕ tensor for affiner structures on invariant subspaces. Also if the Nijenhuis tensor is zero on an manifold, it is found to be zero on the invariant submanifold. In addition, the invariant subspace of a complex manifold has been shown to be analytical with its reduced structure.

Results: In Differential Geometry, integrating the structure and being analytical is one of the important issues. Examining the Tachibana operator or its special case, the Nijenhuis operator, is an important result if it is zero. Therefore, the results obtained on invariant submanifolds will guide future studies.

Keywords: metric tensor, pure tensor, Tachibana operator, Nijenhuis tensor, Vishnevskii operator, Yano-Ako operator.

June 2022, 67 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	2
Vektör Uzayı	2
Tensörler	3
Tensörler üzerinde işlemler.....	4
Tensörlerde Koordinatlar	7
Tensör dönüşüm kanunu	8
Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	9
Tensör alanları.....	12
Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Lineer (Afin) Konneksiyon	16
Eğrilik ve Burulma Tensörleri	18
MATERYAL ve YÖNTEM	20
Pür Tensör Alanları	20
Tachibana Operatörleri.....	22
ϕ_ϕ -Operatörünün (1,1) tipli tensör alanı üzerine uygulanması	23
ϕ_ϕ -Operatörünün $s \geq 2$ için 1, s tipli tensör alanına uygulanması	25
ϕ_ϕ -Operatörünün 1-Form'a uygulanması	26
ϕ_ϕ -Operatörünün $s \geq 2$ için (0, s) tipli bir tensör alanına uygulanması	28
ϕ_ϕ -Operatörünün r, s tipli bir tensör alanına uygulanması	30
Vishnevskii Operatörleri	31
Ψ_ϕ -Operatörünün $s \geq 0$ için 1, s tipli bir tensör alanına uygulanması.....	32
Ψ_ϕ -Operatörünün 0, s tipli bir tensör alanına uygulanması	33
Ψ_ϕ -Operatörünün $r > 1$ için r, s tipli bir tensör alanına uygulanması	34

Ψ_ϕ -Operatörünün pür konneksiyona uygulanması	36
Tachibana Operatörlerinin Karmaşık Tipli Tensör Alanına Uygulanması	38
Altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanları	38
$\phi_{\phi, \tilde{\phi}}$ -Operatörleri	39
$\phi_{\phi, \tilde{\phi}}$ -Operatörünün $1, s, 0, q$ ve $0, s, 1, q$ tipli tensör alanlarına uygulanması	41
$\phi_{\phi, \tilde{\phi}}$ -Operatörünün $0, s, 0, 0$ ve $0, 0, 0, q$ tipli tensör alanlarına uygulanması	43
Yano-Ako Operatörleri	45
Tanımlar	45
ϕ_S -Operatörünün $(1, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması	46
ϕ_S -Operatörünün $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması	47
Ψ_S -Operatörleri	49
Ψ_S -Operatörünün $s \geq 0$ için $(1, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması	49
Ψ_S -Operatörünün $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması	51
Genellemeler	52
ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	55
Altuzaylar Üzerinde Afinor Yapılar.....	55
İnvaryant altuzaylar.....	55
Hemen hemen analitik altmanifold	55
İnvaryant alt manifold üzerinde tachibana operatörü.....	56
Riemann Metrik Tensörünün Φ -Tensör Olması	58
İndirgenmiş hemen hemen hermit yapılar.....	60
Hemen Hemen B-Altmanifold	61
SONUÇ.....	64
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	67

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{D}$	: Türev Operatörü
Φ_φ	: Tachibana Operatörü
Ψ_φ	: Vishnevskii Operatörü
ϕ_S	: Yano-Ako Operatörü
L_X	: X vektör alanı yönündeki Lie türevi
∇_X	: X vektör alanı yönündeki kovaryant türev
R_{ijk}^h	: Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	: Burulma Tensörü
Γ_{ij}^h	: Christoffel Sembolü
N_φ	: Nijenhuis Tensör Alanı
$\overset{c}{\otimes}$	: Pür Çarpım
$\mathfrak{S}_s^r(M_n)$	: (r, s) Tipli Tensör Alanlarının Modülü
$\overset{*}{\mathfrak{S}}_s^r(M_n)$	: (r, s) Tipli Pür Tensör Alanlarının Modülü
$\overset{s}{\mathfrak{S}}_s^r(M_n)$	: S 'ye göre (r, s) Tipli Pür Tensör Alanlarının Modülü

GİRİŞ

Tensör alanlarının türev gösterimi Diferensiyel Geometri'nin merkeze aldığı kavram ve temel çalışma konularından biridir. Manifold üzerinde bir vektör alanına göre Lie türevi ve kovaryant türev bunların en tipik örnekleridir. Pür tensör alanlarına uygulanan bir tensör operatörü, $q > 0$ olmak üzere $(1, q)$ tipli sabit bir tensöre uygulanan Lie türevinin ve kovaryant türevin genelleştirilmiş halidir (Salimov 2013).

Tensör operatörleri sınıfının en önemlilerinden biri $(1,1)$ tipli pür tensör alanına göre uyarlanmış Tachibana operatörleridir. Tachibana operatörleri ile ilgili ilk çalışmalara 1960'lı yılların başında (Tachibana 1960), (Tachibana and Koto 1962) ve (Sato 1966) kaynaklarında rastlanır. Ardından Shirokov (1966) ve Kruchkovich (1972) değişmeli hiperkompleks yapıya uyarlanan Tachibana operatörleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Eğer değişmeli hiperkompleks yapının afinorları burulmasız konneksiyona göre kovaryant olarak sabit ise Tachibana operatörlerinin sınıfı Vishnevskii operatörlerinin sınıfına denk olur. İlk kez (Vishnevskii 1970) tarafından çalışılan bu operatörün geliştirilmesine katkı sağlayan çalışmalardan biri de (Vishnevskii, Shirokov ve Shurygin 1985) olmuştur.

Daha sonra ise (Salimov 1983; Salimov 1994) yıllarında yapmış olduğu çalışmalarda Tachibana ve Vishnevskii operatörlerini tam ve dikey liftlerin teorisi ve Norden geometri için incelemiştir.

Tensör operatörlerin önemli bir diğer sınıfı ise $(1,2)$ tipli tensör alanına göre uyarlanmış Yano-Ako operatörleridir. Yano-Ako operatörlerinin uygulamaları literatürde geniş yer bulmuştur (Salimov 1994, Salimov and Magden 1998). Diğer yandan pür konneksiyona uygulanabilen tensör operatörleri güncel çalışma konularından biridir (Salimov 2010).

Bununla birlikte tensör operatörlerinin uygulamalarının Diferensiyel Geometri için çok verimli bir çalışma alanı olduğu ve modern Diferensiyel Geometri çalışmaları için birçok yeni probleme kapı açacağı düşünülmektedir. Tensör operatörlerini incelemek ve bağlantılı olduğu konular ile ilgili bilgi vermek amacıyla bu tez çalışması yapılmıştır. Bu nedenle bu çalışmada pür tensör alanları tanımlanmış, belirli pür tensör alanlarına farklı tensör operatörleri uygulanmış ve tensör operatörleri kuramının pür konneksiyona uygulanması verilmiştir. Ayrıca invaryant altmanifoldda Tachibana operatörünün uygulaması verilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Vektör Uzayı

Tanım 2.1.1: Boştan farklı bir B_n kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi verilmiş olsun. B_n üzerinde

$$+ : B_n \times B_n \rightarrow B_n$$

$$+(x, y) = x + y$$

şeklinde toplama ve

$$\cdot : \mathbb{R} \times B_n \rightarrow B_n$$

$$\cdot (\lambda, x) = \lambda \cdot x$$

biçiminde skaler ile çarpma işlemleri tanımlanmış olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan B_n kümesine $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Yıldırım 2018).

- i. $\forall x, y \in B_n$ için $x + y \in B_n$ dir.
- ii. $\forall x, y, z \in B_n$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir.
- iii. $\forall x, y \in B_n$, $x + y = y + x$ dir.
- iv. $\forall x \in B_n$ için $x + \vec{0} = x$ olacak şekilde B_n kümesinin sıfır elemanı olarak adlandırılan bir $\vec{0} \in B_n$ vardır.
- v. $\forall x \in B_n$ için $x + x' = \vec{0}$ olacak biçimde $x' \in B_n$ vardır.
- vi. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in B_n$ için $\lambda \cdot x \in B_n$ dir.
- vii. $x, y \in B_n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ dir.
- viii. $x \in B_n$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ dir.
- ix. $x \in B_n$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ dir.
- x. $\forall x \in B_n$ için $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$ vardır.

B_n vektör uzayının elemanlarına vektör veya bazen de kontravaryant vektör denir.

B_n bir vektör uzayı ve $\vec{x} \in B_n$ bir vektör olsun. Vektör değişkenli reel değerli bir $T: B_n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $T(\vec{x}) = r \in \mathbb{R}$ değeri, T lineer dönüşümünün $\vec{x}$ vektörü üzerindeki izi olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

B_n vektör uzayı üzerinde $\alpha: B_n \rightarrow \mathbb{R}$, $z = \alpha(\vec{x})$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B_n$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\alpha(\vec{x}) + \mu\alpha(\vec{y})$$

koşulunun gerçekleşmesi durumunda $z = \alpha(\vec{x})$ fonksiyonu lineer fonksiyon adını alır. $\alpha: B_n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ise lineer operatör olarak adlandırılır.

$\forall \vec{x} \in B_n$ vektörü üzerindeki izleri eşit olan α ve β lineer operatörleri, eşit operatörler olarak adlandırılır ve $\alpha = \beta$ biçiminde gösterilir.

α ve β lineer operatörlerinin toplamı $\forall \vec{x} \in B_n$ için $\gamma\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ biçiminde tanımlanır ve bu toplam $\gamma = \alpha + \beta$ şeklinde gösterilir.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \vec{x} \in B_n$ vektörü için $\beta\vec{x} = \lambda\alpha\vec{x}$ biçiminde tanımlanan β operatörüne λ skalerinin α lineer operatörü ile çarpımı denir ve bu çarpım $\beta = \lambda\alpha$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda B_n vektör uzayında tanımlı lineer operatörler kümesi bir vektör uzayı belirtir. B_n uzayının tüm lineer operatörlerinin oluşturduğu yeni vektör uzayının boyutu da n olup bu uzaya B_n vektör uzayının dual uzayı denir. B_n vektör uzayının dual uzayı B_n^* ile gösterilir. B_n^* uzayının elemanlarına kovaryant vektör veya kısaca kovektör denir. Böylece B_n^* için dual uzay yerine kovektör uzay kavramı da kullanılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tensörler

Tanım 2.2.1: $X_j \in B_n, j = 1, \dots, s$ vektör ve $\xi^i \in B_n^*, i = 1, \dots, r$ kovektör değişkenler olmak üzere

$$w = t(X_1, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r)$$

şeklinde tanımlı reel değerli fonksiyonu için her bir değişkene göre lineerlik şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona multilineer (çok lineer) fonksiyon denir. Lineerlik şartı birinci vektör değişkeni için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t(\lambda X + \mu Y, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) = \lambda t(X, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) + \mu t(Y, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r)$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t: \underbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}_s \times \overbrace{B_n^* \times \dots \times B_n^*}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne ise B_n uzayında r dereceden kontravaryant, s dereceden kovaryant tensör denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tensörler ile ilgili bilinmesi gereken bazı kavramlar şu şekilde özetlenebilir:

t tensörünün valentliği $r + s, r \geq 0, s \geq 0$ sayısı ile belirtilirken, (r, s) sembolü tensörün tipini gösterir.

$(r, 0)$ tipli tensörlere kontravaryant tensörler (r : kovektör değişkenlerinin sayısı), $(0, s)$ tipli tensörlere ise kovaryant tensörler (s : vektör değişkenlerinin sayısı) adı verilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı $(0, 0)$ tipli tensör olarak düşünülür.

t tensörüne karşılık gelen multilineer fonksiyonun herhangi bir değişken sistemindeki değeri, yine aynı sistem üzerinde bu tensörün izi olarak tanımlanır.

Tensörler üzerinde işlemler

Aynı tipli $\overset{t}{_1}$ ve $\overset{t}{_2}$ tensörlerinin eşit tensörler olarak adlandırılması, bu iki tensörün keyfi değişkenler sistemi üzerindeki izlerinin eşit olmasına bağlıdır ve bu eşitlik $\overset{t}{_1} = \overset{t}{_2}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.1.1 (Toplama İşlemi): (r, s) tipli $\overset{t}{_1}$ ve $\overset{t}{_2}$ tensörlerinin toplamı sonucunda elde edilen $\overset{t}{_1} + \overset{t}{_2}$ tensörü de (r, s) tipli olup

$$(\overset{t}{_1} + \overset{t}{_2})\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) = \overset{t}{_1}\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) + \overset{t}{_2}\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right)$$

şeklinde tanımlanır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.1.2 (Skaler ile Çarpma İşlemi): Herhangi bir (r, s) tipli t tensörünün, $\lambda \in \mathbb{R}$ skaler sayısı ile çarpımı

$$(\lambda t)\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) = \lambda t\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım sonucunda tensörün tipi korunur (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.1.3 (Çarpma İşlemi): Keyfi (r_1, s_1) ve (r_2, s_2) tipli $\overset{t}{_1}$ ve $\overset{t}{_2}$ tensörlerinin çarpımı sonucunda oluşan $\overset{t}{_1} \otimes \overset{t}{_2}$ tensörü $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ tipli bir tensördür.

$\overset{t}{_1} \otimes \overset{t}{_2}$ tensörünün keyfi

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{s_1}, \vec{x}_{s_1+1}, \dots, \vec{x}_{s_1+s_2}, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi}, \overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi}\right)$$

değişken sistemi üzerindeki izleri, sırasıyla $\overset{t}{_1}$ ve $\overset{t}{_2}$ tensörlerinin

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{s_1}, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi}$$

ve

$$\vec{x}_{s_1+1}, \dots, \vec{x}_{s_1+s_2}, \overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi}$$

değişkenler sistemi üzerindeki izlerinin çarpımına eşittir.

$\overset{t}{1} \otimes \overset{t}{2}$ çarpım tensörü

$$\begin{aligned} & (\overset{t}{1} \otimes \overset{t}{2}) \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{s_1}, \vec{x}_{s_1+1}, \dots, \vec{x}_{s_1+s_2}, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi}, \overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi} \right) \\ &= \overset{t}{1} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{s_1}, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi} \right) \overset{t}{2} \left(\vec{x}_{s_1+1}, \dots, \vec{x}_{s_1+s_2}, \overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi} \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Salimov ve Mağden 2008).

Tensör çarpımı için şu özellikler sağlanır:

- a. $(\overset{t}{1} + \overset{t}{2}) \otimes \overset{t}{3} = \overset{t}{1} \otimes \overset{t}{3} + \overset{t}{2} \otimes \overset{t}{3}$
- b. $\overset{t}{1} \otimes (\overset{t}{2} + \overset{t}{3}) = \overset{t}{1} \otimes \overset{t}{2} + \overset{t}{1} \otimes \overset{t}{3}$
- c. $(\overset{t}{1} \otimes \overset{t}{2}) \otimes \overset{t}{3} = \overset{t}{1} \otimes (\overset{t}{2} \otimes \overset{t}{3})$
- d. $\overset{t}{1} \otimes \overset{t}{2} \neq \overset{t}{2} \otimes \overset{t}{1}$
- e. $k \otimes t = t \otimes k = kt, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

Tanım 2.2.1.4 (Kontraksiyon/Bükülme İşlemi): (r, s) tipli t tensörünün

$$w = t \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right)$$

multilineer fonksiyonunda $\vec{x}_1$ ve $\overset{1}{\xi}$ değişkenleri sabitlendiğinde

$$t \left(\vec{a}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \alpha, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right) = t' \left(\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right)$$

multilineer fonksiyonu yazılır. Eğer $\vec{a}$ ve α vektörleri yerine $\{\vec{e}_i\}$, $\vec{e}_i \in B_n, i = 1, \dots, n$ ve $\{\alpha^i\}$, $\alpha^i \in B_n^*$ baz ve kobazlardan karşılık gelen vektörler alınırsa elde edilen bütün özel izlerin toplamı sonucunda

$$t \left(\vec{e}_i, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \alpha^i, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right) = t' \left(\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right)$$

yazılır. Burada oluşan $(r-1, s-1)$ tipli t' tensörü, t tensörünün $\vec{x}_1$ ve $\overset{1}{\xi}$ değişkenlerinin kontraksiyonu sonucunda elde edilmiştir, denir (Salimov ve Mağden 2008).

Kontraksiyon işlemi bazın seçilişine bağlı olmadığı gibi bu işlem $r < s$ ($r > s$) için $r(s)$ sayıda keyfi değişkenlere göre yapılabilir. $r = s$ olması durumunda r sayıda kontraksiyon işlemi yapılırsa $(0,0)$ tipli tensör elde edilir. $(0,0)$ tipli tensör, bir reel sayı belirtir. Bu sayı *tracet* ile gösterilir ve (r,r) tipli tensörün izi olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.1.5 (Simetrikleştirme ve Alterneleştirme İşlemleri): Değişkenleri aynı karakterlere sahip olan $t(\vec{x}, \vec{y})$ fonksiyonu bilineer olsun. Bu durumda $t(\vec{y}, \vec{x})$ fonksiyonu da bilineer olur. $t(\vec{x}, \vec{y}) \neq t(\vec{y}, \vec{x})$ olduğu bilindiğinden

$$t'(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda t(\vec{x}, \vec{y}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan bilineer fonksiyonunda λ ve μ değerlerinin değişimi ile sonsuz çoklukta tensör elde edilebilir. (2.1) eşitliğinde özel olarak $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ alındığında elde edilen

$$Simt(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2!} (t(\vec{x}, \vec{y}) + t(\vec{y}, \vec{x}))$$

eşitliği $t(\vec{x}, \vec{y})$ tensörünün simetrikleşmesi şeklinde adlandırılır. Bu simetrikleşme işlemi *Simt* ile gösterilir.

Değişken sayısı 3 olan $t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tensörünün simetrikleşmesi ise

$$Simt(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{3!} (t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) + t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) + t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) + t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}))$$

şeklinde yazılır.

Eğer (2.1) eşitliğinde $\lambda = \frac{1}{2!}$ ve $\mu = -\frac{1}{2!}$ olarak alınırsa elde edilen

$$Altt(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2!} (t(\vec{x}, \vec{y}) - t(\vec{y}, \vec{x}))$$

ifadesine $t(\vec{x}, \vec{y})$ tensörünün alterneleştirilmesi denir. Aynı düşünce ile 3 değişkenli $t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tensörü için alterneleştirme işlemi

$$Altt(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{3!} (t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) - t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) - t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) - t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}))$$

şeklinde dir. Buradaki + ve - işaretleri $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ değişkenler sistemindeki permütasyonun işareti ile belirlenir.

Benzer muhakeme ile $(0,p)$ ve $(q,0)$ tipli tensörler için de simetrikleşme ve alterneleştirme işlemleri tanımlanabilir. Bu işlemler, tüm değişkenler yerine bazı değişkenler

için uygulanacaksa bu durum özel olarak belirtilir. Örneğin, $\check{\vec{y}}$ gösterimi $\vec{y}$ vektörünün işleme dahil edilmediğini gösterir ve alterneleştirme işlemi için

$$Alt t(\vec{x}, \check{\vec{y}}, \vec{z}) = \frac{1}{2!} (t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) - t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}))$$

biçiminde yazılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.1.6: $Sim t = t$ ($Alt t = t$) olması durumunda t tensörü, simetrik (antisimetrik) tensör adını alır (Salimov ve Mağden 2008).

(0,2) tipli $t(\vec{x}, \vec{y})$ tensörü için simetriklik şartı

$$t(\vec{x}, \vec{y}) = t(\vec{y}, \vec{x})$$

şeklinde iken yine aynı tensör için antisimetriklik şartı ise

$$t(\vec{x}, \vec{y}) = -t(\vec{y}, \vec{x})$$

biçimindedir. (0,3) tipli $t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tensörü için ise simetriklik şartı

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) = t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})$$

ve antisimetriklik şartı da

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = t(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = t(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -t(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) = -t(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -t(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})$$

biçimindedir.

Tensörlerde Koordinatlar

B_n uzayında (r, s) tipli t tensörü

$$w = t(X_1, X_2, \dots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi})$$

multilineer fonksiyonu ile belirtilmiş olsun. Baz vektörleri $\vec{e}_i \in B_n$ ve dual uzayın kobaz vektörleri $\vec{a} \in B_n^*$, $i, j = 1, \dots, n$ olmak üzere t tensörünün $\{\vec{e}_i\}$ bazındaki koordinatları

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t(\vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_s}, \overset{i_1}{a}, \dots, \overset{i_r}{a})$$

izleri şeklindedir. Buradaki $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ yazılışında üst indisler kontravaryanlığı, alt indisler ise kovaryanlığı gösterir.

Bu tanıma göre tensörün koordinatları tensörlerin seçimine ($t_{ij} \neq t_{ji}$), bazın seçimine ($t_{i'j'} \neq t_{ij}$) ve baz vektörlerinin sırasına ($t_{ij} \neq t_{ji}$) bağlıdır.

$$w = t(X_1, X_2, \dots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi})$$

multilineer fonksiyonu, tensörün koordinatları yardımıyla

$$\begin{aligned}
 w &= t(X_1, X_2, \dots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) \\
 &= t(X_1^{j_1} \overrightarrow{e_{j_1}}, \dots, X_s^{j_s} \overrightarrow{e_{j_s}}, \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} a, \dots, \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r} a) \\
 &= t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}
 \end{aligned}$$

biçiminde ya da

$$w = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}$$

multilineer formu şeklinde yazılabilir ki bu da tensörün koordinatlarının, tensörü tamamen belirlemiş olduğunu gösterir. t tensörünün koordinatları $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda t tensörü

$$\begin{aligned}
 t: (X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}) &\rightarrow t(X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}) \\
 t\left(X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}\right) &= t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}
 \end{aligned}$$

multilineer fonksiyonu biçiminde tanımlanabildiğinden B_n uzayında baz sabitlenirse tensör, aynı bazda kendi koordinatları ile de belirlenebilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tensör dönüşüm kanunu

B_n uzayında değişen baz ile birlikte $t \in T_s^r(B_n)$ tensörünün

$$t\left(X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, \overset{1}{\xi}_{i_1}^{i_1} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}^{i_r}\right)$$

koordinatları da değişir. Koordinatlardaki bu değişim

$$\begin{aligned}
 t_{j_1' \dots j_s'}^{i_1' \dots i_r'} &= t(\overrightarrow{e_{j_1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{j_s'}}, \overset{i_1'}{a}, \dots, \overset{i_r'}{a}) \\
 &= t(A_{j_1'}^{j_1} \overrightarrow{e_{j_1}}, \dots, A_{j_s'}^{j_s} \overrightarrow{e_{j_s}}, A_{i_1'}^{i_1} \overset{i_1'}{a}, \dots, A_{i_r'}^{i_r} \overset{i_r'}{a}) \\
 &= A_{j_1'}^{j_1} \dots A_{j_s'}^{j_s} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_r'}^{i_r} t(\overrightarrow{e_{j_1}}, \dots, \overrightarrow{e_{j_s}}, \overset{i_1}{a}, \dots, \overset{i_r}{a}) \\
 &= A_{j_1'}^{j_1} \dots A_{j_s'}^{j_s} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_r'}^{i_r} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}
 \end{aligned}$$

biçiminde ya da kısaca

$$t_{j_1' \dots j_s'}^{i_1' \dots i_r'} = A_{j_1'}^{j_1} \dots A_{j_s'}^{j_s} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_r'}^{i_r} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad (2.2)$$

eşitliği ile ifade edilir. (2.2) eşitliği tensör dönüşüm kanunu olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

B_n uzayında baz değişikçe (2.2) eşitliği ile verilen tensör kanununu sağlayan ve B_n 'nin herbir bazına karşılık gelen n^{r+s} sayıda olan $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ sayılar sistemi de (r, s) tipli tensör olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.3.1: Keyfi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörü ve $\forall \vec{y} \in B_n$ için

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

eşitliği yalnızca $\vec{x} = 0$ olması durumunda gerçekleşiyorsa g tensörüne regüler tensör denir (Salimov ve Mağden 2008).

$g(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ iken $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ eşitliği yalnızca $\vec{x} = 0$ için sağlanıyorsa $g \in S_2(B_n)$ tensörü, pozitif tanımlı tensör olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3.2: Bir $g \in S_2(B_n)$ simetrik tensörü, regüler olduğunda bu g tensörüne B_n 'de esas tensör denir (Salimov ve Mağden 2008).

B_n uzayında $(0,2)$ tipli bir $g(\vec{x}, \vec{y})$ tensörü için $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı dendiğinde g tensörünün bu vektörler üzerindeki izi anlaşılır ve $(\vec{x}, \vec{y})$ ya da $\vec{x}\vec{y}$ biçiminde gösterilir. Bir başka ifade ile bu çarpım

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij}x^i y^j \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada (2.3) ile tanımlanan skaler çarpım için $Det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa regüler çarpım, $Det(g_{ij}) = 0$ oluyorsa singüler çarpım ifadeleri kullanılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.3.3: $T_1^1(B_n)$ uzayının elemanları olan $(1,1)$ tipli tensörlere afinor denir. Afinor kavramı yerine B_n uzayının endomorfizmi ifadesi de kullanılır (Salimov ve Mağden 2008).

Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.3.1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ da X 'in altkümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda τ 'ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir (Şahin 2012).

1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$ dir.
2. τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi yine τ 'dadır.

3. τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi yine τ 'dadır.

Tanım 2.3.2: X topolojik uzay olmak üzere bu uzaydaki her farklı x, y elemanı için bu noktaların ayrık birer komşuluğu varsa X uzayına Hausdorff topolojik uzayı denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.3: X bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlı

$$\varphi: U \rightarrow V$$

homeomorfizm dönüşümüne, X de n boyutlu harita ya da n - boyutlu koordinat sistemi denir. Bu harita (U, φ) ikilisi şeklinde gösterilir. Burada U ise φ haritasının koordinat komşuluğu adını alır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.4: M bir Hausdorff uzay olsun. Bu uzayın φ_α haritalarının U_α koordinat komşuluklarının bu uzayı örtmesi durumunda M uzayına, n - boyutlu topolojik manifold ya da n - boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.5: X bir Hausdorff topolojik uzay ve $0 \leq k$ biçiminde bir tamsayı olsun. Aşağıdaki iki şartın sağlanması durumunda $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal haritalar ailesine, X üzerinde C^k sınıfından n - boyutlu atlas denir (Salimov ve Mağden 2008).

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter. Yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

dir. Başka bir ifade ile X , n boyutlu topolojik manifolddur.

2. Herhangi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ oluyorsa

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır.

C^k sınıfından herhangi iki atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ olmak üzere bu atlasların birleşimi de C^k sınıfından oluyorsa bu iki atlas denk atlaslar olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.6: X Hausdorff uzayındaki C^k - atlaslarının denklik sınıfına C^k - yapı denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.7: M , sayılabilir baza sahip bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere M uzayında n -boyutlu C^∞ atlasların C^∞ yapısı verilmiş olsun. Bu durumda M uzayına, n -

boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold ya da düzgün (smooth) manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.8: $x \in X_n$ noktasını içeren bir $G \subset X_n$ açık kümesinde tanımlı C^k sınıfından f fonksiyonlarının kümesi C_x^k olmak üzere bu kümenin bir cebir oluşturduğu aşıkardır. x noktası için φ harita $\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ biçiminde tanımlı ise

$$x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

olur. Buradan

$$y = f(x) = f(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)) = f^*(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

yazılabilir. Burada $f^* = f \circ \varphi^{-1}$ dir.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x = \left. \frac{\partial f^*}{\partial x^i} \right|_{\varphi(x)}$$

gösterimi dikkate alınarak n sayıda $\xi^i \in \mathbb{R}$ skaleri için $X: C_x^k \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu

$$X(f) = \xi^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x, \quad \forall f \in C_x^k \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlansın. (2.4) eşitliğinde i indisine göre toplam alınmıştır. Bu fonksiyonel için

$$X = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \quad (2.5)$$

gösterimi kullanılsın. (2.5) biçimindeki tüm fonksiyonların kümesi T_x ile belirtilsin. Bu küme üzerinde tanımlanabilen

$$(X_1 + X_2)(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

biçiminde toplama ve

$$(aX)(f) = aX(f)$$

şeklinde skaler ile çarpma işlemlerine göre T_x kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya $x \in X_n$ noktasındaki tanjant uzay denir ve bu uzayın elemanları ise X_n manifoldunun x noktasındaki tanjant vektörleri olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.9: $f: X_n \rightarrow Y_p$ ($n \leq p$) dönüşümü C^k sınıfından diferensiyellenebilir olsun. T_x , $x \in X_n$ noktasındaki tanjant uzay ve $T_{f(x)} \in Y_p$, $f(x)$ noktasındaki tanjant uzay olmak üzere $f_{*x}: T_x \rightarrow T_{f(x)}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme f dönüşümünün x noktasındaki diferensiyeli denir. $\forall x \in X_n$ için f_{*x} dönüşümünün rankı n oluyorsa f dönüşümüne immersiyon (gömme dönüşümü) denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.10: $f: X_n \rightarrow Y_p$ dönüşümü immersiyon olsun. Eğer indirgenmiş topolojide $f: X_n \rightarrow f(X_n) \subset Y_p$ immersiyonu, homeomorfizm oluyorsa f dönüşümüne imbedding (daldırma dönüşümü) denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.11: ι dönüşümünün immersiyon olması durumunda X_n manifolduna Y_p manifoldunun daldırılmış altmanifoldu denir. ι dönüşümünün imbedding olması durumunda ise X_n manifoldu, Y_p manifoldunun imbedding altmanifoldu ya da altmanifoldu olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Tensör alanları

Tanım 2.3.1.1: Diferensiyellenebilir bir M_n manifoldu üzerinde . $\forall p \in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörü karşılık getiren $X: p \rightarrow X_p$ dönüşümüne vektör alanı denir. Burada $T_p, p \in M_n$ noktasındaki vektör uzayını temsil etmektedir (Salimov ve Mağden 2008).

M_n üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu için Xf de yine M_n 'de tanımlı olan $(Xf)(p) = X_p f$ şeklinde bir fonksiyondur.

Diferensiyellenebilir her f fonksiyonu için Xf fonksiyonu da diferensiyellenebilir oluyorsa X vektör alanı diferensiyellenebilir vektör alanı olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

(U, φ) ikilisi M_n üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun. U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonları $X^i = X^i(x^i)$ ler olmak üzere X vektör alanı, (U, φ) 'de

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

şeklinde gösterilebilir. Burada X^i 'ler X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları adını alır.

X vektör alanının diferensiyellenebilir olması ancak ve ancak $X^i = X^i(x^i)$ fonksiyonlarının diferensiyellenebilir olması ile mümkündür.

(U, φ) koordinat sisteminde başka bir vektör alanı $Y = Y^i \partial_i$ ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ fonksiyon olmak üzere

$$X(f) = X^i \partial_i f, \quad Y(f) = Y^i \partial_i f$$

$$XY(f) = X(Y^i \partial_i f) = X^i (\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f)$$

$$YX(f) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j (\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

yazılır ve buradan

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j f$$

$$XY - YX = [X, Y]$$

biçiminde yeni bir vektör alanı tanımlanır. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısındaki ifadesi ise

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j \quad (2.6)$$

şeklindedir. (2.6) formülündeki ∂_i 'nin katsayısına ise $[X, Y]$ vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir (Salimov ve Mağden 2008).

(2.6) eşitliğindeki $[X, Y]$ vektör alanı, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olarak adlandırılır. (2.6) eşitliğinde özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$ ve $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanlarının seçilmesi sonucunda

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

eşitliği elde edilir (Salimov ve Mağden 2008).

Yine aynı eşitlikten yararlanılarak Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir:

1. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$,
4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Kovektör alanı (1-form) ve tensör alanı da vektör alanına benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.3.1.2: Diferensiyellenebilir bir M_n manifoldu üzerinde $\forall p \in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ kovektörü karşılık getiren $\omega: p \rightarrow \omega_p$ dönüşümüne kovektör alanı denir. Burada T_p^* , $p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayını temsil etmektedir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.1.3: Diferensiyellenebilir bir M_n manifoldu üzerinde $\forall p \in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $t_p \in T_p^q(p)$ tensörü karşılık getiren $t: p \rightarrow t_p$ dönüşümüne tensör alanı denir. Burada $T_p^q(p)$, $p \in M_n$ noktasındaki tensör uzayını temsil etmektedir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.1.4: $\mathfrak{S}(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olmak üzere $D: \mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$ dönüşümüne aşağıdaki dört şartı sağlaması durumunda $\mathfrak{S}(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi (veya yalnızca diferensiyellemesi) denir (Salimov ve Mağden 2008).

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ sabit katsayıları için

$$D(at + bs) = aDt + bDs$$

olup D dönüşümü lineerdir.

2. $D(\mathfrak{I}_s^r(M_n)) \subset \mathfrak{I}_s^r(M_n)$ olup D dönüşümü, tipi korur.

3. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$ dir.

4. D işlemi ile tensörlerin kontraksiyon işlemi yer değiştirebilir.

Tanım 2.3.1.1: $\forall X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için Lie parantezi $[X, Y]$ olmak üzere $D = L_X$ diferensiyelleme işlemine, aşağıdaki iki şartı sağlaması durumunda X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi denir:

1. $L_X f = Xf, \quad \forall f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$

2. $L_X Y = [X, Y]$

$L_X Y$ 'nin lokal koordinatlardaki ifadesi (2.4) eşitliğine göre

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde olur. Bu diferensiyelleme işlemi sonucunda bulunan değer Lie türevi olarak adlandırılır (Salimov ve Mağden 2008).

Bu tanımdan hareketle herhangi bir $\omega \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ kovektör alanının Lie türev formülü şu şekilde belirlenir:

$\forall Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ olduğundan L_X türevinin özellikleri kullanılarak

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X \omega)Y + \omega(L_X Y)$$

yazılır ve buradan

$$(L_X \omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir.

$Y = \partial_j$ olarak alındığında ise (2.7) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X \omega_j = X^k \partial_k \omega_j - \omega_k \partial_i X^k \quad (2.8)$$

şeklinde olur.

Şimdi keyfi (r, s) tipli $t \in \mathfrak{I}_s^r(M_n)$ tensör alanı göz önüne alınsın. $\forall X_1, X_2, \dots, X_s \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $\forall \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ için

$$t(X_1, X_2, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \in \mathfrak{T}_0^0(M_n)$$

olduğundan L_X türevinin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} L_X \left(t \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \right) &= (L_X t) \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^s t \left(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^r t \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, L_X \overset{j}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (L_X t) \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) &= X \left(t \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \right) \\ &- \sum_{i=1}^s t \left(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \\ &- \sum_{j=1}^r t \left(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, L_X \overset{j}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega} \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$ için L_X türevi uygulandığında

$$0 = L_X \delta_j^i = L_X (dx^i(\partial_j)) = (L_X dx^i) \partial_j + dx^i (L_X \partial_j)$$

olur.

Lie parantezinin özellikleri de dikkate alındığında

$$\begin{aligned} (L_X dx^i) \partial_j &= -dx^i [X, \partial_j] = -dx^i [X^k \partial_k, \partial_j] = dx^i [\partial_j, X^k \partial_k] = dx^i \partial_j X^k \partial_k \\ &= \partial_j X^k \delta_k^i = \partial_j X^i \end{aligned}$$

veya

$$(L_X dx^i) = (\partial_j X^i) dx^j$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik ve $(L_X \partial_j) = -\partial_i X^k \partial_k$ eşitliği, $df = \frac{\partial f}{\partial x^k} \Big|_x dx^k$ ifadesinde kullanılarak

$$L_X t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{\lambda=1}^q (\partial_k X^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots k \dots i_r} \quad (2.9)$$

elde edilir. Burada $L_X t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (L_X t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ dir. (2.9) ifadesinde $r = 1, s = 0$ ve $r = 0, s = 1$ olarak alındığında (2.6) ve (2.8) eşitlikleri elde edilir.

Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Lineer (Afin) Konneksiyon

Tanım 2.4.1: M_n , n boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $T(M_n)$ cebirinin

$$D = \nabla_X: T(M_n) \rightarrow T(M_n), \quad X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

diferensiyelleme işlemine, aşağıdaki şartları sağlaması durumunda X vektör alanı yönündeki kovaryant türev denir:

1. $\nabla_{fX+gY}t = f\nabla_X t + g\nabla_Y t$,
2. $\nabla_X f = Xf, \quad \forall f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \quad \forall t \in T(M_n)$.

Ayrıca $\nabla: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ biçiminde tanımlı dönüşüm afin konneksiyon, (M_n, ∇) çifti ise afin konneksiyonlu uzay olarak adlandırılır.

Kozsul'a ait olan bu konneksiyon tanımı 1951 yılında yapılmıştır. Yine aynı tanımdan $t \in \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ iken $\nabla t \in \mathfrak{S}_{s+1}^r(M_n)$ olduğu görülür (Salimov ve Mağden 2008).

M_n manifoldunda U koordinat komşuluğunun x^i lokal koordinatları ve bu komşuluktaki $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ doğal vektör alanları ile $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimi göz önüne alınsın. O halde ∇_i konneksiyonu ∂_j vektör alanlarına uygulandığında sonuç yine vektör alanı olduğundan

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (2.10)$$

yazılabilir. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ biçiminde ifade edilen fonksiyonlar, U komşuluğunda C^∞ sınıfındandır. Buradan U koordinat komşuluğunda $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ lokal koordinatlarına sahip yeni bir koordinat sistemine geçilmek istendiğinde

$$\nabla_{i'} \partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} \quad (2.11)$$

yazılır.

$X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ için ∇ kovaryant türevin 1. ve 2. özellikleri ile (2.10) eşitliği kullanılarak ∇Y kovaryant türevinin koordinatları

$$(\nabla Y)(X) = \nabla_X Y = X^i (\partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j Y^k) \partial_k$$

biçiminde bulunur. Burada $X = \partial_i$ alınırsa

$$(\nabla Y)_i = \nabla_i Y = (\partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j Y^k) \partial_k \quad (2.12)$$

yazılır. ∇Y kovaryant türevinin koordinatları $(\nabla Y)_i^j = (\nabla_i Y)^j = \nabla_i Y^j$ olarak gösterilirse (2.12) eşitliğinden

$$\nabla_i Y^j = \partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j Y^k \quad (2.13)$$

yazılır ki bu da $\nabla Y \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ kovaryant türevinin doğal çatıdaki koordinatlarıdır.

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ kovektör alanı ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanları olmak üzere $\omega(X) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olduğundan

$$\nabla_Y(\omega(X)) = (\nabla_Y \omega)(X) + \omega(\nabla_Y X)$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)(Y, X) &= (\nabla_Y \omega)(X) = \nabla_Y(\omega(X)) - \omega(\nabla_Y X) \\ &= Y(\omega(X)) - \omega(\nabla_Y X) \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ alınarak

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)_{ij} &= (\nabla_j \omega)_i = \delta_j^k \partial_k \omega_i - \omega(\nabla_j \partial_i) \\ &= \partial_j \omega_i - \omega(\Gamma_{ji}^k \partial_k) = \partial_j \omega_i - \Gamma_{ji}^k \partial_k \end{aligned}$$

$\nabla \omega \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesi

$$\nabla_j \omega_i = \partial_j \omega_i - \Gamma_{ji}^k \partial_k$$

şeklinde yazılır. Burada $(\nabla \omega)_{ij} = \nabla_j \omega_i$ olarak gösterilmiştir. (2.13) ve (2.14) eşitliklerine dikkat edilirse bu türevleme işlemi sonrasında ilgili tensörün kovaryantlık derecesinin bir arttığı görülür ki bu da işlemin kovaryant türev olarak adlandırılmasına sebep olmuştur (Salimov ve Mağden 2008).

Özel olarak $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $\omega = dx^k$ alınır ve (2.14) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} (\nabla_j dx^k)(\partial_i) &= \partial_j(dx^k(\partial_i)) - dx^k(\nabla_j \partial_i) \\ &= \partial_j(\delta_i^k) - dx^k(\Gamma_{ji}^s \partial_s) \\ &= -\Gamma_{ji}^s \delta_j^k = -\Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

olur. Burada $dx^k(\partial_i) = \partial_i dx^k = \delta_i^k$ eşitliği kullanılarak

$$\nabla_j dx^k = -\Gamma_{ji}^k dx^i \quad (2.15)$$

yazılır.

Şimdi $t \in \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olsun. Öyleyse $t(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olur. Bu durumda ∇_Y nin özelliklerine göre

$$\begin{aligned} \nabla_Y \left(t(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \right) &= (\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^s t(X_1, \dots, \nabla_Y X_\lambda, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \\ &+ \sum_{\mu=1}^r t(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \nabla_Y^\mu \overset{\mu}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (\nabla t)(Y; X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) &= (\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \\ &= Y \left(t(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \right) \\ &- \sum_{\lambda=1}^s t(X_1, \dots, \nabla_Y X_\lambda, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \\ &- \sum_{\mu=1}^r t(X_1, \dots, X_s, \overset{1}{\omega}, \dots, \nabla_Y^\mu \overset{\mu}{\omega}, \dots, \overset{r}{\omega}) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin doğal çatıdaki ifadesini bulmak için $Y = \partial_k$, $X_\lambda = \partial_{j_\lambda}$, $\lambda = 1, \dots, s$ ve $\overset{\mu}{\omega} = dx^{j_\mu}$, $\mu = 1, \dots, r$ olarak alınır ve (2.10) ile (2.15) eşitlikleri de kullanılırsa

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (\nabla t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (\nabla_k t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\mu=1}^r \Gamma_{km}^{i_\mu} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m \dots i_r} - \sum_{\lambda=1}^s \Gamma_{kj_\lambda}^m t_{j_1 \dots m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

yazılır. Böylece (p, q) tipli keyfi t tensör alanının kovaryant türevinin doğal çatıdaki koordinatları elde edilir (Salimov ve Mağden 2008).

Eğrilik ve Burulma Tensörleri

Tanım 2.5.1: Bir M_n manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olsun. $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve manifold üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonu için

$$S: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlı S tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon (burulma) tensörü,

$$R: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanan R tensör alanına ise ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Salimov ve Mağden, 2008; Şahin, 2012).

$R(X, Y)Z$ gösterimi yerine $R(X, Y, Z)$ gösterimi de kullanılabilir. (2.16) eşitliğinden

$$R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z)$$

yazılabilir ve R 'nin X, Y, Z değişkenlerine göre lineerlik şartını sağladığı gösterilebilir. Böylece $R(X, Y, Z) \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olduğundan $R \in \mathfrak{S}_3^1(M_n)$ dir. (2.16) eşitliğinde özel olarak $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$ alındığında R 'nin doğal çatıdaki koordinatları

$$R_{ijk}^s = \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{im}^s \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{ik}^m$$

biçiminde yazılır. Burada $\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$ dir. Buna Christoffel sembolleri adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.5.2: Burulma tensörü sıfıra eşit olan uzaya, burulmasız uzay denir (Salimov ve Mağden 2008).

Burulmasız uzaylarda eğrilik tensörleri ile ilgili şu özellikler vardır:

1. $R_{(ij)k}^s = 0 \Leftrightarrow R_{ijk}^s = -R_{jik}^s$
2. $R_{[ijk]}^s = \frac{1}{3} (R_{ijk}^s + R_{jki}^s + R_{kij}^s) = 0$
3. $\nabla_{[l} R_{ij]k}^s = \frac{1}{3} (\nabla_l R_{ijk}^s + \nabla_i R_{jlk}^s + \nabla_j R_{lik}^s) = 0$ (Bianchi-Padov özdeşlikleri)

MATERYAL ve YÖNTEM

Pür Tensör Alanları

M_n sonlu n -boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M_n 'deki (r, s) tipli, yani kontravaryant derecesi r ve kovaryant derecesi s olan, tüm C^∞ -tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\mathfrak{T}_s^r(M_n)$ ile gösterilir, burada $F(M_n)$, M_n 'deki C^∞ -fonksiyonların cebiridir.

Tanım 3.1.1: $\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde bir afinör alan olsun. (r, s) tipli bir t tensör alanına aşağıdaki şartı sağlaması durumunda φ 'ye göre pür tensör alanı denir. Herhangi $X_1, X_2, \dots, X_s \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$ için

$$\begin{aligned}
 t(\varphi X_1, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) &= t(X_1, \varphi X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &\vdots \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, \varphi X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, X_s, \varphi \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &\vdots \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, X_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \varphi \xi^r)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. Burada φ ,

$$(\varphi \xi)(X) = \xi(\varphi X) = (\xi \circ \varphi)(X), \quad X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n), \quad \xi \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$$

olarak tanımlanmış φ 'nin adjoint (eşlenik) operatörüdür (Salimov 2013).

$x^1, x^2, \dots, x^n$ M 'de bir lokal koordinat sistemi olsun. (3.1)'de $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ ve $\xi^1 = dx^{j_1}, \dots, \xi^r = dx^{j_r}$ olarak alınırsa, bu durumda pür tensör alanlarının φ_j^i ve $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ bileşenleri cinsinden şu şekilde ifade edilebildiği görülür:

$$t_{mi_2 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_1}^m = t_{i_1 m \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_2}^m = \dots = t_{i_1 i_2 \dots m}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_s}^m = t_{i_1 i_2 \dots i_s}^{mj_2 \dots j_r} \varphi_m^{j_1} = t_{i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 m \dots j_r} \varphi_m^{j_2} = \dots = t_{i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots m} \varphi_m^{j_r} \tag{3.2}$$

Vektör, kovektör ve skaler alanları, pür tensör alanları olarak kabul edilir.

Örnek 3.1.1: Özel olarak $t \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, (1,1) tipli bir tensör alanı olsun. O halde (3.1)'den

$$\varphi(tX) = t(\varphi X)$$

olarak yazılabilir. Böylece $t \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ise değişme özelliğinden

$$\varphi \circ t = t \circ \varphi \quad (3.3)$$

yazılır, burada $(\varphi \circ t)X = \left(\varphi \overset{C}{\otimes} t\right)X = \varphi(tX)$ ($\overset{C}{\otimes}$: kontraksiyon C ile tensör çarpımı) olduğundan t, φ 'ye göre pürdür ve φ de t 'ye göre pürdür.

Örnek olarak (3.3)'ten φ 'nin kendisinin ve birim afinor alanı I 'nın pür tensör alanı oldukları kolayca görülür.

Ayrıca (3.3)'ten şu yazılabilir: Eğer φ bir regüler afinor alan yani $\det(\varphi_j^i) \neq 0$ ise bileşenleri, φ 'nin ters matrisinin elemanları olarak alınan φ^{-1} afinor alanı da pürdür.

Örnek 3.1.2:
$${}^T\varphi g = g\varphi \quad (3.4)$$

matris denklemi göz önüne alındığında ${}^T\varphi$ transpoz matris ve $g = (g_{ij})$, $\varphi = (\varphi_j^i)$ dir.

(3.2) ifadesine göre (3.4)'teki gibi bir $g \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının pürlük şartı

$$g_{im}\varphi_j^m = g_{mj}\varphi_i^m$$

olarak elde edilir.

g bir (pseudo-) Riemann metriği iken $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ pürlük şartını sağlayan φ lineer operatörü self-adjoint (öz-eşlenik) olarak adlandırılır. Örneğin (pseudo-) Riemann manifoldu üzerinde Jakobi operatörü ve Ricci operatörü, ayrıca Norden manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapılı bir afinor, self-adjoint operatörlerdir (Salimov 2013).

K ve L 'nin her ikisi de (r, s) tipli pür tensör alanı ise (3.1)'den $K + L$ ve fK ($f \in F(M_n)$)'nin de pür tensör alanı oldukları kolayca görülür. φ afinor alanına göre M_n üzerindeki (r, s) tipli bütün pür tensör alanlarının modülü $\mathfrak{S}_s^r(M_n)$ ile belirtilir. Eğer K ve L sırasıyla $(p_1, q_1), p_1 \geq 1$ ve $(p_2, q_2), q_2 \geq 1$ tipli iki tensör alanı ise kontraksiyonla K ve L tensör çarpımı da

$$K \overset{C}{\otimes} L = (K_{j_1 \dots j_{q_1}}^{mi_2 \dots i_{p_1}} L_{ms_2 \dots s_{q_2}}^{r_1 \dots r_{p_2}})$$

bir pür tensör alanıdır. Gerçekten $K \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $L \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ için

$$\begin{aligned}
(K \overset{C}{\otimes} L)(\varphi X, Y) &= K(L(\varphi X, Y)) = K(L(X, \varphi Y)) \\
&= (K \overset{C}{\otimes} L)(X, \varphi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi $K \in \mathfrak{S}_{q_1}^{p_1}(M_n)$ ve $L \in \mathfrak{S}_{q_2}^{p_2}(M_n)$ nin pür çarpımı ($\overset{C}{\otimes}$ veya “ $\circ$ ” ile gösterilir) aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $\mathfrak{S}(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M)$ bir cebir olsun.

$$\overset{C}{\otimes}: (K, L) \rightarrow (K \overset{C}{\otimes} L) = \begin{cases} K_{j_1 \dots j_{q_1}}^{mi_2 \dots ip_1} L_{ms_2 \dots sq_2}^{r_1 \dots rp_2}, & p_1, q_2 \geq 1, \\ K_{mj_2 \dots jq_1}^{i_1 \dots ip_1} L_{s_1 \dots sq_2}^{mr_2 \dots rp_2}, & p_2, q_1 \geq 1, \\ 0, & p_1, p_2 = 0, \\ 0, & q_1, q_2 = 0. \end{cases}$$

Özel olarak, $K = X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $L \in \Lambda_q(M_n)$ bir q -form olsun. O halde $X \overset{C}{\otimes} L$ pür çarpımı her zaman $\iota_X L$ iç çarpımına denk olur (Salimov 2013).

Tachibana Operatörleri

Tanım 3.2.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri $\mathfrak{S}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\phi_\varphi|_{\mathfrak{S}_{r+s}^*}: \mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$ dönüşümü M_n üzerinde Tachibana operatörü veya ϕ_φ -operatörü olarak adlandırılır (Tachibana 1960; Salimov 2010, 2013).

- a) ϕ_φ sabit katsayıya göre lineerdir,
- b) Her r ve s için, $\phi_\varphi: \mathfrak{S}_s^r(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{s+1}^r(M_n)$,
- c) Her $K, L \in \mathfrak{S}(M_n)$ için $\phi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} \phi_\varphi L$,
- d) Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için L_Y, Y 'ye göre Lie türevi olmak üzere $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi) X$,
- e) Her $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned}
(\phi_{\varphi X} \omega) Y &= (d(\iota_Y \omega))(\varphi X) - (d(\iota_Y(\omega \circ \varphi))) X + \omega((L_Y \varphi) X) \\
&= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_Y \omega) + \omega((L_Y \varphi) X)
\end{aligned}$$

olur. (Burada $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir.)

Tanım 3.2.1'deki (d) maddesinden

$$\phi_{\varphi X} Y = [\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]$$

eşitliği yazılabilir. Keyfi $f, g \in F(M_n)$ için

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

olduğundan $\phi_{\varphi X}Y$ 'nin X 'e göre lineer olduğu ancak Y 'ye göre lineer olmadığı görülür.

Gerçekten

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi(fX)}Y &= [f\varphi X, Y] - \varphi[fX, Y] \\ &= f[\varphi X, Y] - (Yf)\varphi X - \varphi(f[X, Y]) + \varphi(Yf)X \\ &= f([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) \\ &= f\phi_{\varphi X}Y\end{aligned}$$

olduğundan X 'e göre lineerdir. Ancak

$$\phi_{\varphi X}(gY) = g(\phi_{\varphi X}Y) + ((\varphi X)g)Y - (Xg)\varphi Y$$

olduğundan Y 'ye göre lineer değildir. Ayrıca X 'e göre lineerlik olduğundan $\phi_{\varphi X}Y = (\phi_{\varphi}Y)X$ yazılır.

ϕ_{φ} -Operatörünün $(1, 1)$ tipli tensör alanı üzerine uygulanması

$t \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ yani $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ olsun. Öyleyse herhangi bir $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $tY \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve Tanım 3.2.1'deki (c)'den;

$$\begin{aligned}(\phi_{\varphi}tY)X &= ((\phi_{\varphi}t)X) \overset{c}{\otimes} Y + t \overset{c}{\otimes} (\phi_{\varphi}Y)X \\ &= (\phi_{\varphi}t)(X, Y) + t((\phi_{\varphi}Y)X)\end{aligned}\tag{3.5}$$

yazılır.

(3.5) kullanılarak Tanım 3.2.1'deki (d)'den;

$$\begin{aligned}(\phi_{\varphi}t)(X, Y) &= (\phi_{\varphi}tY)X - t((\phi_{\varphi}Y)X) \\ &= (-L_{tY}\varphi + t(L_Y\varphi))X \\ &= [\varphi X, tY] - \varphi[X, tY] - t[\varphi X, Y] + \varphi t[X, Y] \\ &= \mathcal{Q}_{\varphi, t}(X, Y)\end{aligned}\tag{3.6}$$

elde edilir.

$\mathcal{Q}_{\varphi, t} \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$ tensör alanı, Nijenhuis-Shirokov tensör alanı olarak adlandırılır (Kruchkovich 1970, 1972).

Böylece şu teorem yazılabilir:

Teorem 3.2.1.1: $t \in \mathfrak{S}_1^*(M_n)$ olmak üzere $\phi_\varphi t$ tensörü Nijenhuis-Shirokov tensör alanı olur (Salimov 2013).

$t \circ \varphi = \varphi \circ t$ ifadesi $t = \varphi$ olarak alınırsa, (3.6)'dan

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi \varphi)(X, Y) &= \left(-L_{\varphi Y} \varphi + \varphi(L_Y \varphi) \right) X \\ &= [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] + \varphi^2[X, Y] \\ &= N_\varphi(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir, burada N_φ , φ 'nin Nijenhuis tensör alanıdır (Nijenhuis 1951).

Böylece aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.2.1.2: Eğer N_φ , φ 'nin Nijenhuis tensör alanı ise

$$N_\varphi = \phi_\varphi \varphi$$

dir.

Şimdi $t \circ \varphi \neq \varphi \circ t$ yani $t \notin \mathfrak{S}_1^*(M_n)$ olsun. Bu durumda $\phi_\varphi t$ bir tensör alanı değildir.

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi t + \phi_t \varphi)(X, Y) &= [\varphi X, tY] + [tX, \varphi Y] + \varphi t[X, Y] + t\varphi[X, Y] \\ &\quad - \varphi[X, tY] - \varphi[tX, Y] - t[X, \varphi Y] - t[\varphi X, Y] \end{aligned}$$

ifadesi göz önüne alındığında, bu ifadenin φ ve t 'nin $S_{\varphi, t}$ burulma tensörü olduğu görülür (Kobayashi and Nomizu 1963; Nijenhuis 1951).

Böylece şu teorem yazılır:

Teorem 3.2.1.3: $\varphi, t \in \mathfrak{S}_1^*(M_n)$ olsun. $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ pürlük şartı olmaksızın $\phi_\varphi t + \phi_t \varphi$ ifadesi, (1,2) tipli bir $S_{\varphi, t}$ tensör alanı tanımlar, bu $S_{\varphi, t}$, φ ve t 'nin torsiyon tensör alanıdır (Salimov 2013).

(3.6) ifadesi ve Teorem 3.2.1.3'ten şu sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.1.1: t , (1,1) tipli pür olmayan bir tensör alanı olsun. O halde

$$S_{\varphi, t}(X, Y) = Q_{\varphi, t}(X, Y) - Q_{\varphi, t}(Y, X) + (\varphi t - t\varphi)[X, Y]$$

dir.

Keyfi $t, t_1, t_2 \in \mathfrak{S}_1^*(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

- a) $\phi_\varphi I = 0$,
- b) $\phi_{\varphi X}(tY) = \mathcal{Q}_{\varphi,t}(X,Y) + t \circ (\phi_\varphi Y)X$,
- c) $(\phi_\varphi t)(X,Y) = \mathcal{Q}_{\varphi,t}(X,Y) = -\mathcal{Q}_{t,\varphi}(Y,X) = -(\phi_t \varphi)(Y,X)$,
- d) $\phi_{\varphi,t_1 \circ t_2} = \phi_{\varphi,t_1} \circ t_2 = t_1 \circ \phi_{\varphi,t_2}$,
- e) $\phi_{\varphi,\varphi \circ t_2} = N_\varphi \circ t_2 + \varphi \circ \mathcal{Q}_{\varphi,t_2}$

elde edilir. Burada I birim afinordur ve aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$(\mathcal{Q}_{\varphi,t})_Y X = \left(\mathcal{Q}_{\varphi,t} \overset{c}{\otimes} Y \right) X = \mathcal{Q}_{\varphi,t}(X,Y)$$

$$(t_1 \circ \phi_{\varphi,t_2})(X,Y) = \left(t_1 \overset{c}{\otimes} \phi_{\varphi,t_2} \right) (X,Y) = \mathcal{Q}_{\varphi,t_2}(X,t_1 Y)$$

$$(\phi_{\varphi,t_1} \circ t_2)(X,Y) = t_2 \left(\mathcal{Q}_{\varphi,t_1}(X,Y) \right)$$

ϕ_φ -Operatörünün $s \geq 2$ için $(1,s)$ tipli tensör alanına uygulanması

$t \in \mathfrak{S}_s^1(M_n)$ olsun, öyle ki

$$\varphi(t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s)) = t(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_s)$$

$\vdots$

$$= t(Y_1, Y_2, \dots, \varphi Y_s)$$

dir. Tanım 3.2.1'deki (c) ve (d)'den

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi t)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_s) &= \left(\phi_\varphi(t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s)) \right) X - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, Y_2, \dots, (\phi_\varphi Y_\lambda)X, \dots, Y_s) \\ &= -(L_{t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s)} \varphi)X + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, Y_2, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi)X, \dots, Y_s) \quad (3.7) \end{aligned}$$

yazılır.

(3.7) ifadesi, M_n 'deki doğal koordinat sistemine göre

$$(\phi_\varphi t)_{kj_1 \dots j_s}^h = \varphi_k^m \partial_m t_{j_1 \dots j_s}^h - \varphi_m^h \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^m - t_{j_1 \dots j_s}^m \partial_m \varphi_k^h + \sum_{\lambda=1}^s t_{j_1 \dots m \dots j_s}^h \partial_{j_\lambda} \varphi_k^m \quad (3.8)$$

bileşenlerine sahiptir ki onlar, t nin pürlük şartı ile $(1, s+1)$ tipli bir tensör alanının bileşenleridir.

Teorem 3.2.2.1: Özel olarak $t \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$ alınsın. $(\phi_\varphi t)_{kj_1j_2}$ 'de k, j_1 ve j_2 'ye göre alterneleştirme yapıldığında elde edilen $(\phi_\varphi t)_{[kj_1j_2]}^h$ bileşenleri, (1,3) tipli pür olmayan bir t tensör alanının bileşenleri olduğu görülür (Yano and Ako 1968).

Willmore (1968), $(\phi_\varphi t)_{[kj_1j_2]}^h$ bileşenleri ile verilen tensör alanının $t = N_\varphi$, $\varphi^2 = -id$ olduğunda Slobodzinski (1964)'nin bulmuş olduğu tensör alanına indirgenebileceğini ve Slobodzinski tensör alanının özdeş olarak sıfır olduğunu göstermiştir (Salimov 2013).

ϕ_φ -Operatörünün 1-Form'a uygulanması

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.2.1 kullanılarak, herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y) = (\phi_{\varphi X} \omega)Y \quad (3.9)$$

$$= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega) + \omega((L_Y \varphi)X)$$

$$= (L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi))Y$$

yazılabilir, burada $(\omega \circ \varphi)$ 1-formu,

$$(\omega \circ \varphi)Y = (\varphi^* \omega)Y = \left(\omega \overset{c}{\otimes} \varphi \right) Y = \omega(\varphi Y)$$

olarak tanımlıdır.

(3.9)'dan $\phi_\varphi \omega \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının, doğal çatıya göre

$$(\phi_\varphi \omega)_{ij} = \varphi_i^m \partial_m \omega_j - \partial_i (\omega_m \varphi_j^m) + \omega_m \partial_j \varphi_i^m$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür. $(\phi_\varphi \omega)_{ij}$, genelde i ve j 'ye göre anti-simetrik değildir.

$(\phi_\varphi \omega)_{[ij]}$ tensör alanı, Frolicher ve Nijenhuis tarafından tanıtılan tensör alanı ile örtüşür (Frolicher and Nijenhuis 1956a, 1956b).

Teorem 3.2.3.1: ω tam (exact) 1-form olsun. Öyleyse $\omega \in \text{Ker} \phi_\varphi$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \circ \varphi$ 1-formunun, kapalı 1-form olmasıdır (Salimov 2013).

İspat. $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olsun. Keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için

$$(d\omega)(X, Y) = \frac{1}{2} \{ X(\omega(Y)) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) \}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
(d\omega)(Y, \varphi X) &= \frac{1}{2} \{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) - \omega([Y, \varphi X])\} \\
&= \frac{1}{2} \{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) + \omega([\varphi X, Y])\} \\
&= \frac{1}{2} \{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) + \omega([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) + \omega(\varphi[X, Y])\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

yazılır (Kobayashi and Nomizu 1963, s. 36).

(3.9)'dan

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y) = (\varphi X)(\omega(Y)) - X(\omega(\varphi Y)) - \omega([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) ifadesi (3.10)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
(d\omega)(Y, \varphi X) &= \frac{1}{2} \{-(\phi_\varphi \omega)(X, Y) + Y(\omega(\varphi X)) - X(\omega(\varphi Y)) + \omega(\varphi[X, Y])\} \\
&= \frac{1}{2} \{-(\phi_\varphi \omega)(X, Y) + Y((\omega \circ \varphi)(X)) - X((\omega \circ \varphi)(Y)) - (\omega \circ \varphi)([Y, X])\} \\
&= -\frac{1}{2} (\phi_\varphi \omega)(X, Y) + (d(\omega \circ \varphi))(Y, X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\phi_\varphi \omega = 0$ denkleminin

$$(d(\omega \circ \varphi))(Y, X) = (d\omega)(Y, \varphi X)$$

ifadesine eş olduğu görülür ki bu da $\omega = df$ için aşağıdaki basit forma dönüşür:

$$(d(df \circ \varphi))(Y, X) = (d^2 f)(Y, \varphi X) = 0$$

Yani $df \circ \varphi$ kapalı 1-formdur.

Teorem 3.2.3.2: $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $\varphi^2 = -id$ olsun. Öyleyse $\omega \circ \varphi \in \text{Ker} \phi_\varphi$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \in \text{Ker} \phi_\varphi$ olmasıdır (Salimov 2013).

İspat. ω yerine $\omega \circ \varphi$ ve X yerine φX alındığında denklem (3.9)'dan,

$$\begin{aligned}
(\phi_\varphi(\omega \circ \varphi))(\varphi X, Y) &= (L_{\varphi^2 X}(\omega \circ \varphi) - L_{\varphi X}(\omega \circ \varphi^2))Y \\
&= -(L_X(\omega \circ \varphi) + L_{\varphi X}\omega)Y \\
&= -(\phi_\varphi \omega)(X, Y)
\end{aligned}$$

ya da

$$((\phi_\varphi(\omega \circ \varphi)) \circ \varphi)(X, Y) = -(\phi_\varphi \omega)(X, Y)$$

olarak yazılabilir. Burada $\det\varphi \neq 0$ olduğundan görülür ki $\phi_\varphi(\omega \circ \varphi) = 0$ dır ancak ve ancak $\phi_\varphi\omega = 0$ dır.

Teorem 3.2.3.3: $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $\omega \in \text{Ker}\phi_\varphi$ olsun. $\varphi^2 = -id$ ise $\omega \circ N_\varphi = 0$ dır, burada $(\omega \circ N_\varphi)(X, Y) = \omega(N_\varphi(X, Y))$ dir (Salimov 2013).

İspat: Teorem 3.2.3.2 ve aşağıdaki formülden açıkça yapılabilir:

$$\phi_\varphi(\omega \circ \varphi) = (\phi_\varphi\omega) \circ \varphi + \omega \circ N_\varphi.$$

ϕ_φ -Operatörünün $s \geq 2$ için $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

Teorem 3.2.4.1: $\omega \in \mathfrak{S}_s^0(M_n)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi\omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda}\varphi)X, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

dir (Salimov 2013).

İspat. Basitlik açısından $s = 2$ ve ω_{Y_1} ise $\omega_{Y_1}(Y_2) = \omega(Y_1, Y_2)$ şartını sağlayan 1-form olsun. Tanım 3.2.1'deki (e)'den

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi X}\omega_{Y_1})Y_2 &= (\varphi X)(\omega_{Y_1}(Y_2)) - X(\omega_{Y_1}(\varphi Y_2)) + (\omega_{Y_1}(L_{Y_2}\varphi)X) \\ &= (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2)) - X(\omega(Y_1, \varphi Y_2)) + \omega(Y_1, (L_{Y_2}\varphi)X) \end{aligned}$$

yazılır, burada

$$\begin{aligned} \left(\phi_{\varphi X} \left(\omega \overset{c}{\otimes} Y_1 \right) \right) Y_2 &= \left((\phi_{\varphi X}\omega) \overset{c}{\otimes} Y_1 + \omega \overset{c}{\otimes} (\phi_{\varphi X}Y_1) \right) Y_2 \\ &= (\phi_{\varphi X}\omega)(Y_1, Y_2) + \omega(\phi_{\varphi X}Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi X}\omega)(Y_1, Y_2) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2)) - X(\omega(\varphi Y_1, Y_2)) \\ &\quad + \omega(Y_1, (L_{Y_2}\varphi)X) + \omega((L_{Y_1}\varphi)X, Y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$\omega \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ yani

$$\omega(\varphi X, Y) = \omega(X, \varphi Y) \tag{3.12}$$

olsun. Şimdi Teorem 3.2.4.1, (3.12) ve $\phi_{\varphi X}Y = -(L_Y\varphi)X$ eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi}\omega)(X, Y, Z) &= (\varphi X)(\omega(Y, Z)) - X(\omega(\varphi Y, Z)) + \omega((L_Y\varphi)X, Z) + \omega(Y, (L_Z\varphi)X) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y, Z) \end{aligned} \quad (3.13)$$

yazılabilir. Burada $\omega \circ \varphi$ tensör alanı

$$(\omega \circ \varphi)(X, Y) = \omega(\varphi X, Y)$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 3.2.4.2: $\omega \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ bir simetrik (anti-simetrik) pür tensör alanı ise $\omega \circ \varphi \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ de simetrik (anti-simetrik) pür tensör alanıdır (Salimov 2013).

(3.13)'ten $\phi_{\varphi}\omega \in \mathfrak{S}_3^0(M_n)$ tensör alanının doğal çatıya göre bileşenlerinin

$$(\phi_{\varphi}\omega)_{kij} = \varphi_i^m \partial_m \omega_{ij} - \partial_k(\omega \circ \varphi)_{ij} + \omega_{mj} \partial_i \varphi_k^m + \omega_{im} \partial_j \varphi_k^m$$

olduğu görülür, burada

$$(\omega \circ \varphi)_{ij} = \omega_{mj} \varphi_i^m = \omega_{im} \varphi_j^m \quad (3.14)$$

dir.

$(\phi_{\varphi}\omega)_{[kij]}$ ifadesi, (3.14) pürlük şartı olmadan (0,3) tipli bir tensör alanının bileşenleridir. Eğer ω , bir 2-form ise $(\phi_{\varphi}\omega)_{[kij]}$ ifadesi Frolicher ve Nijenhuis tarafından tanıtılan tensör alanı ile örtüşür (Frolicher and Nijenhuis 1956a, 1956b).

Eğer $\omega \in \mathfrak{S}_s^0(M)$, $s \geq 2$ ise Teorem 3.2.4.1 dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi}\omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, (L_{Y_{\lambda}}\varphi)X, \dots, Y_s) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y_1, \dots, Y_s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir, burada $\omega \circ \varphi$

$$(\omega \circ \varphi)(Y_1, \dots, Y_s) = \omega(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_s)$$

⋮

$$= \omega(Y_1, Y_2, \dots, \varphi Y_s)$$

olarak tanımlıdır.

(3.15) kullanılarak, Teorem 3.2.3.2'nin ispatına ile benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.2.4.3: $\omega \in \mathfrak{J}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ ve $\varphi^2 = -id$ olsun. O halde $\omega \circ \varphi \in Ker\phi_\varphi$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olmasıdır (Salimov 2013).

Teorem 3.2.4.4: $\omega \in \mathfrak{J}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ ve $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olsun. Bu durumda $\varphi^2 = -id$ ise $\omega \circ N_\varphi = 0$ dır. Burada $(\omega \circ N_\varphi)(X, Y_1, \dots, Y_s) = \omega(N_\varphi(X, Y_1)Y_2, \dots, Y_s)$ dir (Salimov 2013).

ϕ_φ -Operatörünün (r, s) tipli bir tensör alanına uygulanması

$r > 1$, $s \geq 1$ olmak üzere $t \in \mathfrak{J}_s^r(M_n)$ olsun. $(0, s)$ tipli bir $t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r} \in \mathfrak{J}_s^0(M_n)$ pür tensör alanı $t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) = t\left(Y_1, Y_2, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right)$ biçiminde tanımlansın, burada $t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}$ ifadesi

$$\left(t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}\right)_{j_1 j_2 \dots j_s} = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \overset{1}{\xi}_{i_1} \overset{2}{\xi}_{i_2} \dots \overset{r}{\xi}_{i_r}$$

formunun bileşenleridir.

Teorem 3.2.4.1'e göre

$$\begin{aligned} & \phi_{\varphi X} t\left(Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) + \sum_{\mu=1}^r t\left(Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \dots, \phi_{\varphi X} \overset{\mu}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) \\ &= \left(\phi_{\varphi X} t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}\right)(Y_1, \dots, Y_s) = (\varphi X)\left(t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}(Y_1, \dots, Y_s)\right) \\ & - X\left(t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}(\varphi Y_1, \dots, Y_s)\right) + \sum_{\lambda=1}^s t_{\xi, \xi, \dots, \xi}^{1 \ 2 \ r}(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi)X, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda, $\phi_{\varphi X} \overset{\mu}{\xi} = L_{\varphi X} \overset{\mu}{\xi} - L_X\left(\overset{\mu}{\xi} \circ \varphi\right)$ eşitliği kullanılarak, $r > 1$, $s \geq 1$ olmak üzere, $t \in \mathfrak{J}_s^r(M_n)$ için $\phi_\varphi t$ 'nin

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi t)\left(X, Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) &= (\phi_{\varphi X} t)\left(Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) \\ &= (\varphi X)t\left(Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) - Xt\left(\varphi Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda=1}^s t \left(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi) X, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi} \right) \\
& - \sum_{\mu=1}^r t \left(Y_1, \dots, Y_s, \overset{1}{\xi}, \dots, L_{\varphi X} \overset{\mu}{\xi} - L_X \left(\overset{\mu}{\xi} \circ \varphi \right), \dots, \overset{r}{\xi} \right)
\end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanan $(r, s + 1)$ tipli bir tensör alanı olduğunu görülür.

(3.16) denkleminde $X = \partial_k$, $Y_\lambda = \partial_{j_\lambda}$, $\overset{\mu}{\xi} = dx^{i_\mu}$, $\lambda = 1, \dots, s$; $\mu = 1, \dots, r$ olarak alınırsa, $\phi_\varphi t$ 'nin $x^1, \dots, x^n$ lokal koordinat sistemine göre $(\phi_\varphi t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
(\phi_\varphi t)_{kj_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \varphi_k^m \partial_m t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \partial_k (t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \\
&+ \sum_{\lambda=1}^s (\partial_{j_\lambda} \varphi_k^m) t_{j_1 \dots m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\mu=1}^r (\partial_k \varphi_m^{i_\mu} - \partial_m \varphi_k^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m \dots i_r}
\end{aligned} \quad (3.17)$$

Burada

$$(t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t_{m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \varphi_{j_1}^m = \dots = t_{j_1 \dots m}^{i_1 \dots i_r} \varphi_{j_s}^m = t_{j_1 \dots j_s}^{m \dots i_r} \varphi_m^{i_1} = \dots = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m} \varphi_m^{i_r}$$

dir. (3.17) operatörü ilk kez Tachibana tarafından tanıtılmıştır (Tachibana 1960).

Vishnevskii Operatörleri

∇ , M_n üzerinde bir lineer konneksiyon ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olsun. Herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için Tanım 3.2.1'deki (d) koşulu yerine

$$(d') \quad \Psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y)$$

eşitliği yazıldığında yeni bir operatör göz önünde bulundurulabilir.

Tanım 3.3.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri $\mathfrak{S}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\Psi_\varphi: \mathfrak{S}^*(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$ haritası M_n üzerinde bir Vishnevskii operatörü veya Ψ_φ -operatör olarak adlandırılır (Salimov 2013).

- a) Ψ_φ sabit katsayıya göre lineerdir,
- b) Ψ_φ -operatörü tipi korur.
- c) Her $K, L \in \mathfrak{S}^*(M_n)$ için $\Psi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\Psi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} \Psi_\varphi L$,
- d) Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $\Psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y)$,

e) Her $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$\Psi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) = (\varphi X)(\omega(Y)) - X\omega(\varphi Y)$$

dir (burada $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$).

∇ konneksiyonunun tanımı dikkate alındığında $\Psi_{\varphi X} Y$ 'nin X 'e göre lineer olduğu ancak Y 'ye göre lineer olmadığı görülür. Böylece $\Psi_{\varphi X} Y$ yerine $(\Psi_{\varphi} Y)X$ yazılabilir.

Ψ_{φ} -Operatörünün $s \geq 0$ için $(1, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$t \in \mathfrak{S}_s^1(M_n)$ olsun. $t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olduğunda, Tanım 3.3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} (\Psi_{\varphi X} t)(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) &= (\Psi_{\varphi} t)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \\ &= \Psi_{\varphi X} t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{\varphi} Y_{\lambda})X, \dots, Y_s) \\ &= \nabla_{\varphi X} t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) - \varphi \nabla_X (t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s)) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{\varphi} Y_{\lambda})X, \dots, Y_s) \\ (\Psi_{\varphi X} t)(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) &= (\nabla_{\varphi X} t)(Y_1, \dots, Y_s) + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{\varphi X} Y_{\lambda}, \dots, Y_s) \\ &\quad - \varphi (\nabla_X t)(Y_1, \dots, Y_s) - \varphi \left(\sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_X Y_{\lambda}, \dots, Y_s) \right) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{\varphi} Y_{\lambda})X, \dots, Y_s) \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir.

t pür tensör alanı olduğundan,

$$\varphi \left(\sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_X Y_{\lambda}, \dots, Y_s) \right) = \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \varphi(\nabla_X Y_{\lambda}), \dots, Y_s) \tag{3.19}$$

yazılabilir.

(3.19) ifadesi (3.18)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
(\Psi_\varphi t)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi(\nabla_X t) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \\
&+ \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi(\nabla_X Y_\lambda), \dots, Y_s) - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_\varphi Y_\lambda)X, \dots, Y_s) \\
&= \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi(\nabla_X t) \right) (Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$(\Psi_\varphi t)(X, Y_1, \dots, Y_s) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi(\nabla_X t) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \quad (3.20)$$

dir. (3.20)'den aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem 3.3.1.1: $t \in \mathfrak{S}_s^1(M)$ olsun. Eğer $\nabla t = 0$ ise $t \in \text{Ker} \Psi_\varphi$ dir (Salimov 2013).

Ψ_φ -Operatörünün $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.3.1 kullanılarak keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned}
(\Psi_\varphi \omega)(X, Y) &= (\Psi_{\varphi X} \omega)Y \\
&= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega) - \omega \left(\nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y) \right) \\
&= \left(\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X(\omega \circ \varphi) \right) Y
\end{aligned} \quad (3.21)$$

yazılır. Burada $(\omega \circ \varphi)Y = \omega(\varphi Y)$ dir. (3.21)'den $\Psi_{\varphi X} \omega = \nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X(\omega \circ \varphi)$ 'nin 1-form olduğu görülür.

Şimdi $\omega \in \mathfrak{S}_s^0(M_n)$, $s > 1$ olsun. Teorem 3.2.4.1 kullanılarak, benzer biçimde

$$\begin{aligned}
(\Psi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= (\Psi_{\varphi X} \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) \\
&= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s) \\
&- \sum_{\lambda=1}^s \left(\omega(Y_1, \dots, \nabla_{\varphi X} Y_\lambda, \dots, Y_s) - \omega(Y_1, \dots, \varphi(\nabla_X Y_\lambda), \dots, Y_s) \right) \\
&= (\nabla_{\varphi X} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) - X\omega(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_s) + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, \varphi \nabla_X Y_\lambda, \dots, Y_s) \\
&= (\nabla_{\varphi X} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) - X\omega(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_s) + \omega(\varphi(\nabla_X Y_1), Y_2, \dots, Y_s) \\
&+ \omega(\varphi Y_1, \nabla_X Y_2, \dots, Y_s) + \dots + \omega(\varphi Y_1, Y_2, \dots, \nabla_X Y_s) \\
&= \left(\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X(\omega \circ \varphi) \right) (Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$(\Psi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) = (\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X(\omega \circ \varphi))(Y_1, \dots, Y_s) \quad (3.22)$$

eşitliği yazılır.

(3.22)'den şu teorem elde edilir:

Teorem 3.3.2.1: $\omega \in \mathfrak{S}_s^0(M_n)$ olsun. Eğer $\nabla \omega = 0$ ise $\omega \notin \text{Ker} \Psi_\varphi$ dir (Salimov 2013).

Ψ_φ -Operatörünün $r > 1$ için (r, s) tipli bir tensör alanına uygulanması

$t \in \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ olsun.

$$\begin{aligned} (\Psi_\varphi t)(X, Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) &= (\varphi X)t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) - Xt(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi(\nabla_X Y_\lambda), \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^r t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \nabla_{\varphi X} \xi^\mu - \nabla_X(\xi^\mu \circ \varphi), \dots, \xi^r) \end{aligned} \quad (3.23)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} &t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \nabla_{\varphi X} \xi^\mu - \nabla_X(\xi^\mu \circ \varphi), \dots, \xi^r) \\ &= t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \nabla_{\varphi X} \xi^\mu - (\nabla_X \xi^\mu) \circ \varphi - \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \dots, \xi^r) \\ &= t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \nabla_{\varphi X} \xi^\mu - \varphi \nabla_X \xi^\mu, \dots, \xi^r) - t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \dots, \xi^r) \end{aligned}$$

ifadesi (3.23)'te yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} (\Psi_\varphi t)(X, Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) &= (\nabla_{\varphi X} t - \nabla_X(t \circ \varphi))(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^r t(Y_1, \dots, Y_s, \xi^1, \dots, \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \dots, \xi^r) \end{aligned} \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $\nabla\varphi = 0$ olsun. Böylece (3.24)'ten

$$\Psi_{\varphi X}t = \nabla_{\varphi X}t - (\nabla_X t) \circ \varphi \quad (3.25)$$

yazılır.

(3.25)'ten $\Psi_{\varphi}t$ 'nin $\{\partial_i\}$ doğal çatısına göre bileşenlerinin

$$(\Psi_{\varphi}t)_{kj_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r} = \varphi_k^m \nabla_m t_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r} - \varphi_m^{j_1} \nabla_k t_{j_1\dots j_s}^{mi_2\dots i_r}$$

olduğu kolayca görülür.

(3.25) operatörü, integrallenebilir φ -yapıları için ilk kez Vishnevskii (1970) tarafından çalışılmıştır.

φ afinor alanlı bir manifoldda $\nabla\varphi = 0$ olması durumunda ∇ konneksiyon φ -konneksiyon olarak adlandırılır (Salimov 2013).

Teorem 3.3.3.1: φ -konneksiyonunun ∇ burulma tensörü pür ise herhangi bir $t \in \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ için $\phi_{\varphi X}t = \Psi_{\varphi X}t$ dir (Salimov 2013).

İspat. $\nabla\varphi = 0$ ve $\varphi T(X, Y) = T(\varphi X, Y) = T(X, \varphi Y)$ olsun, burada $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ dir. (d') ve Tanım 3.2.1'deki (d) 'den

$$\begin{aligned} \phi_{\varphi X}Y &= -(L_Y\varphi)X \\ &= [\varphi X, Y] - \varphi[X, Y] \\ &= \nabla_{\varphi X}Y - \nabla_Y\varphi X - T(\varphi X, Y) - \varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - T[X, Y]) \\ &= \nabla_{\varphi X}Y - \varphi(\nabla_X Y) - (\nabla_{\varphi})(Y, X) + \varphi T(X, Y) - T(\varphi X, Y) \\ &= \nabla_{\varphi X}Y - \varphi(\nabla_X Y) \\ &= \Psi_{\varphi X}Y \end{aligned}$$

elde edilir (Salimov 2013).

Teorem 3.3.3.2: Bir sıfır torsiyon tensör alanı pür olduğundan her burulmasız φ -konneksiyonu için $\phi_{\varphi X}Y = \Psi_{\varphi X}Y$ olur (Salimov 2013).

Ψ_φ -Operatörünün pür konneksiyona uygulanması

$\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve ∇ burulmasız φ -konneksiyon, yani $\nabla\varphi = 0$ olsun. O halde φ 'nin integrallenebilir olduğu söylenir (Shirokov 1955). Başka bir ifade ile $\varphi = (\varphi_j^i)$ matrisi, her $x \in M_n$ noktasının bir U_x komşuluğundaki halonomik bir doğal çatıda sabit forma dönüşür.

∇ bir burulmasız φ -konneksiyon ise $\nabla\varphi = 0$ olduğundan uyarlanmış lokal koordinatlara göre

$$\Gamma_{mj}^k \varphi_i^m = \Gamma_{im}^k \varphi_j^m = \Gamma_{ij}^m \varphi_m^k \quad (3.26)$$

yazılabilir. Burada Γ_{ij}^k , ∇ 'nın bileşenleridir. Bu konneksiyon, φ 'ye göre pür konneksiyon olarak adlandırılır (Kruchkovich 1972).

∇ pür konneksiyonunun $R \in \mathfrak{S}_3^1(M_n)$ eğrilik tensörü invaryant formda

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

olarak tanımlanır.

φ 'ye Ricci özdeşliği uygulanarak

$$\begin{aligned} \nabla_X ((\nabla_Y \varphi)Z) - \nabla_Y ((\nabla_X \varphi)Z) &= R(X, Y)\varphi Z - \varphi(R(X, Y)Z) + (\nabla_{[X, Y]}\varphi)Z \\ &\quad + (\nabla_Y \varphi)(\nabla_X Z) - (\nabla_X \varphi)(\nabla_Y Z), \end{aligned}$$

yazılır. $\nabla\varphi = 0$ olduğundan

$$\varphi R(X, Y)Z = R(X, Y)\varphi Z$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremler yazılabilir.

Teorem 3.3.4.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olsun. Eğer ∇ , φ 'ye göre bir pür konneksiyon ise, keyfi $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$\varphi R(X, Y)Z = R(X, Y)\varphi Z \quad (3.27)$$

olur (Salimov 2013).

Teorem 3.3.4.2: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve ∇ , φ 'ye göre bir pür konneksiyon olsun. ∇ 'nın R eğrilik tensör alanının, φ 'ye göre bir pür tensör alanı olması için gerek ve yeter şart her $X, Y, Z \in \text{Ker}\Psi_\varphi$ için

$$\begin{aligned} \Psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) &= \nabla_{\varphi X} \nabla_Y Z - \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmasıdır (Salimov 2013).

İspat. $X, Y, Z \in \text{Ker}\Psi_\phi$ ve

$$\begin{aligned}\Psi_{\phi Y}X &= \phi_{\phi Y}X = -(L_X\phi)Y = 0 \\ (\nabla_\phi = 0, \quad T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}R(X, \phi Y)Z &= \nabla_X \nabla_{\phi Y} Z - \nabla_{\phi Y} \nabla_X Z - \nabla_{[X, \phi Y]} Z \\ &= \nabla_X \phi(\nabla_Y Z) - \nabla_{\phi Y} \nabla_X Z - \nabla_{(L_X\phi)Y + \phi L_X Y} Z \\ &= \phi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) + \phi(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{\phi Y} \nabla_X Z \\ &= \phi R(X, Y)Z - \Psi_{\phi Y}(\nabla_X Z)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$R(X, \phi Y)Z = \phi R(X, Y)Z - \Psi_{\phi Y}(\nabla_X Z) \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ olduğundan, (3.28)'den

$$\begin{aligned}R(\phi X, Y)Z &= -R(Y, \phi X)Z \\ &= -\phi R(Y, X)Z + \Psi_{\phi Y}(\nabla_Y Z)\end{aligned} \quad (3.29)$$

yazılabilir.

(3.27) – (3.29)'dan, bir ∇ pür konneksiyonunun R eğrilik tensörünün bütün argümanlarına göre pür olmasının gerek ve yeter şartı her $X, Y, Z \in \text{Ker}\Psi_\phi$ için

$$\Psi_{\phi Y}(\nabla_Y Z) = 0$$

olmasıdır. Böylece Teorem 3.3.4.2 ispatlanmış olur (Salimov 2013).

(3.29)'dan

$$\Psi_{\phi X}(\nabla_Y Z) \in \mathfrak{S}_3^1(M_n)$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak burada $\Psi_{\phi X}(\nabla_Y Z)$ yerine $(\Psi_\phi \nabla)(X, Y, Z)$ yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(\Psi_\phi \nabla)(X, Y, Z) = \nabla_{\phi X} \nabla_Y Z - \phi(\nabla_X \nabla_Y Z).$$

Dolayısıyla $\Psi_\phi \nabla$, pür ∇ konneksiyonuna uygulanmış Ψ_ϕ -operatör (veya bir ϕ_ϕ -operatör) dür.

Kahler-Norden manifoldlarının bir ∇ konneksiyonu pür ise doğrudan $\Psi_\varphi \nabla = 0$ dır (Salimov 2013).

Tachibana Operatörlerinin Karmaşık Tipli Tensör Alanına Uygulanması

Altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanları

$i: \widetilde{M}_m \rightarrow M_n$ immersiyon dönüşümü ile tanımlanan n -boyutlu bir M_n manifoldunun m -boyutlu bir altmanifoldu $\widetilde{M}_m$ olsun. $\widetilde{M}_m$ altmanifoldu lokal olarak

$$x^i = x^i(u^A), \quad i = 1, \dots, n, \quad A = 1, \dots, m, \quad \text{rank} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^A} \right) = m$$

şeklinde ifade edilir.

$B_A = B_A^i \partial_i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A} \partial_i$, $A = 1, \dots, m$, m teğet vektörleri M_n 'deki $i(\widetilde{M}_m)$ 'de yerine yazıldığında $\tilde{X} = \tilde{X}^A \partial_A$ lokal ifadesi ile verilen bir $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ elemanı için $B\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ teğet vektörlerinin M_n 'deki $i(\widetilde{M}_m)$ 'de lokal ifadesi

$$B\tilde{X} = B_A^i \tilde{X}^A \partial_i$$

biçiminde olur.

Böylece $\tilde{X} \rightarrow B\tilde{X}$ eşlemesiyle tanımlanan

$$B: \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(i(\widetilde{M}_m))$$

dönüşümü, $i: \widetilde{M}_m \rightarrow M_n$ immersiyonunun diferensiyelidir, yani $B = i_*$ ve bu nedenle $\mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ 'den $\mathfrak{S}_0^1(i(\widetilde{M}_m))$ 'ye bir izomorfizmdir.

Karmaşık tipli bir tensör alanı (veya $(r, s; p, q)$ tipli bir tensör alanı) olarak $\widetilde{M}_m$ 'de

$$t: \underbrace{\mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \dots \times \mathfrak{S}_0^1(M_n)}_{s \text{ tane}} \times \underbrace{\mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m) \times \dots \times \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)}_{q \text{ tane}} \times \underbrace{\mathfrak{S}_1^0(M_n) \times \dots \times \mathfrak{S}_1^0(M_n)}_{r \text{ tane}} \times \underbrace{\mathfrak{S}_1^0(\widetilde{M}_m) \times \dots \times \mathfrak{S}_1^0(\widetilde{M}_m)}_{p \text{ tane}} \rightarrow \mathfrak{S}_0^0(\widetilde{M}_m)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanır. Bu dönüşüm, sabitlenmiş $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için $\widetilde{M}_m$ 'de (p, q) tipli bir tensör alanı ve yine sabitlenmiş $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ ve $\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^p \in \mathfrak{S}_1^0(\widetilde{M}_m)$ için M_n 'de (r, s) tipli bir tensör alanı belirtir (Salimov 2013).

Tanım 3.4.1.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(\widetilde{M}_m)$ olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} & t(X_1, \dots, \varphi X_\lambda, \dots, X_s, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q, \xi^1, \dots, \xi^r, \tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^p) \\ &= t(X_1, \dots, X_s, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{\varphi} \tilde{X}_\mu, \dots, \tilde{X}_q, \xi^1, \dots, \xi^r, \tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^p), \end{aligned}$$

$$\lambda = 1, \dots, s, \quad \mu = 1, \dots, q,$$

ise t 'nin $(X_\lambda, \tilde{X}_\mu)$ çiftine göre pür olduğu söylenir. t , vektör ve kovektörlerinin bütün çiftlerine göre pür oluyorsa t , $(\varphi, \tilde{\varphi})$ 'ya göre $(r, s; p, q)$ tipli bir pür tensör alanı olarak adlandırılır (Salimov 2013).

$\tilde{M}_m$ 'ye sınırlandırılmış $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(\tilde{M}_m)$ (veya $\tilde{\xi} \in \mathfrak{S}_1^0(\tilde{M}_m)$) ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ (veya $\xi \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$) vektör alanları, pür olarak kabul edilmiştir. Özel olarak φ ve $\tilde{\varphi}$ afinor alanları pür tensör alanlarıdır.

K ve L sırasıyla $(r_1, s_1; p_1, q_1)$ ve $(r_2, s_2; p_2, q_2)$ tipli pür tensör alanları olsun. Pür çarpımın tanımı, karmaşık tipli pür tensörlere aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$K \overset{c}{\otimes} L = \begin{cases} \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q, \tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^{p_1}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{q_2}, \tilde{\eta}^1, \dots, \tilde{\eta}^{p_2} \text{ sabitleri için} \\ M_n \text{ üzerinde } K_{(\tilde{X}, \tilde{\xi})} \overset{c}{\otimes} L_{(\tilde{Y}, \tilde{\eta})} \text{ pür çarpımı,} \\ X_1, \dots, X_{s_1}, \xi^1, \dots, \xi^{r_1}, Y_1, \dots, Y_{s_2}, \eta^1, \dots, \eta^{r_2} \text{ sabitleri için} \\ M_n \text{ üzerinde } K_{(X, \xi)} \overset{c}{\otimes} L_{(Y, \eta)} \text{ pür çarpımı} \end{cases}$$

Daha sonra $\overset{c}{\otimes}$ pür çarpımına göre R üzerinde $\mathfrak{S}^*(\tilde{M}_m) = \sum_{r,s,p,q=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{s,q}^{r,p,*}(\tilde{M}_m)$ biçiminde bir cebir tanımlanabilir, burada $\mathfrak{S}_{s,q}^{r,p,*}(\tilde{M}_m)$, $\tilde{M}_m$ 'daki $(\varphi, \tilde{\varphi})$ 'ya göre $(r, s; p, q)$ tipli bütün pür tensör alanlarının modülüdür.

$\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ -Operatörleri

$\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve M_n 'nin bir altmanifoldu $\tilde{M}_m$ olsun. Eğer her $x \in \tilde{M}_m$ için $\varphi T_x(\tilde{M}_m) \subset T_x(M_n)$ ise $\tilde{M}_m$ 'nin M_n 'de invariant olduğu söylenir.

$\tilde{M}_m$ bir invariant altmanifold olsun. Öyleyse M_n 'nin $B_A = B \tilde{\partial}_A = B_A^i \partial_i$, $A = 1, \dots, m$ m tanjant vektörleri $\tilde{M}_m$ tanjant uzayını gerer ve bu vektörlerin görüntüleri, kendilerinin lineer terkidir. Bundan dolayı

$$\varphi_m^i B_A^m = \tilde{\varphi} \overset{c}{B}_A^i \quad (3.30)$$

olacak şekilde bir $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(\tilde{M}_m)$ afinor alanı bulunur.

Tersine, eğer (3.30)'a uyan bir $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(\tilde{M}_m)$ afinor alanı mevcutsa $\tilde{M}_m$ invarianttır.

(3.30) eşitliğinden B_A^i 'nin, $(\varphi, \tilde{\varphi})$ 'ya göre $\tilde{M}_m$ üzerinde $(1,0,0,1)$ tipli pür tensör alanı olduğu söylenir. (3.30) eşitliğinden ayrıca herhangi $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(\tilde{M}_m)$ için

$$B(\tilde{\varphi} \tilde{X}, \xi) = B(\tilde{X}, \varphi \xi)$$

veya

$$\xi B(\tilde{\varphi}\tilde{X}) = B(\tilde{X}, \xi \circ \varphi) = (\xi \circ \varphi)(B\tilde{X}) = \xi(\varphi(B\tilde{X}))$$

yani

$$\varphi(B\tilde{X}) = B(\tilde{\varphi}\tilde{X}) \quad (3.31)$$

yazılabilir.

$\widetilde{M}_m$ üzerinde, φ ve $\tilde{\varphi}$ ile birleştirilmiş ve karmaşık tipli pür tensörlere uygulanan operatörün tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.4.2.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve indirgenmiş $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(\widetilde{M}_m)$ afinor alanı ile birlikte bir invaryant altmanifold $\widetilde{M}_m$ olsun.

$$\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \Big|_{r+s+p+q>0} : \mathfrak{S}^*(\widetilde{M}_m) \rightarrow \mathfrak{S}(\widetilde{M}_m)$$

dönüşümüne aşağıdaki şartları sağlaması durumunda $\widetilde{M}_m$ üzerinde Tachibana operatörü veya $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ -operatörü denir (Salimov 2013).

a) Sabit katsayılara göre, $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ lineerdir,

b) Her r, s, p ve q için $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} : \mathfrak{S}_{s,q}^{r,p}(\widetilde{M}_m) \rightarrow \mathfrak{S}_{s,q+1}^{r,p}(\widetilde{M}_m)$ dir,

c) Her $K, L \in \mathfrak{S}^*(\widetilde{M}_m)$ için $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} L)$ dir,

d_1) Keyfi $\tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ için $(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{Y}) \tilde{X} = (\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{Y}) \tilde{X} = -(L_{\tilde{Y}} \tilde{\varphi}) \tilde{X}$ dir,

d_2) Keyfi $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} Y) \tilde{X} = (\phi_{\varphi} Y)(B\tilde{X}) = -(L_Y \varphi)(B\tilde{X})$ dir,

e_1) Keyfi bir $\tilde{\omega} \in \mathfrak{S}_1^0(\widetilde{M}_m)$ için

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{\omega})(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= (\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{\omega})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d((i_{\tilde{Y}} \tilde{\omega}))(\tilde{\varphi}\tilde{X}) - d(i_{\tilde{Y}}(\tilde{\omega} \circ \tilde{\varphi}))(\tilde{X}) \\ &\quad + \tilde{\omega}((L_{\tilde{Y}} \tilde{\varphi}) \tilde{X}) \text{ dir,} \end{aligned}$$

e_2) Keyfi bir $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \omega)(\tilde{X}, Y) &= (\phi_{\varphi} \omega)(B\tilde{X}, Y) = d((i_Y \omega))(\varphi(B\tilde{X})) - d(i_Y(\omega \circ \varphi))(B\tilde{X}) \\ &\quad + \omega((L_Y \varphi)(B\tilde{X})) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Burada $\mathfrak{S}^*(\widetilde{M}_m) = \sum_{r,s,p,q=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{s,q}^{r,p}(\widetilde{M}_m)$, karmaşık tipli tensörlerin cebiridir.

$\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ -Operatörünün $(1, s, 0, q)$ ve $(0, s, 1, q)$ tipli tensör alanlarına uygulanması

$t \in \mathfrak{S}_{s,q}^{1,0*}(\widetilde{M}_m)$ olsun. Bu durumda herhangi $Y_1, \dots, Y_s \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ için $t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ dir. Tanım 3.4.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) \right) \tilde{X} &= \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t \right) \left(\tilde{X}, Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \right) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^s t \left(Y_1, \dots, \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} Y_{\lambda} \right) \tilde{X}, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \right) \\ &+ \sum_{\mu=1}^q t \left(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{Y}_{\mu} \right) \tilde{X}, \dots, \tilde{Y}_q \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t \right) \left(\tilde{X}, Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \right) &= \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) \right) \tilde{X} \\ &- \sum_{\lambda=1}^s t \left(Y_1, \dots, \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} Y_{\lambda} \right) \tilde{X}, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \right) \\ &+ \sum_{\mu=1}^q t \left(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{Y}_{\mu} \right) \tilde{X}, \dots, \tilde{Y}_q \right) \\ &= - \left(L_{t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q)} \varphi \right) (B\tilde{X}) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^s t \left(Y_1, \dots, (L_{Y_{\lambda}} \varphi) (B\tilde{X}), \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q \right) \\ &+ \sum_{\mu=1}^q t \left(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, (L_{\tilde{Y}_{\mu}} \tilde{\varphi}) \tilde{X}, \dots, \tilde{Y}_q \right) \quad (3.32) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.32) eşitliğinde $\tilde{X} = \partial_C, Y_{\lambda} = \partial_{j_{\lambda}}, \tilde{Y}_{\mu} = \partial_{A_{\mu}}$ olarak alındığında, $\left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t \right)_{C j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i$

bileşenlerinin, aşağıdaki gibi ifade edilebildiği görülür.

$$\begin{aligned} \left(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t \right)_{C j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i &= -B_C^h \left(t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i \partial_m \varphi_h^i - \varphi_h^m \partial_m t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i \right) - B_C^h \left(\varphi_m^i \partial_h t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^m \right) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^s B_C^h t_{j_1 \dots m \dots j_s A_1 \dots A_q}^i \partial_{j_{\lambda}} \varphi_h^m + \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots m \dots A_q}^i \partial_{A_{\mu}} \tilde{\varphi}_C^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\varphi}_C^m \partial_m t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i - \partial_C^* t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i + \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots m \dots A_q}^i \partial_{A_\mu} \tilde{\varphi}_C^m \\
&+ B_C^h t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i (\partial_h \varphi_m^i - \partial_m \varphi_h^i) + \sum_{\lambda=1}^s B_C^h t_{j_1 \dots m \dots j_s A_1 \dots A_q}^i \partial_{j_\lambda} \varphi_h^m \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Burada $t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i = \varphi_m^i t_{j_1 \dots j_s A_1 \dots A_q}^i$ dir.

(3.33) operatörü ilk kez Tachibana ve Koto tarafından çalışılmıştır (Tachibana ve Koto 1962; Shirokov 1966; Salimov 2013).

$t \in \mathfrak{S}_{s,q}^{1,0,*}(\widetilde{M}_n)$ olsun. O halde benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} t)(\tilde{X}, Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) &= -\left(L_{t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q)} \tilde{\varphi}\right) \tilde{X} \\
&+ \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi)(B\tilde{X}), \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) \\
&+ \sum_{\mu=1}^q t(Y_1, \dots, Y_s, \tilde{Y}_1, \dots, (L_{\tilde{Y}_\mu} \tilde{\varphi}) \tilde{X}, \dots, \tilde{Y}_q) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak, (3.32) ve (3.34)'te t yerine sırasıyla $t = \varphi$ ve $t = \tilde{\varphi}$ alınırsa,

$$(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \varphi)(\tilde{X}, Y) = N_\varphi(B\tilde{X}, Y), (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{\varphi})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = N_{\tilde{\varphi}}(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

yazılır. Burada N_φ ve $N_{\tilde{\varphi}}$ sırasıyla φ ve $\tilde{\varphi}$ 'nın Nijenhuis tensörleridir. $B \in \mathfrak{S}_{0,1}^{1,0,*}(\widetilde{M}_m)$ olduğundan (3.32) operatörünün B üzerindeki durumu göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned}
(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} B)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= -\left(L_{B\tilde{Y}} \varphi\right)(B\tilde{X}) + B\left(\left(L_{\tilde{Y}} \tilde{\varphi}\right) \tilde{X}\right) \\
&= -L_{B\tilde{Y}}\left(\varphi(B\tilde{X})\right) + \varphi\left(L_{B\tilde{Y}} B\tilde{X}\right) + B\left(\left(L_{\tilde{Y}} \tilde{\varphi}\right) \tilde{X}\right).
\end{aligned}$$

(3.31) eşitliği ve $[B\tilde{X}, B\tilde{Y}] = B[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ (Yano and Kon 1984) den dolayı

$$\begin{aligned}
(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} B)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= -L_{B\tilde{Y}}\left(B(\tilde{\varphi}\tilde{X})\right) + \varphi\left(L_{B\tilde{Y}} B\tilde{X}\right) + B\left(L_{\tilde{Y}} \varphi \tilde{X} - \tilde{\varphi}(L_{\tilde{Y}} \tilde{X})\right) \\
&= -B[\tilde{X}, \tilde{\varphi}\tilde{Y}] + \varphi B[\tilde{Y}, \tilde{X}] + B\left(L_{\tilde{Y}} \varphi \tilde{X}\right) - B\tilde{\varphi}[\tilde{Y}, \tilde{X}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 3.4.3.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve indirgenmiş $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(\tilde{M}_m)$ ile birlikte M_n 'nin bir invaryant altmanifoldu $\tilde{M}_m$ olsun. O halde $B \in \mathfrak{S}_{0,1}^{1,0*}(\tilde{M}_m)$ için

$$\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} B = 0$$

olur (Salimov 2013). Burada $B, i: \tilde{M}_m \rightarrow M_n$ immersiyonunun diferensiyelidir.

$\varphi, \tilde{\varphi}$ ve B pür tensör alanları olduğundan, $\varphi \circ B = \varphi \otimes B$ ve $B \circ \tilde{\varphi} = B \otimes \tilde{\varphi}$ tensör alanları da $(1,0,0,1)$ tipli pür tensör alanlarıdır. Burada herhangi bir $\tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(\tilde{M}_m)$ için $(\varphi \circ B)\tilde{Y} = \varphi(B\tilde{Y})$ ve $(B \circ \tilde{\varphi})\tilde{Y} = B(\tilde{\varphi}\tilde{Y})$ dır.

(3.31)'e $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ uygulandığında Teorem 3.2.1.2, Teorem 3.4.3.1 ve Teorem 3.2.3.1'deki (c)'den dolayı

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}(\varphi \circ B))(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}(B \circ \tilde{\varphi}))(\tilde{X}, \tilde{Y}), \\ (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}\varphi)(\tilde{X}, B\tilde{Y}) &= (B \circ (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}))(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (B \circ N_{\tilde{\varphi}})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = B(N_{\tilde{\varphi}}(\tilde{X}, \tilde{Y})), \\ N_{\varphi}(B\tilde{X}, B\tilde{Y}) &= B(N_{\tilde{\varphi}}(\tilde{X}, \tilde{Y})) \end{aligned} \quad (3.35)$$

yazılır. Burada N_{φ} ve $N_{\tilde{\varphi}}$ sırasıyla φ ve $\tilde{\varphi}$ 'nin Nijenhuis tensörleridir. B birebir olmasından dolayı (3.35)'ten $N_{\varphi} = 0$ ise $N_{\tilde{\varphi}} = 0$ olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4.3.2: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\tilde{M}_m$ invaryant altmanifoldunda indirgenmiş afinor alan $\tilde{\varphi}$ olsun. Bu durumda φ 'nin Nijenhuis tensörü N_{φ} sıfıra eşit olursa $\tilde{\varphi}$ 'nin Nijenhuis tensörü $N_{\tilde{\varphi}}$ da sıfırlanır (Salimov 2013).

$\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ -Operatörünün $(0, s, 0, 0)$ ve $(0, 0, 0, q)$ tipli tensör alanlarına uygulanması

$\omega \in \mathfrak{S}_{s,0}^{0,0*}(\tilde{M}_m)$ olsun. (e_2) kullanılarak

$$\begin{aligned} (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}\omega)(\tilde{X}, Y_1, \dots, Y_s) &= (\varphi(B\tilde{X}))(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - (B\tilde{X})\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, L_{Y_{\lambda}}\varphi(B\tilde{X}) - \varphi(L_{Y_{\lambda}}B\tilde{X}), \dots, Y_s) \\ &= (\varphi(B\tilde{X}))(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, L_{\varphi(B\tilde{X})}Y_{\lambda}, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (BX) (\omega \circ \varphi)(Y_1, \dots, Y_s) + \sum_{\lambda=1}^s (\omega \circ \varphi) (Y_1, \dots, L_{BX} Y_\lambda, \dots, Y_s) \\
& = \left(L_{\varphi(BX)} \omega - L_{BX} (\omega \circ \varphi) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \\
& = (\phi_\varphi \omega) (BX, Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

yazılır. Benzer olarak $\tilde{\omega} \in \mathfrak{S}_{0,q}^{*,0}(\widetilde{M}_m)$ ise (e_1) kullanılarak

$$(\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{\omega}) (\tilde{X}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) = (\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{\omega}) (\tilde{X}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_q) \tag{3.37}$$

yazılır.

Şimdi $g \in \mathfrak{S}_{2,0}^{*,0}(\widetilde{M}_m)$ olsun. Her $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \in \mathfrak{S}_0^1(\widetilde{M}_m)$ için $\widetilde{M}_m$ üzerinde $(0,0,0,2)$ tipli bir $\tilde{g}$ pür tensör alanı

$$\tilde{g}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = (i^* g)(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = g(B\tilde{Y}_1, B\tilde{Y}_2) \tag{3.38}$$

olarak tanımlanır, burada $i^*, i_* = B$ 'nin transpozudur.

Gerçekten, $\overset{C}{\otimes}$ pür çarpımının tanımından bir $\tilde{g} = \left(g \overset{C}{\otimes} B \right) \overset{C}{\otimes} B$ tensör alanının bir pür tensör alanı ve $\tilde{g} \in \mathfrak{S}_{2,0}^{*,0}(M_n)$ olduğu kolayca görülür. Eğer (3.38)'e $\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}}$ operatörü uygulanırsa (3.36) ve (3.37)'den

$$\begin{aligned}
(\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{g}) (\tilde{X}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) &= (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} \tilde{g}) (\tilde{X}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = (\phi_{\varphi, \tilde{\varphi}} g) (\tilde{X}, B\tilde{Y}_1, B\tilde{Y}_2) \\
&= (\phi_\varphi g) (BX, B\tilde{Y}_1, B\tilde{Y}_2)
\end{aligned}$$

yani $\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{g} = i^*(\phi_\varphi g)$ eşitliği elde edilir.

Buradan aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.4.4.1: $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve bir $\widetilde{M}_m$ invariant altmanifoldunda indirgenmiş afinor alan $\tilde{\varphi}$ olsun. Eğer $g \in \mathfrak{S}_2^{*,0}(M_n)$ için $\phi_\varphi g = 0$ ise $\phi_{\tilde{\varphi}} \tilde{g} = 0$ dır. Burada $\tilde{g}$, (3.38) eşitliği ile tanımlı $(0,2)$ tipli indirgenmiş pür tensör alanıdır (Salimov 2013).

Teorem 3.4.4.1'deki sonuç Norden geometriye özelleştirilebilir.

Yano-Ako Operatörleri

Tanımlar

S , (1,2) tipli bir tensör alanı olsun.

Tanım 3.5.1.1: Herhangi $X_1, \dots, X_s, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için

$$\begin{aligned} t\left(S_{Y_1}X_1, \dots, X_s; \xi^1, \dots, \xi^r\right) &= \dots = t\left(X_1, \dots, S_{Y_1}X_s; \xi^1, \dots, \xi^r\right) \\ &= t\left(X_1, \dots, X_s; '(S_{Y_1})\xi^1, \dots, \xi^r\right) = \dots = t\left(X_1, \dots, X_s; \xi^1, \dots, '(S_{Y_1})\xi^r\right) \\ t\left(S_{Y_2}X_1, \dots, X_s; \xi^1, \dots, \xi^r\right) &= \dots = t\left(X_1, \dots, S_{Y_2}X_s; \xi^1, \dots, \xi^r\right) \\ &= t\left(X_1, \dots, X_s; '(S_{Y_2})\xi^1, \dots, \xi^r\right) = \dots = t\left(X_1, \dots, X_s; \xi^1, \dots, '(S_{Y_2})\xi^r\right) \end{aligned}$$

oluyorsa (r, s) tipli tensör alanına, S 'ye göre pür tensör alanı denir. Burada keyfi $Y_1 \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ($Y_2 \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$) için $S_{Y_1}(Y_2) = S(Y_1, Y_2)$, $(S_{Y_2}(Y_1) = S(Y_1, Y_2))$ şartını sağlayan bir afinör alan ve $'(S_{Y_1})$ ($'(S_{Y_2})$) ise $S_{Y_1}, S_{Y_2} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ için $S_{Y_1}(S_{Y_2})$ nin adjoint operatörüdür (Salimov 2013).

S 'ye göre pür tensör alanlarının şartı, lokal bileşenlerine göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} t_{mi_2 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} S_{i_1 k}^m &= \dots = t_{i_1 \dots m}^{j_1 \dots j_r} S_{i_s k}^m = t_{i_1 \dots i_s}^{m \dots j_r} S_{mk}^{j_1} = \dots = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots m} S_{mk}^{j_s}, \\ t_{mi_2 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} S_{li_1}^m &= \dots = t_{i_1 \dots m}^{j_1 \dots j_r} S_{li_s}^m = t_{i_1 \dots i_s}^{m \dots j_r} S_{lm}^{j_1} = \dots = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots m} S_{lm}^{j_s}. \end{aligned}$$

Vektör, kovektör ve skaler alanları S 'ye göre pür tensör alanları olarak kabul edilir. Yano and Ako (1968), Salimov and Magden (1998), Magden and Salimov (2006) tarafından S 'ye göre pür tensör alanları ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Örnek 3.5.1.1: $t \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, S 'ye göre pür tensör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(Y_1, tY_2) &= S_{Y_1}(tY_2) = t(S_{Y_1}(Y_2)) = tS(Y_1, Y_2), \\ S(tY_1, Y_2) &= S_{Y_2}(tY_1) = t(S_{Y_2}(Y_1)) = tS(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$S(tY_1, Y_2) = S(Y_1, tY_2) = tS(Y_1, Y_2)$$

yazılır, yani $S, t \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ 'ye göre pür tensör alanıdır.

M_n üzerindeki S 'ye göre (r, s) tipli bütün pür tensör alanlarının modülü ${}^S\mathfrak{J}_s^r(M_n)$ ile gösterilmek üzere $\mathbb{R}$ üzerinde $\overset{C}{\otimes}$ pür çarpımı ile tanımlı bir cebir ${}^S\mathfrak{J}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} {}^S\mathfrak{J}_s^r(M_n)$ biçiminde verilir.

Tanım 3.5.1.2: $S \in \mathfrak{J}_2^1(M_n)$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri $\mathfrak{J}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{J}_s^r(M_n)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\phi_S|_{r+s>0}: {}^S\mathfrak{J}(M_n) \rightarrow \mathfrak{J}(M_n)$ dönüşümüne M_n üzerinde Yano-Ako operatörü veya ϕ_S -operatörü denir (Yano and Ako 1968; Salimov 2010).

a) ϕ_S , $\mathbb{R}$ -lineerdir yani herhangi $a, b \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in {}^S\mathfrak{J}_s^r(M_n)$ için

$$\phi_S(at_1 + bt_2) = a\phi_S(t_1) + b\phi_S(t_2) \text{ dir,}$$

b) Her r ve s için, $\phi_S: {}^S\mathfrak{J}_s^r(M_n) \rightarrow \mathfrak{J}_{s+2}^r(M_n)$ dir,

c) Her $K, L \in {}^S\mathfrak{J}(M_n)$ için $\phi_S(\overset{C}{K} \otimes L) = (\phi_S K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\phi_S L)$ dir,

d) Her $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için L_Y, Y 'ye göre Lie türevi olmak üzere

$$\phi_{S(X_1, X_2)} Y = -(L_Y S)(X_1, X_2) \text{ dir,}$$

e) Her $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$, $\omega \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ için

$$(\phi_S \omega)(X_1, X_2, Y) = (d(\iota_Y \omega))(S(X_1, X_2)) - 2(d(\iota_Y(\omega \circ S)))(X_1, X_2) + \omega(L_Y S)(X_1, X_2) \text{ dir,}$$

burada $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$, $S(X_1, X_2) = -S(X_2, X_1)$ ve $d, (\omega \circ S) \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ 'nin dış türevidir.

Sonuç olarak $(\phi_S Y)(X_1, X_2) = \phi_{S(X_1, X_2)} Y$ yazılır.

ϕ_S -Operatörünün $(1, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$\varphi \in {}^S\mathfrak{J}_1^1(M_n)$ olsun. Tanım 3.5.1.2 kullanılarak

$$(\phi_S \varphi Y)(X_1, X_2) = (\phi_S \varphi)(X_1, X_2, Y) + \varphi((\phi_S Y)(X_1, X_2))$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} (\phi_S \varphi)(X_1, X_2, Y) &= (\phi_S \varphi Y)(X_1, X_2) - \varphi((\phi_S Y)(X_1, X_2)) \\ &= -(L_{\varphi Y} S)(X_1, X_2) + \varphi((L_Y S)(X_1, X_2)) \\ &= -[\varphi Y, S(Y_1, Y_2)] + S([\varphi Y, X_1], X_2) + S(X_1, [\varphi Y, X_2]) \\ &\quad + \varphi([Y, S(Y_1, Y_2)]) - S([Y, X_1], X_2) + S(X_1, [Y, X_2]) \end{aligned} \tag{3.39}$$

biçimindedir.

Diğer taraftan Örnek 3.5.1.1 kullanılarak (3.7) ve (3.39)'dan

$$\begin{aligned}
(\phi_S \varphi)(Y, X_1, X_2) &= -(L_{S(X_1, X_2)} \varphi)Y + S((L_{X_1} \varphi)Y, X_2) + S(X_1, (L_{X_2} \varphi)Y) \\
&= -[S(X_1, X_2), \varphi Y] + \varphi([S(X_1, X_2)], Y) + S([X_1, \varphi Y] - \varphi[X_1, Y], X_2) \\
&\quad + S(X_1, [X_2, \varphi Y] - \varphi[X_2, Y]) \\
&= -(\phi_\varphi S)(X_1, X_2, Y)
\end{aligned}$$

yazılır.

Böylece aşağıdaki teoremden söz edilebilir.

Teorem 3.5.2.1: $\varphi \in {}^S\mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olsun. Bu durumda herhangi $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$(\phi_S \varphi)(Y, X_1, X_2) + (\phi_\varphi S)(X_1, X_2, Y) = 0$$

dir, burada ϕ_S , φ 'ye uygulanmış Yano-Ako operatörü, ϕ_φ ise S 'ye uygulanmış Tachibana operatörüdür (Salimov 2013).

Şimdi $t \in {}^S\mathfrak{S}_s^1(M_n)$, $s > 1$ olsun. Öyleyse Tanım 3.5.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\phi_S t)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= (\phi_S(Y_1, \dots, Y_s))(X_1, X_2) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\phi_S Y_\lambda)(X_1, X_2), \dots, Y_s) \\
&= (-L_{t(Y_1, \dots, Y_s)} S)(X_1, X_2) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} S)(X_1, X_2), \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
(\phi_S t)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= (-L_{t(Y_1, \dots, Y_s)} S)(X_1, X_2) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} S)(X_1, X_2), \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ϕ_S -Operatörünün $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve S vektör-değerli 2-form olsun. Tanım 3.5.1.2'deki (e) kullanarak

$$\begin{aligned}
(\phi_S \omega)(X_1, X_2, Y) &= (d(\iota_Y \omega))(S(X_1, X_2)) - 2 \left(d(\iota_Y (\omega \circ S)) \right) (X_1, X_2) + \omega(L_Y S)(X_1, X_2) \\
&= (S(X_1, X_2))(\omega(Y)) - X_1 \omega(S(Y, X_2)) + X_2 \omega(S(Y, X_1)) \\
&\quad + (\omega \circ S)(Y, [X_1, X_2]) + \omega((L_Y S)(X_1, X_2)) \\
&= (S(X_1, X_2))(\omega(Y)) - X_1 \omega(S(Y, X_2)) + X_2 \omega(S(Y, X_1)) \\
&\quad - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y) + \omega([Y, S(X_1, X_2) - S(Y, X_1)X_2]) \\
&= (L_{S(X_1, X_2)} \omega)Y - (X_1 \omega S(Y, X_2)) - (\omega \circ S)(Y, [X_1, X_2]) \\
&\quad - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y) - (X_2 \omega(S(X_1, Y))) \\
&\quad - (\omega \circ S)(X_1, [X_2, Y]) - (\omega \circ S)([X_2, X_1], Y) - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y) \\
&= (L_{S(X_1, X_2)} \omega)Y - (L_{X_1}(\omega \circ S))(Y, X_2) \\
&\quad - (L_{X_2}(\omega \circ S))(X_1, Y) + (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece;

$$\begin{aligned}
(\phi_S \omega)(X_1, X_2, Y) &= (L_{S(X_1, X_2)} \omega)Y - (L_{X_1}(\omega \circ S))(Y, X_2) \\
&\quad - (L_{X_2}(\omega \circ S))(X_1, Y) + (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $\omega \in {}^S \mathfrak{S}_S^0(M_n)$ olsun. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
(\phi_S \omega)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= S(X_1, X_2)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X_1(\omega(S(Y_1, X_2)Y_2, \dots, Y_s)) \\
&\quad - X_2(\omega(S(X_1, Y_1)Y_2, \dots, Y_s)) - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} S)(X_1, X_2), \dots, Y_s) \\
&= S(X_1, X_2)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X_1(\omega(S(Y_1, X_2)Y_2, \dots, Y_s)) \\
&\quad - X_2(\omega(S(X_1, Y_1)Y_2, \dots, Y_s)) - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, L_{Y_\lambda} S(X_1, X_2) - S(L_{Y_\lambda} X_1, X_2) - S(X_1, L_{Y_\lambda} X_2), \dots, Y_s) \\
&= (L_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) - X_1((\omega \circ S)(Y_1, X_2, Y_2, \dots, Y_s)) \\
&\quad - X_2((\omega \circ S)(X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_s)) - (\omega \circ S)(L_{X_1} X_2, Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda=1}^s (\omega \circ S)(Y_1, X_2, Y_2, \dots, L_{X_1} Y_\lambda, \dots, Y_s) \\
& + \sum_{\lambda=1}^s (\omega \circ S)(X_1, Y_1, \dots, L_{X_2} Y_\lambda, \dots, Y_s) \\
& = (L_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) - (L_{X_1} (\omega \circ S))(Y_1, X_2, Y_2, \dots, Y_s) \\
& - (L_{X_2} (\omega \circ S))(X_1, Y_1, \dots, Y_s) + (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
(\phi_S \omega)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= (L_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) \\
&- (L_{X_1} (\omega \circ S))(Y_1, X_2, Y_2, \dots, Y_s) \\
&- (L_{X_2} (\omega \circ S))(X_1, Y_1, \dots, Y_s) \\
&+ (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

elde edilir (Salimov 2013).

Ψ_S -Operatörleri

∇, M_n 'de bir lineer konneksiyon ve $S \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$ olsun. Herhangi $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için Tanım 3.5.1.2'nin (d) şartı yerine

$$(d') \quad \Psi_{S(X_1, X_2)} Y = \nabla_{S(X_1, X_2)} Y - S(\nabla_{X_1} Y, X_2) - S(X_1, \nabla_{X_2} Y)$$

eşitliği alındığında aşağıdaki gibi yeni bir operatör tanımlanır.

Tanım 3.6.1: Tanım 3.5.1.2'deki (a), (b), (c), (e) şartlarını ve (d') şartını sağlayan

$$\Psi_S: {}^S\mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$$

dönüşümüne M_n 'de Ψ_S -operatörü denir (Salimov 2013).

$\Psi_{S(X_1, X_2)} Y$ 'nin X_1 ve X_2 'ye göre lineer olduğu ancak Y 'ye göre lineer olmadığı kolayca görülür. Böylece $\Psi_{S(X_1, X_2)} Y$ yerine $(\Psi_S Y)(X_1, X_2)$ yazılabilir.

Ψ_S -Operatörünün $s \geq 0$ için $(1, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$t \in {}^S\mathfrak{S}_s^1(M_n)$ olsun. $t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olduğundan Tanım 3.5.1.2 kullanılarak,

$$(\Psi_{S(X_1, X_2)} t)(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) = (\Psi_S t)(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \dots, Y_s)$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_{S(X_1, X_2)} t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\
&= \nabla_{S(X_1, X_2)} t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) - S\left(\nabla_{X_1}(t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s), X_2)\right) \\
&\quad - S\left(X_1, \nabla_{X_2}(t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s))\right) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\
(\Psi_{S(X_1, X_2)} t)(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) &= \nabla_{S(X_1, X_2)} t(Y_1, Y_2, \dots, Y_s) + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\nabla_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\
&\quad - S\left((\nabla_{X_1} t)(Y_1, \dots, Y_s), X_2\right) - S\left(\sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{X_1} Y_\lambda, \dots, Y_s), X_2\right) \\
&\quad - S\left(X_1, (\nabla_{X_2} t)(Y_1, \dots, Y_s)\right) - S\left(X_1, \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{X_2} Y_\lambda, \dots, Y_s)\right) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda), \dots, Y_s) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

yazılır.

t , S 'ye göre pür tensör alanı olduğundan,

$$\begin{aligned}
S\left(\sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{X_1} Y_\lambda, \dots, Y_s), X_2\right) &= \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, S(\nabla_{X_1} Y_\lambda, X_2), \dots, Y_s), \\
S\left(X_1, \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{X_2} Y_\lambda, \dots, Y_s)\right) &= \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, S(X_1, \nabla_{X_2} Y_\lambda), \dots, Y_s) \tag{3.41}
\end{aligned}$$

yazılır.

(3.41) ifadesi (3.40)'ta ilgili yere yazıldığında

$$\begin{aligned}
(\Psi_S t)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} t - S_{X_1}(\nabla_{X_2} t) - S_{X_2}(\nabla_{X_1} t)\right)(Y_1, \dots, Y_s) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, \nabla_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda - S(\nabla_{X_1} Y_\lambda, X_2) - S(X_1, \nabla_{X_2} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (\Psi_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda), \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

$$= \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} t - S_{X_1}(\nabla_{X_2} t) - S_{X_2}(\nabla_{X_1} t) \right) (Y_1, \dots, Y_s)$$

bulunur. Böylece

$$(\Psi_{S(X_1, X_2)} t)(Y_1, \dots, Y_s) = \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} t - S_{X_1}(\nabla_{X_2} t) - S_{X_2}(\nabla_{X_1} t) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \quad (1.42)$$

eşitliği elde edilir.

(1.42)'den aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.6.1.1: $t \in {}^S\mathfrak{S}_S^1(M_n)$ olsun. Eğer $\nabla t = 0$ ise $t \in \text{Ker} \Psi_S$ dir (Salimov 2013).

Ψ_S -Operatörünün $(0, s)$ tipli bir tensör alanına uygulanması

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.6.1 kullanılarak herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned} (\Psi_S \omega)(X_1, X_2, Y) &= (\Psi_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y) \\ &= S(X_1, X_2)(\iota_Y \omega) - 2 \left(d(\iota_Y(\omega \circ S)) \right) (X_1, X_2) \\ &\quad - \omega \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} Y - S(\nabla_{X_1} Y, X_2) - S(X_1, \nabla_{X_2} Y) \right) \\ &= (S(X_1, X_2))(\omega(Y)) - X_1 \left(\omega(S(Y, X_2)) \right) \\ &\quad + X_2 \left(\omega(S(Y, X_1)) \right) + (\omega \circ S)(Y, [X_1, X_2]) \\ &\quad - \omega \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} Y - S(\nabla_{X_1} Y, X_2) - S(X_1, \nabla_{X_2} Y) \right) \\ &= \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} \omega - \nabla_{X_1}(\omega \circ S_{X_2}) - \nabla_{X_2}(\omega \circ S_{X_1}) \right) Y - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $(\omega \circ S_{X_1})Y = \omega(S(X_1, Y))$, $(\omega \circ S_{X_2})Y = \omega(S(Y, X_2))$ dir.

Şimdi $\omega \in {}^S\mathfrak{S}_S^0(M_n)$, $s > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (\Psi_S \omega)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) &= (\Psi_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) \\ &= S(X_1, X_2)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X_1(\omega(S(Y_1, X_2), Y_2, \dots, Y_s)) \\ &\quad - X_2(\omega(S(X_1, Y_1)Y_2, \dots, Y_s)) - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, \nabla_{S(X_1, X_2)} Y_\lambda - S(\nabla_{X_1} Y_\lambda, X_2) - S(X_1, \nabla_{X_2} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\ &= (\nabla_{S(X_1, X_2)} \omega)(Y_1, \dots, Y_s) - X_1(\omega(S(Y_1, X_2)Y_2, \dots, Y_s)) \\ &\quad - X_2(\omega(S(X_1, Y_1)Y_2, \dots, Y_s)) - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, S(\nabla_{X_1} Y_\lambda, X_2) + S(X_1, \nabla_{X_2} Y_\lambda), \dots, Y_s) \\
& = \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} \omega - \nabla_{X_1} (\omega \circ S_{X_2}) - \nabla_{X_2} (\omega \circ S_{X_1}) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \\
& \quad - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
(\Psi_S \omega)(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_s) & = \left(\nabla_{S(X_1, X_2)} \omega - \nabla_{X_1} (\omega \circ S_{X_2}) - \nabla_{X_2} (\omega \circ S_{X_1}) \right) (Y_1, \dots, Y_s) \\
& \quad - (\omega \circ S)([X_1, X_2], Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

M_n üzerinde $\nabla S = 0$ şartını sağlayan ∇ konneksiyonu, S -konneksiyon olarak adlandırılır (Salimov 2013).

Teorem 3.6.2.1: Eğer ∇ , burulmasız S -konneksiyon ise herhangi $t \in {}^S\mathfrak{J}_S^1(M_n)$ ve $t \in {}^S\mathfrak{J}_S^0(M)$ için $\phi_{S(X_1, X_2)} t = \Psi_{S(X_1, X_2)} t$ dir (Salimov 2013).

İspat. $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ olsun. Bu durumda $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olur. Diğer taraftan, Tanım 3.3.1'deki (d') ve Tanım 3.6.1'deki (d') koşullarından

$$\begin{aligned}
\phi_{S(X_1, X_2)} Y & = -(L_Y S(X_1, X_2)) \\
& = [S(X_1, X_2), Y] - S([X_1, Y], X_2) - S(X_1, [X_2, Y]) \\
& = \nabla_{S(X_1, X_2)} Y - \nabla_Y S(X_1, X_2) - S(\nabla_{X_1} Y - \nabla_Y X_1, X_2) \\
& \quad - S(X_1, \nabla_{X_2} Y - \nabla_Y X_2) \\
& = \nabla_{S(X_1, X_2)} Y - S(\nabla_{X_1} Y, X_2) + S(X_1, \nabla_{X_2} Y) \\
& = \Psi_{S(X_1, X_2)} Y
\end{aligned}$$

elde edilir.

Genellemeler

Yano-Ako operatörünün yani ϕ_S -operatörünün tanımı, $(1, q)$ tipli S 'ye aşağıdaki gibi genelleştirilir.

$q > 0$ olmak üzere S , $(1, q)$ tipli bir tensör alanı olsun. S 'ye göre (r, s) tipli bütün pür tensör alanlarının $\mathbb{R}$ üzerindeki cebiri $\left({}^S\mathfrak{J}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} {}^S\mathfrak{J}_S^r(M_n), \overset{c}{\otimes} \right)$ biçimindedir.

Tanım 3.7.1.1: Bir $\phi_S|_{r+s>0}: {}^S\mathfrak{J}^*(M_n) \rightarrow \mathfrak{J}(M_n)$ dönüşümü, aşağıdaki şartları sağlıyorsa genelleştirilmiş Yano-Ako operatör veya genelleştirilmiş ϕ_S -operatörü olarak adlandırılır (Salimov 2013).

a) ϕ_S , bir $\mathbb{R}$ -lineerdir yani herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in {}^S\mathfrak{J}_S^*(M_n)$ için $\phi_S(at_1 + bt_2) = a\phi_S(t_1) + b\phi_S(t_2)$ dir,

b) Her r ve s için, $\phi_S: {}^S\mathfrak{J}_S^*(M_n) \rightarrow \mathfrak{J}_{s+q}^r(M_n)$ dir,

c) Her $K, L \in {}^S\mathfrak{J}^*(M_n)$ için $\phi_S(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_S K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\phi_S L)$ dir,

d) Her $Y, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için $\phi_{S(X_1, \dots, X_q)} Y = -(L_Y S)(X_1, \dots, X_q)$ dir,

e) Her $X_1, \dots, X_q, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n), \omega \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ için

$$\begin{aligned} (\phi_{S(X_1, \dots, X_q)} \omega) Y &= (d(\iota_Y \omega)) (S(X_1, \dots, X_q)) - q \left(d(\iota_Y (\omega \circ S)) \right) (X_1, \dots, X_q) \\ &\quad + \omega \left((L_Y S)(X_1, \dots, X_q) \right) \end{aligned}$$

dir.

Burada $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$, S vektör-değerli bir q -formdur, $\iota_Y (\omega \circ S) \in \Lambda_{q-1}(M_n)$ 'nin dış türevi d 'dir.

Özel olarak, $t \in {}^S\mathfrak{J}_S^1(M_n)$ ve $\omega \in {}^S\mathfrak{J}_S^0(M_n)$ ise

$$\begin{aligned} (\phi_S t)(X_1, \dots, X_q, Y_1, \dots, Y_s) &= (-L_{t(Y_1, \dots, Y_s)} S)(X_1, \dots, X_q) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^s t(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} S)(X_1, \dots, X_q), \dots, Y_s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\phi_S \omega)(X_1, \dots, X_q, Y_1, \dots, Y_s) &= (S(X_1, \dots, X_q)) (\omega(Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad - q \left(d \left(\iota_{Y_1} (\omega_{Y_2, \dots, Y_s} \circ S) \right) \right) (X_1, \dots, X_q) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^s \omega(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} S)(X_1, \dots, X_q), \dots, Y_s) \end{aligned}$$

yazılır, burada $Y_2, \dots, Y_s \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ ve $\omega_{Y_2, \dots, Y_s} \circ S \in \Lambda_q(M_n)$ sabitleri için $\omega_{Y_2, \dots, Y_s} \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ dir.

Tanım 3.7.1.1.'in (d) şartı

$$\Psi_{S(X_1, \dots, X_q)} Y = \nabla_{S(X_1, \dots, X_q)} Y - \sum_{\lambda=1}^q \omega(X_1, \dots, \nabla_{X_\lambda} Y, \dots, X_q)$$

ifadesinde yerine yazıldığında genelleştirilmiş bir Ψ_S -operatör elde edilir.

Şimdi $q = 0$ yani $S = X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olsun. Bu durumda Tanım 3.7.1.1.'in (d) şartından $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $\phi_X Y = -L_Y X = L_X Y$ yazılır, yani ϕ_X , X 'e göre Lie türevidir. Buradan $\phi_X = L_X$ yazılır (Salimov 2013).

Benzer şekilde Ψ_X 'in X 'e göre kovaryant türev olduğu yani $\Psi_X = \nabla_X$ olduğu kolayca görülür (Salimov 2013).

Böylece $S \in \mathfrak{S}_q^1(M_n)$, $q \geq 0$ olmak üzere ϕ_S ve Ψ_S operatörleri sırası ile L_X ve ∇_X 'in genelleştirilmiş halidir (Salimov 2013).

ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Altuzaylar Üzerinde Afinor Yapılar

İnvaryant altuzaylar

Tanım 4.1.1.1: Diferensiyellenebilir manifold üzerinde φ_i^h tensör alanı için $\varphi_i^h \varphi_h^j = -\delta_i^j$ yapısıyla hemen hemen kompleks uzay verilmiş olsun. Bu uzayda $T_{(\mu)}^{(\lambda)}$ pür tensörüne, $\Phi_i T_{(\mu)}^{(\lambda)} = 0$ şartını sağlaması durumunda hemen hemen analitik denir (Tachibana and Koto 1962).

Tanım 4.1.1.2: x^λ koordinat sisteminde tanımlı f fonksiyonu için

$$\varphi_\lambda^\varepsilon \partial_\varepsilon f = \partial_\lambda g$$

şartını sağlayan bir g lokal fonksiyonu bulunuyorsa f fonksiyonuna hemen hemen analitik lokal fonksiyon denir (Tachibana and Koto 1962).

Manifold üzerindeki tüm lokal koordinat sisteminde $\varphi_\lambda^\varepsilon \partial_\varepsilon f = \partial_\lambda g$ şartını sağlayacak şekilde g fonksiyonunun olması durumunda ise f fonksiyonuna hemen hemen analitik fonksiyon denir (Tachibana and Koto 1962).

Nijenhuis tensörünün sıfır olarak verildiği hemen hemen kompleks uzaylar olan kompleks manifoldda ise hemen hemen analitik yerine yalnızca analitik kavramı kullanılır (Tachibana and Koto 1962).

f lokal fonksiyonu için

$$\Phi_i \partial_\lambda f = \varphi_i^\varepsilon \partial_\varepsilon \partial_\lambda f - \partial_i(\varphi_\lambda^\varepsilon \partial_\varepsilon f) + (\partial_\lambda \varphi_i^\varepsilon) \partial_\varepsilon f = \partial_\lambda(\varphi_i^\varepsilon \partial_\varepsilon f) - \partial_i(\varphi_\lambda^\varepsilon \partial_\varepsilon f) \quad (4.1)$$

olur. $\Phi_i \partial_\lambda f = 0$ olması $\varphi_i^\varepsilon \partial_\varepsilon f = \partial_i g$ olacak şekilde g lokal fonksiyonunun varlığını gösterir (Tachibana and Koto 1962).

Hemen hemen analitik altmanifold

m -boyutlu X_m , hemen hemen kompleks X_n uzayının altmanifoldu olsun. Bu altmanifold lokal olarak

$$x^\lambda = x^\lambda(\xi^a), \quad \text{rank}(\partial_a x^\lambda) = m \quad (\lambda = 1, \dots, n; a = 1, \dots, m; \partial_a = \frac{\partial}{\partial \xi^a}) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılır (Tachibana and Koto 1962).

Şimdi φ_b^a hemen hemen kompleks yapısıyla verilmiş X_m altmanifoldu üzerinde hemen hemen analitik lokal fonksiyonlar tanımlanabilir.

Tanım 4.1.2.1: f fonksiyonu, hemen hemen analitik ve lokal olmak üzere ξ^a için $f(x^\lambda(\xi^a))$ fonksiyonu daima hemen hemen analitik oluyorsa X_m hemen hemen kompleks uzayına hemen hemen analitik altmanifold denir (Tachibana and Koto 1962).

X_n ve X_m manifoldlarının kompleks olması durumunda ise X_m 'ye X_n analitik manifoldunun analitik altmanifoldu denir (Tachibana and Koto 1962).

Tanım 4.1.2.2: X_m altmanifoldunun herhangi bir noktasında bulunan m -boyutlu teğet düzlem

$$v^\lambda \mapsto v^\lambda = \varphi_\varepsilon^\lambda v^\varepsilon \quad (4.3)$$

dönüşümü altında invaryant kalıyorsa bu altmanifolda, invaryant altuzay denir (Schouten and Yano 1955).

X_m invaryant altuzay ve bu uzayın her bir noktasında bulunan m -boyutlu teğet düzlemin vektörleri $B_a^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^a}$ ($a = 1, \dots, m$) olsun. Bu durumda

$$\varphi_\varepsilon^\lambda B_a^\varepsilon = \varphi_a^\varepsilon B_\varepsilon^\lambda \quad (4.4)$$

olacak şekilde φ_b^a tensör alanı vardır. Bu eşitlikten B_a^λ 'nın pür olduğu görülür. Yine aynı eşitlikten $\varphi_\varepsilon^a \varphi_b^\varepsilon = -\delta_b^a$ olduğu görülür ki böylece invaryant altuzay hemen hemen kompleks uzay olur (Tachibana and Koto 1962).

İnvaryant alt manifold üzerinde tachibana operatörü

II- yapısı ile verilen M_n manifoldunun bir M_k altmanifoldu

$$x^i = x^i(u^A) \quad i = 1, \dots, n; A = 1, \dots, k, \text{rank} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^A} \right) = k$$

eşitlikleri ile belirlenmiş olsun. Her $x \in M_k$ noktasının k -boyutlu B_k teğet düzlemindeki vektörler

$$T_A^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A}, A = 1, \dots, k$$

şeklindedir. M_k manifoldunun invaryant altmanifold olması durumunda B_k teğet düzlemi,

$$v^i \mapsto v^i = \varphi_m^i v^m, \forall v \in \Pi$$

dönüşümüne göre invaryant kalmış olur. Bu durum

$$\mathfrak{v}_A^i = \varphi_m^i T_A^m \in B_k, \forall \varphi \in \Pi$$

şeklinde gösterilir (Yano and Bochner 1953). Buradan da $\forall \varphi \in \Pi$ için

$$\varphi_m^i T_A^m = \varphi_A^C T_C^i \quad (4.5)$$

yazılır.

φ_A^C afinoru M_k altmanifoldu üzerinde yeni bir poliafinor yapı oluşturur. Verilmiş Π -yapısına göre indirgenmiş yapı olarak adlandırılan bu yeni yapı, $\Pi_u = \{\varphi_A^C\}$ şeklinde gösterilir.

M_k invariant altmanifoldunda $(p, q; r, s)$ tipindeki $t_{j_1 \dots j_q B_1 \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r}$ karışık tensörü dikkate alındığında $(j_\mu, B_{\mu'})$ çifti için

$$\varphi_{j_\mu}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q B_1 \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r} = \varphi_{B_{\mu'}}^E t_{j_1 \dots j_q B_1 \dots E \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r} = {}^* t_{(j)(B)}^{(i)(A)}, \quad \forall \varphi \in \Pi$$

koşulu gerçekleşiyorsa $t_{(j)(B)}^{(i)(A)}$ tensörünün bu çifte göre pür olduğu söylenir. $t_{(j)(B)}^{(i)(A)}$ karışık tensörü tüm çiftlere göre pür olduğunda ise pür tensör adını alır. Böylece (4.5) eşitliğinden T_A^i tensörünün pür tensör olduğu görülür.

Pür karışık tensörün $\mathfrak{T}_{q,s}^{p,r}(M_k)$ modülü üzerindeki Tachibana operatörü

$$\begin{aligned} \Phi_K t_{(j)(B)}^{(i)(A)} &= \varphi_K^E \partial_E t_{(j)(B)}^{(i)(A)} - \partial_K t_{(j)(B)}^{(i)(A)} + \sum_{\mu=1}^q (\partial_{j_\mu} \varphi_l^m) T_K^l t_{j_1 \dots m \dots j_q(B)}^{(i)(A)} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^p (\partial_l \varphi_m^{i_\lambda} - \partial_m \varphi_l^{i_\lambda}) T_K^l t_{(j)(B)}^{i_1 \dots m \dots i_p(A)} + \sum_{\mu'=1}^s (\partial_{B_{\mu'}} \varphi_K^E) t_{(j)B_1 \dots E \dots B_s}^{(i)(A)} \\ &+ \sum_{\lambda'=1}^r (\partial_K \varphi_E^{A_{\lambda'}} - \partial_E \varphi_K^{A_{\lambda'}}) t_{(j)(B)}^{(i)A_1 \dots E \dots A_r} \end{aligned} \quad (4.6)$$

biçimindedir. Bu operatörün uygulanması sonucunda elde edilen tensör $(p, q; r, s+1)$ tipindedir. Özel olarak $k = n$ için (4.6) operatörü M_n manifoldu üzerinde Tachibana operatörü olur.

Şimdi

$$\Phi_K \left(t_{(j)(B)}^{\alpha(i)(A)} t'_{(j)(B)}^{(i)(A)} \right) = \left(\Phi_K t_{(j)(B)}^{\alpha(i)(A)} \right) t'_{(j)(B)}^{(i)(A)} + t_{(j)(B)}^{\alpha(i)(A)} \left(\Phi_K t'_{(j)(B)}^{(i)(A)} \right) \quad (4.7)$$

eşitliğinin doğru olduğunun gösterilmesi için $t \in \mathfrak{T}_{0,1}^{1,0}(M_n)$, $t' \in \mathfrak{T}_{1,1}^{0,0}(M_n)$ olarak alınsın.

(4.5) eşitliğinden

$$t_A^a t'_{aB} \varphi_C^B = t_A^a t'_{bC} \varphi_a^b = t_B^b t'_{bC} \varphi_A^B$$

yazılır ve böylece

$$t_A^a t'_{aB} \in \mathfrak{Z}_{0,2}^{*,0,0}(M_n)$$

olduğu görülür. Burada

$$\Phi_K(t_A^a t'_{aB}) = \varphi_K^E \partial_E(t_A^a t'_{aB}) - \partial_K(\varphi_A^E t_E^a t'_{aB}) + (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_B \varphi_K^E) t_A^a t'_{aE} \quad (4.8)$$

biçimindedir. (4.8) ifadesinin sağ tarafı için

$$a_1 = \varphi_K^E \partial_E(t_A^a t'_{aB}) = \varphi_K^E (\partial_E t_A^a) t'_{aB} + \varphi_K^E t_A^a \partial_E t'_{aB},$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\partial_K(\varphi_A^E t_E^a t'_{aB}) = -(\partial_K t_A^a) t'_{aB} - \varphi_A^E t_E^a \partial_K t'_{aB} = (\partial_K t_A^a) t'_{aB} - \varphi_A^E t_E^a \partial_K t'_{aB} \\ &= -(\partial_K t_A^a) t'_{aB} - t_A^b \partial_K t'_{bB} + (\partial_K \varphi_b^a) t_A^b t'_{aB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_B \varphi_K^E) t_A^a t'_{aE} \\ &= (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} - (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} + (\partial_B \varphi_K^E) t_E^a t'_{aE} \\ &= (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} + t_A^a (\partial_a \varphi_l^m) T_K^l t'_{mB} + t_A^a (\partial_B \varphi_K^E) t'_{aE} \\ &\quad - (\partial_K \varphi_m^a) t_A^m t'_{aB} \end{aligned}$$

yazılır ve bu değerler toplanırsa

$$\Phi_K(t_A^a t'_{aB}) = (\Phi_K t_A^a) t'_{aB} + t_A^a (\Phi_K t'_{aB})$$

eşitliği elde edilir.

Riemann Metrik Tensörünün Φ -Tensör Olması

g , $\Phi_K g_{ij} = 0$ şartını sağlayan pür esas tensör ve (V_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere g tensörüne (V_n, g) Riemann manifoldunda Φ -tensör denir (Tachibana 1960). V_n manifoldunun bir invaryant alt manifoldu V_k olsun. V_k üzerinde g_{AB} Riemann metrik tensörü

$$g_{AB} = T_A^i T_B^j g_{ij}, \quad T_A^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A}$$

eşitliğine göre indirgenmiş olur. Şimdi (4.5) eşitliği ve g_{ij} tensörünün pür olması kullanılarak

$$\varphi_A^K g_{KB} = \varphi_A^K T_K^i T_B^j g_{ij} = \varphi_m^i T_A^m T_B^j g_{ij} = \varphi_j^i T_A^m T_B^j g_{mi} = \varphi_B^K T_A^m T_K^i g_{mi} = \varphi_B^K g_{AK} \quad (4.9)$$

bulunur. Bu da V_k altmanifoldu üzerinde alınan g_{AB} tensörünün $\Pi_u = \{\varphi_B^A\}$ yapısına göre pür olduğunu gösterir. (4.6) şeklinde numaralandırılan operatör g_{ij} tensörüne uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\Phi_K g_{ij} &= \varphi_K^E \partial_E g_{ij} - \partial_K g_{ij}^* + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} = \varphi_K^E T_E^l \partial_l g_{ij} - T_K^l \partial_l g_{ij}^* \\
&\quad + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} \\
&= \varphi_l^m T_K^l \partial_m g_{ij} - \partial_l T_K^l g_{ij}^* + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} = T_K^l \Phi_l g_{ij}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi_K g_{ij} = T_K^l \Phi_l g_{ij} \quad (4.10)$$

eşitliği yazılır. Burada $\Phi_l g_{ij}$ operatörü V_n manifoldunda Tachibana operatörüdür. T_A^l 'nin pür tensör olması ve

$$\partial_E T_A^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^E \partial u^A} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^A \partial u^E} = \partial_A T_E^i$$

eşitliği dikkate alınarak (4.6) numaralı Φ -operatörü T_A^i tensörüne uygulandığında

$$\begin{aligned}
\Phi_K T_A^i &= \varphi_K^E \partial_E T_A^i - \partial_K (\varphi_A^E T_A^i) + (\partial_A \varphi_K^E) T_E^i + (\partial_l \varphi_m^i - \partial_m \varphi_l^i) T_K^l T_A^m \\
&= \partial_A (\varphi_K^E T_A^i) - \partial_K (\varphi_A^E T_E^i) + (\partial_l \varphi_m^i - \partial_m \varphi_l^i) T_K^l T_A^m
\end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılır. $\varphi_K^E T_E^i = \varphi_j^i T_K^j$ eşitliği göz önünde bulundurularak u^A ya göre diferensiyel alınır

$$\partial_A (\varphi_K^E T_E^i) = \partial_A (\varphi_j^i T_K^j) = (\partial_A \varphi_j^i) T_K^j + \varphi_j^i \partial_A T_K^j = (\partial_l \varphi_j^i) T_K^j T_A^l + \varphi_j^i \partial_A T_K^j \quad (4.12)$$

olur. Buradan

$$\partial_A (\varphi_K^E T_E^i) - (\partial_l \varphi_j^i) T_K^j T_A^l = \varphi_j^i \partial_A T_K^j$$

yazılır. (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden

$$\Phi_K T_A^i = 0 \quad (4.13)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.1: Π -yapısına sahip (V_n, g) Riemann manifoldu verilsin. Bu yapıya göre g esas metrik tensörü Φ -tensör oluyorsa verilen manifoldun bir Riemann altmanifoldunun esas metrik tensörü de Φ -tensör olur (Cengiz 2002).

İspat: g_{ij} metrik tensörü için $\Phi_l g_{ij} = 0$ olduğu kabul edilsin. (4.7), (4.9), (4.10) ve (4.11) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Phi_K g_{AB} &= \Phi_K (T_A^i T_B^j g_{ij}) = (\Phi_K T_A^i) T_B^j g_{ij} + T_A^i (\Phi_K T_B^j) g_{ij} + T_A^i T_B^j (\Phi_K g_{ij}) \\
&= T_A^i T_B^j (\Phi_K g_{ij}) = T_A^i T_B^j T_K^l \Phi_l g_{ij} = 0
\end{aligned}$$

bulunur.

M_n manifoldunun M_k altmanifoldu, invariant altmanifold ($\varphi_m^i T_A^m = \varphi_A^C T_C^i$) ise

$$(\varphi_m^i T_C^m) \varphi_A^C = \varphi_m^i (T_C^m \varphi_A^C) = \varphi_m^i \varphi_j^m T_A^j = \varphi_j^m \varphi_m^i T_A^j = (\varphi_m^k T_A^m) \varphi_k^i$$

olduğu kolayca görülür yani $\varphi_m^i T_A^m$ (veya $\varphi_A^C T_C^i$) tensörü pürdür.

Benzer şekilde (4.10) denkleminde

$$\Phi_K \varphi_j^i = T_K^l \Phi_l \varphi_j^i = T_K^l N_{lj}^i \quad (4.14)$$

yazılır, burada N_{lj}^i , Nijenhuis tensörüdür (Kruchkovich 1972).

(4.6) operatörü $\varphi_m^i T_A^m$ pür tensörüne uygulanırsa (4.7), (4.13) ve (4.14) denklemlerinden

$$\Phi_K(\varphi_m^i T_A^m) = \Phi_K(\varphi_A^C T_C^i)$$

veya

$$T_A^m T_K^l N_{lm}^i = T_C^i N_{KA}^C \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir. Burada N_{KA}^C tensörü Π_u -yapısı için Nijenhuis tensörüdür. Aşağıdaki teoremin doğruluğu da (4.15) eşitliğinden kolayca görülür.

Teorem 4.2.2: M_n 'nin M_k invariant altmanifoldu verilmiş olsun. N_{lj}^i Nijenhuis tensörünün sıfır olması durumunda N_{KA}^C tensörü de sıfır olur (Cengiz 2002).

İndirgenmiş hemen hemen hermit yapılar

Nijenhuis tensörünün özdeş olarak sıfır olması durumunda hemen hemen kompleks uzay, kompleks manifold adını alır.

Teorem 4.2.1.1: Bir kompleks manifoldda indirgenmiş yapıya sahip invariant altuzay, analitik altmanifold olur (Tachibana and Koto 1962).

$g_{\mu\lambda}$ Riemann metriği hemen hemen kompleks yapıya göre hibrid olan hemen hemen kompleks uzay, bir Riemann uzayı ise bu uzay hemen hemen Hermit uzay adını alır. Yine aynı uzay için $\varphi_{\mu\lambda} = \varphi_{\mu}^t g_{t\lambda}$ tensör alanı antisimetrik olduğundan $\varphi = \varphi_{\mu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\lambda$ biçiminde yazılır. Aynı zamanda Kahler uzayı da hemen hemen Hermit uzaydır ve $\nabla_l \varphi_\mu^\lambda = 0$ şartını sağlar. Burada ∇_l , Riemann kovaryant türevidir. Bu uzay, esas formu kapalı olmasının yanı sıra bir kompleks manifold olan hemen hemen Hermit uzaydır (Koto 1960).

Teorem 4.2.1.2: Kahler uzayının invaryant altuzayı indirgenmiş yapıya göre Kahleriandır (Schouten and Yano 1955).

İspat: X_n Kahler uzayının invaryant uzayı X_m olsun. İndirgenmiş Riemann metriği g_{cb} olmak üzere

$$g_{cb} = g_{\mu\lambda} B_b^\mu B_c^\lambda$$

biçiminde tanımlansın. Burada $g_{\mu\lambda}$ metriği hibrid ve B_b^μ tensörü pür olduğundan g_{cb} metriği hibrid olur. Dolayısıyla X_m hemen hemen Hermit uzay olur. Ayrıca

$$\varphi_{cb} = \varphi_c^r g_{rb} = \varphi_{\mu\lambda} B_b^\mu B_c^\lambda$$

eşitliğinden dolayı X_m hemen hemen Hermit uzayının esas formu kapalı olur. Böylece invaryant altuzayın Kahler uzayı olduğu söylenir.

Hemen Hemen B-Altmanifold

M_n manifoldunda integrallenebilir r -regüler Frobenius Π -yapısı ve pozitif tanımlı olması gerekmeyen $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ Riemann metriği verilsin. Riemann metriğine pür metrik tensör karşılık geliyor ise bu Riemann metriğine pür Riemann metriği denir. Π -yapısına göre pür Riemann metrik tensörlerinin Riemann manifoldu üzerinde oluşturduğu uzay B -altmanifold olarak adlandırılır. Bu durumda

$$\varphi_{ij} = g_{im} \varphi_j^m = g_{mj} \varphi_i^m = \varphi_{ji} \quad (4.16)$$

koşulu sağlanmalıdır. Pür tensörlerin oluşturulmasından yararlanılarak,

$$g_{ij} = g_{u\alpha v\beta} = g_{uv\alpha} C_{\alpha\beta}^\sigma \quad (4.17)$$

yazılır. $g_{uv\alpha}$ değerlerinin u ve v indislerine göre simetrikliği g_{ij} tensörünün simetrik oluşuna bağlıdır. (4.17) ifadesindeki pür metrik tensör, A -holomorf manifoldunda

$$^*g_{ij} = g_{u\alpha v\beta} \xi^\beta e^\alpha = g_{uv\alpha} e^\alpha \quad (4.18)$$

tensörüne karşılık gelir. (4.18) numaralı eşitlikte verilen tensör regüler ve simetriktir. O halde M_n manifoldu üzerinde ds^2 olarak verilen Riemann metriğinin holomorf manifoldda karşılığı

$$ds^2 = ^*g_{uv} dz^u dz^v \quad (4.19)$$

biçiminde olur. Burada (4.18) tensörünün holomorf tensör olması ile birlikte (4.19) metriğinin Riemann metriği olmasından söz edilebilir. Aksi takdirde bu tensöre karşılık gelen bağlantı ve eğrilik tensörü A -holomorf manifolduna dahil edilemez. (4.18) tensörünün A -holomorf tensör

olması şartını bulmak için pür g_{ij} tensörüne Φ -operatörü uygulanır ve (4.16) eşitliği göz önüne alınır. Bu durumda

$$\Phi_k g_{ij} = -\nabla_k \varphi_{ij} + \nabla_i \varphi_{jk} + \nabla_j \varphi_{ik} \quad (4.20)$$

eşitliği bulunur. Burada, ∇ Riemann konneksiyonudur. (4.20) eşitliğinden yararlanılarak

$$\nabla_j \varphi_{ik} = \frac{1}{2}(\Phi_k g_{ij} + \Phi_i g_{jk}) \quad (4.21)$$

yazılır. (4.20) eşitliğinde $\Phi_k g_{ij} = 0$ olması ile birlikte $\nabla_j \varphi_{ik} = 0$ olduğu görülür. Diğer yandan (4.21) eşitliğinde $\nabla_j \varphi_{ik} = 0$ olduğunda ise $\Phi_k g_{ij} = 0$ olur (Cengiz 2002).

Bu da aşağıdaki teoremin doğru olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.2.1: ∇ Riemann konneksiyonu için pür Riemann metriğinin holomorf olması ancak ve ancak $\varphi \in \Pi$ için $\nabla \varphi = 0$ olması ile mümkündür (Cengiz 2002).

$\nabla \varphi = 0$ koşulu ile birlikte Riemann konneksiyonu burulmasız Π -konneksiyon olduğundan Riemann Π -konneksiyonu pür olur. Riemann Π -konneksiyonunun katsayıları C_{kj}^i ile gösterildiğinde pür konneksiyon kuralına göre

$$K_{kj}^i = K_{\omega\gamma\nu\beta}^{u\alpha} = K_{\omega\omega\nu}^{u\sigma} C_{\sigma\gamma}^v C_{v\beta}^\alpha \quad (4.22)$$

$$K_{\omega\omega\nu}^{u\sigma} = K_{\nu\omega\omega}^{u\sigma}$$

olur. (4.17) ve (4.22) eşitlikleri için $\nabla_k g_{ij} = 0$ koşulu kullanıldığında

$$\partial_{w\gamma} \mathcal{G}_{uv\sigma} C_{\alpha\beta}^\sigma = K_{\omega\omega u}^{t\sigma} C_{\sigma\gamma}^v C_{v\alpha}^\mu \mathcal{G}_{t\nu\tau} C_{\mu\beta}^\tau + K_{\omega\omega\nu}^{t\sigma} C_{\sigma\gamma}^v C_{v\beta}^\mu \mathcal{G}_{t\nu\tau} C_{\mu\alpha}^\tau$$

olur. Bu eşitlikte $\xi^\beta \xi^\gamma e^\alpha$ ile kontraksiyon işlemi yapılırsa

$$\xi^\gamma \partial_{w\gamma} \mathcal{G}_{uv\alpha} e^\alpha = (K_{\omega\omega u}^{t\sigma} \mathcal{G}_{t\nu\mu} + K_{\omega\omega\nu}^{t\sigma} \mathcal{G}_{t\mu\mu}) e_\sigma e^\mu$$

olur. Holomorf fonksiyon teorisinde $w'(z) = \xi^\beta \partial_\beta \mathcal{Y}^\alpha e_\alpha$ ve (4.18) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{\partial^* g_{uv}}{\partial z^w} = K_{wu}^{t*} g_{ij}^* + K_{wv}^{t*} g_{ut}^* \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradan ds^2 metriğine karşılık gelen ds^{*2} metriğinin tensörünün $\nabla_w^* g_{uv}^* = 0$ koşulunu sağladığı görülür. Bu koşul yardımıyla reel manifolddakine benzer şekilde holomorf manifoldda da Christoffel sembolü

$$K_{wu}^{t*} = \frac{1}{2} g^{*ut} \left(\frac{\partial^* g_{tv}}{\partial z^w} + \frac{\partial^* g_{tw}}{\partial z^v} - \frac{\partial^* g_{vw}}{\partial z^t} \right) \quad (4.24)$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikten Christoffel sembolünün holomorf olduğu görülür. Ayrıca g_{uv}^* tensörünün holomorf olması cebirsel anlamda bütün türevlerinin mevcut olmasını

mümkün kılar. Holomorf konneksiyonun eğrilik tensörü pürdür. Bundan dolayı holomorf Riemann metriğinin eğrilik tensörü de pür olur. Böylece g_{uv}^* tensörünün eğrilik tensörü de holomorf olur (Cengiz 2002).



SONUÇ

1. Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada ilk olarak vektör uzayı, kovektör uzayı gibi temel kavramlar tanıtılarak diferensiyellenebilir manifold üzerinde vektör, kovektör ve tensör alanı kavramlarına yer verilmiştir. Manifold üzerinde vektör alanlarının Lie ve kovaryant türevi tanımlanarak konneksiyon hakkında bilgiler verilmiştir. Kovaryant türevin çeşitli vektör alanlarına uygulaması yapılarak manifoldun eğrilik ve burulma tensörleri üzerinde durulmuştur.
2. Diferensiyellenebilir manifold üzerinde pür tensör alanları tanıtılmış ve Tachibana operatörünün bu tensör alanlarına uygulaması yapılmıştır. Ayrıca Vishnevskii operatörü ve Yano-Ako operatörü tanıtılarak bu operatörlerin çeşitli pür tensör alanlarına uygulamaları verilmiştir.
3. Tachibana operatörünün diferensiyellenebilen M_n manifoldunun invaryant altmanifoldunda pür tensörlere uygulaması yapılmıştır. g_{ij} Riemann metrik tensörünün Φ -tensör olması durumunda invaryant altmanifolddaki g_{AB} Riemann metrik tensörünün de Φ -tensör olduğu gösterilmiştir. Bu doğrultuda “II-yapısına sahip (V_n, g) Riemann manifoldu verilmiş olsun. Bu yapıya göre g esas metrik tensörü Φ -tensör oluyorsa verilen manifoldun bir Riemann altmanifoldunun esas metrik tensörü de Φ -tensör olur.” teoremi verilerek ispatlanmıştır.
4. M_n manifoldunun N_{lj}^i Nijenhuis tensörünün sıfır olması durumunda M_k invaryant altmanifoldunun N_{KA}^C Nijenhuis tensörünün de sıfır olduğu gösterilmiştir.
5. Kahler uzayının invaryant altuzayının indirgenmiş yapıya göre Kahlerian olduğu gösterilmiştir.
6. “ ∇ Riemann konneksiyonu için pür Riemann metriğinin holomorf olması ancak ve ancak $\varphi \in \Pi$ için $\nabla\varphi = 0$ olması ile mümkündür.” teoremi verilerek ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Cengiz, N., 2002. Cebirsel Poliafinor Yapılar ve Liftler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Frolicher, A. and Nijenhuis, A., 1956a. Some new cohomology invariants for complex manifolds. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, (59), *Indag. Math.*, (18), 540-564.
- Frolicher, A. and Nijenhuis, A., 1956b. Theory of vector-valued differential forms. I. Derivations of the graded ring of differential forms. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, (59), *Indag. Math.*, (18), 338-359.
- Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963. *Foundations of Differential Geometry. Vol. I.* Interscience Publishers, 329 p, New York-London.
- Koto, S., 1960, Some theorems on almost Kahlerian spaces. *J. Math. Soc. Japan*, (12), 422-433.
- Kruchkovich, G. I., 1970. Conditions for the integrability of a regular hypercomplex structure on a manifold. (Russian) *Ukrain. Geometr. Sb. Vyp.*, (9), 67-75.
- Kruchkovich, G. I., 1972. Hypercomplex structures on manifolds I. (Russian) *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, (16), 174-201.
- Magden, A. and Salimov, A.A., 2006. On applications of the Yano-Ako operator, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, (45), 135-141.
- Nijenhuis, A., 1951. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, (54), *Indag. Math.*, (13), 200-212.
- Salimov, A. A. and Magden, A., 1998. Complete lifts of tensor fields on a pure cross-section in the tensor bundle $T_q^1(M_n)$, *Note Mat.* (18), 27-37.
- Salimov, A. A. ve Mağden, A., 2008. *Diferensiyel Geometri.* Aktif Yayınevi, 326 s, Erzurum.
- Salimov, A. A., 1983. Almost analyticity of a Riemannian metric and integrability of a structure. (Russian) *Trudy Geom. Sem. Kazan. Univ.*, (15), 72-78.
- Salimov, A. A., 1994. A new method in the theory of liftings of tensor fields in a tensor bundle. *Translation in Russian Math. (Iz. VUZ)*, (38), 67-73.
- Salimov, A. A., 1994. Generalized Yano-Ako operatör and the complete lift of tensor fields. *Tensor (N.S.)*, (55), 142-146.
- Salimov, A. A., 2010. On Operators Associated with Tensor Fields. *J. Geom.* (99), 107-145.
- Salimov, A. A., 2013. *Tensor Operators And Their Applications.* Nova Science Publishers Inc, 198 p, New York.
- Sato, I., 1966. Almost analytic tensor fields in almost complex manifolds. *Tensor (N.S.)* (17), 105-119.
- Schouten, J.A., and Yano, K., 1955. On invariant subspaces in the almost complex X_{2n} . *Indag. Math.*, (17), 261-269.
- Shirokov, A. P., 1955. On a property of covariantly constant affinors. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, (102), 461-464.

- Shirokov, A. P., 1966. On the question of pure tensors and invariant subspaces in manifolds with almost algebraic structure. (Russian) *Kazan. Gos. Univ. Učen. Zap.*, (126), 81-89.
- Slebodzinski, W., 1964. Contribution à la géométrie différentielle d'un tenseur mixte de valence deux. *Colloq. Math.*, (13), 49-54.
- Şahin, B., 2012. *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*. Nobel Akademik Yayıncılık, 294 s, Ankara.
- Tachibana, S. and Koto, S., 1962. On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces. *Tohoku Math. J.*, 14 (2), 177-186.
- Tachibana, S., 1960. Analytic tensor and its generalization. *Tohoku Math. J.*, (12), 208-221.
- Vishnevskii, V. V., 1970. Affinor structures of spaces with affine connection. (Russian) *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika.*, (92), 12-23.
- Vishnevskii, V. V., Shirokov, A. P. and Shurygin, V. V., 1985. Spaces over algebras (Russian). *Kazanskii Gosudarstvennii Universitet*, Kazan.
- Willmore, T. J., 1968. Note on the Slebodzinski tensor of an almost-complex structure. *J. London Math. Soc.*, (43), 321-322.
- Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. *Kodai Math. Sem. Rep.*, (20), 414-436.
- Yano, K. and Kon, M., 1984. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, Vol. 3. World Scientific Publishing Co., 520 p, Singapore.
- Yano, K., and Bochner, S., 1953. Curvature and Betti Numbers, *Annals Math. Studies*, Vol. 32., Princeton University Press, 190 p.
- Yıldırım, F., 2018. *Lineer Cebir*. Birsen Yayınevi, 374 s, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Kübra ATASEVER
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Ilıca İMKB Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi