



**BANACH VE n -BANACH UZAYLARINDA
ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DARALTAN DÖNÜŞÜM
SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Esra ŞİMŞEK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2022

(Her hakkı saklıdır.)

T.C
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**BANACH VE n -BANACH UZAYLARINDA ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DARALTAN
DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**
(Fixed Point Theorems for Classes of Enriched Contraction Mapping in Banach and n -Banach
Spaces)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ŞİMŞEK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Erzurum
Mayıs, 2022

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Esra ŞİMŞEK tarafından hazırlanan “Banach ve n -Banach Uzaylarında Zenginleştirilmiş Daraltan Dönüşüm Sınıfları İçin Sabit Nokta Teoremleri” başlıklı çalışması 31 / 05 / 2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. İbrahim KARAHAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek lisans Tezi olarak *Prof. Dr. İsa Yıldırım* danışmanlığında sunulan “Banach ve n -Banach Uzaylarında Zenginleştirilmiş Daraltan Dönüşüm Sınıfları İçin Sabit Nokta Teoremleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	9	30
Kuramsal Temeller	23	30
Materyal ve Yöntem	18	35
Bulgular	7	20
Tartışma	0	20
Tezin Geneli	19	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Esra Şimşek	Prof. Dr. İsa Yıldırım
12.5.2022	12.5.2022
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmamın planlanması, araştırılması, yürütülmesi ve oluşumu kısımlarında engin bilgi ve tecrübeleriyle her türlü katkı ve destek sağlayan çok değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM’a derin minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ayrıca her türlü kolaylığı sağlayan, benden yardımlarını esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim kıymetli aileme ve yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteğini esirgemeyen arkadaşım Hava ARIKAN’a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Esra ŞİMŞEK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BANACH VE n -BANACH UZAYLARINDA ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DARALTAN DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Esra ŞİMŞEK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, Banach uzaylarında tanımlanan zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için sabit nokta teoreminin elde edilmesi, n -Banach uzaylarında zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarının tanıtılması ve bu dönüşüm sınıfları için bazı sabit nokta sonuçlarının ispatlanması amaçlanmıştır.

Yöntem: Bu çalışma matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak yapılmıştır.

Bulgular: Mevcut literatürdeki bazı zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarını içeren zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı için Krasnoselskij iterasyon metodu kullanılarak, Banach uzaylarında sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Ayrıca bu dönüşüm sınıfı kullanılarak Krasnoselskij iterasyon yöntemi için kararlılık sonuçları gösterilmiştir. Son olarak Banach uzaylardan daha genel olan n -Banach uzaylarda zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşüm, zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşüm ve zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşüm sınıfları tanıtılmıştır ve Krasnoselskij iterasyon metodu kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Sonuç: Literatür taramasından ve elde edilen sonuçlardan hareketle bu çalışmanın hangi çalışmalara ışık tutacağı ve neler yapılabileceği ile ilgili bazı öngörüler belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Banach uzay, n -Banach uzay, Krasnoselskij iterasyon metodu, Kararlılık, zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm

Mayıs 2022, 68 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

FIXED POINT THEOREMS FOR CLASSES OF ENRICHED CONTRACTION MAPPING IN BANACH AND n -BANACH SPACES

Esra ŞİMŞEK

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: In this study, it is aimed to obtain the fixed point theorem for classes of the enriched generalized non-expansive mappings defined in Banach spaces, to introduce classes the enriched contraction mappings in n -Banach spaces and to prove some fixed point results for these such classes.

Method: This study has been made using mathematical proof methods.

Findings: The fixed point theorem in Banach spaces is obtained by using Krasnoselskij iteration method for classes of the enriched generalized non-expansive mappings, which includes some classes of enriched contraction mappings in the current literature. In addition, stability results for Krasnoselskij iteration method are shown using this transformation class. Finally, classes of the enriched n -contraction mappings, the enriched n -Kannan mappings and the enriched n -Chatterjea mappings in n -Banach spaces, which are more general than Banach spaces, are introduced and some fixed point theorems are obtained by using Krasnoselskij iteration method.

Results: Based on the literature review and the results obtained, some predictions about which studies this study will shed light on and what can be done are stated.

Keywords: Fixed point, Banach space, n -Banach space, Krasnoselskij iteration method, Stability, Enriched contraction mapping

May 2022, 68 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
Temel Kavramlar	4
n -Normlu Uzaylardaki Bazı Tanım ve Teoremler.....	8
MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
Zenginleştirilmiş Dönüşümlerin Tanımı ve Bazı Özellikleri.....	16
Sabit Nokta İterasyon Yöntemlerinin Kararlılığı	36
ARAŞTIRMA BULGULARI	38
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	58

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Paralel yüzün hacmi	12
------------------------------------	----



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$F(f)$	: f dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$(N, \ \cdot \)$	: Normlu uzay
$x_n \rightharpoonup x$	: Zayıf yakınsama
$x_n \rightarrow x$	: Kuvvetli yakınsama
$\ \cdot \ _p$	: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p ile elde edilen norm
$\ \cdot \ _\infty$	: 2-normların maksimumu olan sonsuz norm
$\ \cdot, \dots, \cdot \ $	: n -norm fonksiyonu
$\ \cdot, \dots, \cdot \ _\infty$	: $(n - 1)$ -boyutlu norm fonksiyonu
$\ \cdot, \dots, \cdot \ _S$	: Standart norm fonksiyonu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu

GİRİŞ

Analizde bilinen en basit sabit nokta teoremi, kapalı bir aralık üzerinde tanımlı sürekli bir dönüşümün bir sabit noktasının varlığıyla ilgilidir. Bir boyutlu uzaydaki bu teoriyi ünlü matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer, n boyutlu uzaylara genelleştirmiş ve $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar üzerinde tanımlı sürekli bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. Daha sonra Fonksiyonel Analiz, Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Matematiksel Fizik alanlarındaki çalışmalarıyla tanınan Polonyalı matematikçi Juliusz Schauder, sonlu boyutlu uzaylardaki Brouwer'ın teorisini sonsuz boyutlu uzaylara taşımış ve herhangi bir Banach uzayının boştan farklı kompakt konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan sürekli bir dönüşümün bir sabit noktasının olduğunu ispatlamıştır. Diğer bir Polonyalı matematikçi olan Stefan Banach ise tam metrik uzaylarda sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili meşhur Banach sabit nokta teoremini (büzülme teoremi) ifade etmiş ve tam metrik uzay üzerinde tanımlı her daraltan dönüşümün tek bir sabit noktasının olduğunu ispatlamıştır. Bu teoremi diğer teoremlerden önemli kılan kısmı ise sadece sabit noktanın nasıl bulunacağını değil aynı zamanda bu noktanın tekliğini de ifade etmesidir. Matematğin pek çok dalında ve diğer bilim dallarında farklı uygulamalar içeren bu teoremin, literatürde çok sayıda bilim insanı tarafından genelleştirmesi ifade edilmiştir. Bu genelleştirmeler, bazen kısmi metrik, b-metrik, D-metrik, S-metrik, dikdörtgensel metrik, G-metrik gibi metrik uzayların farklı genelleştirmeleri olan uzaylar üzerinde bazen de daraltan dönüşümlerin farklı genelleştirmeleri olan Kannan tipi, Chatterjea tipi, Reich tipi, Ciric tipi, Reich-Rus-Ciric tipi gibi daraltan dönüşüm sınıfları ile sağlanmıştır.

Daraltan dönüşüm sınıfının genelleştirmelerinden biri 1973 yılında aşağıdaki gibi ifade edilen Hardy ve Rogers'ın sabit nokta teoremidir.

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) \text{ bir Banach uzayı ve } f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \text{ bir dönüşüm olsun. Her } x, y \in \mathcal{X} \text{ için}$$
$$\|fx - fy\| \leq \theta \|x - y\| + \beta [\|x - fy\| + \|y - fx\|] + \gamma [\|x - fx\| + \|y - fy\|]$$

olacak şekilde $\theta + 2\beta + 2\gamma < 1$ eşitsizliğini sağlayan θ, β, γ negatif olmayan reel sayılarının olduğunu kabul edelim. O halde f , $\mathcal{X}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan f dönüşümüne ayrıca Hardy-Rogers tipi daraltan dönüşüm denir. Bu teorem, Kannan'ın (1968) sabit nokta teoremi, Reich'ın (1971) sabit nokta teoremi, Chatterjea'nın (1972) sabit nokta teoremi, Ciric'in (1973) sabit nokta teoremi ve Reich-Rus-Ciric'in sabit nokta teoreminin bir genellemesidir.

Yukarıdaki çalışmalardan esinlenen Berinde 2018 yılında, zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşüm kavramını tanıtmıştır. Ayrıca bazı uygun koşullar altında zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşümlerin zayıf ve güçlü yakınsama teoremlerini ispatlamıştır. Berinde 2019 yılında ise zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanıtmış ve Krasnoselskij iterasyonu için güçlü ve zayıf yakınsama teoremlerini ifade etmiştir.

Berinde ve Pacurar 2020 yılında, zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm kavramını aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \theta \|x - y\|$$

olacak şekilde $\theta \in [0, 1/2)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye (k, θ) - zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm denir.

Berinde ve Pacurar, Krasnoselskij iterasyon metodunu kullanarak zenginleştirilmiş daraltan dönüşümlerin sabit noktaları üzerine bazı güçlü yakınsama ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir. Daha sonra 2020 yılında Berinde, zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü ifade etmiştir. 2021 de Berinde ve Pacurar zenginleştirilmiş Kannan dönüşümünü, zenginleştirilmiş Bianchini dönüşümünü, zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümünü, zenginleştirilmiş Ćirić-Reich-Rus dönüşümünü ve zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşümünü ifade etmişler ve Banach uzaylarında bu tür dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan Krasnoselskij iterasyonunun yakınsama sonuçlarını göstermişlerdir.

Ayrıca 2021 yılında Mondal, Garai ve Dey zenginleştirilmiş $\mathcal{A}$ -daraltan ve zenginleştirilmiş $\mathcal{A}'$ -daraltan dönüşümünü, 2021 yılında Suantai, Chumpungam ve Sarnmeta zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıflarını tanıtmışlar ve bazı sabit nokta teoremlerini ifade etmişlerdir. Yine 2021 yılında Abbas Anjum ve Berinde zenginleştirilmiş quasi-daraltan dönüşümünü ve zayıf zenginleştirilmiş daraltan dönüşümünü ifade etmişlerdir.

Bunları takiben 2022 yılında Shukla ve Pant, zenginleştirilmiş quasi-genişlemeyen dönüşümünü ve Suzuki-zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümünü tanıtmışlardır. Shukla ve Pant, Banach uzaylarında bu tür dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için Krasnoselskij iterasyonunu kullanmışlardır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Banach uzaylarında tanımlanan zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarının tarihçesi ve bu dönüşüm sınıfı ile ilgili yapılan çalışmalara değinilmiştir.

İkinci bölümde, tezin oluşumunu sağlayan bazı önemli tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca, n -normlu uzaylardaki bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Daha sonra zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarının tanımları ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlığı ile ilgili bazı önemli teoremler ve örnekler verilmiştir. Ayrıca birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahip olan kararlılık kavramı irdelenerek bazı teoremler ve lemmalar ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak Banach uzaylarında 2020 yılında Deshmukh tarafından ifade edilen zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı için bir örnek verilmiştir. Daha sonra Krasnoselskij iterasyonu kullanılarak bu dönüşüm sınıfı için sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Ayrıca, bazı uygun koşullar altında bu tür dönüşümler için Krasnoselskij iterasyonunun kararlılığı gösterilmiştir. Sonrasında n -Banach uzaylarında zenginleştirilmiş n -daraltan, zenginleştirilmiş n -Kannan, zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşüm sınıfları tanıtılmış ve bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca Krasnoselskij iterasyonu kullanılarak bu tür dönüşüm sınıfları için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise literatür taramasından ve elde edilen sonuçlardan hareketle bu çalışmanın hangi çalışmalara ışık tutacağı ve neler yapılabileceği ile ilgili bazı öngörüler belirtilmiş ve okuyucular için bazı problemler ifade edilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Temel Kavramlar

Tezin bu bölümünde, tezin oluşumunu sağlayan bazı önemli tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1 (Sabit Nokta): $X \neq \emptyset$ ve f de X üzerinde bir dönüşüm olsun. $x = f(x)$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ e f nin sabit noktası denir. f dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(f), F_f$ veya $Fix(f)$ ile gösterilir. Bazen notasyon kullanımını basitleştirmek için $f(x)$ yerine fx yazımı tercih edilir.

Örnek 1:

- (i) $f: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 2\right], fx = \frac{1}{x}$ dönüşümü için $Fix(f) = \{1\}$ dir.
- (ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, fx = x$ dönüşümü için $Fix(f) = \mathbb{R}$ dir.
- (iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, fx = x^2 - 2x$ dönüşümü için $Fix(f) = \{0, 2\}$ dir.
- (iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, fx = x + 5$ dönüşümü için $Fix(f) = \emptyset$ dir.

Sabit nokta teorisinde ve bu çalışmada yer alan bazı önemli dönüşüm sınıfları ve bunlarla ilgili sabit nokta teoremlerine aşağıda yer verilmiştir.

Tanım 2 (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\theta \geq 0$ sabiti için

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y) \quad (1)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 3 (Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\theta \in [0, 1)$ sabiti için

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y) \quad (2)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye daraltan dönüşüm denir (Banach 1922).

Teorem 1 (Banach Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ daraltan bir dönüşüm ise, f tek bir sabit noktaya sahiptir (Banach 1922).

Tanım 4 (Kesin Pseudocontractive Dönüşüm): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, C de bu uzayın boştan farklı alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ dönüşümü her $x, y \in C$ ve $k < 1$ sayısı için

$$\|fx - fy\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|x - y - (fx - fy)\| \quad (3)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye k -kesin pseudocontractive dönüşüm denir (Browder and Petryshym 1967).

Tanım 5 (Kannan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\gamma \in [0, 1/2)$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma[d(x, fx) + d(y, fy)] \quad (4)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye Kannan dönüşüm denir (Kannan 1968).

Teorem 2 (Kannan Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve $\gamma \in [0, 1/2)$ sayısı için $f: X \rightarrow X$ dönüşümü,

$$d(fx, fy) \leq \gamma[d(x, fx) + d(y, fy)]$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f nin tek bir sabit noktası vardır (Kannan 1969).

Tanım 6 (Ciric-Reich-Rus Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq ad(x, y) + b[d(x, fx) + d(y, fy)] \quad (5)$$

olacak şekilde $a + 2b < 1$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \geq 0$ sayıları var ise, f ye Ciric-Reich-Rus daraltan dönüşüm denir (Ciric 1971).

Teorem 3 (Reich Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ için $f: X \rightarrow X$ dönüşümü,

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, fx) + \gamma d(y, fy)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f nin tek bir sabit noktası vardır (Reich 1971a).

Tanım 7 (Bianchini Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $h \in [0, 1)$ sayısı için

$$d(fx, fy) \leq h \max\{d(x, fx), d(y, fy)\} \quad (6)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye Bianchini dönüşüm denir (Bianchini 1972).

Tanım 8 (Chatterjea Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\beta \in [0, 1/2)$ sayısı için

$$d(fx, fy) \leq \beta[d(x, fy) + d(y, fx)] \quad (7)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye Chatterjea dönüşüm denir (Chatterjea 1972).

Teorem 4 (Chatterjea Sabit Nokta Teoremi): $(\mathcal{X}, d)$ bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $\beta \in [0, 1/2)$ sayısı için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü,

$$d(fx, fy) \leq \beta[d(x, fy) + d(y, fx)]$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f nin bir tek sabit noktası vardır (Chatterjea 1972).

Tanım 9 (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm): $\mathcal{X}$ bir normlu uzay ve $C, \mathcal{X}$ in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $p \in F(f) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü,

$$\|fx - p\| \leq \|x - p\| \quad (8)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Genişlemeyen bir dönüşüm $F(f) \neq \emptyset$ olması durumunda, quasi-genişlemeyendir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Tanım 10 (Hardy-Rogers Dönüşüm): $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, fy) + d(y, fx)] + \gamma[d(x, fx) + d(y, fy)] \quad (9)$$

olacak şekilde $\alpha + 2\beta + 2\gamma \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan α, β, γ negatif olmayan reel sayıları var ise, f ye Hardy-Rogers dönüşüm denir (Hardy and Rogers 1973).

Teorem 5 (Hardy-Rogers Sabit Nokta Teoremi): $(\mathcal{X}, d)$ bir tam metrik uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, fy) + d(y, fx)] + \gamma[d(x, fx) + d(y, fy)]$$

olacak şekilde $\theta + 2\beta + 2\gamma < 1$ eşitsizliğini sağlayan θ, β, γ negatif olmayan reel sayıları var ise f dönüşümü, $\mathcal{X}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Hardy and Rogers 1973).

Teorem 6 (Ciric Sabit Nokta Teoremi): $(\mathcal{X}, d)$ bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta < 1$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü,

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, fx) + \gamma d(y, fy) + \delta d(x, fy) + \eta d(y, fx)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f bir tek sabit noktaya sahiptir denir (Ciric 1974).

Tanım 11 (Zayıf Daraltan): $\mathcal{X}$ bir Banach uzay, C de bu uzayın kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve azalmayan fonksiyon olmak üzere $\phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \infty$ ve her $x, y \in C$ için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$\|fx - fy\| \leq \|x - y\| + \phi(\|x - y\|)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f dönüşümüne zayıf daraltan dönüşüm denir (Alber and Delabriere 1997).

Tanım 12 (Quasi Daraltan Dönüşüm): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve C de bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in C$ için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü,

$$\|fx - fy\| \leq c \max\{\|x - y\|, \|x - fx\|, \|y - fy\|, \|x - fy\|, \|y - fx\|\}$$

$0 \leq c < 1$ sabiti için bu eşitsizliği sağlıyor ise, f ye quasi-daraltan dönüşüm denir (Rhoades and Şoltuz 2003).

Tanım 13 (Hemen Hemen Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$, $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları için

$$d(fx, fy) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, fx)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f dönüşümüne hemen hemen (δ, L) -daraltan dönüşüm denir (Berinde 2004).

Teorem 7: (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $f: X \rightarrow X$ dönüşümü, hemen hemen (δ, L) -daraltan dönüşüm ise,

(i) $Fix(f) \neq \emptyset$,

(ii) Keyfi $x_0 \in X$ başlangıç noktası için Picard iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $p \in Fix(f)$ ye

yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$d(x_{n+i-1}, p) \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} d(x_n, x_{n-1})$$

dir (Berinde 2004).

Teorem 8: (X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, fx)$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları var ise aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i) $Fix(f) = \{p\}$,

(ii) Keyfi $x_0 \in X$ başlangıç noktası için Picard iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar,

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$d(x_{n+i-1}, p) \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} d(x_n, x_{n-1})$$

dir.

(iv) Picard iterasyonunun yakınsama oranı, $d(x_n, p) \leq \delta d(x_{n-1}, x)$ şeklindedir (Berinde 2004).

Tanım 14 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $f: X \rightarrow X$ dönüşümü,

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) \quad (10)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye genişlemeyen dönüşüm denir (Berinde 2007).

Teorem 9: C , düzgün konveks bir Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. O halde f dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Berinde 2007).

Örnek 2: $X = [0, 2]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $f: X \rightarrow X$, $fx = 2 - x$ olsun.

$$d(fx, fy) = |2 - x - 2 + y| = |y - x| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(fx, fy) \leq d(x, y)$ şartı sağlanır. Buradan f nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğu görülür. Fakat bu f dönüşümü daraltan ve kesin daraltan dönüşüm değildir.

Tanım 15 (Suzuki Tipi Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm): $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve C de bu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ dönüşümü, her $x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2} \|x - f(x)\| \leq \|x - y\| \text{ iken } \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

şartını sağlıyor ise, f dönüşümüne Suzuki tipi genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir (Suzuki 2008).

n -Normlu Uzaylardaki Bazı Tanım ve Teoremler

Bu bölümde ilk olarak “2-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık” ve “2-Banach Uzayları” kavramları verilmiştir. Daha sonrasında 2-normlu uzaylar ve 2-Banach uzaylardan daha genel olan “ n -Normlu Uzaylarda Yakınsaklık” ve “ n -Banach Uzayları” kavramları tanıtılmıştır.

Tanım 16 (2-Normlu Uzay): X , $2 \leq d < \infty$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (i) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x$ ve y lineer bağımlıdır,
- (ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$,
- (iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (iv) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|y, z\|$,

şartlarını sağlıyor ise, $\|\cdot, \cdot\|$ fonksiyonuna $\mathcal{X}$ de (veya $\mathcal{X}$ üzerinde) 2-norm, $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ ikilisine de 2- normlu uzay denir (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 17 (2-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık): Her $y \in \mathcal{X}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0$ ise, $\mathcal{X}$ deki bir $\{x_n\}$ dizisi x değerine yakınsaktır denir. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dir (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 18 (2-Normlu Uzaylarda Cauchy Dizisi): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzay olsun. Her $y \in \mathcal{X}$ için bu uzaydaki $\{x_n\}$ dizisi

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$$

şartını sağlıyor ise, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Freese 2001).

Tanım 19 (Tam 2-Normlu Uzay): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzay olsun. $\mathcal{X}$ deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayına tam 2-normlu uzay denir (Freese 2001).

$2 \leq d < \infty$ olan 2-normlu uzaylar için $\{u_1, \dots, u_d\}$ bir baz olsun. Tanımlanan bu baz ile aşağıda, Gunawan ve Mashadi tarafından 2-normlu uzaylardaki yakınsaklık kavramı için bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 10: $\mathcal{X}$ deki bir $\{x_n\}$ dizisinin $\mathcal{X}$ deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, \dots, d$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$ olmasıdır (Gunawan and Mashadi 2001).

Teorem 11: $\mathcal{X}$ deki bir $\{x_n\}$ dizisinin, bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\|x_n - x, u_i\| : i = 1, \dots, d\} = 0$ olmasıdır (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 20: $C, (\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ lineer 2-normlu uzayının bir alt kümesi olsun. C nin kapanışı

$$\bar{C} = \{x \in \mathcal{X}; x_n \rightarrow x \text{ olacak şekilde } C \text{ de } \{x_n\} \text{ dizisi vardır.}\}$$

şeklindedir. $C = \bar{C}$ ise C ye dizisel kapalı küme denir. (Harikrishnan and Ravindran 2011).

Tanım 21: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ lineer 2-normlu uzay olsun. $B, \mathcal{X}$ in boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere, her $x \in B$ için $\|x, u\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı var ise B ye u -sınırlı denir. Her $u \in B$ için B u -sınırlı ise, B ye sınırlı küme denir (Harikrishnan and Ravindran 2011).

Harikrishnan ve Ravindran 2011 yılında 2-normlu uzaylarda daraltan dönüşüm kavramını aşağıdaki gibi tanıtmışlardır.

Tanım 22: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzay olsun. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü her $x, y, z \in \mathcal{X}$ ve $k \in [0,1)$ için

$$\|fx - fy, z\| \leq k\|x - y, z\|$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye daraltan dönüşüm denir (Harikrishnan and Ravindran 2011).

2011 yılında Harikrishnan ve Ravindran, 2-normlu uzayların kapalı ve sınırlı bir alt kümesinde daraltan dönüşümlerin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu kanıtlamışlardır.

Teorem 12: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ tam 2-normlu uzay olsun. $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olmak üzere her $x, y, z \in \mathcal{X}$ ve $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü,

$$\|fx - fy, z\| \leq \alpha[\|x - fx, z\| + \|y - fy, z\|]$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f dönüşümü C de tek bir sabit noktaya sahiptir (Kır and Kızıltunç 2013).

Teorem 13: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \cdot\|)$ tam 2-normlu uzay olsun. $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olmak üzere her $x, y, z \in \mathcal{X}$ ve $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti için $f: C \rightarrow C$ dönüşümü,

$$\|fx - fy, z\| \leq \beta[\|x - fy, z\| + \|y - fx, z\|]$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f dönüşümü C de tek bir sabit noktaya sahiptir (Kır and Kızıltunç 2013).

Aşağıda n - normlu uzayın tanımı ve yakınsaklık kavramı verilmiştir. 2001 yılında Gunawan ve Mashadi, $n \geq 2$ için her n -normlu uzayın bir $(n - 1)$ -normlu uzay olduğunu kanıtlamışlardır. Ayrıca, belirli koşullar altında, $(n - 1)$ -normunun n -normdan elde edilebileceğini göstermişlerdir. Böylece n -normlu uzayda elde edilen yakınsaklığın ve tamlığın $(n - 1)$ -normlu uzaydaki yakınsaklık ve tamlığa eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

Tanım 23 (n – Normlu Uzay): $n \in \mathbb{N}$ ve $\mathcal{X}$, $n \leq d$ olan d boyutlu reel bir vektör uzay olmak üzere reel değerli bir $\|\cdot, \dots, \cdot\|: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (i) $\|x_1, \dots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır,
- (ii) $\|x_1, \dots, x_n\|$ değeri her hangi bir permütasyon altında değişmez,
- (iii) $\|\alpha x_1, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, \dots, x_n\|$ (keyfi $\alpha \in \mathbb{R}$ için),
- (iv) $\|x_1 + x'_1, \dots, x_n\| \leq \|x_1, \dots, x_n\| + \|x'_1, \dots, x_n\|$,

şartlarını sağlıyor ise, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ fonksiyonuna $\mathcal{X}$ te (veya $\mathcal{X}$ üzerinde) n -norm, $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ ikilisine de n -normlu uzay denir (Gunawan and Masladi 2001).

Örnek 3: Aşağıdaki Öklid n -normu ile $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ olsun:

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\|_E = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|,$$

burada her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ dir. Böylece $(\mathbb{R}^n, \|x_1, x_2, \dots, x_n\|_E)$ n -normlu uzaydır (Dutta 2010).

n -normlu $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayında $\{a_1, \dots, a_n\}$ bir lineer bağımsız kümesini alalım. $\mathcal{X}^{n-1}$ üzerinde tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu,

$$\|x_1, \dots, x_n\|_\infty := \max\{\|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\| : i = 1, \dots, n\},$$

ile tanımlanır. Bu tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ norma göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 14: $\mathcal{X}$ üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu bir $(n - 1)$ -norm tanımlar (Gunawan and Mashadi 2001).

Sonuç 1: Her $r = 1, \dots, n - 1$ için her n -normlu uzay bir $(n - r)$ -normlu uzaydır. Özel olarak, her n -normlu uzay bir normlu uzaydır (Gunawan and Mashadi 2001).

Genelde $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu aynı zamanda $\mathcal{X}$ üzerinde bir $(n - 1)$ -norm tanımlar. Bu $(n - 1)$ -normlar n tane $a_1, \dots, a_n$ vektörlerinin aynı kümesini kullanmamız koşuluyla $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna denktir. Bazı durumlarda, eğer n vektörlerin farklı kümeleri kullanılırsa $(n - 1)$ -norma denk olması mümkün olmayabilir.

Şimdi de n -norm kavramı için standart durumu ele alalım. $\mathcal{X}$ uzayı $d \geq n$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\mathcal{X}$ deki standart n -norm

$$\|x_1, \dots, x_n\|_S := \left| \begin{matrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

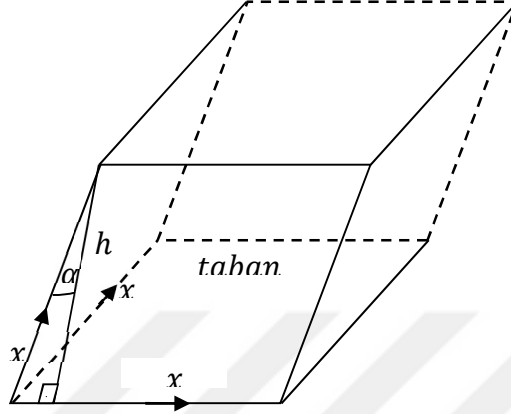
şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ise, bu n -norm Öklid n -norm ile tamamen aynıdır (Gunawan and Mashadi 2001).

Şimdi verilen yukarıdaki norma göre geometrik yapıyı verelim. Üstte verdiğimiz n -norm,

(i) $n = 1$ için, $\|x_1\|_S = \langle x_1, x_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ adi normu, yani x_1 in uzunluğunu,

(ii) $n = 2$ için, $\|x_1, x_2\|_S = \{\|x_1\|_S^2, \|x_2\|_S^2 - \langle x_1, x_2 \rangle^2\}^{\frac{1}{2}}$ standart 2-normu, yani x_1 ve x_2 tarafından gerilen paralelkenarın alanını,

(iii) $n = 3$ için $\|x_1, x_2, x_3\|_S = \|x_1, x_2, x_3\|_E$ normunu, yani x_1, x_2 ve x_3 tarafından gerilen Şekil 1'deki paralelyüzün hacmini



Şekil 1. Paralel yüzün hacmi

verir. Genelde, $\|x_1, \dots, x_n\|_S$, $\mathcal{X}$ deki $x_1, \dots, x_n$ ler tarafından gerilen n -boyutlu paralelyüzün hacmini belirtir.

Şimdi $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{X}$ üzerinde bir ortogonal küme olsun. O halde, Teorem 14 ifadesinden

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, \dots, x_{n-1}, e_i\|_S : i = 1, \dots, n\}$$

fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde $(n - 1)$ -norm tanımlar. Bu norma göre, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 15: Bir $\mathcal{X}$ standart n -norm üzerinde $\{e_1, \dots, e_n\}$ bazına göre tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ $(n - 1)$ -normu standart $\|\cdot, \dots, \cdot\|_S$, $(n - 1)$ -normuna denktir. Yani her $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{X}$ için

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}\|_S \leq \sqrt{n} \|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty$$

dur (Gunawan and Mashadi 2001).

Şimdi sonlu boyutlu durum için n -norm kavramını inceleyelim. $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ sonlu boyutlu n -normlu uzaylar için n -normdan bir $(n - 1)$ -normun elde edilmesini hatırlayalım. $\mathcal{X}$ de $n \leq m \leq d$ olacak şekilde bir lineer bağımsız $\{a_1, \dots, a_m\}$ kümesi alalım. $\{a_1, \dots, a_m\}$ ifadesine göre,

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\| : i = 1, \dots, m\}$$

ile $\mathcal{X}^{n-1}$ üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu tanımlanır.

Bu sebeple, Teorem 14 ten, $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir $(n-1)$ -norm tanımlar.

Tanım 24: (i) $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. $\{x_n\}, \mathcal{X}$ de bir dizi olmak üzere her $r_2, r_3, \dots, r_n \in \mathcal{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, r_2, r_3, \dots, r_n\| = 0$$

olacak şekilde $\mathcal{X}$ de x elemanı var ise, $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır denir (Gunawan and Mashadi 2001).

(ii) $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. $\{x_n\}, \mathcal{X}$ de bir dizi olmak üzere her $r_2, r_3, \dots, r_n \in \mathcal{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, r_2, r_3, \dots, r_n\| = 0$$

ise, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Gunawan and Mashadi 2001).

(iii) $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. Her Cauchy dizisi $\mathcal{X}$ in bir elemanına yakınsak ise, n -normlu uzaya tam denir. Tam bir n -normlu uzay $\mathcal{X}$ e ise n -Banach uzay denir (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 25: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ lineer n -normlu uzay ve $B, \mathcal{X}$ in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $u \in B$ için $\|u, x_1, \dots, x_n\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı var ise, B ye u -sınırlı denir. Tüm $u \in B$ için, B u -sınırlıysa, B ye sınırlı küme denir (Sukaesih, Gunawan and Neswan 2015).

Teorem 16: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. $\mathcal{X}$ deki bir $\{x_k\}$ dizisinin $\mathcal{X}$ deki x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}\|_\infty = 0$ olmasıdır (Dutta 2010).

Son zamanlarda, bazı yazarlar n -normlu uzayda n -daraltan dönüşümünü, n -Chatterjea dönüşümünü ve n -Kannan dönüşümünü aşağıdaki gibi tanıtmışlardır. Aynı zamanda n -Banach uzayında bu tür dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Tanım 26 (n -Daraltan Dönüşüm): (i) $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü her $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in \mathcal{X}$ ve $\theta \in [0,1)$ için

$$\|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \theta \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

eşitliğini sağlıyor ise, f ye n -daraltan denir.

(ii) Eğer her $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, f ye n -genişlemeyen dönüşüm denir (Meng and Song 2017).

Tanım 27 (n -Chatterjea Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü her $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in \mathcal{X}$ ve $\beta \in [0, 1/2)$ için

$$\|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \beta[\|x - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

eşitliğini sağlıyor ise, f ye n -Chatterjea dönüşüm denir (Lazam and Abed 2020).

Tanım 28 (n -Kannan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzay olsun. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü her $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in \mathcal{X}$ ve $\gamma \in [0, 1/2)$ için

$$\|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \gamma[\|x - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

eşitliğini sağlıyor ise, f ye n -Kannan dönüşüm denir (Lazam and Abed 2020).

Teorem 17: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -Banach uzay ve $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı kapalı ve M ye göre sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere her $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in \mathcal{X}$ için f dönüşümü M ye göre daraltan dönüşüm ise, f nin C de tek bir sabit noktası vardır (Sukaesih, Gunawan and Neswan 2015).

Teorem 18: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -Banach uzay ve $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olmak üzere $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. (Bu dönüşüme n -Zamfirescu Dönüşüm denilir.) $\theta \in [0, 1)$, $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ ve $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ olan reel sayılar ve her $x, y \in C$ için aşağıdakilerden en az biri doğru ise, f Picard operatördür (Lazam and Abed 2020).

$$z_1) \|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \theta \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\|,$$

$$z_2) \|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \gamma[\|x - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\|],$$

$$z_3) \|fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \beta[\|x - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\|].$$

Örnek 4: $n = 1$ için basit bir örnek alalım. $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ve $f: C \rightarrow C$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2] \\ -1/2, & x > 2 \end{cases}$$

dönüşümü süreklidir (Lazam and Abed 2020).

(i) Teorem 18 de $\gamma = 1/5$ için f Picard operatördür.

(ii) f , 1-genişlemeyendir ($x = 2$ ve $y = 9/4$ alındığında bunu göstermek kolaydır).

MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 29 (Picard iterasyon metodu): $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay, $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in \mathcal{X}$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = f x_{n-1} = f^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890).

Örnek 5: $\mathcal{X} = [2, 3]$ kümesini alalım. Her $x \in [2, 3]$ için $f: [2, 3] \rightarrow [2, 3]$ dönüşümü, $fx = 5 - x$ şeklinde tanımlansın. Burada f genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(f) = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = u \neq \frac{5}{2}$ noktası için Picard iterasyonu (11),

$$\begin{aligned} x_1 &= f x_0 = 5 - u \\ x_2 &= f x_1 = f^2 x_0 = u \\ x_3 &= f x_2 = f^2 x_1 = f^3 x_0 = 5 - u \\ &\vdots \\ x_n &= f x_{n-1} = f^2 x_{n-2} = \dots = f x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dır. Yani $(5, 5 - u, 5, 5 - u, \dots)$ dizisine karşılık gelir. Bu dizi $u \neq \frac{5}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metodlarını göz önüne almak gerekir.

Tanım 30 (Mann iterasyon metodu): C, H Hilbert uzayının kapalı konveks bir altkümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in H$ için Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) f x_n \quad (12)$$

şeklinde tanımlanır (Mann 1953). Burada $\{\alpha_n\}$ dizisi $[0, 1]$ aralığında bulunmaktadır.

1979 yılında Reich, $\mathcal{X}$ in Frechet türevlenebilir normlu düzgün konveks bir Banach uzayı olduğunu ve $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) = \infty$ şartı sağlandığında (12) deki dizinin f nin sabit noktasına zayıf bir şekilde yakınsadığını göstermiştir.

Tanım 31 (Krasnoselskij iterasyon metodu): $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $f: N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Tanım 32 (Modifiye Krasnoselskii-Mann İterasyon Metodu): H , Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow H$ lineer olmayan bir dönüşüm olsun. $[0,1]$ aralığındaki $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizilerini ele alalım. $x_0 \in H$ için oluşturulan modifiye Krasnoselskii-Mann iterasyon metodu $\{x_n\}$,

$$\begin{cases} y_n = (1 - \alpha_n)x_n; \\ x_{n+1} = (1 - \mu\beta_n)y_n + \mu\beta_n f y_n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Yao, Zhou and Liou 2009).

Hilbert uzaylarında tanımlanan genişlemeyen dönüşüm sınıfları için bu iterasyon yönteminin güçlü yakınsak olduğu aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 19: H , Hilbert uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sabit noktalar kümesi boştan farklı olan genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $[0,1]$ aralığında iki reel dizi olan, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
- (iii) $\beta_n \in [a, b] \subset (0,1)$.

Böylece $x_0 \in H$ ve $\mu \in (0,1]$ için oluşturulan modifiye Krasnoselskii-Mann iterasyonu $\{x_n\}$,

$$\begin{cases} y_n = (1 - \alpha_n)x_n; \\ x_{n+1} = (1 - \mu\beta_n)y_n + \mu\beta_n f y_n, \end{cases}$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Yao, Zhou and Liou 2009).

Zenginleştirilmiş Dönüşümlerin Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu başlık altında zenginleştirilmiş dönüşüm sınıflarının tanımlarına ve bazı sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

Tanım 33 (Zenginleştirilmiş Kesin Pseudocontractive Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\|^2 \leq (k + 1)^2 \|x - y\|^2 + b \|x - y - (fx - fy)\|^2$$

olacak şekilde $k \in [0, \infty)$ ve $b < 1$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, b) - zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşüm de denebilir (Berinde 2018).

Örnek 6: (i) Tanım 33 te $k = 0$ alındığında kesin pseudocontractive dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir kesin pseudocontractive dönüşümün $(0, b)$ -zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) Herhangi bir k -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm, her $b < 1$ için (k, b) -zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşümdür (Berinde 2018).

Tanım 34 (Yarı-Kompakt): C, H Hilbert uzayının bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. $\{u_n\}, H$ de sınırlı bir dizi ve $\{fu_n - u_n\}$ güçlü yakınsak olsun. $\{u_n\}$ dizisinin $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi güçlü yakınsak ise, f dönüşümüne yarı-kompakt denir (Petryshyn 1966).

Teorem 20: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ (k, b) -zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive ve yarı-kompakt dönüşümünü alalım. O halde f nin sabit noktalar kümesi $Fix(f)$ boştan farklı bir kümedir. Her $x_0 \in C$ başlangıç noktası ve $0 < \lambda < 1 - k$ olacak şekilde λ sabit sayısı için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Berinde 2018).

Teorem 21: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ (k, b) -zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşümünü ele alalım. O halde f nin sabit noktalar kümesi $Fix(f)$ boştan farklı bir kümedir. Her $x_0 \in C$ başlangıç noktası ve $0 < \lambda < 1 - k$ olacak şekilde λ sabit sayısı için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

f nin sabit noktasına zayıf bir şekilde yakınsar (Berinde 2018).

Teorem 22: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ (k, b) -zenginleştirilmiş kesin pseudocontractive dönüşümünü ele alalım. O halde $Fix(f) \neq \emptyset$ dır. Her $x_0 \in X$ başlangıç noktası ve $k < \alpha_n < 1$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$ kontrol dizisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - k)(1 - \alpha_n) = \infty$$

şartını sağlasın. Bu durumda bazı $\lambda \in (0, 1)$ için Krasnoselskij-Mann iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda\alpha_n)x_n + \lambda\alpha_nf x_n$$

f nin sabit noktasına zayıf bir şekilde yakınsar (Berinde 2018).

Tanım 35 (Zenginleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq (k + 1)\|x - y\| \quad (14)$$

olacak şekilde $k \in [0, \infty)$ sayısı var ise, f ye zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye k -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm de denilir (Berinde 2019a).

Tanım 35 te $k = 0$ alındığında genişlemeyen dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir genişlemeyen dönüşümün zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

Genişlemeyen dönüşümler gibi herhangi bir zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı da süreklidir (Berinde 2019a).

Örnek 7: $\mathcal{X}: \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in \mathcal{X}$ için $fx = \frac{1}{x}$ dönüşümünü alalım.

- (i) f dönüşümü $L = 4$ Lipschitz sabitine sahiptir. Fakat f genişlemeyen dönüşüm değildir.
- (ii) f , $3/2$ -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür.
- (iii) $Fix(f) = \{1\}$ dir. Fakat f quasi-genişlemeyen değildir (Berinde 2019a).

Çözüm: (i) Farz edelim ki f genişlemeyen dönüşüm olsun. O halde her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$|fx - fy| \leq |x - y|$$

şartı sağlanmalıdır. Fakat $x = 1$ ve $y = 1/2$ için $1 \leq 1/2$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani f genişlemeyen dönüşüm değildir.

(ii) Zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü (14) göz önüne alındığında

$$\left|k(x - y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq (k + 1)|x - y| \Leftrightarrow \left|k - \frac{1}{xy}\right| \cdot |x - y| \leq (k + 1)|x - y|$$

olur ve her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\left|k - \frac{1}{xy}\right| \leq k + 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlik herhangi bir $k \geq 3/2$ için sağlanır. Dolayısıyla f , $3/2$ -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür.

(iii) Farz edelim ki f quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun. O halde her $x \in \mathcal{X}$ için

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| \leq |x - 1|$$

olur. Eşitsizlikte $x = 1/2$ alındığında $1 \leq 1/2$ elde edilir bu ise bir çelişkidir. Yani f quasi-genişlemeyen değildir.

Teorem 23: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ k -zenginleştirilmiş genişlemeyen ve yarı-kompakt dönüşümünü alalım. O halde f nin sabit noktalar kümesi $Fix(f)$ boştan farklı konveks bir kümedir. Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Berinde 2019a).

Teorem 24: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ k -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü olmak üzere $Fix(f) = \{p\}$ olarak ele alalım. Her $x_0 \in C$ başlangıç noktası için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

f nin sabit noktası olan p ye zayıf bir şekilde yakınsar (Berinde 2019a).

Teorem 24 te $Fix(f) = \{p\}$ şartı, aşağıdaki daha genel sonucu elde etmek için kaldırılabilir.

Teorem 25: C, H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ k -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. Her $x_0 \in C$ başlangıç noktası için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

f nin sabit noktasına zayıf bir şekilde yakınsar (Berinde 2019a).

Teorem 26: H , Hilbert uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sabit noktalar kümesi boştan farklı olan zenginleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $[0,1]$ aralığında iki reel dizi olan, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
- (iii) $\beta_n \in [a, b] \subset (0,1)$.

Böylece $x_0 \in H$ ve $\mu \in (0,1]$ için oluşturulan modifiye Krasnoselskii-Mann iterasyonu $\{x_n\}$,

$$\begin{cases} y_n = (1 - \alpha_n)x_n; \\ x_{n+1} = (1 - \mu\beta_n)y_n + \mu\beta_nf y_n, \end{cases}$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Berinde 2022).

Tanım 36 (Zenginleştirilmiş Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm): $\mathcal{X}$ Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $k \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \|k(x - y) + fx - fy\| &\leq \theta(k + 1)\|x - y\| + \beta \left[\|(k + 1)(x - y) + y - fy\| \right] \\ &\quad + \gamma[\|x - fx\| + \|y - fy\|] \end{aligned} \quad (15)$$

şartını sağlayan $\theta + 2\beta + 2\gamma \leq 1$ olacak şekilde $\theta, \beta, \gamma \in [0, 1]$ reel sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir (Deshmukh 2020).

Sonuç 2: (i) Denklem (15) te $k = 0$ alındığında Hardy-Rogers dönüşümü elde edilir. Yani $(0, \theta, \beta, \gamma)$ sabitleri için herhangi zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm, Hardy-Rogers dönüşüme indirgenir.

(ii) Denklem (15) te $\beta = \gamma = 0$ alındığında zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm Tanım 35 deki zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüme indirgenir.

(iii) Denklem (15) te $\beta = \theta = 0$ alındığında zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm Tanım 44 deki zenginleştirilmiş Kannan dönüşüme indirgenir.

(iv) Denklem (15) te $\theta = \gamma = 0$ alındığında zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm Tanım 47 deki zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüme indirgenir.

Tanım 37 (Zenginleştirilmiş Daraltan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \theta\|x - y\| \quad (16)$$

olacak şekilde $\theta \in [0, k + 1)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, θ) - zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm de denilir (Berinde and Pacurar 2020).

Örnek 8: (i) Tanım 37 de $k = 0$ alındığında daraltan dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir daraltan dönüşümün $(0, \theta)$ -zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) $\mathcal{X} = [0, 1]$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat f daraltan bir dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $c \in [0, 1)$ için

$$|x - y| \leq c|x - y|$$

olup herhangi $x \neq y$ için $1 \leq c < 1$ olur ve bu bir çelişkidir. Denklem (16) da $\theta \in [0, k + 1)$ ve $k \in [0, \infty)$ olarak alındığında

$$|(k - 1)(x - y)| \leq \theta|x - y|$$

elde edilir. Burada her $x, y \in [0, 1]$ için $0 < k < 1$ ve $\theta = 1 - k$ seçildiğinde bu eşitsizlik sağlanır. Yani her $k \in (0, 1)$ için f dönüşümü $(k, 1 - k)$ -zenginleştirilmiş daraltan dönüşümdür. $Fix(f) = \{1/2\}$ dir (Berinde and Pacurar 2020).

Sonuç 3: Örnek (8) (ii) deki f için, Picard iterasyonu yani $x_{n+1} = 1 - x_n$ dizisi, f nin tek bir sabit noktası olan $\frac{1}{2}$ hariç herhangi bir x_0 a yakınsamaz. Bu sebeple zenginleştirilmiş daraltan dönüşümlerin güçlü yakınsama teoremleri için Krasnoselskij iterasyon yöntemi kullanılmıştır.

Teorem 27: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$(i) Fix(f) = \{p\},$$

$$(ii) Her x_0 \in \mathcal{X} \text{ başlangıç noktası için}$$

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

$$(iii) n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } i = 1, 2, 3, \dots \text{ için}$$

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{\theta}{b+1}$ dir (Berinde and Pacurar 2020).

Sonuç 4: (i) Teorem 27 de $k = 0$ alındığında Banach uzaylarında klasik Banach daraltan sabit nokta teoremi elde edilir.

(ii) Zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm sınıfı Berinde ve Pacurar (2019a) tarafından tanıtılmış ve incelenmiştir. Örnek (ii) deki f dönüşümü aynı anda zenginleştirilmiş Kannan dönüşümü ve zenginleştirilmiş daraltan dönüşümü olmasına rağmen, zenginleştirilmiş Kannan dönüşümler ile zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarının birbirlerinden bağımsız olduğu kolayca görülebilir. Çünkü Rhodes (1977), Kannan daraltan dönüşüm sınıfının Banach daraltan dönüşüm sınıfından bağımsız olduğunu göstermiştir.

Sonuç 5: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay, $r > 0$, $B = B(x_0, r): \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| < r\}$ ve $f: B \rightarrow \mathcal{X}$, (k, θ) -zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm olsun. Eğer $\|fx_0 - x_0\| < (k + 1 - \theta)r$ ise, f nin sabit noktası vardır (Berinde and Pacurar 2020).

Teorem 28: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. N pozitif bir tam sayı olacak şekilde f^N , (k, θ) -zenginleştirilmiş daraltan dönüşümünü ele alalım. O halde her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$(i) \text{ Fix}(f) = \{p\}$$

(ii) Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f^N x_n$$

şeklinde oluşturulan iterasyon metodu p ye yakınsar (Berinde and Pacurar 2020).

Tanım 38 (Zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus Daraltan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq a\|x - y\| + b(\|x - fx\| + \|y - fy\|)$$

olacak şekilde $a + 2b < 1$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \geq 0$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye (k, a, b) -zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus daraltan dönüşüm denir (Berinde and Pacurar 2021a).

Sonuç 6: (i) Tanım 38 de $b = 0$ alındığında zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus dönüşüm, Tanım 37 deki zenginleştirilmiş daraltan dönüşüme indirgenir.

(ii) Tanım 38 de $a = 0$ alındığında zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus dönüşüm Tanım 44'teki zenginleştirilmiş Kannan dönüşüme indirgenir.

Teorem 29: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (k, a, b) -zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$(i) \text{ Fix}(f) = \{p\},$$

(ii) Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü bir şekilde yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{a+b}{1-b}$ dir (Berinde and Pacurar 2021a).

Sonuç 7: Teorem 29 da, sırasıyla $b = 0$ ve $a = 0$ alındığında Teorem 27 ve Teorem 35 elde edilir.

Tanım 39 (Genelleştirilmiş Zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus Daraltan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için,

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \alpha(x, y)\|x - y\| + b(x, y)(\|x - fx\| + \|y - fy\|)$$

olacak şekilde $k \in [0, \infty)$, $\sup_{x, y \in \mathcal{X}} (a(x, y) + 2b(x, y)) = \theta < 1$ ve $a, b: \mathcal{X}^2 \rightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan fonksiyonları var ise, f ye genelleştirilmiş (k, a, b) -zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus daraltan dönüşüm denir (Berinde and Pacurar 2021a).

Aşağıdaki teorem, Teorem 29 un genelleştirilmiş halidir.

Teorem 30: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ genelleştirilmiş (k, a, b) -zenginleştirilmiş Ciric-Reich-Rus dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) = \{p\}$ dir.

(ii) Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü bir şekilde yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{a+b}{1-b}$ dir (Berinde and Pacurar 2021a).

Tanım 40 (Zenginleştirilmiş Quasi-Daraltan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq c \max \left\{ \|(k+1)(x - y)\|, \|x - fx\|, \|y - fy\|, \|k(x - y) + x - fy\|, \|k(y - x) + y - fx\| \right\}$$

şartını sağlayan $k \in [0, \infty)$ ve $c \in [0, 1)$ sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş (k, c) -quasi-daraltan dönüşüm denir (Abbas, Anjum and Berinde 2021).

Örnek 9: (i) Tanım 40 da $k = 0$ alındığında quasi-daraltan dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir quasi-daraltan dönüşümün $(0, c)$ -zenginleştirilmiş quasi-daraltan dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) $\mathcal{X} = [0, 1]$ ve $x \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , quasi-daraltan bir dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $c \in [0, 1)$ için

$$|x - y| \leq c \max\{|x - y|, |2x - 1|, |2y - 1|, |y + x - 1|, |x + y - 1|\}$$

olup burada $x = 0$ ve $y = 1$ için $1 \leq c < 1$ olur ve bu bir çelişkidir. Diğer yandan f dönüşümü her $x, y \in [0,1]$ ve $k = 1$ için zenginleştirilmiş quasi-daraltan dönüşümdür (Abbas, Anjum and Berinde 2021).

Tanım 41 (f_λ -Orbital Banach Uzayı): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $A \subset X$ için

$$O(f, x, n) = \{x, fx, \dots, f^n x\}$$

$$O(f, x, \infty) = \{x, fx, f^2 x, \dots\}$$

olsun. Bazı $x \in X$ için $O(f, x, \infty)$ içinde bulunan her Cauchy dizisi X de yakınsak ise, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına f_λ -orbital Banach uzayı denir (Ćirić 1974).

Teorem 31: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $f: X \rightarrow X$ (k, c) -zenginleştirilmiş quasi-daraltan dönüşüm olsun. O halde f dönüşümü, $p \in X$ olmak üzere tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca X in f_λ -orbital Banach uzayı olması koşuluyla, herhangi $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_{n-1} + \lambda f x_{n-1}$$

şeklinde oluşturulan iterasyon yöntemi $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, p ye yakınsar. Burada $\lambda = \frac{1}{b+1}$ dir (Abbas, Anjum and Berinde 2021).

Tanım 42 (Zayıf Zenginleştirilmiş Daraltan): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq (k + 1)(\|x - y\| - \phi(\|x - y\|))$$

$\phi, (0, \infty)$ üzerinde pozitif tanımlı olacak şekilde $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü ve $k \in [0, \infty)$ sayısı var ise, f dönüşümüne (k, ϕ) -zenginleştirilmiş zayıf daraltan dönüşüm denir (Abbas, Anjum and Berinde 2021).

Teorem 32: $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: X \rightarrow X$ (k, ϕ) -zenginleştirilmiş zayıf daraltan dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise, f dönüşümü X de tek bir sabit noktaya sahiptir (Abbas, Anjum and Berinde 2021).

(i) ϕ sürekli ve azalmayandır

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$.

Tanım 43 (Zenginleştirilmiş Hemen Hemen Daraltan Dönüşüm): $(X, \|\cdot\|)$ lineer normlu uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \theta \|x - y\| + L \|k(x - y) + fx - fy\|$$

şartını sağlayan $k \in [0, \infty)$, $\theta \in (0, k + 1)$ ve $L \geq 0$ sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş hemen hemen (k, θ, L) -daraltan dönüşüm denir (Berinde and Pacurar 2021b).

Sonuç 8: (i) Tanım 43 te $k = 0$ ve $\theta = \delta$ alındığında hemen hemen daraltan dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir hemen hemen daraltan dönüşümün $(0, \delta, L)$ -zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) Herhangi (k, θ) -zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm, $(k, \theta, 0)$ -zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşümdür.

(iii) Herhangi (k, γ) -zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm, zenginleştirilmiş hemen hemen $\left(k, \frac{\gamma}{1-\gamma}, \frac{2\gamma}{1-\gamma}\right)$ -daraltandır.

(iv) Herhangi (k, β) -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüm, zenginleştirilmiş hemen hemen $\left(k, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{2\beta}{1-\beta}\right)$ -daraltandır (Berinde and Pacurar 2021b).

Teorem 33: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ genelleştirilmiş (k, θ, L) -zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) \neq \emptyset$,

(ii) Herhangi $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $p \in Fix(f)$ ye güçlü bir şekilde yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{\theta}{k+1}$ dir (Berinde and Pacurar 2021b).

Örnek 10: $\mathcal{X} = \left[0, \frac{4}{3}\right]$ ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$fx = \begin{cases} 1 - x, & x \in \left[0, \frac{2}{3}\right) \\ 2 - x, & x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümünü alalım. Buradan $Fix(f) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ olup aşağıdakiler sağlanır (Berinde and Pacurar 2021b).

(i) Her $\theta \in (0, 2)$ için f dönüşümü $(1, \theta, 3)$ -zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşümdür.

(ii) f dönüşümü hemen hemen daraltan değildir.

(iii) f , zenginleştirilmiş daraltan, zenginleştirilmiş Kannan veya zenginleştirilmiş

Chatterjea dönüşümü değildir.

- (iv) f dönüşümü, ne genişlemeyendir nede quasi genişlemeyendir.
- (v) f dönüşümü zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm değildir.

Teorem 34: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (k, θ, L) -zenginleştirilmiş hemen hemen daraltan dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|fx - fy\| \leq \delta_1 \|x - y\| + L_1 \|x - fx\|$$

olacak şekilde $\delta_1 \in (0,1)$ ve $L_1 \geq 0$ sayıları var ise bu durumda

- (i) $Fix(f) = \{p\}$,
- (ii) Herhangi $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü bir şekilde yakınsar.

- (iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{\theta}{k+1}$ dir.

- (iv) Krasnoselskij iterasyonun yakınsama oranı $\|x_n - p\| \leq \delta \|x_{n-1} - p\|$ şeklindedir

(Berinde and Pacurar 2021b).

Tanım 44 (Zenginleştirilmiş Kannan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \gamma[\|x - fx\| + \|y - fy\|] \quad (17)$$

olacak şekilde $\gamma \in [0, 1/2)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, γ) -zenginleştirilmiş Kannan dönüşümü de denilir (Berinde and Pacurar 2021c).

Örnek 11: (i) Tanım 44 te $k = 0$ alındığında Kannan dönüşümü elde edilir. Buradan herhangi bir Kannan dönüşümünün $(0, \gamma)$ -zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) $\mathcal{X} = [0, 1]$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , genişlemeyen bir dönüşümdür; fakat Kannan dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $\gamma \in [0, 1/2)$ için

$$|x - y| \leq \gamma[|2x - 1| + |2y - 1|],$$

olup burada $x = 1/2$ ve $y = 1$ için $1 \leq 2\gamma < 1$ olur ve bu bir çelişkidir. Zenginleştirilmiş Kannan dönüşümü dikkate alındığında

$$|(k-1)(x-y)| \leq \gamma[|2x-1| + |2y-1|]$$

elde edilir. Herhangi $\gamma \in [0, 1/2)$ için $2\gamma = |k-1|$ seçildiğinde $2|x-y| \leq |2x-1| + |2y-1|$ olur. Bu da $k < 1$ için mümkün olduğundan $k = 1 - 2\gamma > 0$ dir. Böylece f herhangi bir $\gamma \in [0, 1/2)$ için $(1 - 2\gamma, \gamma)$ -zenginleştirilmiş Kannan dönüşümüdür. $Fix(f) = \{1/2\}$ dir (Berinde and Pacurar 2021c).

Örnek 11 (ii) deki f için, $x_{n+1} = 1 - x_n$ dizisi, f nin tek bir sabit noktası olan $\frac{1}{2}$ hariç herhangi bir x_0 a yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu f dönüşümünün sabit noktasına yakınsamaz (Berinde and Pacurar 2021c). Bu ise aşağıdaki zenginleştirilmiş Kannan dönüşümler için oluşturulan güçlü yakınsama teoreminin ispatında Krasnoselskij iterasyon metodu gibi daha ayrıntılı olan sabit nokta iterasyon metoduna ihtiyaç olduğunu gösterir.

Teorem 35: $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: X \rightarrow X$ (k, γ) -zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$(i) Fix(f) = \{p\},$$

$$(ii) Her x_0 \in X \text{ başlangıç noktası için}$$

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü bir şekilde yakınsar.

$$(iii) n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } i = 1, 2, 3, \dots \text{ için}$$

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ dir (Berinde and Pacurar 2021c).

Sonuç 9: (i) Herhangi bir Kannan dönüşümün, kesin quasi-daraltan olduğu Berinde (2007a) tarafından gösterilmiştir. Yani her $x, y \in X$ ve $p \in Fix(f)$ için

$$\|fx - p\| \leq a\|x - p\|$$

dir. Öte yandan Örnek 11 (ii) deki f kesin quasi-daraltan değildir. Dolayısıyla, zenginleştirilmiş Kannan dönüşüm sınıfı, kesin quasi-daraltan dönüşüm sınıfından daha geniş bir dönüşüm sınıfıdır.

(ii) Teorem 35 te $k = 0$ alındığında Banach uzaylarda Kannan (1968) tarafından elde edilen klasik Kannan sabit nokta teoremi elde edilir.

Tanım 45 (Zenginleştirilmiş Bianchini Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx + fy\| \leq h \max\{\|x - fx\|, \|y - fy\|\}$$

olacak şekilde $h \in [0,1)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş Bianchini dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, h) -zenginleştirilmiş Bianchini dönüşüm de denebilir (Berinde and Pacurar 2021c).

Örnek 12: (i) Tanım 45 te $k = 0$ alındığında Bianchini dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir Bianchini dönüşümün $(0, h)$ -zenginleştirilmiş Bianchini dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) Herhangi bir (k, γ) -zenginleştirilmiş Kannan dönüşümü, $u + v \leq 2\max\{u, v\}$ eşitsizliği açısından $h = 2\gamma$ olan bir (k, h) -zenginleştirilmiş Bianchini dönüşümüdür. Bu, Örnek 11 (ii) de verilen genişlemeyen dönüşümün herhangi bir $\gamma \in (0, 1/2)$ için $(2(1 - \gamma), 2\gamma)$ -zenginleştirilmiş Bianchini dönüşümü olduğu anlamına gelir. Bu dönüşüm sınıfı için Picard iterasyon metodu yakınsak olmak zorunda değildir. Dolayısıyla, zenginleştirilmiş Bianchini dönüşüm sınıfının yakınsaklığı için Krasnoselskij iterasyon metoduna ihtiyaç duyulmuştur (Berinde and Pacurar 2021c).

Teorem 36: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, (k, h) -zenginleştirilmiş Bianchini dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) = \{p\}$,

(ii) Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{h^i}{1-h} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dır (Berinde and Pacurar 2021c).

Tanım 46 (Zayıf Zenginleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm): $C, (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayının boştan farklı alt kümesi ve $f: C \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ ve $\alpha \in [a, 1)$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq (k + 1)\|x - y\| + L \left\| \begin{matrix} (1 - \alpha)(k + 1)x_0 \\ + \alpha(kx + fx) - (k + 1)y \end{matrix} \right\|$$

olacak şekilde $a \in (0,1)$ ve $k, L \geq 0$ sayıları var ise, f ye zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, L) -zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm de denebilir (Suantai, Chumpungam and Sarmmeta 2021).

Eğer $f: C \rightarrow C$ zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ise, her $x \in X$ için f , $(k, 0)$ -zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür.

Aşağıdaki örnekte f dönüşümü (k, L) - zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat zenginleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Örnek 13: $C = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$ ve her $x, y \in C$ için $f: C \rightarrow C$,

$$fx = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right] \\ 4, & x \in (\sqrt{2}, 4] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , zenginleştirilmiş genişlemeyen değildir; fakat $\frac{1}{2}$ için $(16, 200)$ -zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür.

Çözüm: 1. Durum: $x, y \in (\sqrt{2}, 4]$ olduğu açıktır.

2. Durum: $x, y \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ ve $x < y$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \left| 16(x - y) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| &= |x - y| \left| 16 - \frac{x + y}{x^2 y^2} \right| \\ &\leq 16|x - y|, \\ &\leq 17|x - y| + L \left| \begin{aligned} &(1 - \alpha)(17)\frac{1}{2} \\ &+ \alpha \left(16x + \frac{1}{x^2} \right) - 17y \end{aligned} \right|, \end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha \in \left[\frac{99}{100}, 1\right]$ dir.

3. Durum: $x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ ve $y \in (\sqrt{2}, 4]$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left| (1 - \alpha)(17) \left(\frac{1}{2} \right) + \alpha \left(16x + \frac{1}{x^2} \right) - 17y \right| \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$\left| (1 - \alpha)(17) \left(\frac{1}{2} \right) + \alpha(16y + 4) - 17x \right| \geq 1.$$

Burada $\alpha \in \left[\frac{99}{100}, 1\right]$ dir.

Her $x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ ve $y \in (\sqrt{2}, 4]$ için $\left|16(x - y) + \frac{1}{x^2} - 4\right| \leq 100$ olduğundan, her $\alpha \in \left[\frac{99}{100}, 1\right]$ için

$$\left|16(x - y) + \frac{1}{x^2} - 4\right| \leq 17|x - y| + 200 \left| (1 - \alpha)(17) \left(\frac{1}{2}\right) + \alpha \left(16x + \frac{1}{x^2}\right) - 17y \right|$$

ve

$$\left|16(y - x) + 4 - \frac{1}{x^2}\right| \leq 17|y - x| + 200 \left| (1 - \alpha)(17) \left(\frac{1}{2}\right) + \alpha(16y + 4) - 17x \right|$$

olur. Böylece f , $(16, 200)$ -zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür. Şimdi f nin zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterelim. $x = \sqrt{2}$ ve $y = 3$ alındığında her $k \geq 0$ için

$$|k(\sqrt{2} - 3) + 2 - 4| = k(3 - \sqrt{2}) + 2 > (k + 1)(3 - \sqrt{2})$$

elde edilir. Yani f , zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm değildir (Suantai, Chumpungam and Sarnmeta 2021).

Teorem 37: $C, (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayının boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f, x_0 \in C$ ye göre (b, L) -zayıf zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ise, f nin C de sabit noktası vardır (Suantai, Chumpungam and Sarnmeta 2021).

Tanım 47 (Zenginleştirilmiş Chatterjea Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq \beta \left[\|(k + 1)(x - y) + y - fy\| + \|(k + 1)(y - x) + x - fx\| \right] \quad (18)$$

olacak şekilde $\beta \in [0, 1/2)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, β) -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümü de denilir (Berinde and Pacurar 2021d).

Örnek 14: Tüm Banach daraltan dönüşümlerde daralma sabiti $\theta < \frac{1}{3}$ ve tüm Kannan ve Chatterjea daraltan dönüşümlerinde daralma sabitini $\gamma < \frac{1}{4}$ olarak alındığında, $k = 0$ için (18) eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten de (2) eşitsizliğinde $\theta < \frac{1}{3}$ olarak alındığında

$$d(fx, fy) \leq \theta[d(x, fy) + d(fy, fx) + d(fx, y)]$$

olur ve gerekli düzenlemeler ile

$$d(fx, fy) \leq \frac{\theta}{1-\theta} [d(x, fy) + d(fx, y)]$$

elde edilir. Burada $\theta < \frac{1}{3}$ olduğundan $\frac{\theta}{1-\theta} < \frac{1}{2}$ olur. Yani $\theta < \frac{1}{3}$ sabiti için her daraltan dönüşüm $(0, \beta)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümdür.

Benzer şekilde (4) eşitsizliğinde $\gamma < \frac{1}{4}$ olarak alındığında

$$d(fx, fy) \leq \frac{\gamma}{1-2\gamma} [d(x, fy) + d(fx, y)]$$

elde edilir. Burada $\gamma < \frac{1}{4}$ olduğundan $\frac{\gamma}{1-2\gamma} < \frac{1}{2}$ olur. Yani $\gamma < \frac{1}{4}$ sabiti için her Kannan ve Chatterjea daraltan dönüşüm $(0, \beta)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümdür (Berinde and Pacurar 2021d).

Örnek 15: (i) Tanım 47 de $k = 0$ alındığında Chatterjea dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir Chatterjea dönüşümün $(0, \beta)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) $\mathcal{X} = [0,1]$ ve her $x, y \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , genişlemeyen bir dönüşümdür; fakat Chatterjea dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $\beta \in [0, 1/2)$ için

$$|x - y| \leq 2\beta |x + y - 1|$$

olup $x = 0$ ve $y = 1$ için bu bir çelişkidir. Zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümü dikkate alındığında

$$|(k-1)(x-y)| \leq \beta \left[\begin{array}{l} |(k+1)x - (k-1)y - 1| \\ + |(k+1)y - (k-1)x - 1| \end{array} \right] \quad (19)$$

elde edilir. (19) eşitsizliğini elde etmek için

$$\begin{aligned} 2k|x-y| &= |[k+1)x - (k-1)y - 1] - [(k+1)y - (k-1)x - 1]| \\ &\leq |(k+1)x - (k-1)y - 1| + |(k+1)y - (k-1)x - 1| \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önüne alındığında belirli bir $\beta \in [0, 1/2)$ için $\frac{|k-1|}{2k} \leq \beta$ dir. Burada tek olasılık $k < 1$ olduğundan $\beta = \frac{1-k}{2k}$ ve $k = \frac{1}{\beta+2}$ olur. Böylece f herhangi bir $\beta \in [0, 1/2)$ için $(\frac{1}{\beta+2}, \beta)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümdür. $Fix(f) = \{1/2\}$ dir (Berinde and Pacurar 2021d).

Örnek 15 (ii) deki f için, $x_{n+1} = 1 - x_n$ dizisi, f nin tek bir sabit noktası olan $\frac{1}{2}$ hariç herhangi bir x_0 a yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu f dönüşümünün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla 2019 yılında Berinde ve Pacurar zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümler için oluşturulan güçlü yakınsama teoreminin ispatında Krasnoselskij iterasyon metodunu kullanmışlardır.

Teorem 38: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (k, β) -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$(i) \text{Fix}(f) = \{p\},$$

$$(ii) \text{ Her } x_0 \in \mathcal{X} \text{ başlangıç noktası için}$$

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

$$(iii) n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } i = 1, 2, 3, \dots \text{ için}$$

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|$$

dir. Burada $\delta = \frac{b}{1-b}$ dir (Berinde and Pacurar 2021d).

Sonuç 10: (i) Herhangi bir Chatterjea dönüşümün, kesin quasi-daraltan olduğu Berinde (2007b) tarafından gösterilmiştir. Yani her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $p \in \text{Fix}(f)$ için

$$\|fx - p\| \leq \theta \|x - p\|$$

dir. Diğer yandan Örnek 15 (ii) deki f kesin quasi-daraltan değildir. Dolayısıyla, zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşüm sınıfı, kesin quasi-daraltan dönüşüm sınıfından daha geniş bir dönüşüm sınıfıdır.

(ii) Teorem 38 de $k = 0$ alındığında Banach uzaylarda klasik Chatterjea sabit nokta teoremi elde edilir.

Tanım 48 (Zenginleştirilmiş Chatterjea Tipi Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq h \max \left\{ \|(k + 1)(x - y) + y - fy\|, \|(k + 1)(y - x) + x - fx\| \right\} \quad (20)$$

olacak şekilde $h \in [0, 1)$ ve $k \in [0, \infty)$ sayıları var ise, f ye zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için f ye (k, h) -zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşümü de denilir (Berinde and Pacurar 2021d).

Örnek 16: (i) Tanım 48 de $k = 0$ alındığında Chatterjea tipi dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir Chatterjea tipi dönüşümün $(0, h)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

(ii) Herhangi bir (k, β) -zenginleştirilmiş Chatterjea dönüşümü, $u + v \leq \max\{u, v\}$ eşitsizliği açısından $h = 2\beta$ olan bir (k, h) -zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşümdür. Bu, Örnek 15 (ii) de verilen genişlemeyen dönüşümün herhangi bir $\beta \in (0, 1/2)$ için $(2(1 - \beta), 2\beta)$ -zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşüm olduğu anlamına gelir. Bu dönüşüm için Picard iterasyon metodu yakınsak değildir. Bu nedenle zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşümler için oluşturulan yakınsama teoreminin ispatında Krasnoselskij iterasyon metodu kullanılır (Berinde and Pacurar 2021d).

Teorem 39: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (k, h) -zenginleştirilmiş Chatterjea tipi dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) = \{p\}$,

(ii) Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye yakınsar (Berinde and Pacurar 2021d).

Zenginleştirilmiş $\mathcal{A}$ daraltan ve zenginleştirilmiş $\mathcal{A}'$ daraltan dönüşüm sınıflarını tanıtmak için, Mondal, Garai ve Dey aşağıdaki koşulları sağlayan $l: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ dönüşümünü tanımlamışlardır.

$(\mathcal{A}_1)$ l sürekli,dir,

$(\mathcal{A}_2)$ Her $r, s \in \mathbb{R}_+$ için $r \leq l(s, r, s)$ veya $r \leq l(r, s, s)$ olacak şekilde $r \leq ks$ olan $k \in [0, 1)$ vardır.

$(\mathcal{A}'_1)$ l sürekli,dir,

$(\mathcal{A}'_2)$ Her $r, s \in \mathbb{R}_+$ için $r \leq l(r, s, s)$ veya $r \leq l(s, s, r)$ olacak şekilde $r \leq ks$ olan $k \in [0, 1)$ vardır.

$(\mathcal{A}'_3)$ Her $r, s, t \in \mathbb{R}_+$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda l(r, s, t) \leq l(\lambda r, \lambda s, \lambda t)$ dir,

$(\mathcal{A}'_4)$ Eğer $t \leq t_1$ ise her $r, s, t, t_1 \in \mathbb{R}_+$ için $l(r, s, t) \leq l(r, s, t_1)$ dir,

$(\mathcal{A}'_5)$ Eğer $r \leq l(r, r, r)$ ise $r = 0$ dir.

Aşağıda, $\mathcal{A}$ dönüşüm sınıfına ait birkaç örnek verilmiştir.

(i) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha(s + t)$ dir.

(ii) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha \max\{s, t\}$ dir.

(iii) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha \max\{r, s, t\}$ dir.

(iv) $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha_1 r + \alpha_2 s + \alpha_3 t$

dir.

Aşağıda, $\mathcal{A}'$ dönüşüm sınıfına ait birkaç örnek verilmiştir.

(i) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha(s + t)$ dir.

(ii) $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha(r + s + t)$ dir.

(iii) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $l(r, s, t) = \alpha \max\{s, t\}$ dir (Mondal, Garai and Dey 2021).

Tanım 49 (Zenginleştirilmiş $\mathcal{A}$ -Daraltan) $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ ($x \neq y$) ve $k \in [0, \infty)$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq l((k + 1)\|x - y\|, \|x - fx\|, \|y - fy\|)$$

olacak şekilde $l \in \mathcal{A}$ var ise, f ye zenginleştirilmiş $\mathcal{A}$ -daraltan dönüşüm denir (Mondal, Garai and Dey 2021).

Teorem 40: $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ zenginleştirilmiş $\mathcal{A}$ -daraltan dönüşüm olsun. O halde f tek bir sabit noktaya sahiptir. Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası ve $0 < \lambda \leq 1$ sabiti için oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Mondal, Garai and Dey 2021).

Tanım 50 (Zenginleştirilmiş $\mathcal{A}'$ -Daraltan) $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ ($x \neq y$) ve $k \in [0, \infty)$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy\| \leq l((k + 1)\|x - y\|, \|(k + 1)(x - y) + y - fy\|,$$

$$\|(k + 1)(y - x) + x - fx\|)$$

olacak şekilde $l \in \mathcal{A}'$ var ise, f ye zenginleştirilmiş $\mathcal{A}'$ -daraltan dönüşüm denir (Mondal, Garai and Dey 2021).

Teorem 41: $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ zenginleştirilmiş $\mathcal{A}'$ -daraltan dönüşüm olsun. O halde f tek bir sabit noktaya sahiptir. Her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası ve $0 < \lambda \leq 1$ sabiti yardımıyla oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n$$

f nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Mondal, Garai and Dey 2021).

Banach uzaylarındaki daraltan dönüşümlerin çoğunda, eğer dönüşüm Banach uzayının kapalı bir alt kümesi üzerinde tanımlı ise, o zaman dönüşümün sabit bir noktaya sahip olduğunu görüyoruz. Ancak zenginleştirilmiş daraltan dönüşüm sınıflarında bu genellikle doğru değildir. Daha kesin olarak, yukarıdaki iki teoremden, eğer f dönüşümü bir Banach uzayının kapalı bir alt kümesinde tanımlı ise, o zaman f sabit bir noktaya sahip olmayabilir.

Tanım 51 (Zenginleştirilmiş Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): $C, (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ ve $y \in F(f) \neq \emptyset$ için

$$\|k(x - y) + f(x) - y\| \leq (k + 1)\|x - y\|$$

olacak şekilde $k \in [0, \infty)$ sayısı var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Shukla and Pant 2022).

Her quasi-genişlemeyen dönüşüm, 0-zenginleştirilmiş quasi-genişlemeyen dönüşümdür.

Her k -zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm, k -zenginleştirilmiş quasi-genişlemeyen dönüşümdür, ancak tersi doğru değildir (Shukla and Pant 2022).

Teorem 42: $C, \mathcal{X}$ düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks bir altkümesi ve $f: C \rightarrow C$ k -zenginleştirilmiş quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x_1 \in C$ için

$$\begin{cases} y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n f(x_n) \\ x_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n \left[\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)y_n + \frac{1}{b+1}f(y_n) \right] \end{cases}$$

şeklinde oluşturulan iterasyon yöntemi $\{x_n\}$, $F(f)$ deki bir noktaya kuvvetle yakınsar. Burada $\alpha_n \in (c, d)$, $\beta_n \in \left(\frac{c}{b+1}, \frac{d}{b+1}\right)$ ve $c, d \in (0, 1)$ dir. (Shukla and Pant 2022).

Tanım 52 (Suzuki-Zenginleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm): $C, (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2(b+1)}\|x - f(x)\| \leq \|x - y\| \text{ iken } \|k(x - y) + f(x) - f(y)\| \leq (b + 1)\|x - y\| \quad (21)$$

olacak şekilde $k \in [0, \infty)$ sayısı var ise, f dönüşümüne Suzuki-zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir (Shukla and Pant 2022).

(21) eşitsizliğinde $k = 0$ alındığında Suzuki genişlemeyen dönüşüm elde edilir.

Teorem 43: $C, (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ Suzuki-zenginleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) \neq \emptyset$,

(ii) Herhangi $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $p \in Fix(f)$ ye güçlü bir şekilde yakınsar. Burada $\lambda \in \left[\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{k+1}\right)$ dir (Shukla and Pant 2022).

Tanım 53: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzay olsun. Her $y \in \mathcal{X}$ için $x \neq y$ olmak üzere

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

şartı sağlayan $\{x_n\}$ dizisi $x \in \mathcal{X}$ e zayıf yakınsak ise, Opial koşulu sağlanır (Opial 1967).

Tüm sonlu boyutlu Banach uzayları ve tüm Hilbert uzayları, Opial özelliğini sağlar (Goebel and Kirk 1972).

Teorem 44: $\mathcal{X}$, Opial özelliğine sahip bir Banach uzay ve $C, \mathcal{X}$ in boştan farklı zayıf kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ Suzuki-zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

(i) $Fix(f) \neq \emptyset$,

(ii) Herhangi $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $p \in Fix(f)$ ye zayıf bir şekilde yakınsar. Burada $\lambda \in \left[\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{k+1}\right)$ dir (Shukla and Pant 2022).

Sabit Nokta İterasyon Yöntemlerinin Kararlılığı

$\mathcal{X}$ bir normlu uzay ve $f, \mathcal{X}$ üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. $F_f \neq \emptyset$ ve $x_0 \in \mathcal{X}$ keyfi bir başlangıç noktası olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yönteminin en genel formda $x_{n+1} = g(f, x_n)$ ile tanımlandığını hatırlayalım. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_{n+1} = g(f, x_n)$ den elde edilen bir dizi olsun. Burada $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ hesaplanırken genellikle aşağıdaki adımlar izlenir:

1. $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası alınır.
2. $x_1 = g(f, x_0)$ değeri bulunur. Bu hesaplama esnasında meydana gelen çeşitli hatalardan dolayı x_1 değeri tam olarak elde edilemez. x_1 değeri yerine bu değere yakın olan başka bir y_1 değeri elde edilir, yani $y_1 \approx x_1$ dir.
3. Sonuç olarak $x_2 = g(f, x_1)$ hesaplanırken aslında $x_2, x_2 = g(f, y_1)$ olarak hesaplanır ve böylece gerçek x_2 değeri yerine, yine bu değere yakın olan başka bir y_2 değeri elde edilir, yani $y_2 \approx x_2$ olur ve bu işleme böylece devam edilir.

Bu yolla, verilen iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yerine, pratik olarak bunun bir yaklaşım dizisi olan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini elde edilir. Verilen sabit nokta iterasyon yönteminin kararlı olarak ele alınabilmesi için gerek ve yeter koşul her bir adımda x_n e yeterince yakın olan y_n için, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ yaklaşım dizisinin hala f nin sabit noktasına yakınsak olmasıdır.

Bu temel fikirden hareketle yapılan ilk çalışma Urabe (1956) tarafından sunulmuştur. Bununla birlikte, ilk olarak metrik uzaylarda Picard iterasyon yöntemi için kararlılık sonucu Ostrowski (1967) tarafından verilmiş olmasına rağmen genel iterasyon yöntemleri için kararlılık kavramı resmi olarak Harder ve Hicks (1988) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 54: $\mathcal{X}$ lineer normlu uzay ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. $x_{n+1} = g(f, x_n)$ ile verilen iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin f nin bir p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathcal{X}$ te keyfi bir dizi olsun ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\epsilon_n = \|y_{n+1} - g(f, x_n)\|$$

olarak alalım. $x_{n+1} = g(f, x_n)$ ile verilen sabit nokta iterasyon yönteminin f -kararlı (veya f' ye göre kararlı) olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ olmasıdır (Harder and Hicks 1988).

Lemma 1: Eğer $0 \leq \delta < 1$ olacak şekilde bir δ reel sayısı, $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ olacak şekilde $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$$u_{n+1} \leq \delta u_n + \epsilon_n$$

eşitsizliğini sağlayan $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların dizisi olması durumunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

dır (Berinde 2002).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı önemli tanım ve teoremlere yer verilecektir.

İlk olarak zenginleştirilmiş Kannan, zenginleştirilmiş Chatterjea ve zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıflarını içeren zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı için bir örnek verilmiştir. Sonrasında Banach uzaylarında Krasnoselskij iterasyonu kullanılarak zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli yakınsama teoremi elde edilmiştir. Ayrıca bazı uygun koşullar altında bu tür dönüşümler için Krasnoselskij iterasyonunun kararlılığı gösterilmiştir.

Son olarak n -Banach uzaylarda zenginleştirilmiş n -daraltan, zenginleştirilmiş n -Kannan, zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşüm sınıfları tanıtılmış ve Krasnoselskij iterasyonu kullanılarak bu dönüşüm sınıfları için kuvvetli yakınsama teoremleri ifade edilmiştir.

Örnek 17: $\mathcal{X} = [0,4] \cup [5,6] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$fx = \begin{cases} -\frac{x}{3}, & x \in [2,4] \\ 0, & x \in [5,6] \end{cases}$$

dönüşümü zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm değildir. Fakat, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4})$ -zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür (Simsek and Yildirim 2022).

İspat: İspat için üç durum söz konusudur.

1.Durum: $x, y \in [5,6]$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} |k(x - y) + fx - fy| &= \left| \frac{1}{3}(x - y) + fx - fy \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}(x - y) \right| \leq \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \frac{1}{3} |x - y| \\ &= (k + 1)\theta |x - y| \\ &\leq (k + 1)\theta |x - y| + \beta \left[\begin{aligned} &|(k + 1)(y - x) + x - fx| \\ &+ |(k + 1)(x - y) + y - fy| \end{aligned} \right] \\ &\quad + \gamma [|x - fx| + |y - fy|] \end{aligned}$$

olur.

2.Durum: $x, y \in [2,4]$ için sağlandığı açıktır.

3.Durum: $x \in [2,4]$ ve $y \in [5,6]$ olsun. Böylece

$$|k(x - y) + fx - fy| = \left| \frac{1}{3}(x - y) - \frac{x}{3} \right| \leq 2$$

$$(k + 1)\theta|x - y| = \frac{4}{9}|x - y| \geq \frac{4}{9}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma[|x - fx| + |y - fy|] &= \frac{1}{4} \left[\left| x + \frac{x}{3} \right| + |y| \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \left(2 + \frac{2}{3} + 5 \right) \\ &= \frac{23}{12} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$(k + 1)\theta|x - y| + \beta \left[\frac{|(k + 1)(y - x) + x - fx|}{|(k + 1)(x - y) + y - fy|} \right] + \gamma[|x - fx| + |y - fy|] = \frac{255}{108} > 2$$

olduğu görülür. Bu nedenle denklem (15) göz önüne alındığında, f zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşümdür. Şimdi, f nin zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olmadığını göstereceğiz. $\mathcal{X}$ kümesinde $x = 4$ ve $y = 5$ elemanları alındığında

$$\begin{aligned} |k(x - y) + fx - fy| &= \left| \frac{1}{3}(4 - 5) - \frac{4}{3} \right| \\ &> \left| \left(\frac{1}{3} + 1 \right) (4 - 5) \right| \\ &= (k + 1)|x - y| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani f zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm değildir.

Teorem 45: $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı olsun. $\mathcal{C}$ de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ $(k, \theta, \beta, \gamma)$ -zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. O halde

(i) $Fix(f) = \{p\}$ dir.

(ii) Keyfi bir $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n$$

şeklinde oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1 - \delta} \|x_n - x_{n-1}\|, \quad (22)$$

dir. Burada $\delta = \frac{\theta+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}$ dır (Simsek and Yildirim 2022).

İspat: Herhangi bir $\lambda \in (0,1)$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için ortalama f_λ dönüşümünü

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x) \quad (23)$$

olarak ele alalım. f_λ ve f dönüşümleri $Fix(f_\lambda) = Fix(f)$ özelliğine sahiptir. İspat için iki durum söz konusudur.

1.Durum: $k > 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda (15) denkleminde $0 < \lambda = \frac{1}{k+1} < 1$ olarak alındığında,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) (x - y) + fx - fy \right\| &\leq \frac{1}{\lambda} \theta \|x - y\| + \beta \left[\left\| \frac{1}{\lambda} (y - x) + x - fx \right\| + \right. \\ &\quad \left. \gamma [\|x - fx\| + \|y - fy\|] \right] + \left\| \frac{1}{\lambda} (x - y) + y - fy \right\| \end{aligned} \quad (24)$$

yazılır. (24) eşitsizliğinin her iki tarafı λ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)(x - y) + fx - fy\| &\leq \theta \|x - y\| + \beta \left[\|(y - x) + \lambda(x - fx)\| + \right. \\ &\quad \left. \gamma [\|\lambda(x - fx)\| + \|\lambda(y - fy)\|] \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (23) deki eşitlik dikkate alındığında

$$\|f_\lambda x - f_\lambda y\| \leq \theta \|x - y\| + \beta [\|y - f_\lambda x\| + \|x - f_\lambda y\|] + \gamma [\|x - f_\lambda x\| + \|y - f_\lambda y\|] \quad (25)$$

olduğu görülür. (25) eşitsizliği f_λ nın Hardy-Rogers dönüşümü olduğunu gösterir. (13) ile (23) göz önüne alındığında,

$$x_{n+1} = f_\lambda x_n$$

olur. Yani bu dizi f_λ ya bağlı bir Picard iterasyonudur.

(25) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n-1}$ alındığında,

$$\begin{aligned} \|f_\lambda x_n - f_\lambda x_{n-1}\| &\leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| + \beta [\|x_{n-1} - f_\lambda x_n\| + \|x_n - f_\lambda x_{n-1}\|] \\ &\quad + \gamma [\|x_n - f_\lambda x_n\| + \|x_{n-1} - f_\lambda x_{n-1}\|] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| + \beta [\|x_{n-1} - x_{n+1}\| + \|x_n - x_n\|] \\ &\quad + \gamma [\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n-1} - x_n\|] \\ &\leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| + \beta \left[\frac{\|x_{n-1} - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|}{2} \right] + \gamma \left[\frac{\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n-1} - x_n\|}{2} \right] \end{aligned}$$

$$(1 - \beta - \gamma)\|x_{n+1} - x_n\| \leq (\theta + \beta + \gamma)\|x_{n-1} - x_n\|$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $(1 - \beta - \gamma)$ ile bölündüğünde

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{(\theta + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)} \|x_{n-1} - x_n\|$$

elde edilir. Burada $\theta + 2\beta + 2\gamma < 1$ olduğundan $0 < \frac{(\theta + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)} = \delta < 1$ yazıldığında,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \delta \|x_{n-1} - x_n\|, \quad n \geq 1 \quad (26)$$

bulunur. (26) eşitsizliğinden (27) ve (28) tahmini sonuçları yazılabilir.

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \delta^n \frac{1 - \delta^m}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0, m \geq 1 \quad (27)$$

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \delta \frac{1 - \delta^m}{1 - \delta} \|x_n - x_{n-1}\|, \quad n \geq 1, m \geq 1. \quad (28)$$

O halde (27) eşitsizliği ile $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $\mathcal{X}$ Banach uzayı olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in C$ dir. Şimdi $p \in C$ nin f_λ nin sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|p - f_\lambda p\| &\leq \|p - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - f_\lambda p\| \\ &= \|p - x_{n+1}\| + \|f_\lambda x_n - f_\lambda p\| \end{aligned} \quad (29)$$

(25) eşitsizliği kullanılarak

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda p\| \leq \theta \|x_n - p\| + \beta [\|x_n - f_\lambda x_n\| + \|p - f_\lambda p\|] + \gamma [\|x_n - f_\lambda p\| + \|p - f_\lambda x_n\|]$$

olduğu görülür ve (29) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \|p - f_\lambda p\| &\leq \|p - x_{n+1}\| + \theta \|x_n - p\| + \beta [\|x_n - f_\lambda x_n\| + \|p - f_\lambda p\|] \\ &\quad + \gamma [\|x_n - f_\lambda p\| + \|p - f_\lambda x_n\|] \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} &\leq \|p - x_{n+1}\| + \theta \|x_n - p\| + \beta \left[\frac{\|x_n - p\| + \|p - x_{n+1}\|}{+\|p - f_\lambda p\|} \right] + \\ &\quad \gamma [\|x_n - p\| + \|p - f_\lambda p\| + \|p - x_{n+1}\|] \end{aligned}$$

$$(1 - \beta - \gamma)\|p - f_\lambda p\| \leq (1 + \beta + \gamma)\|p - x_{n+1}\| + (\theta + \beta + \gamma) \|x_n - p\|$$

$$\|p - f_\lambda p\| \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)} \|p - x_{n+1}\| + \delta \|x_n - p\| \quad (30)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için (30) eşitsizliğinde limit alındığında, $\|p - f_\lambda p\| = 0$ olur. Yani $f_\lambda p = p$ dir. Buradan da $Fix(f_\lambda) = \{p\}$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi f_λ nın tek bir sabit noktası olduğunu kanıtlayalım. Farz edelim ki f_λ nın $p \neq q$ olmak üzere iki sabit noktası olsun. O halde (25) eşitsizliğinden

$$\|f_\lambda p - f_\lambda q\| \leq \theta \|p - q\| + \beta [\|q - f_\lambda p\| + \|p - f_\lambda q\|] + \gamma [\|p - f_\lambda p\| + \|q - f_\lambda q\|]$$

$$\|p - q\| = \theta \|p - q\| + \beta [\|q - p\| + \|p - q\|] + \gamma [\|p - p\| + \|q - q\|]$$

$$\|p - q\| \leq (\theta + 2\beta) \|p - q\|$$

yazılabilir. Bu ise $\theta + 2\beta \neq 0$ olduğu için bir çelişkidir. Yani $Fix(f_\lambda) = \{p\}$ olup $Fix(f) = Fix(f_\lambda)$ dir. Böylece (i) şartının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) Şimdi $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinin her $x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç noktası için Krasnoselskij iterasyonu tarafından p ye güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|(1 - \lambda)x_n + \lambda f_\lambda x_n - p\| \\ &= \|f_\lambda x_n - p\| \end{aligned} \quad (31)$$

dir. (25) eşitsizliğinde $x = x_n, y = p$ alındığında,

$$\begin{aligned} \|f_\lambda x_n - p\| &\leq \theta \|x_n - p\| + \beta [\|p - f_\lambda x_n\| + \|x_n - f_\lambda p\|] + \gamma [\|x_n - f_\lambda x_n\| + \|p - f_\lambda p\|] \\ &\leq \theta \|x_n - p\| + \beta [\|p - f_\lambda x_n\| + \|x_n - p\|] + \gamma \left[\frac{\|x_n - p\|}{1 + \|p - f_\lambda x_n\|} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(1 - \beta - \gamma) \|f_\lambda x_n - p\| \leq (\theta + \beta + \gamma) \|x_n - p\|$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $(1 - \beta - \gamma)$ ile bölündüğünde

$$\|f_\lambda x_n - p\| \leq \left(\frac{\theta + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \right) \|x_n - p\| = \delta \|x_n - p\| \quad (32)$$

olarak bulunur. (31) ve (32) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$\|x_{n+1} - p\| = \|f_\lambda x_n - p\| \leq \delta \|x_n - p\| \quad (33)$$

elde edilir. Bu işlem devam ettirildiğinde

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^n \|x_0 - p\| \quad (34)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\delta < 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$$

dır. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin f nin tek bir sabit noktası olan p ye güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterir.

(iii) şartının sağlandığını göstermek için (27) ve (28) eşitsizliklerinde $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında,

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 1 \quad (35)$$

ve

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}\|, \quad n \geq 1, \quad (36)$$

yazılabilir. Burada (35) ile (36) eşitsizlikleri birleştirildiğinde (22) eşitsizliği elde edilir.

2. Durum: $k = 0$ durumu, $k \neq 0$ durumuna benzer şekilde yapılabilir. Burada tek fark $\lambda = 1$ olmasıdır.

Şimdi ise, Banach uzaylarındaki zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için Krasnoselskij iterasyonunun f -kararlılığını inceleyeceğiz.

Teorem 46: $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı, C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ $(k, \theta, \beta, \gamma)$ -zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $x_0 \in C$ ve $\lambda \in [0, 1]$ deki reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = g(f, x_n) = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n,$$

olarak verilen Krasnoselskij iterasyonunu alalım. Eğer $\frac{1+\delta}{2} \leq \lambda$ ise Krasnoselskij iterasyonu f -kararlıdır (Simsek and Yildirim 2022).

İspat: Teorem 45 ten $f_\lambda p = p$ olacak şekilde f nin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu biliyoruz. $\{y_n\}_{n=0}^\infty \subset C$ ve

$$\epsilon_n = \|y_{n+1} - (1 - \lambda)y_n - \lambda f y_n\|, \quad n \geq 0$$

olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ olduğunu varsayarak $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$ olduğunu gösterelim. O halde

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &\leq \|y_{n+1} - (1 - \lambda)y_n - \lambda f y_n\| + \|(1 - \lambda)y_n + \lambda f y_n - p\| \\ &= \epsilon_n + \|(1 - \lambda)y_n + \lambda f y_n - ((1 - \lambda) + \lambda)p\| \\ &= \epsilon_n + \|(1 - \lambda)(y_n - p) + \lambda(f y_n - p)\| \\ &\leq \epsilon_n + (1 - \lambda)\|y_n - p\| + \lambda\|f y_n - p\| \end{aligned} \quad (37)$$

yazılır.

Herhangi bir $\lambda \in (0, 1)$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için ortalama f_λ dönüşümünü

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x)$$

ele alalım. Teorem 45 ten f_λ , Hardy-Rogers dönüşümdür. O halde

$$\begin{aligned} \|f_\lambda y_n - p\| &= \|(1 - \lambda)y_n - \lambda f y_n - p\| \\ &\geq \lambda\|f y_n - p\| - (1 - \lambda)\|y_n - p\| \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lambda \|fy_n - p\| \leq \|f_\lambda y_n - p\| + (1 - \lambda) \|y_n - p\| \quad (38)$$

elde edilir. (37) ile (38) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &\leq \epsilon_n + (1 - \lambda) \|y_n - p\| + \lambda \|fy_n - p\| \\ &\leq \epsilon_n + (1 - \lambda) \|y_n - p\| + \|f_\lambda y_n - p\| + (1 - \lambda) \|y_n - p\| \\ &\leq \epsilon_n + 2(1 - \lambda) \|y_n - p\| + \delta \|y_n - p\| \\ &= [2(1 - \lambda) + \delta] \|y_n - p\| + \epsilon_n. \end{aligned}$$

yazılır. $\frac{1+\delta}{2} < \lambda$ olduğu göz önüne alındığında

$$2(1 - \lambda) + \delta < 1.$$

yazılabilir. Lemma 1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = 0,$$

dır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$$

dir.

Tanım 55 (Zenginleştirilmiş n -Daraltan Dönüşüm): $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere her $0 \leq a < k + 1$ ve $0 \leq k < \infty$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq a \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (39)$$

şartını sağlayan $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in C$ sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşüm denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için (k, a) - zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşüm de denilebilir. (39) eşitsizliğinde $k = 0$ alındığında n -daraltan dönüşüm sınıfını elde ederiz (Simsek and Yildirim 2021).

Örnek 18: $X = [0,1]$ ve her $x \in X$ için $f: X \rightarrow X$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. Bu durumda

$$d(fx, fy, r_2, r_3, \dots, r_n) = |x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| = d(x, y, r_2, r_3, \dots, r_n)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(fx, fy, r_2, r_3, \dots, r_n) \leq d(x, y, r_2, r_3, \dots, r_n)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla f , n -genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat f , n -daraltan bir dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in X$ ve $a \in [0,1)$ için

$$|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| \leq a |x - y, r_2, r_3, \dots, r_n|$$

olup bu bir çelişkidir. Denklem (39) da $a \in [0, k + 1)$ ve $k \in [0, \infty)$ olarak alındığında

$$|(k - 1)(x - y), r_2, r_3, \dots, r_n| \leq a|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n|$$

elde edilir. Burada her $x, y \in [0, 1]$ için $0 < k < 1$ ve $a = 1 - k$ seçildiğinde bu eşitsizlik sağlanır. Yani her $k \in (0, 1)$ için f dönüşümü, $(k, 1 - k)$ -zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşümdür (Simsek and Yildirim 2021).

Sonuç 11: Her n -daraltan dönüşüm, zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşümdür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 47: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -Banach uzayı olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşüm olsun. O halde

(i) $Fix(f) = \{p\}$ dir.

(ii) Keyfi bir $x_0 \in C$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n \quad (40)$$

şeklinde oluşturulan oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|, \quad (41)$$

dir. Burada $\delta = \frac{a}{1+k}$ dir (Simsek and Yildirim 2021).

İspat: Herhangi bir $\lambda \in (0, 1)$ için ortalama f_λ dönüşümünü

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x) \quad (42)$$

olarak ele alalım. f_λ ve f dönüşümleri $Fix(f_\lambda) = Fix(f)$ özelliğine sahiptir. İspat için iki durum söz konusudur.

1.Durum: $k > 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda (39) denkleminde $0 < \lambda = \frac{1}{k+1} < 1$ olarak alındığında,

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) (x - y) + fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n \right\| \leq a \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı λ ile çarpıldığında

$$\|(1 - \lambda)(x - y) + \lambda(fx - fy), r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \lambda a \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

olur. Bu son eşitsizlikte, $\delta \in (0, 1)$ olmak üzere $\delta = \lambda a$ alındığında,

$$\|f_\lambda(x) - f_\lambda(y), r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (43)$$

(43) eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik f_λ nın n -daraltan dönüşümü olduğunu gösterir. (40) ile (42) göz önüne alındığında,

$$x_{n+1} = f_\lambda x_n$$

elde edilir. Yani bu dizi f_λ ya bağlı bir Picard iterasyonudur.

(43) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n-1}$ alındığında,

$$\begin{aligned} \|f_\lambda x_n - f_\lambda x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq \delta \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|, \\ \|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq \delta \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{aligned} \quad (44)$$

bulunur. (44) eşitsizliğinden (45) ve (46) tahmini sonuçları yazılabilir.

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta^n \frac{(1-\delta^m)}{1-\delta} \|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (45)$$

ve

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \frac{(1-\delta^m)}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|. \quad (46)$$

O halde (45) eşitsizliği ile $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Böylece

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (47)$$

ve C , n -Banach uzayı olduğundan $p \in C$ dir. Şimdi $p \in C$ nin f_λ nın sabit noktası olduğunu gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} \|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n+1} - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \\ &= \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|f_\lambda x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\|. \end{aligned} \quad (48)$$

(43) eşitsizliği kullanıldığında

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

olduğu görülür. Buradan (48) eşitsizliği düzenlendiğinde

$$\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \delta \|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (49)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için (49) eşitsizliğinde limit alındığında, $\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| = 0$ olur. Yani $p = f_\lambda p$ dir. Buradan da $p = \text{Fix}(f_\lambda)$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi p nin f_λ nın tek bir sabit noktası olduğunu ispat edelim. Farz edelim ki f_λ nın $p \neq q$ olmak üzere iki sabit noktası olsun. O halde (43) eşitsizliğinden

$$\|f_\lambda p - f_\lambda q, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

yazılır ve gerekli işlemler yapıldığında

$$0 < \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

$$< \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Yani $Fix(f_\lambda) = \{p\}$ olup $Fix(f) = Fix(f_\lambda) = \{p\}$ dir. Böylece (i) şartının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $\{x_n\}$, (40) daki gibi Krasnoselskij iterasyonu olsun. (47) eşitliği $\{x_n\}$ dizisinin f nin tek bir sabit noktası olan p ye güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterir.

(iii) şartının sağlandığını göstermek için (45) ve (46) eşitsizliklerinde $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (50)$$

ve

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (51)$$

yazılabilir. (50) ve (51) eşitsizlikleri birleştirildiğinde (41) eşitsizliği elde edilir.

2.Durum: $k = 0$ durumu $k \neq 0$ durumuna benzer şekilde yapılabilir tek fark $\lambda = 1$ dir.

Tanım 56 (Zenginleştirilmiş n -Chatterjea Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere her $0 \leq b < 1/2$ ve $0 \leq k < \infty$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b \left[\begin{array}{l} \|(k+1)(x - y) + y - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \\ + \|(k+1)(y - x) + x - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{array} \right] \quad (52)$$

şartını sağlayan $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in C$ sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşümü denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için (k, b) - zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşüm de denebilir. (52) eşitsizliğinde $k = 0$ alındığında n -Chatterjea dönüşüm sınıfını elde ederiz (Simsek and Yildirim 2021).

Örnek 19: $\mathcal{X} = [0,1]$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , n -Chatterjea dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $b \in [0,1/2)$ için

$$\begin{aligned} |x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| &\leq b[|x - 1 + y, r_2, r_3, \dots, r_n| + |y - 1 + x, r_2, r_3, \dots, r_n|] \\ &= 2b|x + y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| \end{aligned} \quad (53)$$

olup $x = 0$ ve $y = 1$ için bu bir çelişkidir. Zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşümü dikkate alındığında

$$|(k-1)(x - y), r_2, r_3, \dots, r_n| \leq b \left[\begin{array}{l} |(k+1)x - (k-1)y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| \\ + |(k+1)y - (k-1)x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| \end{array} \right] \quad (54)$$

elde edilir. (54) eşitsizliğini elde etmek için

$$\begin{aligned}
2k|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| &= \left| \begin{aligned} &[(k+1)x - (k-1)y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n] \\ &-[(k+1)y - (k-1)x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n] \end{aligned} \right| \\
&\leq |(k+1)x - (k-1)y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| \\
&\quad + |(k+1)y - (k-1)x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n|
\end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alındığında belirli bir $b \in [0, 1/2)$ için $\frac{|k-1|}{2k} \leq b$ dir. Burada tek olasılık $k < 1$ olduğu için $b = \frac{1-k}{2k}$ ve $k = \frac{1}{b+2}$ dir. Böylece f herhangi bir $b \in [0, 1/2)$ için $(\frac{1}{b+2}, b)$ -zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşümdür. $Fix(f) = \{1/2\}$ dir (Simsek and Yildirim 2021).

Sonuç 12: Her n -Chatterjea dönüşüm, zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşümdür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 48: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -Banach uzayı olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşümü olsun. O halde

(i) $Fix(f) = \{p\}$ dir.

(ii) Keyfi bir $x_0 \in C$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n \quad (55)$$

şeklinde oluşturulan oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|, \quad (56)$$

dir. Burada $\delta = \frac{b}{1-b}$ dir (Simsek and Yildirim 2021).

İspat: Herhangi bir $\lambda \in (0, 1)$ için ortalama f_λ dönüşümünü

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x) \quad (57)$$

olarak ele alalım. f_λ ve f dönüşümleri $Fix(f_\lambda) = Fix(f)$ özelliğine sahiptir. İspat için iki durum söz konusudur.

1.Durum: $k > 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda (52) denkleminde $0 < \lambda = \frac{1}{k+1} < 1$ olarak alındığında,

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) + fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n, \right\| \leq b \left[\left\| \frac{1}{\lambda} (x - y) + y - fy, r_2, r_3, \dots, r_n \right\| + \left\| \frac{1}{\lambda} (y - x) + x - fx, r_2, r_3, \dots, r_n, \right\| \right]$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her tarafı λ ile çarpıldığında,

$$\|(1 - \lambda) + \lambda(fx - fy), r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b \left[\|(x - y) + \lambda(y - fy), r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|(y - x) + \lambda(x - fx), r_2, r_3, \dots, r_n\| \right]$$

olur ve gerekli düzenlemeler ile

$$\|f_\lambda(x) - f_\lambda(y), r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b[\|x - f_\lambda y, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - f_\lambda x, r_2, r_3, \dots, r_n\|] \quad (58)$$

eşitsizliği elde edilir. (58) eşitsizliği f_λ nın n -Chatterjea dönüşümü olduğunu gösterir. (55) ve (57) göz önüne alındığında,

$$x_{n+1} = f_\lambda x_n$$

olduğu görülür. Yani bu dizi f_λ ya bağlı bir Picard iterasyonudur.

(58) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n-1}$ alındığında,

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b \left[\|x_n - f_\lambda x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n-1} - f_\lambda x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \right]$$

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b[\|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n-1} - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b[\|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_n - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{b}{1-b} \|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

elde edilir. Burada $0 < b < 1/2$ olduğundan $0 < \delta = \frac{b}{1-b} < 1$ yazıldığında

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (59)$$

bulunur. (59) eşitsizliğinden (60) ve (61) tahmini sonuçları yazılabilir.

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta^n \frac{1-\delta^m}{1-\delta} \|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (60)$$

ve

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \frac{1-\delta^m}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|. \quad (61)$$

O halde (60) eşitsizliği ile $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Böylece

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (62)$$

ve C , n -Banach uzayı olduğundan $p \in C$ dir. Şimdi $p \in C$ nin f_λ nın sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n+1} - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \\ &= \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|f_\lambda x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{aligned} \quad (63)$$

(58) eşitsizliği kullanıldığında

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq b[\|x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|p - f_\lambda x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

bulunur ve böylece (63) ten,

$$(1 - b)\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq (1 + b)\|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + b\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

$$\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{1+b}{1-b}\|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \delta\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (64)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için (64) eşitsizliğinde limit alındığında, $\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| = 0$ olur. Yani $p = f_\lambda p$ dir. Buradan da $p = \text{Fix}(f_\lambda)$ olduğunu sonucuna varılır. Şimdi p nin f_λ nin tek bir sabit noktası olduğunu ispat edelim. Farz edelim ki f_λ nin $p \neq q$ olmak üzere iki sabit noktası olsun. O halde (58) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|f_\lambda p - f_\lambda q, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq b[\|p - f_\lambda q, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|q - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\|] \\ \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq 2b\|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{aligned}$$

dir. Bu bir çelişkidir. Yani $\text{Fix}(f_\lambda) = \{p\}$ olup $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(f_\lambda) = \{p\}$ dir. Böylece (i) şartının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $\{x_n\}$, (55) deki gibi Krasnoselskij iterasyonu olsun. (62) eşitliği $\{x_n\}$ dizisinin f nin tek bir sabit noktası olan p ye güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterir.

(iii) şartının sağlandığını göstermek için (60) ve (61) eşitsizliklerinde $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında,

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (65)$$

ve

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (66)$$

yazılabilir. (65) ve (66) eşitsizlikleri birleştirildiğinde (56) eşitsizliği elde edilir.

2.Durum: $k = 0$ durumu $k \neq 0$ durumuna benzer şekilde yapılabilir tek fark $\lambda = 1$ dir.

Tanım 57 (Zenginleştirilmiş n -Kannan Dönüşüm): $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere her $0 \leq c < 1/2$ ve $0 \leq k < \infty$ için

$$\|k(x - y) + fx - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c \left[\begin{array}{l} \|x - fx, r_2, r_3, \dots, r_n\| \\ + \|y - fy, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{array} \right] \quad (67)$$

şartını sağlayan $r_2, r_3, \dots, r_n, x, y \in C$ sayıları var ise, f dönüşümüne zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşümü denir. Ayrıca sabitleri belirtmek için (k, c) -zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşüm de denebilir. (67) denkleminde $k = 0$ alındığında n -Kannan dönüşüm sınıfını elde edilir (Simsek and Yildirim 2021).

Örnek 20: $\mathcal{X} = [0,1]$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $fx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. f , n -genişlemeyen bir dönüşümdür; fakat n -Kannan dönüşüm değildir. Çünkü her $x, y \in \mathcal{X}$ ve $c \in [0,1/2)$ için

$$|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| \leq c[|2x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| + |2y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n|],$$

olup burada $x = 1/2$ ve $y = 1$ için $1 \leq 2c < 1$ olur ve bu bir çelişkidir. Zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşümü (67) dikkate alındığında

$$|(k - 1)(x - y), r_2, r_3, \dots, r_n| \leq c[|2x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| + |2y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n|]$$

elde edilir. Herhangi $c \in [0,1/2)$ için $2c = |k - 1|$ seçildiğinde $2|x - y, r_2, r_3, \dots, r_n| \leq |2x - 1, r_2, r_3, \dots, r_n| + |2y - 1, r_2, r_3, \dots, r_n|$ olur. Bu da $k < 1$ için mümkün olduğundan $k = 1 - 2c > 0$ dir. Böylece f herhangi bir $c \in [0,1/2)$ için $(1 - 2c, c)$ -zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşümüdür. $Fix(f) = \{1/2\}$ dir.

Sonuç 13: Her n -Kannan dönüşüm, zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşümdür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 49: $(\mathcal{X}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -Banach uzayı olsun. C de bu uzayın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $f: C \rightarrow C$ zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşümü olsun. O halde

(i) $Fix(f) = \{p\}$ dir.

(ii) Keyfi bir $x_0 \in C$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda fx_n \quad (68)$$

şeklinde oluşturulan oluşturulan Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye güçlü yakınsar.

(iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|x_{n+i-1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|, \quad (69)$$

dir. Burada $\delta = \frac{c}{1-c}$ dir (Simsek and Yildirim 2021).

İspat: Herhangi bir $\lambda \in (0,1)$ için ortalama f_λ dönüşümünü

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x) \quad (70)$$

olarak ele alalım. f_λ ve f dönüşümleri $Fix(f_\lambda) = Fix(f)$ özelliğine sahiptir. İspat için iki durum söz konusudur.

1.Durum: $k > 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda (67) denkleminde $0 < \lambda = \frac{1}{k+1} < 1$ olarak alındığında,

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) (x - y) + f x - f y, r_2, r_3, \dots, r_n \right\| \leq c \left[\frac{\|x - f x, r_2, r_3, \dots, r_n\|}{\|y - f y, r_2, r_3, \dots, r_n\|} + \right]$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her tarafı λ ile çarpıldığında,

$$\|f_\lambda(x) - f_\lambda(y), r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c[\|x - f_\lambda x, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|y - f_\lambda y, r_2, r_3, \dots, r_n\|] \quad (71)$$

eşitsizliği elde edilir. (71) eşitsizliği f_λ nın n -Kannan dönüşümü olduğunu gösterir. (68) ve (70) ifadeleri göz önüne alındığında,

$$x_{n+1} = f_\lambda x_n$$

elde edilir. Yani bu dizi f_λ ya bağlı bir Picard iterasyonudur.

(71) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n-1}$ alındığında,

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c \left[\frac{\|x_n - f_\lambda x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\|}{\|x_{n-1} - f_\lambda x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|} + \right]$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c[\|x_n - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{c}{1-c} \|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\|$$

elde edilir. Burada $0 < c < 1/2$ olduğundan $0 < \delta = \frac{c}{1-c} < 1$ yazıldığında,

$$\|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \|x_{n-1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (72)$$

bulunur. (72) eşitsizliğinden (73) ve (74) tahmini sonuçları yazılabilir.

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta^n \frac{1-\delta^m}{1-\delta} \|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (73)$$

ve

$$\|x_{n+m} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \delta \frac{1-\delta^m}{1-\delta} \cdot \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|. \quad (74)$$

O halde (73) eşitsizliği ile $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. C , n -Banach uzayı olduğundan

$$p \in C = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (75)$$

dir. Şimdi $p \in C$ nin f_λ nın sabit noktası olduğunu gösterelim. Buradan

$$\begin{aligned} \|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq \|p - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|x_{n+1} - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \\ &= \|x_{n+1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|f x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \end{aligned} \quad (76)$$

yazılır. (71) eşitsizliği kullanıldığında

$$\|f_\lambda x_n - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c[\|x_n - f_\lambda x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\|]$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik ile (76) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \|x_{n+1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| + c \left[\frac{\|x_n - x_{n+1}, r_2, r_3, \dots, r_n\|}{\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\|} \right]$$

olur ve gerekli düzenlemeler ile

$$\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{1}{1-c} \|x_{n+1} - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \delta \|x_{n+1} - x_n, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (77)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için (77) eşitsizliğinde limit alındığında, $\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| = 0$ olur. Yani $p = f_\lambda p$ dir. Buradan da $p = \text{Fix}(f_\lambda)$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi p nin f_λ nin tek sabit noktası olduğunu ispat edelim. Farz edelim ki f_λ nin $p \neq q$ olmak üzere iki sabit noktası olsun. O halde (71) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|f_\lambda p - f_\lambda q, r_2, r_3, \dots, r_n\| &\leq c[\|p - f_\lambda p, r_2, r_3, \dots, r_n\| + \|q - f_\lambda q, r_2, r_3, \dots, r_n\|] \\ 0 &< \|p - q, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq c \cdot 0 \end{aligned}$$

dır. Bu bir çelişkidir. Yani $\text{Fix}(f_\lambda) = \{p\}$ olup $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(f_\lambda) = \{p\}$ dir. Böylece (i) şartının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $\{x_n\}$, (68) deki gibi Krasnoselskij iterasyonu olsun. (75) eşitliği $\{x_n\}$ dizisinin f nin tek bir sabit noktası olan p ye güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterir.

(iii) şartının sağlandığını göstermek için (73) ve (74) eşitsizliklerinde $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında,

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \|x_1 - x_0, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (78)$$

ve

$$\|x_n - p, r_2, r_3, \dots, r_n\| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|x_n - x_{n-1}, r_2, r_3, \dots, r_n\| \quad (79)$$

elde edilir. (78) ve (79) eşitsizlikleri birleştirilerek (69) eşitsizliği bulunur.

2.Durum: $k = 0$ durumu $k \neq 0$ durumuna benzer şekilde yapılabilir tek fark $\lambda = 1$ dir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk olarak zenginleştirilmiş genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için Banach uzaylarında Krasnoselskij iterasyon metodu kullanılarak sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Daha sonra bu tür dönüşüm sınıfları için Krasnoselskij iterasyon yönteminin kararlılığı gösterilmiştir. Son olarak n -Banach uzaylarında, zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşüm, zenginleştirilmiş n -Kannan dönüşüm ve zenginleştirilmiş n -Chatterjea dönüşüm sınıflarının tanımları verilmiş ve Krasnoselskij iterasyon metodunun bu dönüşüm sınıflarının sabit noktasına yakınsamasıyla ilgili bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasından hareketle okuyucular için aşağıdaki öneriler listelenmiştir:

- 1) Bu tezde geçen Krasnoselskij iterasyon metodu yerine literatürde var olan Mann iterasyon, Ishikawa iterasyon, Noor iterasyon, S-iterasyon, vb. metotlarının yakınsaması ile ilgili sabit nokta teoremleri oluşturulabilir ve ispatlarına bakılabilir. Ayrıca bu iterasyon metotlarının tezde geçen dönüşüm sınıfları için kararlılıkları incelenebilir.
- 2) Banach uzaylarında ve n -Banach uzaylarında zenginleştirilmiş daraltan veya zenginleştirilmiş n -daraltan dönüşümleri için ifade edilecek olan iterasyon metotlarının yakınsama hızları mukayese edilebilir ve bunlar nümerik örneklerle desteklenebilir.
- 3) Banach uzaylarında ve n -Banach uzaylarında çok değerli zenginleştirilmiş dönüşüm sınıflarının tanımları yapılarak, bunlar için sabit nokta sonuçları araştırılabilir.
- 4) Zenginleştirilmiş dönüşüm sınıflarının farklı uzaylarda ve farklı dönüşüm sınıfları ile kombinasyonu oluşturularak sabit nokta teoremleri ve uygulamaları üzerine çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Anjum, R., and Berinde, V., 2021. Equivalence of certain iteration processes obtained by two new classes of operators. *Mathematics*, 9 (18), 2292.
- Alber, Y., and Guerre-Delabriere, S., 1997. Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces. *New Results in Operator Theory. Adv. Apple*, 98, 7-22.
- Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales. *Fund. Math*, 3, 133–181.
- Berinde, V., 2002. On the stability of some fixed point procedures. *Bui. Stiint. Univ. Baia Mare, Ser.B, Matematica Informatica*, 18 (1), 7-14.
- Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, *Nonlinear Anal*, 9 (1), 43–53.
- Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points, Second edition. *Lecture Notes in Mathematics*, 1912. Springer, Romania.
- Berinde, V., 2018. Weak and strong convergence theorems for the Krasnoselskij iterative algorithm in the class of enriched strictly pseudocontractive operators. *Annals of west University of Timisoara Matematics and computer science*, 56(2), 13– 27.
- Berinde, V., 2019a. Approximating fixed points of enriched nonexpansive mappings by Krasnoselskij iteration in Hilbert spaces. *Carpathian J. Math*, 35(3), 293-304.
- Berinde, V., 2022. A modified Krasnoselskii-Mann iterative algorithm for approximating fixed points of enriched nonexpensive mappings. *Symmetry*, 14(1), 123.
- Berinde, V., and Pacurar, M., 2020. Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces. *J. Fixed Point Theory Appl*, 22(2) 1-10.
- Berinde, V., and Pacurar, M., 2021a. Fixed point theorems for enriched Ciric-Reich-Rus contractions in Banach spaces and convex metric spaces. *Carpathian J. Math*, 37(2), 173-184.
- Berinde, V., and Pacurar, M., 2021b. Krasnoselskij-type algorithms for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces. *arXiv preprint arXiv:2103.10289*
- Berinde, V., and Pacurar, M., 2021c. Kannan's fixed point approximation for solving split feasibility and variational inequality problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 336, 113217.
- Berinde, V., and Pacurar, M., 2021d. Approximating fixed points of enriched Chatterjea contractions by Krasnoselskij iterative algorithm in Banach space. *J. Fixed Point Theory Appl*, 23(4), 1-16.
- Bianchini, R. M. T., 1972. Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5, 103–108.
- Browder, F. E., 1965. Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 53 (6), 1272–1276.
- Browder, F.E., and Petryshyn, W.V., 1967. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl*, 20, 197-228.
- Chatterjea, S.K., 1972. Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sci*, 25, 727-730.
- Ciric, L.B., 1971. Generalized contractions and fixed-point theorems. *Publ. Inst. Math.*, 12 (26), 19–26.

- Ciric, L.B., 1974. A generalization of Banach's contraction principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45, 267–273.
- Deshmukh, A., 2020. Study of various self mappings, their fixed points and iterative procedures for fixed point approximation. Mid-Semester Dissertation Progress Report, Applied Mathematics and Humanities Department, Sardar Vallabhbhai National Institute of Technology, India.
- Dutta, H., 2010. On sequence spaces with elements in a sequence of real linear n -normed spaces. *Appl. Math. Lett.*, 23, 1109–1113.
- Freese, R.W., and Cho, Y.J., 2001. *Geometry of linear 2-normed space*. Huntington N.Y. Nova Publishers.
- Goebel, K., and Kirk, W., 1972. *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 28.
- Gunawan, H., 2002. On n -inner products, n -norms, and the Cauchy-Schwarz inequality. *Soochow J. of Math*, 28 (4), 389-398.
- Gunawan, H., and Mashadi, M., 2001. On n -Normed Spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 27 (10), 631 – 639.
- Harder, A.M. and Hicks, T.L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures. *Math. Japonica*, 33 (5), 693-706.
- Hardy, G. E. and Rogers, 1973. A. D., A generalisation of fixed point theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, 16 (2), 201-208.
- Harikrishnan, P.K., and Ravindran, K.T., 2011. Some Properties of Accretive operators in Linear 2-Normed Spaces. *International Mathematical Forum*, 59(6), 2941-2947.
- Kannan, R, 1968. Some results on fixed points. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 60, 71–76.
- Kannan, R., 1969. Some results on fixed points. II, *Amer. Math. Monthly*, 76, 405–408.
- Kır, M., Kızıltunç., 2013. Some new fixed point theorems in 2-normed spaces. *Int. Journal of Math. Analysis*, 58 (7), 2885-2890.
- Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations. *Uspehi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- Lazam, HS., Abed, SS., 2020. Some fixed point theorems in n -normed spaces. *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science*, 25 (3), 1-15.
- Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-610.
- Meng, J., Song, M., 2017. Fixed point theorems in normal n - normed spaces. *J. Math. Comput. Sci.*, 7 (1), 84-91.
- Mondal, P., Garai, H., Dey, L.K., 2021. On some enriched contractions in Banach spaces and an application. *Filomat*, 35 (15), 5017-5029.
- Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 591-597.
- Ostrowski, A., 1967. The Round off Stability of Iterations. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47 (2), 77-81.
- Petryshyn, W.V., 1966. Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 14, 276–284.

- Petryshyn, W.V., and Williamson T.E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 43 (2), 459-497.
- Picard, E., (Charles), 1890. *Jour. Math. Appl.*, 6 (4), 145-210.
- Reich, S., 1971. Some remarks concerning contraction mappings. *Can. Math. Bull.*, 14, 121-124.
- Reich, S., 1979. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 67, 274–276.
- Rhoades, B.E. 1977. A comparison of various definitions of contractive mappings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 226, 257–290.
- Rhoades, B.E., and Şoltuz, Ş.M., 2003. On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 7, 451–459.
- Shukla, R., and Pant, R., 2021. Some fixed point result for enriched nonexpansive type mappings in Banach spaces. *Appl. Gen. Topol.*, 23 (1), 31-43.
- Simsek, E. and Yildirim, I., 2022. Krasnoselskii iteration process for approximating fixed points of enriched generalized nonexpansive mappings in Banach spaces. *Carpathian Mathematical Publications*.
- Simsek, E., and Yildirim, I., 2021. On new fixed point results for some classes of enriched mappings in n -Banach spaces. *Communications in Nonlinear Analysis*.
- Suantai, S., Chumpungam, D., And Sarnmeta, P., 2021. Existence of fixed points of weak enriched nonexpansive mappings in Banach spaces. *Carpathian J. Math.*, 37 (2), 287-294.
- Sukaesih, E., Gunawan. H., and Neswan, O., 2015. Fixed point theorems on bounded sets in an n -normed space. *J. Math. Anal*, 3, 51-58.
- Suzuki, T., 2008. Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 340, 1088-1095.
- Urabe, M., 1956. Convergence of numerical iteration in solution of equations. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 19 (3), 479-489.
- Yao, Y.H., Zhou, H., and Liou, YC., 2009. Strong convergence of a modified Krasnoselski-Mann iterative algorithm for non-expansive mappings. *J. Appl. Math. Comput*, 29, 383–389.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Esra ŞİMŞEK
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Mesleki Açık Öğretim Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2022)
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1. Simsek, E. ve Yildirim, I., 2021. On new fixed point results for some classes of enriched mappings in n-Banach spaces. Communications in Nonlinear Analysis. 2. Simsek, E. ve Yildirim, I., 2022. Krasnoselskii iteration process for approximating fixed points of enriched generalized nonexpansive mappings in Banach spaces. Carpathian Mathematical Publications.	