



TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ADANA ALPARSLAN TÜRKER BİLİM VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN
KESİTLİ SİLİNDİRİK VE SİLİNDİRİK OLMAYAN
VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

YAVUZ ÇETİN CUMA
DOKTORA TEZİ



TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ADANA ALPARSLAN TÜRKEŞ BİLİM VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN
KESİTLİ SİLİNDİRİK VE SİLİNDİRİK OLMAYAN
VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

YAVUZ ÇETİN CUMA
DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. FARUK FIRAT ÇALIM

ADANA 2022

**FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN
KESİTLİ SİLİNDİRİK VE SİLİNDİRİK OLMAYAN
VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ**

**Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında Yavuz Çetin Cuma tarafından tamamlanan Doktora
Tezi onaylanmıştır.**

Doç. Dr. Ahmet BEYÇİÖĞLU
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Danışman

Tez Jürisi

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Serkan TOKGÖZ
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji
Üniversitesi

Prof. Dr. Beytullah TEMEL
Çukurova Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim Özgür DENEME
Aksaray Üniversitesi

Prof. Dr. Metin Hakan SEVERCAN
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi

.../.../20..

Bu tezde yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik davranışa uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bu kuralların ve davranışların gerektirdiği şekilde bu çalışmaya özgün olmayan tüm bilgiler için atıf verdiğimi ve kaynak gösterdiğimi beyan ederim.

Yavuz Çetin CUMA



ÖZET

FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN KESİTLİ SİLİNDİRİK VE SİLİNDİRİK OLMAYAN VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Yavuz Çetin CUMA

Doktora Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Haziran 2022, 76 sayfa

Bu tezde değişken kesit ve fonksiyonel derecelenmiş malzemeye sahip silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı incelenmiştir. Helisel çubukların davranışını idare eden denklemler elde edilirken Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Elde edilen diferansiyel denklemlerde eksenel ve kayma deformasyonları dikkate alınmıştır. Laplace uzayında sistemin dinamik davranışını idare eden adi diferansiyel denklemler taşıma matrisi yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Viskoelastik çözümlerde, elastik-viskoelastik analojisi kullanılarak elastik malzeme sabitleri Laplace uzayındaki kompleks karşılıkları ile değiştirilmiştir. Kelvin tipi viskoelastik model kullanılmıştır. Laplace uzayında elde edilen sonuçlar Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşümü yardımıyla zaman uzayına dönüştürülmüştür. Silindirik ve silindirik olmayan helisel çubuklarda, kesit değişim parametresi, malzeme değişim parametresi, helis sarım sayısı, helis yükselme açısı ve sönüm oranının dinamik davranışa etkileri araştırılmıştır. Önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatür ve sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programından elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Helisel çubuklar, taşıma matrisi yöntemi, fonksiyonel derecelenmiş malzeme, viskoelastik malzeme, serbest titreşim, zorlanmış titreşim.

ABSTRACT

DYNAMIC ANALYSIS OF CYLINDRICAL AND NON-CYLINDRICAL VISCOELASTIC HELICAL RODS WITH FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL AND VARIABLE CROSS-SECTION

Yavuz Çetin CUMA

PhD Thesis, Department of Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

June, 2022, 76 pages

In this thesis, dynamic behaviour of cylindrical and non-cylindrical viscoelastic helical rods with functionally graded material and variable cross-section was investigated. The differential equations governing the dynamic behaviour of the helical rods were derived by the Timoshenko beam theory. Axial and shear deformations were taken into consideration in the obtained differential equations. Ordinary differential equations were then solved in the Laplace domain by the transfer matrix method. For the viscoelastic solutions, elastic constants were replaced with their viscoelastic counterparts in Laplace domain by using the correspondence principle. Kelvin viscoelastic model was used for the solutions. Obtained results were transferred from Laplace domain to the time domain by the Modified Durbin's numerical inverse Laplace transform algorithm. The effects of section variation, material variation, active number of turns, helix pitch angle, helix radius ratio and damping ratio on the dynamic behaviour of cylindrical and non-cylindrical helical rods were investigated. It can be seen that obtained results with proposed model are in good agreement with the ones available in the literature and the ones acquired from finite element based program ANSYS.

Keywords: Helical rods, transfer matrix method, functionally graded material, viscoelastic material, free vibration, forced vibration.



TEŞEKKÜR

Bu doktora tezinin var olmasını sağlayan ve başından sonuna kadar binbir emek harcayarak bana her türlü desteğini esirgemeyen danışmanım, Sayın Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM'a sonsuz teşekkürler ederim.

Tezin ilerlemesini engin bilgileri ile izleyen ve değerli görüşleri ile katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Serkan TOKGÖZ ve Sayın Prof. Dr. Beytullah TEMEL'e teşekkür ederim.

Bu zorlu serüvenin üstesinden gelebilmem için sevgi ve desteklerini her daim eksik etmeyen eşime ve tüm aileme sonsuz sevgilerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
2.1. Silindirik Helisel Çubuklar	2
2.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar	5
2.3. Değişken Kesitli/Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Helisel Çubuklar	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
3.1. Uzaysal Çubuğun Geometrisi	9
3.2. Uzaysal Çubuğa Ait Denklemler	10
3.2.1. Denge Denklemleri	10
3.2.2. Uygunluk Denklemleri.....	11
3.2.3. Bünye Denklemleri.....	12
3.3. Uzaysal Çubuk Bilinmeyenleri ve Denklemlerin Toplanması.....	12
3.4. Laplace Dönüşümü	13
3.5. Helisel Çubuklar	15
3.5.1. Silindirik Helisel Çubuklar	15
3.5.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar	17
3.6. Viskoelastik Davranış.....	19
3.7. Helisel Çubukların Serbest ve Zorlanmış Titreşimi.....	19
3.7.1. Zorlanmış Titreşim	19

3.7.2. Serbest Titreşim	21
3.8. Taşıma Matrisi Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	21
3.8.1. Durum Vektörü	22
3.8.2. Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	25
4.1. Sabit Kesitli Silindirik Helisel Çubuk.....	25
4.2. Değişken Kesitli Silindirik Helisel Çubuk	26
4.3. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Helisel Çubuğun Serbest Titreşimi ..	30
4.4. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Helisel Çubuğun Zorlanmış Titreşimi	36
4.5. Viskoelastik Konsol Helisel Çubuğun Zorlanmış Titreşimi	44
4.6. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Viskoelastik Silindirik Helisel Çubuklar	45
4.7. Değişken Kesitli Hiperbolik ve Varil Helisel Çubuklar	49
4.8. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar	51
4.8.1. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Hiperbolik Helisel Çubuklar.....	52
4.8.2. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Varil Helisel Çubuklar	54
4.9. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Viskoelastik Hiperbolik ve Varil Helisel Çubuklar	57
5. SONUÇLAR.....	63
5.1. Silindirik Helisel Çubuklar.....	64
5.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar	65
KAYNAKLAR.....	66
EK – A Diferansiyel Geçiş Matrisi.....	74
ÖZGEÇMİŞ.....	H
ata! Yer işareti tanımlanmamış.	

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Uzaysal çubuk geometrisi.....	9
Şekil 3.2. Uzaysal çubuğun dengesi.....	10
Şekil 3.3. Uzaysal çubuk eksenindeki yerdeğiştirme ve dönmeler.....	11
Şekil 3.4. Silindirik helisel çubuk geometrisi ve helisin birim radyan açılımı.....	15
Şekil 3.5. (a) Hiperbolik helis, (b) varil helis, (c) helisin birim radyan açılımı.....	18
Şekil 4.1. Değişken kesitli silindirik helisel çubuk ve dinamik yük... ..	26
Şekil 4.2. Önerilen yöntem ile elde edilen deplasmanın zamanla değişimi	27
Şekil 4.3. ANSYS programı ile elde edilen deplasmanın zamanla değişimleri.....	28
Şekil 4.4. (a) Helisel çubuğun orta noktasındaki U_z deplasmanı, (b) A mesnedindeki T_z kesme kuvveti, (c) A mesnedindeki M_z momenti, (d) B mesnedindeki M_z momenti.....	29
Şekil 4.5. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubuk.....	31
Şekil 4.6. Helis yükselme açısının temel frekanslar üzerindeki etkisi ($n = 2$).....	35
Şekil 4.7. Malzeme ve kesit değişiminin temel frekanslara etkisi ($n = 2, \alpha = 5^\circ$).....	36
Şekil 4.8. Aktif sarım sayısının temel frekanslar üzerindeki etkisi ($\beta_{sec} = 0.25, \beta_{mat} = 0.5, \alpha = 8.5744^\circ$).....	36
Şekil 4.9. Fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli helisel çubuk ve dinamik yük.....	37
Şekil 4.10. Deplasman ve kesit tesirlerinin zamana bağlı değişimi ($\beta_{mat} = 0$ ve $n = 2$).....	39
Şekil 4.11. Deplasman ve kesit tesirlerinin zamana bağlı değişimi ($\beta_{mat} = 1$ ve $n = 4$).....	40
Şekil 4.12. U_z deplasmanı, T_z kesme kuvveti, M_z momentinin zamanla değişimi ($n = 2$)....	41
Şekil 4.13. U_z deplasmanı, T_z kesme kuvveti, M_z momentinin zamanla değişimi ($n = 4$)....	42
Şekil 4.14. Aktif sarım sayısının dinamik davranışa etkisi.....	43
Şekil 4.15. Üniform kesitli silindirik helisel çubuk ve dinamik yük.....	44

Şekil 4.16. (a) Serbest uçtaki U_z deplasmanı, (b) ankastre uçtaki T_z kesme kuvveti, (c) ankastre uçtaki M_z momenti, (d) ankastre uçtaki M_y momenti.....	45
Şekil 4.17. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik silindirik helisel çubuk....	46
Şekil 4.18. Helisel çubuğun orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi.....	47
Şekil 4.19. Ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi.....	48
Şekil 4.20. Değişken kesitli varil ve hiperbolik helisel çubuklar.....	49
Şekil 4.21. (a) Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı, (b) varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı.....	51
Şekil 4.22. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisel çubuk.....	52
Şekil 4.23. Hiperbolik helisteki temel frekans değişimi ($R_2/R_1 = 1.2$).....	53
Şekil 4.24. Hiperbolik helisteki temel frekans değişimi ($\beta_{sec} = 0.5$).....	54
Şekil 4.25. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisel çubuk.....	54
Şekil 4.26. Varil helisteki temel frekans değişimi ($R_2/R_1 = 0.3$).....	56
Şekil 4.27. Varil helisteki temel frekans değişimi ($\beta_{sec} = 0.5$).....	56
Şekil 4.28. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik hiperbolik ve varil helis...	57
Şekil 4.29. Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{mat} = 0.5$).....	59
Şekil 4.30. Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{sec} = 1.5$).....	60
Şekil 4.31. Varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{mat} = 0.5$).....	61
Şekil 4.32. Varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{sec} = 1.5$).....	62

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 4.1. Sabit kesitli silindirik helisel çubuğun doğal frekansları (Hz).....	25
Tablo 4.2. Değişken kesitli homojen silindirik helisel çubuğun doğal frekansları (Hz).....	27
Tablo 4.3. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 2$) (Hz).....	32
Tablo 4.4. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 4$) (Hz).....	33
Tablo 4.5. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 7.6$) (Hz).....	34
Tablo 4.6. Hiperbolik helisel çubuğun serbest titreşim frekansları (Hz).....	50
Tablo 4.7. Varil helisel çubuğun serbest titreşim frekansları (Hz)	50
Tablo 4.8. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisin temel frekansları (Hz).....	53
Tablo 4.9. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisin temel frekansları (Hz)...	55

KISALTMALAR

A	: Kesit alanı
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	: Eleman rijitliklerini içeren matrisler
c	: Helisin birim radyandaki eksen uzunluğu
$\mathbf{D}$	: Diferansiyel geçiş matrisi
d	: Kesit çapı
d_1, d_2	: Değişken kesitli helisin uç ve orta noktasındaki kesit çapı
d_{ij}	: Diferansiyel geçiş matrisi elemanları
E	: Elastisite modülü
E_v	: Viskoelastik elastisite modülü
$\mathbf{F}$	: Taşıma matrisi
G	: Kayma modülü
G_v	: Viskoelastik kayma modülü
g	: Viskoelastik sönüm oranı
H	: Helisin bir turdaki yükselme miktarı
h	: Helisin bir radyandaki yükselme miktarı
$\mathbf{I}$	: Atalet momenti vektörü
L_k	: Lanczos faktörü
N	: Toplam Laplace parametre sayısı
n	: Aktif sarım sayısı
$P(t)$	: Dinamik yük
P_0	: Dinamik yükün büyüklüğü
p	: Laplace parametresi
$\mathbf{p}, \mathbf{m}$	: Dış yük ve moment vektörü
R	: Helis yarıçapı
R_1, R_2	: Silindirik olmayan helisin uç ve orta noktasındaki yarıçapı
$\mathbf{r}$	: Konum vektörü
$\mathbf{S}$	: Durum vektörü

s : Eksen değişkeni
 s_i : Sistem koordinatı
 T : Toplam analiz süresi
 $\mathbf{T}, \mathbf{M}$: İç kuvvet ve moment vektörü
 t : Zaman
 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$: Hareketli koordinat takımındaki birim vektörler
 $\mathbf{U}, \mathbf{\Omega}$: Yerdeğiştirme ve dönme vektörü
 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}$: Rölatif birim kayma ve dönme vektörü
 $\mathbf{Y}$: Yük vektörü
 α : Helis yükselme açısı
 α_n, α_b : Kayma düzeltme katsayıları
 β_{mat} : Malzeme değişim parametresi
 β_{sec} : Kesit değişim parametresi
 χ, τ : Eğrilik ve tabii burulma
 Δt : Zaman artımı
 ν : Poisson oranı
 ω : Serbest titreşim frekansı
 ϕ : Helis açısı
 ρ : Kütleli yoğunluk

1. GİRİŞ

Helisel çubuklar birçok mühendislik alanında sayısız kullanım yeri olan yapısal elemanlardır. Otomotiv sektöründe sübap yayları, süspansiyon yayları, inşaat sektöründe helisel merdivenler, askeri alanda silah mekanizmalarındaki yaylarda, havacılık alanında uçak iniş takımlarının yayları ve daha birçok yerde önemli pozisyonlarda kullanılabilmektedir. Verilen örneklerden de anlaşılacağı gibi neredeyse tüm helisel çubuk elemanlar dinamik yüklemelere maruz kalmaktadır. Bu durumda helisel elemanların dinamik davranışlarının incelenmesi önem kazanmaktadır.

Dinamik davranış, serbest ve zorlanmış titreşim analizleri olarak iki kısımda incelenmektedir. Serbest titreşim, sistemin herhangi bir dinamik yükleme olmaksızın yaptığı hareketi ifade etmektedir. Serbest titreşim analizinde sistemin doğal frekansları aranmaktadır. Zorlanmış titreşim ise dinamik bir yükleme altında sistemin yapacağı hareketi ifade etmektedir. Zorlanmış titreşim analizinde dinamik yükleme altındaki yerdeğiştirme, dönme ve kesit zorları araştırılmaktadır.

Çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde farklı malzeme özelliklerine gereksinim duyulabilmektedir. Farklı malzemeler bir arada kullanılarak her bir malzemenin üstün özelliklerinden yararlanmak için tabakalı kompozit malzemeler geliştirilmiştir. Ancak tabakalar arası gerilme yığılmaları ve sıyrılma olması nedeniyle yeni bir kompozit malzeme arayışı devam etmiştir. Bu amaçla 1980'li yıllarda kompozit malzeme kavramına Japon bilim insanları tarafından fonksiyonel derecelenmiş malzemeler eklenmiştir. Burada iki farklı özelliğinden yararlanılmak istenen malzemelerin tabakalar halinde birbirlerine entegrasyonu yerine iki malzemenin birbiri arasında granüler olarak geçişinin sağlanması amaçlanmaktadır. Bu durum tabakalar arasında gerilme yığılmasını ve sıyrılma riskini azaltmaktadır.

Literatür taramasından da anlaşılacağı gibi silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların dinamik davranışı üzerine birçok çalışma mevcuttur. Genel olarak literatürdeki çalışmalar, homojen malzeme ve üniform kesitli helisel çubukların davranışını kapsamaktadır. Kesit ve/veya malzeme özelliklerinin bir fonksiyona bağlı olarak değişim gösterdiği çalışmaların sayısı oldukça sınırlıdır.

Bu tez kapsamında değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı incelenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde, değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizleri incelenmiştir. Önceki çalışmalar, helisel çubuklar ile ilgili yapılan yayınların eksen geometrisine, değişken kesit ve fonksiyonel derecelenmiş malzeme durumlarına göre gruplanmıştır.

2.1. Silindirik Helisel Çubuklar

Love (1899, 1927) helisel çubukların statik ve dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemleri elde etmiştir. Dinamik davranışa dair denklemlerin çözümü yapılamamış ve statik denklemlerin çözümü için ifadeler verilmiştir.

İnan (1964) elastik çubukların çözümünde başlangıç değer metodunun uygulanmasını ve bu yöntem dahilinde taşıma matrisi yöntemini irdlemiştir. Düzlemsel çubukların statik ve dinamik davranışları ile ilgili örnekler sunmuştur. Ayrıca, İnan (1966) elastik çubukların genel teorisi ile ilgili konular hakkında denklemlerin elde edilmesi ve çözümünü vermiştir.

Massoud (1965) herhangi bir eğri eksenli ve tabii burulmuş uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin elde edilmesi hususunda kolay ve sistematik bir metot önermiş ve diferansiyel denklemleri vektörel yöntemle elde etmiştir.

Wittrick (1966) simetrik kesitli helisel çubukların diferansiyel denklem takımını elde etmiştir. Yükselen helis açısının, eksenel deformasyon ve burulma arasındaki bağıntıyı da göz önünde bulundurarak helisteki dalga yayılımına olan etkisini araştırmıştır.

Phillips ve Costello (1972) büyük deplasman yapan helisel yayların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemleri elde etmişlerdir. Teorik olarak elde ettikleri sonuçların deneysel olarak kontrolünü gerçekleştirmişlerdir.

Kıral ve Ertepinar (1974) uzaysal çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemleri Timoshenko kiriş teorisi kullanarak elde etmişlerdir. Ayrıca, Kıral ve ark. (1976) zamana bağlı yükler altında viskoelastik eğri eksenli çubukların zorlanmış titreşimini incelemişlerdir.

Guido ve ark. (1978) silindirik helisel yayların titreşim modlarını Timoshenko kiriş teorisi kullanarak hesaplamışlardır. Teorik olarak elde ettikleri mod şekillerini deneysel olarak elde ettikleri şekiller ile karşılaştırmışlardır.

Mottershead (1980) Wittrick'in elde ettiği diferansiyel denklemleri kullanarak doğal frekans ve mod şekillerini özdeğer problemi çözümüyle elde etmiştir. Diferansiyel denklemleri integre ederek deplasman fonksiyonlarını helisel çubuk için elde etmiştir.

Pearson (1982) taşıma matrisi yöntemini kullanarak çift simetrik kesite sahip statik yüklü sıkıştırılmış helisel çubukların serbest titreşim davranışını incelemiştir. Serbest titreşim modlarını literatürde verilen deneysel sonuçlar ile karşılaştırmıştır.

Pearson ve Wittrick (1986) helisel çubukların titreşim davranışını eksenel ve kayma deformasyonu etkileri ile burulma ataletinin etkilerini yok sayarak dinamik rijitlik matrisi yöntemi ile çözmüşlerdir.

Lin ve Pisano (1987) daire kesitli sıkıştırılmış helisel yayların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemleri değişken helis yükselme açısı ve yarıçapı durumlarını göz önüne alarak Hamilton prensibi yardımı ile elde etmişlerdir. Ayrıca, Lin ve Pisano (1988) eğrilik, tabii burulma ve yükleme durumlarını da hesaba katan diferansiyel denklemlerin çözümünü yapmışlardır.

Tabarrok ve ark. (1988a-b) geometrik uygunluk koşulları ve bünye bağıntılarını kullanarak yaptıkları çözümden elde ettikleri deplasman modlarını baz fonksiyonları olarak belirlemiş ve uzaysal çubukların statik ve serbest titreşim analizleri için yeni bir sonlu eleman tanımlamışlardır.

Nagaya (1989) helisel çubukların dinamik gerilme ve sönümlü deplasman hesaplarını taşıma matrisi, Laplace dönüşümü, Fourier açılımı ve Fourier açılımı düzenleme yöntemlerini bir arada kullanarak yapmıştır. Dairesel kesite sahip bir helisel çubuğun çözümünden elde edilen sonuçları oval kesitli bir helisel çubuğa göre karşılaştırarak belirli bir ovalliğe sahip çubukların daire kesitli çubuklara göre daha avantajlı olduğunu söylemiştir.

Haktanır (1990) silindirik helisel çubukların statik ve dinamik davranışını taşıma matrisi yöntemini kullanarak incelemiştir. Homojen malzeme ve üniform kesite sahip silindirik helisel çubukları incelemiştir. Haktanır ve Kırıl (1993) eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini dahil ederek, silindirik helisel çubukların statik analizini taşıma matrisi yöntemi ile yapmışlardır. Ayrıca, Haktanır (1995) tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanarak çeşitli yükler altındaki silindirik helisel çubukların statik analizini yapmıştır.

Jiang ve ark. (1991) eksenel ve burulma titreşimlerini incelemiştir. Helisin titreşiminde iki dalga olduğunu, bunların ayrı ayrı basit dalgalar olduğunu ancak birleşim ve süperpozisyon durumlarından dolayı helis hareketinin karmaşık bir hal aldığını söylemişlerdir.

Omurtag ve Aköz (1992) karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak helisel çubukların davranışını incelemişlerdir. İki düğüm noktasında 12 serbestlik içeren bu elemanda lineer interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır.

Xiong ve Tabarrok (1992) çeşitli yüklemeler altındaki uzaysal eğri eksenli çubuğun serbest titreşim analizi için statik yüklemeler altındaki deplasman ve dönmeleri de hesaba katan bir sonlu eleman geliştirmişlerdir. Sonlu elemanın şekil fonksiyonları olarak başlangıç şartlarını içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerini kullanmışlardır.

Yıldırım (1996) helisel çubukların serbest titreşim davranışını idare eden 12 adet diferansiyel denkleme taşıma matrisi yardımı ile çözmüştür. Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan doğal frekans değerlerini araştırmıştır. Ayrıca, Yıldırım (1999a) silindirik helisel çubukların serbest titreşimini toplanmış kütle matrisi kullanarak özdeğer problemi haline getirerek çözmüştür.

Yıldırım (1999b, 2001a-b) tek doğrultuda, Yıldırım ve ark. (1999) ise çapraz tabakalı kompozit helisel çubukların serbest titreşimini taşıma matrisi yöntemi ile çözmüşlerdir. Ayrıca, Yıldırım ve Sancaktar (2000) birinci derece kayma deformasyonu teorisini kullanarak elde ettikleri çapraz tabakalı silindirik helisel çubukların serbest titreşimine ait diferansiyel denklemleri taşıma matrisi yöntemi ile çözmüşlerdir. Yıldırım (2009) silindirik helisel çubuğun burkulma analizini taşıma matrisi yöntemi yardımıyla incelemiştir. Yıldırım (2016a) Castigliano'nun birinci teoremini silindirik helisel çubukların lineer elastik problemlerinin çözümünde doğrudan kullanmıştır. Açık ve kapalı sarmal silindirik helisel çubukların uç deplasmanları için kapalı formda formülasyonlar vermiştir. Yıldırım (2016b) statik yükleme altındaki homojen ve izotropik silindirik helisel çubukların serbest titreşimini taşıma matrisi yardımı ile çözmüştür. Lee ve Thompson (2001) helisel yayların serbest titreşim analizi için Wittrick-Williams algoritmasını kullanarak efektif bir metot geliştirmiştir. Elde edilen sonuçlar taşıma matrisi ve sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Çalım (2003) viskoelastik, anizotropik silindirik helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizini yapmıştır. Laplace uzayında helisel çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımı ile sayısal olarak çözülmüştür. Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşümü yardımı ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Temel ve Çalım (2003) silindirik helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak yapmışlardır. Temel (2004) tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile viskoelastik silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşim analizini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile yapmıştır. Temel ve ark. (2004)

viskoelastik helisel çubukların quasi-statik ve dinamik analizini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile yapmışlardır. Analizlerde, Kelvin tipi viskoelastik model kullanmışlardır. Temel ve ark. (2005) tek doğrultulu ve tabakalı kompozit helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşimini incelemişlerdir. Tabakalı kompozit helisel çubukların aktif sarım sayısı, helis yükselme açısı, tabaka sayısı ve açı değişimlerinin dinamik davranışa etkilerini araştırmışlardır. Lee (2007) silindirik helisel çubukların serbest titreşim analizini yapmış ve mod şekillerini hesaplamıştır. Deplasmanlar ve dönmeleri Chebyshev polinomlarının seri açılımlarını yaparak yaklaşık olarak hesaplamıştır. Çeşitli sınır şartlarının serbest titreşim frekanslarına olan etkisini irdelemiştir.

Yu ve Yang (2010) silindirik helisel çubukların serbest titreşim analizi üzerine analitik bir çalışma yürütmüşlerdir. Analitik ifadeler sembolik olarak Mathematica programı yardımıyla çözülmüştür.

Yu ve Hao (2011) dairesel olmayan kesite sahip silindirik helislerin serbest titreşimini idare eden, kesitin çarpılma etkilerinin de dahil edildiği, diferansiyel denklem takımını Mathematica programını kullanarak analitik olarak çözmüşlerdir.

Eratlı ve ark. (2014) viskoelastik silindirik ve konik helisel çubuklarda burulma ataletinin dinamik davranışa etkisini araştırmışlardır. Elde edilen denklemler karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Viskoelastik durumda, Kelvin ve lineer standart viskoelastik modelleri kullanmışlardır.

Kobelev (2020) uzun süreli yükleme altındaki plastik deformasyon yapmış helisel çubukların üzerindeki yükün kalkması halinde artık olarak kalan gerilme ve deformasyonların hesabı için analitik bir formülasyon önermiştir.

2.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar

Nagaya ve ark. (1986) varil ve hiperbolik helisel çubukların serbest titreşimini, üç boyutlu eğri eksenli kiriş teorisini taşıma matrisi yöntemi yardımı ile çözmüşlerdir. Teorik ve sayısal sonuçları literatürdeki örnekler ile uyumunu tablolar halinde sunmuşlardır.

Yıldırım (1997) silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşiminin çözümü için taşıma matrisi ve tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanmıştır. Ayrıca burulma ataleti, eksenel ve kayma deformasyonlarını göz önünde bulundurarak konik, varil ve hiperbolik helisel çubukların serbest titreşimini incelemiştir (Yıldırım, 1998). Yıldırım (2002) iki ucu ankastre daire kesitli helisel çubukların boyutsuz temel frekanslarının hesabı için basit bir formül

önermiştir. Konik helisel çubukların serbest titreşim davranışını incelemiştir (Yıldırım, 2004). Yıldırım (2012) basınç ve burkulma etkileri altındaki silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim ve burkulma analizini yapmıştır. Kaçar ve Yıldırım (2016) eksenel yüke maruz tek doğrultuda kompozit malzemeli silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim ve burkulma analizlerini yapmışlardır.

Yıldırım ve İnce (1997) silindirik olmayan helisel çubukların doğal frekanslarını yayılı kütle kabulü yaparak taşıma matrisi yöntemi ile çözmüşlerdir. Parametrik bir çalışma yapılarak helis yükselme açısı, aktif sarım sayısı, en küçük helis yarıçapının en büyük helis yarıçapına oranı ve silindir yarıçapının kesit yarıçapına oranının helisel çubuğun serbest titreşim frekanslarına etkisini araştırmışlardır.

Çalım (2009a-b) homojen/tabakalı kompozit silindirik olmayan helisel çubuklarla ilgili yaptığı parametrik çalışmada helis narinliği, aktif sarım sayısı, helis yükselme açısı ve en küçük helis yarıçapının en büyük helis yarıçapına oranının dinamik davranışına etkisini araştırmıştır.

Yu ve Hao (2013a-b) simetrik çapraz tabakalı kompozit dikdörtgen kesitli silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim analizini incelemiştir. Geliştirilmiş Ricatti taşıma matrisi ile elde ettikleri sonuçları ANSYS sonlu eleman programından aldıkları sonuçlar ile karşılaştırmışlardır.

Eratlı ve ark. (2015) silindirik ve silindirik olmayan helis geometrisindeki çubukların tüp kesite sahip olması halinde etkilenen parametrelerini incelemiştir. Karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak serbest titreşim analizi yapmışlardır. Eratlı ve ark. (2016) dairesel olmayan kesitlerin burulma ataletinin doğrudan hesaplanabilmesi için bir metot ortaya koymuşlardır. Ardından boş ve dolu kesitli dairesel ve dairesel olmayan kesite sahip helisel çubukların serbest titreşim analizlerini yapmışlardır.

Ermiş ve ark. (2016) viskoelastik hiperbolik helisel yayların zorlanmış titreşim analizini incelemiştir. Farklı yüklemeler altında ince ve kalın cidarlı daire kesite sahip helisel çubukların dinamik davranışını incelemiştir. Ermiş ve Omurtag (2017) geometrik tanımı kesin ve yaklaşık olarak yapılmış olan silindirik olmayan helisel çubukların zorlanmış titreşimini karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir.

Arıbaş ve Omurtag (2019) kesin geometriye sahip tabakalı konik helisel çubukların statik analizini karışık sonlu elemanlar yöntemi ile yapmışlardır. Arıbaş ve ark. (2019) eksen geometrisini kesin olarak tanımladıkları dairesel olmayan kesite sahip kompozit konik helisel çubukların statik ve dinamik analizini karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak

yapmışlardır. Arıbaş ve ark. (2020) eliptik kesitli kompozit helisel çubukların zorlanmış titreşim analizini karışık sonlu elemanlar yöntemiyle yapmışlardır.

2.3. Değişken Kesitli/Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Helisel Çubuklar

Busool ve Eisenberger (2002) değişken kesitli silindirik ve silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşimini incelemişlerdir. Dinamik rijitlik matrisi yöntemi kullanılarak sistemi idare eden diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Girgin (2006) karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini yapmıştır. Sonlu elemanlar tanımında rijitlik ve kütle matrisleri esas helis geometrisi kullanılmıştır.

Liu ve Sheng (2007a-b) silindirik bir çeper tarafından sınırlandırılmış olan daire kesitli elastik ve viskoelastik ortamdaki helisel çubukların stabilite ve serbest titreşimini analitik olarak incelemişlerdir.

Yousefi ve Rastgoo (2011) fonksiyonel derecelenmiş uzaysal çubukların serbest titreşimini Ritz yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Birinci derece kayma deformasyonu teorisi kullanarak düzlemsel ve uzaysal eğri eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını elde etmişlerdir.

Wang ve ark. (2020) değişken kesitli silindirik helisel çubukların serbest titreşim davranışını dinamik rijitlik matrisi yardımı ile incelemişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ABAQUS programı ile çözümleri karşılaştırmışlardır.

Calim ve Cuma (2020) değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik ve varil helisel çubukların serbest titreşim analizini taşıma ve rijitlik matrisi yöntemini kullanarak yapmışlardır. Ayrıca, Calim ve Cuma (2021) değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik helisel çubukların zorlanmış titreşim davranışlarını incelemişlerdir.

Cuma ve Calim (2021a) değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubukların serbest titreşim davranışını incelemişlerdir. Elde edilen denklemler taşıma matrisi yöntemi yardımı ile çözmüşlerdir. Malzeme ve kesit değişimlerinin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Buna ek olarak, Cuma ve Çalim (2021b) eksenel fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesitli silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşimini incelemişlerdir. Kesit değişimi, malzeme değişimi, aktif sarım sayısı gibi parametrelerin zorlanmış titreşim davranışı üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Cuma ve Calim (2022) değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik hiperbolik ve varil helisel çubukların zorlanmış titreşim analizini yapmışlardır. Laplace

uzayında silindirik olmayan helisel çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler taşıma matrisi yardımı ile çözülmüştür. Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşümü ile zaman uzayına geçmişlerdir. Kesit ve malzeme değişimi ile sönüm oranının helisel olmayan çubuklarda zorlanmış titreşim davranışa etkileri araştırılmıştır.



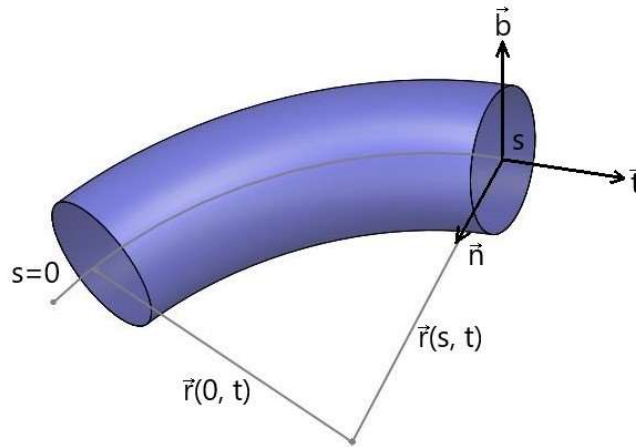
3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. Uzaysal Çubuğun Geometrisi

Silindirik ve silindirik olmayan helisel çubuklar, uzaysal eğri eksenli çubukların özel halleridir. Uzaysal bir çubuğun geometrisi yerel veya global eksen takımında tanımlanabilmektedir (Şekil 3.1). Ancak uzaysal bir çubuğun eksen geometrisinin yerel koordinatlar kullanılarak tanımlanması kolaylık sağlamaktadır. Yerel koordinat takımının çubuk eksenini boyunca hareketli olduğu kabul edilmektedir. Bu eksen takımının birim vektörleri $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ olarak belirlenmiştir. Çubuk eksenini, $\mathbf{r}$ konum vektörü ile ifade edilebilir. Bu vektör çubuk ekseninin değişkeni s 'e bağlı olarak yazılabilir (İnan 1964, 1966).

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) \quad (3.1)$$

s değişkeni, eğri eksenli uzaysal çubuk üzerindeki iki nokta arasındaki mesafeyi ifade eden skaler bir büyüklüktür.



Şekil 3.1. Uzaysal çubuk geometrisi

Konum vektörü $\mathbf{r}$ ile teğet birim vektörü arasında $\mathbf{t} = \partial \mathbf{r}(s, t) / \partial s$ şeklinde bir diferansiyel ilişki vardır. Yerel koordinat takımının birim vektörleri, $\mathbf{t}$ teğet birim vektör, çubuk eksen doğrultusunda, $\mathbf{n}$ normal birim vektör, çubuk ekseninin düzleminde eğrilik merkezi doğrultusunda, $\mathbf{b}$ bi-normal birim vektör diğer iki vektörün oluşturduğu düzleme dik, teğet ve normal vektörlerin vektörel çarpımı ($\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$) şeklinde tanımlanmaktadır. Hesap yapılan kesit ile birlikte hareket eden yerel koordinat takımının birim vektörleri arasında Frenet formülleri denilen diferansiyel bir ilişki bulunmaktadır (Sokolnikoff & Redheffer, 1958).

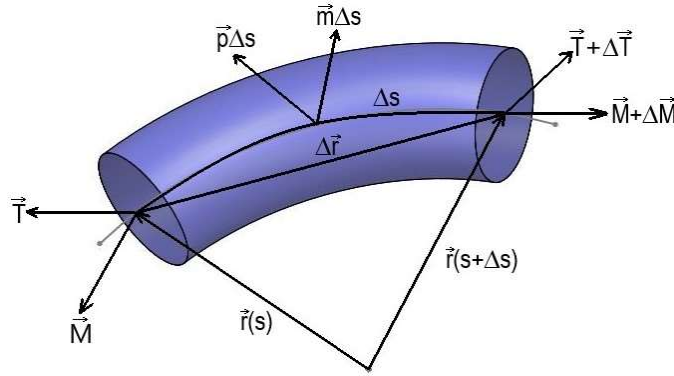
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} &= \chi \mathbf{n} \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} &= \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t} \\
\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} &= -\tau \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Burada, χ eğrilik olarak adlandırılan skaler bir büyüklük olup daima pozitif değer almaktadır. τ ise çubuk ekseninin tabii burulması olarak adlandırılan uzaysal bir eğriliği ifade etmek için kullanılır. Tabii burulmanın (τ) sıfır olması düzlemsel eğri eksenli çubuğu ifade etmekle beraber bu değer pozitif veya negatif olabilir.

3.2. Uzaysal Çubuğa Ait Denklemler

3.2.1. Denge Denklemleri

Sonsuz küçüklükteki bir çubuk eleman üzerine ve kesitlerine etkiyen kuvvetler Şekil 3.2’de verilmiştir. Kesit tesirleri ile dış kuvvetler arasında türevsel bağıntılar bulunmaktadır. Bu bağıntı eğri eksenli uzaysal çubuğun dengede olması şartı ile elde edilmektedir.



Şekil 3.2. Uzaysal çubuğun dengesi

Yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile şekilde verilen diferansiyel elemanda kuvvet ve moment dengesi yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında hareket denklemleri,

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{p}^{(dis)} = \mathbf{p}^{(at)}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m}^{(dis)} = \mathbf{m}^{(at)} \tag{3.3}$$

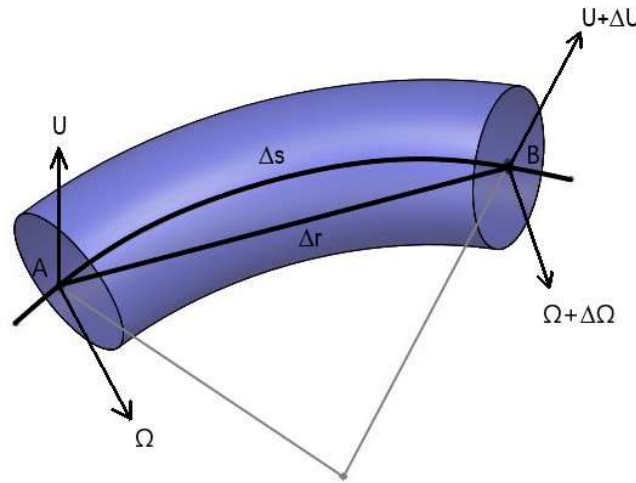
halini almaktadır. Burada, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ iç kuvvet ve moment vektörü, çubuk elemanın birim uzunluğuna etkiyen, $\mathbf{p}^{(dış)}$ yayılı dış kuvvet, $\mathbf{m}^{(dış)}$ yayılı dış moment, $\mathbf{p}^{(at)}$ kütleel atalet kuvveti ve $\mathbf{m}^{(at)}$ kütleel atalet momenti olarak adlandırılır. Kütleel atalet kuvveti ve kütleel atalet momenti vektörlerinin bileşenleri

$$\mathbf{p}^{(at)} = \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{m}^{(at)} = \rho \mathbf{I} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

olarak verilmektedir. Burada, ρ kütleel yoğunluk, A kesit alanı ve $\mathbf{I}$ ise atalet momentidir.

3.2.2. Uygunluk Denklemleri

Çubuğun şekil ve yer değıştirmesi göz önüne alındığında çubuktaki herhangi bir A noktası B noktası konumuna gelecektir (Şekil 3.3). $\mathbf{U}$ çubuk eksenindeki yerdeğıştirmeyi, $\boldsymbol{\Omega}$ ise çubuk dik kesitindeki dönmeyi ifade etmektedir.



Şekil 3.3. Uzaysal çubuk eksenindeki yerdeğıştirme ve dönmeler

Çok küçük olduğu kabul edilen yerdeğıştirme vektörü $\mathbf{U}$ ve dönme vektörü $\boldsymbol{\Omega}$ arasında diferansiyel bağıntı bulunmaktadır. Ayrıca birim uzunluktaki bir çubuk eleman için tarif edilen iki vektör daha mevcuttur. Bunlar, rölatif birim kayma $\boldsymbol{\gamma}$ ve rölatif birim dönme $\boldsymbol{\omega}$ vektörleridir. Rölatif birim kayma ve rölatif birim dönmenin tarifi için kesit dönmesinin sıfır alınmadığı durumda aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} - \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.5)$$

3.2.3. Bünye Denklemleri

Kesit tesirleri ($\mathbf{T}, \mathbf{M}$) ile şekil değiştirmeler ($\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}$) arasında malzeme özellikleri ile belirlenen bağıntı bulunmaktadır. Malzemenin homojen, izotrop ve elastik olduğu kabul edildiğinde bu bağıntılar Hooke kanunu kapsamında aşağıdaki hali almaktadır.

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B} \boldsymbol{\omega} \quad (3.6)$$

Burada, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ çubuğun kaymaya ve dönmeye karşı rijitliğini tanımlayan, geometrik ve malzeme sabitlerini içeren matrislerdir. Çubuk kesitinin tanımlanmasında kullanılan eksen takımının, kesitin simetri eksenleri ve $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ eksenleri ile çakışması halinde (3.6) denklemlerindeki rijitlik matrisleri diyagonal hale gelmektedir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA}{\alpha_n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GA}{\alpha_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} GI_b & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.3. Uzaysal Çubuk Bilinmeyenleri ve Denklemlerin Toplanması

Uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden, hareket denklemleri (3.3), uygunluk denklemleri (3.5) ve bünye denklemlerinden (3.6) elde edilen vektörel formda 6 adet denklem bulunmaktadır. (3.6) denklemlerinde bulunan rölatif birim kayma ve dönme ($\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$) ifadeleri yerlerine yazılarak denklem sayısı 4'e indirgenmektedir. Bunlar iç kuvvet ($\mathbf{T}$), iç moment ($\mathbf{M}$), yer değiştirme ($\mathbf{U}$) ve dönme ($\boldsymbol{\Omega}$) vektörleridir. Böylece uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler vektörel formda (3.8) denklemlerindeki hali almaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T} &= 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{p}^{(d_t s)} &= \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m}^{(d_t s)} &= \rho \mathbf{I} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Vektörel formda elde edilmiş olan diferansiyel denklemler, hareketli koordinat takımında skaler bileşenleri cinsinden 12 adet diferansiyel denklem olarak elde edilmektedir. Kayma ve ağırlık merkezlerinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının olmadığı durumda eğri eksenli uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial s} - \chi U_n - \frac{T_t}{EA} &= 0 \\
\frac{\partial U_n}{\partial s} + \chi U_t - \tau U_b - \Omega_b - \frac{\alpha_n T_n}{GA} &= 0 \\
\frac{\partial U_b}{\partial s} + \tau U_n + \Omega_n - \frac{\alpha_b T_b}{GA} &= 0 \\
\frac{\partial \Omega_t}{\partial s} - \chi \Omega_n - \frac{M_t}{GI_t} &= 0 \\
\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} + \chi \Omega_t - \frac{M_n}{EI_n} - \tau \Omega_b &= 0 \\
\frac{\partial \Omega_b}{\partial s} + \tau \Omega_n - \frac{M_b}{EI_b} &= 0 \\
\frac{\partial T_t}{\partial s} - \chi T_n + p_t^{(d\iota s)} &= \rho A \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \\
\frac{\partial T_n}{\partial s} + \chi T_t - \tau T_b + p_n^{(d\iota s)} &= \rho A \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \\
\frac{\partial T_b}{\partial s} + \tau T_n + p_b^{(d\iota s)} &= \rho A \frac{\partial^2 U_b}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_t}{\partial s} - \chi M_n + m_t^{(d\iota s)} &= \rho I_t \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_n}{\partial s} + \chi M_t - \tau M_b - T_b + m_n^{(d\iota s)} &= \rho I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_b}{\partial s} + \tau M_n + T_n + m_b^{(d\iota s)} &= \rho I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.4. Laplace Dönüşümü

Eğri eksenli uzaysal çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler yere ve zamana bağlıdır. Bu diferansiyel denklemlerin daha kolay çözülebilmesi için Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Bu dönüşüm sayesinde eğri eksenli uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden denklemler zamandan bağımsız hale gelmektedir. Böylece denklem takımı adi diferansiyel denklem takımına dönüşmektedir.

Zamana bağılı bir fonksiyonun Laplace uzayına dönüşümü $L[f(t)] = \bar{F}(p)$ olarak sembolize edilebilir.

$$\bar{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.10)$$

Burada, p Laplace parametresidir. Zamana bağılı fonksiyonun birinci ve ikinci mertebe türevleri

$$\begin{aligned} L[\dot{f}(t)] &= p\bar{F}(p) - f(0) \\ L[\ddot{f}(t)] &= p^2\bar{F}(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Sistemin $t = 0$ anında durağan olması halinde $f(0)$ ve $\dot{f}(0)$ olan başlangıç şartları sıfır olmaktadır. Bu durumda zamana bağılı terimlerin Laplace dönüşümleri

$$L\left[\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right] = p^2 \rho A \bar{\mathbf{U}} \quad L\left[\rho \mathbf{I} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2}\right] = p^2 \rho \mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\Omega}} \quad (3.12)$$

halini alır. Böylece, Laplace uzayında eğri eksenli uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler kanonik formda aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{U}}_t}{ds} &= \chi \bar{\mathbf{U}}_n + \frac{\bar{\mathbf{T}}_t}{EA} \\ \frac{d\bar{\mathbf{U}}_n}{ds} &= -\chi \bar{\mathbf{U}}_t + \tau \bar{\mathbf{U}}_b + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b + \frac{\alpha_n \bar{\mathbf{T}}_n}{GA} \\ \frac{d\bar{\mathbf{U}}_b}{ds} &= -\tau \bar{\mathbf{U}}_n - \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n + \frac{\alpha_b \bar{\mathbf{T}}_b}{GA} \\ \frac{d\bar{\boldsymbol{\Omega}}_t}{ds} &= \chi \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n + \frac{\bar{\mathbf{M}}_t}{GI_t} \\ \frac{d\bar{\boldsymbol{\Omega}}_n}{ds} &= -\chi \bar{\boldsymbol{\Omega}}_t + \frac{\bar{\mathbf{M}}_n}{EI_n} + \tau \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b \\ \frac{d\bar{\boldsymbol{\Omega}}_b}{ds} &= -\tau \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n + \frac{\bar{\mathbf{M}}_b}{EI_b} \\ \frac{d\bar{\mathbf{T}}_t}{ds} &= p^2 \rho A \bar{\mathbf{U}}_t + \chi \bar{\mathbf{T}}_n - \bar{\mathbf{p}}_t^{(dt_s)} \\ \frac{d\bar{\mathbf{T}}_n}{ds} &= p^2 \rho A \bar{\mathbf{U}}_n - \chi \bar{\mathbf{T}}_t + \tau \bar{\mathbf{T}}_b - \bar{\mathbf{p}}_n^{(dt_s)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{ds} = p^2 \rho A \bar{U}_b - \tau \bar{T}_n - \bar{p}_b (d\iota_s)$$

$$\frac{d\bar{M}_t}{ds} = p^2 \rho I_t \bar{\Omega}_t + \chi \bar{M}_n - \bar{m}_t (d\iota_s)$$

$$\frac{d\bar{M}_n}{ds} = p^2 \rho I_n \bar{\Omega}_n - \chi \bar{M}_t + \tau \bar{M}_b + \bar{T}_b - \bar{m}_n (d\iota_s)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{ds} = p^2 \rho I_b \bar{\Omega}_b - \tau \bar{M}_n - \bar{T}_n - \bar{m}_b (d\iota_s)$$

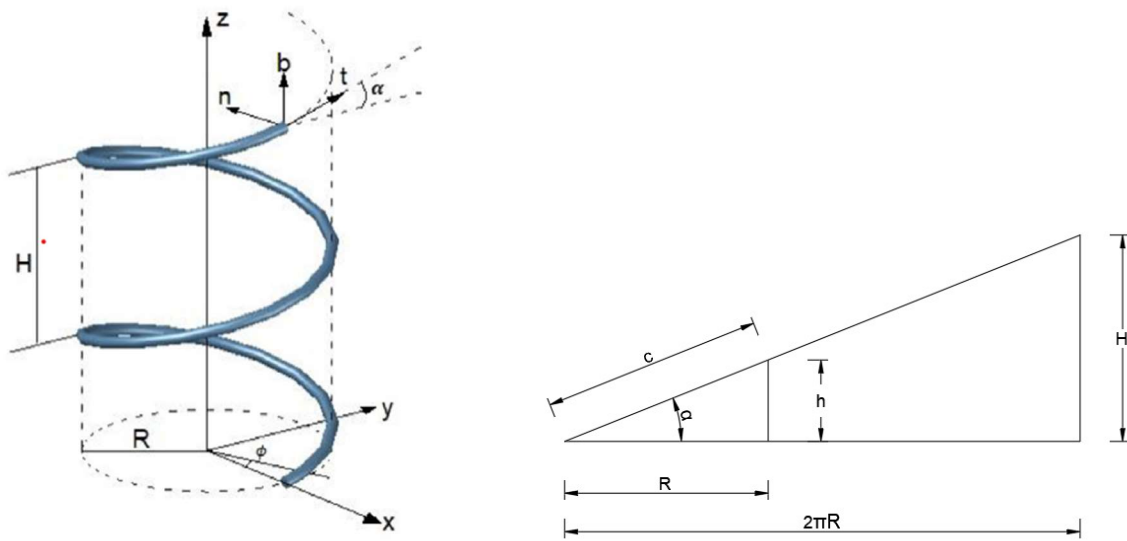
3.5. Helisel Çubuklar

3.5.1. Silindirik Helisel Çubuklar

Helisel çubuklar, eğri eksenli uzaysal çubukların özel hali olarak sunulabilir. Helisel çubukların parametrik denklemleri taban dairesi üzerinden ölçülen ϕ açısı kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi, \quad z = h \phi \quad (3.14)$$

ϕ açısı taban dairesinin düzleminde dairenin merkezine yerleştirilen kartezyen koordinat sisteminin pozitif x yönünden saat yönünün tersine ölçülen açıdır. R ise helisel çubuğun sarıldığı silindirin yarıçapıdır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. Silindirik helisel çubuk geometrisi ve helis birim radyan açılımı

Burada, α helisin yükselme açısı, h birim radyan devirdeki yükselme miktarı ve H bir tam turdaki yükselme miktarıdır (Şekil 3.4b). Helis yükselme açısı ve yükselme miktarları arasında (3.15) ifadesindeki geometrik bağıntılar vardır.

$$h = \frac{H}{2\pi}, \quad \tan \alpha = \frac{H}{2\pi a} = \frac{h}{R} \quad (3.15)$$

Ayrıca, Şekil 3.4b'den aşağıdaki bağıntılar elde edilebilir.

$$\sin \alpha = \frac{h}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{R}{c}, \quad c = \sqrt{R^2 + h^2} \quad (3.16)$$

Burada, R ve c değerleri sırasıyla helisin sarıldığı silindirin yarıçapı ve bir radyan dönmedeki helis parçasının uzunluğudur. Helisin diferansiyel elemanın uzunluğu,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{R^2 + h^2} d\phi = c d\phi \quad (3.17)$$

halini almaktadır. Silindirik helisel çubuğun sarıldığı silindirin çapı olan R sabittir. Dolayısıyla eğrilik ve tabii burulma değerleri de sabit olmaktadır.

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{R}{c^2} = \text{sabit}, \quad \tau = \frac{h}{c^2} = \text{sabit} \quad (3.18)$$

Laplace uzayında eğri eksenli uzaysal çubuklar için elde edilmiş olan (3.13) denklemlerinde (3.17) ve (3.18) ifadeleri yerine yazılarak silindirik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}_t}{d\phi} &= \frac{R}{c} \bar{U}_n + c \frac{\bar{T}_t}{EA} \\ \frac{d\bar{U}_n}{d\phi} &= -\frac{R}{c} \bar{U}_t + \frac{h}{c} \bar{U}_b + c \bar{\Omega}_b + c \frac{\alpha_n \bar{T}_n}{GA} \\ \frac{d\bar{U}_b}{d\phi} &= -\frac{h}{c} \bar{U}_n - c \bar{\Omega}_n + c \frac{\alpha_b \bar{T}_b}{GA} \\ \frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} &= \frac{R}{c} \bar{\Omega}_n + c \frac{\bar{M}_t}{GI_t} \\ \frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} &= -\frac{R}{c} \bar{\Omega}_t + \frac{h}{c} \bar{\Omega}_b + c \frac{\bar{M}_n}{EI_n} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} &= -\frac{h}{c}\bar{\Omega}_n + c\frac{\bar{M}_b}{EI_b} \\
\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} &= p^2 c \rho A \bar{U}_t + \frac{R}{c}\bar{T}_n - \bar{p}_t^{(d\iota\varsigma)} \\
\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} &= p^2 c \rho A \bar{U}_n - \frac{R}{c}\bar{T}_t + \frac{h}{c}\bar{T}_b - \bar{p}_n^{(d\iota\varsigma)} \\
\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} &= p^2 c \rho A \bar{U}_b - \frac{h}{c}\bar{T}_n - \bar{p}_b^{(d\iota\varsigma)} \\
\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} &= p^2 c \rho I_t \bar{\Omega}_t + \frac{R}{c}\bar{M}_n - \bar{m}_t^{(d\iota\varsigma)} \\
\frac{d\bar{M}_n}{d\phi} &= p^2 c \rho I_n \bar{\Omega}_n - \frac{R}{c}\bar{M}_t + \frac{h}{c}\bar{M}_b + c\bar{T}_b - \bar{m}_n^{(d\iota\varsigma)} \\
\frac{d\bar{M}_b}{d\phi} &= p^2 c \rho I_b \bar{\Omega}_b - \frac{h}{c}\bar{M}_n - c\bar{T}_n - \bar{m}_b^{(d\iota\varsigma)}
\end{aligned}$$

3.5.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar

Hiperbolik ve varil helisel çubuklarda silindir çapı R taban açısı ϕ 'ye bağlı olarak değişmektedir (Şekil 3.5). Bu durumda çubuğun sarıldığı silindirin yarıçap değişimi ile ilgili fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$R(\phi) = R_1 + (R_2 - R_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2 \quad (3.20)$$

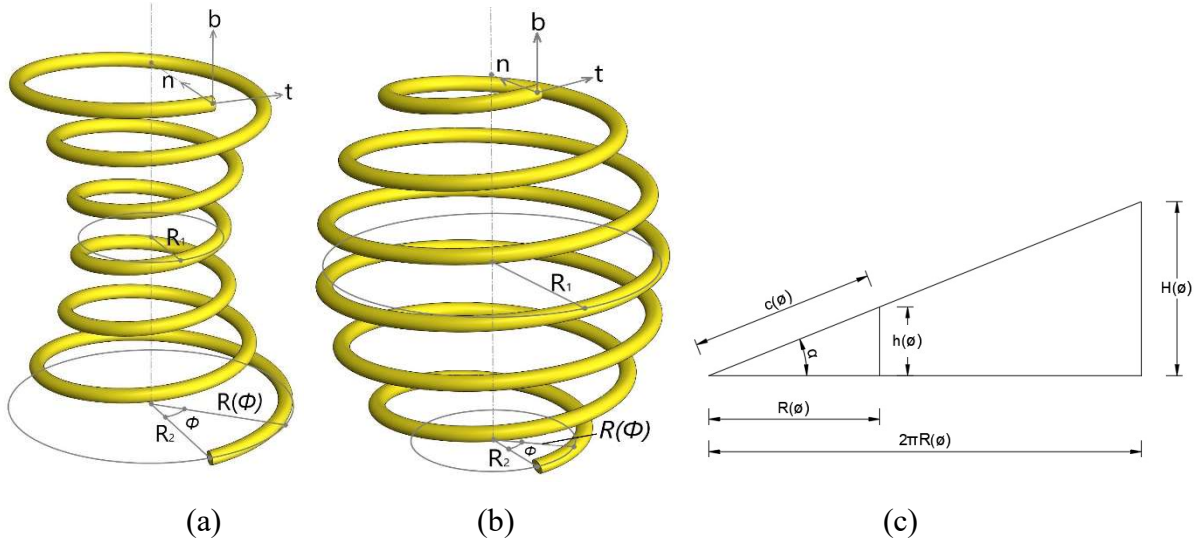
Burada, R_1 ve R_2 sırasıyla orta ve başlangıç/sondaki silindir yarıçapı, n ise helisin aktif sarım sayısıdır. Diferansiyel elemanın uzunluğu

$$ds = \sqrt{R(\phi)^2 + h(\phi)^2} d\phi = c(\phi) d\phi \quad (3.21)$$

haline gelmektedir. Eğrilik ve tabii burulma ifadeleri sırasıyla,

$$\chi(\phi) = \frac{R(\phi)}{c(\phi)^2}, \quad \tau(\phi) = \frac{h(\phi)}{c(\phi)^2} \quad (3.22)$$

olur.



Şekil 3.5. (a) Hiperbolik helis, (b) varil helis, (c) helis birim radyan açılımı

Laplace uzayında eğri eksenli uzaysal çubuklar için elde edilen (3.13) denklemlerinde (3.21) ve (3.22) ifadeleri yerlerine yazılarak silindirik olmayan helisel çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{U}_t}{d\phi} &= \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{U}_n + c(\phi) \frac{\bar{T}_t}{EA} \\
 \frac{d\bar{U}_n}{d\phi} &= -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{U}_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{U}_b + c(\phi) \bar{\Omega}_b + c(\phi) \frac{\alpha_n \bar{T}_n}{GA} \\
 \frac{d\bar{U}_b}{d\phi} &= -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{U}_n - c(\phi) \bar{\Omega}_n + c(\phi) \frac{\alpha_b \bar{T}_b}{GA} \\
 \frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} &= \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{\Omega}_n + c(\phi) \frac{\bar{M}_t}{GI_t} \\
 \frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} &= -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{\Omega}_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{\Omega}_b + c(\phi) \frac{\bar{M}_n}{EI_n} \\
 \frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} &= -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{\Omega}_n + c(\phi) \frac{\bar{M}_b}{EI_b} \\
 \frac{d\bar{T}_t}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho A \bar{U}_t + \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{T}_n - \bar{p}_t^{(d\iota\varsigma)} \\
 \frac{d\bar{T}_n}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho A \bar{U}_n - \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{T}_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{T}_b - \bar{p}_n^{(d\iota\varsigma)} \\
 \frac{d\bar{T}_b}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho A \bar{U}_b - \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{T}_n - \bar{p}_b^{(d\iota\varsigma)}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho I_t \bar{\Omega}_t + \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{M}_n - \bar{m}_t^{(d\iota s)} \\ \frac{d\bar{M}_n}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho I_n \bar{\Omega}_n - \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \bar{M}_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{M}_b + c(\phi) \bar{T}_b - \bar{m}_n^{(d\iota s)} \\ \frac{d\bar{M}_b}{d\phi} &= p^2 c(\phi) \rho I_b \bar{\Omega}_b - \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \bar{M}_n - c(\phi) \bar{T}_n - \bar{m}_b^{(d\iota s)}\end{aligned}$$

3.6. Viskoelastik Davranış

Mühendislik problemlerinin çözümünde genel olarak Hooke kanununun geçerli olduğu kabul edilmektedir. Sürtünmenin olmadığı ideal sistemlerde elastik hareketten bahsedilmektedir. Ancak çevresel etkiler veya malzemelerin iç yapısından dolayı sürtünmesiz sistemler imkansızdır. Bu nedenle sönüm hareketinin viskoelastik bünye bağıntıları ile malzeme davranışına yansıtılması daha gerçekçi sonuçların elde edilmesini sağlayacaktır. Malzemenin iç sürtünmesinden oluşan sönüm etkisi, elastik-viskoelastik analogisi yardımı ile hesaplanabilir (Boley, ve Weiner 1960, Çalım 2003, Temel ve Çalım 2003, Noori ve ark. 2018). Çözümlerde, Kelvin viskoelastik modeli kullanılmıştır. Bu durumda, elastik malzeme sabitleri yerine Laplace uzayında kompleks karşılıkları olan viskoelastik malzeme sabitleri,

$$E_v = E(1 + gp) \quad G_v = G(1 + gp) \quad (3.24)$$

kullanılmaktadır. Burada, alt indis $_v$ viskoelastik malzeme sabitlerini ifade etmektedir. g ve p ise sırasıyla viskoelastik sönüm oranını ve Laplace dönüşüm parametresini ifade etmektedir. Malzemenin viskoelastik olması durumunda, silindirik ve silindirik olmayan helis çubukların dinamik davranışını idare eden (3.19) ve (3.23) denklemlerinde görülen elastik sabitler E ve G yerine (3.24) ifadesindeki viskoelastik sabitler E_v ve G_v ifadesi kullanılarak çözüm yapılmaktadır.

3.7. Helisel Çubukların Serbest ve Zorlanmış Titreşimi

3.7.1. Zorlanmış Titreşim

Helisel çubukların zorlanmış titreşimini idare eden skaler formdaki diferansiyel denklemler silindirik helisel çubuklar için (3.19) ifadesinde, silindirik olmayan helisel çubuklar için ise (3.23) ifadesinde verilmiştir. Zorlanmış titreşim durumu için Laplace uzayında $\bar{S}(\phi, p)$ durum vektörünün elemanları (3.25) ifadesinde verilmektedir.

$$\bar{\mathbf{S}}(\phi, p) = \{\bar{\mathbf{U}}_t, \bar{\mathbf{U}}_n, \bar{\mathbf{U}}_b, \bar{\mathbf{\Omega}}_t, \bar{\mathbf{\Omega}}_n, \bar{\mathbf{\Omega}}_b, \bar{\mathbf{T}}_t, \bar{\mathbf{T}}_n, \bar{\mathbf{T}}_b, \bar{\mathbf{M}}_t, \bar{\mathbf{M}}_n, \bar{\mathbf{M}}_b\} \quad (3.25)$$

Laplace uzayında elde edilen (3.19) ve (3.23) denklem takımı matris notasyonunda yazılırsa.

$$\frac{d\bar{\mathbf{S}}(\phi, p)}{d\phi} = \bar{\mathbf{D}}(\phi, p) \bar{\mathbf{S}}(\phi, p) + \bar{\mathbf{Y}}(\phi, p) \quad (3.26)$$

ifadesi bulunur. Burada, $\bar{\mathbf{Y}}(\phi, p)$ yük vektördür. Bu vektörün elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_i(\phi, p) &= -p_k^{(dt_s)} \quad (i = 7, 8, 9) \\ \bar{\mathbf{Y}}_i(\phi, p) &= -m_k^{(dt_s)} \quad (i = 10, 11, 12) \quad k = (t, n, b) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eleman yük vektöründen elde edilen değerler sistem yük vektöründeki ilgili koordinatlara standart kodlama tekniği ile aktarılmaktadır. Tekil yükler, düğüm yükü olarak doğrudan sistem yük vektörüne eklenmektedir. Hareketli koordinat takımı ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$) ile kartezyen koordinat takımı ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) arasında aşağıdaki ilişki bulunmaktadır.

$$\begin{bmatrix} V_t \\ V_n \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R}{c}\right) \sin\phi & \left(\frac{R}{c}\right) \cos\phi & \frac{h}{c} \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \left(\frac{h}{c}\right) \sin\phi & -\left(\frac{h}{c}\right) \cos\phi & \frac{R}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Laplace uzayında elde edilen sonuçların tekrar zaman uzayına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu dönüşüm Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşümü algoritması kullanılarak yapılmaktadır (Dubner ve Abate 1968, Durbin 1974, Narayanan 1979).

$$\begin{aligned} f(t_j) &\cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{\mathbf{F}}(a)\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \bar{\mathbf{F}}(p_k) L_k e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)jk} \right\} \right\} \right] \\ k = 0 \text{ için } L_k &= 1, k > 0 \text{ için } L_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Burada, L_k Lanczos faktörü, i karmaşık sayı, k . Laplace dönüşüm parametresi $p_k = a + i\frac{2\pi k}{T}$ dır. Burada, T toplam çözüm süresi ve N çözümde kullanılan toplam parametre sayısıdır. $f(t)$ değeri $t_j = j\Delta t = jT/N$, ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) için hesaplanmaktadır. Çözümlerde aT değeri 6 olarak seçilmiştir.

3.7.2. Serbest Titreşim

Dış yükler sıfır alınarak ($\mathbf{p}^{dis} = \mathbf{m}^{dis} = 0$) serbest titreşim analizi yapılmıştır. Serbest titreşim analizi için sistemin harmonik titreşim yaptığı kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\phi, t) &= \mathbf{U}(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{\Omega}(\phi, t) &= \mathbf{\Omega}(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{T}(\phi, t) &= \mathbf{T}(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{M}(\phi, t) &= \mathbf{M}(\phi) e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{3.30}$$

(3.30) denkleminde verilen vektörler (3.8) ifadelerinde yerine yazıldığında 12 adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklem elde edilir. Serbest titreşim durumu, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır. Zorlanmış titreşim için elde edilen diferansiyel geçiş matrisinde Laplace parametresi p yerine $i\omega$ yazılarak serbest titreşim analizi için kullanılan diferansiyel geçiş matrisi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{\mathbf{S}}(\phi)}{d\phi} = \bar{\mathbf{D}}(\phi, \omega) \bar{\mathbf{S}}(\phi)\tag{3.31}$$

(3.31) denklemindeki diferansiyel geçiş matrisi $\bar{\mathbf{D}}(\phi, \omega)$ kullanılarak elde edilen taşıma matrisi yardımı ile hesaplanan dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri sistemin doğal frekanslarını vermektedir.

3.8. Taşıma Matrisi Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Taşıma matrisi yöntemi başlangıç koşulları yardımıyla elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Durum vektörü ile birinci türevi arasındaki bağıntıyı sağlayan (3.26) ve (3.31) ifadelerinde verilen $\bar{\mathbf{D}}$ diferansiyel geçiş matrisi kullanılarak taşıma matrisi elde edilmiştir. Taşıma matrisi sistemin bir konumdan diğeri arasında geçişini veya bir başka deyişle sistemin bir konumdan diğere taşınmasını sağlayan matristir. Bu matris kullanılarak çok basit bir şekilde eleman rijitlik matrisleri elde edilebilmektedir. Eleman rijitlik matrislerinden standart kodlama tekniği ile sistem rijitlik matrisine geçiş sağlanmıştır.

3.8.1. Durum Vektörü

Herhangi bir sistemin durumunu ifade etmek için sistem koordinatı adı verilen ve bir x değerine bağlı n tane değer aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s_i(x) \quad \{i = 1, 2, 3, \dots, n\} \quad (3.32)$$

Sistem koordinatlarının herhangi bir x değeri için sistemin durumunu belirten bir durum vektörü $\mathbf{S}(x)$ oluşturulabilir. Durum vektörünün elemanlarının birinci türevlerinin olduğu kabul edilerek, $\mathbf{S}(x)$ ile $\mathbf{S}'(x)$ arasındaki bağıntının kanonik tasviri lineer olarak yapıldığında,

$$\begin{aligned} s_1'(x) &= d_{11}s_1(x) + d_{12}s_2(x) + \dots + d_{1n}s_n(x) \\ s_2'(x) &= d_{21}s_1(x) + d_{22}s_2(x) + \dots + d_{2n}s_n(x) \\ &\dots \\ s_n'(x) &= d_{n1}s_1(x) + d_{n2}s_2(x) + \dots + d_{nn}s_n(x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde n adet denklem verilebilir. d_{ij} katsayıları sistem koordinatlarından bağımsızdır. Ancak x değişkenine bağlı fonksiyonlar da olabilir. (3.33) denklemleri kapalı formda aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\mathbf{S}'(x) = \mathbf{D} \mathbf{S}(x) \quad (3.34)$$

$\mathbf{D}$ kare matrisi (3.33) denkleminde verilen d_{ij} katsayılarının oluşturduğu diferansiyel geçiş matrisi olarak adlandırılmaktadır. Türevin tarifi kullanılarak

$$\mathbf{S}(x + dx) = \mathbf{S}(x) + [\mathbf{D} \mathbf{S}(x)]dx \quad (3.35)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade x konumundan $x + dx$ konumuna geçişi tarif etmektedir. (3.33) ifadesinde verilmiş olan kanonik denklemler sistemin mekanik özelliklerinin tanımlandığı denklemlerdir. (İnan 1964, 1966; Haktanır 1990)

3.8.2. Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi

Sistemin $x = 0$ konumundan herhangi bir x konumuna geçişi sağlanabilir. Bu geçişi sağlayan matrise taşıma matrisi adı verilmektedir. Durum vektörünün $x = 0$ konumundan herhangi bir x konumuna geçişi kapalı formda,

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{F}(x) \mathbf{S}(0) \quad (3.36)$$

olarak ifade edildiğinde $\mathbf{F}(x)$ matrisi n^2 sayıda fonksiyondan oluşan kare formda verilen bir matristir. $\mathbf{F}(x)$ matrisinin hesaplanması için (3.36) denkleminin iki tarafının türevi alındığında

$$\mathbf{S}'(x) = \mathbf{F}'(x) \mathbf{S}(0) \quad (3.37)$$

olur. (3.34) denkleminden faydalanılarak

$$\mathbf{D} \mathbf{S}(x) = \mathbf{F}'(x) \mathbf{S}(0) \quad (3.38)$$

yazılabilir. $\mathbf{S}(x)$ yerine (3.36) denkleminden yola çıkılarak

$$\mathbf{D} [\mathbf{F}(x) \mathbf{S}(0)] = \mathbf{F}'(x) \mathbf{S}(0) \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$[\mathbf{D} \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}'(x)] \mathbf{S}(0) = 0 \quad (3.40)$$

halinde gösterilir. Böylece,

$$\mathbf{F}'(x) = \mathbf{D} \mathbf{F}(x) \quad (3.41)$$

denklemini elde edilir. (3.41) ifadesinden de anlaşılacağı üzere $\mathbf{S}(x)$ kolon matrisi ile $\mathbf{F}(x)$ kare matrisi aynı denklemini sağlamaktadır.

$\mathbf{D}$ 'nin bütün elemanlarının sabit olması halinde (3.41) diferansiyel denklemin çözümü çok basit olmaktadır. $\mathbf{F}(x)$ fonksiyonu için eksponansiyel bir çözüm fonksiyonu bulunur.

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(0) e^{x\mathbf{D}} \approx e^{x\mathbf{D}} \quad (3.42)$$

Burada, $\mathbf{F}(0)$ ifadesi $\mathbf{F}(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ konumundaki halidir. Bu konumdaki taşıma matrisi birim matristir. $e^{x\mathbf{D}}$ ise bir matris polinomudur ve Taylor serisi ile ifade edilebilir (İnan 1964, 1966; Haktanır 1990).

$$\mathbf{F}(x) = e^{x\mathbf{D}} = \mathbf{I} + x\mathbf{D} + \frac{x^2}{2!}\mathbf{D}^2 + \dots + \frac{x^k}{k!}\mathbf{D}^k + \dots \quad (3.43)$$

$\mathbf{F}(x)$ taşıma matrisinin hassasiyeti seriden alınan terim sayısının artırılması ile sağlanabilir. Burada, $\mathbf{D}$ diferansiyel geçiş matrisi silindirik ve silindirik olmayan helisel çubuklar için Ek-A'da verilmiştir.

Taşıma matrisinden dinamik rijitlik matrisine geçiş için çubuk elemanın başlangıcındaki serbestlikleri ifade eden durum vektörü $\bar{\mathbf{S}}_1(\phi, p)$ sonundaki serbestlikleri içeren durum vektörü

ise $\bar{\mathbf{S}}_2(\phi, p)$ olsun. Bu durumda deplasmanlar, dönmeler, iç kuvvet ve momentler aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_1(\phi, p) &= \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^T \\ \bar{\mathbf{S}}_2(\phi, p) &= \{d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}\}^T\end{aligned}\tag{3.44}$$

Burada, her bir d_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) değerine verilen birim deplasman için eleman rijitlik matrisi $\mathbf{k}$ 'nın i . sütunundaki elemanlar (f_j $\{j = 1, 2, \dots, 12\}$) aranmaktadır. $d_i = \delta_{ij}$ durumunda f_j değerleri,

$$\bar{\mathbf{S}}_2(\phi, p) = \bar{\mathbf{F}}(\phi, p) \bar{\mathbf{S}}_1(\phi, p)\tag{3.45}$$

eşitliği her bir deplasman değeri için çözülerek hesaplanmaktadır. Eleman dinamik rijitlik matrislerindeki ifadeler standart kodlama tekniği ile sistem dinamik rijitlik matrisindeki ilgili serbestliğe aktarılmaktadır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların dinamik davranışını incelemek için çeşitli örnekler ele alınmıştır. Bu örnekler, değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizini içermektedir. Dinamik davranışın seyrini anlamak maksadıyla kesit değişim parametresi, malzeme değişim parametresi, aktif sarım sayısı, helis yükselme açısı, sönüm oranı, R_2/R_1 oranı gibi birçok parametrenin etkileri araştırılmıştır. Önerilen yöntemin geçerliliğini göstermek amacı ile literatürde bulunan örnekler çözülmüştür. Sonrasında değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı parametrik olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatür ve/veya sonlu eleman yöntemine dayalı ANSYS programı sonuçları ile karşılaştırılarak tablo ve grafik formatlarında görselleştirilmiştir.

4.1. Sabit Kesitli Silindirik Helisel Çubuk

İki ucu ankastre sabit kesit ve homojen malzemeye sahip silindirik helisel çubuğun serbest titreşim analizi yapılmıştır. Problem, literatürde birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Silindirik helisel çubuğa ait geometrik ve malzeme özellikleri: silindir yarıçapı $R = 5 \text{ mm}$, dairesel kesitin çapı $d = 1 \text{ mm}$, helis yükselme açısı $\alpha = 8.5744^\circ$, aktif sarım sayısı $n = 7.6$, elastisite modülü $E = 206 \text{ GPa}$ ve kütsel yoğunluk $\rho = 7900 \text{ kN/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ ve kayma düzeltme katsayıları $\alpha_n = \alpha_b = 1.1$. Silindirik helisel çubuğa ait ilk 6 serbest titreşim frekansı Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. Sabit kesitli silindirik helisel çubuğun doğal frekansları (Hz)

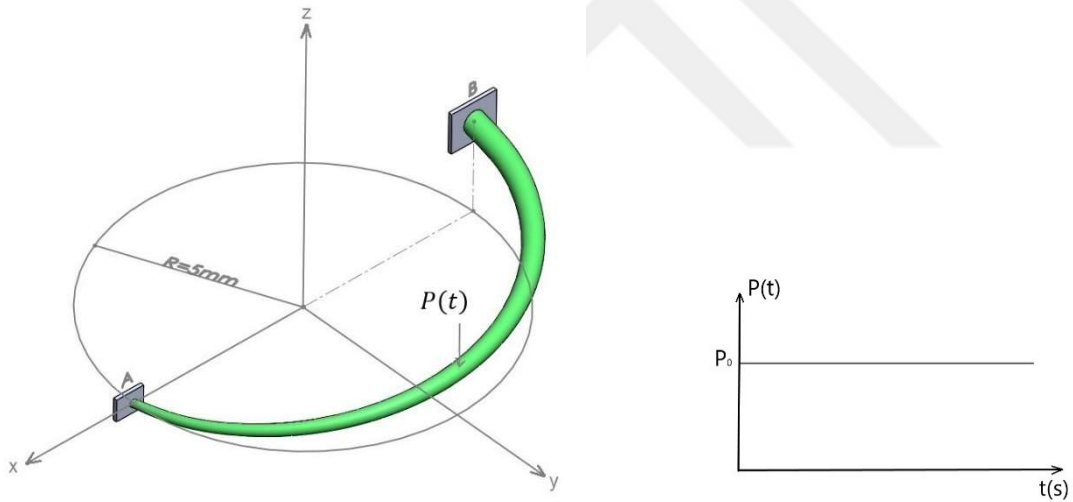
Mod	Mottershead (1980)	Pearson (1982)	Xiong ve Tabarrok (1992)	Yıldırım (1996)	Çalım (2003)	ANSYS	Bu çalışma
1	391.00	394.90	395.00	393.50	393.40	393.64	393.42
2	391.00	397.60	398.00	395.90	395.90	396.20	395.99
3	459.00	456.40	465.00	462.80	462.70	462.96	462.76
4	528.00	518.30	528.00	525.50	525.60	525.73	525.58
5	878.00	859.70	868.00	864.00	863.60	864.08	863.61
6	878.00	874.70	881.00	876.80	876.80	877.28	876.79

Tablo 4.1'den görülebileceği gibi, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatür ve ANSYS programından elde edilen sonuçlar uyumludur. Problem, önerilen yöntemde 100 eleman ve ANSYS programında 2000 doğrusal eleman (BEAM188) kullanılarak modellenmiştir.

4.2. Değişken Kesitli Silindirik Helisel Çubuk

İki ucu ankastre değişken dairesel kesitli silindirik helisel çubuğun serbest ve zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.1). Bu örnek literatürde Wang ve ark. (2020) tarafından ele alınmıştır. Malzeme ve geometrik özellikler: aktif sarım sayısı $n = 0.5$, elastisite modülü $E = 206 \text{ GPa}$, $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, helis yükselme açısı $\alpha = 8.5744^\circ$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, silindir yarıçapı $R = 5 \text{ mm}$. d_c , kesitin en küçük değeri olup 1 mm 'dir. Kesitin değişim fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$d(\phi) = d_c (1 + 0.2 \phi^2) \quad (4.1)$$



Şekil 4.1. Değişken kesitli silindirik helisel çubuk ve dinamik yük

Değişken kesitli silindirik helisel çubuğun serbest titreşim frekansları Tablo 4.2'de verilmiştir. Önerilen yöntemde değişken kesitli silindirik helisel çubuğun modellenmesi için 50 eleman kullanılmıştır. Problem, ANSYS programında 500 doğrusal eleman kullanarak modellenmiştir. Tablo 4.2 incelendiğinde, elde edilen sonuçların literatür ve ANSYS sonuçları ile uyumlu olduğu görülmektedir.

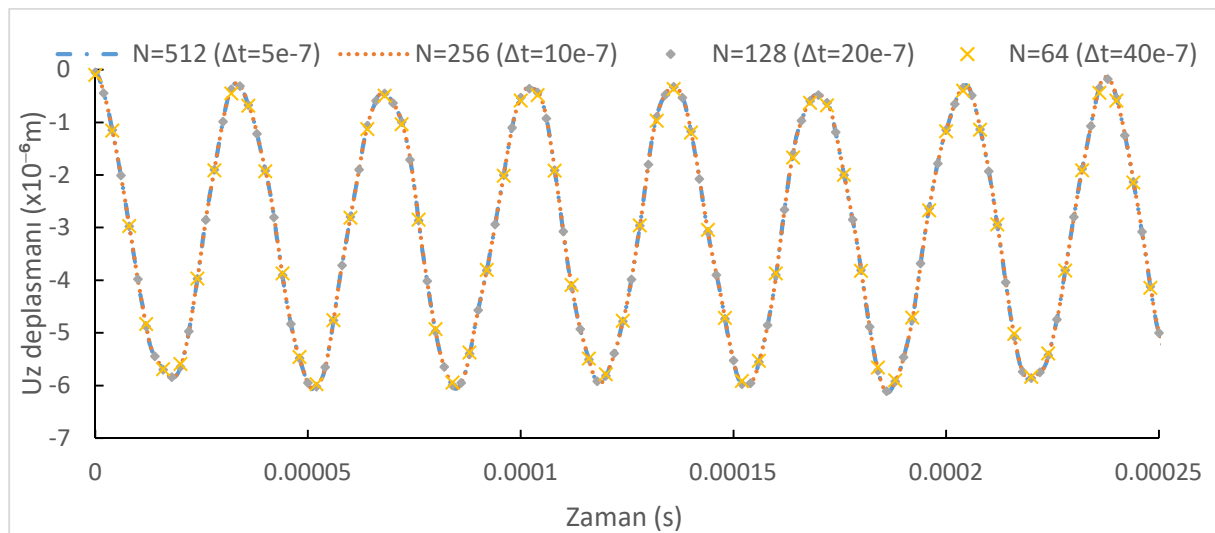
Tablo 4.2. Değişken kesitli homojen silindirik helisel çubuğun doğal frekansları (Hz)

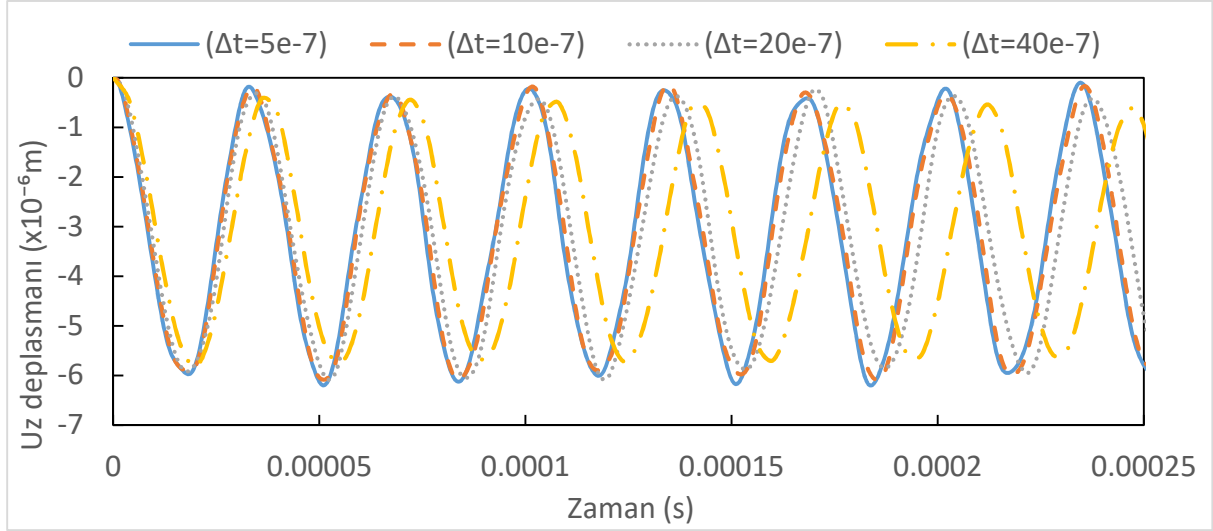
Mod	Wang ve ark. * (2020)	Wang ve ark. (2020)	ANSYS	Bu çalışma
1	29285	29861.2	29391.3	29566.2
2	55523	56890.3	55828.2	56021
3	66774	67996.9	67088.9	67389.4
4	98109	102480	98600.3	98795.5
5	121396	127470	122062.8	122511.2

*ABAQUS giriş elemanı

Serbest titreşim analizinden sonra ilgili problemin zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Serbest titreşim problemi ile aynı parametrelerin kullanıldığı bu örnekte helisel çubuğun orta noktasına $(P_0)_z = 10 \text{ N}$ büyüklüğünde adım tipi dinamik yük uygulanmıştır. Çözümlerde, toplam analiz süresi $T = 2.56 \times 10^{-4} \text{ s}$ ve zaman artımı $\Delta t = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$ olarak alınmıştır.

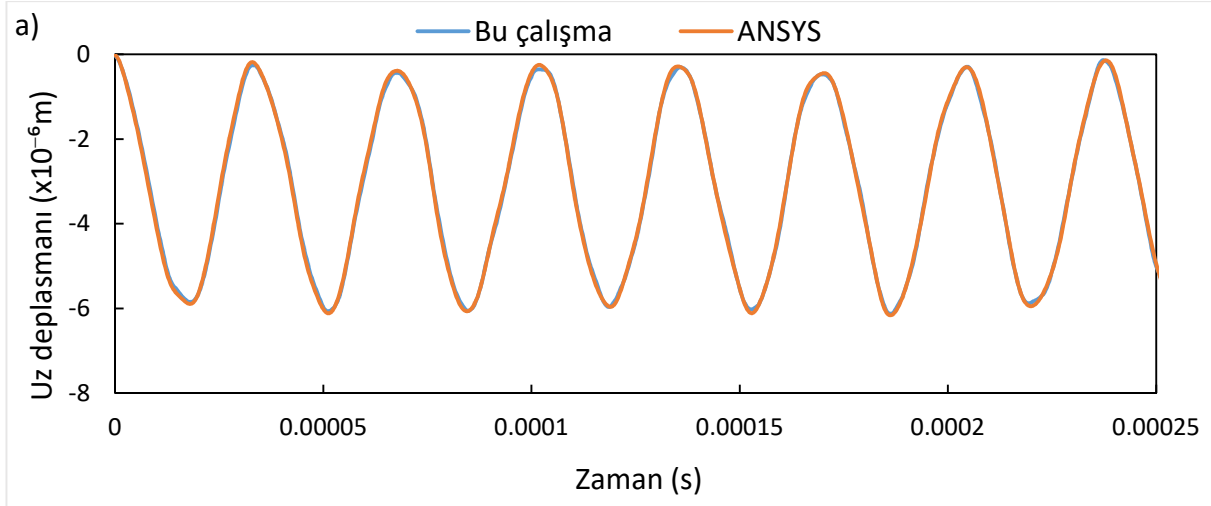
Farklı Laplace parametre sayısı ve zaman artımının çözümlere etkisi de incelenmiştir. Önerilen yöntemle çözümler Laplace uzayında, ANSYS programında Newmark adım adım integrasyon yöntemi kullanılarak zaman uzayında yapılmıştır. Farklı Laplace parametre sayısı ve zaman artımı değerleri için elde edilen helisel çubuğun orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de verilmiştir.

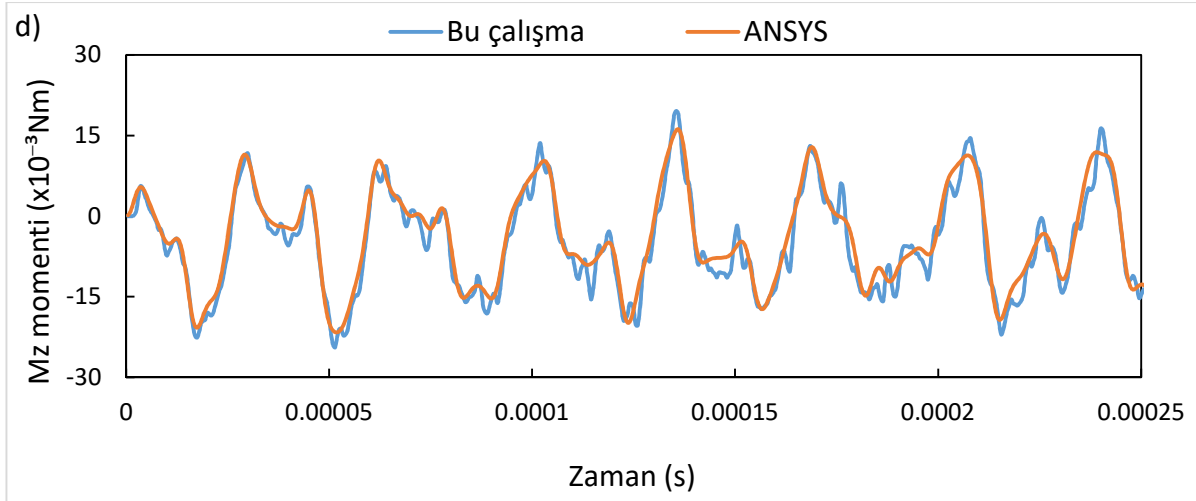
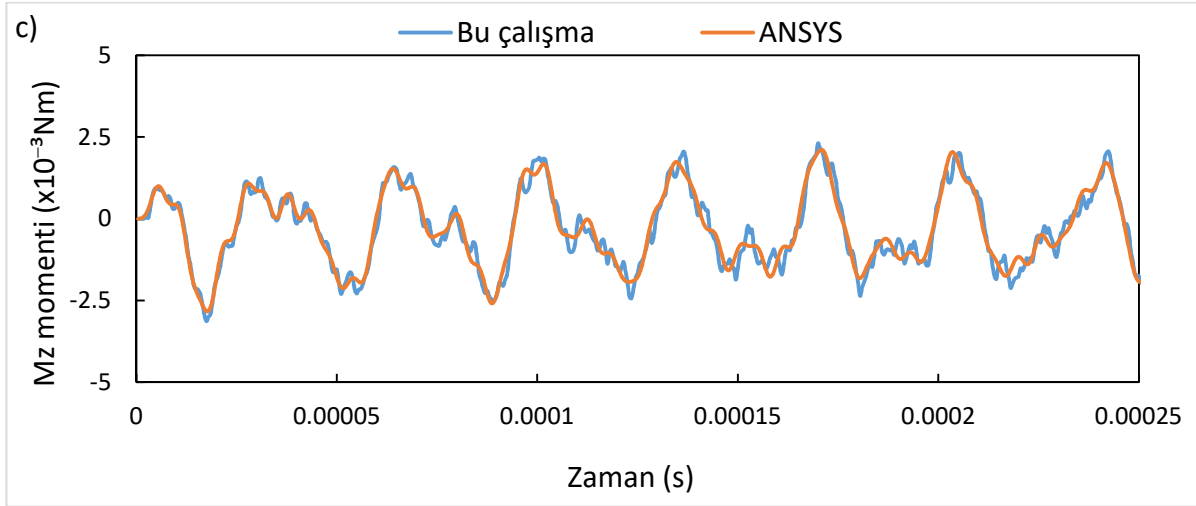
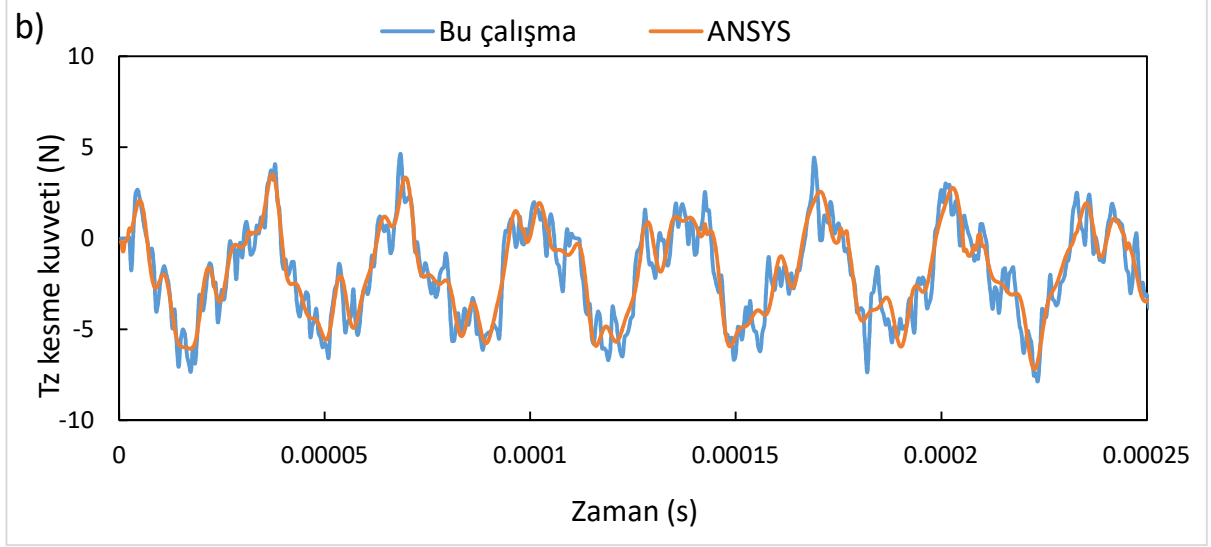
**Şekil 4.2.** Önerilen yöntem ile elde edilen deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 4.3. ANSYS programı ile elde edilen deplasmanın zamanla değişimleri

Şekil 4.2 incelendiğinde, önerilen yöntemle çözüm yaparken kullanılan farklı Laplace parametresi ve zaman artımlarında elde edilen sonuçların çakıştığı görülmektedir. Şekil 4.3 incelendiğinde ise farklı zaman artımı değerlerinde elde edilen sonuçların uyumsuz oldukları görülmektedir. ANSYS programı ile zaman uzayında çözüm yapıldığından zaman artımının seçimi önemli olup hassas sonuçlar elde edebilmek için küçük zaman artımı kullanılmalıdır.





Şekil 4.4. (a) Helisel çubuğun orta noktasındaki U_z deplasmanı, (b) A mesnedindeki T_z kesme kuvveti, (c) A mesnedindeki M_z momenti, (d) B mesnedindeki M_z momenti

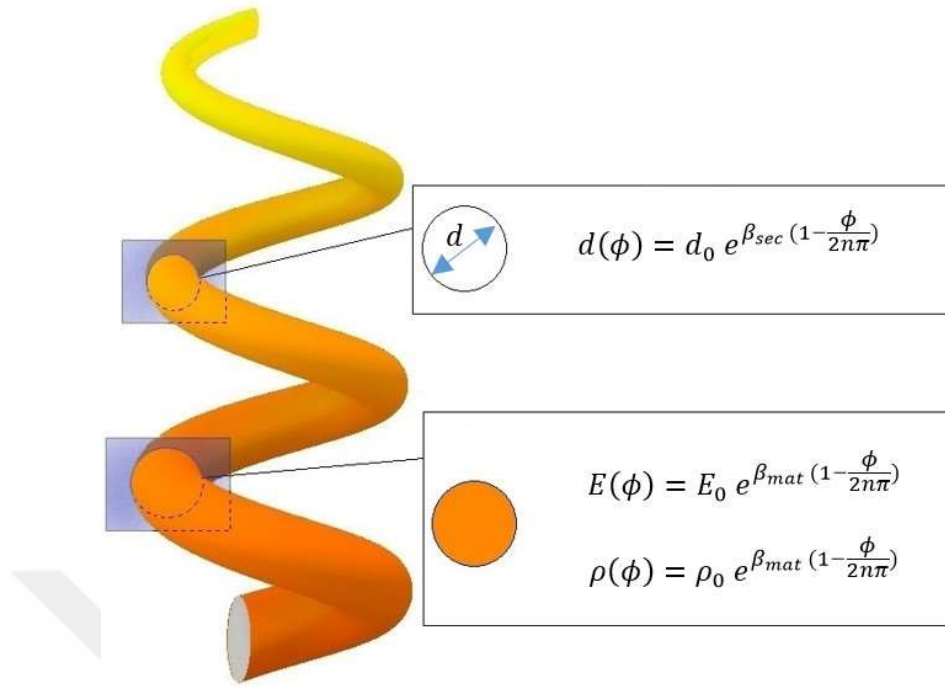
Değişken kesitli silindirik helisel çubuğun orta noktasındaki deplasman, A mesnedindeki kesme kuvveti ve moment ile B mesnedindeki momentin zamanla değişimleri Şekil 4.4’de verilmiştir. Değişken kesitli silindirik helisel çubuğun zorlanmış titreşimi için elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

4.3. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Helisel Çubuğun Serbest Titreşimi

İki ucu ankastre değişken kesit ve eksenel fonksiyonel derecelenmiş malzemeye sahip silindirik helisel çubuğun serbest titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.5). Bu tip helisel çubuklar malzeme ve geometrik özellikleri değişkenlik gösteren, örneğin korozyona uğramış bir helisel çubuğun modellenmesinde, özel tip problemlerde kullanılabilir. Malzeme ve geometrik özellikleri: kütleli yoğunluk $\rho_0 = 7900 \text{ kg/m}^3$, elastisite modülü $E_0 = 206 \text{ GPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, silindir yarıçapı $R = 5 \text{ mm}$ ve kesitin en küçük çapı $d = 1 \text{ mm}$. Kesit çapı ve malzeme özellikleri aşağıda verilen fonksiyonlara göre çubuk eksen boyunda değişim göstermektedir.

$$\begin{aligned} E(\phi) &= E_0 e^{\beta_{mat} \left(1 - \frac{\phi}{2n\pi}\right)}, & \rho(\phi) &= \rho_0 e^{\beta_{mat} \left(1 - \frac{\phi}{2n\pi}\right)} \\ d(\phi) &= d_0 e^{\beta_{sec} \left(1 - \frac{\phi}{2n\pi}\right)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Farklı parametrelerin değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubukların serbest titreşimi üzerine etkisi araştırılmıştır. Helis yükselme açısı ($\alpha = 5, 8.5744, 15$), aktif sarım sayısı ($n = 2, 4, 7.6$), malzeme değişim ($\beta_{mat} = 0.25, 0.50, 0.75$) ve kesit değişim ($\beta_{sec} = 0, 0.25, 0.50, 0.75$) parametresinin serbest titreşim davranışına etkisi incelenmiştir. Bu problem önerilen yöntemde 100 eleman, ANSYS ile 2000 doğrusal eleman (BEAM188) kullanılarak modellenmiştir.



Şekil 4.5. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubuk

Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubuklar için elde edilen ilk 4 serbest titreşim frekansları Tablo 4.3-4.5’de verilmiştir. İlgili tablolar incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen serbest titreşim frekanslarının ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir.

Helis yükselme açısı (α) ve aktif sarım sayısının (n) artması durumunda frekans değerleri azalırken kesit değişim (β_{sec}) ve malzeme değişim parametrelerinin (β_{mat}) artması ile frekans değerleri artmaktadır. Kesit değişim parametresi (β_{sec}) ve aktif sarım sayısı (n) frekans değerleri üzerinde çok etkilidir. Bununla beraber, helis yükselme açısı (α) frekansa etkisi bulunurken malzeme değişim parametresinin etkisi (β_{mat}) sınırlı kalmaktadır.

Tablo 4.3. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 2$) (Hz)

		$\alpha = 5^\circ$		$\alpha = 8,5744^\circ$		$\alpha = 15^\circ$	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0.25	0.00	1630.079	1627.838	1586.361	1586.140	1473.632	1473.458
		1860.551	1859.886	1841.368	1840.628	1795.812	1795.110
		2103.652	2103.075	2027.596	2026.999	1805.572	1804.978
		2354.529	2354.381	2481.652	2479.954	2339.882	2338.306
	0.25	1878.066	1875.324	1829.844	1827.259	1699.952	1697.548
		2134.386	2130.927	2107.660	2104.189	2001.548	1998.033
		2412.897	2409.130	2319.605	2316.025	2125.624	2122.333
		2693.117	2689.562	2852.608	2847.125	2673.022	2667.757
	0.50	2200.535	2194.589	2150.252	2144.456	1997.069	1991.826
		2475.534	2468.495	2434.594	2427.433	2272.878	2266.050
		2821.271	2813.225	2694.419	2686.856	2520.121	2513.218
		3122.658	3114.506	3336.919	3326.978	3097.585	3087.449
	0.75	2604.272	2593.909	2555.173	2545.208	2365.224	2355.973
		2896.150	2884.367	2838.374	2826.594	2646.775	2635.449
		3364.236	3350.374	3178.394	3165.435	2983.620	2971.744
		3666.646	3652.291	3930.978	3915.215	3656.478	3639.877
0.50	0.00	1634.420	1634.045	1590.604	1590.278	1477.503	1477.277
		1865.377	1864.820	1846.148	1845.403	1795.825	1795.110
		2106.522	2105.940	2029.295	2028.750	1811.729	1811.185
		2357.521	2357.405	2481.687	2480.114	2342.064	2340.375
	0.25	1895.658	1892.831	1847.230	1844.607	1715.825	1713.464
		2153.202	2149.867	2125.661	2122.174	2010.136	2006.627
		2426.739	2422.977	2328.782	2325.256	2142.852	2139.522
		2707.428	2703.726	2862.580	2857.311	2684.032	2678.580
	0.50	2232.909	2226.898	2182.364	2176.605	2026.035	2020.792
		2510.086	2503.032	2467.783	2460.537	2295.067	2288.173
		2851.717	2843.624	2716.242	2708.660	2548.432	2541.547
		3152.628	3144.268	3356.709	3346.872	3122.044	3111.800
	0.75	2651.898	2641.338	2602.746	2592.636	2406.579	2397.194
		2947.600	2935.615	2887.752	2875.773	2689.287	2677.943
		3416.876	3402.895	3219.149	3206.020	3022.194	3010.259
		3715.881	3701.310	3968.574	3952.616	3701.036	3684.281
0.75	0.00	1641.639	1641.207	1597.660	1597.440	1483.942	1483.803
		1873.398	1872.778	1854.096	1853.361	1797.148	1796.383
		2111.397	2110.874	2032.221	2031.615	1820.712	1820.097
		2362.568	2362.339	2482.424	2480.909	2345.714	2344.036
	0.25	1916.299	1913.521	1867.614	1864.979	1734.436	1732.085
		2175.402	2171.989	2147.019	2143.501	2020.786	2017.291
		2443.479	2439.688	2340.119	2336.556	2162.839	2159.575
		2724.346	2720.597	2873.464	2868.293	2696.899	2691.472
	0.50	2268.306	2262.230	2217.474	2211.619	2057.649	2052.305
		2548.009	2540.911	2504.370	2496.984	2320.649	2313.001
		2885.955	2877.683	2741.313	2733.648	2579.629	2572.583
		3185.768	3177.372	3379.652	3369.790	3149.045	3138.697
	0.75	2702.375	2691.631	2653.252	2642.929	2450.404	2440.802
		3002.332	2990.206	2940.223	2927.976	2735.427	2723.780
		3473.798	3459.554	3264.167	3250.902	3063.532	3051.321
		3768.610	3753.832	4010.372	3994.315	3748.886	3731.868

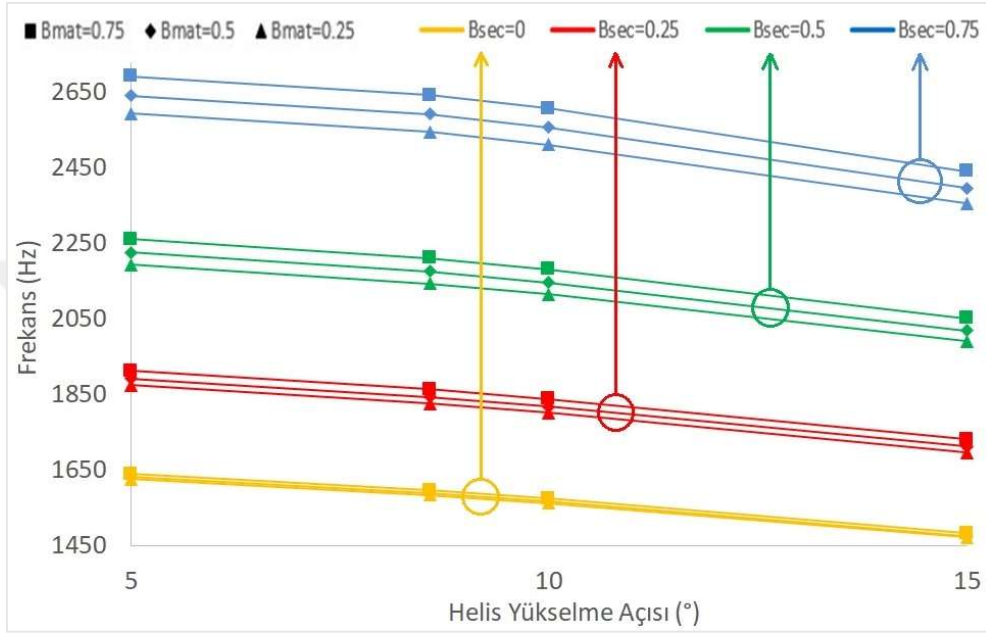
Tablo 4.4. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 4$) (Hz)

		$\alpha = 5^\circ$		$\alpha = 8,5744^\circ$		$\alpha = 15^\circ$	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0.25	0.00	865.282	865.008	843.422	843.204	721.735	721.450
		985.806	985.488	976.541	976.098	755.392	755.032
		1199.35	1199.07	1029.61	1029.26	895.841	895.406
		1248.21	1247.30	1081.06	1080.35	961.683	961.456
	0.25	995.096	993.446	969.734	968.299	825.450	824.105
		1131.55	1129.68	1114.07	1112.18	858.019	856.413
		1353.72	1351.55	1175.19	1173.29	1026.38	1024.48
		1417.82	1415.05	1228.57	1226.29	1105.36	1103.74
	0.50	1161.45	1158.17	1131.42	1128.25	952.791	949.997
		1313.17	1309.37	1270.41	1266.56	977.378	974.347
		1529.24	1524.87	1358.70	1355.05	1189.73	1186.18
		1617.63	1612.56	1404.46	1399.93	1289.05	1285.50
	0.75	1366.69	1361.25	1331.23	1325.92	1106.83	1102.15
		1530.86	1524.55	1447.92	1441.79	1119.19	1114.40
		1742.21	1735.11	1576.43	1570.07	1389.99	1384.17
		1860.82	1852.72	1629.14	1621.95	1515.89	1509.90
0.50	0.00	867.391	867.077	845.43	845.11	722.868	722.564
		988.164	987.876	978.67	978.33	755.976	755.509
		1199.27	1198.92	1030.29	1029.89	897.481	896.998
		1248.74	1247.78	1081.81	1081.14	963.898	963.684
	0.25	1003.65	1002.04	977.919	976.416	830.091	828.720
		1140.79	1138.91	1120.78	1118.86	860.518	858.960
		1355.03	1352.98	1180.16	1178.23	1033.09	1031.33
		1421.22	1418.39	1232.17	1229.79	1114.40	1112.81
	0.50	1177.15	1173.77	1146.52	1143.37	961.363	958.591
		1329.78	1325.92	1280.33	1276.58	982.877	979.918
		1535.81	1531.39	1370.65	1366.98	1202.37	1198.76
		1626.10	1620.99	1413.38	1408.84	1305.77	1302.21
	0.75	1389.00	1384.01	1353.392	1348.04	1119.29	1114.56
		1554.67	1548.26	1462.54	1456.27	1129.72	1125.07
		1757.34	1750.23	1592.71	1586.30	1409.10	1403.11
		1877.48	1869.28	1648.66	1641.53	1540.33	1534.26
0.75	0.00	870.895	870.578	848.759	848.456	724.745	724.474
		992.082	991.695	982.192	981.828	756.960	756.623
		1199.25	1198.92	1031.48	1031.01	900.210	899.704
		1249.66	1248.73	1083.07	1082.41	967.585	967.345
	0.25	1013.67	1012.07	987.501	985.966	835.485	834.132
		1151.64	1149.74	1128.33	1126.50	863.580	861.984
		1357.19	1355.05	1186.46	1184.59	1041.01	1039.12
		1425.32	1422.53	1236.54	1234.09	1125.03	1123.32
	0.50	1194.27	1190.96	1162.99	1159.76	970.645	967.822
		1347.93	1344.07	1290.89	1287.09	989.236	986.284
		1544.03	1539.67	1384.01	1380.19	1216.30	1212.60
		1635.92	1630.86	1423.90	1419.35	1324.05	1320.51
	0.75	1413.62	1407.89	1376.80	1371.28	1131.98	1127.14
		1579.89	1573.41	1478.27	1472.03	1141.96	1137.16
		1774.52	1767.26	1609.89	1603.33	1429.48	1423.48
		1895.98	1887.74	1670.45	1663.17	1566.13	1559.88

Tablo 4.5. Silindirik helisel çubuğun ilk 4 serbest titreşim frekansı ($n = 7.6$) (Hz)

		$\alpha = 5^\circ$		$\alpha = 8,5744^\circ$		$\alpha = 15^\circ$	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0.25	0.00	464.358	464.096	393.853	393.591	247.808	247.645
		515.670	515.503	396.413	396.137	249.749	249.714
		538.062	537.626	463.287	463.141	449.414	449.295
		556.836	556.565	526.251	526.008	512.586	512.479
	0.25	533.652	532.692	448.151	447.385	282.524	282.023
		589.672	588.874	451.125	450.250	284.728	284.251
		610.702	609.564	532.408	531.578	516.525	515.822
		635.324	634.233	605.116	604.153	589.301	588.396
	0.50	622.039	620.227	512.289	510.729	324.462	323.403
		677.434	675.613	516.131	514.548	326.983	325.950
		695.787	693.598	620.754	619.113	602.221	600.492
		732.851	730.681	706.040	703.943	687.168	685.163
	0.75	730.847	727.816	588.768	586.168	375.549	374.014
		777.684	774.449	594.404	591.739	378.515	376.879
		798.331	794.980	729.928	727.020	707.899	705.057
		855.611	851.957	830.799	827.447	807.318	804.051
0.50	0.00	465.444	465.210	394.187	393.909	248.063	247.964
		516.608	516.458	396.766	396.614	250.006	249.873
		538.358	537.944	464.360	464.255	450.466	450.409
		557.466	557.202	527.492	527.281	513.798	513.593
	0.25	538.043	537.148	449.591	448.817	283.614	283.137
		593.039	592.216	452.655	451.841	285.827	285.365
		612.190	610.996	536.741	535.875	520.765	519.960
		638.421	637.257	610.130	609.086	594.171	593.171
	0.50	630.083	628.185	515.247	513.593	326.684	325.631
		682.575	680.706	519.337	517.731	329.231	328.178
		699.497	697.258	628.732	627.071	609.992	608.291
		739.963	737.684	715.242	713.174	696.036	694.075
	0.75	742.543	739.434	593.880	591.261	379.309	377.675
		784.895	781.611	599.929	597.309	382.332	380.699
		805.284	801.823	741.614	738.639	719.221	716.357
		867.590	863.894	844.214	840.816	819.981	816.625
0.75	0.00	467.249	466.961	394.746	394.545	248.489	248.441
		518.146	518.050	397.356	397.092	250.437	250.351
		538.864	538.581	466.144	466.006	452.213	452.160
		558.541	558.316	529.555	529.350	515.811	515.662
	0.25	543.184	542.241	451.310	450.409	284.914	284.410
		596.831	596.036	454.490	453.592	287.139	286.638
		614.043	612.906	541.825	540.968	525.731	524.893
		642.251	638.053	616.005	614.975	599.874	598.901
	0.50	638.841	636.939	518.586	516.936	329.177	328.178
		687.976	686.118	522.947	521.233	331.755	330.724
		703.810	701.715	637.442	635.665	618.463	616.726
		748.095	745.801	725.273	723.201	705.682	703.625
	0.75	754.857	751.689	599.510	596.991	383.418	381.813
		792.644	789.409	605.979	603.357	386.507	384.837
		812.974	809.463	753.960	750.894	731.158	728.294
		880.534	876.785	858.363	854.822	833.219	829.835

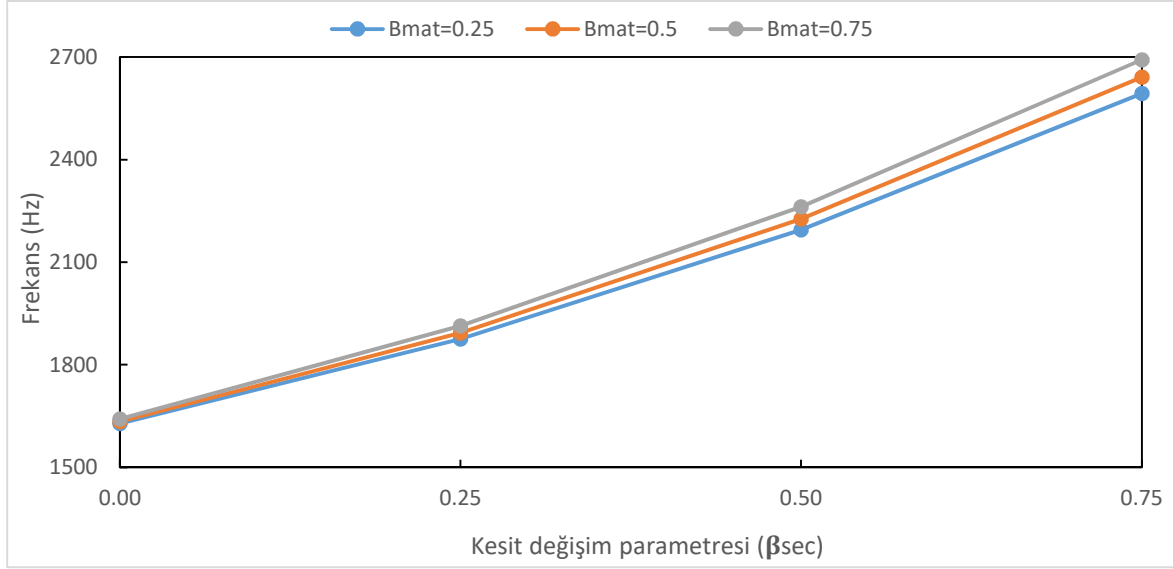
Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubuğun farklı helis yükselme açısı, malzeme ve kesit değişim parametreleri için temel frekanslar değerleri Şekil 4.6-4.8’da verilmektedir. Helis yükselme açısı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin temel frekanslara etkisi gösterilmektedir (Şekil 4.6-4.8).



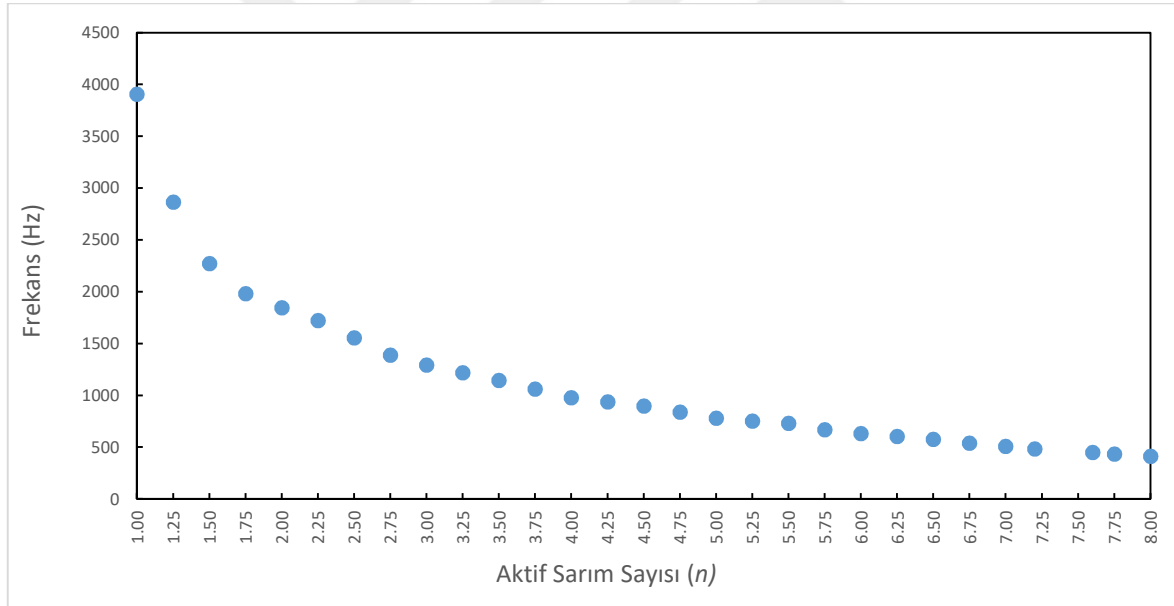
Şekil 4.6. Helis yükselme açısının temel frekanslar üzerindeki etkisi ($n = 2$)

Şekil 4.6 incelendiğinde, helis yükselme açısının artması ile temel frekansların azaldığı ve kesit değişim parametresinin artması ile temel frekansların arttığı görülmektedir. Ayrıca, sabit kesit durumunda ($\beta_{sec}=0$) malzeme değişim parametresi temel frekansları çok küçük miktarda etkilerken, kesit değişim parametresinin artması ile malzeme değişim parametresinin temel frekans değerleri üzerindeki etkisi belirgin hale gelmektedir.

Şekil 4.7 incelendiğinde, sabit kesit durumunda ($\beta_{sec} = 0$) malzeme değişim parametresinin frekanslar üzerindeki etkisi sınırlı kalmaktadır. Ancak kesit değişim parametresi arttıkça malzeme değişim parametresinin frekanslar üzerindeki etkisi de artmaktadır. Helisel çubuklarda aktif sarım sayısı artması ile frekans değerlerinin de frekans değerlerindeki değişimin de azaldığı anlaşılmaktadır (Şekil 4.8).



Şekil 4.7. Malzeme ve kesit değişiminin temel frekanslara etkisi ($n = 2, \alpha = 5^\circ$)



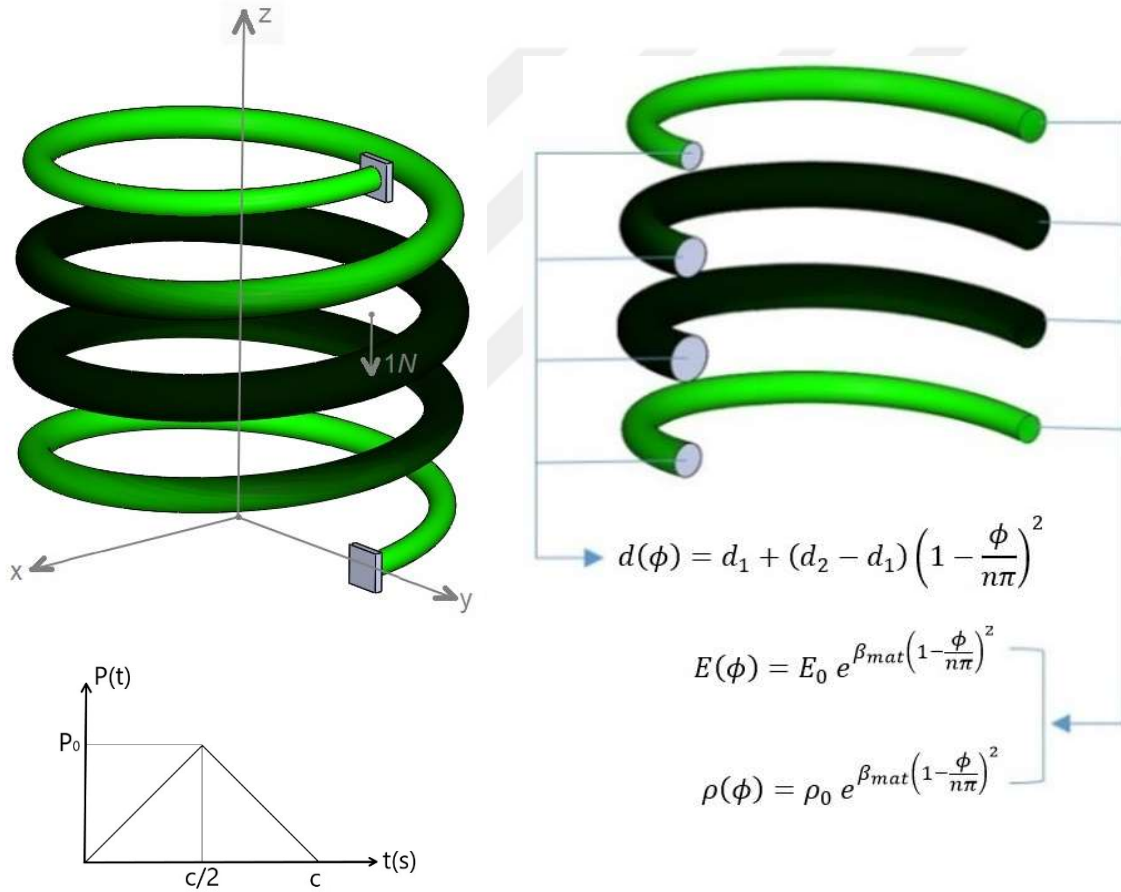
Şekil 4.8. Aktif sarım sayısının temel frekanslar üzerindeki etkisi ($\beta_{sec} = 0.25, \beta_{mat} = 0.5, \alpha = 8.5744^\circ$)

4.4. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Helisel Çubuğun Zorlanmış Titreşimi

İki ucu ankastre, değişken kesit ve eksenel fonksiyonel derecelenmiş malzemeye sahip silindirik helisel çubuğun zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.9). Geometrik ve malzeme özellikleri: elastisite modülü $E_0 = 206 \text{ MPa}$, kütleli yoğunluk $\rho_0 = 7900 \text{ kg/m}^3$ ve Poisson oranı $\nu = 0.3$, helisel çubuğun uç noktasında kesit çapı $d_2 = 1 \text{ mm}$, orta noktadaki kesit çapı

$d_1 = \beta_{sec} d_2$, helis yarıçapı $R = 5 \text{ mm}$, helis yükselme açısı $\alpha = 8.5744^\circ$. Analiz süresi $T = 5.12 \times 10^{-3} \text{ s}$, zaman artımı $\Delta t = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$ seçilmiştir. Helisel çubuğun orta noktasında şiddeti $(P_0)_z = 1 \text{ N}$ ve uygulama süresi $c = 0.0005 \text{ s}$ olan üçgen tipi dinamik yük uygulanmıştır (Şekil 4.9). Malzeme ve kesit değişimleri aşağıdaki fonksiyonlara bağlıdır.

$$\begin{aligned} E(\phi) &= E_0 e^{\beta_{mat} \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2}, & \rho(\phi) &= \rho_0 e^{\beta_{mat} \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2} \\ d(\phi) &= d_1 + (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$



Şekil 4.9. Fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli helisel çubuk ve dinamik yük

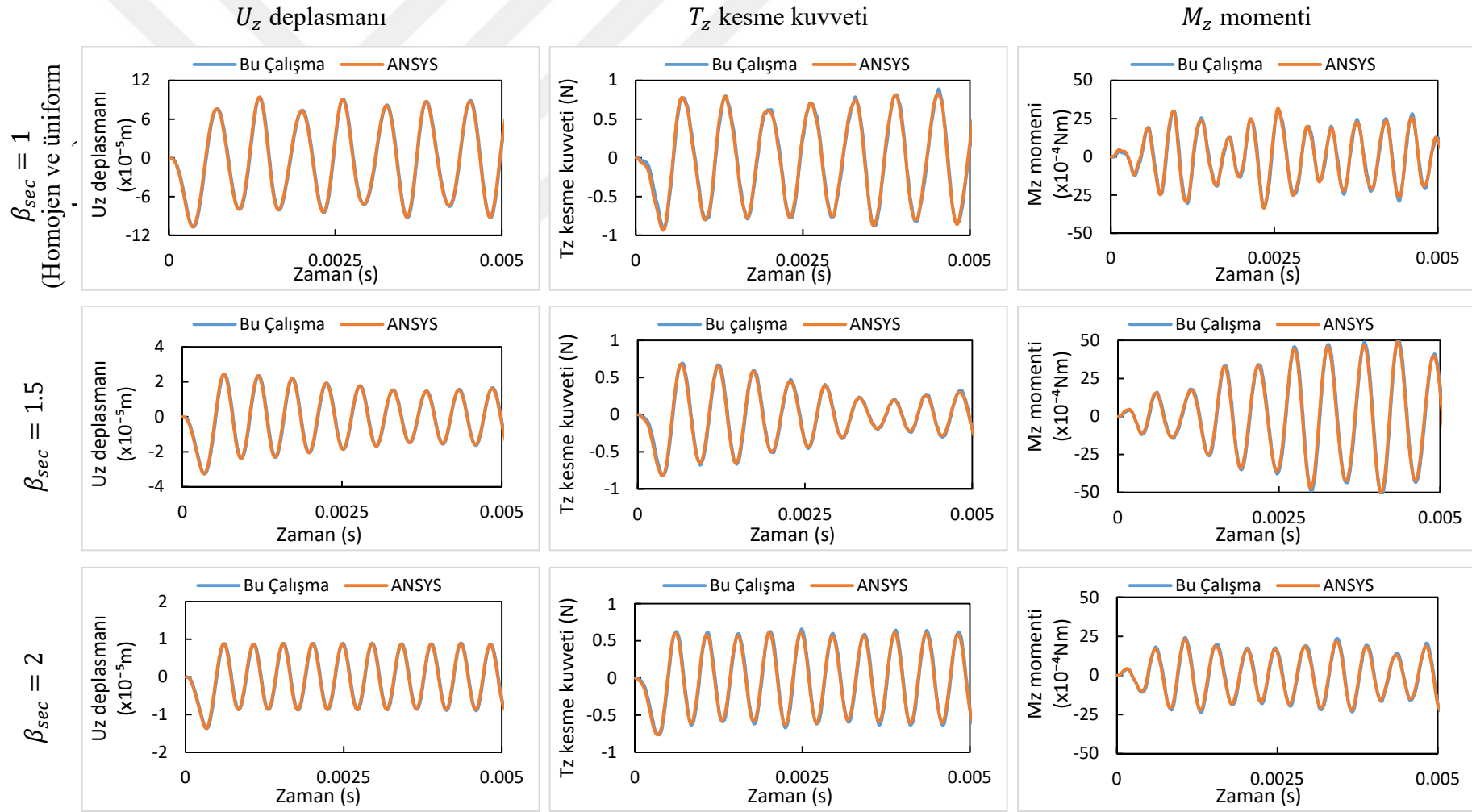
Malzeme değişim parametresi (β_{mat}), aktif sarım sayısı (n) ve kesit değişim parametresinin (β_{sec}) silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşim davranışına etkileri araştırılmıştır. Dinamik yük altında değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik helisel çubuğun orta noktasındaki deplasman ile ankastre uçtaki kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimleri verilmiştir (Şekil 4.10-4.14). Problem, önerilen yöntemde 100 elemanla modellenirken ANSYS

ile 2000 doğrusal eleman (BEAM188) kullanılarak modellenmiştir. Önerilen yöntemle elde edilen sonuçların ANSYS program sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir. Farklı sarım sayısı ve malzeme değişim parametresi durumunda kesit değişim parametresinin zorlanmış titreşime etkisi incelenmiştir (Şekil 4.10-4.11). Farklı aktif sarım sayısı durumunda, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin zorlanmış titreşime etkisi incelenmiştir (Şekil 4.12-4.13). Farklı kesit değişim ve malzeme değişim parametrelerinde aktif sarım sayısının zorlanmış titreşime etkisi Şekil 4.14’de verilmiştir.

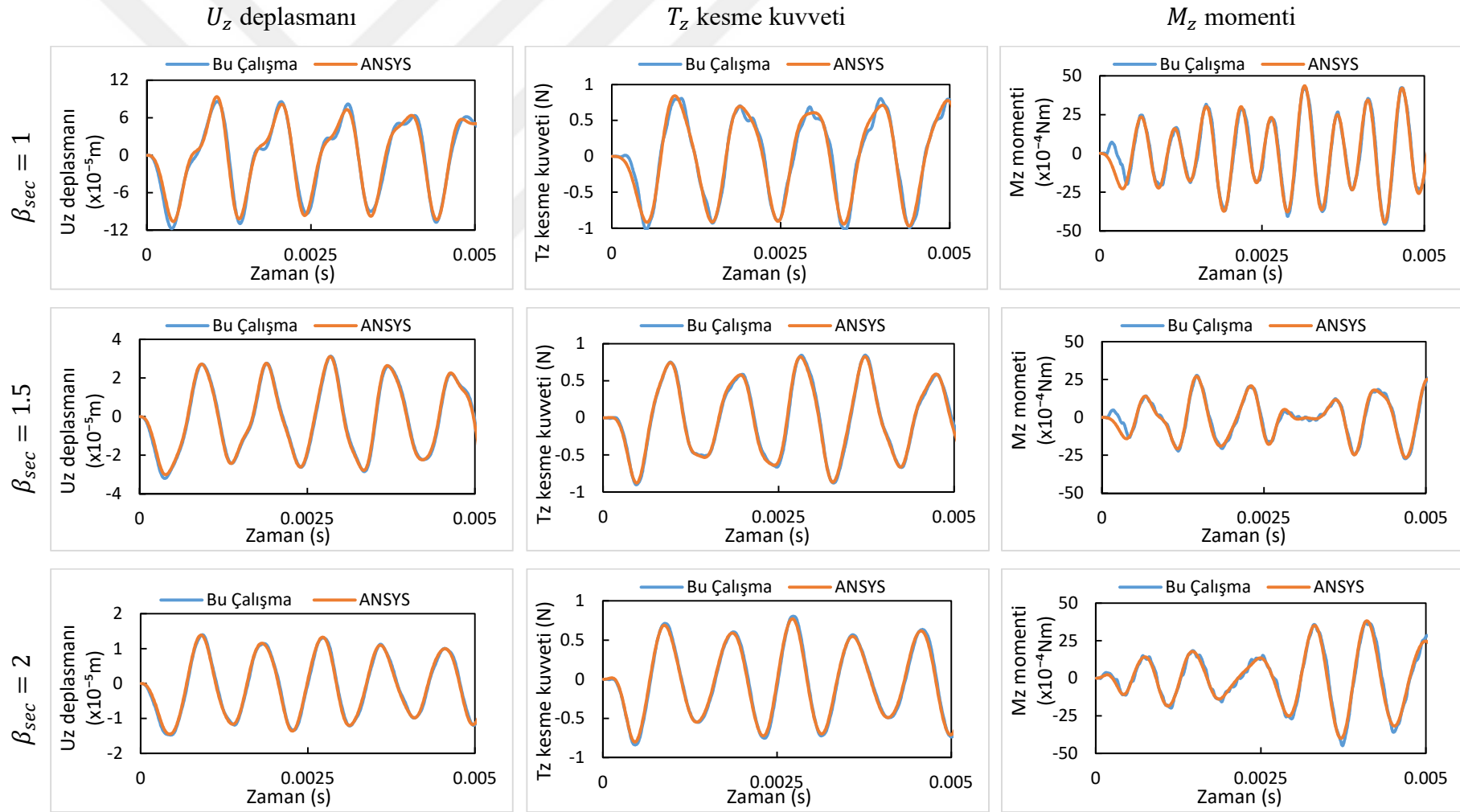
Kesit değişim parametresinin artması ile helisel çubuğun rijitliği artmaktadır. Kesit değişim parametresi arttıkça deplasman genliği önemli şekilde azalırken titreşim periyotlarında küçük değişimler görülmektedir (Şekil 4.10-4.11). Farklı kesit değişim parametrelerinde kesme kuvveti ve momentlerin zamanla değişimlerinin birbirlerinden farklı davranış gösterdiği görülmektedir (Şekil 4.10-4.11).

Farklı aktif sarım sayısında ($n = 2, 4$), kesit ve malzeme değişim parametrelerinin zorlanmış titreşime etkilerini incelemek için deplasman, kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimleri Şekil 4.12 ve Şekil 4.13’de verilmektedir. Malzeme ve kesit değişim parametrelerinin artışı deplasman genliklerini azaltırken titreşim periyotlarında küçük değişimler bulunmaktadır (Şekil 4.12-4.13). Ayrıca, kesit değişim parametresi malzeme değişim parametresine göre çok daha etkilidir. Kesit ve malzeme değişim parametrelerinin kombinasyonlarında kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimlerinde farklı davranış gözlenmektedir.

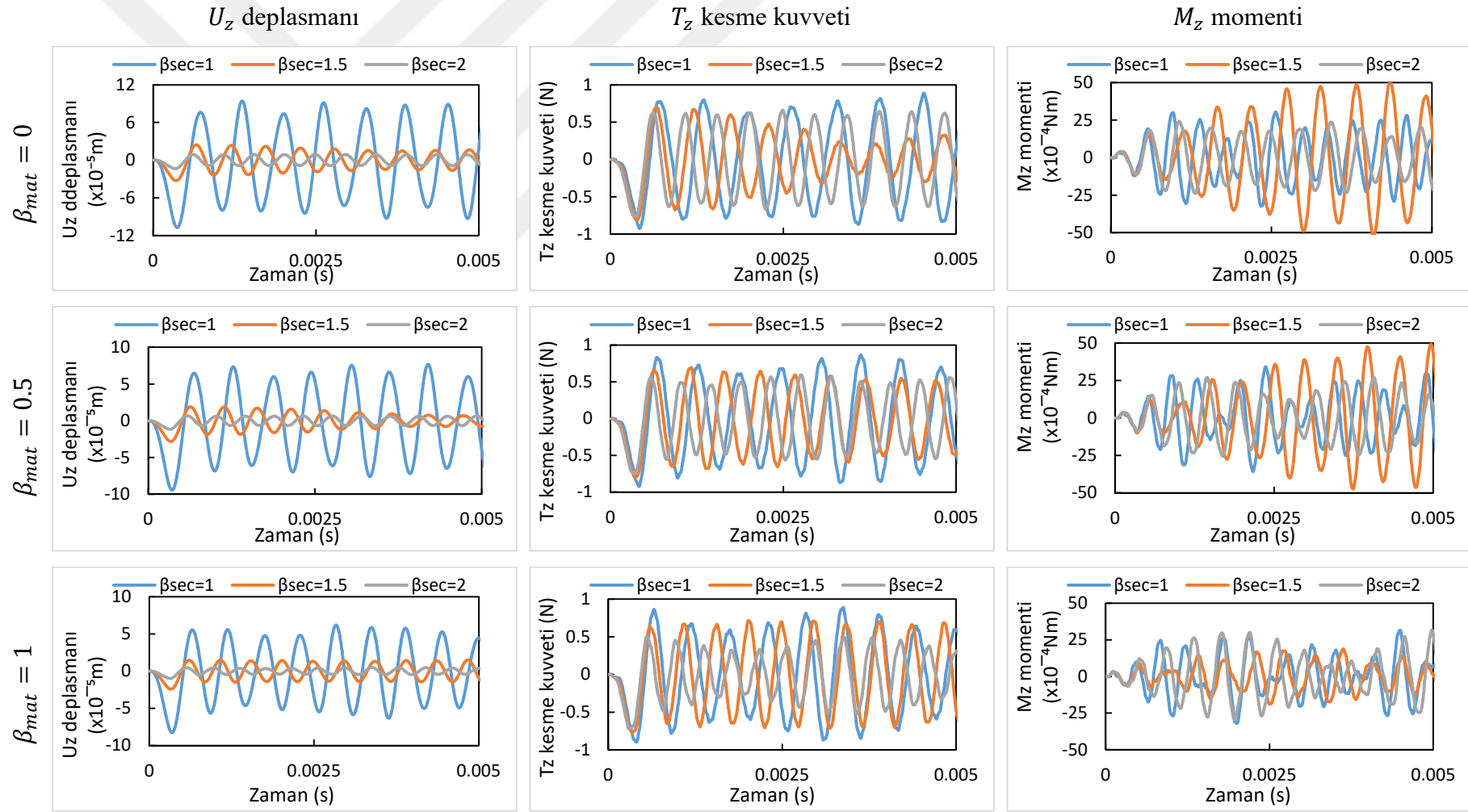
Şekil 4.14 incelendiğinde, homojen ve üniform kesitte farklı aktif sarım sayıları için deplasman genliklerindeki değişim sınırlı olmasına rağmen $\beta_{sec} = 2$ ve $\beta_{mat} = 1$ durumunda ise deplasman genliklerindeki değişim belirgin hale gelmektedir.



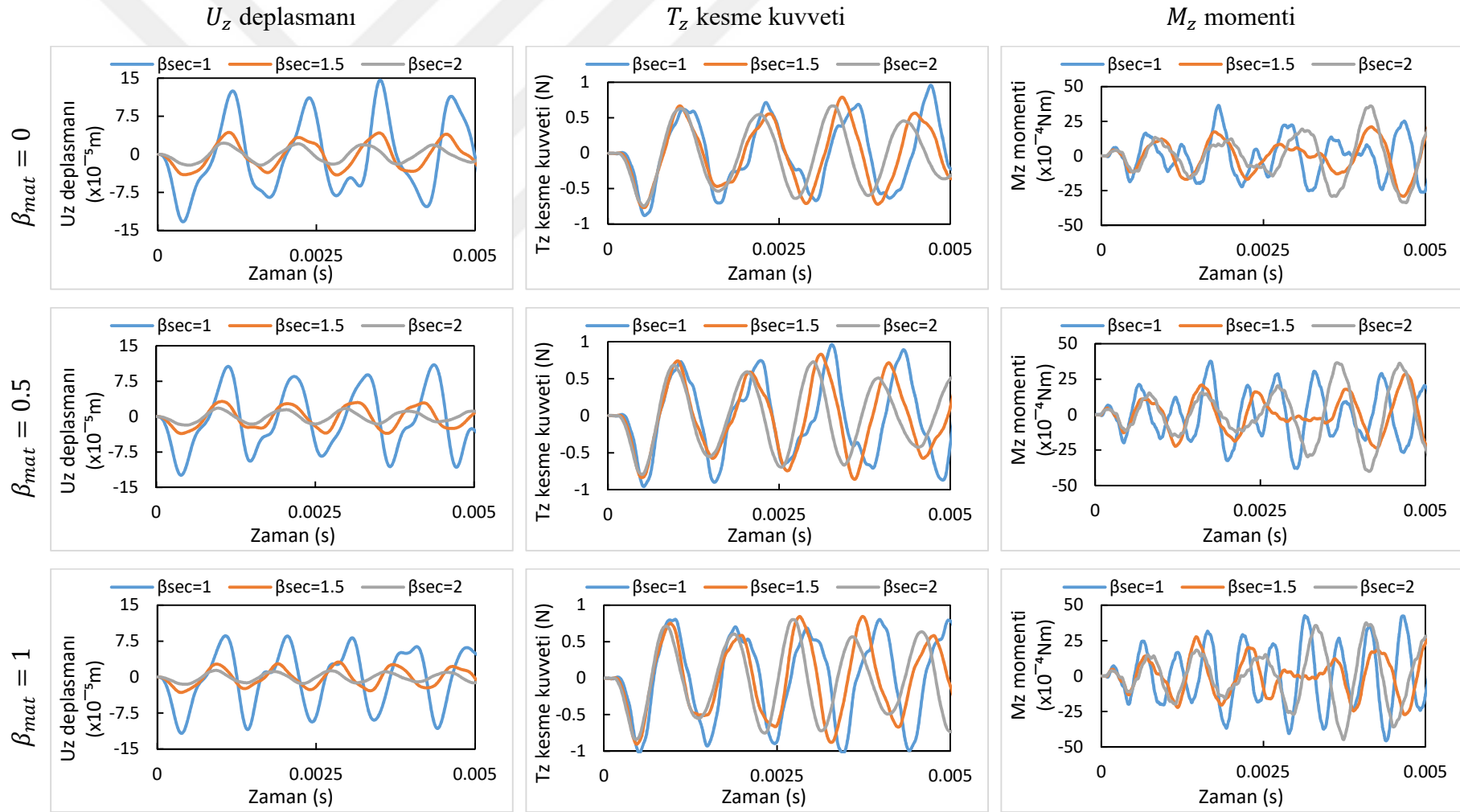
Şekil 4.10. Deplasman ve kesit tesirlerinin zamana bağlı değişimi ($\beta_{mat} = 0$ ve $n = 2$)



Şekil 4.11. Deplasman ve kesit tesirlerinin zamana bağlı değişimi ($\beta_{mat} = 1$ ve $n = 4$)

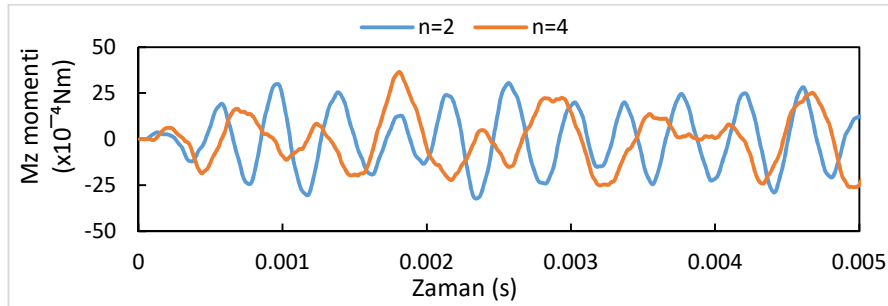
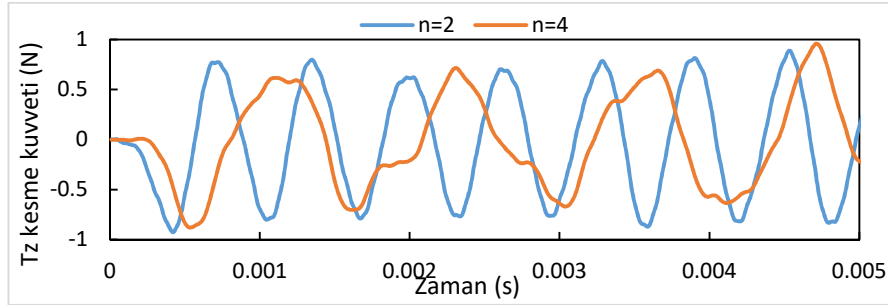
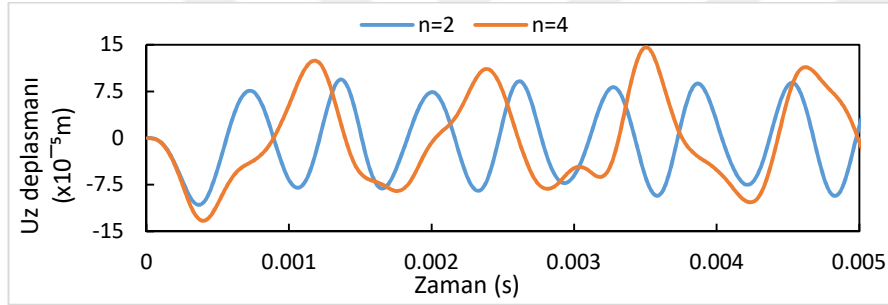


Şekil 4.12. U_z deplasmanı, T_z kesme kuvveti, M_z momentinin zamanla değişimi ($n = 2$)

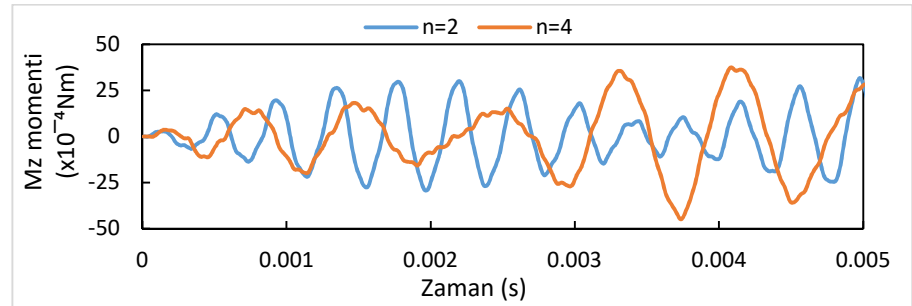
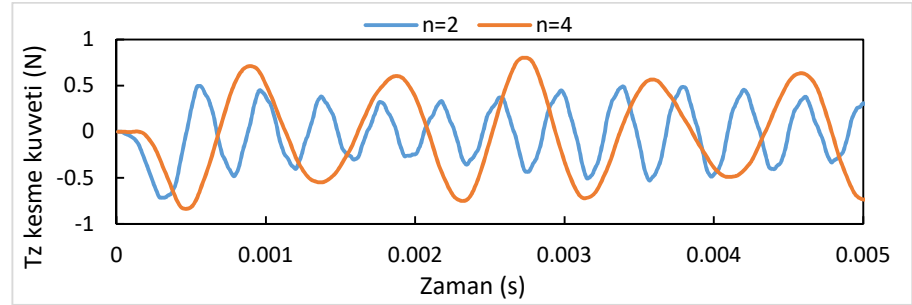
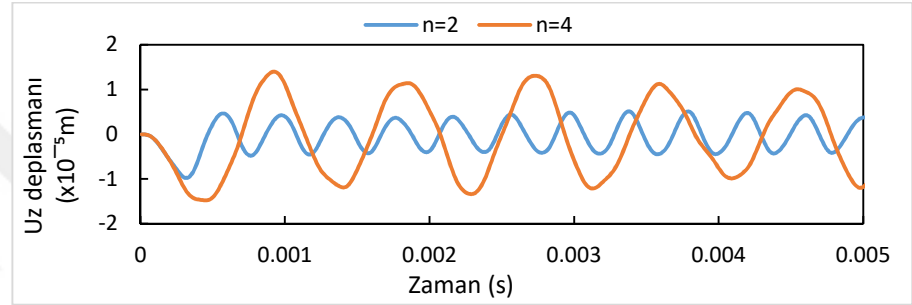


Şekil 4.13. U_z deplasmanı, T_z kesme kuvveti, M_z momentinin zamanla değişimi ($n = 4$)

$\beta_{sec} = 1$ $\beta_{mat} = 0$ (Homojen ve üniform hal)



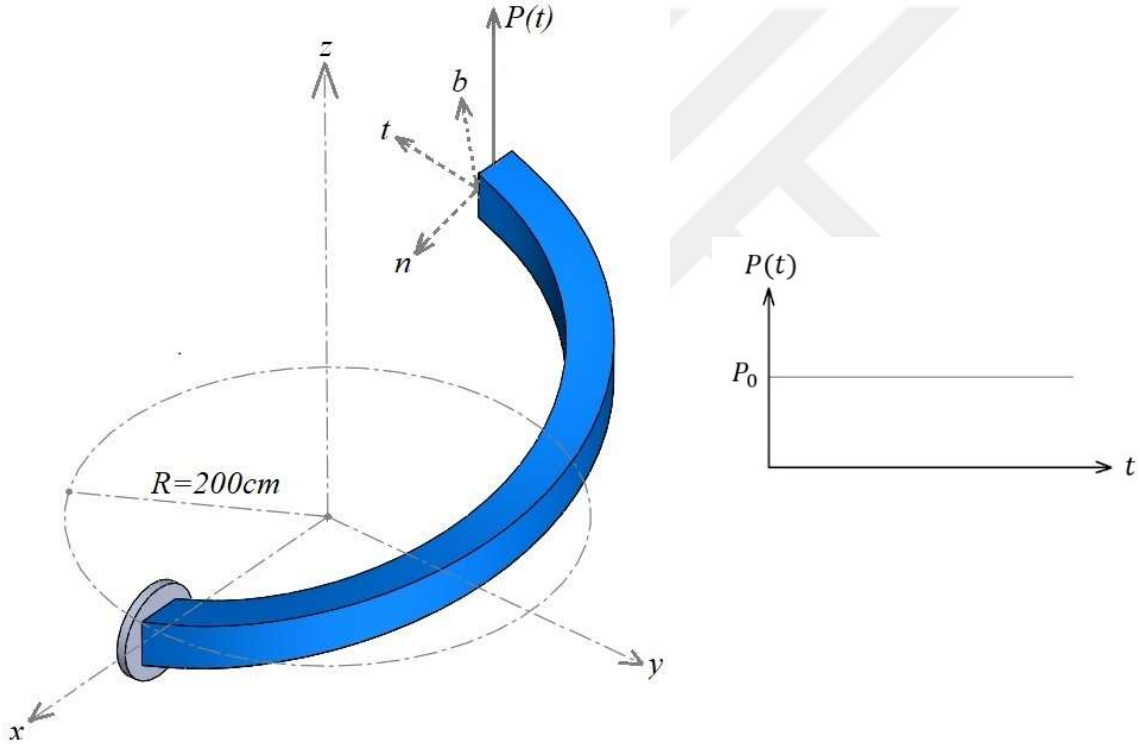
$\beta_{sec} = 2$ $\beta_{mat} = 1$



Şekil 4.14. Aktif sarım sayısının dinamik davranışa etkisi

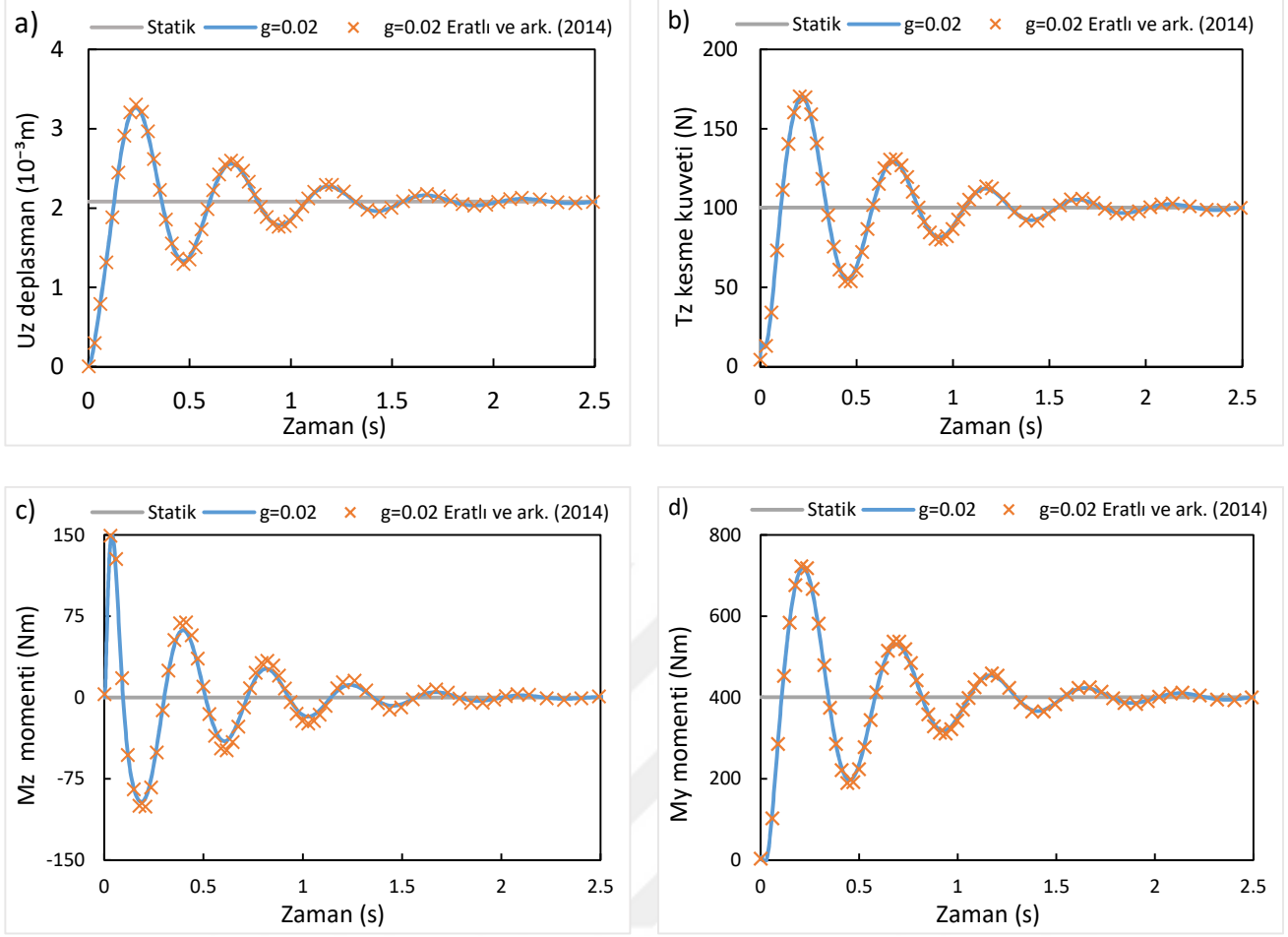
4.5. Viskoelastik Konsol Helisel Çubuğun Zorlanmış Titreşimi

Viskoelastik konsol helisel çubuğun zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.15). Eratlı ve ark. (2014) tarafından karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak problemin dinamik analizi yapılmıştır. Kelvin tipi viskoelastik model kullanılmıştır. Kullanılan geometrik ve malzeme özellikleri: elastisite modülü $E = 206 \text{ MPa}$, kütleli yoğunluk $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, helis yarıçapı $R = 200 \text{ cm}$, helis yükselme açısı $\alpha = 25.5228^\circ$, aktif sarım sayısı $n = 0.5$ ve kesit boyutları $b = h = 12 \text{ cm}$. Konsol helisin serbest ucuna $(P_0)_z = 100 \text{ N}$ şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır (Şekil 4.15).



Şekil 4.15. Üniorm kesitli silindirik helisel çubuk ve dinamik yük

Konsol helisin serbest ucundaki deplasman, ankastre ucundaki kesme kuvveti ve momentlerin zamanla değişimleri Şekil 4.16'de verilmiştir. Çözümlerde, Laplace parametre sayısı 512 ve toplam süre $T = 3 \text{ s}$ olarak alınmıştır. Şekil 4.16 incelendiğinde, elde edilen sonuçların literatürde verilen sonuçlarla uyum içerisinde oldukları görülmektedir.



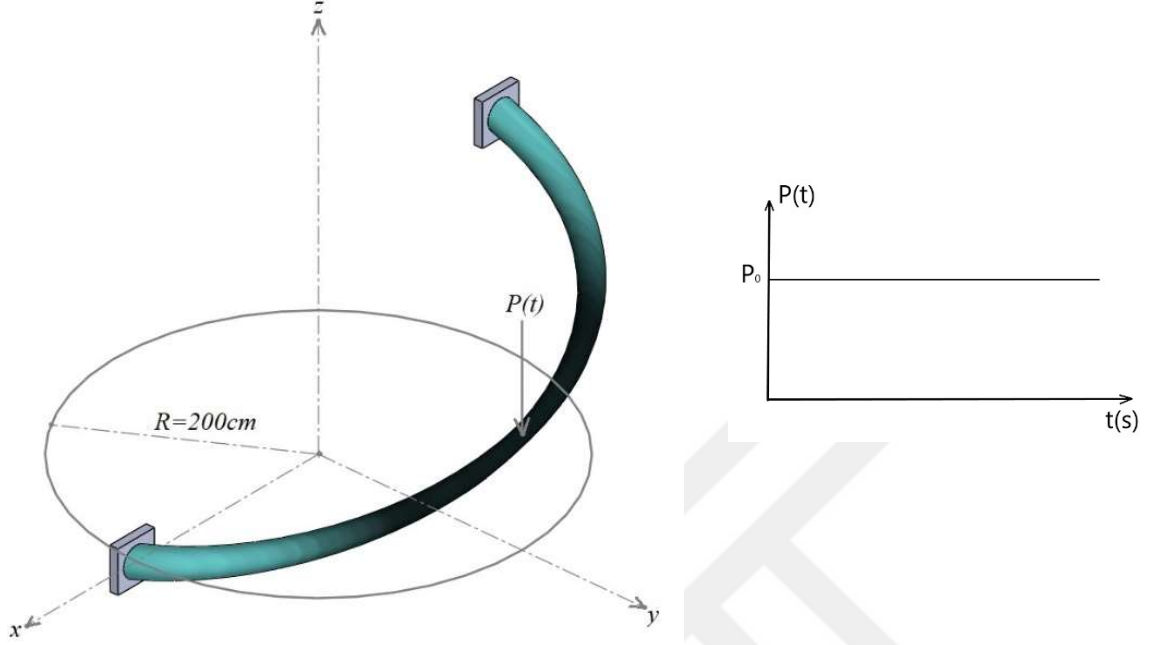
Şekil 4.16. (a) Serbest uçtaki U_z deplasmanı, (b) ankastre uçtaki T_z kesme kuvveti, (c) ankastre uçtaki M_z momenti, (d) ankastre uçtaki M_y momenti

4.6. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Viskoelastik Silindirik Helisel Çubuklar

İki ucu ankastre değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik silindirik helisel çubuğun zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.17). Problemin geometrik ve malzeme özellikleri: helis yarıçapı $R = 200 \text{ cm}$, aktif sarım sayısı $n = 0.5$, ankastre uçlardaki kesit çapı $d_2 = 14 \text{ cm}$, orta noktada kesit çapı $d_1 = \beta_{sec} d_2$, Alüminyum için kütleli yoğunluk $\rho_{Al} = 2702 \text{ kg/m}^3$, elastisite modülü $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, Zirkonyum için kütleli yoğunluk $\rho_{Zr} = 5700 \text{ kg/m}^3$, elastisite modülü $E_{Zr} = 200 \text{ GPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$. Helisel çubuğun orta noktasına $(P_0)_z = 1 \text{ N}$ adım tipi dinamik yük uygulanmıştır. Çözümlerde, toplam süre $T = 1.024 \text{ s}$ ve 512 Laplace parametresi kullanılmıştır. Malzeme ve kesit değişimleri kuvvet kuralına dayalı fonksiyonlar kullanılarak yapılmaktadır. Malzeme değişim parametresi (β_{mat}), simetrinin korunması maksadıyla çift sayı değeri seçilmiştir.

$$d(\phi) = d_1 + (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2$$

$$E(\phi) = E_{Al} + (E_{Zr} - E_{Al}) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^{\beta_{mat}}, \quad \rho(\phi) = \rho_{Al} + (\rho_{Zr} - \rho_{Al}) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^{\beta_{mat}} \quad (4.4)$$

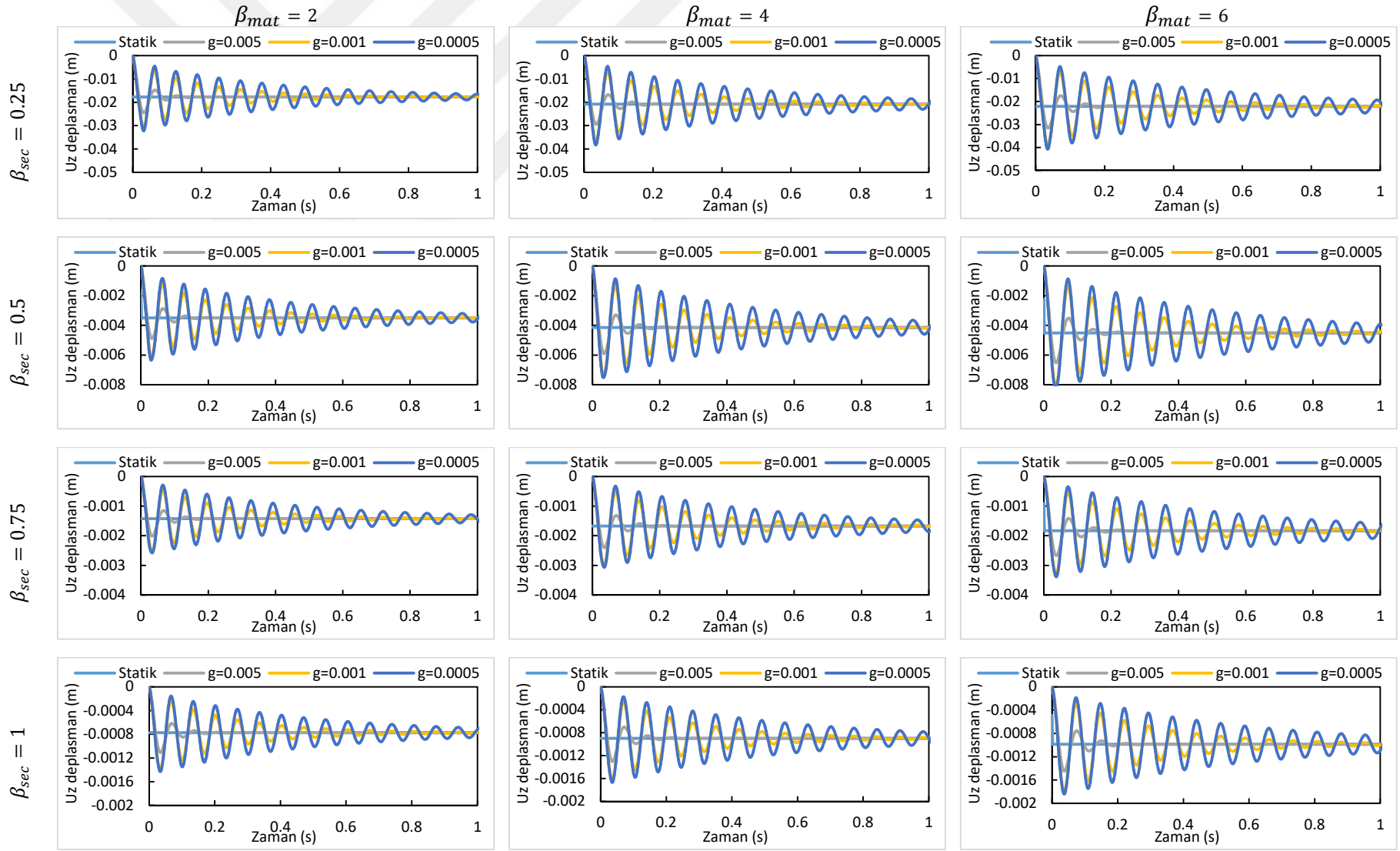


Şekil 4.17. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik silindirik helisel çubuk

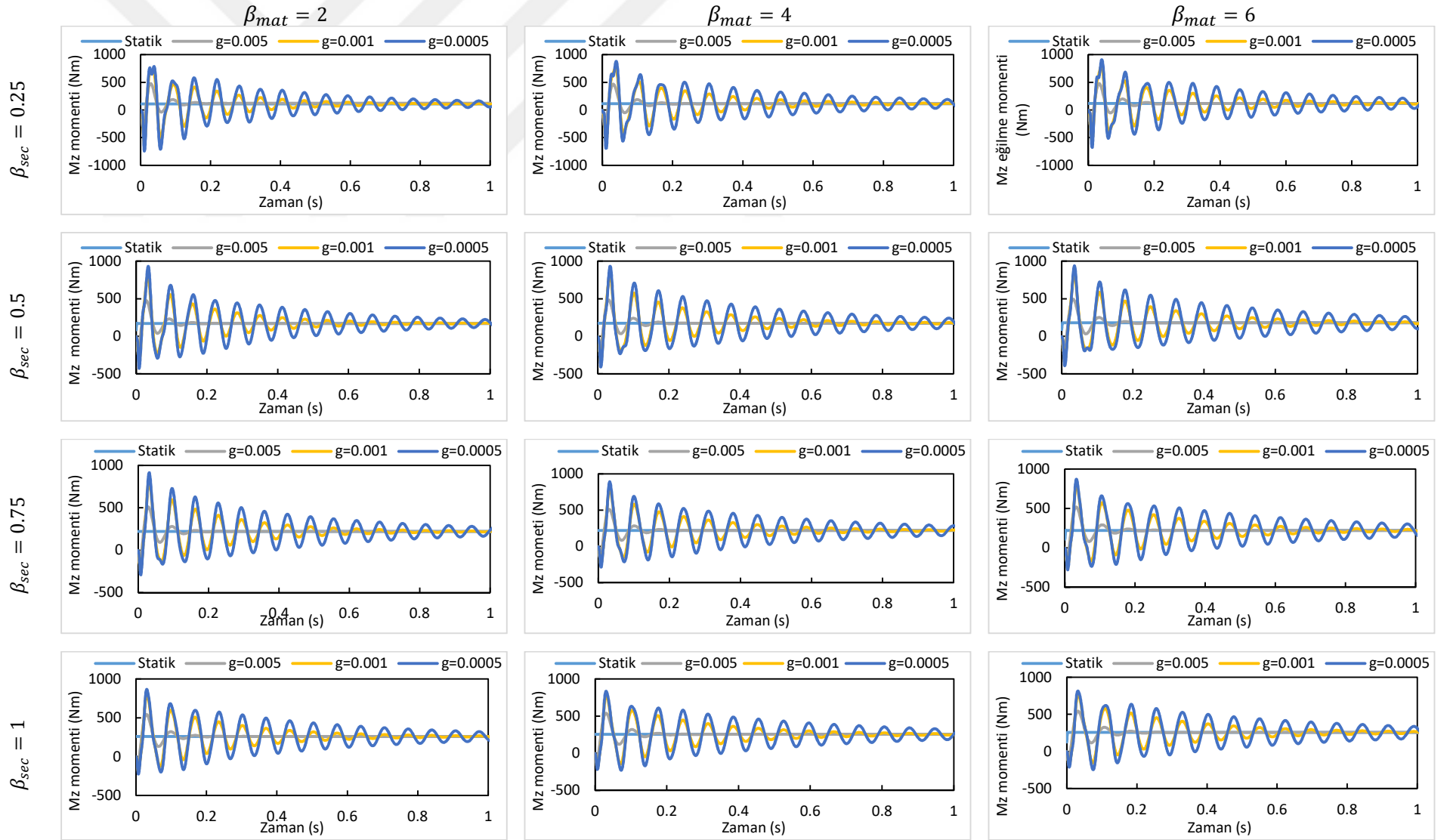
Sönüm oranı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşim davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Adım tipi dinamik yükleme altında helisel çubuğun orta noktasındaki deplasman ile ankastre uçtaki momentin zamanla değişimleri Şekil 4.18-4.19’da verilmektedir.

Viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı bir süre sonra sönümlenerek statik değerine ulaşmaktadır. Sönüm oranı arttıkça dinamik davranışın genliği azalmakta ve statik davranışa daha hızlı ulaşılmaktadır.

Helisel çubuk, kesit değişim parametresinin etkisi ile orta noktadaki kesit çapı azalarak narinleşmektedir. Küçük kesit değişim parametreleri, helisel çubuğun daha esnek olmasına sebep olduğundan deplasmanlar artmaktadır. Kesit değişim parametresi malzeme değişim parametresine göre dinamik davranış üzerinde çok daha etkilidir. Malzeme değişim parametresinin artması ile deplasman değerleri artarken moment değerlerinde önemli değişiklikler olmadığı görülmektedir.



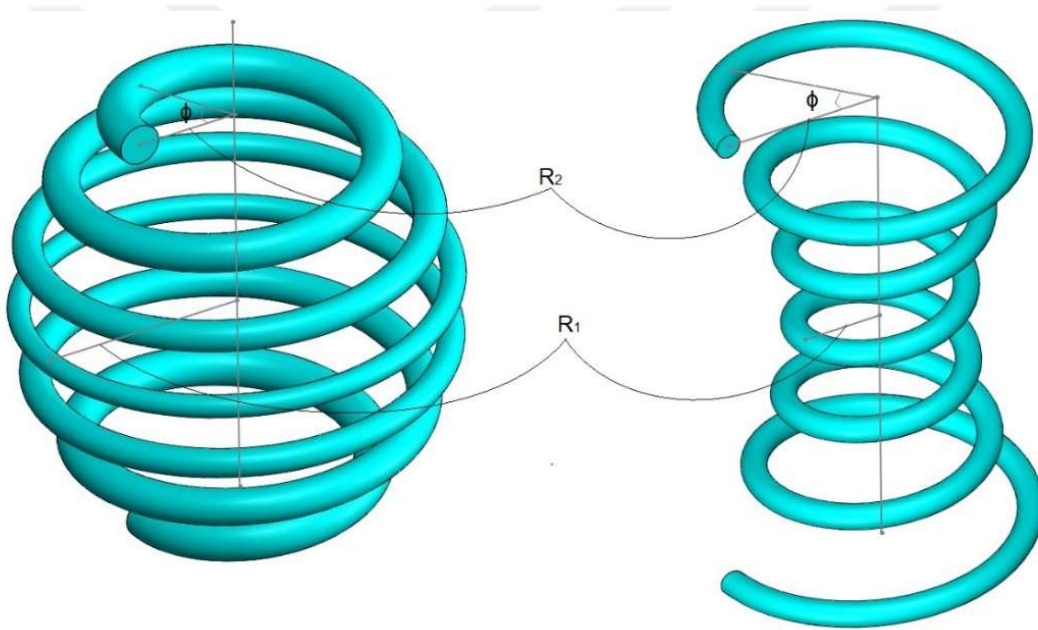
Şekil 4.18. Helisel çubuğun orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 4.19. Ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi

4.7. Değişken Kesitli Hiperbolik ve Varil Helisel Çubuklar

İki ucu ankastre değişken kesitli hiperbolik ve varil helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.20). Girgin (2006) tarafından karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak problemin serbest titreşim analizi yapılmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 4.8^\circ$, $n = 6.5$, $\alpha_n = \alpha_b = 1.1$. Hiperbolik helisel çubuk için yarıçap $R_1 = 13 \text{ mm}$, kesit çapı $d_1 = 2.6 \text{ mm}$ ve $R_2/R_1 = 2.4$ olarak alınmıştır. Varil helisel çubuk için yarıçap $R_1 = 25 \text{ mm}$, kesit çapı $d_1 = 2 \text{ mm}$ ve $R_2/R_1 = 0.2$ olarak alınmıştır.



Şekil 4.20. Değişken kesitli varil ve hiperbolik helisel çubuklar

Kesit çapının değişimi $d_1 = d_2 \beta_{sec}$ olup d_1 ve d_2 sırasıyla $R(\phi) = R_1$ ve $R(\phi) = R_2$ noktalarındaki kesit çaplarını ifade etmektedir. Değişken kesitli hiperbolik ve varil helisel çubukların serbest titreşim frekansları sırasıyla Tablo 4.6 ve Tablo 4.7’de verilmektedir. Önerilen yöntem ile elde edilen sonuçların literatür ve ANSYS program sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir. Problem, önerilen yöntemde 100 eleman ve ANSYS programında 2000 doğrusal eleman (BEAM188) kullanılarak modellenmiştir.

Hiperbolik helislerde kesit değişim parametresindeki artışın temel frekans değerlerini azalttığı gözlenmektedir (Tablo 4.6). Varil helislerde ise kesit değişim parametresi arttıkça frekans değerleri artmaktadır (Tablo 4.7).

Tablo 4.6. Hiperbolik helisel çubuğun serbest titreşim frekansları (**Hz**)

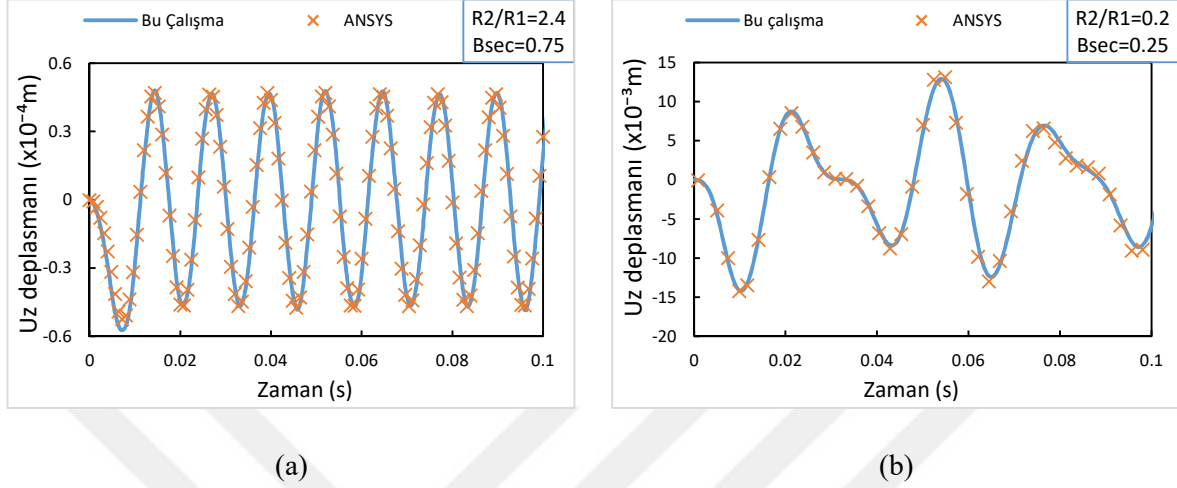
β_{sec}	Mod	Girgin (2006)	ANSYS	Bu çalışma
0.25	1	91.010	89.830	90.020
	2	109.67	108.10	108.24
	3	117.04	115.52	115.69
	4	121.71	120.16	120.51
	5	130.26	128.61	129.27
	6	143.00	140.84	140.82
0.5	1	85.560	84.380	84.480
	2	108.39	106.94	107.14
	3	110.12	108.57	108.51
	4	132.02	130.24	130.78
	5	135.71	133.79	133.94
	6	149.31	147.14	147.46
0.75	1	80.810	79.680	79.690
	2	101.86	100.56	100.97
	3	107.80	106.23	105.87
	4	132.57	130.78	131.27
	5	153.07	150.92	151.04
	6	162.41	160.27	160.94

Tablo 4.7. Varil helisel çubuğun serbest titreşim frekansları (**Hz**)

β_{sec}	Mod	Girgin (2006)	ANSYS	Bu çalışma
0.25	1	36.52	36.60	36.43
	2	39.53	39.57	39.18
	3	47.96	48.09	47.86
	4	50.28	50.31	50.13
	5	53.22	53.41	53.13
	6	55.66	55.83	55.53
0.5	1	54.13	54.23	54.00
	2	55.71	55.80	55.58
	3	71.57	71.66	71.41
	4	71.63	71.70	71.48
	5	86.77	87.16	86.66
	6	89.54	89.95	89.43
0.75	1	64.82	64.86	64.68
	2	69.24	69.53	69.15
	3	87.19	87.30	87.07
	4	87.22	87.32	87.11
	5	116.9	117.4	116.8
	6	118.9	119.6	118.8

Serbest titreşim analizinden sonra iki ucu ankastre hiperbolik ve varil helisel çubukların orta noktasında üçgen tip dinamik yük uygulanarak zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Üçgen tipi dinamik yük $(P_0)_z = 0.1 N$, yükün uygulanma süresi $c = 0.01 s$ ve toplam analiz süresi $T = 0.1024 s$ olarak belirlenmiştir.

Değişken kesitli hiperbolik ve varil helisel çubuğun orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 4.21’de verilmiştir. Önerilen yöntemle elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 4.21. (a) Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı, (b) varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı

4.8. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar

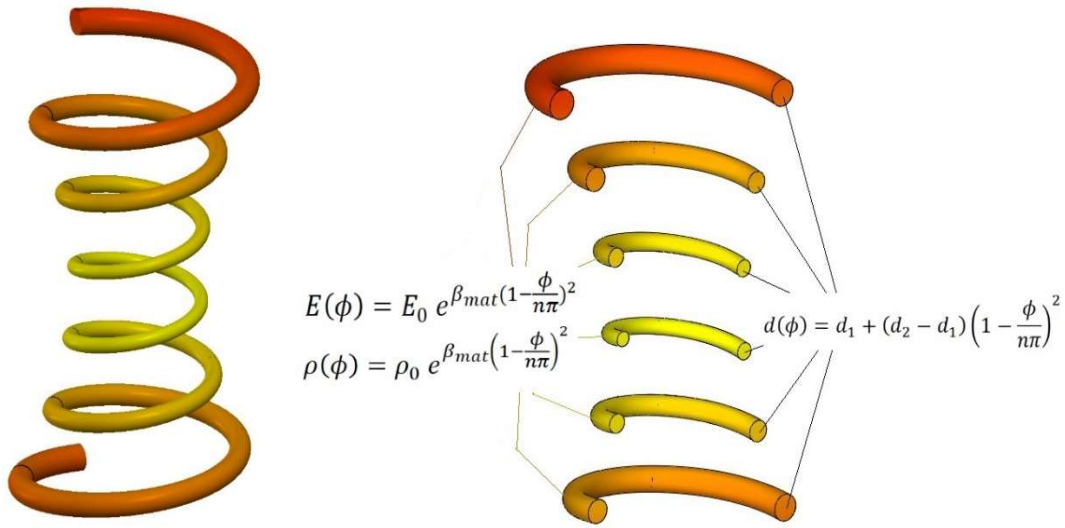
Eksenel fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip hiperbolik ve varil helisel çubukların serbest titreşimi sırasıyla 4.8.1 ve 4.8.2 bölümlerinde incelenmiştir. Hiperbolik ve varil helisel çubukların geometrik ve malzeme özellikleri: elastisite modülü $E_0 = 210 \text{ GPa}$, kütleli yoğunluk $\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, helisin yükselme açısı $\alpha = 4.8^\circ$, helisin aktif sarım sayısı $n = 6.5$, kayma düzeltme faktörleri $\alpha_n = \alpha_b = 1.1$. Hiperbolik helisel çubuklarda yarıçap $R_1 = 13 \text{ mm}$, kesit çapı $d_1 = 2.6 \text{ mm}$ ve varil helisel çubuklarda yarıçap $R_1 = 25 \text{ mm}$, kesit çapı $d_1 = 2 \text{ mm}$ olarak alınmıştır. Malzeme ve kesit değişimleri (4.5) ifadesinde verilmektedir.

$$\begin{aligned} E(\phi) &= E_0 e^{\beta_{mat}(1-\frac{\phi}{n\pi})^2}, & \rho(\phi) &= \rho_0 e^{\beta_{mat}(1-\frac{\phi}{n\pi})^2} \\ d(\phi) &= d_1 + (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2, & d_1 &= d_2 \beta_{sec} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada, helisin orta noktasındaki kesit çapı d_1 ile helisin uç noktasındaki kesit çapı d_2 arasındaki bağıntıyı kuran kesit değişim parametresi β_{sec} (0.25, 0.5, 0.75, 1) değerlerini almaktadır. Elastisite modülü ve kütleli yoğunluk özelliklerinin ikisi de malzeme değişim parametresi β_{mat} ile idare edilmekte ve bu parametre (0.5, 1, 1.5, 2) değerlerini almaktadır.

4.8.1. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Hiperbolik Helisel Çubuklar

İki ucu ankastre değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisel çubuğun serbest titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.22). Hiperbolik helisel çubuklarda malzeme değişim parametresi (β_{mat}), kesit değişim parametresi (β_{sec}) ve R_2/R_1 oranının serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılmıştır. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisel çubuklar için elde edilen temel serbest titreşim frekansları Tablo 4.8’de verilmiştir.



Şekil 4.22. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisel çubuk

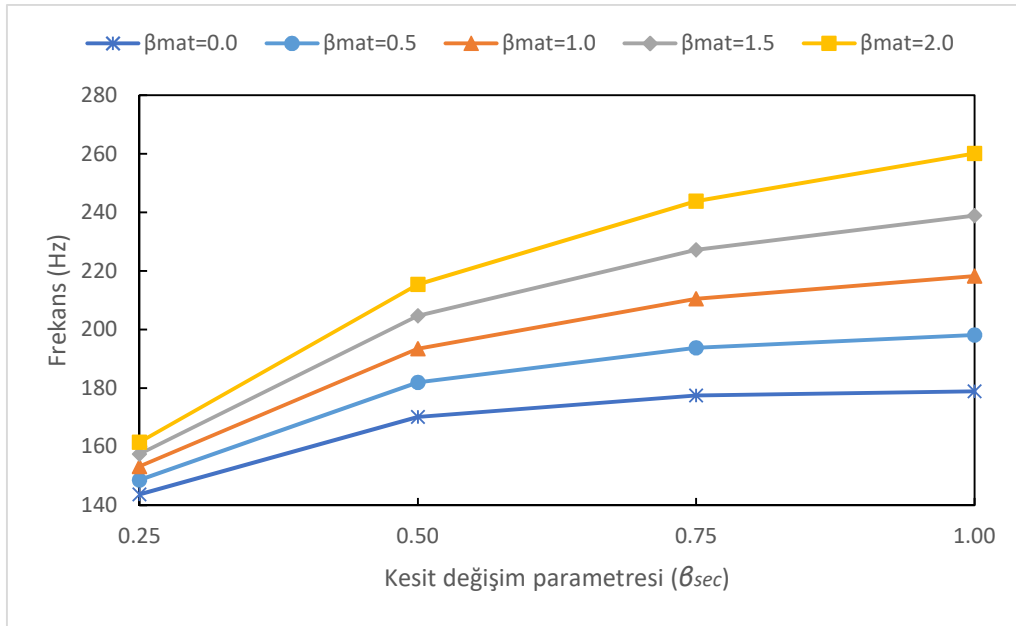
Tablo 4.8’de görülebileceği gibi önerilen yöntemle elde edilen sonuçların ANSYS programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmektedir. Malzeme değişim parametresinin artması halinde frekans değerlerinin de artış gösterdiği anlaşılmaktadır. Silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça temel frekansların azaldığı sonucuna ulaşılabilir.

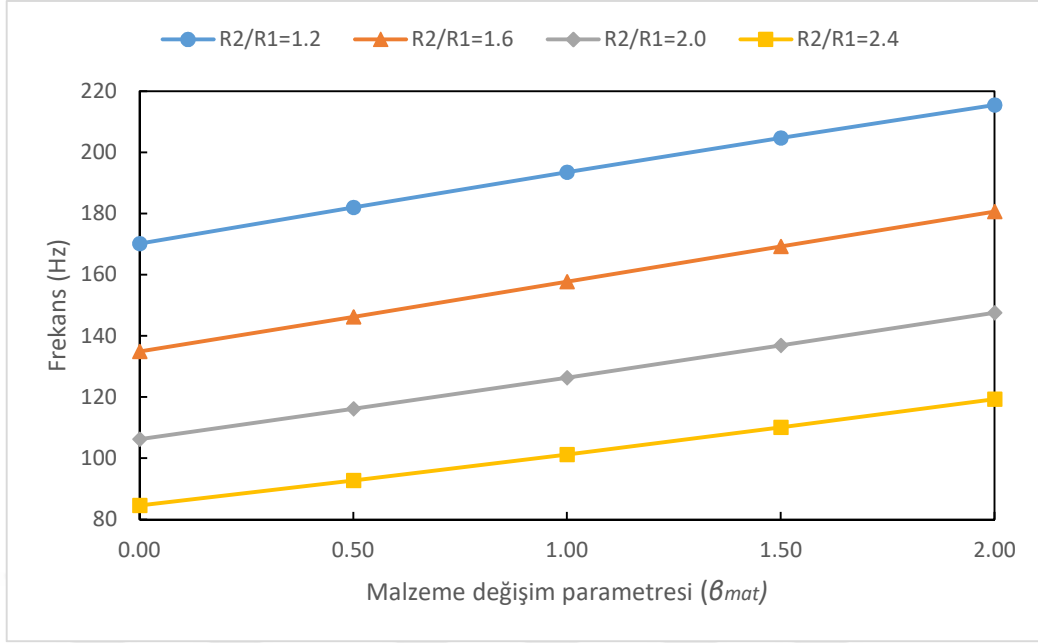
R_2/R_1 oranı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin farklı değerlerine göre değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisel çubuğun temel frekanslarına etkisi grafik formunda sunulmuştur (Şekil 4.23-4.25).

Ayrıca R_2/R_1 oranının artması ile temel frekanslar azalmaktadır (Şekil 4.24). Şekil 4.24 incelendiğinde, farklı R_2/R_1 oranlarında malzeme değişim parametresinin frekanslara etkisi benzer eğilim göstermektedir. Bu nedenle malzeme değişiminin frekanslar üzerindeki etkisi R_2/R_1 oranından bağımsız olmaktadır.

Tablo 4.8. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş hiperbolik helisin temel frekansları (**Hz**)

R_2/R_1		1.2		1.6		2		2.4	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0.25	143.63	143.75	126.49	126.78	107.84	108.18	89.830	90.020
	0.50	170.04	170.15	134.61	134.85	106.02	106.27	84.380	84.480
	0.75	177.41	177.49	133.19	133.36	101.71	101.92	79.680	79.690
	1.00	178.93	178.94	130.23	130.30	97.810	97.864	75.740	75.774
0.5	0.25	148.57	148.67	132.56	132.83	114.65	114.97	96.475	96.766
	0.50	181.86	181.98	145.98	146.23	115.90	116.13	92.476	92.692
	0.75	193.76	193.85	146.96	147.14	112.79	112.95	88.338	88.474
	1.00	198.19	198.21	145.35	145.45	109.49	109.56	84.852	84.909
1	0.25	153.17	153.27	138.22	138.51	121.19	121.55	103.17	103.50
	0.50	193.39	193.52	157.45	157.72	126.08	126.37	100.99	101.24
	0.75	210.37	210.47	161.28	161.51	124.37	124.57	97.561	97.737
	1.00	218.20	218.25	161.30	161.43	121.86	121.98	94.508	94.586
1.5	0.25	157.47	157.56	143.50	143.80	127.41	127.80	109.80	110.17
	0.50	204.57	204.69	168.91	169.21	136.53	136.84	109.84	110.10
	0.75	227.08	227.19	176.09	176.34	136.48	136.71	107.23	107.43
	1.00	238.84	238.92	178.04	178.21	134.90	135.06	104.68	104.79
2	0.25	161.50	161.59	148.41	148.73	133.28	133.71	116.28	116.68
	0.50	215.34	215.46	180.28	180.61	147.18	147.52	118.99	119.27
	0.75	243.76	243.89	191.31	191.59	149.10	149.37	117.34	117.55
	1.00	259.97	260.07	195.52	195.73	148.06	148.78	115.36	115.48

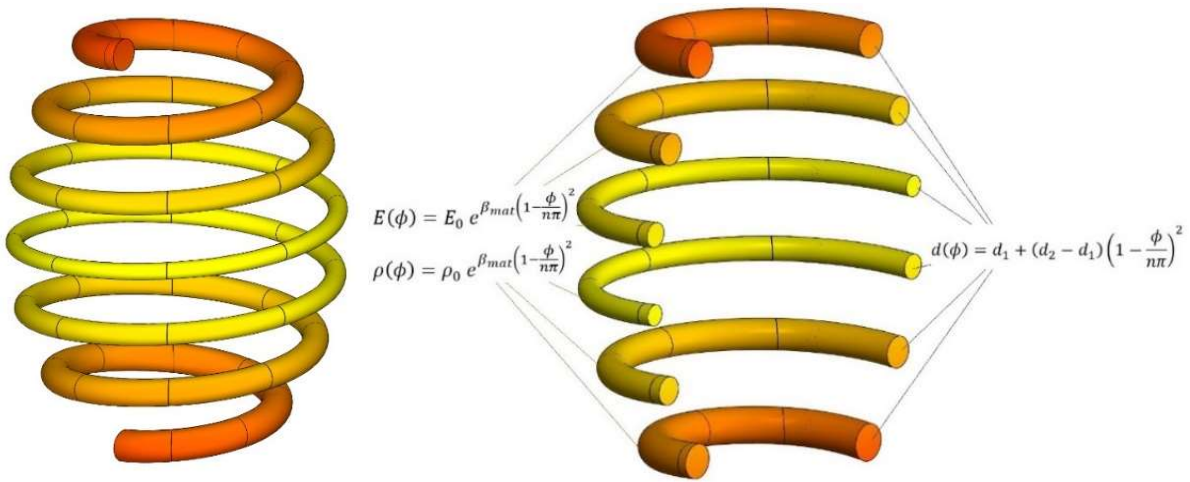
**Şekil 4.23.** Hiperbolik helisteki temel frekans değişimi ($R_2/R_1 = 1.2$)



Şekil 4.24. Hiperbolik helisteki temel frekans değişimi ($\beta_{sec} = 0.5$)

4.8.2. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Varil Helisel Çubuklar

İki ucu ankastre değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş varil helisel çubuğun serbest titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.25). Varil helisel çubuklarda malzeme değişim parametresi (β_{mat}), kesit değişim parametresi (β_{sec}) ve R_2/R_1 oranının serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılmıştır. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisel çubuklar için elde edilen temel frekanslar Tablo 4.9’da verilmiştir.



Şekil 4.25. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisel çubuk

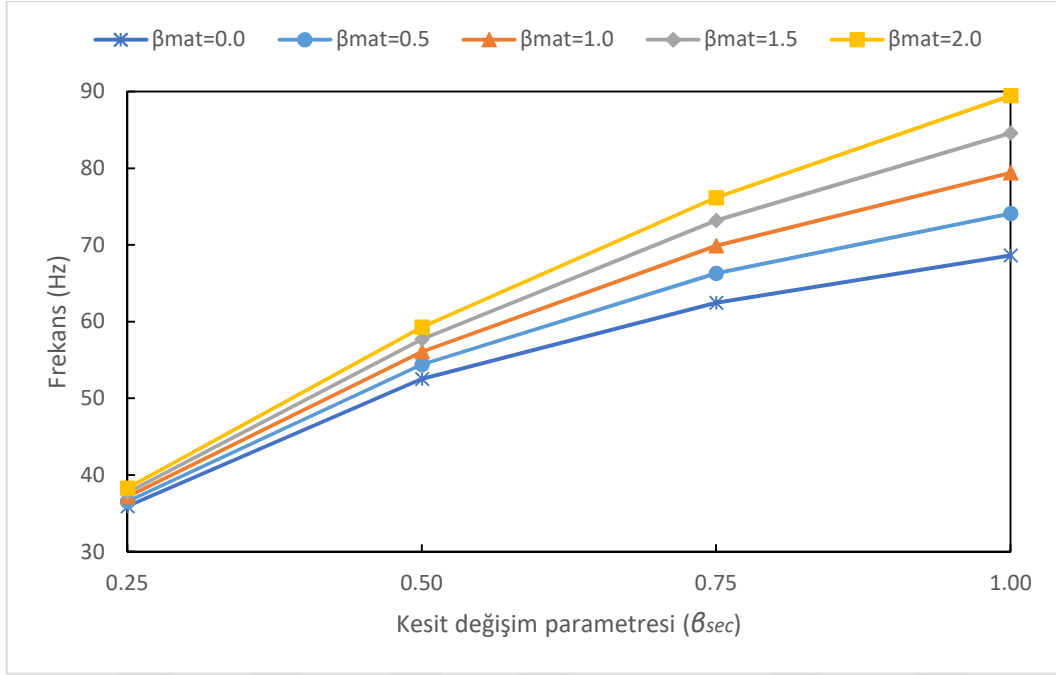
Önerilen yöntemle elde edilen sonuçların ANSYS program sonuçları ile uyumlu olduğu görülmektedir (Tablo 4.9). Malzeme değişim parametresi ile kesit değişim parametresinin artması halinde frekans parametrelerinin de artış gösterdiği anlaşılmaktadır. Tablo 4.9 incelendiğinde, R_2/R_1 oranı arttıkça temel frekans değerleri azalmaktadır. Silindirik helis geometrisine yaklaştıkça temel frekanslar azalmaktadır.

R_2/R_1 oranı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin farklı değerlerine göre değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisel çubuğun temel frekanslarına etkisi grafik formunda sunulmuştur (Şekil 4.26-4.27). Şekil 4.27 incelendiğinde, kesit ve malzeme değişim parametresinin artması ile temel frekans değerlerinin arttığı görülmektedir. Ayrıca, kesit değişim parametresinin artması ile malzeme değişim parametresinin temel frekanslara etkisi çok daha belirgin hale gelmektedir. Bütün R_2/R_1 oranlarında malzeme ve kesit değişim parametresinin artması ile temel frekans değerleri artmaktadır. Ayrıca R_2/R_1 oranının artması ile temel frekanslar azalmaktadır (Şekil 4.27).

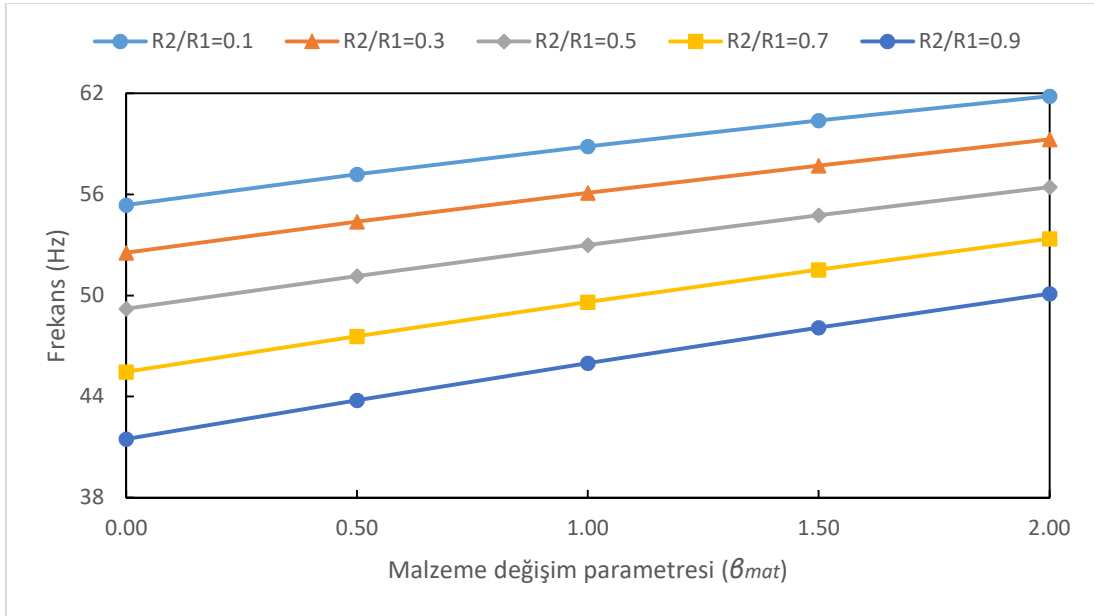
Tablo 4.9. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş varil helisin temel frekansları (Hz)

R_2/R_1		0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0.25	37.118	36.908	36.059	35.905	34.898	34.807	33.623	33.566	32.225	32.213
	0.50	55.606	55.370	52.744	52.537	49.358	49.211	45.538	45.471	41.495	41.476
	0.75	67.110	66.957	62.639	62.460	58.141	57.996	52.350	52.267	45.816	45.789
	1.00	75.338	75.312	68.782	68.628	62.708	62.564	56.382	56.293	48.007	48.049
0.5	0.25	37.701	37.497	36.693	36.542	35.595	35.492	34.397	34.330	33.091	33.072
	0.50	57.476	57.200	54.601	54.383	51.303	51.152	47.663	47.587	43.799	43.768
	0.75	70.806	70.601	66.500	66.304	61.874	61.704	55.856	55.768	49.390	49.354
	1.00	80.624	80.517	74.271	74.087	68.206	68.055	61.253	61.147	52.573	52.537
1	0.25	38.263	38.054	37.302	37.147	36.260	36.144	35.130	35.062	33.904	33.884
	0.50	59.158	58.856	56.325	56.086	53.153	52.999	49.691	49.609	46.008	45.980
	0.75	74.323	74.071	70.128	69.901	65.270	65.079	59.259	59.158	52.922	52.887
	1.00	85.761	85.594	79.632	79.418	73.570	73.402	66.004	65.890	57.203	57.169
1.5	0.25	38.807	38.595	37.888	37.720	36.896	36.781	35.826	35.762	34.671	34.648
	0.50	60.711	60.383	57.956	57.710	54.919	54.765	51.626	51.534	48.119	48.097
	0.75	77.631	77.333	73.444	73.180	68.411	68.214	62.549	62.437	56.386	56.357
	1.00	90.720	90.480	84.813	84.559	78.666	78.463	70.654	70.538	61.857	61.816
2	0.25	39.335	39.120	38.453	38.293	37.507	37.386	36.491	36.431	35.398	35.364
	0.50	62.176	61.832	59.515	59.269	56.609	56.436	53.474	53.381	50.135	50.102
	0.75	80.685	80.326	76.426	76.124	71.376	71.174	65.722	65.604	59.762	59.731
	1.00	95.477	95.175	89.753	89.461	83.362	83.127	75.195	75.058	66.497	66.447

Şekil 4.27’de farklı R_2/R_1 oranlarında malzeme değişim parametresinin frekanslara etkisi benzer eğilim göstermektedir. Bu malzeme değişiminin frekanslar üzerindeki etkisinin helis yarıçapından bağımsız olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.26. Varil helisteki temel frekans değişimi ($R_2/R_1 = 0.3$)



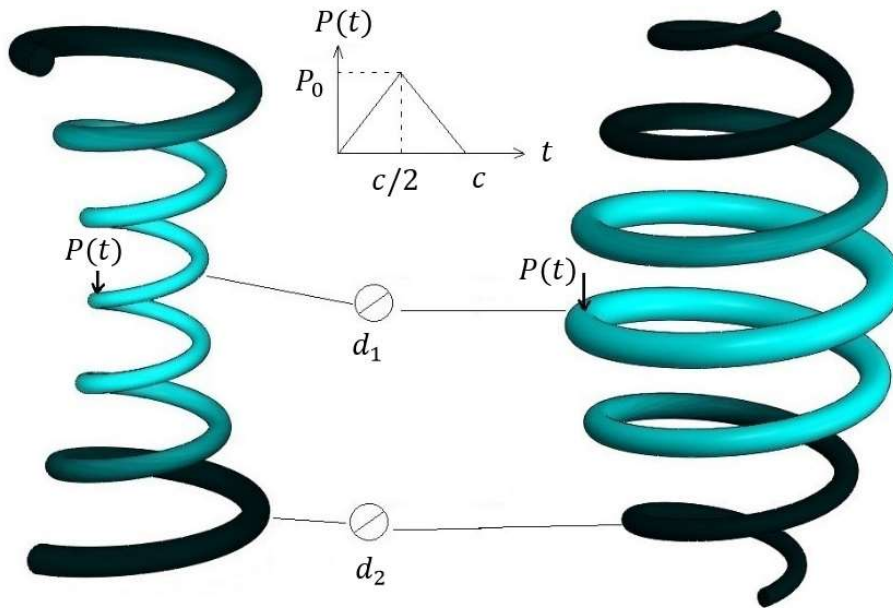
Şekil 4.27. Varil helisteki temel frekans değişimi ($\beta_{sec} = 0.5$)

4.9. Değişken Kesitli Fonksiyonel Derecelenmiş Viskoelastik Hiperbolik ve Varil Helisel Çubuklar

İki ucu ankastre değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik hiperbolik ve varil helisel çubukların zorlanmış titreşimi incelenmiştir (Şekil 4.28). Geometrik ve malzeme özellikleri: elastisite modülü $E_0 = 210 \text{ GPa}$, kütleli yoğunluk $\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, aktif sarım sayısı $n = 7.6$, helis yükselme açısı $\alpha = 8.5744^\circ$, uç noktalarındaki kesit çapı $d_2 = 1 \text{ mm}$ ve kayma düzeltme katsayıları $\alpha_n = \alpha_b = 1.1$. Hiperbolik helis için $R_1 = 5 \text{ mm}$, varil helis için $R_1 = 25 \text{ mm}$ olarak alınmıştır. Hiperbolik ve varil helisel çubuğun orta noktasına $(P_0)_z = 0.25 \text{ N}$ şiddetinde üçgen dinamik tekil yük uygulanmıştır (Şekil 4.28). Yükün uygulama süresi olarak hiperbolik heliste $c = 0.0025 \text{ s}$ ve varil heliste $c = 0.025 \text{ s}$ alınmıştır. Sönüm oranı olarak $g = 0.0005$ ve $g = 0.001$ kullanılmıştır. Çözümlerde, 512 Laplace parametresi ve zaman artımı hiperbolik helis için $\Delta t = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$, varil helis için $\Delta t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ olarak alınmıştır. Hiperbolik ve varil helislerde kesit ve malzeme değişimi aşağıda verilmektedir.

$$\rho(\phi) = \rho_0 * e^{\beta_{mat} * \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2}, \quad E(\phi) = E_0 * e^{\beta_{mat} * \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2} \quad (4.6)$$

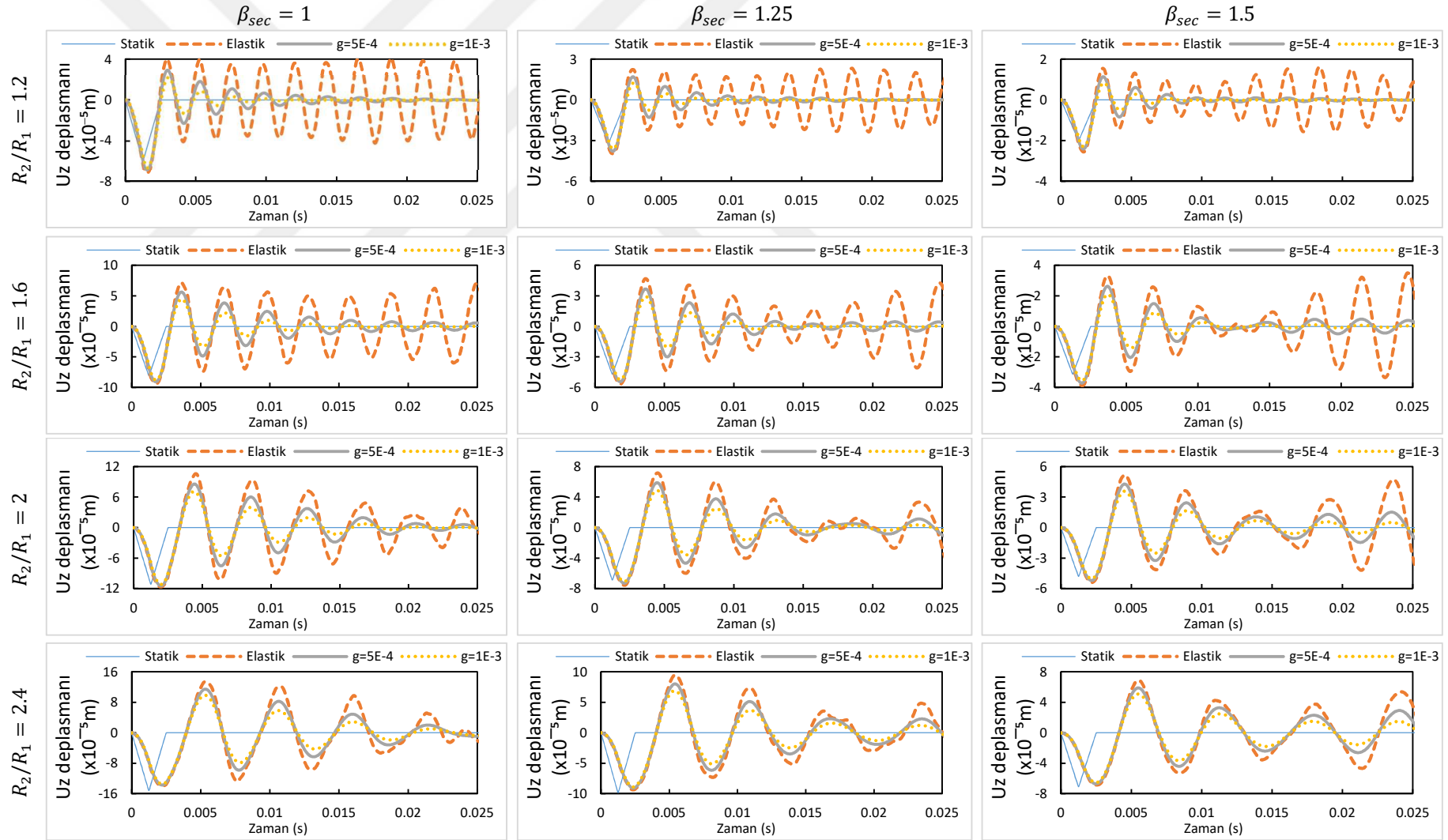
$$d(\phi) = d_1 + (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2, \quad d_1 = d_2 \beta_{sec}$$



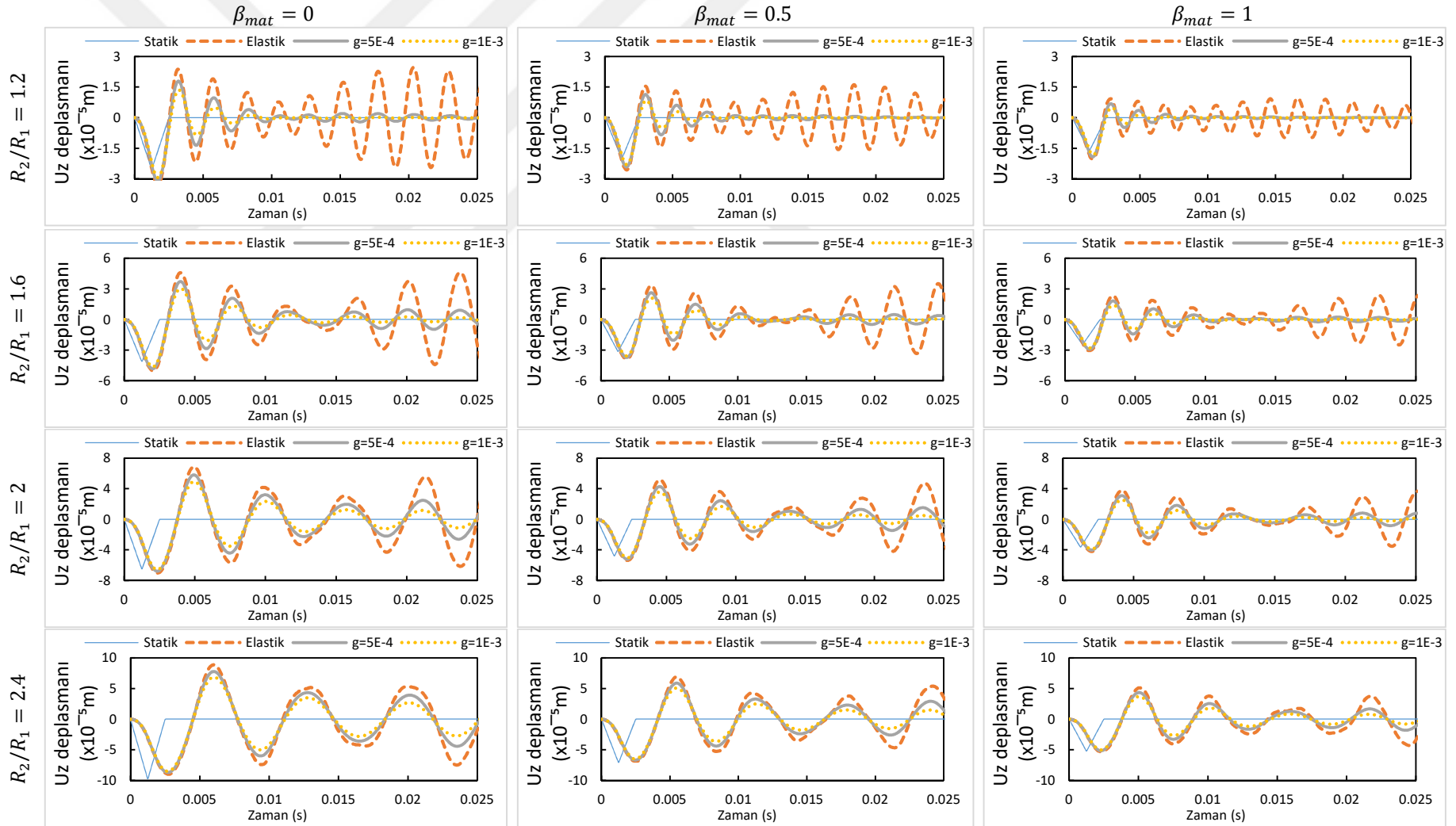
Şekil 4.28. Değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik hiperbolik ve varil helis

R_2/R_1 oranı, kesit ve malzeme değişiminin değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş viskoelastik hiperbolik ve varil helisel çubukların zorlanmış titreşim davranışı üzerine etkileri incelenmiştir. Farklı malzeme ve kesit değişim parametresine bağlı helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri hiperbolik helis için Şekil 4.29-30, varil helis için Şekil 4.31-4.32’de verilmiştir.

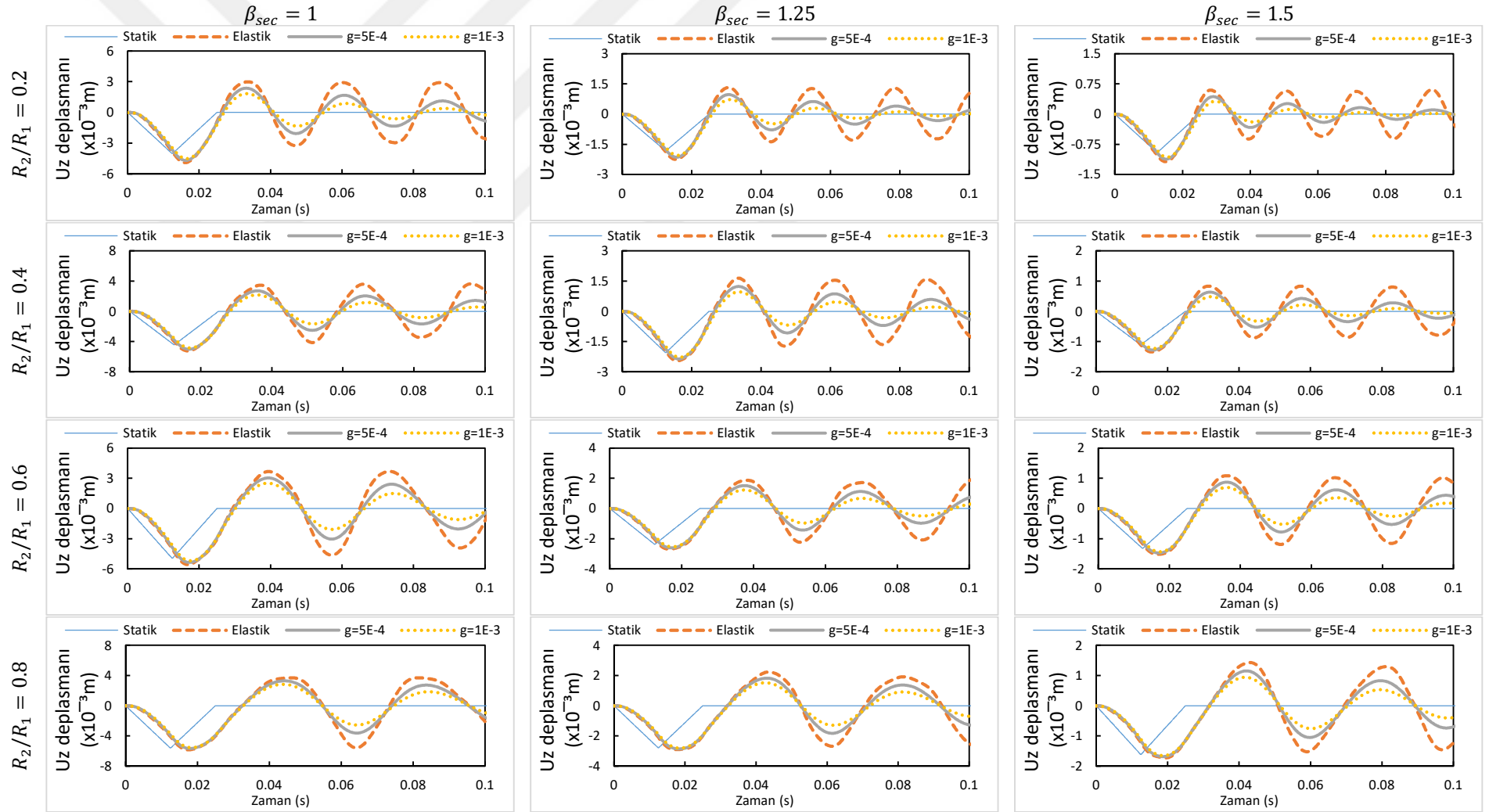
Kesit değişim parametresinin artışı helisel çubuğun orta kesitinin çapını artırmaktadır. Çubuğun rijitliği arttığından deplasman değerleri azalmaktadır. Hiperbolik ve varil helislerde R_2/R_1 oranının 1 olması silindirik helise karşılık gelmektedir. Hiperbolik helisler, R_2/R_1 oranının artması ile silindirik helislerden uzaklaşmaktadır. Varil helisler ise R_2/R_1 oranının artması ile silindirik helislere yaklaşmaktadır. Varil heliste silindirik geometriden uzaklaştıkça daha küçük deplasman, hiperbolik helislerde silindirik geometriden uzaklaştıkça daha büyük deplasman değerleri elde edilmektedir. Hiperbolik helisler silindirik geometriden uzaklaştıkça, varil helisler ise silindirik geometriye yaklaştıkça daha esnek bir yapıya sahip olmaktadır. Viskoelastik malzeme durumunda, silindirik olamayan helisel çubukların dinamik davranışın genliği belli bir süre sonra sönümlenerek statik değerine ulaşmaktadır. Sönüm oranının artması ile dinamik davranışın genliği azalmakta ve daha hızlı statik davranışa ulaşmaktadır.



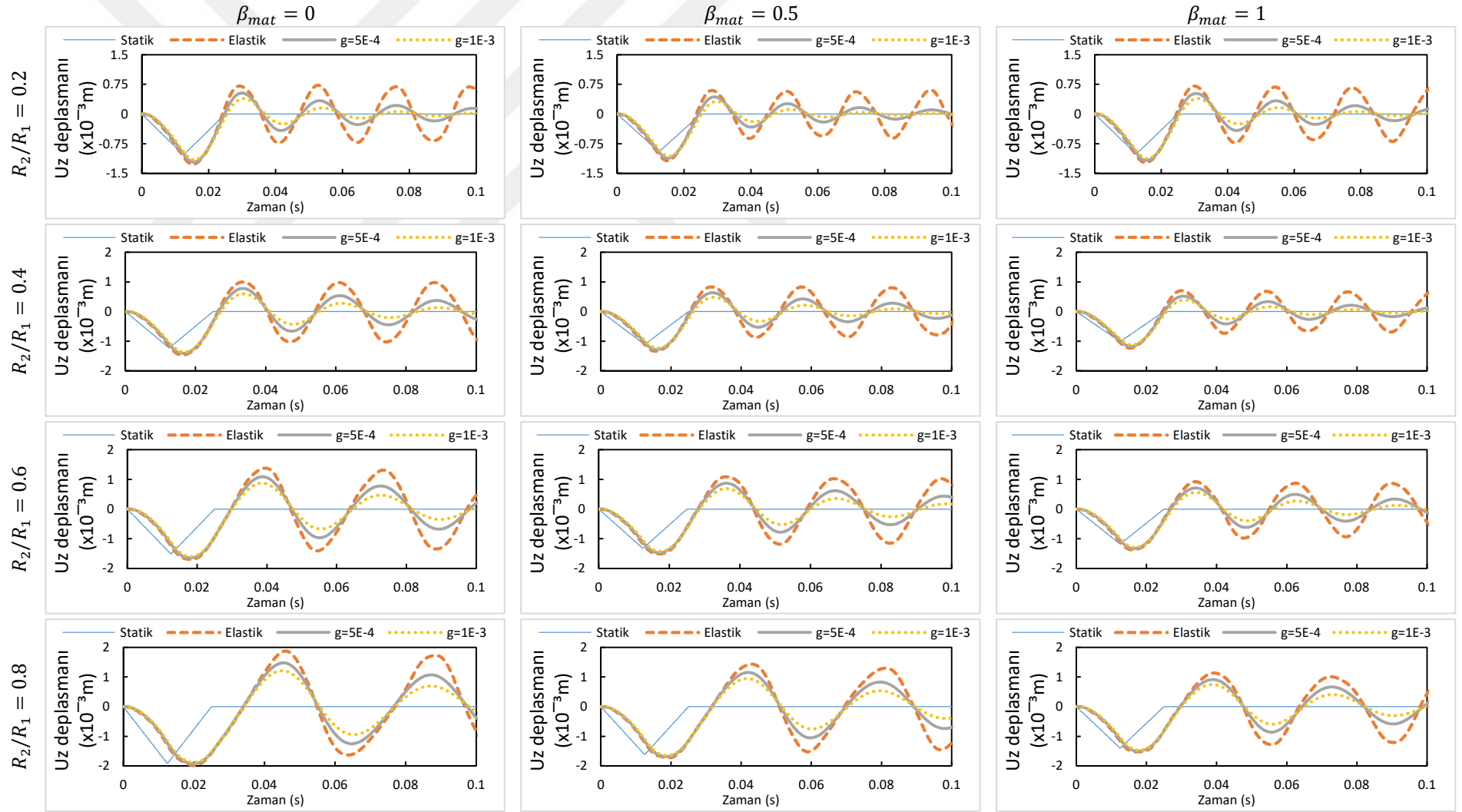
Şekil 4.29. Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{mat} = 0.5$)



Şekil 4.30. Hiperbolik helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{sec} = 1.5$)



Şekil 4.31. Varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{mat} = 0.5$)



Şekil 4.32. Varil helisin orta noktasındaki U_z deplasmanı ($\beta_{sec} = 1.5$)

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, değişken kesit ve fonksiyonel derecelenmiş malzemeye sahip silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşimi teorik olarak incelenmiştir. Timoshenko kiriş teorisi kullanarak eğri eksenli uzaysal çubukları idare eden denklemler elde edilmiştir. Eğri eksenli uzaysal çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler yere ve zamana bağlıdır. Diferansiyel denklemlerin daha kolay çözülebilmesi için Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Bu dönüşüm sayesinde olayı idare eden diferansiyel denklemler zamandan bağımsız hale gelmektedir. Böylece olayı idare eden denklemler, kısmi diferansiyel denklem takımından adi diferansiyel denklem takımına dönüşmektedir. Laplace uzayında eğri eksenli uzaysal çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler silindirik ve silindirik olmayan helisel çubuklar için yeniden düzenlenmiştir. Laplace uzayında değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden adi diferansiyel denklem takımı taşıma matrisi yöntemi ile çözülmüştür. Laplace uzayında elde edilen sonuçlar, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Viskoelastik malzeme durumunda elastik-viskoelastik analojisi kullanarak elastik malzeme sabitleri yerine Laplace uzayında viskoelastik malzeme sabitleri kullanılmıştır. Çözümlerde, Kelvin viskoelastik modeli uygulanmıştır.

Zamanla değişen yükler altında değişken kesitli eksenel fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır. Serbest titreşim analizi ise zorlanmış titreşimin özel hali olarak incelenmiştir. Olayı idare eden diferansiyel denklem takımındaki Laplace parametresi p yerine $i\omega$ yazılarak sistemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmaktadır. Dinamik rijitlik matrisinin determinantından ω 'ya bağlı n . dereceden bir polinom elde edilmektedir. Bu polinomun kök değerleri doğal frekanslar olup Secant kök bulma yöntemi ile hesaplanmıştır.

Helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini yapabilmek amacı ile Mathematica dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Önerilen yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile konu kapsamında literatürde bulunan mevcut örnekler çözülmüş ve mümkün olduğu durumlarda ANSYS programı ile de çözümler yapılarak kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçlar, tablo ve grafik olarak hazırlanmış olup sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları gösterilmiştir.

Farklı parametrelerin değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışına etkisi araştırılmıştır. Helis yükselme açısı, aktif sarım sayısı, R_2/R_1 oranı, kesit ve malzeme değişim parametresi, sönüm oranının serbest ve zorlanmış titreşim üzerine etkisi incelenmiştir.

Tez alışması kapsamında değişken kesitli fonksiyonel derecelenmiş silindirik ve silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı hakkında elde edilen sonuçlar iki başlık altında toplanmıştır.

5.1. Silindirik Helisel ubuklar

Silindirik helisel çubuklarda, aktif sarım sayısı ve helis yükselme açısının artması ile doğal frekanslar azalırken kesit ve malzeme parametresinin artması ile doğal frekanslar artmaktadır. Malzeme değişim parametresinin doğal frekanslar üzerine etkisi diğerlerine göre daha sınırlı kalmaktadır. Ayrıca aktif sarım sayısının artması ile frekans değeri ve frekans değerindeki değişim oranı azalmaktadır. Malzeme değişim parametresinin frekanslara etkisi sabit kesit durumunda sınırlı iken kesit değişim parametresinin artması ile daha belirgin hale gelmektedir.

Silindirik helisel çubuklarda aktif sarım sayısı, malzeme ve kesit değişim parametrelerinin zorlanmış titreşim davranışına etkileri incelenmiştir. Malzeme ve kesit değişim parametrelerinin artışı ile deplasman genlikleri azalırken titreşim periyotlarında küçük değişimler görülmektedir. Silindirik helisel çubuklarda kesit değişim parametresi malzeme değişim parametresine göre çok daha etkilidir. Kesit değişim parametresinin artması, helisel çubuğun rijitliğini arttırdığından deplasman genlikleri önemli bir şekilde azalmaktadır. Farklı kesit ve malzeme değişim parametrelerinde kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimleri davranış farklılığı göstermektedir. Farklı aktif sarım sayılarında, kesit ve malzeme değişimi parametresinin artması ile deplasman genliklerindeki değişim daha belirgin hale gelmektedir.

Viskoelastik silindirik helisel çubuklarda, sönüm oranı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin dinamik davranışa etkileri araştırılmıştır. Zamanla değişen yükler altında viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışının genliği belli bir süre sonra sönümlenerek statik değerine ulaşmaktadır. Sönüm oranının artması ile dinamik davranışın genliği azalmakta ve daha hızlı statik davranışa ulaşmaktadır. Kesit değişim parametresinin artması ile deplasman genlikleri azalırken, malzeme değişim parametresinin artması ile deplasman genlikleri artmaktadır.

5.2. Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar

Hiperbolik helislerde, malzeme değişim parametresinin artması ile temel frekanslar artarken R_2/R_1 oranının artması ile temel frekanslar azalmaktadır. Silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça temel frekanslar azalmaktadır. Hiperbolik helislerde, kesitin sabit olduğu durumda malzeme değişim parametresinin frekanslara etkisi sınırlı iken kesit değişim parametresinin artması ile malzeme değişim parametresinin frekanslara etkisi belirgin hale gelmektedir. Farklı R_2/R_1 oranlarında malzeme değişim parametresinin etkisi frekanslar üzerinde benzer eğilim göstermektedir.

Varil helislerde, kesit ve malzeme değişim parametresinin artması ile frekans değerleri artarken R_2/R_1 oranının artması ile temel frekanslar azalmaktadır. Silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça temel frekanslar artmaktadır. Ayrıca, kesit değişim parametresinin artması ile malzeme değişim parametresinin temel frekanslara etkisi çok daha belirgin hale gelmektedir.

Viskoelastik silindirik olmayan helisel çubuklarda, sönüm oranı, kesit ve malzeme değişim parametrelerinin dinamik davranışa etkileri araştırılmıştır. Zamanla değişen yükler altında silindirik olmayan viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışının genliği belli bir süre sonra sönümlenerek statik değerine ulaşmaktadır. Sönüm oranının artması ile dinamik davranışın genliği azalmakta ve daha hızlı statik davranışa ulaşmaktadır. Kesit ve malzeme değişim parametresinin artması ile deplasman genlikleri azalmaktadır. Kesit değişim parametresi malzeme değişim parametresine göre dinamik davranış üzerinde daha çok etkilidir.

Silindirik olmayan helisel çubuklarda kesit değişim parametresinin artması ile çubuğun rijitliği arttığından deplasman genlikleri azalmaktadır. Silindirik olmayan helisler, R_2/R_1 oranının 1 olması durumunda silindirik helise dönüşmektedir. Silindirik geometriden uzaklaştıkça hiperbolik helislerde deplasmanlar artarken varil helislerde deplasmanlar azalmaktadır. Hiperbolik helisler silindirik geometriden uzaklaştıkça, varil helisler ise silindirik geometriye yaklaştıkça daha esnek bir yapıya sahip olmaktadır.

KAYNAKLAR

- Ansys® Academic Research Mechanical, Release 21 R1, Help System, ANSYS, Inc.
- Aribas, U. N., Ermis, M., Eratli, N., & Omurtag, M. H. (2019). The static and dynamic analyses of warping included composite exact conical helix by mixed FEM. *Composites Part B: Engineering*, 160, 285–297. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.018>
- Aribas, U. N., Ermis, M., Kutlu, A., Eratli, N., & Omurtag, M. H. (2020). Forced vibration analysis of composite-geometrically exact elliptical cone helices via mixed FEM. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1–19. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1824048>
- Aribaş, U. N., & Omurtag, M. H. (2019). The static response of sandwich exact conical helices via MFEM. *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, 2(4), 153–163. <https://doi.org/10.31462/jseam.2019.04153163>
- Boley, B. A., & Weiner, J. H.. (1960). *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons. *Inc.*, New York.
- Busool, W., & Eisenberger, M. (2002). Free vibration of helicoidal beams of arbitrary shape and variable cross section. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 124(3), 397–409. <https://doi.org/10.1115/1.1468870>
- Calim, F. F. (2009a). Dynamic analysis of composite coil springs of arbitrary shape. *Composites Part B: Engineering*, 40(8), 741–757. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.04.017>
- Calim, F. F. (2009b). Forced vibration of helical rods of arbitrary shape. *Mechanics Research Communications*, 36(8), 882–891. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2009.07.007>
- Calim, F. F., & Cuma, Y. C. (2020). Vibration analysis of nonuniform hyperboloidal and barrel helices made of functionally graded material. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1822181>
- Calim, F. F., & Cuma, Y. C. (2021). Forced vibration analysis of viscoelastic helical rods with varying cross-section and functionally graded material. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1931307>

- Cuma, Y. C., & Calim, F. F. (2021a). Free vibration analysis of functionally graded cylindrical helices with variable cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 494, 115856. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115856>
- Cuma, Y. C., & Calim, F. F. (2021b). Transient response of functionally graded non-uniform cylindrical helical rods. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 40, 571–580. <https://doi.org/10.12989/scs.2021.40.4.571>
- Cuma, Y. C., & Calim, F. F. (2022). Dynamic response of viscoelastic functionally graded barrel and hyperboloidal coil springs with variable cross-sectional area. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. <https://doi.org/10.1007/s11043-021-09520-1>
- Çalim, F. F. (2003). Viskoelastik, anizotropik eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- Dubner, H. & Abate, J. (1968). Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15(1), 115-123. <https://doi.org/10.1145/321439.321446>
- Durbin, F. (1974). Numerical inversion of Laplace transforms: An efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer Journal*, 17, 371-376. <https://doi.org/10.1093/comjnl/17.4.371>
- Eratli, N., Argeso, H., Calim, F. F., Temel, B., & Omurtag, M. H. (2014). Dynamic analysis of linear viscoelastic cylindrical and conical helicoidal rods using the mixed FEM. *Journal of Sound and Vibration*, 333(16), 3671–3690. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.03.017>
- Eratli, N., Ermiş, M., & Omurtag, M. H. (2015). Free vibration analysis of helicoidal bars with thin-walled circular tube cross-section via mixed finite element method. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 33(2), 200–218.
- Eratli, N., Yilmaz, M., Darilmaz, K., & Omurtag, M. H. (2016). Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed FEM. *Structural Engineering and Mechanics*, 57(2), 221–238. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.2.221>
- Ermis, M., Eratlı, N., Argeso, H., Kutlu, A., & Omurtag, M. (2016). Parametric analysis of viscoelastic hyperboloidal helical rod. *Advances in Structural Engineering*, 19(9), 1420–1434. <https://doi.org/10.1177/1369433216643584>

- Ermis, M., & Omurtag, M. H. (2017). Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 131–132, 296–304. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010>
- Girgin, K. (2006). Free vibration analysis of non-cylindrical helices with, variable cross-section by using mixed FEM. *Journal of Sound and Vibration*, 297(3–5), 931–945. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.05.001>
- Guido, A. R., Della Pietra, L., & della Valle, S. (1978). Transverse vibrations of cylindrical helical springs. *Meccanica*, 13(2), 90–108. <https://doi.org/10.1007/BF02128537>
- Haktanir, V, & Kiral, E. (1993). Statical analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods. *Computers & Structures*, 49(4), 663–677. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90070-T](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90070-T)
- Haktanir, V. (1990). Silindirik helisel çubukların statik, dinamik ve burkulma davranışlarının taşıma ve rijitlik matrisleri metodu ile incelenmesi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- Haktanir, V. (1995). The complementary functions method for the element stiffness matrix of arbitrary spatial bars of helicoidal axes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(6), 1031–1056. <https://doi.org/10.1002/nme.1620380611>
- İnan, M. (1964). Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi. İTÜ.
- İnan, M. (1966). Elastik Çubukların Genel Teorisi. İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Jiang, W., Jones, W. K., Wang, T. L., & Wu, K. H. (1991). Free vibration of helical springs. *Journal of Applied Mechanics*, 58(1), 222–228. <https://doi.org/10.1115/1.2897154>
- Kacar, I., & Yıldırım, V. (2016). Free vibration/buckling analyses of noncylindrical initially compressed helical composite springs. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 44(4), 340–353. <https://doi.org/10.1080/15397734.2015.1066687>
- Kiral, E., & Ertepinar, A. (1974). Studies on elastic rods subject to diverse external agencies- Part I: Derivation of governing equations. *METU J. Pure Appl. Sci*, 7(1), 23–40.
- Kiral, E., Tokdemir, T., & Ural, S. (1976). Transient response of an elastic or/and viscoelastic curved rods under arbitrary time dependent loading. *METU J Pure Appl Sci*, 9(1), 63–86.

- Kobelelev, V. (2020). Delayed presetting of helical springs. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 48(1), 122–132. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1669457>
- Lee, J., & Thompson, D. J. (2001). Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs. *Journal of Sound and Vibration*, 239(2), 297–320. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3169>
- Lee, J. (2007). Free vibration analysis of cylindrical helical springs by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration*, 302(1), 185–196. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.008>
- Lin, Y., & Pisano, A. P. (1987). General dynamic equations of helical springs with static solution and experimental verification. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 54(4), 910–917. <https://doi.org/10.1115/1.3173138>
- Lin, Y., & Pisano, A. P. (1988). The differential geometry of the general helix as applied to mechanical springs. *Journal of Applied Mechanics*, 55(4), 831–836. <https://doi.org/10.1115/1.3173729>
- Liu, Y., & Sheng, L. (2007a). Stability and vibration of a helical rod constrained by a cylinder. *Acta Mechanica Sinica*, 23(2), 215–219. <https://doi.org/10.1007/s10409-007-0058-5>
- Liu, Y., & Sheng, L. (2007b). Stability and vibration of a helical rod with circular cross section in a viscous medium. *Chinese Physics*, 16(4), 891–896. <https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/4/003>
- Love, A.E.H. (1899). The propagation of waves of elastic displacement along a helical wire. *Transactions of Cambridge Philosophical Society*.
- Love, A. E. H. (1927). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press.
- Massoud, M. P. (1965). Vectorial Derivation of the Equations for Small Vibrations of Twisted Curved Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 32(2), 439–440. <https://doi.org/10.1115/1.3625823>
- Mottershead, J. E. (1980). Finite elements for dynamical analysis of helical rods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 22(5), 267–283. <https://doi.org/10.1016/0020->

- Nagaya, K. (1989). Dynamic stress analysis of a coil spring of arbitrary cross-section to general transient excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 128(2), 307–319. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(89\)90774-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(89)90774-8)
- Nagaya, K., Takeda, S., & Nakata, Y. (1986). Free vibration of coil springs of arbitrary shape. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(6), 1081–1099. <https://doi.org/10.1002/nme.1620230607>
- Narayanan, G. V. (1979). Numerical operational methods in structural Dynamics. Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.
- Noori, A. R., Aslan, T. A., & Temel, B. (2018). An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*, 200, 701-710. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.077>
- Omurtag, M. H., & Aköz, A. Y. (1992). The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading. *Computers and Structures*, 43(2), 325–331. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90149-T](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90149-T)
- Pearson, D. (1982). The Transfer Matrix Method for the Vibration of Compressed Helical Springs. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 24(4), 163–171. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1982_024_033_02
- Pearson, D., & Wittrick, W. H. (1986). An exact solution for the vibration of helical springs using a Bernoulli-Euler model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 28(2), 83–96.
- Phillips, J. W., & Costello, G. A. (1972). Large Deflections of Impacted Helical Springs. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3B), 967–973. <https://doi.org/10.1121/1.1912946>
- Sokolnikoff, I. S., & Redheffer, R. M. (1958). *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. In *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. McGraw-Hill.
- Tabarrok, B., Farshad, M., & Yi, H. (1988a). Finite element formulation of spatially curved and twisted rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(3), 275–299.

[https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90021-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90021-7)

- Tabarrok, B., Sinclair, A. N., Farshad, M., & Yi, H. (1988b). On the dynamics of spatially curved and twisted rods—A finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 123(2), 315–326. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80114-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80114-7)
- Temel, B., & Calim, F. F. (2003). Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads. *Journal of Applied Mechanics*, 70(2), 281–291. <https://doi.org/10.1115/1.1554413>
- Temel, B. (2004). Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5), 1605–1624. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.054>
- Temel, B., Calim, F. F., & Tütüncü, N. (2004). Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3–5), 921–935. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00760-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00760-0)
- Temel, B., Calim, F. F., & Tütüncü, N. (2005). Forced vibration of composite cylindrical helical rods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(7), 998–1022.
- Wang, G., Zhu, L., Higuchi, K., Fan, W., & Li, L. (2020). Solution for free vibration of spatial curved beams. *Engineering Computations*, 37(5), 1597–1616. <https://doi.org/10.1108/EC-03-2019-0097>
- Wittrick, W. H. (1966). On elastic wave propagation in helical springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 8(1), 25–47. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(66\)90061-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(66)90061-0)
- Xiong, Y., & Tabarrok, B. (1992). A finite element model for the vibration of spatial rods under various applied loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 34(1), 41–51. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90052-I](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90052-I)
- Yıldırım, V. (1996). Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(1), 99–114. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960115\)39:1<99::AID-NME850>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960115)39:1<99::AID-NME850>3.0.CO;2-M)
- Yıldırım, V. (1997). Free Vibration analysis of non-cylindrical coil springs by combined use of transfer matrix and the complementary functions methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(6), 487–494. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-)

- Yıldırım, V. (1998). A Parametric Study on the Free Vibration of Noncylindrical Helical Springs. *Journal of Applied Mechanics*, 65(1), 157–163. <https://doi.org/10.1115/1.2789019>
- Yıldırım, V. (1999a). An efficient numerical method for predicting the natural frequencies of cylindrical helical springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(8), 919-939. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00065-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00065-4)
- Yıldırım, V. (1999b). A Numerical Study on the Free Vibration of Symmetric Cross-Ply Laminated Cylindrical Helical Springs. *Journal of Applied Mechanics*, 66(4), 1040-1043. <https://doi.org/10.1115/1.2791780>
- Yıldırım, V. (2001a). Free vibration of uniaxial composite cylindrical helical springs with circular section. *Journal of Sound and Vibration*, 239(2), 321–333. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3168>
- Yıldırım, V. (2001b). Free Vibration Characteristics of Composite Barrel and Hyperboloidal Coil Springs. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 8(3) 205-217. <https://doi.org/10.1080/10759410118652>
- Yıldırım, V. (2002). Expressions for predicting fundamental natural frequencies of non-cylindrical helical springs. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3), 479–491. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4005>
- Yıldırım, V. (2004). A parametric study on the natural frequencies of unidirectional composite conical springs. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20(3), 207-227. <https://doi.org/10.1002/cnm.661>
- Yıldırım, V. (2009). Numerical buckling analysis of cylindrical helical coil springs in a dynamic manner. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1(1), 20-32.
- Yıldırım, V. (2012). On the linearized disturbance dynamic equations for buckling and free vibration of cylindrical helical coil springs under combined compression and torsion. *Meccanica*, 47, 1015-1033. <https://doi.org/10.1007/s11012-011-9492-3>
- Yıldırım, V. (2016a). Exact determination of the global tip deflection of both close-coiled and open-coiled cylindrical helical compression springs having arbitrary doubly-symmetric

- cross-sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115-116, 280-298.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.022>
- Yıldırım, V. (2016b). Axial static load dependence free vibration analysis of helical springs based on the theory of spatially curved bars. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(15). <https://doi.org/10.1590/1679-78253123>
- Yıldırım, V., & İnce, N. (1997). Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape. *Journal of Sound and Vibration*, 204(2), 311–329. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.0940>
- Yıldırım, V., Sancaktar, E. & Kırıl, E. (1999). The effect of the longitudinal to transverse moduli ratio on the natural frequencies of symmetric cross-ply laminated cylindrical helical springs. *Journal of Mechanical Design*, 121(4), 634-639, <https://doi.org/10.1115/1.2829510>
- Yıldırım, V, & Sancaktar, E. (2000). Linear free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(6), 1153–1169. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00041-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00041-7)
- Yousefi, A., & Rastgoo, A. (2011). Free vibration of functionally graded spatial curved beams. *Composite Structures*, 93(11), 3048–3056. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.024>
- Yu, A., & Hao, Y. (2013a). Effect of warping on natural frequencies of symmetrical cross-ply laminated composite non-cylindrical helical springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 74, 65–72. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.04.010>
- Yu, A., & Hao, Y. (2013b). Warping effect in free vibration analysis of unidirectional composite non-cylindrical helical springs. *Meccanica*, 48(10), 2453–2465. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9760-5>
- Yu, A. M., & Hao, Y. (2011). Free vibration analysis of cylindrical helical springs with noncircular cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11), 2628–2639. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.12.015>
- Yu, A., & Yang, C. (2010). Formulation and evaluation of an analytical study for cylindrical helical springs. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 23(1), 85–94. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(10\)60010-9](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(10)60010-9)

EK – A Diferansiyel Geçiş Matrisi

Silindirik Helisel Çubuklar İçin Diferansiyel Geçiş Matrisi

$$\bar{\mathbf{D}}(\phi, p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & c & 0 & \frac{c\alpha_n}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & \frac{c\alpha_b}{GA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{GI_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{GI_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{GI_b} \\ p^2 c \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 c \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{c} & 0 & \frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 c \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 c \rho I_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 c \rho I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{c} & 0 & \frac{h}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 c \rho I_b & 0 & -c & 0 & 0 & -\frac{h}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Silindirik Olmayan Helisel Çubuklar İçin Diferansiyel Geçiş Matrisi

$$\bar{\mathbf{D}}(\phi, p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(\phi)}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & \frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & c(\phi) & 0 & \frac{c(\phi)\alpha_n}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & -c(\phi) & 0 & 0 & 0 & \frac{c(\phi)\alpha_b}{GA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(\phi)}{GI_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & \frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(\phi)}{GI_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(\phi)}{GI_b} \\ p^2 c(\phi) \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 c(\phi) \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & \frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 c(\phi) \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 c(\phi) \rho I_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 c(\phi) \rho I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} & 0 & \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 c(\phi) \rho I_b & 0 & -c(\phi) & 0 & 0 & -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$