

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

SÜPER UZAYDA KUATERNİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RÜŞDÜ ORHAN

DENİZLİ, KASIM – 2022

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK**



SÜPER UZAYDA KUATERNİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RÜŞDÜ ORHAN

DENİZLİ, KASIM – 2022

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

RÜŞDÜ ORHAN



ÖZET

**SÜPER UZAYDA KUATERNİYONLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
RÜŞDÜ ORHAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, KASIM – 2022

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kuaterniyonlar ile ilgili tanımlara, temel teoremlere ve kuaterniyon matrisi ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise süper uzay ile ilgili tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Süper sayılar, süper vektör uzayı ve süper reel sayılar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise kuaterniyonlar ve süper uzay incelenmiş ve kuaterniyonları süper uzayda tanımlayarak, süper kuaterniyonu ve kuaterniyon matrisini, süper uzayda tanımlayarak, süper kuaterniyon matrisini tanımladık. Kuaterniyon matrisinin toplama ve skaler ile çarpmasını süper uzayda tanımlayıp gösterdik.

ANAHTAR KELİMELEER: SÜPER UZAY, SÜPER SAYI, SÜPER KUATERNİYON

ABSTRACT

**SUPER SPACE QUATERNIONS
MSC THESIS
RÜŞDÜ ORHAN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, NOVEMBER 2022

This thesis consists of three parts. In the first chapter, definitions of quaternions, basic theorems and information about quaternion matrix are given.

In the second part, definitions, theorems and properties related to superspace are given. Information about super numbers, super vector space and super real numbers are given.

In the third chapter, quaternions and superspace were examined and we defined the superquaternion matrix by defining the quaternions in superspace, defining the superquaternion and quaternion matrix in superspace. We have described and demonstrated the multiplication of the quaternion matrix by addition and scalar in superspace.

**KEYWORDS: SUPER SPACE, SUPER NUMBER, SUPER
QUATERNIONS**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
TABLO LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. KUATERNİYONUN TARİHÇESİ	1
1.2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
1.3. KUATERNİYON ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ	5
1.4. KUATERNİYON MATRİS GÖSTERİMİ	11
1.5. KUATERNİYON MATRİSLERDE TOPLAMA VE SKALER İLE ÇARPMA	13
2. SÜPER UZAY.....	14
2.1.SÜPER UZAYIN TARİHÇE.....	14
2.2. SÜPER UZAY.....	15
2.3. SÜPER SAYILAR.....	16
2.4. SÜPER SAYILARIN ANALİTİK FONKSİYONU	21
2.5.REEL SÜPER SAYILAR	23
2.6. SÜPER VEKTÖR UZAYI.....	25
3. SÜPER KUATERNİYON	29
3.1. SÜPER KUATERNİYON ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ.....	31
3.2.SÜPER KUATERNİYON CEBİRİ.....	39
3.3.SÜPER KUATERNİYON MATRİSİ	40
3.4. SÜPER KUATERNİYON MATRİSİNDE TOPLAMA VE SKALER İLE ÇARPMA	41
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	42
5. KAYNAKÇA	43
6. ÖZ GEÇMİŞ.....	45

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1: Kuaterniyon Çarpım Tablosu	2
Tablo 2: Süper Kuaterniyon Çarpım Tablosu.....	31



SEMBOL LİSTESİ

- H : Kuterniyon
- $\langle, \rangle$: İç Çarpım
- $\wedge$: Vektörel Çarpım
- $\wedge_{\infty}$: Dış Cebir
- $\wedge_N$: Grasmann Cebiri
- Z_B : Body Kısım
- Z_S : Soul Kısım
- C_c : c-sayıları
- C_a : a- sayıları
- $()^*$: Kompleks Konjuge Operatörü
- R_c : c - sayılarının bütün reel elemanların kümesi
- R_a : a- sayılarının bütün reel elemanların kümesi
- H^* : Süper kuaterniyon

ÖNSÖZ

Tez çalışmasının her aşamasında fikir ve yardımlarıyla yanımda olan, lisans döneminden bu yana bilgi ve fikirlerini benim ile paylaşan, tez çalışmam boyunca sabır ve güler yüzüyle bana destek olan, çok değerli danışman hocam, sayın Prof. Dr. Cansel AYCAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen babam Şaban ORHAN, annem Raziye ORHAN ve kız kardeşim Hatice ORHAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans bölümünde eğitim aldığım Pamukkale Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Bu bölümde kuaterniyonların tarihçesi, temel tanım ve özellikleri, teoremler ve ispatlar verilecektir.

1.1 Kuaterniyonun Tarihçesi

Matematikçiler 19. Yüzyılda karmaşık sayıları da dahil ederek üç boyutlu sayılar sistemi kurmaya çalıştılar. Hamilton 16 Ekim 1843 Pazartesi günü kraliyet ailesinin bir konsey toplantısına başkanlık yapmak için kraliyet kanalı boyunca eşiyle birlikte yürürken bu sorunun çözümü aklına geldi. Bunun sonucunda matematikteki en ünlü vandalizm eylemini gerçekleştirdi. O esnada Hamilton Brougham Köprüsünün üzerindeydi. Kalemını çıkardı ve oradaki taşa aklına gelen formülü yazdı. Yazdığı formül şu şekilde;

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Hamilton üç rakamlı koordinatlar için matematiksel olarak geçerli kural bulmanın imkansız olduğunu ancak bunun dört rakamla çalışmasını sağlayabileceğini fark etmiştir. Buluşunu kuaterniyonlar (dördeyle) olarak adlandırdı.

Modern cebirdeki en önemli gelişmelerden biri 1843'de kuaterniyonların keşfi ile yaşandı. William Hamilton'un akademiye birkaç hafta sonra Kasım 1843'de sunduğu teoride kuaterniyonlar terimi belirli bir dörtlü ifadeyi adlandırmak için kullandı. Hamilton karmaşık sayıları $q = a + bi + cj + dk$ biçiminde genelleştirmiştir.

Kuaterniyonlar cismi " H " ile gösterilir. " H " üzerinde kuaterniyonların çarpma işlemi aşağıdaki gibidir.

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Tablo1(Kuaterniyon Çarpım Tablosu)

Bu çarpımı daha kısa olarak,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1 \quad (1.1)$$

biçiminde verebiliriz. Çarpım tablosunda da görüldüğü gibi kuaterniyonlar cismi çarpma işlemi altında değişmeli değildir. Yani

$$ij = k, ji = -k \text{ ve } jk = i, kj = -i$$

olduğundan açıkça görülüyor: $jk \neq kj$ dir.

Şimdi aşağıdaki sunacağımız temel kavramları ifade edelim.

1.2 Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1: Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu için a , q 'nun reel veya skaler kısmı ve $bi + cj + dk$ imajiner kısmı veya vektörel kısmı denir (Parker 2009).

Tanım 1.2.2: Herhangi bir $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ kuaterniyonlarını alalım.

$$(p + q) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

kuaterniyon toplamı alındığında;

$$Re(p + q) = a_1 + a_2,$$

$$Re(p + q) = Re(p) + Re(q)$$

olur. Benzer şekilde;

$$Im(p + q) = Im(p) + Im(q)$$

olduğu kolayca görülür (Vicci 2001).

Tanım 1.2.3: Herhangi bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için bir skaler ile bir kuaterniyonun çarpım işlemi;

$$\begin{aligned}\alpha q &= \alpha(a + bi + cj + dk) \\ &= \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk\end{aligned}$$

veya

$$\alpha q = \alpha Re(q) + \alpha Im(q)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $\alpha q = q\alpha$ dır (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 1.2.4 (Kuaterniyon modülü): Bir $q \in H$ kuaterniyonun modülü $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}$ biçiminde tanımlanır. Buna göre $q = a + bi + cj + dk$ için:

$$\begin{aligned}|q|^2 &= q \cdot \bar{q} \\ &= (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ba - ab - cd + dc)i \\ &\quad + (ac - ca + bd - db)j + (-ad + da - bc + cb)k \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2\end{aligned}$$

olduğundan;

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

elde edilir (Parker 2009).

Tanım 1.2.5 (Kuaterniyonda diklik ve paralellik): Herhangi bir p ve q kuaterniyonlarının vektörel kısımları olan $Im(p) = \frac{p-\bar{p}}{2}$ ve $Im(q) = \frac{q-\bar{q}}{2}$ birbirine paralel (yani $s = Im(p).Im(q)$ iken $s - \bar{s} = 0$) ise p ve q kuaterniyonlarına “paralel” denir. $p//q$ ile gösterilir. Toplamları yani $s + \bar{s} = 0$ ise bu kuaterniyonlara “diktir” denir (Vicci 2001).

Tanım 1.2.6 (Kuaterniyonun tersi) : Bir $q \in H$ kuaterniyonun tersi q^{-1} ile gösterilir. Buna göre $|q|^2 = q \cdot \bar{q}$ olduğundan $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ olur. Yani kompleks sayılarda olduğu gibi $q, p \in H$ için $(q.p)^{-1} = q^{-1}.p^{-1}$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} (q.p)^{-1} &= \frac{\overline{qp}}{|qp|^2} \\ &= \frac{\bar{q}\bar{p}}{|q|^2 \cdot |p|^2} \\ &= \frac{\bar{q} \cdot \bar{p}}{|q|^2 \cdot |p|^2} \\ &= \frac{\bar{q}}{|q|^2} \cdot \frac{\bar{p}}{|p|^2} \\ &= q^{-1}.p^{-1} \end{aligned}$$

bulunur (Richart 1990).

Tanım 1.2.7: Herhangi p ve q kuaterniyonlarının reel kısmı $Re(p)$ ve $Re(q)$ olmak üzere eğer

$$\begin{aligned} p &= Re(p) \text{ ve } q = Re(q) \text{ ise;} \\ p.q &= Re(p).Re(q) \\ &= Re(q).Re(p) \\ &= q.p \end{aligned}$$

dir (Vicci 2001).

Tanım 1.2.8 (Kuaterniyonda benzerlik): Herhangi $p, q \in H$ olsun. Eğer $rq = rp, r \neq 0$ olacak biçimde bir $r \in H$ varsa p ve q benzerdir (Parker 2008; Ünal 2011).

Tanım 1.2.9: Herhangi bir $p, q \in H$ için kuaterniyon çarpımı;

$$p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k ; \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$$

$$q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k ; \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$p \cdot q = a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_1 - c_1b_2)k$$

$$pq = R(p) \cdot Re(q) - \langle Im(p), Im(q) \rangle + Re(p) \cdot Im(q) \\ + Im(p) \cdot Re(q) + Im(p) \wedge Im(q)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\langle \rangle$ ve $\wedge$ işlemleri sırasıyla $\mathbb{R}^3$ deki iç ve vektörel çarpımlardır. Buradan;

$$Re(pq) = Re(p)Re(q) - \langle Im(p), Im(q) \rangle$$

ve

$$Im(pq) = Re(p)Im(q) + Re(q)Im(p) + Im(p) \wedge Im(q)$$

olduğu kolayca görülür (Ünal 2011).

1.3 Kuaterniyon Çarpımının Özellikleri

Özellik 1.3.1: İki kuaterniyon çarpımı yine bir kuaterniyondur.

İspat:

$$p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \text{ ve } q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$$

herhangi $p, q \in H$ için;

$$\begin{aligned}
 p \cdot q &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\
 &\quad + (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k \\
 p \cdot q &= a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k ; \quad a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Özellik 1.3.2: Kuaterniyon çarpımı birleşmelidir.

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$$

İspat:

$$p = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k ; \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$$

$$q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k ; \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$r = a_4 + b_4 i + c_4 j + d_4 k ; \quad a_4, b_4, c_4, d_4 \in \mathbb{R}$$

$$(p \cdot q) \cdot r = (a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \cdot (a_4 + b_4 i + c_4 j + d_4 k)$$

$$= (a_3 a_4 - (b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4)$$

$$+ (a_3 b_4 + b_3 a_4 + c_3 d_4 - d_3 c_4)i$$

$$+ (a_3 c_4 + c_3 a_4 + d_3 b_4 - b_3 d_4)j$$

$$+ (a_3 d_4 + a_4 d_3 - c_3 b_4 + c_4 b_3)k$$

$$(pq)r = a_5 + b_5 i + c_5 j + d_5 k ; \quad a_5, b_5, c_5, d_5 \in \mathbb{R}$$

diğer taraf da benzer şekilde ispatlanır. Yani $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ dır (Ünal 2011).

Özellik 1.3.3: Kuaterniyon çarpımı soldan ve sağdan dağılımlıdır.

İspat:

$$p.(q+r) = p.q + pr, \quad (p+q).r = pr + qr$$

$$p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k; \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$$

$$q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k; \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$r = a_4 + b_4i + c_4j + d_4k; \quad a_4, b_4, c_4, d_4 \in \mathbb{R}$$

$$p(q+r) = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).((a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) + (a_4 + b_4i + c_4j + d_4k))$$

$$q+r = (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) + (a_4 + b_4i + c_4j + d_4k)$$

$$= (a_2 + a_4) + (b_2 + b_4)i + (c_2 + c_4)j + (d_2 + d_4)k$$

$$q+r = a_6 + b_6i + c_6j + d_6k; \quad a_6, b_6, c_6, d_6 \in \mathbb{R}$$

$$p(q+r) = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).(a_6 + b_6i + c_6j + d_6k)$$

$$= (a_1a_6 - (b_1b_6 + c_1c_6 + d_1d_6)$$

$$+ (a_1b_6 + b_1a_6 + c_1d_6 - d_1c_6)i$$

$$+ (a_1c_6 + c_1a_6 + d_1a_6 - a_1d_6)j$$

$$+ (a_1d_6 + a_6d_1 - c_1b_6 + c_6b_1)k$$

$$p(q+r) = a_7 + b_7i + c_7j + d_7k; \quad a_7, b_7, c_7, d_7 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

$$pq + pr = (a_3 + b_3i + c_3j + d_3k)$$

$$+ ((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).(a_4 + b_4i + c_4j + d_4k))$$

$$pr = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).(a_4 + b_4i + c_4j + d_4k)$$

$$= a_1a_4 - (b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4)$$

$$+ (a_1b_4 + b_1a_4 + c_1d_4 - d_1c_4)i$$

$$+ (a_1c_4 + c_1a_4 + d_1a_4 - a_1d_4)j$$

$$+ (a_1d_4 + a_4d_1 - c_1b_4 + c_4b_1)k$$

$$pr = a_8 + b_8i + c_8j + d_8k; \quad a_8, b_8, c_8, d_8 \in \mathbb{R}$$

$$pq + pr = (a_3 + b_3i + c_3j + d_3k) + (a_8 + b_8i + c_8j + d_8k)$$

$$\begin{aligned}
&= (a_3 + a_8) + (b_3 + b_8)i + (c_3 + c_8)j + (d_3 + d_8)k \\
pq + pr &= a_9 + b_9i + c_9j + d_9k ; \quad a_9, b_9, c_9, d_9 \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

denklem 1.2 ve denklem 1.3 ten eşitlik sağlanmış olur. Yani;

$$p(q + r) = pq + pr$$

dir. Şimdi diğer tarafın ispatına bakalım.

$$(p + q)r = pr + qr$$

$$\begin{aligned}
p + q &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\
&= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\
p + q &= a_{10} + b_{10}i + c_{10}j + d_{10}k ; \quad a_{10}, b_{10}, c_{10}, d_{10} \in \mathbb{R} \\
(p + q)r &= (a_{10} + b_{10}i + c_{10}j + d_{10}k) \cdot (a_4 + b_4i + c_4j + d_4k) \\
&= a_{10}a_4 - (b_{10}b_4 + c_{10}c_4 + d_{10}d_4) \\
&\quad + (a_{10}b_4 + b_{10}a_4 + c_{10}d_4 - d_{10}c_4)i \\
&\quad + (a_{10}c_4 + c_{10}a_4 + d_{10}a_4 - a_{10}d_4)j \\
&\quad + (a_{10}d_4 + a_4d_{10} - c_{10}b_4 + c_4b_{10})k \\
(p + q)r &= a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k ; \quad a_{11}, b_{11}, c_{11}, d_{11} \in \mathbb{R} \\
qr &= (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \cdot (a_4 + b_4i + c_4j + d_4k) \\
&= a_2a_4 - (b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4) \\
&\quad + (a_2b_4 + b_2a_4 + c_2d_4 - d_2c_4)i \\
&\quad + (a_2c_4 + c_2a_4 + d_2a_4 - a_2d_4)j \\
&\quad + (a_2d_4 + a_4d_2 - c_2b_4 + c_4b_2)k
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$qr = a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k ; \quad a_{12}, b_{12}, c_{12}, d_{12} \in \mathbb{R}$$

$$pr + qr = (a_8 + b_8i + c_8j + d_8k) + (a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k)$$

$$= (a_8 + a_{12}) + (b_8 + b_{12})i + (c_8 + c_{12})j + (d_8 + d_{12})k$$

$$pr + qr = a_{13} + b_{13}i + c_{13}j + d_{13}k ; \quad a_{13}, b_{13}, c_{13}, d_{13} \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

denklem 1.4 ve denklem 1.5 ten ispatımız tamamlanmış olur. Yani;

$$(p + q)r = pr + qr$$

dır. Buradan kuaterniyon çarpımının soldan ve sağdan dağılımı ispatlanmıştır.

Özellik 1.3.4: Kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir (Ünal 2011).

İspat: "Tablo 1" de gösterildiği üzere $ij \neq ji$ olduğundan, değişmeli olmadığı görülür.

Teorem1.1: Herhangi bir $q, p, r \in H$ alalım. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\bar{q} \cdot q = q \cdot \bar{q}$ yani $|q| = |\bar{q}|$ dir.

2. $|\cdot| = H$ üzerinde bir normdur. Yani;

i. $|q| = 0 \iff q = 0$

ii. $|q + p| \leq |q| + |p|$

iii. $|qp| \leq |pq| = |p| \cdot |q|$

3. $|q|^2 + |p|^2 = \frac{1}{2}(|q + p|^2 + |q - p|^2)$ (Ünal, 2011).

İspat 1: $q \cdot \bar{q} = (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$$\bar{q} \cdot q = (a - bi - cj - dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

buradan;

$$\bar{q} \cdot q = q \cdot \bar{q}$$

olduğundan;

$$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{\bar{q} \cdot q}$$

buradan $|q| = |\bar{q}|$ dir (Ünal 2011).

2.i.

$$|q| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{q \cdot \bar{q}} = 0$$

$$|q| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 0$$

$$|q| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$$

$$|q| = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

$$|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

olur.

ii.

$$\begin{aligned} |q + p| &= \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2 + (d_1 + d_2)^2} \\ &= (a_1 + a_2)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 \end{aligned}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} \\ &\leq |q| + |p| \end{aligned}$$

iii.

$$|q \cdot p| = \sqrt{(qp)(\overline{qp})} = \sqrt{q \cdot |p|^2 \bar{q}} = \sqrt{|q|^2 \cdot |p|^2} = |q|^2 \cdot |p|^2$$

$$|pq| = \sqrt{(pq)(\overline{pq})} = \sqrt{p \cdot |q|^2 \bar{p}} = \sqrt{|p|^2 \cdot |q|^2} = |p|^2 \cdot |q|^2$$

(Ünal 2011).

3)

$$|q + p|^2 = (q + p) \cdot \overline{(q + p)}$$

$$= (q + p) \cdot (\bar{q} + \bar{p})$$

$$= q \cdot \bar{q} + q \cdot \bar{p} + p \cdot \bar{q} + p \cdot \bar{p}$$

$$= |q| + q \cdot \bar{q} + p \cdot \bar{q} + |p|$$

$$|q - p|^2 = (q - p) \cdot \overline{(q - p)}$$

$$= (q - p) \cdot (\bar{q} - \bar{p})$$

$$\begin{aligned}
&= q \cdot \bar{q} - q \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{q} - p \cdot \bar{p} \\
&= |q| - q \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{q} - |p|
\end{aligned}$$

$$|q + p|^2 + |q - p|^2 = (|q|^2 + q \cdot \bar{p} + p \cdot \bar{q} + |p|^2) + (|p|^2 - q \bar{p} - p \bar{q} + |q|^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (|q|^2 + |p|^2) + (|p|^2 + |q|^2) \\
&= 2 \cdot |p|^2 + 2 \cdot |q|^2 \\
&= 2(|p|^2 + |q|^2)
\end{aligned}$$

$$|q|^2 + |p|^2 = \frac{1}{2}(|q + p|^2 + |q - p|^2) \quad (\ddot{U}nal, 2011).$$

1.4 Kuaterniyonların Matris Gösterimi

Bu bölümde kuaterniyon bileşenli matrisleri ele alacağız, yanı sıra değışmeli olmayan kuaterniyonların lineer cebirde sunulan temel matris özelliklerini ve metotlarını nasıl etkilediğini ele alacağız. Daha karmaşık matrisler düşünıldüğünde, kuaterniyonik matrislerle işlem yapmak faydalıdır. Bu sayede daha yüksek boyutlu matrisleri içeren hesaplamaları yapmaktan kaçınabiliriz. H kuaterniyon halkasının $H_1 = \{a_0 1 + a_1 i; a_0, a_1 \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ alt kümesini alalım.

$\{H_1, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sisteminin bir cebir olduğunu kolayca gösterebiliriz. Herhangi $(a_0 1 + a_1 i) \in H_1$ kuaterniyonu $(a + bi) \in \mathbb{C}$ kompleks sayısına eşlersek bu eşlemeye göre H_1 in $\mathbb{C}$ ye izomorf olduğunu söyleyebiliriz.

H , bir cebire sahip olan bir alt cisim kapsadığı için kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzaydır. Buna göre $q \in H$ ve $x = (a + ib) \in \mathbb{C}$ için qx çarpımı $qx = q(a + ib) \in H$ kuaterniyonuna karşılık gelir. Burada;

$$\text{i) } (q_1 + q_2)x = q_1x + q_2x$$

$$\text{ii) } q(x_1 + x_2) = qx_1 + qx_2$$

$$\text{iii) } q(x_1 x_2) = (qx_1)x_2 = x_1(qx_2)$$

$$\text{iv) } q(1 + 0i) = q$$

özellikleri sağlanır. Böylece H kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur (burada q nun x ile soldan çarpımı esas alınmıştır). Kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir q kuaterniyonunun ifadesi;

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + (c + di)j; \\ a_1 &= a + bi, a_2 = c + di \\ &= a_1 + a_2j \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} q &= a_1 + \overline{a_2}j \\ q &= 1(a + bi) + j(c + di) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan H nın $\mathbb{C}$ üzerinde 2-boyutlu olduğu sonucuna varılır. Yani H nın bir bazı $\{1, j\}$ olur. H nın matris gösterimini elde etmek için,

$$\begin{aligned} T: H &\rightarrow Hom(H, H) \\ q &\rightarrow T_q \end{aligned}$$

dönüşümünü $\forall q \in H$ için;

$$T_q: H \rightarrow H, q' \rightarrow T_q(q') = q'q$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm lineerdir ve $Hom(H, H) = \{T_q: q \in H\}$ kümesi $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Böylece her bir T_q lineer dönüşümüne $\mathbb{C}$ de 2×2 tipinde bir matris karşılık gelir. Herhangi bir $q = a_1 + a_2j \in H$ için;

$$T_q(1) = 1q = 1(a_1 + a_2j) = a_1 + a_2j$$

$$T_q(j) = jq = j(a_1 + a_2j) = ja_1 + ja_2j = -\overline{a_2} + \overline{a_1}j$$

olduğunda $\{1, j\}$ bazına göre T_q lineer dönüşümünün matrisi $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -\overline{a_2} & \overline{a_1} \end{bmatrix}$ bulunur. 2×2 tipindeki kompleks elemanlı matrislerin halkası $M_2(\mathbb{C})$ olmak üzere

$H' = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$ matrislerinin kümesi $M_2(\mathbb{C})$ nin işlemleri altında bir alt halkadır.

$$\mu: q = a_1 + a_2j \in H \rightarrow T_q = q' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \in H'$$

dönüşümü 1:1 ve her iki kümedeki işlemleri korunduğundan H ile H' izomorfdur (Şimşek 2020).

1.5 Kuaterniyon Matrislerde Toplama Ve Skaler İle Çarpma

Tanım 1.5.1: A ve B aynı tipten iki kuaterniyon matris olsun, yani aynı sayıda satır ve kolona sahip, 2×2 matrisleri olsun;

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ -\bar{a}_4 & \bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

A ve B 'nin toplamı, $A + B$ yazılır ve karşılıklı elemanların toplamıyla oluşan matristir:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ -\bar{a}_4 & \bar{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ -\bar{a}_2 + (-\bar{a}_4) & \bar{a}_1 + \bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

A matrisinin bir k skaleri ile çarpımı, kA veya kA yazılır ve A 'nın her bir elemanının k ile çarpılmasıyla elde edilen matristir:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 \\ -k\bar{a}_2 & k\bar{a}_1 \end{pmatrix}$$

$A + B$ ve kA matrislerinin de 2×2 tipinde matrisler olduğunu söyleyebiliriz (Hacısalıhoğlu 1990).

2. SÜPER UZAY

Bu bölümde; Süper Uzay kavramını tanımlayacağız, bu konuyla ilgili temel tanımlar, özellikler, teoremler ve ispatları sunacağız.

2.1 Süper Uzayın Tarihçesi

Süper simetri parçacık fiziğinde uzay-zaman simetrisinin karşılığıdır ve iki temel parçacıktan oluşur. Bunlar açısız momentumu olan bozonlar ve yarı değerli açısız momentumu olan fermiyonlardır (Quevedo 2010). Süper simetri klasik ve kuantum fiziği arasında oluşturduğu simetriden dolayı bugün bildiğimiz hiçbir simetriye benzemez. Genel olarak, istenilen birçok matematiksel özelliklerin sağlanması ve yüksek enerjilerde hassas davranışların garantiye alınması hususunda, teorik problemlerin çözümlerine olanak sağlamıştır.

Süper manifold, anti-değişmeli koordinat kavramının içermesiyle klasik manifoldtan daha geniş bir yapıya sahiptir. Süper manifold çalışmaları; geometriden, analizden, cebir ve topolojiden oluşan matematiksel düşünceleri, tanımları ve yapıları içerir. Bu yüzden teorik Fizik ve Matematik problemlerini çözmek için daha güçlü bir yere sahiptir. Anti-değişmeli değerlerin bulunduğu çalışmalarda, birkaç sene öncesinde fizikte süper simetri kavramının gelişmesiyle süper sıfatı ön plana çıkmış ve süper matematikte yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Anti değişmeli yapılar, diferansiyel formlar, lie cebirinde dış cebir kavramı, Weil model gibi geometri ve cebirin birçok alanında görülmektedir.

Süper kullanımı, ilk Cartan tanımı olan Grassmann cebiri üzerinde Clifford cebirinde karşımıza çıkar. Uzun bir zaman sonrasında da konneksiyonlarda anti değişmeli fermiyon ilişkileri ile tekrar gündeme gelir.

Süper geometride, süper manifold yapısına götüren iki yol vardır; birincisi süper manifold, süper uzayda, Grassmann cebirinin çift ve tek değerli lokal koordinatlardan oluşan yapısıdır. İkincisi, bir manifold üzerindeki fonksiyon demetlerinden oluşur.

2.2 Süper Uzay

Bu kısımda süper uzay olarak adlandırılan Z_2 - Graded vektör uzayı ve Z_2 - Graded cebiri verilmiştir.

Tanım 2.2.1: V bir vektör uzay olsun. V_0 ve V_1 lineer alt uzay olmak üzere $V = V_0 \oplus V_1$ oluyorsa V vektör uzayına Z_2 - Graded vektör uzayı denir (Leites 1980).

Tanım 2.2.2: V bir Z_2 - Graded vektör uzayı olsun. $V, V_i V_j \subset V_{i+j(mod2)}$ olacak biçimde bir cebir ise V 'ye Z_2 - Graded cebiri denir (Tozok 2017).

Örnek 2.2.1: V bir vektör uzayı $V = V_0 \oplus V_1$ olmak üzere,

$$End(V) = \{s | s: V \xrightarrow{lineer} V\} \quad (2.1)$$

kümesi için $End(V)$,

$$\begin{aligned} (End(V))_0 &= \{s_0 | s_0(v_i) \in V_i; i = 0,1\} \\ &= \{s_0 | s_0(v_0) \in V_0; s_0(v_1) \in V_1\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (End(V))_1 &= \{s_1 | s_1(v_i) \in V_{i+1(mod2)}\} \\ &= \{s_1 | s_1(v_0) \in V_1; s_1(v_1) \in V_0\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

biçimde çift ve tek kısım olarak yazılır.

$$End(V) = (End(V))_0 \oplus (End(V))_1 \quad (2.4)$$

Z_2 - Graded vektör uzayıdır. $f \in End(V)$ olsun. Bu durumda $f: V \xrightarrow{lineer} V$ dir. V , Z_2 - Graded vektör uzayı olduğundan $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ olacak biçimde $\alpha_0 \in V_0$ ve $\alpha_1 \in V_1$ vardır. f lineer olduğundan,

$$f(\alpha) = f(\alpha_0 + \alpha_1) = f(\alpha_0) + f(\alpha_1) \quad (2.5)$$

dir.

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &= (f(\alpha_0))_0 + (f(\alpha_0))_1 = s_0(\alpha_0) + s_1(\alpha_0) \\ f(\alpha_1) &= (f(\alpha_1))_0 + (f(\alpha_1))_1 = s_0(\alpha_1) + s_1(\alpha_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha_0 + \alpha_1) \\ &= f(\alpha_0) + f(\alpha_1) \\ &= (f(\alpha_0))_0 + (f(\alpha_0))_1 + (f(\alpha_1))_0 + (f(\alpha_1))_1 \\ &= s_0(\alpha_0) + s_1(\alpha_0) + s_0(\alpha_1) + s_1(\alpha_1) \\ &= s_0(\alpha_0 + \alpha_1) + s_1(\alpha_0 + \alpha_1) \\ &= s_0(\alpha) + s_1(\alpha) \\ &= (s_0 + s_1)(\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. $\forall \alpha$ için doğru olduğundan,

$$f = s_0 + s_1$$

olur. O halde $End(V)$, Z_2 – Graded vektör uzayıdır (Uğurlu 1987).

2.3 Süper Sayılar

Bir cebir için $\{\varepsilon^a \mid a = 1, \dots, N\}$ üreteçlerinin cümlesi, $\forall a, b$ için;

$$\varepsilon^a \varepsilon^b = -\varepsilon^b \varepsilon^a \quad (2.7)$$

$$(\varepsilon^a)^2 = 0 \quad (2.8)$$

antikomütatif özelliğe sahip ise bununla ilgili cebir Grassmann cebiri olarak adlandırılır ve $\wedge_N$ ile gösterilir.

N sonlu olduğu zaman sonlu elemana sahip $\varepsilon = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N\}$ cümlesi göz önüne alındığında $\wedge_N$ nin 2^N tane baz elemanına sahip olduğu görülür.

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N$$

olduğundan $\text{boy} \wedge_N = 2^N$ dir. N sonlu için $\{1, \varepsilon^a, \varepsilon^a \varepsilon^b, \dots\}$ cümlesindeki baz elemanlarının çarpımındaki indisler farklı olacağından bu cümle $\wedge_\infty$ için bir bazdır (DeWitt 1984).

Tanım 2.3.1(Süper sayı): $\wedge_\infty$ un her bir elemanına süper sayı denir. $Z \in \wedge_\infty$ süper sayısı ε^a gerenleri ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıları yardımıyla,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (2.9)$$

$$Z = \frac{1}{0!} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

şeklinde yazılabilir. $Z = Z_B + Z_S$ olarak yazılmak istenirse;

$$Z_B = \frac{1}{0!} c_0 \quad (2.10)$$

$$Z_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (2.11)$$

şeklindedir. Z süper sayısı için, Z_B body kısım, Z_S soul kısım olarak adlandırılır (Cartier 2002).

Özellik 2.1: Eğer N sonlu ise Z_S daima nilpotenttir (Cartier 2002).

İspat: Z_S nin nilpotent olması için $(Z_S)^{n+1} = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} (Z_S)^{n+1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \cdot G(c_{a_1 \dots a_n}) (\varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1})^n \end{aligned}$$

dir. Burada $\varepsilon^{a_{N+1}} \varepsilon^{a_N} \dots \varepsilon^{a_1}$ çarpımındaki $\varepsilon^{a_{N+1}}$ elemanı, $\varepsilon^{a_N} \dots \varepsilon^{a_1}$ elemanlarından biri olmak zorundadır. Bu durum $(N + 1)$ - li çarpan her bir terimde geleceğinden $(Z_S)^{n+1} = 0$ bulunur.

Bir sonraki teoremdede gerekli olan Z^{-1} ifadesinin tersi,

$$Z^{-1} = Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{Z_S}{Z_B}\right)^n \quad (2.6)$$

dir.

Teorem 2.1: Bir süper sayı tersinirdir $\Leftrightarrow Z_B \neq 0$ (DeWitti 1984).

İspat: Bilindiği üzere bir süper sayının tersinir olması için $Z.Z^{-1} = 1$ olmalıdır.

Gereklilik: Bir süper sayı tersinir olsun. Yani $Z.Z^{-1} = 1$ olsun. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} Z.Z^{-1} &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{Z_S}{Z_B}\right)^n \\ &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \left(1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots\right) + \left(\frac{Z_S}{Z_B} - \frac{Z_S^2}{Z_B^2} + \frac{Z_S^3}{Z_B^3} - \dots\right) = 1 \end{aligned}$$

kabulümüzden dolayı yukarıdaki eşitliğin var olması için $Z_B \neq 0$ olmalıdır.

Yeterlilik: $Z_B \neq 0$ olsun. Bir süper sayının tersinir olduğunu gösterelim. Buna göre

$$Z.Z^{-1} = 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Özellik 2.1 in ve $Z_B \neq 0$ durumunun kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} Z.Z^{-1} &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{Z_S}{Z_B}\right)^n \\ &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \left(1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots\right) + \left(\frac{Z_S}{Z_B} - \frac{Z_S^2}{Z_B^2} + \frac{Z_S^3}{Z_B^3} - \dots\right) = 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. İspat tamamlanmış olur.

Özellik 2.2: f fonksiyonunun Z_B noktasındaki Taylor açılımı,

$$\begin{aligned} f(Z) &= f(Z_B) + f'(Z_B).(Z - Z_S) + \frac{1}{2!}f''(Z_B)(Z - Z_S)^2 \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(Z_B)(Z - Z_S)^n + \dots \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Caston ve Fioresi 2007, Rogers 2007, Sardanashvily 2008, Balduzzi Dottorato di ricerca XXI ciclo).

Diğer taraftan herhangi Z süper sayısı

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

şeklinde ifade edilmiştir. n nin tek veya çift olma durumuna göre Z süper sayısı

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{0!} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

toplam biçiminde ifade edilir.

$$U = Z_B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \quad (2.13)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (2.14)$$

şeklinde yazıldığında çift sayı indisililere çift süper sayı, tek sayı indisililere tek süper sayı denir (Cartier 2002).

Tanım 2.3.2 (c-sayılar ve a-sayılar): Komütatif olan çift süper sayılara c-sayıları (C_c) ile gösterilir. Anti-komütatif olan tek sayılara a-sayılar (C_a) denir. (DeWitt 1984).

Özellik 2.3: a-sayılar body kısım içermediği için, tersinir değildir (DeWitt 1984).

İspat: Teorem 2.1 de aşıktır.

Özellik 2.4: İki a-sayısının veya iki c-sayısının çarpımı bir c-sayıdır (DeWitt 1984).

Gerçekten;

Z ve Z' iki a-sayı olsun. Buna göre,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

ve

$$Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 ZZ' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_1 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_1 \dots a_{2n+1}}
 \end{aligned}$$

burada parite kavramı dikkate alınarak işlem yapılır. İşlem çarpma işlemi olup parite kavramı göz önüne alınırsa sonucun,

$$ZZ' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} c_{a_2 \dots a_{2k}} \varepsilon^{a_{2k}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

şeklinde bir c-sayı olduğu görülür (analiz ederken tek parite =1 ve çift parite = 0 olduğu göz önüne alınır. Bu durumda; tek parite + çift parite = tek parite, tek parite + tek parite = çift parite, çift parite + çift parite = çift parite eşitlikleri yardımıyla sonuca ulaşır).

Benzer şekilde iki c-sayının çarpımı da gösterilebilir. Bu durumda Z ve Z' iki c-sayı olsun. Buna göre;

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

ve

$$Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 ZZ' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{1}{(2n)!} c_{a_1 \dots a_{2m}} c_{a_1 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_1 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_1 \dots a_{2n}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} c_{a_2 \dots a_{2k}} \varepsilon^{a_{2k}} \dots \varepsilon^{a_2}
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Özellik 2.5: Bir a-sayı ve bir c-sayının çarpımı bir a-sayıdır (DeWitt 1984).

Gerçekten;

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_2 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

ve

$$Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere yukarıda bahsedildiği gibi parite kavramı göz önüne alındığında,

$$ZZ' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} c_{a_2 \dots a_{2k+1}} \varepsilon^{a_{2k+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

sonucuna ulaşılır.

Özellik 2.6: a-sayıların karesi sıfırdır (DeWitt 1984).

$$Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_2 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere,

$$(Z')^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_2 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_2} \right)^2 = 0$$

çünkü $(\varepsilon^a)^2 = 0$ dır.

2.4 Süper Sayıların Süper Analitik Fonksiyonu

c ve a sayı fonksiyonlarının analitik teorisi sırasıyla C_c ve C_a dan Λ_N analitik dönüşüm inşa edilir. Bunlar; $f_1: C_a \rightarrow \Lambda_N$ ve $f_2: C_c \rightarrow \Lambda_N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.1: $f: C_a \rightarrow \Lambda_N$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} df(v) &= dv \left[\frac{d}{dv} f(v) \right] \\ &= \left[f(v) \frac{d}{dv} \right] dv \end{aligned} \quad (2.15)$$

dır. v ye bağlı olan $\frac{d}{dv} f(v)$ ve $f(v) \frac{d}{dv}$ katsayılarına sırasıyla f nin sol türevi ve sağ türevi denir (DeWitt 1984).

Yukarıdaki eşitliğin genel çözümü $f = a + bv$ şeklindedir. Eğer

$$b = b_e + b_o$$

şeklinde tek ve çift kısımdan oluşuyorsa;

$$f(v) = \frac{d}{dv} = b_e + b_o$$

ve

$$f(v) = \frac{d}{dv} = b_e - b_o \quad (2.16)$$

olur (DeWitt 1984).

Özellik 2.7: Eğer f nin görüntü kümesi C_c de ve a çift, b tek ise;

$$\frac{d}{dv} f(v) = -f(v) \frac{d}{dv} \quad (2.17)$$

dir (DeWitt 1984).

Çünkü $\forall v \in C_a$ için $f(v) \in C_c$ olacağından $a, bv \in C_c$ olmalıdır. Buna göre $a \in C_c$ ve $bv \in C_c$ olur ve dolayısıyla $b \in C_a$ olur.

Özellik 2.8: Eğer f nin görüntü kümesi C_a de ve a tek, b çift ise,

$$\frac{d}{dv} f(v) = f(v) \frac{d}{dv} \quad (2.18)$$

dir (DeWitt 1984).

Çünkü $\forall v \in C_a$ için $f(v) \in C_a$ olacağından $a, bv \in C_a$ olmalıdır. Buna göre, $a \in C_a$ ve $bv \in C_a$ olur ve dolayısıyla $b \in C_a$ olur.

Tanım 2.4.2: Benzer şekilde $f: C_c \rightarrow \Lambda_\infty$ için:

$$df(u) = du \left[\frac{d}{du} f(u) \right] = \left[f(u) \frac{d}{du} \right] du$$

olur. du bir c-sayı olduğundan,

$$\frac{d}{du} f(u) = f(u) \frac{d}{du} \quad (2.19)$$

eşitliği vardır (DeWitt 1984).

Özellik 2.9: f fonksiyonunun görüntü kümesi C_c de ise, n tek iken $f_{a_1 \dots a_n} = 0$ dır (Uğurlu 1987).

Özellik 2.10: f nin görüntü kümesi C_a da ise n çift iken $f_{a_1 \dots a_n} = 0$ dır (Uğurlu 1987).

2.5. Reel Süper Sayılar

Tanım 2.5.1: (Kompleks eşlenik) Reel süper sayıları ifade etmek için kompleks konjuge (eşlenik) kurallarına ihtiyaç vardır. Kompleks konjuge operatörü " $()^*$ " olmak üzere,

$$(Z + Z')^* = (Z)^* + (Z')^* \quad (2.20)$$

$$(ZZ')^* = (Z)^* (Z')^* \quad (2.21)$$

eşitliği vardır (DeWitt 1984).

C_c cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi R_c , C_a cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi R_a ile gösterilir. Burada,

$$R_c = \{z \in C_c: z^* = z\}$$

$$R_a = \{z \in C_a: z^* = -z\}$$

şeklindedir. z^* ın pozitif ve negatif olma durumu c-sayı ve a-sayısının parity kavramı ile ilgilidir. ($-1^{p(z)}$ ile gösterilir.) $^{\wedge}_{\infty}$ un bazlar için,

$$(\varepsilon^a)^* = \varepsilon^a$$

$$(\varepsilon^a \varepsilon^b \dots \varepsilon^c)^* = \varepsilon^c \varepsilon^b \dots \varepsilon^a$$

Tanım 2.5.2: Bir Z süper sayısı için $Z^* = Z$ ise Z süper sayısına reel, $Z^* = -Z$ ise Z süper sayısına imajiner denir. (DeWitt 1984).

Özellik 2.11: $\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n}$ baz elemanları $\frac{n(n-1)}{2}$ tek iken imajinerdir, $\frac{n(n-1)}{2}$ çift iken reeldir (DeWitt 1984).

Gerçekten,

$$(\varepsilon^a \varepsilon^b \dots \varepsilon^c)^* = \varepsilon^a \varepsilon^b \dots \varepsilon^c$$

ve

$$\varepsilon^a \varepsilon^b = -\varepsilon^b \varepsilon^a$$

özelliklerinden,

- $\frac{n(n-1)}{2}$ tek iken anti-komütatif tanımından,

$$(\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n})^* = -\varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

- $\frac{n(n-1)}{2}$ çift iken komütatif tanımından,

$$(\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n})^* = \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

olur.

Sonuç 2.1: $Z_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)!} c_{a_2 \dots a_{2k}} \varepsilon^{a_{2k}} \dots \varepsilon^{a_1}$ olmak üzere,

$$Z_S \text{ Reeldir} \iff \begin{cases} c_{a_1 \dots a_n} & \text{reel ve } \frac{n(n-1)}{2} \text{ çift iken} \\ c_{a_1 \dots a_n} & \text{imajiner ve } \frac{n(n-1)}{2} \text{ tek iken} \end{cases} \quad (2.22)$$

(DeWitt 1984).

Tanım 2.5.3: $Z \in \wedge_\infty$ herhangi bir süper sayı olsun.

$$Z \text{ Reeldir} \Leftrightarrow Z_B \text{ ve } Z_S \text{ Reeldir}$$

(Şimşek 2021).

Tanım 2.5.4: C_c cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi R_c, C_a cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi R_a ile gösterilir (DeWitt 1984).

2.6 Süper Vektör Uzayı

Elemanları süper vektörler olan G kümesi üzerinde $+$ iç işlemi, $.$ dış işlemi ve $*$ kompleks konjuge işlemi tanımlansın. Bu durumda $X, Y \in G$ $\alpha, \beta \in \wedge_\infty$ olmak üzere ve

$$\begin{aligned} \alpha_L: G &\rightarrow G, & \alpha_L(X) &= \alpha X \\ \alpha_R: G &\rightarrow G, & \alpha_R(X) &= X\alpha \end{aligned}$$

işlemleri için;

- 1) $X + Y = Y + X$
- 2) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$
- 3) $0 \in G$ olmak üzere $X + 0 = 0 + X = X$
- 4) $-X + X = 0$
- 5) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X \quad X(\alpha + \beta) = X\alpha + X\beta \quad 1X = X1 = X$
 $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y \quad (X + Y)\alpha = X\alpha + Y\alpha \quad 0X = X0 = 0$

$$(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) = \alpha\beta X \quad X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta = X\alpha\beta \quad \alpha 0 = 0\alpha = 0$$

- 6) $(\alpha X)\beta = \alpha(\beta X) = \alpha\beta X$

Eğer, $\alpha \in C_c$ ise,

$$\alpha X = X\alpha \quad \alpha \in C_a \text{ ise } X = u + v \text{ için } \alpha u = u\alpha \text{ ve } \alpha v = -v\alpha$$

$$7) \quad X^{**} = X$$

$$(X + Y)^* = X^* + Y^*$$

$$(\alpha X)^* = (X)^*(\alpha)^* \text{ ve } (X\alpha)^* = (\alpha)^*(X)^*$$

şartları sağlanıyorsa G bir süper vektör uzayıdır (Yagil 1988).

Tanım 2.6.1: $X = u(\text{çift}) + v(\text{tek})$ süper vektörü olmak üzere eğer, $u = 0$ ise, X , bir a-tip süper vektördür, $v = 0$ ise, X , bir c-tip süper vektördür (DeWitt 1984).

Tanım 2.6.2: a-tip ve c-tip olan süper vektöre pure süper vektör denir ve

$$\alpha X = (-1)^{\alpha X} X\alpha$$

eşitliği vardır (DeWitt 1984).

Tanım 2.6.3: Bir Z süpervektörü için, $Z^* = Z$ ise reel süper vektör, $Z^* = -Z$ ise imajiner süper vektördür (DeWitt 1984).

Özellik 2.12: Z kompleks süper vektör olsun. Bu durumda,

$$X = \frac{1}{2}(Z + Z^*) = X^*$$

$$Y = \frac{1}{2}i(Z - Z^*) = Y^*$$

olmak üzere $Z = X + Yi$ şeklinde yazılır (DeWitt 1984).

Gerçekten;

$$Z = X + iY$$

ve

$$Z^* = X - iY = X^* + iY^*$$

olsun.

$$X = \frac{(Z+Z^*)}{2} = X^*$$

$$Y = \frac{(Z - Z^*)}{2} = -Y^* \Rightarrow -Y = \frac{(Z - Z^*)}{2}i = Y^*$$

olur.

Özellik 2.13:

- 1) bir reel c-sayısı ile bir reel süper vektörün çarpımı bir reel süper vektördür (DeWitt 1984).
- 2) bir reel a-sayısı ile bir reel c-tip süper vektörün çarpımı bir reel a-tip süper vektördür (DeWitt 1984).
- 3) bir reel a-sayısı ile bir reel a-tip süper vektörün çarpımı bir imajiner c-tip süper vektördür (DeWitt 1984).

Tanım 2.6.4 (İç Çarpım): Herhangi iki X ve Y süper vektörünün çift ve tek kısımdan oluştuğunu dikkate alırsak,

$$X = X_{i,je} e_{i,je} + X_{jo} e_{jo} \quad (X = X_i e_i + X_{je} e_{je} + X_{jo} e_{jo})$$

$$Y = Y_{i,je} e_{i,je} + Y_{jo} e_{jo} \quad (Y = Y_i e_i + Y_{je} e_{je} + Y_{jo} e_{jo})$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= X_{i,je} Y_{i,je} - X_{jo} Y_{jo} \\ &= X_i Y_i + X_{je} Y_{je} - X_{jo} Y_{jo} \end{aligned} \quad (2.23)$$

olur. Burada,

$$\delta_{p_1, p_2} = \begin{cases} 1, & p_1 = p_2 = \text{çift} \\ 0, & p_1 \neq p_2 \\ -1, & p_1 = p_2 = \text{tek} \end{cases} \quad (\text{Şimşek 2021})$$

Tanım 2.6.5 (Süper determinant veya Berezinian): Matematik ve teorik Fizikte Berezinian, süper matrislerin determinant alma yolunda bir genelleştirme. Herhangi iki X ve Y süper matris olmak üzere,

$$Ber(XY) = Ber(X)Ber(Y)$$

olur. Ayrıca herhangi bir X süper matrisi

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

olsun. (A ve D çift) bu durumda,

$$\text{Ber}(X) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır (Poncin 2012; Berezin 1987).



3. SÜPER KUATERNİYONLAR

Bu bölümde bir önceki bölümlerde bahsettiğimiz tanım, teorem ve özelliklerden yararlanarak süper kuaterniyon ve süper kuaterniyon matrisini tanımlayacağız.

Tanım 3.1.1: Bir süper kuaterniyonun süper cebirsel ifadesi;

$$q^* = \{1q_{bs} + q_b e_b + q_{s_e} e_{s_e} + q_{s_0} e_{s_0}\} \quad (3.1)$$

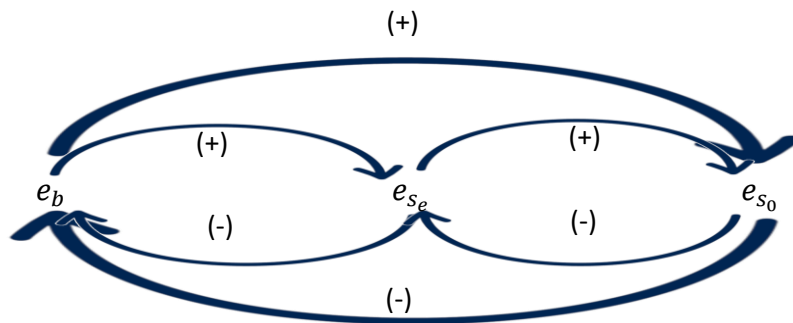
burada $\mathbb{R}^*$ süper reel uzaydır, $q_{bs}, q_b, q_{s_e}, q_{s_0} \in \mathbb{R}^*$ ve e_b, e_{s_e}, e_{s_0} birim vektörler, $\{1, e_b, e_{s_e}, e_{s_0}\}$ bir süper bazdır,

$$H^* = \{q^* = 1q_{bs} + q_b e_b + q_{s_e} e_{s_e} + q_{s_0} e_{s_0}, q_{bs}, q_b, q_{s_e}, q_{s_0} \in \mathbb{R}^*\} \quad (3.2)$$

anti değişmeli ve aşağıdaki koşullara sahip olan bir süper cebirdir (Aycan; Şimşek 2018).

$$\begin{aligned} e_b e_b &= e_{s_0} e_{s_0} = e_{s_e} e_{s_e} = e_b e_{s_e} e_{s_0} = 0 \\ e_i e_j &= \epsilon_{ijk}^* e_k \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.2) den $e_i e_i = 0, i = b, s_e, s_0$ çünkü denklem (2.7) ve (2.8) den dolayı $e_i e_j = \epsilon_{ijk}^* e_k$ denerken, özellik 2.4 ve özellik 2.5 den şekil 1 ve pariteye dikkat etmeliyiz.



Şekil 1

örneğin;

$e_b e_{s_e} = -e_{s_e} e_b = e_{s_0}$ (burada özellik 2.6, şekil 1 ve özellik 2.4'den yararlandık.)

biz bu şartları;

1. $e_b e_{s_e}$ sırasının işareti olan $b \rightarrow s_e$ pozitifdir. (şekil 1)

2. $e_b e_{s_e}$ çarpımı iki sayıya sahiptir ve iki c sayısının çarpımı bir c sayısına eşittir (özellik 2.4). bu nedenle bu sonucun c-sayısı "0" dır, dolayısıyla bu çarpmanın işareti pozitifdir (Aycan; Şimşek 2018).

3. Bütün bu denklemler yukarıdaki koşullarda olduğu gibi şu şekilde yazabiliriz;

$$e_b e_{s_e} = -e_{s_e} e_b = e_{s_0}$$

$$e_b e_{s_0} = -e_{s_0} e_b = -e_{s_e}$$

$$e_{s_e} e_{s_0} = -e_{s_0} e_{s_e} = -e_b$$

sonuç olarak,

$$\epsilon_{ijk}^* = \begin{cases} 1, ijk = bs_e s_0, s_0 s_e b, s_0 b s_e \\ -1, ijk = s_e b s_0, s_e s_0 b, b s_0 s_e \\ 0, ijk = herhangi iki indeks aynıdır. \end{cases}$$

$q^* \in H^*$ ile ifade edilir.

$$q^* = S_q^* + \overrightarrow{V_q^*} \quad (3.3)$$

Tanım 2.2.1 ve denklem (2.12) den c parametreleri karmaşık sayının elemanıdır. c'nin karmaşık parametrelerinin soul kısmı ve body kısmı reel ve kompleks kısımlarla aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz;

$$c_0 = (c_0^*, c_0^{**})$$

$$c_{2n} = (c_{2n}^*, c_{2n}^{**})$$

$$c_{2n+1} = (c_{2n+1}^*, c_{2n+1}^{**}) \quad (3.4)$$

böylece, $q_{bs}, q_b, q_{s_e}, q_{s_0} \in \mathbb{R}^*$ şeklinde tanımlayabiliriz;

$$\begin{aligned}
q_{bs} &= c_0^* + c_{2n}^* + c_{2n+1}^* \\
q_b &= c_0^{**} \\
q_{s_e} &= c_{2n}^{**} \\
q_{s_0} &= c_{2n+1}^{**}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dir. Buna göre denklem 3.5 i, denklem 3.3 te yerine koyalım;

$$\begin{aligned}
q^* &= S_q^* + \overrightarrow{V_q^*} \\
q^* &= (c_0^* + c_{2n}^* + c_{2n+1}^*) + (c_0^{**})e_b + (c_{2n}^{**})e_{s_e} + (c_{2n+1}^{**})e_{s_0}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Bunun sonucunda süper kuaterniyon çarpım tablosunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

	1	e_b	e_{s_e}	e_{s_0}
1	1	e_b	e_{s_e}	e_{s_0}
e_b	e_b	0	$-e_{s_0}$	$-e_{s_e}$
e_{s_e}	e_{s_e}	e_{s_0}	0	$-e_b$
e_{s_0}	e_{s_0}	e_{s_e}	e_b	0

Tablo 2 (Süper Kuaterniyon Çarpım Tablosu)

3.1. Süper Kuaterniyon Çarpımının Özellikleri

Özellik 3.1.1: İki süper kuaterniyonun çarpımı yine bir süper kuaterniyondur.

İspat: $q^* = 1q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e_1}}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}e_{s_0}$ ve $p^* = 1q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}e_{s_0}$
 $q^*, p^* \in H^*$ iki süper kuaterniyon çarpımının yine bir süper kuaterniyon olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
q^*p^* &= (1q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e_1}}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}e_{s_0})(1q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}e_{s_0}) \\
&= q_{bs_1}q_{bs_2} + q_{bs_1}q_{b_2}e_b + q_{bs_1}q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{bs_1}q_{s_{0_2}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_1}e_bq_{bs_2} + q_{b_1}e_bq_{b_2}e_b + q_{b_1}e_bq_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{b_1}e_bq_{s_{0_2}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{e_1}}e_{s_e}q_{bs_2} + q_{s_{e_1}}e_{s_e}q_{b_2}e_b + q_{s_{e_1}}e_{s_e}q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{e_1}}e_{s_e}q_{s_{0_2}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{0_1}}e_{s_0}q_{bs_2} + q_{s_{0_1}}e_{s_0}q_{b_2}e_b + q_{s_{0_1}}e_{s_0}q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}e_{s_0}q_{s_{0_2}}e_{s_0} \\
&= q_{bs_1}q_{bs_2} + q_{bs_1}q_{b_2}e_b + q_{bs_1}q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{bs_1}q_{s_{0_2}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_1}q_{bs_2}e_b + q_{b_1}q_{b_2}e_b e_b + q_{b_1}q_{s_{e_2}}e_b e_{s_e} + q_{b_1}q_{s_{0_2}}e_b e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{s_{e_1}} q_{bs_2} e_{s_e} + q_{s_{e_1}} q_{b_2} e_{s_e} e_b + q_{s_{e_1}} q_{s_{e_2}} e_{s_e} e_{s_e} + q_{s_{e_1}} q_{s_{0_2}} e_{s_e} e_{s_0} \\
& + q_{s_{0_1}} q_{bs_2} e_{s_0} + q_{s_{0_1}} q_{b_2} e_{s_0} e_b + q_{s_{0_1}} q_{s_{e_2}} e_{s_0} e_{s_e} + q_{s_{0_1}} q_{s_{0_2}} e_{s_0} e_{s_0} \\
& = q_{bs_1} q_{bs_2} + (q_{bs_1} q_{b_2} + q_{b_1} q_{bs_2} - q_{s_{e_1}} q_{s_{0_2}} + q_{s_{0_1}} q_{s_{e_2}}) e_b \\
& + (q_{bs_1} q_{s_{e_2}} - q_{b_1} q_{s_{0_2}} + q_{s_{e_1}} q_{bs_2} + q_{s_{0_1}} q_{b_2}) e_{s_e} \\
& + (q_{s_{0_1}} q_{bs_2} + q_{bs_1} q_{s_{0_2}} - q_{s_{e_1}} q_{b_2} + q_{b_1} q_{s_{e_2}}) e_{s_0} \\
q^* p^* & = q_{bs_3} + q_{b_3} e_b + q_{s_{e_3}} e_{s_e} + q_{s_{0_3}} e_{s_0} \quad q_{bs_3}, q_{b_3}, q_{s_{e_3}}, q_{s_{0_3}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Özellik 3.1.2: Süper kuaterniyon çarpımı birleşmelidir.

İspat: $q^* = 1q_{bs_1} + q_{b_1} e_b + q_{s_{e_1}} e_{s_e} + q_{s_{0_1}} e_{s_0} \quad q_{bs_1}, q_{b_1}, q_{s_{e_1}}, q_{s_{0_1}} \in \mathbb{R}^*$

$p^* = 1q_{bs_2} + q_{b_2} e_b + q_{s_{e_2}} e_{s_e} + q_{s_{0_2}} e_{s_0} \quad q_{bs_2}, q_{b_2}, q_{s_{e_2}}, q_{s_{0_2}} \in \mathbb{R}^*$

$r^* = 1q_{bs_4} + q_{b_4} e_b + q_{s_{e_4}} e_{s_e} + q_{s_{0_4}} e_{s_0} \quad q_{bs_4}, q_{b_4}, q_{s_{e_4}}, q_{s_{0_4}} \in \mathbb{R}^*$

$(p^* q^*) r^* = p^* (q^* r^*)$

şimdi yukarıdaki eşitliği gösterelim;

$$\begin{aligned}
p^* q^* & = (1q_{bs_2} + q_{b_2} e_b + q_{s_{e_2}} e_{s_e} + q_{s_{0_2}} e_{s_0})(1q_{bs_1} + q_{b_1} e_b + q_{s_{e_1}} e_{s_e} + q_{s_{0_1}} e_{s_0}) \\
& = q_{bs_2} q_{bs_1} + q_{bs_2} q_{b_1} e_b + q_{bs_2} q_{s_{e_1}} e_{s_e} + q_{bs_2} q_{s_{0_1}} e_{s_0} \\
& + q_{b_2} q_{bs_1} e_b + q_{b_2} q_{b_1} e_b e_b + q_{b_2} q_{s_{e_1}} e_b e_{s_e} + q_{b_2} q_{s_{0_1}} e_b e_{s_0} \\
& + q_{s_{e_2}} q_{bs_1} e_{s_e} + q_{s_{e_2}} q_{b_1} e_{s_e} e_b + q_{s_{e_2}} q_{s_{e_1}} e_{s_e} e_{s_e} + q_{s_{e_2}} q_{s_{0_1}} e_{s_e} e_{s_0} \\
& + q_{s_{0_2}} q_{bs_1} e_{s_0} + q_{s_{0_2}} q_{b_1} e_{s_0} e_b + q_{s_{0_2}} q_{s_{e_1}} e_{s_0} e_{s_e} + q_{s_{0_2}} q_{s_{0_1}} e_{s_0} e_{s_0} \\
& = q_{bs_2} q_{bs_1} + q_{bs_2} q_{b_1} e_b + q_{bs_2} q_{s_{e_1}} e_{s_e} + q_{bs_2} q_{s_{0_1}} e_{s_0} \\
& + q_{b_2} q_{bs_1} e_b + q_{b_2} q_{b_1} 0 + q_{b_2} q_{s_{e_1}} e_{s_0} + q_{b_2} q_{s_{0_1}} (-e_{s_e}) \\
& + q_{s_{e_2}} q_{bs_1} e_{s_e} + q_{s_{e_2}} q_{b_1} (-e_{s_0}) + q_{s_{e_2}} q_{s_{e_1}} 0 + q_{s_{e_2}} q_{s_{0_1}} (-e_b) \\
& + q_{s_{0_2}} q_{bs_1} e_{s_0} + q_{s_{0_2}} q_{b_1} e_{s_e} + q_{s_{0_2}} q_{s_{e_1}} e_b + q_{s_{0_2}} q_{s_{0_1}} 0 \\
& = q_{bs_2} q_{bs_1} + (q_{bs_2} q_{b_1} + q_{b_2} q_{bs_1} - q_{s_{e_2}} q_{s_{0_1}} + q_{s_{0_2}} q_{s_{e_1}}) e_b \\
& + (q_{bs_2} q_{s_{e_1}} - q_{b_2} q_{s_{0_1}} + q_{s_{e_2}} q_{bs_1} + q_{s_{0_2}} q_{b_1}) e_{s_e} \\
& + (q_{bs_2} q_{s_{0_1}} + q_{b_2} q_{s_{e_1}} - q_{s_{e_2}} q_{b_1} + q_{s_{0_2}} q_{bs_1}) e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{bs_5} &= q_{bs_2} q_{bs_1} \\
q_{b_5} &= q_{bs_2} q_{b_1} + q_{b_2} q_{bs_1} - q_{se_2} q_{s_{0_1}} + q_{s_{0_2}} q_{se_1} \\
q_{se_5} &= q_{bs_2} q_{se_1} - q_{b_2} q_{s_{0_1}} + q_{se_2} q_{bs_1} + q_{s_{0_2}} q_{b_1} \\
q_{s_{0_5}} &= q_{bs_2} q_{s_{0_1}} + q_{b_2} q_{se_1} - q_{se_2} q_{b_1} + q_{s_{0_2}} q_{bs_1} \\
p^* q^* &= q_{bs_5} + q_{b_5} e_b + q_{se_5} e_{se} + q_{s_{0_5}} e_{s_0} \quad q_{bs_5}, q_{b_5}, q_{se_5}, q_{s_{0_5}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p^* q^*) r^* &= (q_{bs_5} + q_{b_5} e_b + q_{se_5} e_{se} + q_{s_{0_5}} e_{s_0})(q_{bs_4} + q_{b_4} e_b + q_{se_4} e_{se} + q_{s_{0_4}} e_{s_0}) \\
&= q_{bs_5} q_{bs_4} + q_{bs_5} q_{b_4} e_b + q_{bs_5} q_{se_4} e_{se} + q_{bs_5} q_{s_{0_4}} e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_5} q_{bs_4} e_b + q_{b_5} q_{b_4} e_b e_b + q_{b_5} q_{se_4} e_b e_{se} + q_{b_5} q_{s_{0_4}} e_b e_{s_0} \\
&\quad + q_{se_5} q_{bs_4} e_{se} + q_{se_5} q_{b_4} e_{se} e_b + q_{se_5} q_{se_4} e_{se} e_{se} + q_{se_5} q_{s_{0_4}} e_{se} e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{0_5}} q_{bs_4} e_{s_0} + q_{s_{0_5}} q_{b_4} e_{s_0} e_b + q_{s_{0_5}} q_{se_4} e_{s_0} e_{se} + q_{s_{0_5}} q_{s_{0_4}} e_{s_0} e_{s_0} \\
&= q_{bs_5} q_{bs_4} + q_{bs_5} q_{b_4} e_b + q_{bs_5} q_{se_4} e_{se} + q_{bs_5} q_{s_{0_4}} e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_5} q_{bs_4} e_b + q_{b_5} q_{b_4} 0 + q_{b_5} q_{se_4} e_{s_0} + q_{b_5} q_{s_{0_4}} (-e_{se}) \\
&\quad + q_{se_5} q_{bs_4} e_{se} + q_{se_5} q_{b_4} (-e_{s_0}) + q_{se_5} q_{se_4} 0 + q_{se_5} q_{s_{0_4}} (-e_b) \\
&\quad + q_{s_{0_5}} q_{bs_4} e_{s_0} + q_{s_{0_5}} q_{b_4} e_{se} + q_{s_{0_5}} q_{se_4} e_b + q_{s_{0_5}} q_{s_{0_4}} 0 \\
&= q_{bs_5} q_{bs_4} + (q_{bs_5} q_{b_4} + q_{b_5} q_{bs_4} - q_{se_5} q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_5}} q_{se_4}) e_b \\
&\quad + (q_{bs_5} q_{se_4} - q_{b_5} q_{s_{0_4}} + q_{se_5} q_{bs_4} + q_{s_{0_5}} q_{b_4}) e_{se} \\
&\quad + (q_{bs_5} q_{s_{0_4}} + q_{b_5} q_{se_4} - q_{se_5} q_{b_4} + q_{s_{0_5}} q_{bs_4}) e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{bs_6} &= q_{bs_5} q_{bs_4} \\
q_{b_6} &= q_{bs_5} q_{b_4} + q_{b_5} q_{bs_4} - q_{se_5} q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_5}} q_{se_4} \\
q_{se_6} &= q_{bs_5} q_{se_4} - q_{b_5} q_{s_{0_4}} + q_{se_5} q_{bs_4} + q_{s_{0_5}} q_{b_4} \\
q_{s_{0_6}} &= q_{bs_5} q_{s_{0_4}} + q_{b_5} q_{se_4} - q_{se_5} q_{b_4} + q_{s_{0_5}} q_{bs_4}
\end{aligned}$$

$$(p^* q^*) r^* = q_{bs_6} + q_{b_6} e_b + q_{se_6} e_{se} + q_{s_{0_6}} e_{s_0} ; \quad q_{bs_6}, q_{b_6}, q_{se_6}, q_{s_{0_6}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.9)$$

diğer taraf ise;

$$\begin{aligned}
q^* r^* &= (q_{bs_1} + q_{b_1} e_b + q_{se_1} e_{se} + q_{s_{0_1}} e_{s_0})(q_{bs_4} + q_{b_4} e_b + q_{se_4} e_{se} + q_{s_{0_4}} e_{s_0}) \\
&= q_{bs_1} q_{bs_4} + q_{bs_1} q_{b_4} e_b + q_{bs_1} q_{se_4} e_{se} + q_{bs_1} q_{s_{0_4}} e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_1} q_{bs_4} e_b + q_{b_1} q_{b_4} e_b e_b + q_{b_1} q_{se_4} e_b e_{se} + q_{b_1} q_{s_{0_4}} e_b e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q_{s_{e_1}}q_{bs_4}e_{s_e} + q_{s_{e_1}}q_{b_4}e_{s_e}e_b + q_{s_{e_1}}q_{s_{e_4}}e_{s_e}e_{s_e} + q_{s_{e_1}}q_{s_{0_4}}e_{s_e}e_{s_0} \\
& +q_{s_{0_1}}q_{bs_4}e_{s_0} + q_{s_{0_1}}q_{b_4}e_{s_0}e_b + q_{s_{0_1}}q_{s_{e_4}}e_{s_0}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}q_{s_{0_4}}e_{s_0}e_{s_0} \\
& = q_{bs_1}q_{bs_4} + q_{bs_1}q_{b_4}e_b + q_{bs_1}q_{s_{e_4}}e_{s_e} + q_{bs_1}q_{s_{0_4}}e_{s_0} \\
& +q_{b_1}q_{bs_4}e_b + q_{b_1}q_{b_4}0 + q_{b_1}q_{s_{e_4}}e_{s_0} + q_{b_1}q_{s_{0_4}}(-e_{s_e}) \\
& +q_{s_{e_1}}q_{bs_4}e_{s_e} + q_{s_{e_1}}q_{b_4}(-e_{s_0}) + q_{s_{e_1}}q_{s_{e_4}}0 + q_{s_{e_1}}q_{s_{0_4}}(-e_b) \\
& +q_{s_{0_1}}q_{bs_4}e_{s_0} + q_{s_{0_1}}q_{b_4}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}q_{s_{e_4}}e_b + q_{s_{0_1}}q_{s_{0_4}}0 \\
& = q_{bs_1}q_{bs_4} + (q_{bs_1}q_{b_4} + q_{b_1}q_{bs_4} - q_{s_{e_1}}q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_1}}q_{s_{e_4}})e_b \\
& +(q_{bs_1}q_{s_{e_4}} - q_{b_1}q_{s_{0_4}} + q_{s_{e_1}}q_{bs_4} + q_{s_{0_1}}q_{b_4})e_{s_e} \\
& +(q_{bs_1}q_{s_{0_4}} + q_{b_1}q_{s_{e_4}} - q_{s_{e_1}}q_{b_4} + q_{s_{0_1}}q_{bs_4})e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$q_{bs_7} = q_{bs_1}q_{bs_4}$$

$$q_{b_7} = q_{bs_1}q_{b_4} + q_{b_1}q_{bs_4} - q_{s_{e_1}}q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_1}}q_{s_{e_4}}$$

$$q_{s_{e_7}} = q_{bs_1}q_{s_{e_4}} - q_{b_1}q_{s_{0_4}} + q_{s_{e_1}}q_{bs_4} + q_{s_{0_1}}q_{b_4}$$

$$q_{s_{0_7}} = q_{bs_1}q_{s_{0_4}} + q_{b_1}q_{s_{e_4}} - q_{s_{e_1}}q_{b_4} + q_{s_{0_1}}q_{bs_4}$$

$$q^*r^* = q_{bs_7} + q_{b_7}e_b + q_{s_{e_7}}e_{s_e} + q_{s_{0_7}}e_{s_0} \quad q_{bs_7}, q_{b_7}, q_{s_{e_7}}, q_{s_{0_7}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.10)$$

$$p^*(q^*r^*) = (q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}e_{s_0})(q_{bs_7} + q_{b_7}e_b + q_{s_{e_7}}e_{s_e} + q_{s_{0_7}}e_{s_0})$$

$$= q_{bs_2}q_{bs_7} + q_{bs_2}q_{b_7}e_b + q_{bs_2}q_{s_{e_7}}e_{s_e} + q_{bs_2}q_{s_{0_7}}e_{s_0}$$

$$+q_{b_2}q_{bs_7}e_b + q_{b_2}q_{b_7}e_b e_b + q_{b_2}q_{s_{e_7}}e_b e_{s_e} + q_{b_2}q_{s_{0_7}}e_b e_{s_0}$$

$$+q_{s_{e_2}}q_{bs_7}e_{s_e} + q_{s_{e_2}}q_{b_7}e_{s_e}e_b + q_{s_{e_2}}q_{s_{e_7}}e_{s_e}e_{s_e} + q_{s_{e_2}}q_{s_{0_7}}e_{s_e}e_{s_0}$$

$$+q_{s_{0_2}}q_{bs_7}e_{s_0} + q_{s_{0_2}}q_{b_7}e_{s_0}e_b + q_{s_{0_2}}q_{s_{e_7}}e_{s_0}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}q_{s_{0_7}}e_{s_0}e_{s_0}$$

$$= q_{bs_2}q_{bs_7} + q_{bs_2}q_{b_7}e_b + q_{bs_2}q_{s_{e_7}}e_{s_e} + q_{bs_2}q_{s_{0_7}}e_{s_0}$$

$$+q_{b_2}q_{bs_7}e_b + q_{b_2}q_{b_7}0 + q_{b_2}q_{s_{e_7}}e_{s_0} + q_{b_2}q_{s_{0_7}}(-e_{s_e})$$

$$+q_{s_{e_2}}q_{bs_7}e_{s_e} + q_{s_{e_2}}q_{b_7}(-e_{s_0}) + q_{s_{e_2}}q_{s_{e_7}}0 + q_{s_{e_2}}q_{s_{0_7}}(-e_b)$$

$$+q_{s_{0_2}}q_{bs_7}e_{s_0} + q_{s_{0_2}}q_{b_7}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}q_{s_{e_7}}e_b + q_{s_{0_2}}q_{s_{0_7}}0$$

$$= q_{bs_2}q_{bs_7} + (q_{bs_2}q_{b_7} + q_{b_2}q_{bs_7} - q_{s_{e_2}}q_{s_{0_7}} + q_{s_{0_2}}q_{s_{e_7}})e_b$$

$$+(q_{bs_2}q_{s_{e_7}} - q_{b_2}q_{s_{0_7}} + q_{s_{e_2}}q_{bs_7} + q_{s_{0_2}}q_{b_7})e_{s_e}$$

$$+(q_{bs_2}q_{s_{0_7}} + q_{b_2}q_{s_{e_7}} - q_{s_{e_2}}q_{b_7} + q_{s_{0_2}}q_{bs_7})e_{s_0}$$

$$q_{bs_8} = q_{bs_2}q_{bs_7}$$

$$q_{b_8} = q_{bs_2}q_{b_7} + q_{b_2}q_{bs_7} - q_{s_{e_2}}q_{s_{0_7}} + q_{s_{0_2}}q_{s_{e_7}}$$

$$\begin{aligned}
q_{s_{e8}} &= q_{bs_2}q_{s_{e7}} - q_{b_2}q_{s_{07}} + q_{s_{e2}}q_{bs_7} + q_{s_{02}}q_{b_7} \\
q_{s_{08}} &= q_{bs_2}q_{s_{07}} + q_{b_2}q_{s_{e7}} - q_{s_{e2}}q_{b_7} + q_{s_{02}}q_{bs_7} \\
p^*(q^*r^*) &= q_{bs_8} + q_{b_8}e_b + q_{s_{e8}}e_{s_e} + q_{s_{08}}e_{s_0}, \quad q_{bs_8}, q_{b_8}, q_{s_{e8}}, q_{s_{08}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.11)
\end{aligned}$$

3.9 = 3.11 olduğundan ispatımız tamamlanmış olur.

Özellik 3.1.3: Süper kuaterniyon çarpımı sağdan ve soldan dağılmalıdır.

İspat: $p^*(q^* + r^*) = p^*q^* + p^*r^*$ ve $(p^* + q^*)r^* = p^*r^* + q^*r^*$ olduğunu göstereceğiz,

$$q^* = 1q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e1}}e_{s_e} + q_{s_{01}}e_{s_0} \quad q_{bs_1}, q_{b_1}, q_{s_{e1}}, q_{s_{01}} \in \mathbb{R}^*$$

$$p^* = 1q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e2}}e_{s_e} + q_{s_{02}}e_{s_0} \quad q_{bs_2}, q_{b_2}, q_{s_{e2}}, q_{s_{02}} \in \mathbb{R}^*$$

$$r^* = 1q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{s_{e4}}e_{s_e} + q_{s_{04}}e_{s_0} \quad q_{bs_4}, q_{b_4}, q_{s_{e4}}, q_{s_{04}} \in \mathbb{R}^*$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned}
p^*(q^* + r^*) &= (q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e2}}e_{s_e} + q_{s_{02}}e_{s_0})((q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e1}}e_{s_e} + q_{s_{01}}e_{s_0}) \\
&\quad + (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{s_{e4}}e_{s_e} + q_{s_{04}}e_{s_0}))
\end{aligned}$$

$$q^* + r^* = (q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e1}}e_{s_e} + q_{s_{01}}e_{s_0}) + (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{s_{e4}}e_{s_e} + q_{s_{04}}e_{s_0})$$

$$q^* + r^* = (q_{bs_1} + q_{bs_4}) + (q_{b_1} + q_{b_4})e_b + (q_{s_{e1}} + q_{s_{e4}})e_{s_e} + (q_{s_{01}} + q_{s_{04}})e_{s_0}$$

$$q^* + r^* = q_{bs_9} + q_{b_9}e_b + q_{s_{e9}}e_{s_e} + q_{s_{09}}e_{s_0}; \quad q_{bs_9}, q_{b_9}, q_{s_{e9}}, q_{s_{09}} \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned}
p^*(q^* + r^*) &= (q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e2}}e_{s_e} + q_{s_{02}}e_{s_0}) \cdot (q_{bs_9} + q_{b_9}e_b + q_{s_{e9}}e_{s_e} + q_{s_{09}}e_{s_0}) \\
&= q_{bs_2}q_{bs_9} + q_{bs_2}q_{b_9}e_b + q_{bs_2}q_{s_{e9}}e_{s_e} + q_{bs_2}q_{s_{09}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_2}q_{bs_9}e_b + q_{b_2}q_{b_9}e_b e_b + q_{b_2}q_{s_{e9}}e_b e_{s_e} + q_{b_2}q_{s_{09}}e_b e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{e2}}q_{bs_9}e_{s_e} + q_{s_{e2}}q_{b_9}e_{s_e} e_b + q_{s_{e2}}q_{s_{e9}}e_{s_e} e_{s_e} + q_{s_{e2}}q_{s_{09}}e_{s_e} e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{02}}q_{bs_9}e_{s_0} + q_{s_{02}}q_{b_9}e_{s_0} e_b + q_{s_{02}}q_{s_{e9}}e_{s_0} e_{s_e} + q_{s_{02}}q_{s_{09}}e_{s_0} e_{s_0} \\
&= q_{bs_2}q_{bs_9} + q_{bs_2}q_{b_9}e_b + q_{bs_2}q_{s_{e9}}e_{s_e} + q_{bs_2}q_{s_{09}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_2}q_{bs_9}e_b + q_{b_2}q_{b_9}0 + q_{b_2}q_{s_{e9}}e_{s_0} + q_{b_2}q_{s_{09}}(-e_{s_e}) \\
&\quad + q_{s_{e2}}q_{bs_9}e_{s_e} + q_{s_{e2}}q_{b_9}(-e_{s_0}) + q_{s_{e2}}q_{s_{e9}}0 + q_{s_{e2}}q_{s_{09}}(-e_b) \\
&\quad + q_{s_{02}}q_{bs_9}e_{s_0} + q_{s_{02}}q_{b_9}e_{s_e} + q_{s_{02}}q_{s_{e9}}e_b + q_{s_{02}}q_{s_{09}}0 \\
&= q_{bs_2}q_{bs_9} + (q_{bs_2}q_{b_9} + q_{b_2}q_{bs_9} - q_{s_{e2}}q_{s_{09}} + q_{s_{02}}q_{s_{e9}})e_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(q_{bs_2}q_{se_9} - q_{b_2}q_{s_{0_9}} + q_{se_2}q_{bs_9} + q_{s_{0_2}}q_{b_9})e_{se} \\
& +(q_{bs_2}q_{s_{0_9}} + q_{b_2}q_{se_9} - q_{se_2}q_{b_9} + q_{s_{0_2}}q_{bs_9})e_{s_0} \\
q_{bs_{10}} &= q_{bs_2}q_{bs_9} \\
q_{b_{10}} &= q_{bs_2}q_{b_9} + q_{b_2}q_{bs_9} - q_{se_2}q_{s_{0_9}} + q_{s_{0_2}}q_{se_9} \\
q_{se_{10}} &= q_{bs_2}q_{se_9} - q_{b_2}q_{s_{0_9}} + q_{se_2}q_{bs_9} + q_{s_{0_2}}q_{b_9} \\
q_{s_{0_{10}}} &= q_{bs_2}q_{s_{0_9}} + q_{b_2}q_{se_9} - q_{se_2}q_{b_9} + q_{s_{0_2}}q_{bs_9} \\
p^*(q^* + r^*) &= q_{bs_{10}}q_{bs_7} + q_{b_{10}}e_b + q_{se_{10}}e_{se} + q_{s_{0_{10}}}e_{s_0} \quad q_{bs_{10}}, q_{b_{10}}, q_{se_{10}}, q_{s_{0_{10}}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^*q^* + p^*r^* &= (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{se_4}e_{se} + q_{s_{0_4}}e_{s_0}) \\
&+ \left((q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{se_2}e_{se} + q_{s_{0_2}}e_{s_0}) \cdot (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{se_4}e_{se} + q_{s_{0_4}}e_{s_0}) \right) \\
p^*r^* &= (q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{se_2}e_{se} + q_{s_{0_2}}e_{s_0}) \cdot (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{se_4}e_{se} + q_{s_{0_4}}e_{s_0}) \\
&= q_{bs_2}q_{bs_4} + q_{bs_2}q_{b_4}e_b + q_{bs_2}q_{se_4}e_{se} + q_{bs_2}q_{s_{0_4}}e_{s_0} \\
&+ q_{b_2}q_{bs_4}e_b + q_{b_2}q_{b_4}e_b e_b + q_{b_2}e_b q_{se_4}e_b e_{se} + q_{b_2}q_{s_{0_4}}e_b e_{s_0} \\
&+ q_{se_2}q_{bs_4}e_{se} + q_{se_2}q_{b_4}e_{se}e_b + q_{se_2}q_{se_4}e_{se}e_{se} + q_{se_2}q_{s_{0_4}}e_{se}e_{s_0} \\
&+ q_{s_{0_2}}q_{bs_4}e_{s_0} + q_{s_{0_2}}q_{b_4}e_{s_0}e_b + q_{s_{0_2}}q_{se_4}e_{s_0}e_{se} + q_{s_{0_2}}q_{s_{0_4}}e_{s_0}e_{s_0} \\
&= q_{bs_2}q_{bs_4} + q_{bs_2}q_{b_4}e_b + q_{bs_2}q_{se_4}e_{se} + q_{bs_2}q_{s_{0_4}}e_{s_0} \\
&+ q_{b_2}q_{bs_4}e_b + q_{b_2}q_{b_4}0 + q_{b_2}q_{se_4}e_{s_0} + q_{b_2}q_{s_{0_4}}e_b(-e_{se}) \\
&+ q_{se_2}q_{bs_4}e_{se} + q_{se_2}q_{b_4}(-e_{s_0}) + q_{se_2}q_{se_4}0 + q_{se_2}q_{s_{0_4}}(-e_b) \\
&+ q_{s_{0_2}}q_{bs_4}e_{s_0} + q_{s_{0_2}}q_{b_4}e_{se} + q_{s_{0_2}}q_{se_4}e_b + q_{s_{0_2}}q_{s_{0_4}}0 \\
&= q_{bs_2}q_{bs_4} + (q_{bs_2}q_{b_4} + q_{b_2}q_{bs_4} - q_{se_2}q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_2}}q_{se_4})e_b \\
&+ (q_{bs_2}q_{se_4} - q_{b_2}q_{s_{0_4}} + q_{se_2}q_{bs_4} + q_{s_{0_2}}q_{b_4})e_{se} \\
&+ (q_{bs_2}q_{s_{0_4}} + q_{b_2}q_{se_4} - q_{se_2}q_{b_4} + q_{s_{0_2}}q_{bs_4})e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{bs_{11}} &= q_{bs_2}q_{bs_4} \\
q_{b_{11}} &= q_{bs_2}q_{b_4} + q_{b_2}q_{bs_4} - q_{se_2}q_{s_{0_4}} + q_{s_{0_2}}q_{se_4} \\
q_{se_{11}} &= q_{bs_2}q_{se_4} - q_{b_2}q_{s_{0_4}} + q_{se_2}q_{bs_4} + q_{s_{0_2}}q_{b_4} \\
q_{s_{0_{11}}} &= q_{bs_2}q_{s_{0_4}} + q_{b_2}q_{se_4} - q_{se_2}q_{b_4} + q_{s_{0_2}}q_{bs_4} \\
p^*r^* &= q_{bs_{11}} + q_{b_{11}}e_b + q_{se_{11}}e_{se} + q_{s_{0_{11}}}e_{s_0} \quad q_{bs_{11}}, q_{b_{11}}, q_{se_{11}}, q_{s_{0_{11}}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^*q^* + p^*r^* &= (q_{bs_5} + q_{b_5}e_b + q_{s_{e_5}}e_{s_e} + q_{s_{0_5}}e_{s_0}) + (q_{bs_{11}} + q_{b_{11}}e_b + q_{s_{e_{11}}}e_{s_e} + q_{s_{0_{11}}}e_{s_0}) \\
&= (q_{bs_5} + q_{bs_{11}}) + (q_{b_5} + q_{b_{11}})e_b + (q_{s_{e_5}} + q_{s_{e_{11}}})e_{s_e} + (q_{s_{0_5}} + q_{s_{0_{11}}})e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$q_{bs_{12}} = q_{bs_5} + q_{bs_{11}}$$

$$q_{b_{12}} = q_{b_5} + q_{b_{11}}$$

$$q_{s_{e_{12}}} = q_{s_{e_5}} + q_{s_{e_{11}}}$$

$$q_{s_{0_{12}}} = q_{s_{0_5}} + q_{s_{0_{11}}}$$

$$p^*q^* + p^*r^* = q_{bs_{12}} + q_{b_{12}}e_b + q_{s_{e_{12}}}e_{s_e} + q_{s_{0_{12}}}e_{s_0} \quad q_{bs_{12}}, q_{b_{12}}, q_{s_{e_{12}}}, q_{s_{0_{12}}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.14)$$

$$p^*(q^* + r^*) = p^*q^* + p^*r^*$$

burada (3.12) ve (3.14) den eşitlik görülür. Diğer taraftan ise,

$$(p^* + q^*)r^* = p^*r^* + q^*r^*$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p^* + q^* &= (q_{bs_2} + q_{b_2}e_b + q_{s_{e_2}}e_{s_e} + q_{s_{0_2}}e_{s_0}) + (q_{bs_1} + q_{b_1}e_b + q_{s_{e_1}}e_{s_e} + q_{s_{0_1}}e_{s_0}) \\
&= (q_{bs_2} + q_{bs_1}) + (q_{b_2} + q_{b_1})e_b + (q_{s_{e_2}} + q_{s_{e_1}})e_{s_e} + (q_{s_{0_2}} + q_{s_{0_1}})e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$q_{bs_{13}} = q_{bs_2} + q_{bs_1}$$

$$q_{b_{13}} = q_{b_2} + q_{b_1}$$

$$q_{s_{e_{13}}} = q_{s_{e_2}} + q_{s_{e_1}}$$

$$q_{s_{0_{13}}} = q_{s_{0_2}} + q_{s_{0_1}}$$

$$p^* + q^* = q_{bs_{13}} + q_{b_{13}}e_b + q_{s_{e_{13}}}e_{s_e} + q_{s_{0_{13}}}e_{s_0} \quad q_{bs_{13}}, q_{b_{13}}, q_{s_{e_{13}}}, q_{s_{0_{13}}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
(p^* + q^*)r^* &= (q_{bs_{13}} + q_{b_{13}}e_b + q_{s_{e_{13}}}e_{s_e} + q_{s_{0_{13}}}e_{s_0}) \cdot (q_{bs_4} + q_{b_4}e_b + q_{s_{e_4}}e_{s_e} + q_{s_{0_4}}e_{s_0}) \\
&= q_{bs_{13}}q_{bs_4} + q_{bs_{13}}q_{b_4}e_b + q_{bs_{13}}q_{s_{e_4}}e_{s_e} + q_{bs_{13}}q_{s_{0_4}}e_{s_0} \\
&\quad + q_{b_{13}}q_{bs_4}e_b + q_{b_{13}}q_{b_4}e_b e_b + q_{b_{13}}q_{s_{e_4}}e_b e_{s_e} + q_{b_{13}}q_{s_{0_4}}e_b e_{s_0} \\
&\quad + q_{s_{e_{13}}}q_{bs_4}e_{s_e} + q_{s_{e_{13}}}q_{b_4}e_{s_e} e_b + q_{s_{e_{13}}}q_{s_{e_4}}e_{s_e} e_{s_e} + q_{s_{e_{13}}}q_{s_{0_4}}e_{s_e} e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q_{s_{013}} q_{bs_4} e_{s_0} + q_{s_{013}} q_{b_4} e_{s_0} e_b + q_{s_{013}} q_{s_{e_4}} e_{s_0} e_{s_e} + q_{s_{013}} q_{s_{04}} e_{s_0} e_{s_0} \\
& = q_{bs_{13}} q_{bs_4} + q_{bs_{13}} q_{b_4} e_b + q_{bs_{13}} q_{s_{e_4}} e_{s_e} + q_{bs_{13}} q_{s_{04}} e_{s_0} \\
& + q_{b_{13}} q_{bs_4} e_b + q_{b_{13}} q_{b_4} 0 + q_{b_{13}} q_{s_{e_4}} (e_{s_0}) + q_{b_{13}} q_{s_{04}} (-e_{s_e}) \\
& + q_{s_{e13}} q_{bs_4} e_{s_e} + q_{s_{e13}} q_{b_4} (-e_{s_0}) + q_{s_{e13}} q_{s_{e_4}} 0 + q_{s_{e13}} q_{s_{04}} (-e_b) \\
& + q_{s_{013}} q_{bs_4} e_{s_0} + q_{s_{013}} q_{b_4} e_{s_e} + q_{s_{013}} q_{s_{e_4}} e_b + q_{s_{013}} q_{s_{04}} 0 \\
& = q_{bs_{13}} q_{bs_4} + (q_{bs_9} q_{b_4} + q_{b_{13}} q_{bs_4} - q_{s_{e13}} q_{s_{04}} + q_{s_{013}} q_{s_{e_4}}) e_b \\
& + (q_{bs_{13}} q_{s_{e_4}} - q_{b_{13}} q_{s_{04}} + q_{s_{e13}} q_{bs_4} + q_{s_{013}} q_{b_4}) e_{s_e} \\
& + (q_{bs_{13}} q_{s_{04}} + q_{b_{13}} q_{s_{e_4}} - q_{s_{e13}} q_{b_4} + q_{s_{013}} q_{bs_4}) e_{s_0} \\
q_{bs_{14}} & = q_{bs_{13}} q_{bs_4} \\
q_{b_{14}} & = q_{bs_{13}} q_{b_4} + q_{b_{13}} q_{bs_4} - q_{s_{e13}} q_{s_{04}} + q_{s_{013}} q_{s_{e_4}} \\
q_{s_{e14}} & = q_{bs_{13}} q_{s_{e_4}} - q_{b_{13}} q_{s_{04}} + q_{s_{e13}} q_{bs_4} + q_{s_{013}} q_{b_4} \\
q_{s_{014}} & = q_{bs_{13}} q_{s_{04}} + q_{b_{13}} q_{s_{e_4}} - q_{s_{e13}} q_{b_4} + q_{s_{013}} q_{bs_4}
\end{aligned}$$

$$(p^* + q^*)r^* = q_{bs_{14}} + q_{b_{14}} e_b + q_{s_{e14}} e_{s_e} + q_{s_{014}} e_{s_0} \quad q_{bs_{14}}, q_{b_{14}}, q_{s_{e14}}, q_{s_{014}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.16)$$

(3.13) ve (3.10) daki deęerleri burada kullanalım;

$$\begin{aligned}
p^*r^* + q^*r^* & = (q_{bs_{11}} + q_{b_{11}} e_b + q_{s_{e11}} e_{s_e} + q_{s_{011}} e_{s_0}) + (q_{bs_7} + q_{b_7} e_b + q_{s_{e7}} e_{s_e} + q_{s_{07}} e_{s_0}) \\
& = (q_{bs_{11}} + q_{bs_7}) + (q_{b_{11}} + q_{b_7}) e_b + (q_{s_{e11}} + q_{s_{e7}}) e_{s_e} + (q_{s_{011}} + q_{s_{07}}) e_{s_0}
\end{aligned}$$

$$q_{bs_{15}} = q_{bs_{11}} + q_{bs_7}$$

$$q_{b_{15}} = q_{b_{11}} + q_{b_7}$$

$$q_{s_{e15}} = q_{s_{e11}} + q_{s_{e7}}$$

$$q_{s_{015}} = q_{s_{011}} + q_{s_{07}}$$

$$p^*r^* + q^*r^* = q_{bs_{15}} + q_{b_{15}} e_b + q_{s_{e15}} e_{s_e} + q_{s_{015}} e_{s_0} \quad q_{bs_{15}}, q_{b_{15}}, q_{s_{e15}}, q_{s_{015}} \in \mathbb{R}^* \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17) den aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$(p^* + q^*)r^* = p^*r^* + q^*r^*$$

sağdan ve soldan dağılma özelliğini sağladığı için süper kuaterniyonu dağılmalıdır.

Özellik 3.1.4: Süper kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir.

İspat: Tablo 2 de gösterildiği üzere, $e_{s_e}e_{s_0} \neq e_{s_0}e_{s_e}$ olduğundan değişmeli olmadığı görülür.

3.2. Süper Kuaterniyon Cebiri

$$H^* = \{q^* = q_{bs} + q_b e_b + q_{s_e} e_{s_e} + q_{s_0} e_{s_0}, \quad q_{bs}, q_b, q_{s_e}, q_{s_0} \in \mathbb{R}^*\}$$

$(H^*, \oplus, \mathbb{R}^*, +, \cdot, \odot)$ cebir olduğunu söyleyebilmemiz için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

1. İki süper kuaterniyonun çarpımı yine bir süper kuaterniyondur.

İspat: Bunun ispatını özellik 3.1.1 de gösterdik.

2. Süper kuaterniyon çarpımı bileşimlidir.

İspat: Bunun ispatı özellik 3.1.2 de gösterdik.

3. Süper kuaterniyon çarpımı soldan ve sağdan dağılımlıdır.

İspat: Bunun ispatı özellik 3.1.3 te gösterdik.

4. Süper kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir.

İspat: Tablo 2 de gösterildiği gibi $e_b e_{s_e} \neq e_{s_e} e_b$ olduğundan değişme özelliğine sahip değildir.

Dolayısıyla $\{H^*, \oplus, \mathbb{R}^*, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir cebirdir. Fakat değişmeli değildir. Bu cebire süper reel kuaterniyon cebiri denir.

3.3 Süper Kuaterniyon Matrisi

1. Bölümde temel kavramları göstermiştik, bu bölümde bir süper kuaterniyon matrisini tanımlayacağız.

$$\begin{aligned} q^* &= q_{bs} + q_b e_b + q_{s_e} e_{s_e} + q_{s_0} e_{s_0} \\ &= (q_{bs} + q_b e_b) + (q_{s_e} + q_{s_0} e_b) e_{s_e} \end{aligned}$$

$$a_1 = q_{bs} + q_b e_b \quad \text{ve} \quad a_2 = q_{s_e} + q_{s_0} e_b \quad q^* = a_1 + a_2 e_{s_e} \in H^*$$

bu kabule göre;

$$q^* = a_1 + a_2 e_{s_e}$$

veya

$$q^* = a_1 + \overline{a_2} e_{s_e}$$

yazabiliriz.

$$q^* = 1(q_{bs} + q_b e_b) + (q_{s_e} + q_{s_0} e_b) e_{s_e}$$

olup burada $\{1, e_{s_e}\}$ baz olur.

H^* in matris gösterimi elde etmek için;

$$T: H^* \rightarrow \text{Hom}(H^*, H^*)$$

$$q^* \rightarrow T_{q^*}$$

Süper uzayda bu dönüşüm daha açık olarak,

$$T_{q^*}: H^* \rightarrow H^*$$

$$q^{*'} = T_{q^*}(q^{*'}) = (q^*)' q^*$$

şeklinde ifade edilir.

$\text{Hom}(H^*, H^*) = \{T_{q^*}: q^* \in H^*\}$ kümesi H^* üzerinde bir süper vektör uzaydır. Böylece her bir T_{q^*} lineer dönüşümüne H^* da 2x2 tipinde bir matris karşılık gelir. Herhangi bir

$$q^* = a_1 + a_2 e_{s_e} \in H^* \text{ için;}$$

$$T_{q^*}(1) = 1q^* = 1(a_1 + a_2e_{s_e}) = a_1 + a_2e_{s_e}$$

$$T_{q^*}(e_{s_e}) = e_{s_e}(a_1 + a_2e_{s_e}) = a_1e_{s_e} + a_2e_{s_e}e_{s_e} = a_1e_{s_e} + a_20 = a_1e_{s_e}$$

olduğuna göre bir süper matris kısaca aşağıdaki biçimde ifade edilir,

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Süper Kuaterniyon Matrisinde Toplama Ve Skaler İle Çarpma

Tanım 3.4.1: A^* ve B^* aynı tipte iki süper kuaterniyon matrisi olsun, yani aynı sayıda satır ve kolona sahip, 2×2 matrisleri olsun.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \text{ ve } B^* = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ 0 & \bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

A^* ve B^* toplamı $A^* + B^*$ yazılır veya karşılıklı elemanların toplamıyla oluşan matristir:

$$A^* + B^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ 0 & \bar{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ 0 & \bar{a}_1 + \bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

A^* matrisi bir k skaleri ile çarpımı, $k; A^*$ veya kA^* yazılır A^* in her bir elemanının k ile çarpılmasıyla elde edilen matristir:

$$kA^* = k \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 \\ k0 & k\bar{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 \\ 0 & k\bar{a}_1 \end{pmatrix}$$

$A^* + B^*$ ve kA^* matrislerinin de 2×2 tipindeki matrisler olduğunu söyleyebilir.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında öncelikle reel uzayda kuaterniyonlar ve uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar dikkate alınarak süper uzayda kuaterniyonlar tanımlanmış, bazı geometrik özellikler incelenmiştir. Yanısıra, süper kuaterniyon yapısı ile kuaterniyon matrisleri tanımlanmış ve matrisler üzerinde temel işlemler incelenmiştir.

Z_2 dereceli cebir özelliklerini kullanarak süper sayılar yardımıyla, süper uzaydaki kuaterniyonları oluşturduk. Süper kuaterniyonu $q^* = q_{bs} + q_b e_b + q_{s_e} e_{s_e} + q_{s_0} e_{s_0}$ şeklinde, $q_{bs}, q_b, q_{s_e}, q_{s_0} \in \mathbb{R}^*$ reel süper sayıları ve $\{1, e_b, e_{s_e}, e_{s_0}\}$ bazı ile tanımlanır. Bu tanımlamada özellik 2.4 ve özellik 2.5 de ifade edilen a- sayısı ve c- sayısı olarak tanımlanan süper sayıların özellikleri kullanılmıştır. Bu çalışmadan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

- ✓ Süper uzadaki kuaterniyonlar, süper sayılar yardımıyla geliştirilebilir.
- ✓ Kuaterniyonlar gerçel ve karmaşık sayılar gibi bir sayı sistemi gibi gösterilebilir. Gerçel sayıların bir bileşeni karmaşık sayıların iki bileşeni varken kuaterniyonların dört bileşeni vardır.
- ✓ Bir kuaterniyon, $\forall q \in H$, $q = S_q + \vec{V}_q$ olarak tanımlandığında, burada S_q skaler kısım $\vec{V}_q$ da vektörel kısımdır. Buna göre süper kuaterniyon için de $\forall q^* \in H^*$ ve $q^* = S_q^* + \vec{V}_q^*$ olarak benzer biçimde skaler ve vektörel kısımlar gösterilebilir.
- ✓ Süper kuaterniyon çarpımını tablo 2 de ifade edildiği gibi oluşturulmuştur.

Diğer taraftan, hem küresel hemde yerel simetri ilkeleri, modern parçacık fiziğinin temel bir özelliğidir. Süper uzay, süper simetri sergileyen bir teorinin koordinat uzayıdır. Süper uzay çalışmaları, geometri, analiz, cebir ve topolojide yer bulmaktadır.

Geometride kuaterniyonlar 3- boyutlu mekanikte kinematik sistemlerde kullanılır. Ayrıca belli bir eksen etrafında dönen koordinat sistemlerinin olduğu problemlerde kullanılır. Dolayısıyla dönüşüm yapmak için euler açıları yerine kuaterniyonlar kullanılabilir. Süper uzay ve süper simetri çalışmaları ise, evrenin yapısını çözümünde sıkça kullan kavramlardır. Sonuç olarak süper kuaterniyon çalışmasının da bahsettiğimiz bu sebeplerden dolayı, ileride önemli bir yere sahip olacağını düşünmekteyiz.

5. KAYNAKÇA

Bartocci, C. and Bruzzo, U., The Geometry Of Supermanifolds, Italy: Springer Netherlands, (1991).

Berezin, F.A., Indroduction to superanalysis, Mathematical Physics and applied Mathematics, Holland, p.424, (1987).

Bruce, A.J., “On Curves And Jets Of Curves On Supermanifolds”, Cornell University Library., arXiv:1401.5267v2, (2014).

Cartier, P., DeWitt-Morette, C., Ihl, M., Saemann, C., and Bell, M. E., “Supermanifolds - Application To Supersymmetry”, Cornell University Library., arXiv:math-ph/0202026v1, (2002).

Caston, L. and Fioresi, R., “Mathematical Foundations Of Supersymmetry”, Cornell University Library., arXiv:0710.5742v1, (2007).

Cattaneo, A.S. and Schaetz, F., “Introduction to supergeometry”, Cornell University Library., arXiv:1011.3401v2, (2010).

Covolo, T. and Poncin, N., “Lectures on Supergeometry”, University Of Luxembourg Library., <http://hdl.handle.net/10993/14295>, (2012).

C. Aycan, S. Şimşek; “ Quaternions On Super Space”, 3.Th International Conference On Computational Mathematics And Engineering Sciences (CMES), Girne, Kıbrıs, (2018).

Çelen D.G., “kuaterniyon Matrisleri”, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale, (2011).

Deovours C.A. , The Quaternion calculus, The American math. Monthly, vol. 80, ISS9, 995-1008, (1973).

DeWitt, B., Supermanifolds, USA: Cambridge University Press., (1984).

Ekmekçi, N., İlarslan,K., On Bertrand curves and their characterization, Differential Geometry Dynamical System, 3, 17-24, (2001).

Frappat L., Sciarrion A., Sorba P., Dictionary on lie algeabras and superalgeabras, Academic press, p.410, (2010).

Hacısalıhoğlu, H.H., “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi, Basın Yayın Y.O. Basımevi, (1983).

Hacısalıhoğlu, H.H., “Lineer Cebir ” Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü: Nobel Yayın Evi, (1990).

Jadezyk, A. and Pilch, K., “Superspaces And Supersymmetries”, *Commun. Math. Phys.*, 78, 373-390, (1981).

Leites, D. A., Introduction to the theory of supermanifolds, *Russian Mathematical surveys*, 35, 1(<http://science.iop.org/0036-0279/35/1R01>), (1980).

Önder H., “Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamalar”, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Aksaray (2021).

Quevedo, F., “Cambridge Lectures On Supersymmetry And Extra Dimensions”, Cornell University Library., arXiv:1011.1491v1, (2010).

Rogers, A., Supermanifolds Theory And Applications, World Scientific Publishing Company, Singapore, p.251, (2007).

Sardanashvily, G., “Supermetrics On Supermanifold”, *Int. Jour. Of Geo. Math. in Mod. Phys.*, 5-(2), 271-286, (2008).

Şimşek, S., “Süper Monifoldlar Üzerinde Zamana Bağlı Mekanik Sistemler Ve Graf Demet Uygulamaları”, Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Anabilim Dalı, Denizli, (2021).

Tozok H., “Süper Manifold Ve Süpersimetri Üzerinde Kinetik Yapılar”, Doktora Tezi, Eskişehir Osman Gazi Üniversitesi, Matematik Ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir, (2017).

Ünal, T., “Kuaterniyonlar Ve Kuaterniyon Matrisi”, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kütahya, (2011).

Uğurlu, H. H., “Süpermanifoldlar üzerinde süper vektör yapıları ve C^∞ - eğriler”, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara, p.97, (1987).

Varadarajan, V. S., Supersymmetry for mathematicians, Courant Institute of Mathematical Sciences and American Mathematical Society, Rhode Island, p.300, (2004).

Voight J., Quaternion Algebras, USA, seringer press, (2021).

West, P. C., Introduction to supersymmetry and supergravity, World Scientific publishing, Singapore, p.440, (1986).