T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BESSEL OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

77650

Hikmet KOYUNBAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
1998

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BESSEL OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Hikmet KOYUNBAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, ..20 06 1998........Tarihinde, Aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği / o~~yçokluğ~~u ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman	Üye	Üye
Prof. Dr. Etibar PENAHOV	Doç. Dr. Mahmut ERGÜT	Yrd. Doç. Dr. Mikail ET

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BESSEL OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Hikmet KOYUNBAKAN

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

1998, Sayfa: 43

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; Diferensiyel operatörlerin Spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Genel Sturm - Liouville , Bessel diferensiyel denklemi ve bu denklemlerin çözümleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; Bessel operatörü için Sturm'un Mukayese ve Osilasyon teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremler daha önce B. M. , Levitan tarafından Sturm - Liouville denklemi için ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde; Bessel operatörünün özdeğerler , özfonksiyonlar , normlaştırılmış sayılar ve ortonormalleştirilmiş özfonksiyonları için asimptotik formları bulunmuştur.

Beşinci bölüm , tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $y(0) = 0$ başlangıç şartı altında Bessel operatörü için Dönüşüm operatörünün varlığı ve Euler - Poisson - Darboux denkleminin Riemann metodu ile çözümü incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Özdeğer , Özfonksiyon , Tekillik , Osilasyon Teoremi , Asimptotik Açılım , Dönüşüm Operatörü , Riemann Metodu

SUMMARY

Masters Thesıs

SPECTRAL ANALIYSIS OF BESSEL OPERATOR

Hikmet KOYUNBAKAN

Fırat University

Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

1998 , Page: 43

This study is arranged in five chapters.

In the first chapter , some fundemental definition and theorems that use often in Spectral theory of Differential operators are given .

In the second chapter , General Sturm - Liouville , Bessel equations and Solutions of these equations are examined .

In the third chapter , Sturm ′s Comparison and Oscillation theorems are proved for Bessel operator. We noted that These theorems are proved for Sturm - Liouville equations by B. M. , Levitan.

In the fourth chapter, Asymptotic forms are found for eigenvalues , eigenfunctions , normalized numbers , ortonormalized eigenfunctions of Bessel operator.

Fifth chapter has constituted original part of the thesıs. In this chapter , We investigated of the Euler - Poisson - Darboux equation solution by Riemann methods and existence of translation operator for the Bessel equation with considering the initial value $y(0) = 0$.

KEY WORDS: Eigenvalues , Eigenfunctions , Singularity , Oscillation Theorem , Asymptotic Form , Translation Operator , Riemann ′ s Method.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli imkanları sağlayarak bana yardımcı olan Hocam ; Sayın Prof. Dr. **Etibar PENAHOV** ' a , **Prof. Dr. Ramiz RAFATOV** ' a ve Bölüm Başkanı , Hocam; Doç. Dr. **Mahmut ERGÜT** ' e teşekkür ederim.

Hikmet KOYUNBAKAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

T^* : T operatörünün adjointi

H : Hilbert Uzayı

λ : Özdeğer

φ_n : Özfonksiyon

o(1) : Sonsuz küçük değerler

O(1) : Sınırlı değerler

Γ : Gamma Fonksiyonu

$J_\nu(x)$: ν - inci dereceden 1-inci Tür Bessel Fonksiyonu

$Y_\nu(x)$: ν- inci Dereceden 2- inci Tür Bessel Fonksiyonu

$F(\alpha, \alpha, 1, \sigma)$: Hipergeometrik Fonksiyon

L^2 [a,b] : Karesel İntegrallenebilen Fonksiyonlar Uzayı

1 . BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1: (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve T: $H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

Eğer $T^*: H_2 \to H_1$ operatörü < Tx , y > = < x , T^*y > şartını sağlıyorsa T^* operatörüne T ′ nin adjointi denir. Eğer T= T^* ise T operatörüne self - adjoint operatör denir. [Kreyszig , 1978].

TANIM 1.2: A sınırlı lineer bir operatör ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$Ax = \lambda x$$

eşitliğinde $x \neq 0$ çözümü için elde edilen λ değerlerine A ′ nın bir özdeğeri x değerine ise bir özfonksiyon denir. [Kreyszig , 1978].

TANIM 1.3: (L^2[a , b] uzayı) Aşağıdaki özelliği sağlayan elemanlardan oluşan uzaya L^2[a , b] uzayı denir.

$$L^2[a, b] = \{x(t): \int_a^b [x(t)]^2 dt \text{ integrali mevcuttur. } \}$$

Bu uzay reel olarak gözönüne alınırsa iç çarpım fonksiyonu

$$< f(x), g(x) > = \int_a^b f(x)\, g(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. Burada f(x) ve g(x) reel fonksiyonlardır. [Kreyszig , 1978].

TANIM 1.4: (Frobenius Metodu)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0 \qquad (1.1)$$

şeklinde bir diferensiyel denklemi gözönüne alalım. Kabul edelim ki $x = x_0$ noktası bu denklemin bir tekil noktası olsun. Yani $p_1(x)$ veya $p_2(x)$ fonksiyonlarından birinin veya her ikisinin birden paydaları ($x- x_0$) çarpanını içersin. O zaman eğer $p_1(x)$ ' in paydası ($x- x_0$) çarpanını en fazla birinci dereceden ve $p_2(x)$ 'in paydası da aynı çarpanı en fazla ikinci dereceden içeriyorsa , bu durumda $x=x_0$ noktasına düzgün tekil nokta adı verilir. Dolayısıyla (1.1) denkleminin Frobenius metodu yardımıyla $x=x_0$ noktası etrafında bir çözümü bulunabilir. O zaman Bu metod yardımıyla aranan çözüm

$$y=(x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

şeklinde bir kuvvet serisidir. Bu şekildeifade edilen seriye Frobenius serisi denir. [Aydın , 1990].

TANIM 1.5: (Gamma fonksiyonu)
$n>0$ olmak üzere

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. [Aydın , 1990].

TANIM 1.6: (Hipergeometrik Fonksiyon) a , b , c reel sabitler olmak üzere

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$$

formundaki denkleme Gauss diferensiyel denklemi denir. Bu şekildeki denklemin çözümü,

$$F(a,b;c;x)=1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a.(a+1)b.(b+1)}{1.2.c.(c+1)}x^2+\cdots$$

şeklinde verilen bir Hipergeometrik seridir. [Churchill , 1976].

TEOREM 1.1: q(x) , [0,1] aralığında reel ve sürekli bir fonksiyon , H ise sonlu reel bir sayı olmak üzere

$$y'' + \left[\lambda + q(x) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y = 0 \tag{1.2}$$

$$y(0,\lambda) = 0 \tag{1.3}$$

$$y'(1,\lambda) + Hy(1,\lambda) = 0 \tag{1.4}$$

şeklindeki sınır değer probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar (0,1] aralığında ortogonaldir.

İSPAT : λ_1 ve λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler $y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_2)$ olsun. Bu durumda

$$y_1'' + \left[\lambda_1 + q(x) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y_1 = 0$$

$$y_2'' + \left[\lambda_2 + q(x) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y_2 = 0$$

olur. Bu denklemleri , sırası ile , y_2 ve y_1 ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak,

$$y_2 y_1'' + \lambda_1 y_1 y_2 + q y_1 y_2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y_1 y_2 - y''_2 y_1 - q y_1 y_2 - \lambda_2 y_1 y_2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y_1 y_2 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$y_2 y_1'' - y_2'' y_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2$$

$$\frac{d}{dx}\left(y_1' y_2 - y_1 y_2'\right) = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2$$

bulunur. Son eşitliğin iki tarafını (0 , 1] aralığında integrallersek

$$\left(y_1' y_2 - y_1 y_2'\right) \Big|_0^1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^1 y_1 y_2 dx$$

elde edilir.Eğer (1.3) ve (1.4) sınır şartları gözönüne alınırsa sol tarafın sıfır olduğu sonucuna varılır ki böylece

$$\int_0^1 y_1(x,\lambda_1)y_2(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur.Bu ise çözümlerin ortogonal olduğunu gösterir.

TEOREM 1.2: q(x) ve H , Teorem 1.1 deki şartları sağlasın. Bu durumda (1.2) - (1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İSPAT:

Aksine kabul edelim ki λ özdeğerleri $\lambda = u + iv$ şeklinde kompleks sayı olsun. Bu durumda q(x) ve H reel olduğundan $\lambda = u - iv$ sayısı da bir özdeğer olur. Eğer (1.2) denkleminde iki tarafın eşleniği alınırsa,

$$\overline{y''} + \left[\overline{\lambda} + q(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]\overline{y} = 0$$

elde edilir. Bu denklem ise $\overline{y}$ fonksiyonunun $\overline{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen bir çözüm olduğunu gösterir. Böylece Teorem 1.1 den

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^1 y(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}dx = 0$$

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^1 |y(x,\lambda)|^2 dx = 0$$

elde edilir. İntegralin içerisindeki terim sıfırdan farklı olduğundan $\lambda = \overline{\lambda}$ elde edilir ki bu da λ özdeğerlerinin reel olduğunu gösterir.

TEOREM 1.3: (Rouche Teoremi)

Eğer f(x) ve g(x) fonksiyonları kapalı bir C eğrisi üzerinde ve içinde analitik ve

$|g(x)| < |f(x)|$ ise $f(x)+g(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonları C üzerinde aynı sayıda köke sahiptir. [Churchill , 1976].

TEOREM 1.4: (Green Teoremi)

B; XOY düzleminde basit bir bölge , C ′ de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün tersine yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları ise B üzerinde sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

olur. [Churchill , 1976].

Şimdi ise sık sık kullanacağımız dönüşüm operatörü kavramını tanımlayıp, bu operatörün bazı basit özelliklerini açıklayalım.

TANIM 1. 7: E lineer bir topolojik uzay, A ve B ise E den E ye tanımlanan iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E nin kapalı alt uzayları olsunlar.

$X : E_1 \rightarrow E_2$ şeklindeki operatör ;

1) X ve X^{-1} operatörleri E de süreklidir,

2) AX = XB

şartlarını sağlıyorsa böyle bir operatöre A ve B için dönüşüm operatörü denir. [Levitan 1964].

LEMMA 1. 5: B operatörünün λ özdeğerine karşı gelen özvektör $\varphi_\lambda \in E_1$ olsun. Dolayısıyla

$$B\varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$$

dir. Bu taktirde A operatörünün λ özdeğerine karşı gelen özvektörü

$$\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$$

dir. Burada X dönüşüm operatörüdür. [Levitan 1964].

İSPAT : AX = XB olduğundan

$$A\psi_\lambda = AX\varphi_\lambda = XB\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

LEMMA 1.2: A , B , C lineer operatörleri E uzayında tanımlı ve E_1 , E_2 , E_3 ise E nin kapalı alt uzayları olsun. $X_{A,B} : E_2 \rightarrow E_3$, $X_{B,C} : E_1 \rightarrow E_2$ olsun. Bu durumda $X_{A,C} : E_1 \rightarrow E_3$ operatörü

$$X_{A,C} = X_{A,B}\ X_{B,C}$$

şeklindedir. [Levitan 1964].

İSPAT : Dönüşüm operatörü tanımından $A\ X_{A,B} = X_{A,B}\ B$, $B\ X_{B,C} = X_{B,C}\ C$ şeklindedir. İkinci denklemden $B = \left[X_{B,C}\ \ C\left(X_{B,C^{-1}}\right)\right]$elde edilir. Son eşitliği ilk denklemde yerine yazarsak,

$$A\ X_{A,B} = X_{A,B}\ X_{B,C}\ C\ X_{B,C}^{-1}$$

veya

$$A\ X_{A,B}\ X_{B,C} = X_{A,B}\ X_{B,C}\ C$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

2. BÖLÜM

SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

2.1. Genel Sınır Değer Problemleri

sınır şartları ile birlikte İkinci mertebeden değişken katsayılı homojen ve lineer bir diferensiyel denklem , genel olarak ,

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2.1.1}$$
$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \tag{2.1.2}$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \tag{2.1.3}$$

şeklindedir.

Burada $a_0(x)\neq 0$ ve $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$ ise reel sayılardır. Fakat bunlardan $\cos\alpha$ ve $\sin\alpha$ veya $\cos\beta$ ve $\sin\beta$ sayılarının aynı anda sıfır olması mümkün değildir. Çünkü bu durumda (2.1.1) denkleminin

$$y(x) = 0$$

şeklinde bir çözümü mevcut olup, buradaki amaç eğer varsa sıfırdan farklı bir çözüm bulmaktır.

Şimdi (2.1.1) denklemini aşağıdaki şekilde gözönüne alalım. $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ fonksiyonları periyodik olmak üzere

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$
$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

olsun. Bu şekildeki probleme; kısaca periyodik problem denir.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları (2.1.1) - (2.1.3) probleminin lineer bağımsız iki çözümü olmak üzere böyle bir sistemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

2.2. Sturm - Liouville Problemi , Özdeğerler ve Özfonksiyonlar

Sınır değer problemleri arasında Sturm - Liouville probleminin önemli bir yeri vardır. Genel olarak sınır değer problemi denildiği zaman akla ilk gelen, Sturm - Liouville problemidir.

Şimdi (2.1.1) denklemine benzer olarak

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + [\lambda + a_3(x)]y = 0 \tag{2.2.1}$$

denklemini gözönüne alalım. Denklemin iki tarafını $a_0(x)\neq 0$ ile bölersek ,

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{\lambda}{a_0(x)}y + \frac{a_3(x)}{a_0(x)}y = 0$$

olur. Eğer $p(x) = e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}$ olarak seçilip denklemin iki tarafı p(x) ile çarpılırsa

$$p(x)y'' + p(x)\frac{a_1}{a_0}y' + \frac{\lambda}{a_0}p(x)y + p(x)\frac{a_3}{a_0}y = 0$$

elde edilir. Böylece (2.2.1) denklemi ,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda s(x)y = 0 \tag{2.2.2}$$

olur. Burada $q(x) = p(x)\frac{a_3}{a_0}$, $s(x) = \frac{p(x)}{a_0}$ şeklindedir.

Bu denklemdeki p, q ve r fonksiyonları kapalı [a, b] aralığında $\forall x$ için reel değerli , sürekli ve türevlenebilen fonksiyonlardır. Ayrıca λ , x ' ten bağımsız ve [a, b] aralığında p , s $\geq$ 0 dır.

Şimdi (2.1.2) ve (2.1.3) sınır şartlarını gözönüne alalım. (2.1.2) denkleminin iki tarafını $\sin\alpha \neq 0$ ve (2.1.3) denkleminin iki tarafını ise $\sin\beta \neq 0$ ile bölersek

$$y'(a) + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y(a) = 0$$

$$y'(b) + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}y(b) = 0$$

olur.

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\alpha = H \quad (H \neq 0) \quad ve \quad \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \tan\beta = h \quad (h \neq 0)$$

ile gösterilirse, böylece

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + \left[q(x) + \lambda s(x)\right]y = 0 \tag{2.2.3}$$

$$y'(a) + H\,y(a) = 0 \tag{2.2.4}$$

$$y'(b) + h\,y(b) = 0 \tag{2.2.5}$$

sistemi elde edilir ki böyle bir sisteme Sturm Liouville problemi denir. [Aydın , 1990].
Eğer

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

olarak alınırsa bu şekildeki L opratörü self - adjointtir.

Eğer p(x) ve s(x) fonksiyonları [a, b] aralığında pozitif ise Sturm - Liouville denklemine [a, b] aralığında regülerdir denir. Eğer aralık yarı sonsuz, sonsuz veya p(x) ile s(x) ‘ den biri aralığın bir veya her iki ucunda sıfır ise Sturm - Liouville denklemine singülerdir denir. Bundan sonraki incelemelerimizde gözönüne alınacak problemler singüler olacaktır.

ÖRNEK 2.2.1:

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{2.2.6}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{2.2.7}$$

şeklindeki sınır değer problemini gözönüne alalım. Bu şekildeki bir denklemin çözümü λ nın alacağı değerlere göre değişir:

(i) Eğer $\lambda = 0$ ise denklemin genel çözümü ;

$y = c_1 + c_2 x$

şeklindedir. Dolayısıyla bu çözüme sınır şartları uygulanırsa $y = 0$ şeklinde aşikar bir çözüm ortaya çıkar.

(ii) Eğer $\lambda < 0$ ise aynı şekilde aşikar bir çözüm elde edilir.

(iii) Eğer $\lambda > 0$ ise genel çözüm ;

$$y = c_1\, sin\sqrt{\lambda}x + c_2\, cos\sqrt{\lambda}x$$

olup , (2.2.7) şartları gözönüne alınırsa

$$\lambda_n = n^2 \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{2.2.8}$$

ve

$$\varphi_n(x) = c_n\, sin\, nx \tag{2.2.9}$$

olarak elde edilir.

2.3. Bessel Diferensiyel Denklemi ve Çözümleri

İkinci mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemler arasında aşağıda verilen Bessel diferensiyel denkleminin önemli bir yeri vardır. Matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinin çalışma alanına giren pekçok problemin çözümünde bu denklem ve denklemin çözümü olan fonksiyonlarla sık sık karşılaşılır.

ν herhangi bir parametre olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{2.3.1}$$

şeklinde verilen denkleme ν - inci dereceden Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu şekildeki denklemin çözümü , ikinci mertebeden değişken katsayılı denklemlerin çözümü için kullanılan Frobenius metodu ile çözülür ve bu çözüm

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{2.3.2}$$

şeklindedir. Bu şekildeki $J_\nu(x)$ çözümüne birinci tür Bessel fonksiyonu , bu çözümden lineer bağısız olan

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\, cos\, \nu x - J_{-\nu}(x)}{sin\, \nu x} \tag{2.3.3}$$

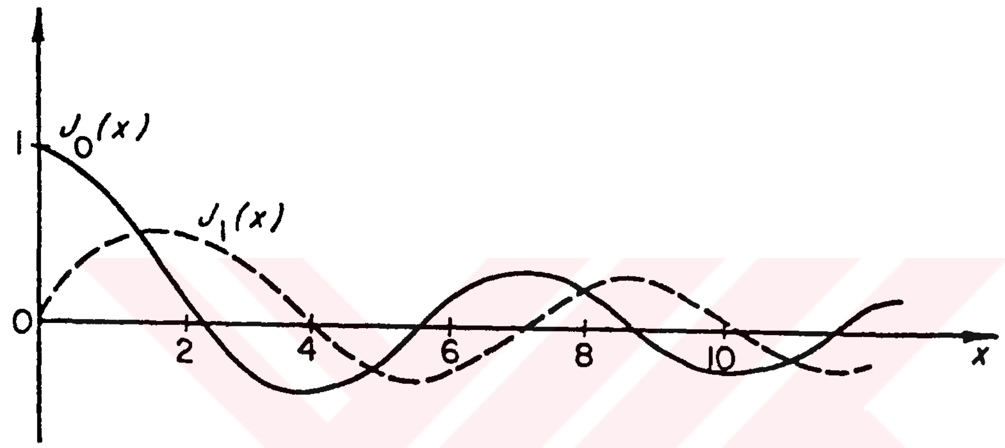
çözümüne ise ikinci tür Bessel fonksiyonu denir. Bu durumda (2.3.1) denkleminin genel çözümü

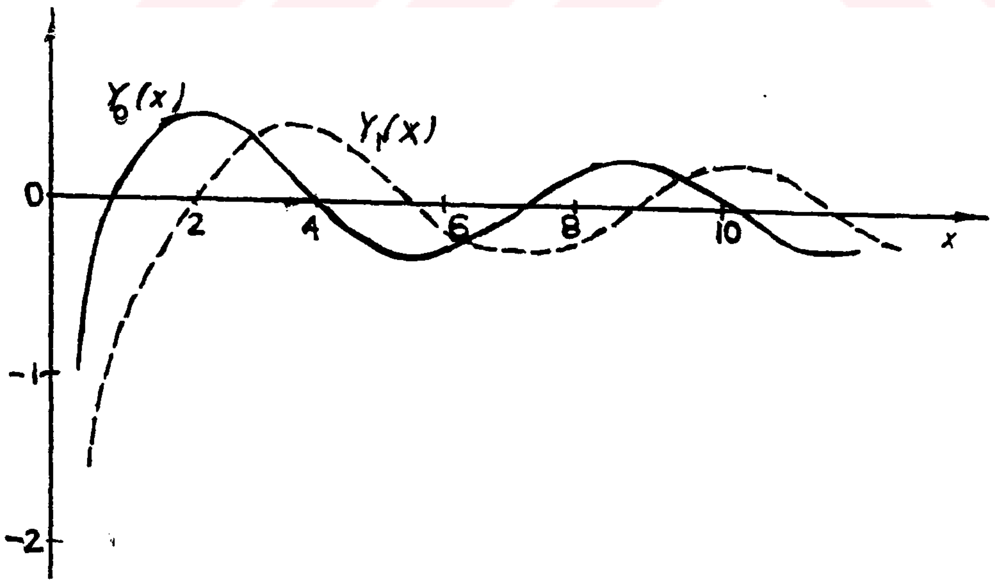
$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x) \tag{2.3.4}$$

olur. Bu çözüm ν ′ nın tam olması halinde elde edilir. Eğer ν bir tam sayı değilse

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

olur. Bu şekideki çözümlerin grafikleri ise aşağıdaki gibidir.





3. BÖLÜM

OSİLASYON TEOREMLERİ

3.1. Bessel Diferensiyel Denklemi için Osilasyon Teoremi

Bu bölümde Bessel diferensiyel denkleminin özdeğerleri ile ilgili bazı teoremler verilecektir. Özellikle bu teoremler sayesinde özdeğerleri belli olan bir denklemi gözönüne alıp q(x) potansiyel fonksiyonunun eklenmesiyle elde edilen yeni denklemin özdeğerleri hakkında yorum yapabileceğiz.

TEOREM 3. 1.1:

$$u'' + \left[g(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] u = 0 \qquad (3.1.1)$$

$$v'' + \left[h(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] v = 0 \qquad (3.1.2)$$

şeklindeki iki denklemi gözönüne alalım. Eğer (0, 1] aralığındaki ∀x değeri için g(x) < h(x) ise ; u ′ nun aşikar olmayan iki ardışık sıfırı arasında v ′ nin bir tek sıfırı vardır.

İSPAT:

(3.1.1) denkleminin iki tarafını v , (3.1.2) denkleminin iki tarafını u ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak;

$$u''v - v''u + g(x)uv - h(x)uv - vu\frac{v^2 - \frac{1}{2}}{x^2} + vu\frac{v^2 - \frac{1}{2}}{x^2} = 0$$

$$u''v - v''u = \left[h(x) - g(x) \right] uv$$

$$\frac{d}{dx}\left[u'v - v'u \right] = \left[h(x) - g(x) \right]$$

x_1 ile x_2 u ′ nun ardışık iki kökü olsun. Son eşitliği [x_1, x_2] aralığında integrallersek

$$u'v - v'u \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (h-g)dx$$

$$u'(x_2)v(x_2) - v'(x_2)u(x_2) - u'(x_1)v(x_1) + v'(x_1)u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (h-g)uvdx$$

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (h-g)dx$$

elde edilir. Genelliği bozmadan (0, 1] aralığında $u > 0$ ve $v > 0$ olsun. Bu durumda $u'(x_2) < 0$ ve $u'(x_1) > 0$ olduğundan sağ taraf sıfırdan küçük , sol taraf sıfırdan büyük olacak şekilde bir çelişkiye varılır. Dolayısıyla v ′ nin bu aralıkta en az bir kökü vardır. Buda ispatı tamamlar.

TEOREM 3.1.2: (Sturmun mukayese kriteri)

$$u'' + \left[\lambda + g(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]u = 0 \qquad (3.1.3)$$

$$u(0) = 0 \qquad (3.1.4)$$

$$u'(0) = H \quad (H \in R) \qquad (3.1.5)$$

probleminin çözümü u(x) ve

$$v'' + \left[\lambda + h(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]v = 0 \qquad (3.1.6)$$

$$v(0) = 0 \qquad (3.1.7)$$

$$v'(0) = h \quad (h \in R) \qquad (3.1.8)$$

probleminin çözümü ise v(x) olsun. Ayrıca (0,1] aralığında $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $0 < x \le 1$ aralığında u fonksiyonun m tane sıfırı varsa v ′nin aynı aralıkta m ′ den az olmayacak şekilde sıfırları var ve v ′ nin k - inci sıfırı , u ′ nun k - inci sıfırından küçüktür.

İSPAT:

x_1 , u nun 0 noktasına en yakın kökü olsun. Teorem 3.1.1 yardımıyla v nin (0, x_1] aralığında bir kökünün varolduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelimki v nin bu aralıkta kökü olmasın ve genelliği bozmadan u > 0 , v > 0 olsun. $u(x_1) = 0$ olduğundan $u'(x_1) < 0$ olur. Teorem 3.1.1 den dolayı

$$\frac{d}{dx}\left[u'v - v'u\right] = (h-g)uv$$

eşitliğini (0, x_1] aralığında integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) - v'(x_1)u(x_1) - u'(0)v(0) + v'(0)u(0) = \int_0^{x_1}(h-g)uv\,dx$$

$u(0) = 0$, $u'(0) = H$, $v(0) = 0$, $v'(0) = h$ olduğundan $v'(0)\,u(0) + v(0)\,u'(0) = 0.h + 0.H = 0$ olur. Ayrıca $u(x_1) = 0$ olduğundan

$$u'(x_1)v(x_1) - v'(x_1)u(x_1) = \int_0^{x_1}(h-g)uv\,dx$$

eşitliğinde sol tarafın sıfırdan küçük sağ tarafın ise sıfırdan büyük olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla v nin bu aralıkta kökü vardır. Eğer (0, 1] aralığını (0, x_1],[x_1, x_2] , [x_2, x_3]...[x_n, 1] olarak alırsak u ile v nin aynı sayıda kökü olup v ′ nin nin k - inci sıfırı u ′ nun k - inci sıfırından küçüktür.

LEMMA 3.1.3: Eğer x_0 noktası $(a < x_0 < b)$, $\varphi(x_0, \lambda_0)$ fonksiyonunun sıfırı ise bu durumda yeterince küçük herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına $\exists\ \delta > 0$ sayısı karşı gelirki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olacak şekilde $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ aralığında sadece bir sıfırı vardır. [Levitan and Sargsyan , 1970]

TEOREM 3.1.4: (Bessel Diferensiyel Denklemi İçin Osilasyon Teoremi)

$$y'' + \left[\lambda + q(x) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y = 0 \qquad x \in (0,1] \tag{3.1.9}$$

$$\begin{aligned} &y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ &y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

probleminin öyle sınırlı olmayan artan λ_0, λ_1, ... , λ_n ,... özdeğerler dizisi mevcuttur ki λ_m özdeğerine karşılık gelen $\varphi(x,\lambda_m)$ özfonksiyonunun $(0,1]$ aralığında m-tane kökü vardır.

İSPAT : $\varphi(x,\lambda)$, (3.1.9) denkleminin (3.1.4) ve (3.1.5) şartlarını sağlayan çözümü olsun. Teorem 3.1.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x,\lambda)$ nın sıfırlarının sayısı azalmaz. $0 < x \leq 1$ için $|q(x)| < c$ olsun. Şimdi (3.1.9) denklemini

$$y'' + \left[\lambda + c - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y = 0$$

denklemi ile karşılaştıralım. Bu denklemin çözümü

$$y = J_\nu\left(\sqrt{\lambda + c}\,.x\right)$$

şeklinde bir Bessel fonksiyonu olup sıfırdan farklıdır. Teorem 3.1.2 den dolayı

$$y'' + \left[\lambda - c - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] y = 0$$

denklemi gözönüne aldığımızda $(0,1]$ aralığında pozitif ve sınırsız olarak artan λ değerleri için sıfırları $(0,1]$ aralığında olan φ nin çözümleri sınırsız olarak artar ve bu çözümler λ ya bağlıdır. Diğer taraftan Teorem 3.1.2 den λ arttıkça $\varphi(x, \lambda)$ nın her bir sıfırı sol tarafa düşer ve sıfırların sayısı azalmadığından 0 noktasının dışına çıkmaz. $\varphi(1, \lambda)=0$ olmak üzere λ parametresinin ilk değeri μ_0 olsun. Benzer şekilde $\varphi(1, \lambda)=0$ olmak üzere λ nın ikinci değeri μ_1 olsun. Böylece μ_0 , μ_1 ... μ_m ... sayı dizisi için $\varphi(b, \mu_m)=0$ olacak şekilde $\varphi(x, \mu_m)$ fonksiyonu $(0,1]$ aralığında m- tane sıfıra sahiptir. Eğer $\sin\beta = 0$ ise $y'(1)\cos\beta + y(1)\sin\beta = 0$ şartı sağlanır. Böylece μ_m ler sadece özdeğer olur ki buda ispatı tamamlar.

Eğer $\sin\beta \neq 0$ ise u ile v Teorem 3.1.2 deki gibi verilen fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\frac{d}{dx}\left[u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right] = 2uu'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right) + u^2\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right) - u^2\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right)$$

$$= \left(\frac{u'v - v'u}{v}\right)^2 + u^2\left[h(x) - g(x)\right] > 0$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dx}\left[u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right] > 0 \qquad (3.1.11)$$

olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla bu fonksiyon monoton artandır. Kabul edelim ki u ile v fonksiyonları $(0,1]$ aralığında aynı sayıda sıfıra sahip olsunlar ve u nun 1 noktasına en yakın sıfırı x_γ olsun. v(x) fonksiyonunun $x_\gamma \leq x \leq 1$ aralığında sıfırlarının mevcut olmadığını gösterelim. Gerçekten Teorem 3.1.2 den v nin $(0, x_\gamma]$ aralığında en az v tane sıfırı vardır. Eğer v nin $[x_\gamma, 1]$ aralığında sıfırı olursa , kabulumüze göre v(x), $(0,1]$ aralığında u dan daha fazla sıfıra sahip olurdu. O halde v 'nin $x_\gamma \leq x \leq 1$ aralığında sıfırları mevcut değildir. (3.1.11) ifadesi $x_\gamma \leq x \leq 1$aralığında integrallenirse

$$u^2(1)\left[\frac{u'(1)}{u(1)} - \frac{v'(1)}{v(1)}\right] > u^2(x_v)\left[\frac{u'(x_v)}{u(x_v)} - \frac{v'(x_v)}{v(x_v)}\right] = 0$$

olur. Böylece

$$\frac{u'(1)}{u(1)} > \frac{v'(1)}{v(1)} \tag{3.1.12}$$

elde edilir. $\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$ olmak üzere u yerine $\varphi(x,\lambda')$, v yerine $\varphi(x,\lambda'')$ alalım. (3.1.12) eşitliğine göre (μ_m , μ_{m+1}) aralığında $\frac{\varphi'(1,\lambda)}{\varphi(1,\lambda)}$ fonksiyonu monoton azalandır.

$\varphi(1, \mu_m) = \varphi(1, \mu_{m+1}) = 0$ olduğundan bu fonksiyonun $+\infty$ dan $-\infty$ a azalması gerekir. Dolayısıyla (μ_m , μ_{m+1}) aralığında

$\frac{\varphi'(1,\mu_m)}{\varphi(1,\mu_m)} = -\cot\beta$ olmak üzere en az bir λ_m bulunur. Böylece $y'(1) + Hy(1) = 0$ şartı sağlanır. O halde λ_m bir özdeğerdir.

4. BÖLÜM

4.1. BESSEL OPERATÖRÜ İÇİN ASİMPTOTİK FORMLAR

$$y'' + \left[\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] y = 0 \tag{4.1.1}$$

$$y(0) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$y'(1,\lambda) + H\,y(1,\lambda) = 0 \qquad (H \in R) \tag{4.1.3}$$

şeklinde verilen sınır değer problemini gözönüne alalım. Bu denklemin çözümü

$$y(x) = \sqrt{x}.J_\nu\left(\sqrt{\lambda}.x\right)$$

formundaki Bessel fonksiyonu olup, burada

$$J_\nu\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

dir. Şimdi

$$y'' + \left[\lambda + q(x) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] y = 0 \tag{4.1.4}$$

$$y(0) = 0 \tag{4.1.5}$$

$$y'(1,\lambda) + H\,y(1,\lambda) = 0 \qquad (H \in R) \tag{4.1.6}$$

problemi gözönüne alalım. Burada q(x), (0 , 1] aralığında sürekli ve türevlenebilen bir fonksiyon ve $\nu - \frac{1}{2} = l$ olsun. Bu durumda (4.1.4) denklemi

$$y'' + \left[\lambda + q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y = 0$$

şeklinde elde edilir.

(4.1.1) -(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarını bulmak zor değildir. Fakat (4.1.4) - (4.1.6) problemine dikkat edilirse q(x) potansiyel fonksiyonunun (0,1] aralığındaki sürekliliği hariç başka bir özelliği bilinmemektedir.

Bu bölümdeki amaç ise böyle bir denklemin asimptotik formlarını bulmaktır. Bu formları bulmaya çalışırken yine (4.1.1) - (4.1.3) probleminin asimptotik formlarından faydalanacağız. Ayrıca sadece $J_\nu(x) \in L^2(0,1]$ olduğundan asimptotik formları hesaplarken genel çözüm yerine $y = J_\nu(x)$ çözümünü almak yeterlidir. Şimdi bu formları bulmaya çalışalım.

Bilindiği gibi Bessel fonksiyonları

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^{2k}}\right]+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{x^{2k}}\right]$$

şeklinde asimptotik forma sahiptir. [Watson , 1944].

Eğer bu denklemde yeterince büyük x değerleri gözönüne alınırsa , $\sqrt{\lambda} = s$ olmak üzere

$$J_\nu(sx) = \sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] \tag{4.1.7}$$

$$J_\nu'(sx) = -\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\sin\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] \tag{4.1.8}$$

elde edilir.

Bu bölümde (4.1.4) - (4.1.6) probleminin çözümünü, dönüşüm operatörü yardımıyla

$$\varphi(x,\lambda) = \sqrt{x}\, j_\nu(sx) + \int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\, j_\nu(st)\,dt \tag{4.1.9}$$

şeklinde arayacağız. Eğer

$$\int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\, j_\nu(st)dt = O(\frac{1}{\sqrt{s}})$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\varphi(x,s) = \sqrt{x}.\sqrt{\frac{2}{\pi s x}}\left[\cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}.\left[\cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

$$= \cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.1.10}$$

olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$\varphi_x(x,s) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} j_\nu(sx) + \sqrt{x}.s\, j_\nu{}'(sx) + K(x,x)\sqrt{x}\, j_\nu(sx) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\sqrt{t}\, j_\nu(st)dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi s x}}\left[\cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] -$$

$$-\sqrt{x}\, s\sqrt{\frac{2}{\pi s x}}\left[\sin\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]$$

$$= \cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - s.\sin\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.1.11}$$

elde edilir. (4.1.4) - (4.1.6) probleminin özdeğerleri (4.1.6) denklemini sağlayan λ değerleri olduğundan (4.1.10) ve (4.1.11) değerleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y'(1,\lambda) + Hy(1,\lambda) = 0$$

$$\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + H\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

$$(1+H)\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

olur. Sinüs fonksiyonunun sıfırdan farklı değerleri için ,

$$-s.\sin\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+(1+H)\cot\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0$$

olup, buradan

$$w(s)=s.\sin\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0 \qquad (4.1.12)$$

denklemi elde edilir. Rouche teoreminden dolayı s nin büyük değerleri için w(s) fonksiyonu ile $\sin\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı aynıdır.

s_n , (4.1.12) denkleminin n. kökü olsun. Burada görülüyor ki $n\to\infty$ için $s_n\to\infty$ dir. n ′ nin , tam sayıların komşuluğunda yeterince büyük değerleri gözönüne alınırsa

$$\sin\left(s_n-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s_n}\right)=0$$

$$s_n-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi \qquad (n=0,1,2,\ldots,)$$

$$s_n=\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi$$

$$s_n=\left[n+\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]\pi \qquad \left(\nu=l+\frac{1}{2}\right)$$

$$s_n=\left(n+\frac{l+1}{2}\right)\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$s_n=\left(n+\frac{l}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.1.13)$$

elde edilir. Şimdi bu formülü daha hassas hale getirmeye çalışalım. Bunun için

$$s_n=\left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi+\delta_n \qquad (4.1.13)'$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_x(x,\lambda)=\cos\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-s.\sin\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\cos\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)$$

ifadelerinde $x = 1$ alınıp bu ifadeler (4.1.6) da yerlerine yazılırsa

$$\varphi'(1,\lambda) + H(1,\lambda) = \cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$K(1,1)\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + H\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\left[1 + H + K(1,1)\right]\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

bulunur. Burada s ′ nin yerine (4.1.13)′ yazılırsa;

$$\left[1 + H + K(1,1)\right]\cos\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right) -$$

$$-\left(n + \frac{(l+1)}{2}\right)\pi\sin\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right) + +O\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad (4.1.13)''$$

olur. Burada $\nu - \frac{1}{2} = l$ ifadesi gözönüne alınırsa

$$\cos\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right) = \cos(n\pi + \delta_n) = \cos n\pi\cos\delta_n - \sin n\pi\sin\delta_n$$

$$\cong \cos\delta_n$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sin\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right) = \sin(n\pi + \delta_n) = \sin n\pi\cos\delta_n + \cos n\pi\sin\delta_n$$

$$\cong \sin\delta_n$$

elde edilir. Bu değerler (4.1.13)′′ de yerlerine yazılırsa

$$\left[1 + H + K(1,1)\right]\cos\delta_n - \left[n + \frac{(l+1)}{2}\right]\pi\sin\delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

olur. Bu denklemde $n \to \infty$ için $O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$tan\,\delta_n = \frac{[1+H+K(1,1)]}{\left[n+\dfrac{(l+1)}{2}\right]\pi}$$

yazılır. Burada n nin büyük değerleri gözönüne alınırsa ,

$$\delta_n = \frac{[1+H+K(1,1)]}{\left[n+\dfrac{(l+1)}{2}\right]\pi}$$

bulunur. Eğer $a = \dfrac{1+H+K(1,1)}{\pi}$ alınırsa ,

$$\delta_n = \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

olur. Böylece (4.1.13) ifadesi

$$s_n = \left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.14}$$

şeklinde elde edilir. Bu da H ≠ ∞ için (4.1.14) denkleminin asimptotik formudur. Şimdi

$$y(1,\lambda)\cos\beta + y'(1,\lambda)\sin\beta = 0$$

sınır şartını tekrar gözönüne alalım. Bu eşitliğin iki tarafını sinβ ≠ 0 ile bölüp cotβ = H olarak alırsak ,

$$y'(1,\lambda) + H\,y(1,\lambda) = 0$$

şeklindeki eşitliği elde ederiz. (4.1.14) denklemi H ≠ 0 sayısının sonlu olması halinde elde edildi. Eğer H = 0 (cosβ = 0) ise ;

$$y(1,\lambda)\cos\beta + y'(1,\lambda)\sin\beta = y'(1,\lambda) = 0$$

olur. Diğer taraftan (4.1.8) eşitliğinden

$$y'(sx) = \sqrt{x}J'_\nu(sx) = -\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\sin\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]$$

bulunur. Burada x = 1 alınırsa

$$y'(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\left[\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right)\right] = 0$$

olur. Böylece $\sqrt{\frac{2}{\pi s}} \neq 0$ olduğundan

$$\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

olur. Buradan

$$s_n = \left[n + \frac{(l+1)}{2}\right]\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan $H = \infty$ ($\sin\beta = 0$) gözönüne alınırsa ;

$$y(1,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\left[\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right)\right] = 0$$

$$\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$s_n = [n + (l+1)]\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.16}$$

bulunur.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ eşitliğini gözönüne alarak (4.1.14) asimptotik formuna karşılık gelen özfonksiyonların asimptotik formunu bulmaya çalışalım. Bunun için (4.1.7) gözönüne alınırsa;

$$\varphi(x,\lambda) = \sqrt{x}\, j_\nu(sx) + \int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\, j_\nu(st)\,dt$$

veya

$$\varphi(x,\lambda) = \sqrt{x}.\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] +$$

$$+ \int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{\pi st}}\left[\cos\left(st - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt \tag{4.1.16$'$}$$

olur. Burada eşitliğin sağındaki ikinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa ,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x K(x,t)\left[\cos\left(st-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt=\frac{1}{s}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi s}}K(x,t)\sin\left(st-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^x-$$

$$-\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\sin\left(st-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x K(x,t)\left[\cos\left(st-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt \;=K(x,x)\sin\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

bulunur. Bu ifade (4.1.16)′ de gözönüne alınırsa

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(sx-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte Eğer (4.1.14) ifadesi gözönüne alınırsa ,

$$\varphi_n(x)=\cos\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.1.17)$$

olur. Elde edilen bu ifade ise (4.1.4) - (4.1.6) probleminin özfonksiyonları için asimptotik formdur. Bunun için ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlara aitasimptotik

$$\alpha_n^2=\int_0^1\varphi_n^2dx \qquad (4.1.17)'$$

formu hesaplayalım. (4.1.17) de (4.1.17)′ gözönüne alınırsa

$$\alpha_n^2=\int_0^1\left[\cos\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2dx$$

$$=\int_0^1\left[\cos^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K^2(x,x)\sin^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right]dx+ \qquad (4.1.17)''$$

$$+\int_0^1 2K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

bulunur. Ayrıca $K(x,x)=\int_0^x q(\tau)d\tau$ ve $q(\tau)\in C(0,1]$ olduğundan,

$$\int_0^1 K^2(x,x)\sin^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu değer (4.1.17)'' de yerine yazılırsa

$$\alpha_n{}^2=\int_0^1\cos^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\alpha_n{}^2=\frac{1}{2}\int_0^1\left[1+\cos\left[2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\alpha_n^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n\pi}\sin\left[2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$\alpha_n{}^2=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\alpha_n^2=\frac{1}{2}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{1}{\alpha_n}=\sqrt{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\|\varphi_n\|$$

elde edilir. Böylece ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlar

$$v_n=\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$$

veya

$$v_n=\sqrt{2}\left[\cos\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

şeklinde bulunur.

Bütün bu ifadeler $H\neq 0$ sayısının sonsuzdan farklı olması halinde elde edildi. H=0 ve $H=\infty$ olması halinde de; özdeğerler özfonksiyonlar ve ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlar için yukarıdakine benzer şekilde asimptotik formlar bulunabilir.

Şimdi keyfi bir f(x) fonksiyonunun Bessel fonksiyonları cinsinden açılımı ile ilgili bir teorem verelim:

TEOREM 4.1.1: Eğer f(x) fonksiyonu;

1) [0, b] aralığında sürekli ve türevi mevcut ,

2) f(b) = 0

3) f(0) = f (0) = 0'

şartlarını sağlıyorsa f(x) için verilen Fourier - Bessel serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İSPAT:

$$\alpha_n^2 = \int_0^b t\, J_\nu^{\,2}\left(s_n t\right)dt$$

için,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} J_\nu\left(s_n x\right) \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^b \sqrt{t}\, J_\nu\left(s_n t\right) f(t)\,dt \tag{4.1.18}$$

olsun. (4.1.7) ve (4.1.8) asimptotik formülleri (4.1.17)' de gözönüne alınırsa ,

$$\alpha_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^b \cos^2 (s_n t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})dt + O(\frac{1}{\lambda_n}) = O(1)$$

olur. Burada ardışık olarak iki kez kismi integrasyon uygulanırsa

$$a_n = \int_0^b \sqrt{t} J_\nu (s_n t) f(t)dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^b \left[\sqrt{t} J_\nu (s_n t)\right]'' -$$

$$-\frac{1}{\lambda} \int_0^b \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \left[\sqrt{t} J_\nu (s_n t) f(t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} J_\nu (s_n t) \left[f''(t) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} f(t) \right] dt \tag{4.1.19}$$

elde edilir. (sınır şartlarından dolayı integrallenen terimler sıfırdır.) $\frac{f(t)}{t^2}$ fonksiyonunun sınırlılığını göstermek mümkündür. Dolayısıyla (4.1.19) formülünden

$$a_n = O(\frac{1}{\lambda_n}) \qquad (4.1.20)$$

elde edilir. (4.1.7), (4.1.8) asimptotik formüllerinden $n \to \infty$ için

$$\lambda_n = O(n^2)$$

elde edilir.

(4.1.20) formülünden (4.1.18) Fourier-Bessel serisinin mutlak ve düzgün yakınsaklığını elde ederiz. Buda teoremin ispatını tamamlar.

5. BÖLÜM

BESSEL DENKLEMİ İÇİN DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ

Bu bölümde K(x, t) çekirdek fonksiyonunu bulmak için kısmi türevli denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan Riemann metodundan yararlanılmıştır. Bu metod Hiperbolik tip kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu metodun uygulanışı şöyledir. Öncelikle çözümü aranan denklemin düzlemde keyfi bir noktadaki değeri araştırılır. Eğer bu noktadaki çözüm bulunabiliyorsa denklemin genel çözümü bulunmuş olur. Ayrıca bu metod yardımıyla çözüm araştırılırken Riemann fonksiyonu adını verdiğimiz eşlenik denklemin çözümünden yararlanılır.

5.1.Dönüşüm Operatörünün Elde Edilmesi

$$xz'' + z' + \left(\lambda x - \frac{v^2}{x}\right)z = 0 \qquad (5.1.1)$$

şeklinde verilen Bessel diferensiyel denklemini gözönüne alalım.Bu denklemde $y = \sqrt{x}z$ dönüşümü yapılırsa,

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z + \sqrt{x}\,z'$$

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}z + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z' + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z' + x^{\frac{1}{2}}z''$$

olup, buradan

$$z' = \frac{y' - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z}{x^{\frac{1}{2}}} = y'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-1}z$$

$$z'' = y''x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}zx^{-2} - z'x^{-1}$$

olur. Elde edilen bu değerler (5.1.1) denklemine yerlerinde yazılırsa;

$$y''x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}zx^{-1}-z'+y'x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-1}z+\lambda xyx^{-\frac{1}{2}}-\frac{v^2yx^{-\frac{1}{2}}}{x}=0$$

$$y''x^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\lambda x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}v^2\right]y=0$$

$$y''+\left[\frac{1}{4}x^{-2}+\lambda-x^{-2}v^2\right]y=0$$

$$y''+\left[\lambda-\frac{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2}\right]y=0 \tag{5.1.2}$$

şeklindeki Bessel diferensiyel denklemi elde edilir. Şimdi bu denklemi

$$y(0)=0 \tag{5.1.3}$$

$$y'(1)+Hy(1)=0 \tag{5.1.4}$$

şartları ile gözönüne alalım. Bu şekilde verilen denklemin çözümü $y=\sqrt{x}\,.\,j_\nu(x)=J_\nu(x)$ şeklinde Bessel fonksiyonudur. Şimdi

$$y''+\left[\lambda+q(x)-\frac{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2}\right]y=0 \tag{5.1.5}$$

$$y(0)=0 \tag{5.1.6}$$

$$y'(1)+H_1y(1)=0 \tag{5.1.7}$$

probleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda (5.1.2) - (5.1.4) problemi ile (5.1.5) - (5.1.7) problemi arasında dönüşüm operatörünün

$$X\left[J_\nu(x,\lambda)\right]=\varphi(x,\lambda)=J_\nu(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)J_\nu(t,\lambda)dt$$

şeklinde olduğu aranılacaktır. Kabul edelim ki

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}$$

$$B=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda+q(x)-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}$$

olsun.Burada dönüşüm operatörünün ikinci şartını gözönüne alacağız.

$$\varphi'(x,\lambda)=J_\nu'(x,\lambda)+K(x,x)J_\nu(x,\lambda)+\int_0^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_\nu(t,\lambda)dt$$

$$\varphi''(x,\lambda)=J_\nu''(x,\lambda)+K'(x,x)J_\nu(x,\lambda)+K(x,x)J_\nu'(x,\lambda)+\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_\nu(t,\lambda)\right|_{t=x}$$
$$+\int_0^x\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}J_\nu(t,\lambda)dt$$

$$AXJ_\nu(x,\lambda)=A\varphi(x,\lambda)=\varphi''(x,\lambda)+\left[\lambda-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]\varphi(x,\lambda)$$

$$\varphi''(x,\lambda)=J_\nu''(x,\lambda)+K'(x,x)J_\nu(x,\lambda)+K(x,x)J_\nu'(x,\lambda)+\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_\nu(t,\lambda)\right|_{t=x}$$

$$+\int_0^x\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}J_\nu(t,\lambda)dt+\left[\lambda-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]J_\nu(x,\lambda)+$$

$$+\left[\lambda-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]\int_0^x K(x,t)J_\nu(t,\lambda)dt \qquad (5.1.8)$$

bulunur. Diğer taraftan ,

$$XJ_\nu(x,\lambda)B=XBJ_\nu(x,\lambda)=J_\nu''(x,\lambda)+\left[\lambda+q(x)-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]J_\nu(x,\lambda)+$$

$$+\int_0^x K(x,t)\left[J_\nu''(t,\lambda)+\left(\lambda+q(t)-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)J_\nu(t,\lambda)\right]dt$$

$$= J_\nu''(x,\lambda) + q(x)J_\nu(x,\lambda) + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)J_\nu(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)J_\nu''(t,\lambda)dt +$$

$$+ \int_0^x K(x,t)\left[\lambda + q(t) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right]J_\nu(t,\lambda)dt \qquad (5.1.9)$$

olur. A X $J_\nu(x,\lambda)$ = X B $J_\nu(x,\lambda)$ olduğundan , (5.1.8) ve (5.1.9) ifadeleri bu eşitlikte yazılırsa,

$$J''(x,\lambda) + K'(x,x)J_\nu(x,\lambda) + K(x,x)J_\nu'(x,\lambda) + \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_\nu(t,\lambda)\Big|_{t=x} +$$

$$+ \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}J_\nu(t,\lambda)dt + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)J_\nu(x,\lambda) + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)\int_0^x K(x,t)J_\nu(t,\lambda)dt$$

$$= J_\nu''(x,\lambda) + q(x)J_\nu(x,\lambda) + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)J_\nu(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)J_\nu''(t,\lambda)dt +$$

$$+ \left[\lambda + q(t) - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right]\int_0^x K(x,t)J_\nu(t,\lambda)dt$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\int_0^x K(x,t)J_\nu''(t,\lambda)dt = K(x,t)J_\nu'(t,\lambda)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_\nu'(t,\lambda)dt$$

$$= K(x,t)J_\nu'(t,\lambda)\Big|_0^x - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_\nu'(t,\lambda)\Big|_0^x + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}J_\nu(t,\lambda)dt$$

$$= K(x,t)J_\nu'(t,\lambda)\Big|_{t=x} - K(x,t)J_\nu'(t,\lambda)\Big|_{t=0} - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_\nu(t,\lambda)\Big|_{t=x} +$$

$$+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_\nu(t,\lambda)\Big|_{t=0} + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}J_\nu(t,\lambda)dt$$

olduğundan , elde edilen bu değer yukarıdaki denklemde yazılıp benzer terimlerin katsayılarının eşitliği gözönüne alınırsa ,

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)K(x,t) = \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} + \left[q(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right]K(x,t) \tag{5.1.10}$$

$$\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}\right]J_\nu(x,\lambda) + K'(x,x)J_\nu(x,\lambda) = q(x)J_\nu(x,\lambda)$$

olur. Sol taraftaki ifadenin ilk terimi bir tam diferensiyel olduğundan

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau \tag{5.1.11}$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Son olarak $J_\nu(0 , \lambda) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$K(x,t)J_\nu'(t,\lambda)\Big|_{t=0} = 0$$

olup, $J'_\nu(0 , \lambda) \neq 0$ olduğundan

$$K (x , 0) = 0 \tag{5.1.12}$$

elde edilir. Böylece (5. 1. 10) denklemi ; (5. 1. 11) ve (5. 1. 12) şartları ile birlikte

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)K(x,t) = \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} + \left[q(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right]K(x,t) \tag{5.1.13}$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau \tag{5.1.14}$$

$$K (x , 0) = 0 \tag{5.1.15}$$

şeklinde Hiperbolik tip kısmi türevli bir diferensiyel denklemi oluşturur. (5.1.15) - (5.1.15) problemini çözmek için

$$z=\frac{1}{4}(x+t)^2 \quad , \quad s=\frac{1}{4}(x-t)^2 \quad , \quad K(x,t)=(z-s)^{-\nu+\frac{1}{2}}U(z,s) \qquad (5.1.15)'$$

şeklindeki dönüşümleri gözönüne alalım. Ayrıca

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(x+t), \quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{2}(x+t), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{2}(x-t), \quad \frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{1}{2}(x-t), \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{(x+t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{(x+t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}$$

oldukları (5. 1. 13) denkleminde gözönüne alınırsa ,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{(x+t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}K-qK=$$

$$=\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{(x+t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}K$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\left(x^2-t^2\right)-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}K+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}K-qK=0 \qquad (5.1.16)$$

elde edilir. Eğer $-\nu+\frac{1}{2}=\alpha$ denirse ;

$$K(x,t)=(z-s)^{-\nu+\frac{1}{2}}U(z,s)=(z-s)^{\alpha}U(z,s)$$

$$\frac{\partial K}{\partial z}=\alpha(z-s)^{\alpha-1}U(z,s)+(z-s)^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z \partial s} = -\alpha(\alpha-1)(z-s)^{\alpha-2}U(z,s) + \alpha(z-s)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial s} - \alpha(z-s)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial z} + (z-s)^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s}$$

bulunur. Ayrıca ,

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(x+t)^2 \\ s &= \frac{1}{4}(x-t)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{z} + \sqrt{s} \\ t &= \sqrt{z} - \sqrt{s} \end{aligned}$$

$$x^2 - t^2 = 4\sqrt{z.s}$$

olduğundan , bu değerler (5.1.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-4\sqrt{zs}\alpha(\alpha-1)(z-s)^{\alpha-2}U(z,s) + 4\sqrt{zs}\alpha(z-s)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial s} - 4\sqrt{zs}\alpha(z-s)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial z} +$$

$$4\sqrt{zs}\alpha(z-s)^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{\left(\sqrt{z}+\sqrt{s}\right)^2}(z-s)^{\alpha}U(z,s) + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{s}\right)^2}(z-s)^{\alpha}U(z,s) -$$

$$-q\left(\sqrt{z}-\sqrt{s}\right)(z-s)^{\alpha}U(z,s) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $4\sqrt{zs}(z-s)^{\alpha}$ ile bölünüp, gerekli işlemler yapılırsa ,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{q\left(\sqrt{z}-\sqrt{s}\right)U}{4\sqrt{zs}}$$

şeklindeki Euler - Poisson - Darbox denklemielde edilir. Şimdi de bu denklem için yeni sınır şartlarını elde etmeye çalışalım:

$$t = x \Rightarrow z = \frac{1}{4}(x+t)^2 = \frac{1}{4}(x+x)^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{z}$$

ve

$$s = \frac{1}{4}(x-t)^2 = \frac{1}{4}(x-x)^2 = 0$$

olur. Böylece

$$K(x,t) = (z-s)^{-\nu+\frac{1}{2}}u(z,s) \Rightarrow K(x,x) = (z-0)^{-\nu+\frac{1}{2}}u(z,0) \Rightarrow K(x,x) = z^{-\nu+\frac{1}{2}}u(z,0)$$

$$\frac{dK(x,x)}{dx} = \left(-\nu+\frac{1}{2}\right)z^{-\nu+\frac{1}{2}-1}U(z,0)\frac{\partial z}{\partial x} + z^{-\nu+\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= 2\sqrt{z}\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)z^{-\nu+\frac{1}{2}}U(z,0) + 2xz^{-\nu+\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial z}$$

elde edilir. Diğer taraftan ,

$$\frac{dK(x,x)}{dx} = \frac{1}{2}q(x)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial U}{\partial z}2\sqrt{z}\,z^{-\nu+\frac{1}{2}} + 2\sqrt{z}\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)z^{-\nu-\frac{1}{2}}U(z,0) = \frac{1}{2}q(\sqrt{z})$$

olup, denklemin iki tarafı $2\sqrt{z}\,z^{-\nu+\frac{1}{2}}$ ile bölünürse,

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{z}U = \frac{1}{4}q(\sqrt{z})z^{\nu-1}$$

şeklinde bir şart elde edilir. Eğer t=0 ise,

$$z = \frac{1}{4}(x+t)^2 = \frac{x^2}{4} \qquad ve \qquad s = \frac{1}{4}(x-t)^2 = \frac{x^2}{4}$$

denklemlerinden $z = s$ karekteristiği elde edilir. Bu durumda denklemin bazı katsayıları tekilliğe sahip olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere $z = s+\varepsilon$ karekteristiğini gözönüne alacağız. Böylece

$$K(x,t) = (z-s)^{-\nu+\frac{1}{2}}U(z,s)$$

olduğundan ,

$$K(x,0) = 0 = (s+\varepsilon-s)^{-\nu+\frac{1}{2}}U(z,z-\varepsilon)$$

olup, $\varepsilon \neq 0$ olduğundan $U(z, z-\varepsilon) = 0$ elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{qU}{4\sqrt{zs}} \tag{5.1.17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{z}U = \frac{1}{4}q(\sqrt{z})z^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.1.18}$$

$$U(z, z-\varepsilon) = 0 \tag{5.1.19}$$

şeklinde bir Euler - Poisson -Darboux problemi elde edilir.

5. 2. Riemann Metodu

$$L[U] = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{qU}{4\sqrt{zs}}$$

$$L^*[V] = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} + \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{qV}{4\sqrt{zs}}$$

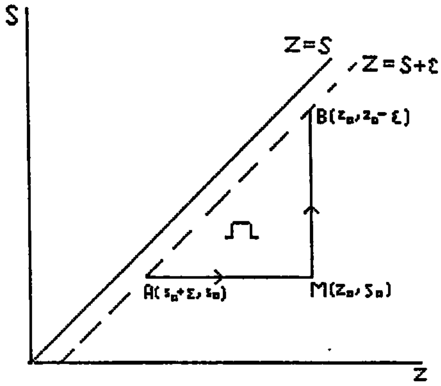
olsun. Burada V eşlenik denklemin çözümüdür. Eğer ilk denklemi V, ikincisini U ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak,

$$VL[U] - UL^*[V] = V\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial s} - \frac{\alpha V}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha V}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{4\sqrt{zs}}UVq - U\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} - \frac{\alpha U}{z-s}\frac{\partial V}{\partial z} +$$

$$+\frac{\alpha U}{z-s}\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{4\sqrt{zs}}UVq$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[V\frac{\partial U}{\partial s} - U\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{2\alpha}{z-s}UV\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left[V\frac{\partial U}{\partial z} - U\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2\alpha}{z-s}UV\right]$$

bulunur.



Şekil 1.

Ω Şekil I . deki gibi AMBA eğrisinin sınırladığı bölge olmak üzere son eşitlikte Ω üzerinden iki katlı integral alınıp Green formülünden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}\{VL[U]-UL^{*}[V]\}dzds &= \iint_{\Omega}\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dzds+\\ &\quad +\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dzds\\ &= \int_{AMBA}-\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dz+\\ &\quad +\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]ds \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

denklemi elde edilir. Şekil I. de görüldüğü gibi AM doğrusu üzerinde s ve MB üzerinde z sabit olduğundan,

$$\int_{AM}\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]ds=0$$

$$\int_{MB}-\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dz=0$$

olur. Ayrıca

$$\int\limits_{AM} -\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dz=\int\limits_{AM} -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(UV)-2U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]dz$$

$$=-\frac{1}{2}UV|_{AM}+\int\limits_{AM} U\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}\right]dz$$

$$=-\frac{1}{2}UV(M)+\frac{1}{2}UV(A)+\int\limits_{AM} U\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}\right]dz$$

$$\int\limits_{MB}\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]ds=\int\limits_{MB}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial s}(UV)-2U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha}{z-s}UV\right]ds$$

$$=\frac{1}{2}UV|_{MB}-\int\limits_{MB} U\left[\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\alpha V}{z-s}\right]ds$$

$$=\frac{1}{2}UV(B)-\frac{1}{2}UV(M)-\int\limits_{MB} U\left[\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\alpha V}{z-s}\right]ds$$

olur. Elde edilen bu değerler (5. 2. 1) de yerlerine yazılırsa,

$$\iint\limits_{\Omega}\left\{VL[U]-UL^*[V]\right\}dzds=\int\limits_{BA} -\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha UV}{z-s}\right]dz+$$

$$+\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha UV}{z-s}\right]ds-\frac{1}{2}UV(M)+\frac{1}{2}UV(A)+$$

$$+\int\limits_{AM} U\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}\right]dz+\frac{1}{2}UV(B)-\frac{1}{2}UV(M)-$$

$$-\int\limits_{MB} U\left[\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\alpha V}{z-s}\right]ds$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki

$\int_{AM} U\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}\right]dz$ ve $\int_{MB} U\left[\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\partial V}{z-s}\right]ds$ terimleri bilinmiyor. Ayrıca AM ve MB üzerinde U çözümünün değeri bilinmediğinden , AM doğrusu üzerinde $\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}=0$ ve MB üzerinde $\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\alpha V}{z-s}=0$ olarak alabiliriz. Böylece

$$L^*[v]=0 \tag{5.2.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\alpha V}{z-s}=0\ ,\quad \text{MB üzerinde} \tag{5.2.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\alpha V}{z-s}=0\ ,\quad \text{AM üzerinde} \tag{5.2.4}$$

$$V=1 \qquad \text{M noktasında} \tag{5.2.5}$$

şartlarını sağlayan bir V fonksiyonu bulmalıyız. Bu şekildeki fonksiyona Riemann fonksiyonu denir.

$$\sigma=\frac{(s-s_0)(z-s_0)}{(s-z_0)(z-s_0)}$$

ve

$$F(\alpha,\alpha,1,\sigma)=1+\frac{\alpha.\alpha}{1!.1}\sigma+\cdots$$

şeklinde bir hipergeometrik bir seri olmak üzere , eğer V fonksiyonu

$$V(z,s,z_0,s_0)=\frac{(s-z)^{2\alpha}}{\left[(s_0-z)(s-z_0)\right]^{\alpha}}F(\alpha,\alpha,1,\sigma)$$

olarak seçilirse, bu şekildeki çözüm (5.2.2) denklemini ve (5.2.3)- (5.2.5) şartlarını sağlar. Böylece,

$$U(M)=\frac{UV(A)+UV(B)}{2}+\int_{AB}\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha UV}{z-s}\right]ds-$$

$$\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha UV}{z-s}\right]dz$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Eğer

$$P=\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial s}-U\frac{\partial V}{\partial s}-\frac{2\alpha UV}{z-s}\right] \quad \text{ve } Q=\frac{1}{2}\left[V\frac{\partial U}{\partial z}-U\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{2\alpha UV}{z-s}\right]$$

olarak alınırsa,

$$U(M)=\frac{UV(A)+UV(B)}{2}+\int_{s_0+\varepsilon}^{z_0}(P-Q)dz \qquad (5.2.6)$$

olur. Bu şekildeki çözüm (5.1.18) şartı ile gözönüne alınırsa bir Cauchy probleminin çözümü olur. (5.2.6) değeri (5.1.15)′ de yerine yazılırsa , Dönüşüm operatöründe bilinmeyen çekirdek fonksiyonunu elde edilmiş olup, dolayısıyla (5.1.5) - (5.1.7) probleminin çözümü elde edilir. Bu da aranan çözümdür.

KAYNAKLAR

AKHIEZER, N. I. and GLAZMAN I. M. , 1961. **Theory of Linear operators in Hilbert space** , English Translations 2 vols. New York.

AYDIN , M. , 1990. **Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları** , İzmir.

CHURCHILL , R. V. , 1963. **Fourier Series and Boundary value Problems.** 2d . ed. Mc Graw - Hill.

CHURCHILL , R. V. and BROWN , J. W., 1976. **Complex Variables and Applications.** Michigan.

COURANT, R. and HİLBERT , D. , 1953. **Methods of Mathematical Physics.** New York

KOŞLAKOV, N.S., GLINER, E.B., SMIRNOV, M.M., 1962. **Osnovniye Diferensiyelniye Uravneniye Matematiçeskov Fiziki.** Moskov.

KREYSZİG, E., 1978 . **Introductory Functional Analysis with Applications.** New

LEVITAN , B.M., 1964. **Generalized Translation Operators and some of ıts Applications.** Jerusalem.

LEVITAN, B.M., GASIMOV M.G., 1964. ''Determination of a Differential Equations by two its Spectra , **Russian Math. Surveys**, 19, 1- 63.

LEVITAN, B.M., SARGSYAN, I.S. 1970. **Introduction to Spectral Theory,** Moskov, Nauka.

MACKIE, A.G., 1965. **Boundary Value Problems.** Edinburgh and London,

MARCHENKO, V.A., 1977. **Sturm - Liouville Operators and Their Applications,** Kiev.

NAIMARK, M.A., 1968. **Linear Differential operators,** Frederik Ungar Publishing Co. Inc. , London.

New York.

PANAKHOV , E. S. , 1985. Cauchy and Goursat Problem for the Second Order Hyperpolic Equatins with Discontinues Cofficients. **Izv Azerb.** V 3. No: 6

PANAKHOV , E. S. , 1980. The Definition of differential Operators with Pecularity in zero on two Spectrum. **DEP. VINITI** No: 4407 - 809/ (1980) pp. 1-16.

TITCHMARS, E.C., 1946. **Eigenfunction Expansions Assosicated with Second - Order Differential Equations.**

WATSON , G. N. 1944. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions.** 2d. ed. Cambridge University Press. London.

York .