

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CENNET GÜLHAN

DENİZLİ, OCAK-2023

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK**



**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ
ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CENNET GÜLHAN

DENİZLİ, OCAK-2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

CENNET GÜLHAN

ÖZET

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
CENNET GÜLHAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN
DENİZLİ

Bu tez yedi ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli analizin gelişimine değinilmiş ve literatürde kesirli diferansiyel denklemlere uygulanan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, bazı özel fonksiyonlar verilmiştir. Üçüncü bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve kesirli integrallere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde rezidual kuvvet serisi metodu tanımlanmıştır ve rezidual kuvvet serisi metodu kesirli kısmi diferansiyel denklemlere ve denklem sistemlerine uygulanmıştır. Beşinci bölümde sınırlı kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi verilmiştir ve kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Altıncı bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi verilmiş lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmış ve yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Aynı zamanda uyumlu kesirli lineer olmayan Lane-Emden diferansiyel denkleminin Adomian polinomları cinsinden seri çözümleri elde edilmiştir. Yedinci bölümde lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem için Taylor serisi açılımına uygun seri çözüm yöntemi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel denklem, Kesirli türev, Kuvvet serisi, Adomian ayrıştırma yöntemi, Rezidual kuvvet serisi yöntemi.

ABSTRACT

SERIES SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MASTER'S THESIS

CENNET GÜLHAN

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN

DENİZLİ

This thesis consists of seven main chapters. In the first chapter, the development of fractional analysis is mentioned and information is given about the methods applied to fractional differential equations in the literature. In the second chapter, some special functions are given. In the third chapter, fractional derivative and fractional integrals are given for solutions of fractional differential equations. In the fourth chapter, the residual power series method is defined and the residual power series method is applied to fractional partial differential equations and systems of equations. In the fifth chapter, restricted fractional differential transformation method is given and applied to fractional differential equations. In the sixth chapter, Adomian decomposition method is given, applied to nonlinear fractional differential equations and approximate solutions are obtained. At the same time, serial solutions of the conformable fractional nonlinear Lane-Emden differential equation in terms of Adomian polynomials are obtained. In the seventh chapter, the series solution method suitable for the Taylor series expansion is given for the nonlinear fractional differential equation.

KEYWORDS: Differential equation, Fractional derivative, Power series, Adomian decomposition method, Residual power series method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL ve KISALTMALAR LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1.GİRİŞ	1
2. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR	5
2.1 Gamma Fonksiyonu	5
2.2 Beta Fonksiyonu	6
2.3 Taban Fonksiyonu	7
2.4 Tavan Fonksiyonu	7
3. KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLER.....	9
3.1 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali ve Türevi	10
3.1.1 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali	10
3.1.2 Riemann–Liouville Kesirli Türevi	10
3.2 Caputo Türev	11
3.3 Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral	13
3.3.1 Uyumlu Kesirli Türev	13
3.3.2 Uyumlu Kesirli İntegral	14
4. REZİDUAL KUVVET SERİSİ METODU	18
4.1 Rezidual Kuvvet Serisi Metodu Algoritması.....	19
4.2 Rezidual Kuvvet Serisi Metodunun Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlere ve Denklem Sistemlerine Uygulanması	20
5. SINIRLI KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	63
5.1 Yöntemin Algoritması	63
5.2 Sınırlı Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	73
6. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ADOMİAN POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ	79
6.1 Adomian Ayrıştırma Yöntemi	79
6.1.1 Adomian Ayrıştırma Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	82
6.2 Uyumlu Kesirli Lineer Olmayan Lane-Emden Denkleminin (CNL-EFE) Adomian Polinomları Cinsinden Çözümü	89
7. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ETKİN BİR SERİ ÇÖZÜM YÖNTEMİ.....	102
7.1 Yöntemin Algoritması	102
7.2 Uygulamalar	104
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	120
9. KAYNAKLAR	122
10. ÖZGEÇMİŞ.....	128

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: (4.42)'de elde edilen $u_5(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği.....	28
Şekil 4.2: (4.13)'deki $u_e(x, t)$ 'nin üç boyutlu grafiği.	29
Şekil 4.3: (4.67)'de elde edilen $u_5(x, t)$ 'in $\alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği.	35
Şekil 4.4: (4.45)'deki $u_e(x, t)$ 'nin üç boyutlu grafiği.	36
Şekil 4.5: (4.96)'da elde edilen farklı α değerleri için $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.	41
Şekil 4.6: Örnek 4.2.3'de n 'in farklı değerleri için $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiği.....	42
Şekil 4.7: (4.96)'da elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün üç boyutlu grafiği.	42
Şekil 4.8: (4.120)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün farklı α değerleri için iki boyutlu grafiği.....	48
Şekil 4.9: (4.120)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün farklı α değerleri için üç boyutlu grafiği.	48
Şekil 4.10: Örnek 4.2.5'de $\alpha = 1, k = 150$ için $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.....	54
Şekil 4.11: Örnek 4.2.5'de $\alpha = 1, k = 150$ için $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.	55
Şekil 4.12: $\alpha = 1, k = 7$ için $u_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $u_e(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.....	62
Şekil 4.13: Örnek 4.2.6'da $\alpha = 1, k = 7$ için $v_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $v_e(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.	62
Şekil 6.1: Denklem (6.52)'nin farklı α değerleri için $y(x)$ çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	92
Şekil 6.2: Denklem (6.55)'in farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	94
Şekil 6.3: Denklem (6.63)'ün farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	96
Şekil 6.4: Denklem (6.70)'in farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	99
Şekil 6.5: Denklem (6.77)'nin farklı α değerleri için $y_5(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	101
Şekil 7.1: Denklem (7.61)'in farklı α değerleri için $u_{10}(t)$ yaklaşık çözümü ve $u_e(t)$ tam çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.	114
Şekil 7.2: Denklem (7.86)'nın $x = 10$ için $u_6(x, t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.....	119

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.	6
Tablo 2.2: Taban ve tavan fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.	8
Tablo 4.1: (4.42)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.13)'deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.	26
Tablo 4.2: (4.38)'de elde edilen $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.13)'deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.	27
Tablo 4.3: (4.63)'de elde edilen $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.45)'deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.	34
Tablo 4.4: Örnek 4.2.5'de $\alpha = 1, k = 150$ için $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.123)'deki $u_e(t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.	55
Tablo 4.5: Örnek 4.2.5'de $\alpha = 1, k = 150$ için $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.123)'deki $v_e(t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.	56
Tablo 6.1: Denklem (6.18)'in farklı n değerleri için Adomian yaklaşık çözümleri.	85
Tablo 6.2: Denklem (6.18)'in farklı n değerleri için yaklaşık kuvvet serisi çözümleri.	87

SEMBOL ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\Gamma(z)$	:	Gamma fonksiyonu
$\beta(z, w)$	:	Beta Fonksiyonu
$[x]$	:	Taban Fonksiyonu
$\lceil x \rceil$	:	Tavan Fonksiyonu
$J_a^\alpha f(x)$	:	Riemann–Liouville Kesirli İntegral
$D_a^\alpha f(x)$	:	Riemann–Liouville Kesirli Türev
${}_a^CD_x^\alpha f(x)$	:	Caputo Türev
$D_\alpha f(t)$	:	Uyumlu Kesirli Türev
$I_\alpha f(t)$	:	Uyumlu Kesirli İntegral
RPSM	:	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu
RPS	:	Rezidual Kuvvet Serisi
FDTM	:	Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
RFDTM	:	Sınırlı Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
ADM	:	Adomian Ayrıştırma Yöntemi
CNL-EFE	:	Uyumlu Kesirli Lineer Olmayan Lane-Emden Denklemi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması sürecince bana her zaman yol gösteren, sabır ve desteğini benden esirgemeyen, değerli bilgi, düşünce ve önerilerini benimle paylaşan, beraber çalışmaktan gurur duyduğum çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN' a, tüm hayatım boyunca yanımda olan, beni her zaman destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.



1.GİRİŞ

Kesirli analiz, 1695 yılında Leibniz ve L' Hospital arasındaki mektuplaşmada L'Hospital' in " x in $\frac{1}{2}$ türevi ne ifade eder?" sorusuyla ortaya çıkmıştır. Son otuz yılda, kesirli analiz, bilim ve mühendisliğin farklı alanlarında birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Riemann, Liouville, Caputo, Grünwald Leitnikov kesirli analize katkısı olan matematikçilerden bazılarıdır. Bazı durumlarda, kesirli analiz kullanarak modellemenin tamsayı analizinden daha gerçekçi olduğu ortaya çıkmıştır. Bunun nedeni birçok fiziksel olgunun davranışının yalnız anlık duruma değil, aynı zamanda önceki zaman tarihine de bağlı olmasıdır. Sembolik hesaplamalar yapan bilgisayar programları yardımıyla da kesirli hesap, matematikçiler tarafından daha fazla kullanılmış, birçok matematikçi konu üzerinde araştırmalar yapmış ve bazı kesirli mertebeden türev tanımlarını vermişlerdir. Kesirli mertebeden türev ve integral Leibnitz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Kesirli diferansiyel denklemlerin birçoğunun analitik çözümü bulunamadığından yaklaşık olarak çözümlerinin bulunması için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Adomian ayrıştırma yöntemi (ADM), Laplace analiz yöntemi (LAM), Homotopi analiz yöntemi (HAM), Homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM), diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM), Rezidual kuvvet serisi yöntemi (RPSM) bu yöntemler arasındadır. Bu yöntemlerin bazıları tam sonuca yakın yaklaşık seri formda çözümler elde ederken bazıları ise karmaşık olan denklem ve denklem sistemini dönüşüm kullanarak daha basit denklem ve denklem sistemine indirgeyerek çözümler elde etmektedir.

Adomian ayrıştırma yöntemi ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır. Saha Ray ve Bera (2005), lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemini uygulamışlardır. Düz (2017), Adomian ayrıştırma yöntemi ile kompleks denklemlerin çözümünü elde etmiştir. Gündoğdu ve Gözükızıl (2017), Adomian ayrışma metodu, değiştirilmiş ayrışma metodu ve laplace ayrışma metodunu kullanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde

etmişlerdir. Özpınar (2018), Adomian ayrıştırma yöntemi ile kesirli mertebe fark denklemlerinin çözümünü elde etmiştir. Tabak (2018), Euler yöntemi, Homotopy analiz yöntemi ve Adomian ayrıştırma yöntemini uygulayarak bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Düz ve Köse (2021), Fourier dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrıştırma yöntemi ile Riccati denklemlerin çözümünü elde etmişlerdir. İnan ve Kaya (2021), Burgers benzeri denklemin bazı seyahat eden dalga çözümlerini bulmak için Bäcklund Dönüşümü, Benzerlik indirgeme ve Adomian ayrıştırma yöntemlerini denkleme uygulamışlardır. Aljahdaly ve Al Zobidi (2022), derin sularda veya okyanusta ortaya çıkan Schrödinger denklemini çözmek için Adomian ayrıştırma yöntemini (ADM), Padé yaklaşımı ile geliştirmişlerdir.

Rezidual kuvvet serisi yöntemi ilk olarak Omar Abu Arqub tarafından tasarlanmıştır. Alquran (2014), residual kuvvet serisi yöntemi ile kesirli foam drainage denkleminin analitik çözümlerini elde etmiştir. Zhang ve diğ. (2016), zaman kesirli Schrödinger denklemleri için residual kuvvet serisi yöntemini uygulamışlardır. Jaradat ve diğ. (2016), zaman kesirli Drinfeld-Sokolov-Wilson sisteminin residual kuvvet serisi yöntemini kullanarak sistemin çözümünü elde etmişlerdir. Körpınar (2017), kesirli Klein-Gordon denklemini çözmek için residual kuvvet serisi yöntemini uygulamıştır. Şenol ve Ata (2018), zaman kesirli KdV denklemlerinin residual kuvvet serisi yöntemi ile yaklaşık çözümünü elde etmişlerdir. Durur ve diğ. (2019), zaman-kesirli Kadomtsev-Petviashvili diferansiyel denklemini çözmek için residual kuvvet serisi yöntemini kullanılmışlardır. Freihet ve diğ. (2019), residual fonksiyonları kullanarak kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini kesirli kuvvet serisi ile elde etmişlerdir. Körpınar ve diğ. (2020), residual kuvvet serisi metodunu kullanarak kesirli kanser tümör modellerinin yeni seri çözümlerini bulmuşlardır. Kaya (2021), Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota (DSSH) denkleminin residual kuvvet serisi yöntemi yardımıyla yaklaşık çözümünü elde etmiştir.

Literatürde en sık karşılaşılan kesirli türevler Caputo, Riemann-Liouville ve uyumlu kesirli türevlerdir. Riemann-Liouville kesirli türeviyle ilgili yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir: Saha Ray ve Bera (2005), lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemin Adomian ayrıştırma yöntemiyle yaklaşık çözümünü vermişlerdir. Abbasbandy (2007), lineer olmayan denklemin Riemann-Liouville kesirli türevi ile He'nin varyasyonel yineleme yöntemiyle yaklaşık çözümünü vermiştir. Uddin ve diğ.

(2021), Riemann-Liouville türevli kesirli lineer olmayan evölasyon denklemi için yeni çözümler elde etmişlerdir.

Caputo kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri de araştırmacılar tarafından yoğun ilgi görmüştür. Kurulay ve Bayram (2010), Caputo türev içeren lineer kısmi diferansiyel denklemlerin seri çözümleri üzerine çalışmışlardır. El-Ajou ve diğ. (2013), klasik kuvvet serisi ile ilgili olan bazı teoremleri kesirli kuvvet serisine genelleştirmişlerdir. Al-Refai ve diğ. (2014), Caputo türevli lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin seri çözümlerini araştırmışlardır. Xu ve diğ. (2016), Al-Srihin ve Al-Refai (2017), kuvvet seri çözümlerini kesirli kısmi diferansiyel denklemler ve çok terimli diferansiyel denklem sistemleri için de elde etmişlerdir. Alquran ve diğ. (2018), Caputo-kesirli Volterra integro diferansiyel denkleminin bir sınıfını analitik olarak çözmüşlerdir. Şenol ve Ata (2018), zaman kesirli KdV denkleminin kuvvet serisi çözümleri elde etmişlerdir. Freihet ve diğ. (2019), rezidual fonksiyonları kullanarak kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini kesirli kuvvet serisi ile elde etmişlerdir. Körpınar ve diğ. (2020), rezidual kuvvet serisi metodu kullanılarak kesirli kanser tümör modellerinin yeni seri çözümleri bulmuşlardır. Angstmann ve Henry (2020), Caputo ve Riemann-Liouville türevli, değişken katsayılı, lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini kesirli kuvvet serisi formunda elde etmişlerdir. Özpınar (2020), kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin ayırık homotopi perturbasyon metodu ile çözümünü elde etmiştir.

Khalil ve diğ. (2014), daha basit ve anlaşılır olan uyumlu kesirli türevin tanımını yapmış ve temel özelliklerini vermişlerdir. Ardından Abdeljawad (2015), uyumlu kesirli türevin tanımını geliştirmiş ve bazı özelliklerini vermiştir. Ünal ve Gökdoğan (2016), $x = 0$ noktası civarında uyumlu kesirli mertebeden birinci ve ikinci tip Chebyshev diferansiyel denklemlerin kesirsel seri çözümlerini vermişlerdir ve bu çözümlerden yararlanarak birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomlarını ifade etmişlerdir. Çetinkaya (2018), uyumlu kesirli kısmi türevle ifade edilen bir dalga denklemine, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli sınır değer probleminin özdeğer ve öz fonksiyon özelliklerini incelemiştir. Akbulut ve Kaplan (2018), $(2 + 1)$ –boyutlu zaman-kesirli Zoomeron denkleminin ve uyumlu zaman-kesirli üçüncü mertebeden KdV denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için yardımcı denklem yöntemini uygulamışlardır. Al-Zhour ve diğ. (2019), uyumlu

kesirli türevli Laguerre ve Lane-Emden diferansiyel denklemlerinin seri çözümlerini incelemişlerdir. Yılmaz ve Taşbozan (2019), uyumlu kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kesirli mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky ve Benjamin-Ono denklemlerinin analitik çözümlerini yardımcı denklem yöntemi ile elde etmişlerdir. Shat ve diğ. (2019), uyumlu kesirli Laguerre denklemini ele alarak, kesirli seri çözümü ve Frobenius yöntemini kullanarak iki lineer bağımsız çözüm elde etmişlerdir.

Bu tezde Caputo, Rieman-Liouville ve uyumlu kesirli türev içeren kesirli diferansiyel denklemlerin seri formda çözümleri incelenecektir. İncelenen yöntemler farklı kesirli diferansiyel denklemlere uygulanacak ve bu denklemlerin çözümleri elde edilecektir. Ayrıca MATLAB bilgisayar programından da yararlanılacaktır.



2. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

2.1 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu, kesirli türev ve integral hesaplamalarında kullanılır. Bu nedenle kesirli diferansiyel denklem çözümünde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 2.1.1: Gamma fonksiyonunun Gauss tarafından yapılan limit tanımı,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}, \quad z \neq 0, \quad z \notin \mathbb{Z}^- \quad (2.1)$$

şeklindedir, burada z 'nin Denklem (2.1) 'deki değerleri hariç tüm değerleri için gamma fonksiyonu hesaplanabilir (Weilbeer 2005).

Tanım 2.1.2: Gamma fonksiyonunun Euler tarafından yapılan integral dönüşümü tanımı,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir (Podlubny 1999).

Tanım 2.1.3: Gamma fonksiyonun bazı özellikleri,

1) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.3)$$

2) $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad (2.4)$$

$$3) \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad (2.5)$$

$$4) \Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad (2.6)$$

5) Euler'in tanımladığı gamma fonksiyonu asla sıfır değildir.

şeklindedir (Ross 1977, Podlubny 1999). Gamma fonksiyonu ile ilgili bazı sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1: Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma(5/2)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(7/2)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
$\Gamma(\infty)$	∞

2.2 Beta Fonksiyonu

Tanım 2.2.1: Euler'in tanımladığı gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan özel fonksiyonlardan biri beta fonksiyonudur.

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(w) > 0 \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır (Podlubny 1998). Beta fonksiyonunun bazı özellikleri,

$$1) \beta(z, w) = \beta(w, z) \quad (2.8)$$

$$2) \beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.9)$$

$$3) \beta(z, w) = \beta(z + 1, w) + \beta(z, w + 1) \quad (2.10)$$

olarak verilmiştir (Podlubny 1998).

2.3 Taban Fonksiyonu

Tanım 2.3.1: Matematik ve bilgisayar bilimlerinde, taban fonksiyonu, girdi olarak x gerçekte sayısını alan ve çıktı olarak $[x]$ olarak gösterilen, x 'ten küçük veya x 'e eşit en büyük tamsayıyı veren fonksiyondur (Graham ve diğ. 1994). $x, y \in R$ ve $m \in Z$ için

$$[x] = \max\{m \in Z \mid m \leq x\} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır (Graham ve diğ. 1994). Örneğin;

$$[2.4] = 2, \quad [-2.3] = -3,$$

dir.

2.4 Tavan Fonksiyonu

Tanım 2.4.1: Matematik ve bilgisayar bilimlerinde, tavan fonksiyonu, girdi olarak x gerçekte sayısını alan ve çıktı olarak $[x]$ olarak gösterilen, x 'ten büyük veya x 'e eşit en küçük tamsayıyı veren fonksiyondur (Graham ve diğ. 1994). $x, y \in R$ ve $n \in Z$ için

$$[x] = \min\{n \in Z \mid n \geq x\} \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır (Graham ve diğ. 1994). Örneğin;

$$[2.4] = 3, \quad [-2.3] = -2,$$

dir.

Taban ve tavan fonksiyonu ile ilgili bazı sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.2: Taban ve tavan fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.

x	$[x]$	$\lceil x \rceil$
2	2	2
2.4	2	3
2.9	2	3
-2.7	-3	-2
-2	-2	-2

3. KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLER

Kesirli türev kavramı 1695 yılında Leibniz ve L' Hospital arasındaki mektuplaşmada L'Hospital' in “ x in $\frac{1}{2}$ türevi ne ifade eder?” sorusuyla ortaya çıkmıştır. Bu soruya 1738 yılında L. Euler tarafından cevap verilmiştir. x^k fonksiyonunun keyfi basamaktan türevleri ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx^{k-1} \\ f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak bulunur. Bu işlem tekrarlandığında,

$$D^\alpha f(x) = \frac{k!}{(k-\alpha)!} x^{k-\alpha} \tag{3.2}$$

elde edilir ve gamma fonksiyonunun özelliği kullanıldığında, $k \geq 0$ için

$$D^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha} \tag{3.3}$$

elde edilir. $f(x) = x^k$, $k = 1$ ve $\alpha = 1/2$ için

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{3.4}$$

bulunur (Podlubny 2013).

3.1 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali ve Türevi

3.1.1 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali

Tanım 3.1.1.1: α mertebeden Riemann –Liouville kesirli integral

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0 \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlıdır. $\alpha = 0$ için $J_a^0 f(x) = f(x)$ şeklinde ifade edilir (Ahmad 2015). Bu tezde $a = 0$ için $J_0^\alpha f(x) = J^\alpha f(x)$ olarak alınmıştır. f fonksiyonu $[0, \infty)$ için sürekli olsun. $\alpha, \theta > 0$ ve $\mu > -1$ olacak şekilde Riemann –Liouville integral operatörünün bazı özellikleri

$$1) J_a^\alpha J_a^\theta f(x) = J_a^\theta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\theta} f(x), \quad (3.6)$$

$$2) J_a^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = J_a^\alpha c_1 f_1(x) + J_a^\alpha c_2 f_2(x), \quad (3.7)$$

$$3) J_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\alpha+\mu}, \quad (3.8)$$

$$4) J_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha \quad (3.9)$$

şeklinde verilmiştir (Diethelm 2010, Das 2011).

3.1.2 Riemann–Liouville Kesirli Türevi

Tanım 3.1.2.1: $\alpha > 0, m-1 < \alpha < m$ için Riemann –Liouville kesirli türev

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir (Diethelm 2010, Ahmad 2015). Riemann –Liouville kesirli türevin özellikleri

$$1) D_a^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = D_a^\alpha c_1 f_1(x) + D_a^\alpha c_2 f_2(x), \quad (3.11)$$

$$2) J_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x), \quad (3.12)$$

şeklinde verilmiştir (Oldham ve Spanier 1974).

3.2 Caputo Türev

Tanım 3.2.1: $n - 1 < \alpha < n, n \in N$ için Caputo türev

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) dt \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır (Caputo 1967). Caputo türevine ait özellikler

$$1) \quad ({}_a^C D_x^\alpha J_a^\alpha) f(x) = f(x), \quad (3.14)$$

$$2) \quad (J_a^\alpha {}_a^C D_x^\alpha) f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a)^{(k)} \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad (3.15)$$

$$3) \quad {}_a^C D_x^\alpha (c_1 f(x) + c_2 f(x)) = {}_a^C D_x^\alpha c_1 f(x) + {}_a^C D_x^\alpha c_2 f(x), \quad (3.16)$$

şeklinde verilmiştir (Caputo 1967).

Teorem 3.2.1: $n - 1 < \alpha < n, n \in N, c, \beta, k \in R$ için Caputo türev ile ilgili bazı temel özellikler

$$1) \quad {}_a^C D_x^\alpha c = 0, \quad (3.17)$$

$$2) \quad {}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x - a)^{\beta-\alpha}, & \beta \in N \text{ ve } \beta \geq n \text{ ya da } \beta \notin N \text{ ve } \beta > n - 1 \\ 0, & \beta \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklinde verilmiştir (Caputo 1969, Podlubny 1994).

İspat:

$$1) \quad {}_a^C D_x^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} D^n k \, dt$$

$n \in N$ ve k bir reel sayı olduğundan $D^n k = 0$ olur. Buradan,

$${}_a^C D_x^\alpha c = 0$$

olduğu görülür.

$$2) \quad {}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} D^n (t - a)^\beta \, dt,$$

$$D^n (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta-n},$$

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n} dt,$$

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta =$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{t-a}{x-a}\right)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt,$$

$$t-a = (x-a)u$$

$$dt = (x-a)du$$

$$t: a \rightarrow x$$

$$u: 0 \rightarrow 1$$

eşitliği kullanıldığında,

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta =$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (x-a)^{n-\alpha-1} (1-u)^{n-\alpha-1} (u(x-a))^{\beta-n} (x-a) du,$$

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta =$$

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (x-a)^{n-\alpha-1} (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta-n} (x-a)^{\beta-n} (x-a) du,$$

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (x-a)^{\beta-\alpha} (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta-n} du,$$

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta-n} du$$

elde edilir.

$$\int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta-n} du = \beta(n-\alpha, \beta-n+1)$$

olduğundan

$${}_a^c D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \beta(n-\alpha, \beta-n+1)$$

elde edilir.

$$\beta(n - \alpha, \beta - n + 1) = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}$$

denkleminde

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}$$

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}$$

olduğu görülür.

$\beta \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ için $D^n(t - a)^\beta = 0$ olduğundan,

$\beta \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ için ${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = 0$ olduğu görülür (Caputo 1969, Podlubny 1994).

3.3 Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral

3.3.1 Uyumlu Kesirli Türev

Tanım 3.3.1.1: $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $\forall t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için uyumlu kesirli türev

$$D_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (3.19)$$

olarak tanımlanır (Khalil ve diğ. 2014). f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t)$ limiti varsa,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t) \quad (3.20)$$

olur (Khalil ve diğ. 2014). f 'in α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için $D_\alpha f(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ 'de yazılabilir.

Teorem 3.3.1.1: $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $t_0 > 0$ da $\alpha \in (0,1)$ için α diferensiyellenebilirse, f fonksiyonu t_0 noktasında sürekli (Khalil ve diğ. 2014).

$$\text{İspat: } f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon,$$

$$h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}, \varepsilon = h t_0^{-1+\alpha} \text{ ve } D_\alpha f(t_0) = f^{(\alpha)}(t_0) \text{ olarak alındığında}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğunu görülür (Khalil ve diğ. 2014).

Tanım 3.3.1.2: $\alpha \in (0,1]$ ve f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında türevlenebilir olsun. Uyumlu kesirli türevin bazı özellikleri

$$1) \forall a, b \in R \text{ için } D_\alpha (af + bg) = aD_\alpha (f) + bD_\alpha (g), \quad (3.21)$$

$$2) \forall p \in R \text{ için } D_\alpha t^p = p t^{p-\alpha}, \quad (3.22)$$

$$3) \text{ Tüm } f(t) = c \text{ biçimindeki sabit fonksiyonlar için } D_\alpha c = 0, \quad (3.23)$$

$$4) D_\alpha (fg) = f D_\alpha (g) + g D_\alpha (f), \quad (3.24)$$

$$5) D_\alpha \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g D_\alpha (f) - f D_\alpha (g)}{g^2}, \quad (3.25)$$

$$6) f \text{ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise}$$

$$D_\alpha f(t) = (t - a)^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (3.26)$$

şeklinde verilmiştir (Khalil ve diğ. 2014).

3.3.2 Uyumlu Kesirli İntegral

Tanım 3.3.2.1: $0 < \alpha \leq 1$ için α mertebeden uyumlu kesirli integral

$$I_\alpha f(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (3.27)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.3.2.1: $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli olsun. $0 < \alpha \leq 1, \forall t > a$

için

$$D_\alpha I_\alpha f(t) = f(t) \quad (3.28)$$

'dir (Abdeljawad 2015).

İspat: $I_\alpha f(t)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan (3.26) denkleminde

$$\begin{aligned} D_\alpha I_\alpha f(t) &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} (I_\alpha f(t)), \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx, \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \left(\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} - 0 \right) = f(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.3.2.2: $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli olsun. $0 < \alpha \leq 1, \forall t > a$

için

$$I_\alpha D_\alpha f(t) = f(t) - f(a) \quad (3.29)$$

'dir (Abdeljawad 2015).

İspat: Denklem (3.26) ve (3.27)'den

$$\begin{aligned} I_\alpha D_\alpha f(t) &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} D_\alpha f(x) dx = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} \frac{df(x)}{dx} dx, \\ &= [f(x)]_a^t = f(t) - f(a) \end{aligned}$$

olduğu görülür (Abdeljawad 2015).

Teorem 3.3.2.1: $\alpha > 0$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ için herhangi bir f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli integrali

$$I_{\alpha}f(t) = J_a^{n+1}(t-a)^{\beta-1}f(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx \quad (3.30)$$

dır (Abdeljawad 2015).

İspat:

(3.5) denkleminde;

$$\begin{aligned} I_{\alpha}f(t) &= J_a^{n+1}(t-a)^{\beta-1}f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^t (t-x)^{n+1-1} (x-a)^{\beta-1} f(x) dx, \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx \end{aligned}$$

olarak yazılabilir (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.3.2.3: $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon $0 < \alpha, \mu \leq 1$ ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olsun

$$I_{\alpha}I_{\mu}f(t) = \frac{t^{\mu}}{\mu} I_{\alpha}f(t) + \frac{1}{\mu} I_{\alpha+\mu}f(t) - \frac{t}{\mu} \int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s) ds \quad (3.31)$$

dır (Abdeljawad 2015).

İspat:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}I_{\mu}f(t) &= I_{\mu}I_{\alpha}f(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t_1} s^{\alpha-1} f(s) ds \right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\ &= \int_0^t s^{\alpha-1} f(s) \left(\int_s^t (t_1^{\mu-1} dt_1) \right) ds = \int_0^t s^{\alpha-1} f(s) \left[\frac{t^{\mu}}{\mu} - \frac{s^{\mu}}{\mu} \right] ds, \\ &= \frac{t^{\mu}}{\mu} \int_0^t s^{\alpha-1} f(s) ds - \frac{1}{\mu} \int_0^t s^{\mu+\alpha-1} f(s) ds, \\ &= \frac{t^{\mu}}{\mu} I_{\alpha}f(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t s^{\mu+\alpha-1} (-1) f(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t s^{\mu+\alpha-1} \left(\frac{t}{s} - 1 - \frac{t}{s} \right) f(s) ds, \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t s^{\mu+\alpha-1} \left(\frac{t-s-t}{s} \right) f(s) ds, \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\mu} \left[\int_0^t s^{\mu+\alpha-2} (t-s-t) f(s) ds \right], \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\int_0^t s^{\mu+\alpha-2} (t-s) f(s) ds - t \int_0^t s^{\mu+\alpha-2} f(s) ds \right] \tag{3.32}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (3.30) denkleminde

$$\begin{aligned}
I_{\alpha+\mu} f(t) &= \int_0^t s^{\mu+\alpha-2} f(s) ds = \frac{1}{1!} \int_0^t (s-0)^{\mu+\alpha-2} (t-s)^1 f(s) ds, \\
I_{\alpha+\mu} f(t) &= \int_0^t s^{\mu+\alpha-2} (t-s) f(s) ds \tag{3.33}
\end{aligned}$$

olur. (3.33) denklemi (3.32)'de yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\mu} \left[I_{\alpha+\mu} f(t) - t \int_0^t s^{\mu+\alpha-2} f(s) ds \right], \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\mu} I_{\alpha+\mu} f(t) - \frac{t}{\mu} \int_0^t s^{\mu+\alpha-2} f(s) ds \tag{3.34}
\end{aligned}$$

olduğu görülür (Abdeljawad 2015).

4. REZİDUAL KUVVET SERİSİ METODU

Tanım 4.1: $t = t_0$ daki kesirli kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha} = c_0 + c_1 (t - t_0)^{\alpha} + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad (4.1)$$

$$0 < m - 1 < \alpha \leq m, \quad t_0 \leq t$$

olarak ifade edilir (Jaradat ve diğ. 2016).

Teorem 4.1: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha}$ kesirli kuvvet serisi için aşağıdaki durumlar geçerlidir (El-Ajou ve diğ. 2013).

- 1) Seri sadece $t = 0$ olduğunda yakınsar. Yani; yakınsama yarıçapı sıfıra eşittir.
- 2) Seri, her $t \geq 0$ için yakınsar. Yani; yakınsama yarıçapı ∞ 'ye eşittir.
- 3) Serinin $0 \leq t < R$ olduğunda yakınsadığı ve $t \geq R$ olduğunda ıraksadığı pozitif bir reel sayı vardır. Burada R , kesirli kuvvet serisi için yakınsama yarıçapıdır.

Teorem 4.2: Kabul edelim ki fonksiyonu f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha}, \quad 0 < m - 1 < \alpha \leq m, \quad t_0 \leq t < t_0 + R \quad (4.2)$$

şeklinde bir kesirli kuvvet serisi olsun, $f(t) \in C[t_0, t_0 + R)$ ve ${}_0^C D_{t_0}^{n\alpha} f(t) \in C(t_0, t_0 + R)$ ise $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için c_n katsayıları

$$c_n = \frac{{}_0^C D_{t_0}^{n\alpha} f(t)}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad {}_0^C D_{t_0}^{n\alpha} = {}_0^C D_{t_0}^{\alpha} \cdot {}_0^C D_{t_0}^{\alpha} \cdot {}_0^C D_{t_0}^{\alpha} \cdot \dots \cdot {}_0^C D_{t_0}^{\alpha} (n \text{ defa}) \quad (4.3)$$

şeklindedir (El-Ajou ve diğ. 2013).

4.1 Rezidual Kuvvet Serisi Metodu Algoritması

RPSM algoritmasını göstermek için başlangıç koşulu verilen lineer olmayan aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi ele alalım (Şenol ve Ata 2018).

$${}_0^C D_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) = g(x, t), \quad t > 0, x \in R, \\ n - 1 < n\alpha \leq n, \quad (4.4)$$

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x). \quad (4.5)$$

Burada $R[x]$ lineer operatör, $N[x]$ lineer olmayan operatör ve $g(x, t)$ sürekli fonksiyondur (Şenol ve Ata 2018).

RPSM yönteminde (4.4) denkleminin çözümünün

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (4.6)$$

formunda olduğu kabul edilir (Şenol ve Ata 2018). Bir sonraki adımda (4.6)'nın $k + 1$ terimli kesilmiş serisi

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R, \\ k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

olarak ifade edilir. Denklemin başlangıç koşulu $u(x, 0) = f_0(x) = f(x)$ 'dir. 1. RPS yaklaşık çözümünü bulmak için Denklem (4.7)'de $k = 1$ alınır ve

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.8)$$

elde edilir. Denklem (4.4)'ün rezidual fonksiyonu

$$Resu(x, t) = {}_0^C D_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) - g(x, t) \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir ve k . residual fonksiyonu

$$Resu_k(x, t) = {}_0^C D_t^{n\alpha} u_k(x, t) + R[x]u_k(x, t) + N[x]u_k(x, t) - g(x, t), \\ k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

dır (Şenol ve Ata 2018).

$k = 1$ için Denklem (4.10)'da $Resu_1(x, 0) = 0$ ifadesi düzenlendiğinde $f_1(x)$ bulunur. $f_1(x)$ Denklem (4.8) 'de yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü bulunur. Bundan sonraki adımlarda $k = 2, 3, 4, \dots$ için ilk adımdan farklı olarak ${}_0^C D_t^{(k-1)\alpha} Resu_k(x, 0) = 0$ ifadesi bulunur. Yani ikinci adımda $Resu_2(x, t)$ ifadesinin her iki tarafının α mertebeden türevi alınıp $t = 0$ için sıfıra eşitlenir, üçüncü adımda $Resu_3(x, t)$ ifadesinin her iki tarafın 2α mertebeden türevi alınıp $t = 0$ için sıfıra eşitlenir. Böyle devam ederek f_k değerleri daha sonra u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla elde edilir.

4.2 Rezidual Kuvvet Serisi Metodunun Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlere ve Denklem Sistemlerine Uygulanması

Örnek 4.2.1: Zaman kesirli Korteveg de Vries (KdV) Denklemini

$${}_0^C D_t^\alpha u + 6uu_x + u_{xxx} = 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.11)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) \quad (4.12)$$

başlangıç koşulu ile ele alalım. $\alpha = 1$ için tam çözüm

$$u_e(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(x - t)\right) \quad (4.13)$$

dir (Momani ve diğ. 2008). Öncelikle (4.11) denkleminin çözümünün

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.14)$$

formunda olduğu kabul edilir. Bir sonraki adımda $u(x, t)$ için $k + 1$ terimli kesilmiş seri

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.15)$$

olarak yazılır. Denklemin rezidual fonksiyonu;

$$Resu(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) + 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) \quad (4.16)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu;

$$Resu_k(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_k(x, t) + 6u_k(x, t)u_{k_x}(x, t) + u_{k_{xxx}}(x, t), k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

olur. $k = 1$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_1(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_1(x, t) + 6u_1(x, t)u_{1_x}(x, t) + u_{1_{xxx}}(x, t) \quad (4.18)$$

olarak yazılır ve Denklem (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) denklemini (4.18)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_1(x, t) = & f_1(x) + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \left(f'(x) + f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \\ & + f^{(3)}(x) + f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$Resu_1(x, 0) = f_1(x) + 6f(x)f'(x) + f^{(3)}(x) = 0 \quad (4.21)$$

olup

$$f_1(x) = -6f(x)f'(x) - f^{(3)}(x) \quad (4.22)$$

$$f_1(x) = 4csch^3(x)sinh^4\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.23)$$

elde edilir. Denklem (4.23), (4.12), (4.19)' da yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(4csch^3(x)sinh^4\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.17)'de $k = 2$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_2(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_2(x, t) + 6u_2(x, t)u_{2_x}(x, t) + u_{2_{xxx}}(x, t) \quad (4.25)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 2$ için;

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (4.26)$$

olup (4.26) denklemi (4.25)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_2(x, t) = & f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \left(f'(x) \right. \\
& + f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \left. \right) + f^{(3)}(x) \\
& + f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2^{(3)}(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$${}_0^C D_t^\alpha Resu_2(x, 0) = f_2(x) + 6f(x)f_1'(x) + 6f_1(x)f'(x) + f_1^{(3)}(x) = 0 \tag{4.28}$$

olup

$$f_2(x) = -6f(x)f_1'(x) - 6f_1(x)f'(x) - f_1^{(3)}(x) \tag{4.29}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}(-2 + \cosh(x))\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2}\right) \tag{4.30}$$

elde edilir. Denklem (4.30), (4.12) ve (4.23), (4.26)' da yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(4\operatorname{csch}^3(x)\sinh^4\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + \left(\frac{1}{4}(-2 + \cosh(x))\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.17)'de $k = 3$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_3(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u_3(x, t) + 6u_3(x, t)u_{3_x}(x, t) + u_{3_{xxx}}(x, t) \tag{4.32}$$

olarak yazılır. Denklem (4.15)'de $k = 2$ için;

$$u_3(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \tag{4.33}$$

olup (4.33) denklemi (4.32)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_3(x, t) = & f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_3(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\
& \left. + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) \left(f'(x) + f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\
& \left. + f_3'(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) + f^{(3)}(x) + f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
& + f_2^{(3)}(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + f_3^{(3)}(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_3(x, 0) &= f_3(x) + 6f(x)f_2'(x) + 6f_1(x)f_1'(x) + 6f_2(x)f'(x) + f_2^{(3)}(x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

olup

$$f_3(x) = -6f(x)f_2'(x) - 6f_1(x)f_1'(x) - 6f_2(x)f'(x) - f_2^{(3)}(x) \tag{4.36}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{64} sech^8\left(\frac{x}{2}\right) (77 \sinh(x) - 32 \sinh(2x) + \sinh(3x)) \tag{4.37}$$

elde edilir. Denklem (4.37), (4.12), (4.23) ve (4.30), (4.33)' de yerine konulduğunda 3.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & \frac{1}{2} sech^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(4csch^3(x)sinh^4\left(\frac{x}{2}\right) \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
& + \left(\frac{1}{4}(-2 + cosh(x))sech^4\left(\frac{x}{2}\right) \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + \left(\frac{1}{64} sech^8\left(\frac{x}{2}\right) (77sinh(x) - 32sinh(2x) \right. \\
& \left. + sinh(3x)) \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. $f_4(x)$ ve $u_4(x, t)$ 'ü bulmak için ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(x, 0) = 0$ yazılır, $f_5(x)$ ve $u_5(x, t)$ 'i bulmak için ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resu_5(x, 0) = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$f_4(x) = \left(\frac{1}{256}\right)(23375 - 27826\cosh(x) + 5536\cosh(2x) - 286\cosh(3x) + \cosh(4x))\operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(4\operatorname{csch}^3(x)\sinh^4\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ & + \left(\frac{1}{4}(-2 + \cosh(x))\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ & + \left(\frac{1}{64}\operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{2}\right)(77\sinh(x) - 32\sinh(2x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh(3x))\right)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right. \\ & + \left(\left(\frac{1}{256}\right)(23375 - 27826\cosh(x) + 5536\cosh(2x) - 286\cosh(3x) \right. \\ & \left. \left. + \cosh(4x))\operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \right. \end{aligned} \quad (4.40)$$

ve

$$\begin{aligned} f_5(x) = & \left[\operatorname{sech}^{13}\left(\frac{x}{2}\right) \left(-44524902\sinh\left(\frac{x}{2}\right) + 19079730\sinh\left(\frac{3x}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 3266205\sinh\left(\frac{5x}{2}\right) + 187055\sinh\left(\frac{7x}{2}\right) - 2331\sinh\left(\frac{9x}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh\left(\frac{11x}{2}\right) \right) \right] \frac{1}{2048} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) = & \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(4 \operatorname{csch}^3(x) \sinh^4\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
& + \left(\frac{1}{4}(-2 + \cosh(x)) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + \left(\frac{1}{64} \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{2}\right) (77 \sinh(x) - 32 \sinh(2x) \right. \\
& \left. + \sinh(3x))\right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{256}\right) (23375 - 27826 \cosh(x) + 5536 \cosh(2x) - 286 \cosh(3x) \right. \\
& \left. + \cosh(4x)) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \\
& + \left[\operatorname{sech}^{13}\left(\frac{x}{2}\right) \left(-44524902 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) + 19079730 \sinh\left(\frac{3x}{2}\right) \right. \right. \\
& \left. - 3266205 \sinh\left(\frac{5x}{2}\right) + 187055 \sinh\left(\frac{7x}{2}\right) - 2331 \sinh\left(\frac{9x}{2}\right) \right. \\
& \left. \left. + \sinh\left(\frac{11x}{2}\right) \right) \right] \frac{1}{2048} \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

elde edilir. $k = 6, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

Tablo 4.1’de (4.42) denkleminin $x = 10$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ ve 0.1 aralıklarla $t \in [0, 1]$ için $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün tablosu verilmiştir. Aynı zamanda $\alpha = 1$, $x = 10$ ve 0.1 aralıklarla $t \in [0, 1]$ için $u_e(x, t)$ tam çözümünün tablosu da verilmiştir. Tabloda $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve $u_e(x, t)$ tam çözümünün birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Tablo 4.2’de (4.38) denkleminin $x = 10$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ ve 0.1 aralıklarla $t \in [0, 1]$ için $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün tablosu verilmiştir. Aynı zamanda $\alpha = 1$, $x = 10$ ve 0.1 aralıklarla $t \in [0, 1]$ için (4.13)’deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün tablosu da verilmiştir. Tabloda $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve $u_e(x, t)$ tam çözümünün birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

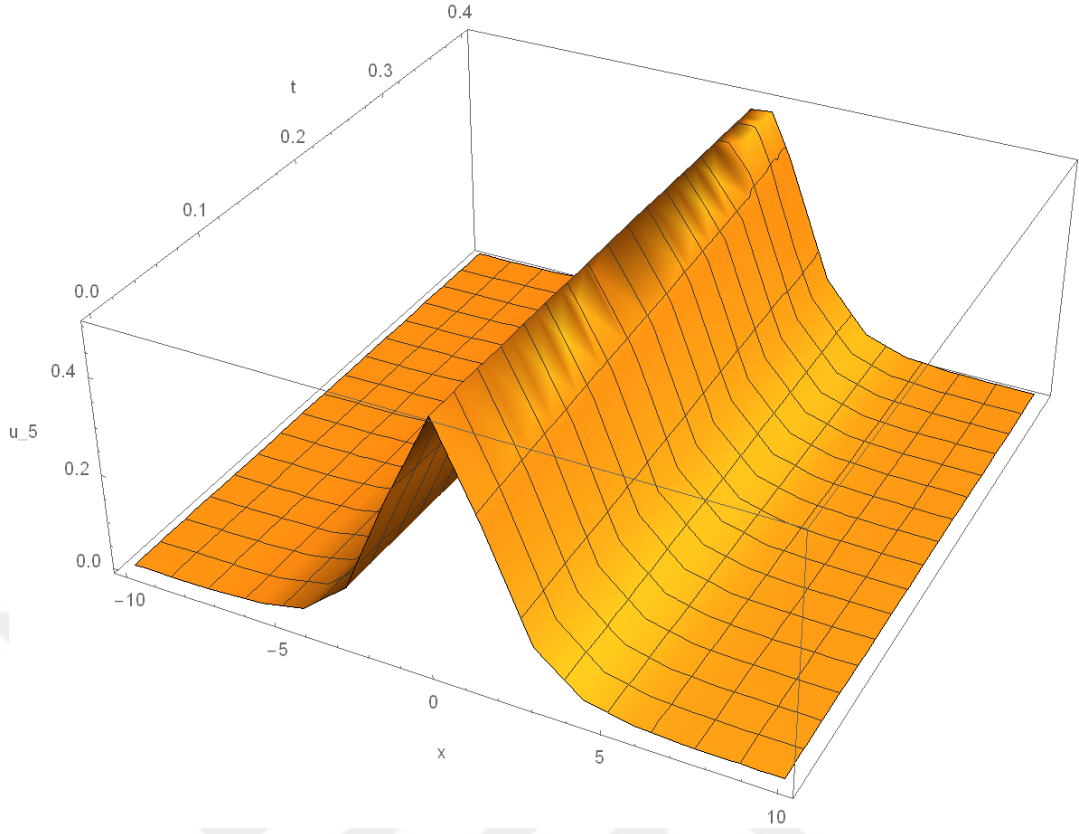
Şekil 4.1’de (4.42)’den $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği verilmiştir ve Şekil 4.2’de (4.13)’deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün üç boyutlu grafiği verilmiştir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 üç boyutlu grafiklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Tablo 4.1: (4.42)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.13)'teki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.

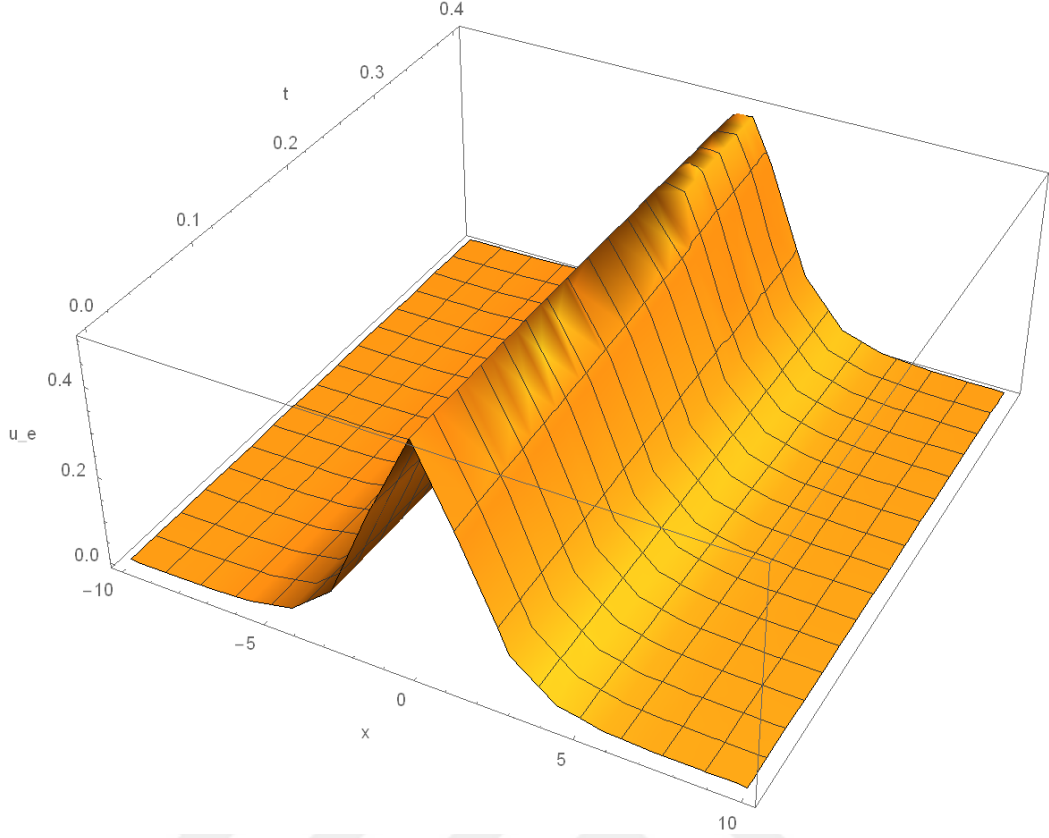
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$		
t	$u_5(x, t)$	$u_5(x, t)$	$u_e(x, t)$	Mutlak Hata
0	0.00009079161547	0.00009079161547	0.00009079161547	0
0.1	0.0001349432697	0.000100339273	0.0001003392949	2×10^{-11}
0.2	0.0001630835131	0.0001108906629	0.0001108909004	2×10^{-10}
0.3	0.0001905677735	0.0001225508721	0.0001225519688	1×10^{-9}
0.4	0.0002187726209	0.0001354355694	0.0001354391261	4×10^{-9}
0.5	0.0002482308313	0.0001496718167	0.0001496812511	9×10^{-9}
0.6	0.0002792234132	0.0001653988814	0.0001654207614	2×10^{-8}
0.7	0.0003119263476	0.0001827690478	0.000182815034	5×10^{-8}
0.8	0.0003464630178	0.0002019484291	0.000202037974	9×10^{-8}
0.9	0.0003829271282	0.0002231177789	0.0002232817483	2×10^{-7}
1	0.0004213941392	0.0002464733033	0.0002467586995	3×10^{-7}

Tablo 4.2: (4.38)'de elde edilen $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.13)'teki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.

	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$		
t	$u_3(x, t)$	$u_3(x, t)$	$u_e(x, t)$	Mutlak Hata
0	0.00009079161547	0.00009079161547	0.00009079161547	0
0.1	0.0001344181201	0.0001003388929	0.0001003392949	4×10^{-10}
0.2	0.0001608549339	0.0001108844743	0.0001108909004	6×10^{-9}
0.3	0.000185332513	0.0001225189946	0.0001225519688	3×10^{-8}
0.4	0.0002091343343	0.0001353330889	0.0001354391261	1×10^{-7}
0.5	0.0002327151415	0.0001494173921	0.0001496812511	3×10^{-7}
0.6	0.0002562873449	0.0001648625395	0.0001654207614	6×10^{-7}
0.7	0.000279964975	0.0001817591659	0.000182815034	1×10^{-6}
0.8	0.00030381448	0.0002001979064	0.000202037974	2×10^{-6}
0.9	0.0003278765904	0.000220269396	0.0002232817483	3×10^{-6}
1	0.0003521770251	0.0002420642699	0.0002467586995	5×10^{-6}



Şekil 4.1: (4.42)'de elde edilen $u_5(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği.



Şekil 4.2: (4.13)'deki $u_e(x, t)$ 'nin üç boyutlu grafiği.

Örnek 4.2.2: Zaman kesirli modified Korteweg de Vries (mKdV) Denklemini

$${}_0^C D_t^\alpha u + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.43)$$

$$u(x, 0) = \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) \quad (4.44)$$

başlangıç koşulu ile ele alalım. $\alpha = 1$ için tam çözüm

$$u_e(x, t) = \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}(x - ct)) \quad (4.45)$$

dir (Abdulaziz ve diğ. 2009). Denklemin rezidual fonksiyonu;

$$\operatorname{Resu}(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) + 6u^2(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) \quad (4.46)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu;

$$\operatorname{Resu}_k(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u_k(x, t) + 6u_k^2(x, t)u_{k_x}(x, t) + u_{k_{xxx}}(x, t), k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

olur ve $k = 1$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_1(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_1(x, t) + 6u_1^2(x, t)u_{1_x}(x, t) + u_{1_{xxx}}(x, t) \quad (4.48)$$

olarak yazılır ve Denklem (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.49)$$

bulunur. (4.49) denklemi (4.48)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_1(x, t) = & f_1(x) + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right)^2 \left(f'(x) + f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \\ & + f^{(3)}(x) + f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$Resu_1(x, 0) = f_1(x) + 6f^2(x)f'(x) + f^{(3)}(x) = 0 \quad (4.51)$$

olup

$$f_1(x) = -6f^2(x)f'(x) - f^{(3)}(x) \quad (4.52)$$

$$f_1(x) = \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x))} \right) \quad (4.53)$$

elde edilir. Denklem (4.53) ve (4.44), (4.49)' da yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) + \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x))} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.54)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.47)'de $k = 2$ alındığında;

$$Resu_2(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_2(x, t) + 6u_2^2(x, t)u_{2_x}(x, t) + u_{2_{xxx}}(x, t) \quad (4.55)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 2$ için;

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (4.56)$$

olup (4.56), (4.55)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_2(x, t) &= f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
&+ 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right)^2 \left(f'(x) \right. \\
&+ \left. f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) + f^{(3)}(x) \\
&+ f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2^{(3)}(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha Resu_2(x, 0) &= f_2(x) + 12f_1(x)f(x)f'(x) + 6f^2(x)f_1'(x) + f_1^{(3)}(x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.58}$$

olup

$$f_2(x) = -12f_1(x)f(x)f'(x) - 6f^2(x)f_1'(x) - f_1^{(3)}(x) \tag{4.59}$$

$$f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right) c^{\frac{7}{2}} \left(-3 + \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \operatorname{sech}^3(k + \sqrt{c}x) \tag{4.60}$$

elde edilir. Denklem (4.60), (4.44) ve (4.53), (4.56)' de yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) + \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
&+ \left(\left(\frac{1}{2}\right) c^{\frac{7}{2}} \left(-3 + \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \operatorname{sech}^3(k \right. \\
&+ \left. \sqrt{c}x) \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

bulunur. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. $f_3(x)$ ve $u_3(x, t)$ ' ü bulmak için ${}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_3(x, 0) = 0$ yazılır, $f_4(x)$ ve $u_4(x, t)$ ' i bulmak için ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(x, 0) = 0$ yazılır ve $f_5(x)$ ve $u_5(x, t)$ ' i bulmak için ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resu_5(x, 0) = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \left(\frac{1}{16}\right) c^5 \operatorname{sech}^6(k + \sqrt{c}x) \left(794 \sinh(k + \sqrt{c}x)\right) - 165 \sinh\left(3(k + \sqrt{c}x)\right) \\
&+ \sinh\left(5(k + \sqrt{c}x)\right)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) + \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x))} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{2} \right) c^{\frac{7}{2}} \left(-3 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x)) \right) \operatorname{sech}^3(k + \sqrt{c}x) \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{16} \right) c^5 \operatorname{sech}^6(k + \sqrt{c}x) \left(794 \sinh(k + \sqrt{c}x) \right) \right. \\
& \left. - 165 \sinh(3(k + \sqrt{c}x)) + \sinh(5(k + \sqrt{c}x)) \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \quad (4.63)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_4(x) = & \left(\frac{1}{128} \right) c^{\frac{13}{2}} \left(970659 - 1072648 \cosh(2(k + \sqrt{c}x)) \right) \\
& + 163996 \cosh(4(k + \sqrt{c}x)) - 4536 \cosh(6(k + \sqrt{c}x)) \\
& + \cosh(8(k + \sqrt{c}x)) \operatorname{sech}^9(k + \sqrt{c}x) \quad (4.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) = & \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) + \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x))} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{2} \right) c^{\frac{7}{2}} \left(-3 + \cosh(2(k + \sqrt{c}x)) \right) \operatorname{sech}^3(k + \sqrt{c}x) \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{16} \right) c^5 \operatorname{sech}^6(k + \sqrt{c}x) \left(794 \sinh(k + \sqrt{c}x) \right) \right. \\
& \left. - 165 \sinh(3(k + \sqrt{c}x)) + \sinh(5(k + \sqrt{c}x)) \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{128} \right) c^{\frac{13}{2}} \left(970659 - 1072648 \cosh(2(k + \sqrt{c}x)) \right) \right. \\
& + 163996 \cosh(4(k + \sqrt{c}x)) - 4536 \cosh(6(k + \sqrt{c}x)) \\
& \left. + \cosh(8(k + \sqrt{c}x)) \operatorname{sech}^9(k + \sqrt{c}x) \right) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)} \quad (4.65)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_5(x) = & \left(\frac{1}{1024}\right) \left(c^8 \operatorname{sech}^{12}(k + \sqrt{c}x)\right) \left(-11290353078 \sinh(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& + 4420211610 \sinh\left(3(k + \sqrt{c}x)\right) - 615643125 \sinh\left(5(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& + 23590835 \sinh\left(7(k + \sqrt{c}x)\right) - 122631 \sinh\left(9(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& + \sinh\left(11(k + \sqrt{c}x)\right)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) = & \sqrt{c} \operatorname{sech}(k + \sqrt{c}x) + \left(\frac{2c^2 \sinh(k + \sqrt{c}x)}{1 + \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)}\right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\right) c^{\frac{7}{2}} \left(-3 + \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \operatorname{sech}^3(k + \sqrt{c}x)\right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{16}\right) c^5 \operatorname{sech}^6(k + \sqrt{c}x) \left(794 \sinh(k + \sqrt{c}x)\right) \right. \\
& \left. - 165 \sinh\left(3(k + \sqrt{c}x)\right) + \sinh\left(5(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{128}\right) c^{\frac{13}{2}} \left(970659 - 1072648 \cosh\left(2(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \right. \\
& + 163996 \cosh\left(4(k + \sqrt{c}x)\right) - 4536 \cosh\left(6(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& \left. + \cosh\left(8(k + \sqrt{c}x)\right) \operatorname{sech}^9(k + \sqrt{c}x)\right) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{1024}\right) \left(c^8 \operatorname{sech}^{12}(k + \sqrt{c}x)\right) \left(-11290353078 \sinh(k + \sqrt{c}x)\right) \right. \\
& + 4420211610 \sinh\left(3(k + \sqrt{c}x)\right) - 615643125 \sinh\left(5(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& + 23590835 \sinh\left(7(k + \sqrt{c}x)\right) - 122631 \sinh\left(9(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& \left. + \sinh\left(11(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \left(\frac{1}{128}\right) \left(c^8 \operatorname{sech}^{12}(k \right. \\
& + \sqrt{c}x) \left.) \left(-11290353078 \sinh(k + \sqrt{c}x)\right) \right. \\
& + 4420211610 \sinh\left(3(k + \sqrt{c}x)\right) - 615643125 \sinh\left(5(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& + 23590835 \sinh\left(7(k + \sqrt{c}x)\right) - 122631 \sinh\left(9(k + \sqrt{c}x)\right) \\
& \left. + \sinh\left(11(k + \sqrt{c}x)\right)\right) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1 + 5\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

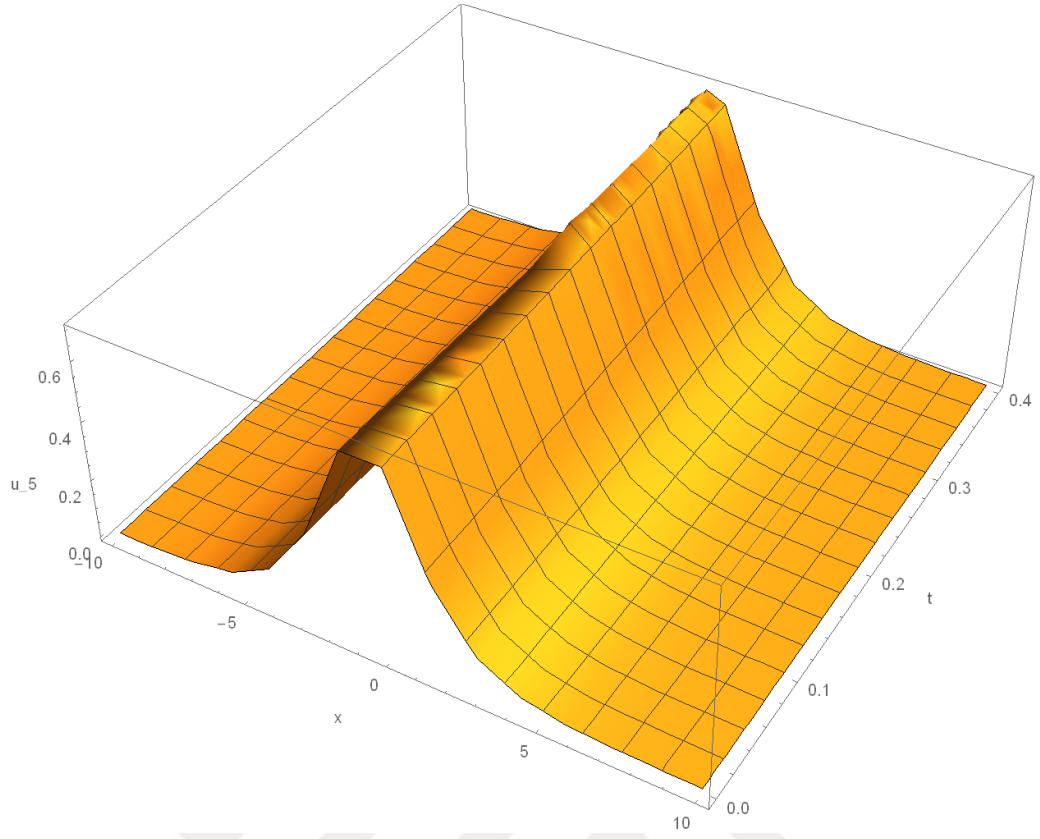
elde edilir. $k = 6, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

Tablo 4.3’de (4.63)’ün $x = 10, c = 1, k = 0, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ ve 0.1 aralıkla $t \in [0, 1]$ için $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün tablosu verilmiştir. Aynı zamanda $x = 10, c = 1, k = 0, \alpha = 1$ ve 0.1 aralıkla $t \in [0, 1]$ için (4.45)’deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün tablosu da verilmiştir. Tabloda $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve $u_e(x, t)$ tam çözümünün birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

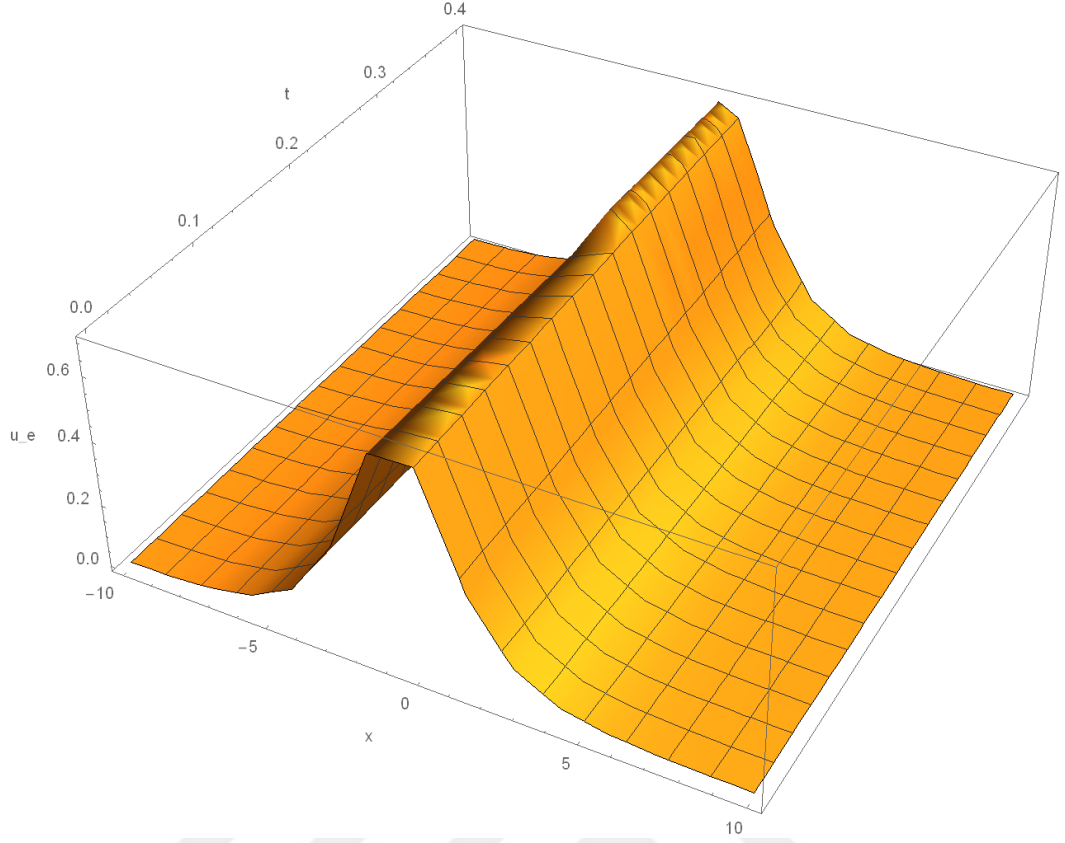
Şekil 4.3’de (4.67)’den $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $c = 1, k = 0, \alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği verilmiştir ve Şekil 4.4’de (4.45)’deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün $c = 1, k = 0$ için üç boyutlu grafiği verilmiştir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 üç boyutlu grafiklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Tablo 4.3: (4.63)’de elde edilen $u_3(x, t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.45)’deki $u_e(x, t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.

	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$		
t	$u_3(x, t)$	$u_3(x, t)$	$u_e(x, t)$	Mutlak Hata
0	0.00009079985934	0.00009079985934	0.00009079985934	0
0.1	0.0001322794887	0.0001003338445	0.0001003493639	2×10^{-8}
0.2	0.0001547798463	0.0001107758283	0.0001109031985	1×10^{-7}
0.3	0.0001741576456	0.0001221258106	0.0001225669896	4×10^{-7}
0.4	0.0001919190897	0.0001343837916	0.0001354574724	1×10^{-6}
0.5	0.0002086475938	0.000147549771	0.0001497036589	2×10^{-6}
0.6	0.0002246423688	0.0001616237491	0.00016544813	4×10^{-6}
0.7	0.0002400811594	0.0001766057258	0.0001828484614	6×10^{-6}
0.8	0.0002550797765	0.000192495701	0.0002020788016	10×10^{-6}
0.9	0.0002697186623	0.0002092936748	0.0002233316142	1×10^{-5}
1	0.0002840563864	0.0002269996472	0.0002468196044	2×10^{-5}



Şekil 4.3: (4.67)'de elde edilen $u_5(x, t)$ 'in $\alpha = 1$ için üç boyutlu grafiği.



Şekil 4.4: (4.45)'deki $u_e(x, t)$ 'nin üç boyutlu grafiği.

Örnek 4.2.3 ve 4.2.4' de $u(x, t)$ tümör hücrelerinin konsantrasyonudur.

Örnek 4.2.3: Kesirli kanser tümör modellerinden

$${}_0^C D_t^\alpha u - u_{xx} + t^2 u = 0, 0 < \alpha \leq 1, t \geq 1 \quad (4.68)$$

denklemini

$$u(x, 0) = e^{kx} \quad (4.69)$$

başlangıç koşulu ile ele alalım (Körpınar ve diğ. 2020). Denklemin rezidual fonksiyonu;

$$Resu(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + t^2 u(x, t) \quad (4.70)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu;

$$Resu_k(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_k(x, t) - u_{k_{xx}}(x, t) + t^2 u_k(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.71)$$

olur ve $k = 1$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_1(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_1(x, t) - u_{1_{xx}}(x, t) + t^2 u_1(x, t) \quad (4.72)$$

olarak yazılır ve Denklem (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.73)$$

bulunur. (4.73) denklemi (4.72)'de yerine yazılarak

$$Resu_1(x, t) = f_1(x) - \left(f''(x) + f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) + t^2 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \quad (4.74)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$Resu_1(x, 0) = f_1(x) - f''(x) = 0 \quad (4.75)$$

olup

$$f_1(x) = f''(x) \quad (4.76)$$

$$f_1(x) = k^2 e^{kx} \quad (4.77)$$

elde edilir. Denklem (4.77), (4.69), (4.73)' de yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = e^{kx} + (k^2 e^{kx}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.78)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.71)'de $k = 2$ alındığında;

$$Resu_2(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_2(x, t) - u_{2_{xx}}(x, t) + t^2 u_2(x, t) \quad (4.79)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 2$ için;

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (4.80)$$

olup (4.80) denklemi (4.79)'da yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_2(x, t) = & f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& - \left(f''(x) + f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \\
& + t^2 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$${}_0^C D_t^\alpha Resu_2(x, 0) = f_2(x) - f_1''(x) = 0 \tag{4.82}$$

olup

$$f_2(x) = f_1''(x) \tag{4.83}$$

$$f_2(x) = k^4 e^{kx} \tag{4.84}$$

elde edilir. Denklem (4.84), (4.69) ve (4.77), (4.80)' de yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$u_2(x, t) = e^{kx} + (k^2 e^{kx}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + (k^4 e^{kx}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \tag{4.85}$$

bulunur. Denklem (4.71)'de $k = 3$ alındığında;

$$Resu_3(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u_3(x, t) - u_{3_{xx}}(x, t) + t^2 u_3(x, t) \tag{4.86}$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 3$ için;

$$u_3(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \tag{4.87}$$

olup (4.87), (4.86)'da yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_3(x, t) = & f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_3(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& - \left(f''(x) + f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\
& \left. + f_3''(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) \\
& + t^2 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\
& \left. + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$${}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_3(x, 0) = f_3(x) - f_2''(x) = 0 \tag{4.89}$$

olup

$$f_3(x) = f_2''(x) \tag{4.90}$$

$$f_3(x) = k^6 e^{kx} \tag{4.91}$$

elde edilir. Denklem (4.91), (4.69), (4.77) ve (4.84), (4.87)' de yerine konulduğunda 3.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & e^{kx} + (k^2 e^{kx}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + (k^4 e^{kx}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + (k^6 e^{kx}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

elde edilir. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. $f_4(x)$ ve $u_4(x, t)$ ' i bulmak için ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(x, 0) = 0$ yazılır, $f_5(x)$ ve $u_5(x, t)$ 'i bulmak için ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resu_5(x, 0) = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$f_4(x) = k^8 e^{kx} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) = & e^{kx} + (k^2 e^{kx}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + (k^4 e^{kx}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (k^6 e^{kx}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\
& + (k^8 e^{kx}) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.94}$$

ve

$$f_5(x) = k^{10}e^{kx} \quad (4.95)$$

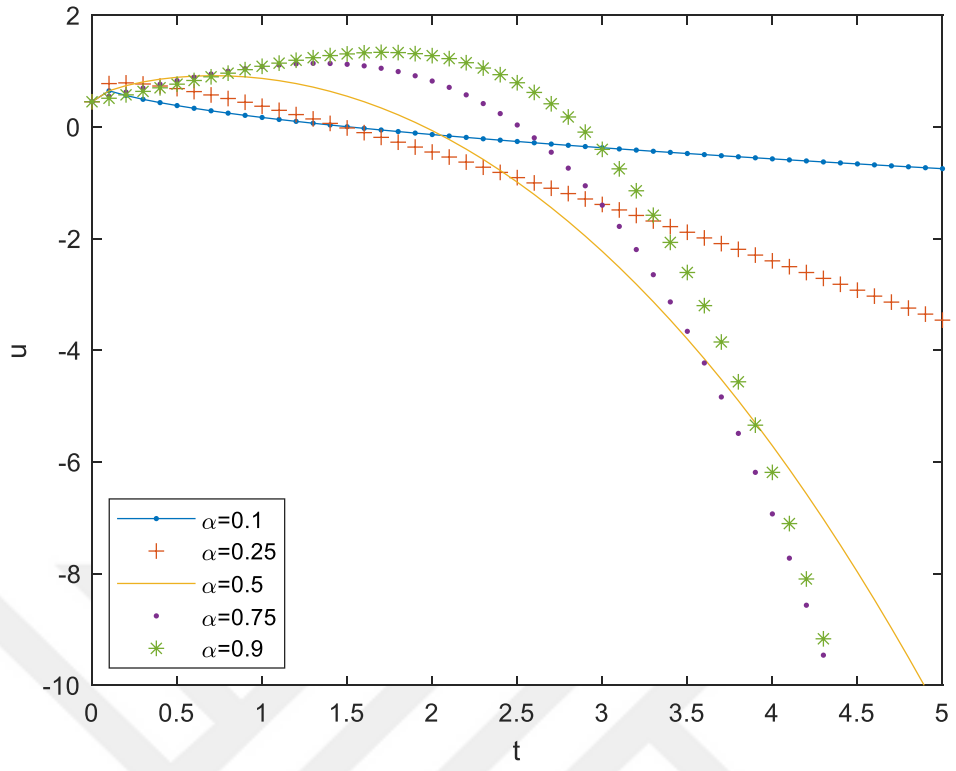
$$\begin{aligned} u_5(x, t) = & e^{kx} + (k^2 e^{kx}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + (k^4 e^{kx}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + (k^6 e^{kx}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\ & + (k^8 e^{kx}) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)} \\ & + (k^{10} e^{kx}) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1 + 5\alpha)} \end{aligned} \quad (4.96)$$

elde edilir. $k = 6, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

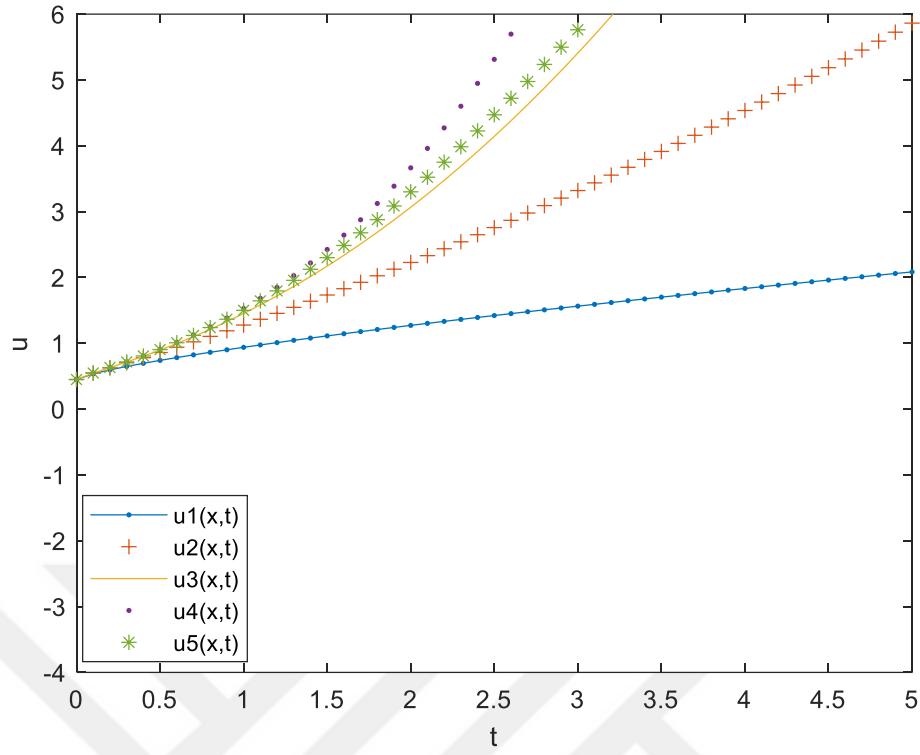
Şekil 4.5’de (4.96) denklemindeki $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.1, \alpha = 0.25, \alpha = 0.5, \alpha = 0.75, \alpha = 0.9, k = -1, x = 0.8$ için iki boyutlu grafiği verilmiştir.

Şekil 4.6’da (4.78), (4.85), (4.92), (4.94), (4.96) denklemlerinden sırasıyla $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $\alpha = 0.75, k = -1, x = 0.8$ için iki boyutlu grafiği verilmiştir.

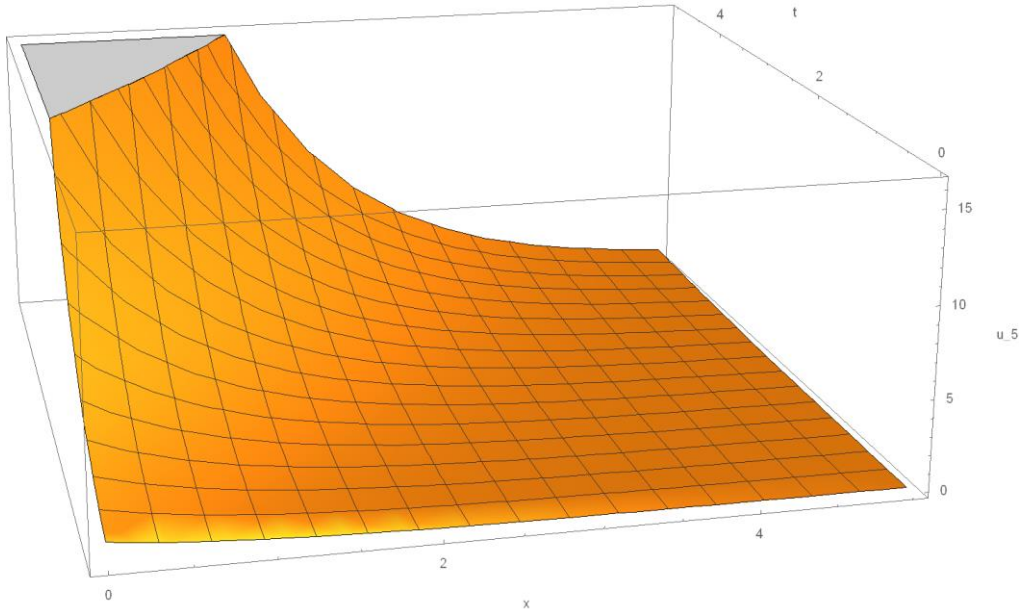
Şekil 4.7’de (4.96) denklemindeki $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.75, k = -1$ için üç boyutlu grafiği verilmiştir.



Şekil 4.5: (4.96)'da elde edilen farklı α değerleri için $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.



Şekil 4.6: Örnek 4.2.3’de n ’in farklı değerleri için $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin iki boyutlu grafiği.



Şekil 4.7: (4.96)’da elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün üç boyutlu grafiği.

Örnek 4.2.4: Kesirli kanser tümör modellerinden

$${}_0^C D_t^\alpha u - u_{xx} + \frac{2}{x}u + u^2 = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.97)$$

denklemini

$$u(x, 0) = x^p \quad (4.98)$$

başlangıç koşulu ile ele alalım (Körpınar ve diğ. 2020). Denklemin rezidual fonksiyonu;

$$Resu(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \frac{2}{x^2}u(x, t) + u^2(x, t) \quad (4.99)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu;

$$Resu_k(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u_k(x, t) - u_{kxx}(x, t) + \frac{2}{x^2}u_k(x, t) + u_k^2(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.100)$$

olur ve $k = 1$ için rezidual fonksiyonu;

$$Resu_1(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha u_1(x, t) - u_{1xx}(x, t) + \frac{2}{x^2}u_1(x, t) + u_1^2(x, t) \quad (4.101)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.102)$$

bulunur. (4.102) denklemi (4.101)'de yerine yazılarak

$$Resu_1(x, t) = f_1(x) - \left(f''(x) + f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) + \frac{2}{x^2} \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) + \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right)^2 \quad (4.103)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$Resu_1(x, 0) = f_1(x) - f''(x) + \frac{2}{x^2}f(x) + f^2(x) = 0 \quad (4.104)$$

olup

$$f_1(x) = f''(x) - \frac{2}{x^2}f(x) - f^2(x) \quad (4.105)$$

$$f_1(x) = (-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p}) \quad (4.106)$$

elde edilir. Denklem (4.106), (4.98), (4.102)' de yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = x^p + ((-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p})) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.107)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.130)'da $k = 2$ alındığında;

$$Resu_2(x, t) = {}^C_0D_t^\alpha u_2(x, t) - u_{2xx}(x, t) + \frac{2}{x^2} u_2(x, t) + u_2^2(x, t) \quad (4.108)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 2$ için;

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (4.109)$$

olup (4.109), (4.108)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_2(x, t) &= f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\ &- \left(f''(x) + f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \\ &+ \frac{2}{x^2} \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \\ &+ \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.110)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$${}^C_0D_t^\alpha Resu_2(x, 0) = f_2(x) - f_1''(x) + \frac{2}{x^2} f_1(x) + f(x)f_1(x) = 0 \quad (4.111)$$

olup

$$f_2(x) = f_1''(x) - \frac{2}{x^2} f_1(x) - f(x)f_1(x) \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} \\ &+ 2x^{4+2p})) \end{aligned} \quad (4.113)$$

elde edilir. Denklem (4.113), (4.98) ve (4.106), (4.109)' da yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & x^p + ((-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p})) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + (x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} \\
& + 2x^{4+2p})) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.114}$$

elde edilir. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. $f_3(x)$ ve $u_3(x, t)$ ' ü bulmak için ${}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_3(x, 0) = 0$ yazılır, $f_4(x)$ ve $u_4(x, t)$ ' i bulmak için ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(x, 0) = 0$ yazılır ve $f_5(x)$ ve $u_5(x, t)$ ' i bulmak için ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resu_5(x, 0) = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$\begin{aligned}
f_3(x) = & (-x^{-6+p})(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 - 180px^{2+p} \\
& + 290p^2x^{2+p} - 152p^3x^{2+p} + 26p^4x^{2+p} + 42px^{4+2p} - 30p^2x^{4+2p} \\
& + 4x^{6+3p})
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & x^p + ((-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p})) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + (x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} \\
& + 2x^{4+2p})) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + ((-x^{-6+p})(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 \\
& - 180px^{2+p} + 290p^2x^{2+p} - 152p^3x^{2+p} + 26p^4x^{2+p} + 42px^{4+2p} \\
& - 30p^2x^{4+2p} + 4x^{6+3p})) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.116}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_4(x) = & \left((-x^{-8+p}) \left((-(-9 + p))(-7 + p)(-6 + p)(-5 + p)(-4 + p)(-3 \right. \right. \\
& + p)(-2 + p)p \\
& + 2(-2 + p)p \left(1680 \right. \\
& + p \left(-2779 + p(1775 + p(-505 + 53p)) \right) \left. \right) x^{2+p} \\
& - 2p \left(-390 + p(881 + p(-656 + 161p)) \right) x^{4+2p} \\
& \left. \left. + 4p(-33 + 31p)x^{6+3p} - 8x^{8+4p} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) = & x^p + ((-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p})) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + (x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} \\
& + 2x^{4+2p})) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + ((-x^{-6+p})(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 \\
& - 180px^{2+p} + 290p^2x^{2+p} - 152p^3x^{2+p} + 26p^4x^{2+p} + 42px^{4+2p} \\
& - 30p^2x^{4+2p} + 4x^{6+3p})) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\
& + ((-x^{-8+p})(-(-9 + p))(-7 + p)(-6 + p)(-5 + p)(-4 \\
& + p)(-3 + p)(-2 + p)p \\
& + 2(-2 + p)p(1680 \\
& + p(-2779 + p(1775 + p(-505 + 53p))))x^{2+p} \\
& - 2p(-390 + p(881 + p(-656 + 161p)))x^{4+2p} + 4p(-33 \\
& + 31p)x^{6+3p} - 8x^{8+4p})) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)} f_5(x) \\
= & ((-x^{-10+p})(-(-11 + p))(-9 + p)(-8 + p)(-7 + p)(-6 \\
& + p)(-5 + p)(-4 + p)(-3 + p)(-2 + p)p + 2(-3 + p)^2(-2 \\
& + p)p(12600 + p(-16908 + p(9469 + p(-2366 + 213p))))x^{2+p} \\
& + 16x^{5(2+p)} - 2p(-17640 + p(52014 + p(-63609 + p(39655 \\
& + p(-12439 + 1555 * p))))x^{4+2p} \\
& + 36(-1 + p)p(80 + p(-155 + 73p))x^{6+3p} - 64p(-6 \\
& + 7p)x^{8+4p})) \tag{4.118}
\end{aligned}$$

ve

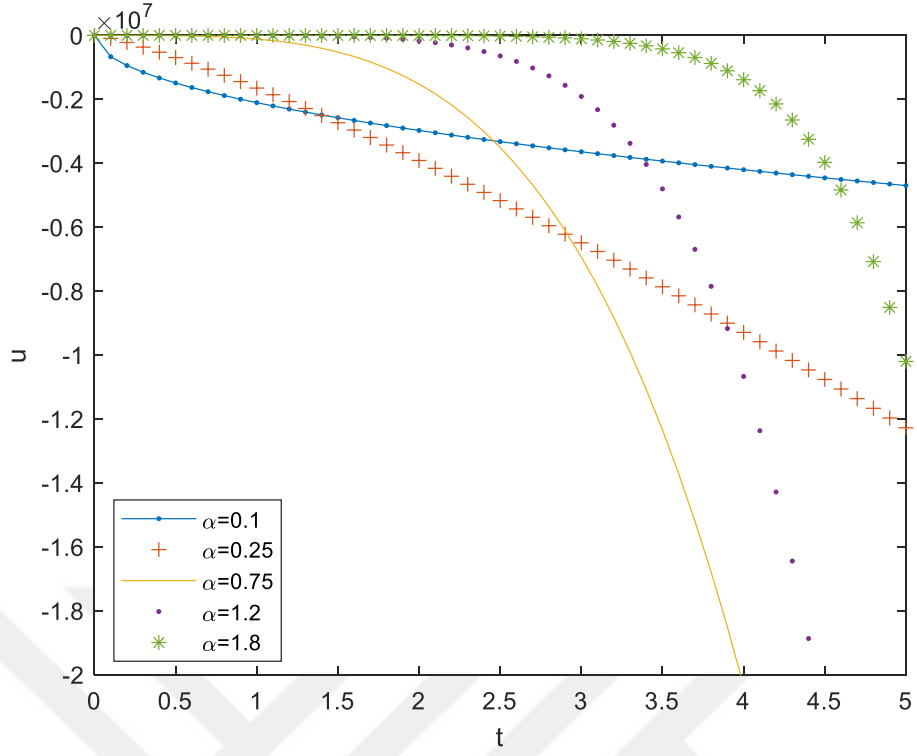
$$\begin{aligned}
f_5(x) = & ((-x^{-10+p})(-(-11 + p))(-9 + p)(-8 + p)(-7 + p)(-6 + p)(-5 \\
& + p)(-4 + p)(-3 + p)(-2 + p)p + 2(-3 + p)^2(-2 + p)p(12600 \\
& + p(-16908 + p(9469 + p(-2366 + 213p))))x^{2+p} + 16x^{5(2+p)} \\
& - 2p(-17640 + p(52014 + p(-63609 + p(39655 + p(-12439 \\
& + 1555 * p))))x^{4+2p} + 36(-1 + p)p(80 + p(-155 + 73p))x^{6+3p} \\
& - 64p(-6 + 7p)x^{8+4p})) \tag{4.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) = & x^p + \left((-x^{-2+p})(3p - p^2 + x^{2+p}) \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& + \left(x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} \right. \\
& \left. + 2x^{4+2p}) \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + \left((-x^{-6+p})(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 \right. \\
& - 180px^{2+p} + 290p^2x^{2+p} - 152p^3x^{2+p} + 26p^4x^{2+p} + 42px^{4+2p} \\
& \left. - 30p^2x^{4+2p} + 4x^{6+3p}) \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\
& + \left((-x^{-8+p})((-(-9 + p))(-7 + p)(-6 + p)(-5 + p)(-4 \right. \\
& + p)(-3 + p)(-2 + p)p \\
& + 2(-2 + p)p \left(1680 \right. \\
& \left. + p(-2779 + p(1775 + p(-505 + 53p))) \right) \left. \right) x^{2+p} \\
& - 2p \left(-390 + p(881 + p(-656 + 161p)) \right) x^{4+2p} + 4p(-33 \\
& + 31p)x^{6+3p} - 8x^{8+4p} \left. \right) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)} \\
& + \left((-x^{-10+p})((-(-11 + p))(-9 + p)(-8 + p)(-7 + p)(-6 \right. \\
& + p)(-5 + p)(-4 + p)(-3 + p)(-2 + p)p + 2(-3 + p)^2(-2 \\
& + p)p(12600 + p(-16908 + p(9469 + p(-2366 + 213p)))) \left. \right) x^{2+p} \\
& + 16x^{5(2+p)} - 2p(-17640 + p(52014 + p(-63609 + p(39655 \\
& + p(-12439 + 1555 * p)))) \left. \right) x^{4+2p} \\
& + 36(-1 + p)p(80 + p(-155 + 73p))x^{6+3p} - 64p(-6 \\
& + 7p)x^{8+4p} \left. \right) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1 + 5\alpha)} \tag{4.120}
\end{aligned}$$

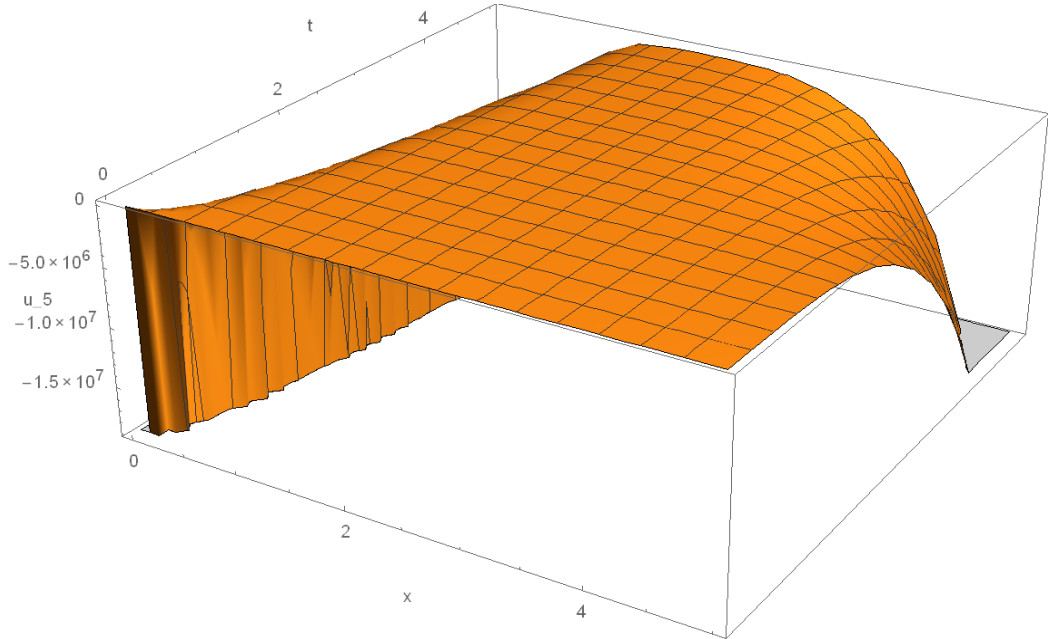
elde edilir. $k = 6, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

Şekil 4.8’de (4.120) denklemindeki $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.8$, $x = 0.8$, $p = 1.2$ için iki boyutlu grafiği verilmiştir.

Şekil 4.9’da (4.120) denklemindeki $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.75$, $x = 0.8$, $p = 1.2$ için üç boyutlu grafiği verilmiştir.



Şekil 4.8: (4.120)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün farklı α değerleri için iki boyutlu grafiği.



Şekil 4.9: (4.120)'de elde edilen $u_5(x, t)$ yaklaşık çözümünün farklı α değerleri için üç boyutlu grafiği.

Örnek 4.2.5: Yöntemi ilk olarak aşağıdaki kesirli mertebeden stiff sistemine uygulayalım. Sistem

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha u(t) &= -u(t) + 95v(t), \\ {}^C_0D_t^\alpha v(t) &= -u(t) - 97v(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (4.121)$$

şeklindedir (Freihet ve diğ. 2019). Sistemin başlangıç koşulu

$$u(0) = 1, v(0) = 1 \quad (4.122)$$

dır. $\alpha = 1$ için tam çözümü

$$\begin{aligned} u_e(t) &= \frac{1}{47} (95e^{-2t} - 48e^{-96t}), \\ v_e(t) &= \frac{1}{47} (48e^{-96t} - e^{-2t}) \end{aligned} \quad (4.123)$$

olarak verilmiştir (Freihet ve diğ. 2019). Denklemin rezidual fonksiyonu

$$\begin{aligned} Resu(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u(t) + u(t) - 95v(t), \\ Resv(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v(t) + u(t) + 97v(t) \end{aligned} \quad (4.124)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu

$$\begin{aligned} Resu_k(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_k(t) + u_k(t) - 95v_k(t), \\ Resv_k(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_k(t) + u_k(t) + 97v_k(t) \end{aligned} \quad (4.125)$$

olur ve $k = 1$ için rezidual fonksiyonu

$$\begin{aligned} Resu_1(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_1(t) + u_1(t) - 95v_1(t), \\ Resv_1(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_1(t) + u_1(t) + 97v_1(t) \end{aligned} \quad (4.126)$$

olarak yazılır ve Denklem (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \\ v_1(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \end{aligned} \quad (4.127)$$

bulunur. (4.127) denklemleri (4.126)'da yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_1(t) &= c_1 + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 95 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right), \\
Resv_1(t) &= d_1 + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 97 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)
\end{aligned} \tag{4.128}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
Resu_1(0) &= c_1 + 1 - 95 = 0, \\
Resv_1(0) &= d_1 + 1 + 97 = 0
\end{aligned} \tag{4.129}$$

olup

$$\begin{aligned}
c_1 &= 94, \\
d_1 &= -98
\end{aligned} \tag{4.130}$$

elde edilir. Denklem, (4.130), (4.127)' de yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= 1 + 94 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \\
v_1(t) &= 1 - 98 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.131}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.125)'de $k = 2$ alındığında;

$$\begin{aligned}
Resu_2(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_2(t) + u_2(t) - 95v_2(t), \\
Resv_2(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_2(t) + u_2(t) + 97v_2(t)
\end{aligned} \tag{4.132}$$

olarak yazılır . (4.15)'de $k = 2$ için;

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \\
v_2(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.133}$$

olup (4.133) denklemleri (4.132)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_2(t) &= c_1 + c_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&\quad - 95 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right), \\
Resv_2(t) &= d_1 + d_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&\quad + 97 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right)
\end{aligned} \tag{4.134}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha Resu_2(0) &= c_2 + c_1 - 95d_1 = 0, \\
{}_0^C D_t^\alpha Resv_2(0) &= d_2 + c_1 + 97d_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.135}$$

olup

$$\begin{aligned}
c_2 &= -c_1 + 95d_1 = -9404, \\
d_2 &= -c_1 - 97d_1 = 9412
\end{aligned} \tag{4.136}$$

elde edilir. Denklem (4.136) ve (4.130), (4.133)' de yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= 1 + 94 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 9404 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \\
v_2(t) &= 1 - 98 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 9412 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.137}$$

bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.125)'de $k = 3$ alındığında;

$$\begin{aligned}
Resu_3(t) &= {}_0^C D_t^\alpha u_3(t) + u_3(t) - 95v_3(t), \\
Resv_3(t) &= {}_0^C D_t^\alpha v_3(t) + u_3(t) + 97v_3(t)
\end{aligned} \tag{4.138}$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 3$ için;

$$\begin{aligned}
u_3(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}, \\
v_3(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.139}$$

olup (4.139) denklemi (4.138)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Resu_3(t) &= c_1 + c_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&\quad + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\
&\quad - 95 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right), \\
Resv_3(t) &= d_1 + d_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&\quad + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\
&\quad + 97 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) \quad (4.140)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_2(0) &= c_3 + c_2 - 95d_2 = 0, \\
{}_0^C D_t^{2\alpha} Resv_2(0) &= d_3 + c_2 + 97d_2 = 0 \quad (4.141)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
c_3 &= -c_2 + 95d_2 = 903544, \\
d_3 &= -c_2 - 97d_2 = -903560 \quad (4.142)
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.142), (4.130), (4.136), (4.139)' da yerine konulduğunda 3.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(t) &= 1 + 94 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 9404 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + 903544 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}, \\
v_3(t) &= 1 - 98 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 9412 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - 903560 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \quad (4.143)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. c_4, d_4 ve $u_4(t), v_4(t)$ 'ü bulmak için ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(0) = 0$ ve ${}_0^C D_t^{3\alpha} Resv_4(0) = 0$ yazılır. c_5, d_5 ve $u_5(t), v_5(t)$ 'i bulmak için ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resu_5(0) = 0$ ve ${}_0^C D_t^{4\alpha} Resv_5(0) = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$c_4 = -86741744,$$

$$d_4 = 86741776 \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} u_4(t) &= 1 + 94 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 9404 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + 903544 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ &\quad - 86741744 \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)}, \\ v_4(t) &= 1 - 98 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 9412 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - 903560 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ &\quad + 86741776 \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \end{aligned} \quad (4.145)$$

ve

$$c_5 = 8327210464,$$

$$d_5 = -8327210528 \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} u_5(t) &= 1 + 94 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 9404 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + 903544 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ &\quad - 86741744 \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} + 8327210464 \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)}, \\ v_5(t) &= 1 - 98 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 9412 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - 903560 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ &\quad + 86741776 \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} - 8327210528 \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \end{aligned} \quad (4.147)$$

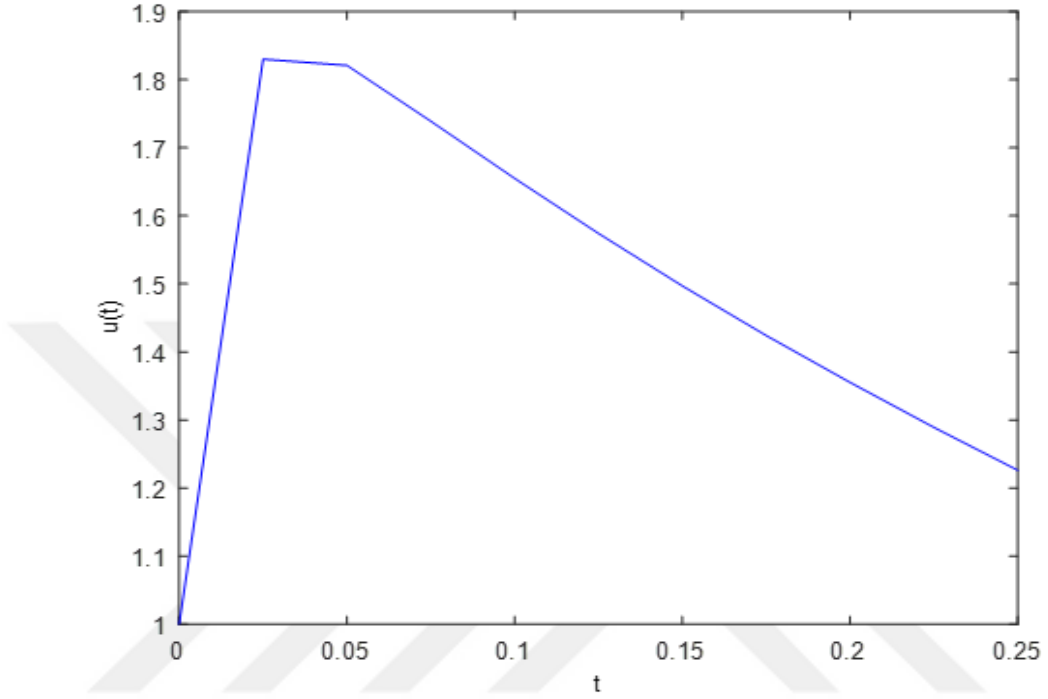
olarak bulunur. $k = 6, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

$\alpha = 1, k = 150$ için $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği Şekil 4.10' da verilmiştir.

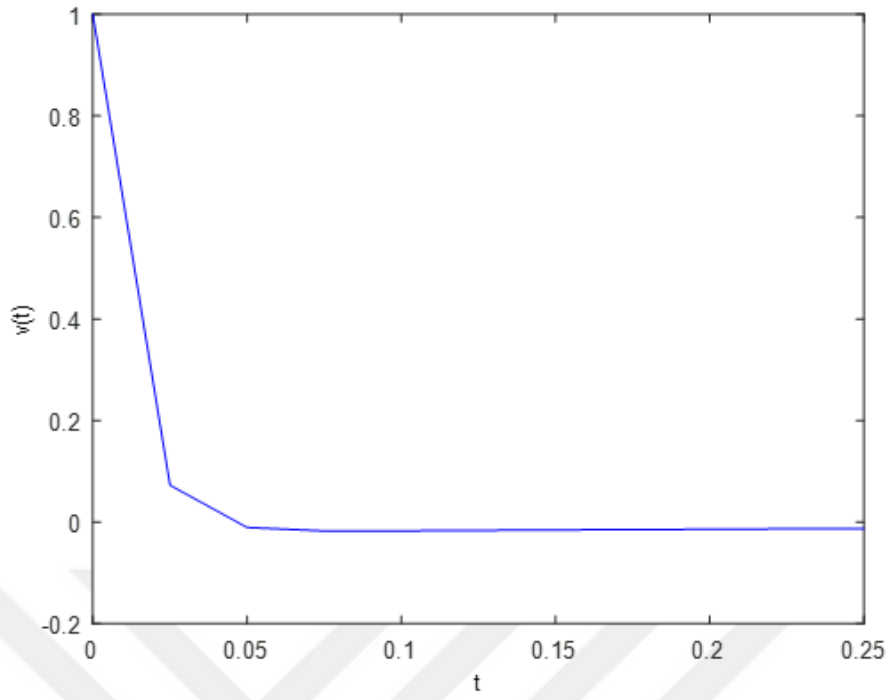
$\alpha = 1, k = 150$ için $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği Şekil 4.11' de verilmiştir.

$\alpha = 1, k = 150$ ve farklı t değerleri için $u_{150}(t)$, RPSM ile hesaplanmış ve bulunan sonuçlar Tablo 4.4' de verilmiştir. Tabloda $u_e(t)$ tam çözümünün değerleri ile birlikte mutlak hata değerleri de hesaplanmıştır. $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün $u_e(t)$ tam çözümüne yakın olduğu görülmektedir.

$\alpha = 1, k = 150$ ve farklı t değerleri için $v_{150}(t)$, RPSM ile hesaplanmış ve bulunan sonuçlar Tablo 4.5’de verilmiştir. Tabloda $v_e(t)$ tam çözümünün değerleri ile birlikte mutlak hata değerleri de hesaplanmıştır. $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün $v_e(t)$ tam çözümüne yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 4.10: Örnek 4.2.5’ de $\alpha = 1, k = 150$ için $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.



Şekil 4.11: Örnek 4.2.5’de $\alpha = 1, k = 150$ için $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.

Tablo 4.4: Örnek 4.2.5’ de $\alpha = 1, k = 150$ için $u_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.123)’deki $u_e(t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.

t	$u_e(t)$	$u_{150}(t)$	Mutlak Hata
0	1	1	0
0.025	1.830049650419	1.83004965042	3×10^{-17}
0.050	1.820521847980	1.82052184798	1×10^{-16}
0.075	1.7389664179059	1.73896641791	2×10^{-14}
0.100	1.6548121396395	1.65481213964	5×10^{-13}
0.125	1.574165520630	1.57416552062	9×10^{-12}
0.150	1.4973979619154	1.49739796171	2×10^{-10}
0.175	1.4243694914073	1.42436948626	3×10^{-9}
0.200	1.3549022160256	1.35490213155	8×10^{-8}
0.225	1.2888228592360	1.28882209063	8×10^{-7}
0.250	1.2259662270401	1.22596520603	1×10^{-6}

Tablo 4.5: Örnek 4.2.5’de $\alpha = 1, k = 150$ için $v_{150}(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.123)’deki $v_e(t)$ tam çözümünün karşılaştırılması.

t	$v_e(t)$	$v_{150}(t)$	Mutlak Hata
0	1	1	0
0.025	1.830049650419	1.83004965042	3×10^{-17}
0.050	1.820521847980	1.82052184798	1×10^{-16}
0.075	1.7389664179059	1.73896641791	2×10^{-14}
0.100	1.6548121396395	1.65481213964	5×10^{-13}
0.125	1.574165520630	1.57416552062	9×10^{-12}
0.150	1.4973979619154	1.49739796171	2×10^{-10}
0.175	1.4243694914073	1.42436948626	3×10^{-9}
0.200	1.3549022160256	1.35490213155	8×10^{-8}
0.225	1.2888228592360	1.28882209063	8×10^{-7}
0.250	1.2259662270401	1.22596520603	1×10^{-6}

Örnek 4.2.6: Yöntemi ikinci olarak aşağıdaki kesirli mertebeden stiff sistemine uygulayalım. Sistem

$${}_0^C D_t^\alpha u(t) = -1002(t) + 1000v^2(t),$$

$${}_0^C D_t^\alpha v(t) = u(t) - v(t) - v^2(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.148)$$

şeklindedir (Freihet ve diğ. 2019). Sistemin başlangıç koşulu

$$u(0) = 1, v(0) = 1 \quad (4.149)$$

dır. $\alpha = 1$ için tam çözümü

$$u_e(t) = e^{-2t},$$

$$v_e(t) = e^{-t} \quad (4.150)$$

olarak verilmiştir (Freihet ve diğ. 2019). Denklemin rezidual fonksiyonu

$$Resu(t) = {}_0^C D_t^\alpha u(t) + 1002u(t) - 1000v^2(t),$$

$$Resv(t) = {}^C_0D_t^\alpha v(t) - u(t) + v(t) + v^2(t) \quad (4.151)$$

olarak ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu

$$\begin{aligned} Resu_k(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_k(t) + 1002u_k(t) - 1000v_k^2(t), \\ Resv_k(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_k(t) + u_k(t) + v_k(t) + v_k^2(t) \end{aligned} \quad (4.152)$$

olur ve $k = 1$ için rezidual fonksiyonu

$$\begin{aligned} Resu_1(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_1(t) + 1002u_1(t) - 1000v_1^2(t), \\ Resv_1(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_1(t) - u_1(t) + v_1(t) + v_1^2(t) \end{aligned} \quad (4.153)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 1$ alınarak

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \\ v_1(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \end{aligned} \quad (4.154)$$

bulunur ve (4.154) denklemleri (4.153)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_1(t) &= c_1 + 1002 \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \\ &\quad - 1000 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2, \\ Resv_1(t) &= d_1 - \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ &\quad + \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.155)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned} Resu_1(0) &= c_1 + 1002 - 1000, \\ Resv_1(0) &= d_1 - 1 + 1 + 1 \end{aligned} \quad (4.156)$$

olup

$$\begin{aligned} c_1 &= -2, \\ d_1 &= -1 \end{aligned} \quad (4.157)$$

elde edilir. Denklem, (4.157), (4.154)' de yerine konulduğunda 1.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 - 2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \\ v_1(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \end{aligned} \quad (4.158)$$

bulunur. Benzer şekilde Denklem (4.152)'de $k = 2$ alındığında;

$$\begin{aligned} Resu_2(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_2(t) + 1002u_2(t) - 1000v_2^2(t), \\ Resv_2(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_2(t) - u_2(t) + v_2(t) + v_2^2(t) \end{aligned} \quad (4.159)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 2$ için;

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \\ v_2(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \end{aligned} \quad (4.160)$$

olup (4.160) denklemleri (4.159)'da yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_2(t) &= c_1 + c_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 1002 \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \\ &\quad - 1000 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right)^2, \\ Resv_2(t) &= d_1 + d_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + 1 \\ &\quad + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &\quad + \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.161)$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha Resu_2(0) &= c_2 + 1002c_1 - 2000d_1 = 0 \\ {}^C_0D_t^\alpha Resv_2(0) &= d_2 - c_1 + d_1 + 2d_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.162)$$

olup

$$c_2 = -1002c_1 + 1000d_1 = 4 ,$$

$$d_2 = c_1 - 3d_1 = 1 \quad (4.163)$$

elde edilir. Denklem (4.163) ve (157), (4.160)' da yerine konulduğunda 2.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 - 2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 4 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \\ v_2(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \end{aligned} \quad (4.164)$$

elde edilir. Benzer şekilde Denklem (4.152)'de $k = 3$ alındığında;

$$\begin{aligned} Resu_3(t) &= {}^C_0D_t^\alpha u_3(t) + 1002u_3(t) - 1000v_3^2(t), \\ Resv_1(t) &= {}^C_0D_t^\alpha v_3(t) - u_3(t) + v_3(t) + v_3^2(t) \end{aligned} \quad (4.165)$$

olarak yazılır. (4.15)'de $k = 3$ için;

$$\begin{aligned} u_3(t) &= 1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}, \\ v_3(t) &= 1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \end{aligned} \quad (4.166)$$

olup (4.166) denklemleri (4.165)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} Resu_3(t) &= c_1 + c_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &+ 1002 \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) \\ &- 1000 \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right. \\ &\left. + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Resv_3(t) &= d_1 + d_2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&- \left(1 + c_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + c_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + c_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) + 1 \\
&+ d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\
&+ \left(1 + d_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + d_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + d_3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right)^2 \quad (4.167)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$${}_0^C D_t^{2\alpha} Resu_3(0) = c_3 + 1002c_2 - 1000 \left(\frac{d_1^2 \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} + 2d_2 \right) = 0$$

$${}_0^C D_t^{2\alpha} Resv_3(0) = d_3 - c_2 + d_2 + \frac{d_1^2 \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} + 2d_2 = 0$$

olup

$$\begin{aligned}
c_3 &= -1002c_2 + 1000 \left(\frac{d_1^2 \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} + 2d_2 \right) \\
&= -\frac{8(251\Gamma(1+\alpha)^2 - 125\Gamma(1+2\alpha))}{\Gamma(1+\alpha)^2},
\end{aligned}$$

$$d_3 = c_2 - d_2 - \frac{d_1^2 \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} - 2d_2 = \frac{\Gamma(1+\alpha)^2 - \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} \quad (4.168)$$

elde edilir. Denklem (4.168), (4.157), (4.163), (4.166)' da yerine konulduğunda 3.RPS yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(t) &= 1 - 2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 4 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
&- \frac{8(251\Gamma(1+\alpha)^2 - 125\Gamma(1+2\alpha))}{\Gamma(1+\alpha)^2} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}, \\
v_3(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(1+\alpha)^2 - \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \quad (4.169)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. c_4, d_4 ve $u_4(t), v_4(t)$ 'ü bulmak için

$${}_0^C D_t^{3\alpha} Resu_4(0) = 0, {}_0^C D_t^{3\alpha} Resv_4(0) = 0 \text{ yazılır ve}$$

$$c_4 = \frac{16(125876\Gamma(1+\alpha)^2 \Gamma(1+2\alpha) - 62750\Gamma(1+2\alpha)^2 - 125\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha))}{\Gamma(1+\alpha)^2\Gamma(1+2\alpha)},$$

$$d_4 = \frac{-2011\Gamma(1+\alpha)^2 \Gamma(1+2\alpha) + 1003\Gamma(1+2\alpha)^2 + 2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2\Gamma(1+2\alpha)} \quad (4.170)$$

$$u_4(t) = 1 - 2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + 4 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{8(251\Gamma(1+\alpha)^2 - 125\Gamma(1+2\alpha))}{\Gamma(1+\alpha)^2} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} +$$

$$\frac{16(125876\Gamma(1+\alpha)^2 \Gamma(1+2\alpha) - 62750\Gamma(1+2\alpha)^2 - 125\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha))}{\Gamma(1+\alpha)^2\Gamma(1+2\alpha)} \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)},$$

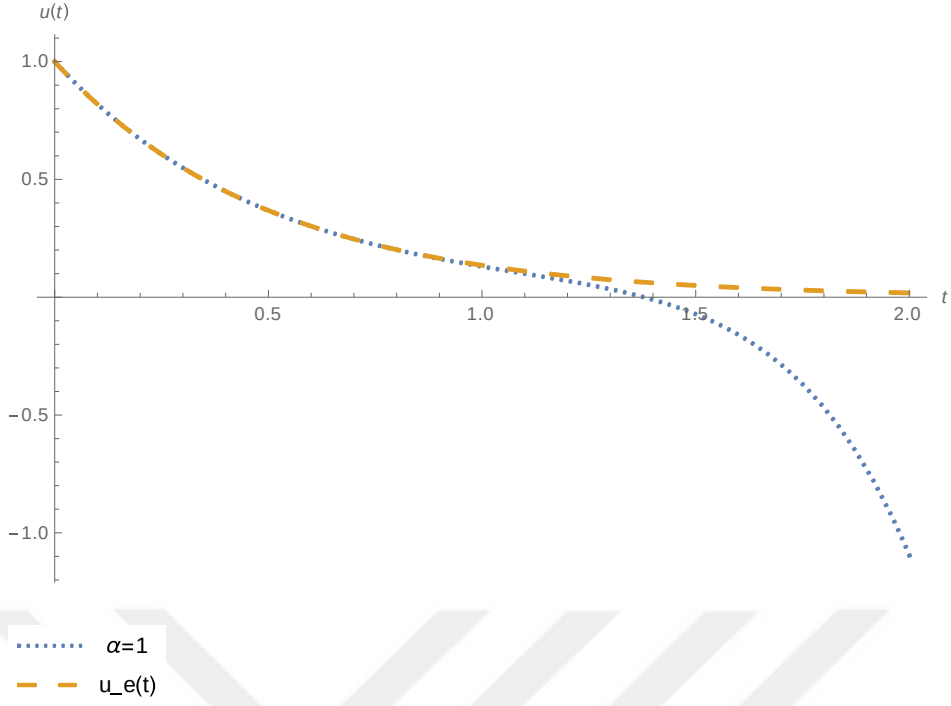
$$v_4(t) = 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(1+\alpha)^2 - \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} +$$

$$\frac{-2011\Gamma(1+\alpha)^2 \Gamma(1+2\alpha) + 1003\Gamma(1+2\alpha)^2 + 2\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)^2\Gamma(1+2\alpha)} \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \quad (4.171)$$

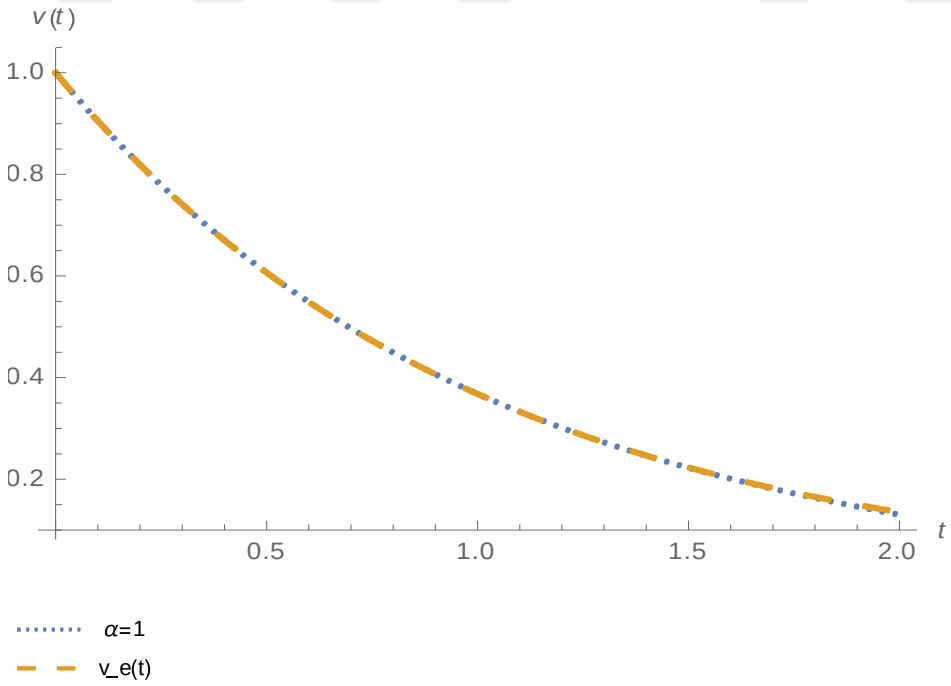
olarak bulunur. $k = 5, 7, 8, \dots$ için u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla aynı şekilde bulunur.

$\alpha = 1, k = 7$ için $u_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $u_e(t)$ tam çözümünün iki boyutlu grafiği Şekil 4.12'de verilmiştir. Grafikte $t \in [0, 1]$ için $u_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve $u_e(t)$ tam çözümüne çok yakın olduğu görülmektedir.

$\alpha = 1, k = 7$ için $v_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $v_e(t)$ tam çözümünün iki boyutlu grafiği Şekil 4.13'de verilmiştir. Grafikte $t \in [0, 2]$ için $u_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve $u_e(t)$ tam çözümüne çok yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 4.12: $\alpha = 1, k = 7$ için $u_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $u_e(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.



Şekil 4.13: Örnek 4.2.6' da $\alpha = 1, k = 7$ için $v_7(t)$ yaklaşık çözümünün ve (4.150)'deki $v_e(t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.

5. SINIRLI KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak Zhou tarafından 1986 ortaya atılmış daha sonra geliştirilmiştir. Arıkoğlu ve Özkol, kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için yeni bir teknik olan kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi (FDTM) geliştirmişlerdir. FDTM, irrasyonel mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için yeterli olmadığından, bu bölümde rasyonel veya irrasyonel mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için uygulanabilecek yeni bir yöntem olan sınırlı kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi (RFDTM) ele alındı. Kesirli diferansiyel denklemler, RFDTM kullanılarak çözüldü.

5.1 Yöntemin Algoritması

$f(x, y): R^2 \rightarrow R$ analitik fonksiyon olsun. $f(x, y)$ 'nin (x_0, y_0) civarında iki değişkenli Taylor serisi açılımı

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \quad (5.1)$$

dir. Burada

$$F(i, j) = \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)_{(x_0, y_0)} \quad (5.2)$$

olarak alınır. Denklem (5.2), (5.1)'de yerine yazıldığında

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} F(i, j) (x - x_0)^i (y - y_0)^j \quad (5.3)$$

elde edilir (Khudair ve diğ. 2017). Denklem (5.2)'deki $F(i, j)$, $f(x, y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferansiyel dönüşümüdür. Denklem (5.3) ise $F(i, j)$ 'nin ters diferansiyel dönüşümünü ifade eder (Khudair ve diğ. 2017).

$$u(x) = [f(x, y)]_{y=(x-x_0)^{\alpha+y_0}}, \quad \alpha > 0 \quad (5.4)$$

ile iki boyutlu $f(x, y)$ fonksiyonu bir boyutlu $u(x)$ fonksiyonu ile ifade edilir. Buradan Denklem (5.2) ve Denklem (5.3) sırasıyla

$$U(i, j) = F(i, j) = \frac{1}{i!j!} \left(\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)_{(x_0, y_0)} \quad (5.5)$$

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) (x - x_0)^{i+\alpha j} \quad (5.6)$$

olarak yazılır ve Denklem (5.5), sınırlı kesirli diferansiyel dönüşüm (RFDTM), Denklem (5.6) ise (RFDTM)'nin tersini ifade eder (Khudair ve diğ. 2017). $u(x)$, $v(x)$ ve $w(x)$ sırasıyla

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \quad (5.7)$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} \quad (5.8)$$

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} W(i, j) x^{i+\alpha j} \quad (5.9)$$

olarak ifade edilir. (Khudair ve diğ. 2017).

Teorem 5.1.1: $i \geq 0, j \geq 0$ için,

$$w(x) = u(x) + v(x) \quad (5.10)$$

ise

$$W(i, j) = U(i, j) + V(i, j) \quad (5.11)$$

olur (Khudair ve diğ. 2017).

İspat: Denklem (5.7), (5.8) ve (5.9), (5.10)'da yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} W(i,j) x^{i+\alpha j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} U(i,j) x^{i+\alpha j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} V(i,j) x^{i+\alpha j} \\
&= U(0,0)x^0 + U(1,0)x^1 + U(2,0)x^2 + \dots + U(0,1)x^\alpha \\
&\quad + U(1,1)x^{1+\alpha} + \dots + V(0,0)x^0 + V(1,0)x^1 + V(2,0)x^2 + \dots \\
&\quad + V(0,1)x^\alpha + V(1,1)x^{1+\alpha} + \dots \\
&= U(0,0)x^0 + V(0,0)x^0 + U(1,0)x^1 + V(1,0)x^1 + \dots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (U(i,j) + V(i,j)) x^{i+\alpha j} \tag{5.12}
\end{aligned}$$

bulunur.

$i \geq 0, j \geq 0$ için,

$$W(i,j) = U(i,j) + V(i,j) \tag{5.13}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2: $i \geq 0, j \geq 0$ için,

$$w(x) = u(x)v(x) \tag{5.14}$$

ise

$$W(i,j) = \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^i U(i,k) V(i-r, j-k) \tag{5.15}$$

olur (Khudair ve diğ. 2017).

İspat: Denklem (5.7), (5.8) ve (5.9), (5.14)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} W(i,j) x^{i+\alpha j} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} U(i,j) x^{i+\alpha j} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} V(i,j) x^{i+\alpha j} \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x^{\alpha j} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j x^{\alpha j} \right) \\
&= (\beta_0 x^0 + \beta_1 x^{\alpha} + \beta_2 x^{2\alpha} + \dots) \times (\gamma_0 x^0 + \gamma_1 x^{\alpha} + \gamma_2 x^{2\alpha} + \dots) \\
&= (\beta_0 x^0 \gamma_0 x^0 + \beta_0 x^0 \gamma_1 x^{\alpha} + \beta_0 x^0 \gamma_2 x^{2\alpha} + \dots \beta_1 x^{\alpha} \gamma_0 x^0 + \beta_1 x^{\alpha} \gamma_1 x^{\alpha} \\
&\quad + \beta_1 x^{\alpha} \gamma_2 x^{2\alpha} + \dots) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \beta_k \gamma_{j-k} x^{\alpha j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j x^{\alpha j}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

bulunur. Burada,

$$\beta_j = \sum_{i=0}^{\infty} U(i,j) x^i \tag{5.17}$$

$$\gamma_j = \sum_{i=0}^{\infty} V(i,j) x^i \tag{5.18}$$

$$\omega_j = \sum_{k=0}^j \beta_k \gamma_{j-k} \tag{5.19}$$

alınmıştır. Denklem (5.17)'de j yerine k alındığında:

$$\beta_k = \sum_{i=0}^{\infty} U(i,k) x^i \tag{5.20}$$

olur. Denklem (5.18)'de j yerine $j - k$ alındığında:

$$\gamma_{j-k} = \sum_{i=0}^{\infty} V(i,j-k) x^i \tag{5.21}$$

olarak yazılabilir. Bulunan değerler Denklem (5.19)'da yerine yazıldığında:

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \sum_{k=0}^j \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} U(i, k) x^i \right) \times \left(\sum_{i=0}^{\infty} V(i, j-k) x^i \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^j [(U(0, k)x^0 + U(1, k)x^1 + U(2, k)x^2 + \dots) \\
&\quad \times (V(0, j-k)x^0 + V(1, j-k)x^1 + (2, j-k)x^i + \dots)] \\
&= \sum_{k=0}^j [U(0, k)x^0V(0, j-k)x^0 + U(0, k)x^0V(1, j-k)x^1 \\
&\quad + U(0, k)x^0V(2, j-k)x^2 + \dots + U(1, k)x^1V(0, j-k)x^0 \\
&\quad + U(1, k)x^1V(1, j-k)x^1 + U(1, k)x^1V(2, j-k)x^2 + \dots \\
&\quad + U(2, k)x^2V(0, j-k)x^0 + U(2, k)x^2V(1, j-k)x^1 \\
&\quad + U(2, k)x^2V(2, j-k)x^2 + \dots] \\
&= (U(0, k)x^0V(0, j-k)x^0 + U(0, k)x^0V(1, j-k)x^1 \\
&\quad + U(0, k)x^0V(2, j-k)x^2 + \dots + U(1, k)x^1V(0, j-k)x^0 \\
&\quad + U(1, k)x^1V(1, j-k)x^1 + U(1, k)x^1V(2, j-k)x^2 + \dots \\
&\quad + U(2, k)x^2V(0, j-k)x^0 + U(2, k)x^2V(1, j-k)x^1 \\
&\quad + U(2, k)x^2V(2, j-k)x^2 + \dots) \\
&= \sum_{k=0}^j \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^i U(i, k) V(i-r, j-k) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^i U(i, k) V(i-r, j-k) x^i \tag{5.22}
\end{aligned}$$

olur. Denklem (5.22), Denklem (5.16)'da yerine yazıldığında:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} W(i, j) x^{i+\alpha j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^i U(i, k) V(i-r, j-k) x^{i+\alpha j} \tag{5.23}$$

elde edilir. x 'in katsayıları karşılaştırıldığında:

$i \geq 0, j \geq 0$ için,

$$W(i, j) = \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^i U(i, k) V(i-r, j-k) \tag{5.24}$$

bulunur.

Teorem 5.1.3: m ve n tam sayı olmak üzere,

$$v(x) = x^{m+\alpha n} u(x) \quad (5.25)$$

ise

$i < m$ veya $j < n$ için:

$$V(i, j) = 0 \quad (5.26)$$

$i \geq m$ veya $j \geq n$ için:

$$V(i, j) = U(i - m, j - n) \quad (5.27)$$

olur (Khudair ve diğ. 2017).

İspat : Denklem (5.7)'den:

$$x^{m+\alpha n} u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+m+\alpha j+\alpha n} \quad (5.28)$$

olur.

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\ &\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V(i + m, j + n) x^{i+m+\alpha j+\alpha n} \end{aligned} \quad (5.29)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.29), (5.25)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V(i+m, j+n) x^{i+m+\alpha j+\alpha n} \\
& = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+m+\alpha j+\alpha n}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

elde edilir. Denklem (5.30)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\
& + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+m+\alpha j+\alpha n} \\
& = \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} U(i-m, j-n) x^{i+\alpha j}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

olarak yazılabilir. x 'in katsayıları karşılaştırıldığında:

$i < m$ veya $j < n$ için:

$$V(i, j) = 0 \tag{5.32}$$

$i \geq m$ ve $j \geq n$ için:

$$V(i, j) = U(i-m, j-n) \tag{5.33}$$

bulunur.

Teorem 5.1.4: $v(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$ ise,

$i < m$ ve $j \geq 1$ için:

$$U(i, j) = 0 \tag{5.34}$$

$i \geq 0$ ve $j \geq 0$ için:

$$V(i, j) = U(i + m, j) \prod_{k=1}^n (i + \alpha j + k) \quad (5.35)$$

olur (Khudair ve diğ. 2017).

İspat:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} U(i, 0) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} = \sum_{i=0}^{m-1} U(i, 0) x^i \\ &\quad + \sum_{i=m}^{\infty} U(i, 0) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \end{aligned} \quad (5.36)$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d^m u(x)}{dx^m} &= \sum_{i=0}^{\infty} U(i+m, 0) \frac{(i+m)!}{i!} x^i \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) (i+\alpha j)(i+\alpha j-1) \dots (i+\alpha j-m \\
&+ 1) x^{i+\alpha j-m} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} U(i+m, 0) \frac{(i+m)!}{i!} x^i \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) (i+\alpha j)(i+\alpha j-1) \dots (i+\alpha j-m+1) x^{i+\alpha j-m} \\
&+ \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) (i+\alpha j)(i+\alpha j-1) \dots (i+\alpha j-m \\
&+ 1) x^{i+\alpha j-m} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} U(i+m, 0) \frac{(i+m)!}{i!} x^i \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) (i+\alpha j)(i+\alpha j-1) \dots (i+\alpha j-m+1) x^{i+\alpha j-m} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i+m, j) (i+m+\alpha j)(i+m+\alpha j-1) \dots (i+\alpha j \\
&+ 1) x^{i+\alpha j}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

olur.

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} = \sum_{i=0}^{\infty} V(i, 0) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} V(i, j) x^{i+\alpha j} \tag{5.38}$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.38) ve (5.37) eşitlenip x 'in katsayıları karşılaştırıldığında:

$i < m$ veya $j \geq 1$ için:

$$U(i, j) = 0 \tag{5.39}$$

$i \geq 0$ ve $j \geq 0$ için:

$$V(i, j) = U(i + m, j) \prod_{k=1}^n (i + \alpha j + k) \quad (5.40)$$

bulunur.

Teorem 5.1.5: $v(x) = {}^c D_x^\alpha u(x)$, $[\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1$ ise

$$U(i, 0) = 0, i = [\alpha] + 1, [\alpha] + 2, [\alpha] + 3, \dots$$

ve $i \geq 0$ ve $j \geq 0$ için:

$$V(i, j) = U(i, j + 1) \frac{\Gamma(i + \alpha j + \alpha + 1)}{\Gamma(i + \alpha j + 1)} \quad (5.41)$$

olur (Khudair ve diğ. 2017).

İspat:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} = \sum_{i=0}^{\infty} U(i, 0) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} {}^c D_x^\alpha u(x) &= \sum_{i=[\alpha]+1}^{\infty} U(i, 0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i, j) \frac{\Gamma(i+\alpha j+1)}{\Gamma(i+\alpha j-\alpha+1)} x^{i+\alpha j-\alpha}, [\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1 \\ &= \sum_{i=[\alpha]+1}^{\infty} U(i, 0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} x^{i+\alpha j}, \\ &[\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1 \end{aligned} \quad (5.43)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.12) ile (5.43) eşitlenip x 'in katsayıları karşılaştırıldığında:

$$U(i, 0) = 0, i = [\alpha] + 1, [\alpha] + 2, [\alpha] + 3, \dots \quad (5.44)$$

ve $i \geq 0$ ve $j \geq 0$ için:

$$V(i, j) = U(i, j + 1) \frac{\Gamma(i + \alpha j + \alpha + 1)}{\Gamma(i + \alpha j + 1)} \quad (5.45)$$

olur.

5.2 Sınırlı Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 5.2.1: Başlangıç koşulları

$$u(0) = A, u'(0) = B \quad (5.46)$$

olan kesirli diferansiyel denklemi

$${}_a^C D_x^\alpha u(x) + u(x) = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (5.47)$$

ele alalım (Khudair ve diğ. 2017). Denklem (5.43), (5.7), (5.47)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} U(i, 0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} x^{i+\alpha j} \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} U(i, 0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} x^{i+\alpha j} \\ = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \end{aligned} \quad (5.49)$$

olarak yazılabilir. x 'in katsayıları karşılaştırıldığında:

$i \geq 0$ ve $j \geq 0$ için:

$$U(i, j+1) = - \frac{\Gamma(i+\alpha j+1)}{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)} U(i, j) x^{i+\alpha j} \quad (5.50)$$

olur.

$i \geq 2$ ve $j = 0$ için:

$$U(i, 0) = 0 \quad (5.51)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j) x^{i+\alpha j} \\ &= U(0,0) + U(0,1)x^{\alpha} + U(0,2)x^{2\alpha} + \dots + U(1,0)x + U(1,1)x^{1+\alpha} \\ &\quad + U(1,2)x^{1+2\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (5.52)$$

olarak yazılabilir. Başlangıç koşulu $u(0) = A$ yerine konulduğunda:

$$u(0) = U(0,0) = A \quad (5.53)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \alpha U(0,1)x^{\alpha-1} + 2\alpha U(0,2)x^{2\alpha-1} + \dots + U(1,0) + (1+\alpha)U(1,1)x^{\alpha} \\ &\quad + (1+2\alpha)U(1,2)x^{2\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (5.54)$$

dır. Başlangıç koşulu $u'(0) = B$ yerine konulduğunda:

$$u'(0) = U(1,0) = B \quad (5.55)$$

olur. Denklem (5.50), (5.51), (5.53), (5.55), (5.7)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned} u(x) &= A + Bx - \frac{Ax^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{Bx^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{Ax^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{Bx^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} - \frac{Ax^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ &\quad - \frac{Bx^{1+3\alpha}}{\Gamma(2+3\alpha)} + \frac{Ax^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} + \frac{Bx^{1+4\alpha}}{\Gamma(2+4\alpha)} - \frac{Ax^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} - \frac{Bx^{1+5\alpha}}{\Gamma(2+5\alpha)} \\ &\quad + \frac{Ax^{6\alpha}}{\Gamma(1+6\alpha)} + \frac{Bx^{1+6\alpha}}{\Gamma(2+6\alpha)} - \frac{Ax^{7\alpha}}{\Gamma(1+7\alpha)} - \frac{Bx^{1+7\alpha}}{\Gamma(2+7\alpha)} + \frac{Ax^{8\alpha}}{\Gamma(1+8\alpha)} \\ &\quad + \frac{Bx^{1+8\alpha}}{\Gamma(2+8\alpha)} + \dots \end{aligned} \quad (5.56)$$

bulunur ve

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{Ax^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} + \frac{Bx^{1+k\alpha}}{\Gamma(2+k\alpha)} \right) \quad (5.57)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.57). (5.47)'nin tam çözümüdür.

Örnek 5.2.2: Başlangıç koşulları

$$u(0) = A, u'(0) = B \quad (5.58)$$

olan kesirli diferansiyel denklemi

$$u''(x) + {}^C D_x^\alpha u(x) + u(x) = 1 + x, \quad 1 < \alpha < 2, \quad x \in [0,1] \quad (5.59)$$

ele alalım (Khudair ve diğ. 2017). (5.37)'de $m = 2$ alındığında:

$$u''(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U(i+2,0) \frac{(i+2)!}{i!} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i+2,j) (i+2+\alpha j) (i+1+\alpha j) x^{i+\alpha j} \quad (5.60)$$

bulunur. Denklem (5.60), (5.7) ve (5.43), (5.59)'da yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} U(i+2,0) \frac{(i+2)!}{i!} x^i \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} U(i+2,j) (i+2+\alpha j) (i+1+\alpha j) x^{i+\alpha j} \\ & + \sum_{i=2}^{\infty} U(i,0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i,j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} x^{i+\alpha j} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i,j) x^{i+\alpha j} = x + 1 \end{aligned} \quad (5.61)$$

olur. Denklem (5.61)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \left[U(i+2,0) \frac{(i+2)!}{i!} + U(i,1) \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(i+1)} + U(i,0) \right] x^i \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[U(i+2,j)(i+\alpha j+2)(i+\alpha j+1) \right. \\
& \left. + U(i,j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} + U(i,j) \right] x^{i+\alpha j} \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} U(i,0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} x^{i-\alpha} = x + 1
\end{aligned} \tag{5.62}$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.62)'de x 'in katsayıları karşılaştırıldığında dördüncü terimden:

$$\sum_{i=2}^{\infty} U(i,0) \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha+1)} = 0 \tag{5.63}$$

bulunur ve

$$U(i,0) = 0, i \geq 2 \tag{5.64}$$

olur. $i = 0$ için x 'in katsayıları karşılaştırıldığında birinci terimden:

$$U(2,0) \frac{2!}{0!} + U(0,1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} + U(0,0) = 1 \tag{5.65}$$

elde edilir ve Denklem (5.53), (5.64), Denklem (5.65)'de yerine konulup düzenlendiğinde:

$$U(0,1) = \frac{1-A}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{5.66}$$

olur. Denklem (5.62)'de $i = 1$ için x 'in katsayıları karşılaştırıldığında birinci terimden:

$$U(3,0) \frac{2!}{1!} + U(1,1) \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2)} + U(1,0) = 1 \tag{5.67}$$

bulunur ve Denklem (5.55), (5.64), Denklem (5.67)'de yerine konulup düzenlendiğinde:

$$U(1,1) = \frac{1-B}{\Gamma(\alpha+2)} \tag{5.68}$$

olur. Denklem (5.62)'de $i \geq 2$ için x 'in katsayıları karşılaştırıldığında birinci terimden:

$$U(i+2,0) \frac{(i+2)!}{i!} + U(i,1) \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(i+1)} + U(i,0) = 0 \quad (5.69)$$

bulunur. Denklem (5.64), (5.69)'da yerine konulduğunda:

$$U(i,1) \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(i+1)} = 0 \quad (5.70)$$

bulunur ve

$$U(i,1) = 0, i \geq 2 \quad (5.71)$$

olarak yazılır. Denklem (5.62)'de $i \geq 0, j \geq 1$ için x 'in katsayıları karşılaştırıldığında ikinci terimden:

$$\begin{aligned} U(i+2,j)(i+\alpha j+2)(i+\alpha j+1) + U(i,j+1) \frac{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha j+1)} + U(i,j) &= 0 \\ &= U(i,j+1) \\ &= - \frac{\Gamma(i+\alpha j+1)}{\Gamma(i+\alpha j+\alpha+1)} [U(i+2,j)(i+\alpha j+2)(i+\alpha j+1) \\ &\quad + U(i,j+1)], i \geq 0, j \geq 1 \end{aligned} \quad (5.72)$$

olur. Denklem (5.64), (5.66), (5.68), (5.71), (5.72), (5.7)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned} u(x) = A + Bx + \frac{(1-A)x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{(1-B)x^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{(1-A)x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{(1-B)x^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} \\ + \frac{(1-A)x^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{(1-B)x^{1+3\alpha}}{\Gamma(2+3\alpha)} - \frac{(1-A)x^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} - \frac{(1-B)x^{1+4\alpha}}{\Gamma(2+4\alpha)} \\ + \frac{(1-A)x^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} + \frac{(1-B)x^{1+5\alpha}}{\Gamma(2+5\alpha)} - \frac{(1-A)x^{6\alpha}}{\Gamma(1+6\alpha)} - \frac{(1-B)x^{1+6\alpha}}{\Gamma(2+6\alpha)} \\ + \frac{(1-A)x^{7\alpha}}{\Gamma(1+7\alpha)} + \frac{(1-B)x^{1+7\alpha}}{\Gamma(2+7\alpha)} - \frac{(1-A)x^{8\alpha}}{\Gamma(1+8\alpha)} - \frac{(1-B)x^{1+8\alpha}}{\Gamma(2+8\alpha)} \\ + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

bulunur ve

$$u(x) = A + Bx + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{(1-A)x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} + \frac{(1-B)x^{1+k\alpha}}{\Gamma(2+k\alpha)} \right) \quad (5.74)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.74), (5.59)'un genel çözümüdür. $u(0) = 1, u'(0) = 1$ ise $u(x) = x + 1$ ve $1 < \alpha < 2$ için (5.74) tam çözüm olur.



6. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ADOMIAN POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ

6.1 Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Adomian ayrıştırma yöntemi (ADM) 1980'li yılların başında Amerikalı bilim adamı George Adomian tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemin avantajı, çözümün analitik olarak elde edilebilmesi ve çözümün hızlı şekilde yakınsamasıdır. Adomian ayrıştırma yönteminde çözümler seri formda elde edilmiştir.

Adomian ayrıştırma yöntemi için

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (6.1)$$

denklemini alalım (Saha Ray ve Bera 2005). Burada L tersi alınabilir lineer operatördür, R lineer kısım ve N lineer olmayan operatördür. Adomian ayrıştırma metodunda (6.1)'in genel çözümü;

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (6.2)$$

olarak kabul edilir. Burada u_0 , $Lu = g$ 'nin tam çözümüdür (Saha Ray ve Bera 2005). Denklem (6.1)'den

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (6.3)$$

olarak yazılabilir (Saha Ray ve Bera 2005). L tersi alınabilir olduğundan , Denklem (6.1)'in her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulandığında

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (6.4)$$

olur. $L \equiv \frac{d^n}{dt^n}$ için L^{-1} operatörü 0'dan t 'ye kadar olan n katlı integrali temsil eder.

Örneğin $L \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ operatörü için

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - u'(0)t \quad (6.5)$$

olarak bulunur ve Denklem (6.5), (6.4)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$u = u(0) + u'(0)t + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (6.6)$$

elde edilir (Saha Ray ve Bera 2005). Başlangıç değer problemleri için $u(0) = A, u'(0) = B$ alınırsa

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (6.7)$$

olarak yazılabilir (Saha Ray ve Bera 2005). Adomian ayrıştırma yöntemine göre Denklem (6.6) veya (6.7)'deki ilk üç terim u_0 olarak tanımlanır. Nu 'nın lineer olmama durumundan dolayı;

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (6.8)$$

olarak yazılabilir, burada A_n 'ler, lineer olmayan $Nu = f(u)$ için elde edilen ve Adomian tarafından üretilen özel polinomlar kümesidir. A_n 'ler;

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n \geq 0 \quad (6.9)$$

formülü ile bulunur. (6.9) kullanılarak;

$$A_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{d\lambda^0} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = f(u_0) \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1!} \frac{d^1}{d\lambda^1} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{d^1}{d\lambda^1} [f(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \dots)]_{\lambda=0} \\ &= [(u_1 + 2\lambda u_2 \dots) f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \dots)]_{\lambda=0} = u_1 f'(u_0) \\ &= u_1 \frac{df(u_0)}{du_0} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} [f(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^1}{d\lambda^1} [f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + \cdots)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} [f''(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 \\
&\quad + 3\lambda^2 u_3 + \cdots) + (2u_2 + 6\lambda u_3 \\
&\quad + \cdots)(f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots))]_{\lambda=0} = u_2 \frac{df(u_0)}{du_0} \\
&\quad + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2 f(u_0)}{du_0^2} \tag{6.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[f \left(\sum_{i=0}^3 \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} [f(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3!} \frac{d^2}{d\lambda^2} [f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 \\
&\quad + \cdots)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3!} \frac{d^1}{d\lambda^1} [f''(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 \\
&\quad + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 + \cdots)^2 \\
&\quad + (2u_2 + 6\lambda u_3 + \cdots)(f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots))]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3!} [f'''(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 \\
&\quad + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 + \cdots)^3 \\
&\quad + 2(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 + \cdots)(2u_2 + 6\lambda u_3 + \cdots)f''(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 \\
&\quad + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots) + (6u_3 + 12\lambda^2 u_4 \\
&\quad + \cdots)(f'(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots)) \\
&\quad + f''(\lambda^0 u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots)(u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 \\
&\quad + \cdots)(2u_2 + 6\lambda u_3 + \cdots)]_{\lambda=0} \\
&= u_3 \frac{df(u_0)}{du_0} + u_1 u_2 \frac{d^2 f(u_0)}{du_0^2} + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{d^3 f(u_0)}{du_0^3} \\
&\quad \vdots \tag{6.13}
\end{aligned}$$

elde edilir (Adomian 1983). Son zamanlarda yapılan çalışmalarda Adomian ayrıştırma yöntemi yeniden gözden geçirilmiş ve Adomian polinomlarının matematiksel bir modeli verilmiştir. Bu nedenle yeni formül

$$u = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}Nu \quad (6.14)$$

$$u = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (6.15)$$

olur (Saha Ray ve Bera 2005). $u(0) = 0, u'(0) = 0$ koşulu altında

$$u_0 = \varphi + L^{-1}g, \quad L\varphi = 0 \quad (6.16)$$

dır. Böylece

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \quad (6.17)$$

olur (Saha Ray ve Bera 2005).

Bilinen u_0 kullanılarak, tüm bileşenler $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ (6.17)'den elde edilir ve (6.2)'de yerine konularak u elde edilir. Bu bölümde Riemann–Liouville kesirli integral operatörü $\frac{d^{-q}}{dt^{-q}}$ olarak verilmiştir.

6.1.1 Adomian Ayrıştırma Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 6.1.1.1: Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} - 2y^2 = 0, \quad y(0) = c \quad (6.18)$$

olarak ele alalım (Saha Ray ve Bera 2005).

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğunu varsayıldığında, Denklem (6.18)'de eşitliğin her iki tarafına L^{-1} uygulandığında;

$$y = c - L^{-1} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dt^{\frac{1}{2}}} \right) + 2L^{-1} y^2 \quad (6.19)$$

yazılabilir. Burada c keyfi bir sabittir. Buradan,

$$y = c - \frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dt^{\frac{1}{2}}} + 2L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (6.20)$$

olur.

$$y_0(t) = c,$$

$$y_{n+1}(t) = 2L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \frac{d^{\frac{1}{2}} y_n}{dt^{\frac{1}{2}}},$$

$$f(y) = y^2, A_0 = f(y_0) = c^2,$$

$$A_1 = 2y_1 y_0,$$

$$A_2 = 2y_2 y_0 + 2 \frac{y_1^2}{2!},$$

$$A_3 = 2y_3 y_0 + 2y_1 y_2,$$

$$\vdots$$

$$(6.21)$$

dir. Adomian ayrıştırma yöntemiyle $y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots$ 'nin Denklem (6.18)'in çözümü olduğunu varsayalım. Burada,

$$y_0(t) = c,$$

$$y_1(t) = 2L^{-1} A_0 - \frac{d^{\frac{1}{2}} y_0(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = 2c^2 t - 2c \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(t) = 2L^{-1} A_1 - \frac{d^{\frac{1}{2}} y_1(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = 4c^3 t^2 - \frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + ct,$$

$$y_3(t) = 2L^{-1} A_2 - \frac{d^{\frac{1}{2}} y_2(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = 8c^4 t^3 - \frac{352}{15} \frac{c^3 t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \left(5 + \frac{4}{\pi}\right) c^2 t^2 - \frac{4c}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}},$$

$$y_4(t) = 2L^{-1} A_3 - \frac{d^{\frac{1}{2}} y_3(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = 16c^5 t^4 - \frac{6464}{105\sqrt{\pi}} c^4 t^{\frac{7}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(50 + \frac{80}{\pi}\right) \frac{c^3 t^3}{3} - \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right) c^2 t^{\frac{5}{2}} + \frac{ct^2}{2}, \\
y_5(t) &= 2L^{-1}A_4 - \frac{d^{-\frac{1}{2}}y_4(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}} = 32c^6 t^5 - \frac{143744c^5 t^{\frac{9}{2}}}{945\sqrt{\pi}} \\
& + \left(\frac{568}{5\pi} + \frac{95}{2}\right) c^4 t^4 - \left(\frac{1072}{21\sqrt{\pi}} + \frac{1344}{35\pi\sqrt{\pi}}\right) c^3 t^{\frac{7}{2}} + \left(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\right) c^2 t^3 - \frac{8ct^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}, \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{6.22}$$

olur. Bu nedenle Denklem (6.18)'in çözümü,

$$y(t) = c + 2c^2 t - 2c \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} + 4c^3 t^2 - \frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + ct + \dots \tag{6.23}$$

olur.

Şimdi, lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem (6.18)'de $c = 1$ alınırsa

$$y(t) = 1 + 2t - 2 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} + 4t^2 - \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + t + \dots \tag{6.24}$$

olur. Bu tezde n terimli Adomian yaklaşık çözüm:

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t) \tag{6.25}$$

olarak alınmıştır.

t 'nin farklı değerleri için $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ Adomian ayrıştırma yöntemiyle hesaplanmış ve bulunan sonuçlar Tablo 6.1'de sunulmuştur.

Tablo 6.1: Denklem (6.18)'in farklı n değerleri için Adomian yaklaşık çözümleri.

t	φ_3	φ_4	φ_5
0	1	1	1
0.01	0.913049	0.912799	0.912803
0.02	0.889257	0.888954	0.888934
0.03	0.874706	0.874595	0.874517
0.04	0.864616	0.864911	0.864746
0.05	0.857224	0.858096	0.857827
0.06	0.851670	0.853251	0.852871
0.07	0.847467	0.849854	0.849369
0.08	0.844317	0.847574	0.846998
0.09	0.842021	0.846183	0.845539
0.1	0.840445	0.845522	0.84484

(6.18) denkleminin $y(t)$ çözümü

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^{\frac{n}{2}}, \quad y(0) = c \quad (6.26)$$

kesirli kuvvet serisi şeklinde de bulunabilir. Burada c bir sabittir. Denklem (6.26), Denklem (6.18)'de yerine konulduğunda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} t^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} y_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} t^{\frac{(n-1)}{2}} y_n - 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^{\frac{n}{2}} \right)^2 = 0 \quad (6.27)$$

elde edilir. Denklem (6.27)'de elde edilen kesirli kuvvet serilerinin katsayılarını karşılaştırarak

$$y_1 = -\frac{2y_0}{\sqrt{\pi}} = -\frac{2c}{\sqrt{\pi}},$$

$$y_2 = y_0 + 2y_0^2 = c + 2c^2,$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= -\frac{8y_0^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{4y_0}{3\sqrt{\pi}} = -\frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{4c}{3\sqrt{\pi}}, \\
y_4 &= \frac{y_0}{2} + \left(5 + \frac{4}{\pi}\right)y_0^2 + 4y_0^3 = \frac{c}{2} + \left(5 + \frac{4}{\pi}\right)c^2 + 4c^3, \\
y_5 &= -\frac{8y_0}{15\sqrt{\pi}} - \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right)y_0^2 - \frac{352y_0^3}{15\sqrt{\pi}} \\
&= -\frac{8c}{15\sqrt{\pi}} - \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right)c^2 - \frac{352c^3}{15\sqrt{\pi}}, \\
y_6 &= \frac{y_0}{6} + \left(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\right)y_0^2 + \left(\frac{80}{3\pi} + \frac{50}{3}\right)y_0^3 + 8y_0^4 \\
&= \frac{c}{6} + \left(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\right)c^2 + \left(\frac{80}{3\pi} + \frac{50}{3}\right)c^3 + 8c^4, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.28}$$

elde edilir. y_n değerleri Denklem (6.26)'da yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned}
y(t) &= c - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + (c + 2c^2)t - \left(\frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4c}{3\sqrt{\pi}}\right)t^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{c}{2} + \left(5 + \frac{4}{\pi}\right)c^2 + 4c^3\right]t^2 \\
&\quad - \left[\frac{8c}{15\sqrt{\pi}} + \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right)c^2 + \frac{352c^3}{15\sqrt{\pi}}\right]t^{\frac{5}{2}} \\
&\quad + \left[\frac{c}{6} + \left(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\right)c^2 + \left(\frac{80}{3\pi} + \frac{50}{3}\right)c^3 + 8c^4\right]t^3 + \dots
\end{aligned} \tag{6.29}$$

olur. Denklem (6.22) ve (6.29) karşılaştırıldığında, $y(t)$ çözümünün aynı olduğu görülür. (6.29)'da $c = 1$ alındığında

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + 3t - \left(\frac{8}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right)t^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{19}{2} + \frac{4}{\pi}\right)t^2 - \left(\frac{104}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right)t^{\frac{5}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{272}{9\pi} + \frac{185}{6}\right)t^3 + \dots
\end{aligned} \tag{6.30}$$

olur. Bu tezde n terimli yaklaşık kuvvet serisi çözümü:

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i t^{\frac{i}{2}} \tag{6.31}$$

olarak alınmıştır.

t 'nin farklı değerleri için Ψ_7, Ψ_8, Ψ_9 kesirli kuvvet serisi yöntemiyle hesaplanmış ve bulunan sonuçlar Tablo 6.2'de sunulmuştur.

Tablo 6.2: Denklem (6.18)'in farklı n değerleri için yaklaşık kuvvet serisi çözümleri.

	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9
0	1	1	1
0.01	1.0257	1.0257	1.0257
0.02	1.0544	1.0544	1.0545
0.03	1.0868	1.0868	1.0874
0.04	1.1238	1.1238	1.1256
0.05	1.1659	1.1659	1.1702
0.06	1.2138	1.2138	1.2229
0.07	1.2683	1.2683	1.2852
0.08	1.3301	1.3301	1.3588
0.09	1.3999	1.3999	1.4458
0.1	1.4782	1.4782	1.5482

Örnek 6.1.1.2: Lineer kesirli diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} - y = 0, \quad y(0) = c \quad (6.32)$$

ele alalım (Soytaş 2006).

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayıldığında, Denklem (6.32)'de eşitliğin her iki tarafına L^{-1} uygulandığında;

$$y = c - L^{-1} \left(\frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} \right) + L^{-1}y \quad (6.33)$$

yazılabilir. Burada c keyfi bir sabittir. Buradan,

$$y = c - \frac{d^{-1/2}y}{dt^{-1/2}} + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (6.34)$$

olur. Burada,

$$y_0(t) = c,$$

$$y_{n+1}(t) = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_n}{dt^{-\frac{1}{2}}},$$

$$f(y) = y, A_0 = f(y_0) = c,$$

$$A_1 = y_1,$$

$$A_2 = y_2,$$

$$A_3 = y_3,$$

$$\vdots$$

$$(6.35)$$

dir. Adomian ayrıştırma yöntemiyle $y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots$ 'nin Denklem (6.32)'nin çözümü olduğunu varsayalım. Burada,

$$y_0(t) = c,$$

$$y_1(t) = L^{-1} A_0 - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_0}{dt^{-\frac{1}{2}}} = ct - 2c \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

$$y_2(t) = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_1 - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_1}{dt^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{8t^{\frac{3}{2}}c}{3\sqrt{\pi}} + \frac{ct^2}{2} + ct,$$

$$y_3(t) = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_2 - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_2}{dt^{-\frac{1}{2}}} = \frac{ct^3}{6} - \frac{16ct^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} - \left(\left(\frac{\sqrt{t}(8ct^2 + 20ct)}{15\sqrt{\pi}} \right) - ct^2 \right),$$

$$\vdots$$

$$(6.36)$$

olur. Bu nedenle Denklem (6.32)'nin çözümü,

$$\begin{aligned} y(t) = & c + ct - 2c \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{8t^{\frac{3}{2}}c}{3\sqrt{\pi}} + \frac{ct^2}{2} + ct + \frac{ct^3}{6} - \frac{16ct^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \\ & - \left(\left(\frac{\sqrt{t}(8ct^2 + 20ct)}{15\sqrt{\pi}} \right) - ct^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.37)$$

dir. (6.37)'de $c = 1$ alındığında

$$y(t) = 1 + t - 2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{6} - \frac{16t^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} - \left(\left(\frac{\sqrt{t}(8t^2 + 20t)}{15\sqrt{\pi}} \right) - t^2 \right) + \dots \quad (6.38)$$

olarak bulunur.

6.2 Uyumlu Kesirli Lineer Olmayan Lane-Emden Denkleminin (CNL-EFE) Adomian Polinomları Cinsinden Çözümü

CNL-EFE'nin $\alpha > 0$ mertebeden genel formu

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + f(y) = 0 \quad (6.39)$$

şeklindedir, burada $x > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ dir ve D_α uyumlu kesir türev operatörüdür (Al-Zhour ve diğ. 2019).

Bu problemi çözmek için Denklem (6.39), Denklem (3.26) kullanarak

$$D_\alpha [x^{2\alpha} D_\alpha y] = -x^{2\alpha} f(y) \quad (6.40)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (6.40)'ın x 'e göre iki kez integrali alındığında, Denklem (6.39)'un genel çözümü şu şekilde verilir:

$$y(x) = y(0) - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} f(y) d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad (6.41)$$

burada $y(0)$ sabit ve $d_\alpha x = x^{\alpha-1} dx$, $d_\alpha t = t^{\alpha-1} dt$ ' dir (Al-Zhour ve diğ. 2019).

Genel çözüm $y(x)$ 'in ve $f(y)$ 'nin

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) \quad (6.42)$$

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \quad (6.43)$$

olarak yazıldığı kabul edilir. Burada $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$, $f(y)$ 'nin Adomian polinomlar kümesidir ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(y_0), \\
A_1 &= y_1 f'(y_0), \\
A_2 &= y_2 f''(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0), \\
A_3 &= y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Şeklinde tanımlanır. Denklem (6.43), (6.44), Denklem (6.41)'de yerine konulduğunda Denklem (6.39)'un Adomian polinomları cinsinden genel çözümü,

$$y(x) = y(0) - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \tag{6.45}$$

şeklinde bulunur (Al-Zhour ve diğ. 2019). Burada,

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(0) \\
y_{k+1}(x) &= - \left[\int x^{-2\alpha} \left[\int x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha x \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{6.46}$$

dir (Al-Zhour ve diğ. 2019).

6.2.1 Uygulamalar

Örnek 6.2.1.1: Denklem (6.39)'da $f(y) = y^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ alınır, $x > 0$ için denklem:

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + y^m = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, m = 0, 1, 2, \dots \tag{6.47}$$

elde edilir (Al-Zhour ve diğ. 2019). Öncelikle $f(y) = y^m$ fonksiyonunun Adomian polinomlar $\{A_k\}_{k=0}^\infty$ kümesini hesaplamak için Denklem (6.44) kullanılır. Denklem (6.47)'nin Adomian polinomları cinsinden genel çözümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = y(0) - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \tag{6.48}$$

şeklinde elde edilir.

$$y_0 = y(0),$$

$$y_{k+1}(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

dir (Al-Zhour ve diğ. 2019).

1.Durum: Denklem (6.47)'nin $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile birlikte Adomian polinomları cinsinden genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = 1 - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad (6.50)$$

şeklinde bulunur.

$$y_0 = 1,$$

$$y_{k+1}(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.51)$$

dir.

2.Durum: Denklem (6.47) $m = 0$ için:

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + 1 = 0 \quad (6.52)$$

şeklinde yazılır. Denklem (6.52)'nin iki kez integrali alındığında genel çözüm,

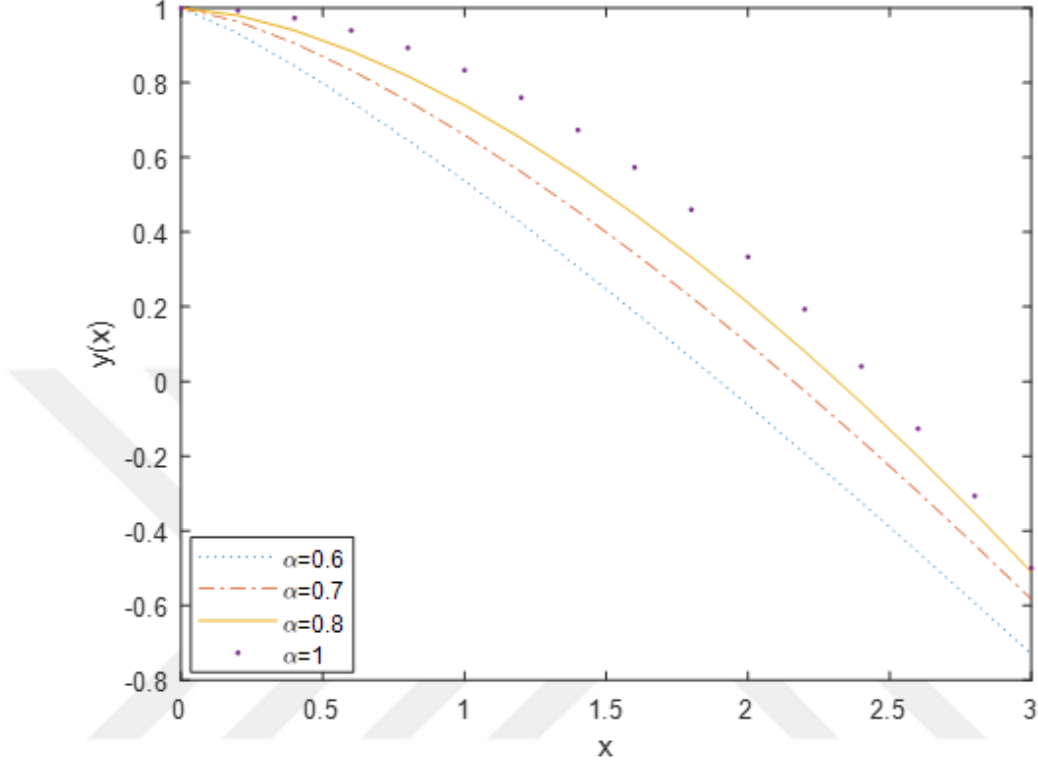
$$y(x) = y(0) - \frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2} \quad (6.53)$$

olarak bulunur. $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile (6.52)'nin çözümü

$$y(x) = 1 - \frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2} \quad (6.54)$$

olarak bulunur.

Şekil 6.1’de Denklem (6.52)’nin $\alpha = 0.6, \alpha = 0.7, \alpha = 0.6, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ ve x ’in 0 ile 3 arasındaki değerleri için $y(x)$ çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 6.1: Denklem (6.52)’nin farklı α değerleri için $y(x)$ çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

3.Durum: Denklem (6.47) $m = 1$ için:

$$D_{\alpha}D_{\alpha}y + \frac{2\alpha}{x^{\alpha}}D_{\alpha}y + y = 0 \quad (6.55)$$

şeklinde yazılır (Al-Zhour ve diğ. 2019). $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile birlikte, (6.55) denkleminin Adomian polinomları cinsinden genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = 1 - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_{\alpha} x \right] d_{\alpha} t \right] \quad (6.56)$$

olarak bulunur.

$$y_0 = 1,$$

$$y_{k+1}(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.57)$$

dir.

$$f(y) = y,$$

$$f(y_0) = y_0 = 1,$$

$$f'(y_0) = 1,$$

$$f''(y_0) = 0,$$

$$f'''(y_0) = 0,$$

$$\vdots$$

$$(6.58)$$

olarak bulunur. (6.58), (6.44)'de yerine konulduğunda:

$$A_0 = y_0 = 1,$$

$$A_1 = y_1,$$

$$A_2 = y_2,$$

$$A_3 = y_3,$$

$$\vdots$$

$$(6.59)$$

olur. $y(x)$ 'in ilk dört terimi hesapladığında:

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = -\frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2},$$

$$y_2 = \frac{x^{4\alpha}}{120\alpha^4},$$

$$y_3 = -\frac{x^{6\alpha}}{5040\alpha^6} \quad (6.60)$$

elde edilir. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ olduğundan (6.55) denkleminin çözümü

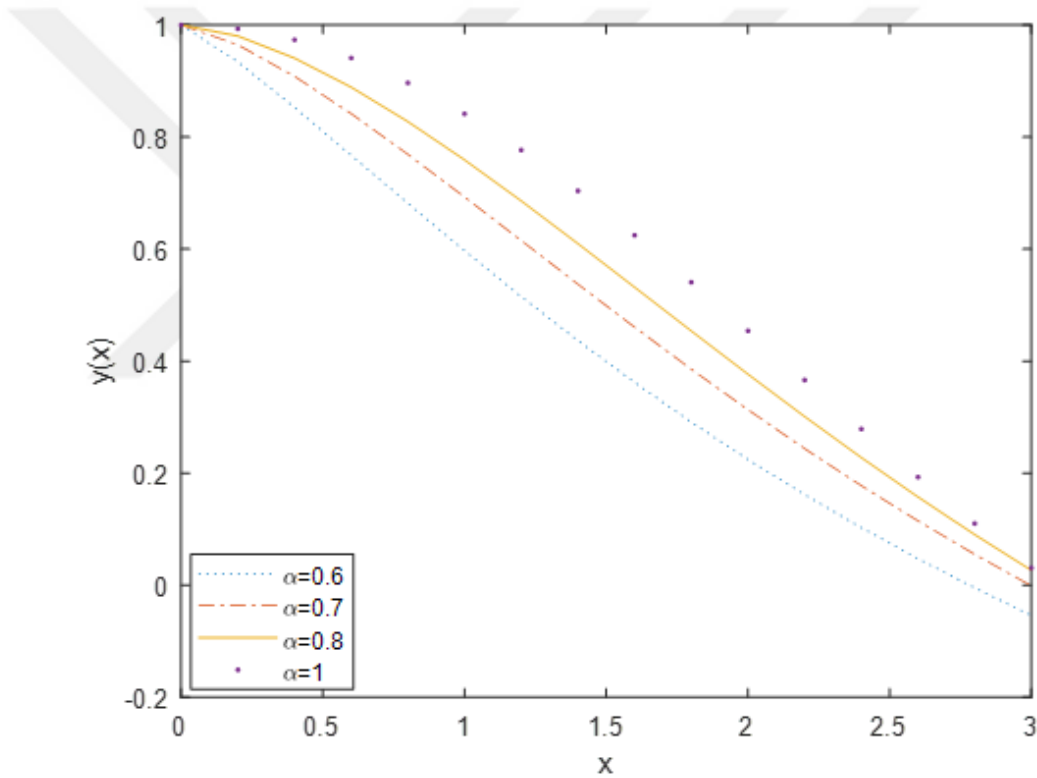
$$y(x) = 1 - \frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2} + \frac{x^{4\alpha}}{120\alpha^4} - \frac{x^{6\alpha}}{5040\alpha^6} + \dots \quad (6.61)$$

olarak bulunur. Bu tezde n terimli yaklaşık çözüm:

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x) \quad (6.62)$$

olarak alınmıştır.

Şekil 6.2’de Denklem (6.55)’in $\alpha = 0.6, \alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ ve x ’in 0 ile 3 arasındaki değerleri için $y_4(x)$ Adomian yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 6.2: Denklem (6.55)’in farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

4.Durum: Denklem (6.47) $m = 2$ için:

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + y^2 = 0 \quad (6.63)$$

şeklinde yazılır (Al-Zhour ve diğ. 2019). $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile birlikte, (6.63) denkleminin Adomian polinomları cinsinden genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = 1 - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_{\alpha} x \right] d_{\alpha} t \right] \quad (6.64)$$

olarak bulunur.

$$y_0 = 1,$$

$$y_{k+1}(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_{\alpha} x \right] d_{\alpha} t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.65)$$

dir.

$$f(y) = y^2,$$

$$f(y_0) = y_0^2 = 1,$$

$$f'(y_0) = 2y_0 = 2,$$

$$f''(y_0) = 2,$$

$$f'''(y_0) = 0,$$

$$\vdots$$

$$(6.66)$$

olarak bulunur. (6.66), (6.44)'de yerine konulduğunda:

$$A_0 = y_0^2 = 1,$$

$$A_1 = 2y_1y_0,$$

$$A_2 = 2y_2y_0 + y_1^2,$$

$$A_3 = 2y_3y_0 + 2y_1y_2,$$

$$\vdots$$

$$(6.67)$$

olur. $y(x)$ 'in ilk dört terimi hesapladığında:

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = -\frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2},$$

$$y_2 = \frac{x^{4\alpha}}{60\alpha^4},$$

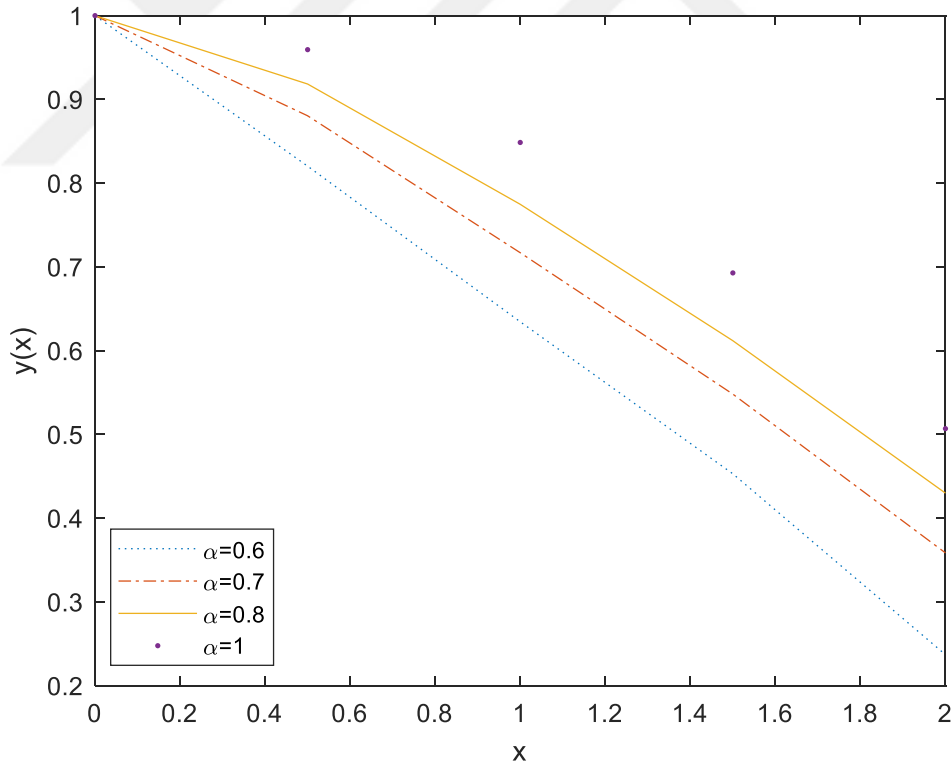
$$y_3 = -\frac{11x^{6\alpha}}{7560\alpha^6}, \quad (6.68)$$

elde edilir. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ olduğundan (6.63) denkleminin çözümü

$$y(x) = 1 - \frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2} + \frac{x^{4\alpha}}{60\alpha^4} - \frac{11x^{6\alpha}}{7560\alpha^6} + \dots \quad (6.69)$$

olarak bulunur.

Şekil 6.3’ de Denklem (6.63)’ ün $\alpha = 0.6, \alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ ve x ’in 0 ile 2 arasındaki değerleri için $y_4(x)$ Adomian yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 6.3: Denklem (6.63)’ün farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

Örnek 6.2.1.2: Denklem (6.39), $f(y) = e^y$ ve $x > 0$ için:

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + e^y = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (6.70)$$

olarak yazılır (Al-Zhour ve diğ. 2019). $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile birlikte, (6.70) denkleminin Adomian polinomları cinsinden genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad (6.71)$$

olarak bulunur.

$$y_0 = 0,$$

$$y_{k+1}(x) = - \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.72)$$

dir.

$$f(y) = e^y,$$

$$f(y_0) = e^{y_0} = e^0 = 1,$$

$$f'(y_0) = 1,$$

$$f''(y_0) = 1,$$

$$f'''(y_0) = 1,$$

$$\vdots$$

$$(6.73)$$

olarak bulunur. (6.73), (6.44)'de yerine konulduğunda:

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = y_1,$$

$$A_2 = y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2,$$

$$A_3 = y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3,$$

$$\vdots$$

$$(6.74)$$

olur. $y(x)$ 'in ilk dört terimi hesapladığında:

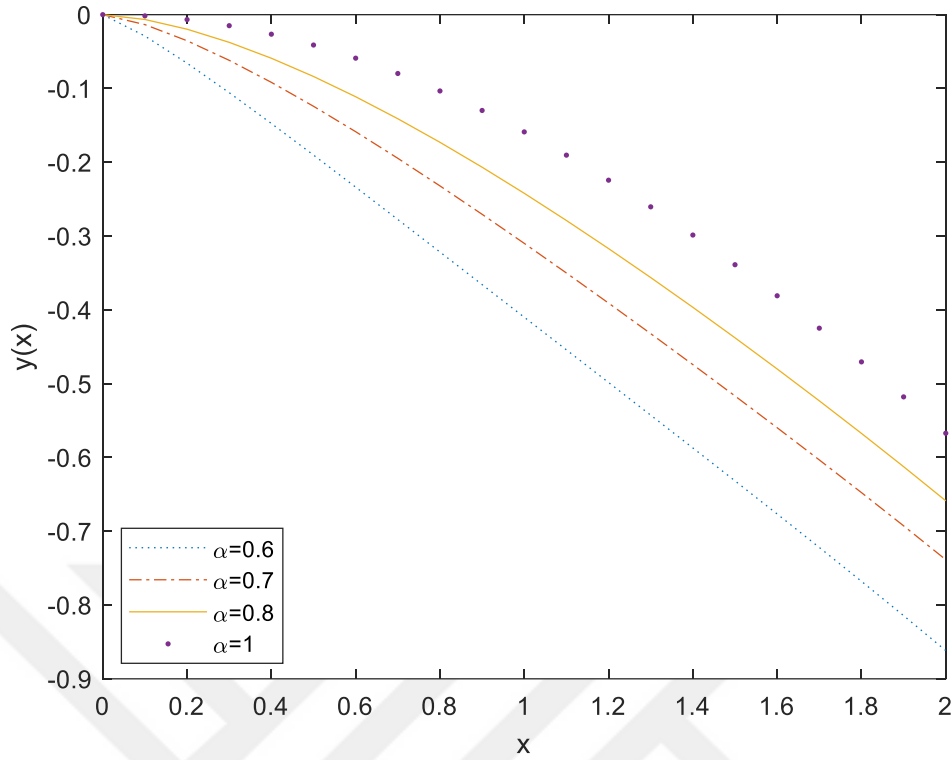
$$\begin{aligned}
y_0 &= 0, \\
y_1 &= -\frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2}, \\
y_2 &= \frac{x^{4\alpha}}{120\alpha^4}, \\
y_3 &= -\frac{x^{6\alpha}}{1890\alpha^6}, \tag{6.75}
\end{aligned}$$

elde edilir. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ olduğundan (6.70) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = -\frac{x^{2\alpha}}{6\alpha^2} + \frac{x^{4\alpha}}{120\alpha^4} - \frac{x^{6\alpha}}{1890\alpha^6} + \dots \tag{6.76}$$

olarak bulunur.

Şekil 6.4’de Denklem (6.70)’in $\alpha = 0.6, \alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ ve x ’in 0 ile 2 arasındaki değerleri için $y_4(x)$ Adomian yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 6.4: Denklem (6.70)'in farklı α değerleri için $y_4(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

Örnek 6.2.1.3: Denklem (6.39), $f(y) = 4 \left(2e^y + e^{\frac{y}{2}} \right)$ ve $x > 0$ için:

$$D_\alpha D_\alpha y + \frac{2\alpha}{x^\alpha} D_\alpha y + 4 \left(2e^y + e^{\frac{y}{2}} \right) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (6.77)$$

olarak yazılır (Al-Zhour ve diğ. 2019). $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile birlikte, (6.77) denkleminin Adomian polinomları cinsinden genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = -4 \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad (6.78)$$

olarak bulunur.

$$y_0 = 0,$$

$$y_{k+1}(x) = -4 \left[\int_0^x t^{-2\alpha} \left[\int_0^t x^{2\alpha} A_k d_\alpha x \right] d_\alpha t \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.79)$$

dir. 4 sabiti integralin dışında olduğundan

$$f(y) = \left(2e^y + e^{\frac{y}{2}}\right)$$

olarak alınır.

$$\begin{aligned} f(y_0) &= \left(2e^{y_0} + e^{\frac{y_0}{2}}\right) = 3, \\ f'(y_0) &= \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{\frac{y_0}{2}}\right) = \frac{5}{2}, \\ f''(y_0) &= \left(2e^{y_0} + \frac{1}{4}e^{\frac{y_0}{2}}\right) = \frac{9}{4}, \\ f'''(y_0) &= \left(2e^{y_0} + \frac{1}{8}e^{\frac{y_0}{2}}\right) = \frac{17}{8}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.80}$$

olarak bulunur. (6.80), (6.44)'de yerine konulduğunda:

$$\begin{aligned} A_0 &= 3, \\ A_1 &= \frac{5}{2}y_1, \\ A_2 &= \frac{5}{2}y_2 + \frac{9}{8}y_1^2, \\ A_3 &= \frac{5}{2}y_3 + \frac{9}{8}y_1y_2 + \frac{17}{48}y_1^3, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.81}$$

olur. $y(x)$ 'in ilk beş terimi hesapladığında:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= -\frac{2x^{2\alpha}}{\alpha^2}, \\ y_2 &= \frac{x^{4\alpha}}{\alpha^4}, \\ y_3 &= -\frac{2x^{6\alpha}}{3\alpha^6}, \end{aligned}$$

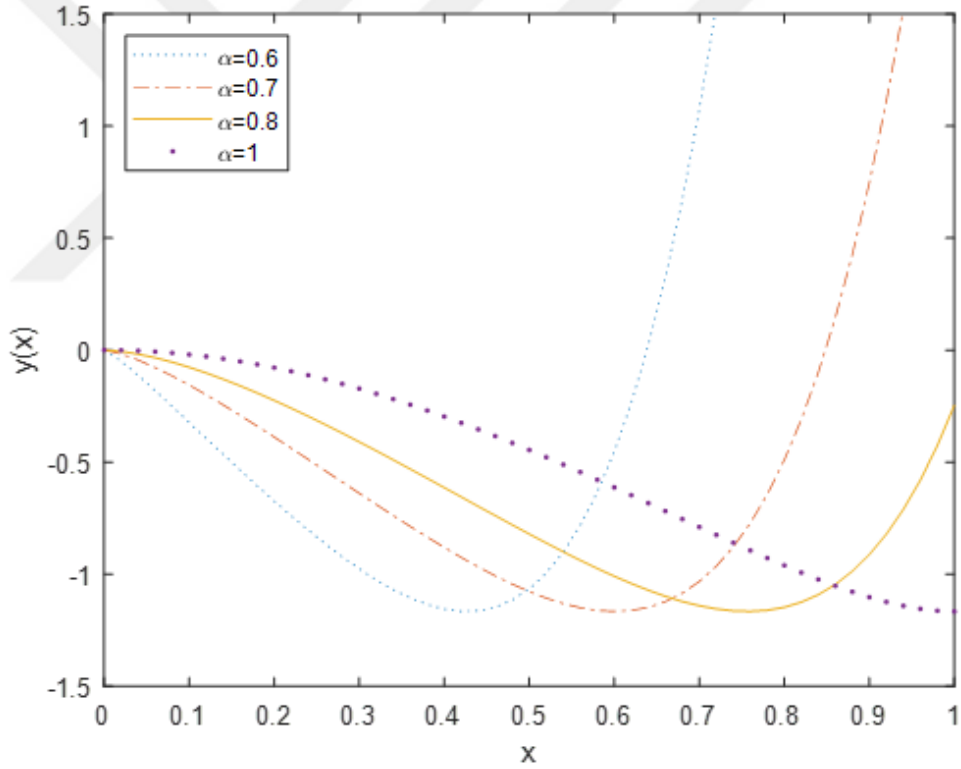
$$y_4 = \frac{x^{8\alpha}}{2\alpha^8}, \quad (6.82)$$

elde edilir. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ olduğundan (6.77) denkleminin çözümü

$$y(x) = -\frac{2x^{2\alpha}}{\alpha^2} + \frac{x^{4\alpha}}{\alpha^4} - \frac{2x^{6\alpha}}{3\alpha^6} + \frac{x^{8\alpha}}{2\alpha^8} \dots \quad (6.83)$$

olarak bulunur.

Şekil 6.5’de Denklem (6.77)’nin $\alpha = 0.6, \alpha = 0.7, \alpha = 0.6, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ ve x ’in 0 ile 1 arasındaki değerleri için $y_5(x)$ Adomian yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 6.5: Denklem (6.77)’n farklı α değerleri için $y_5(x)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

7. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ETKİN BİR SERİ ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde, lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için Taylor serisi açılımına uygun bir seri çözüm yöntemi sunulmuştur. Seri açılımının katsayıları da yinelemeli olarak hesaplanmıştır, ancak yineleme işlemi yalnızca türev içerir. Doğal olarak, eğer problem kesirli mertebeden ise, türev de kesirli mertebededir. Bununla birlikte, kesirli türev almanın kolaylığı ve seri açılımının katsayısını yinelemeli olarak hesaplamak için kesirli türev yerine normal türev almayı sağlayan bir dönüşüm kullanılmıştır.

7.1 Yöntemin Algoritması

Aşağıdaki kesirli mertebeden başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}_0^C D_t^\alpha u = u_{xx} + h(x, t, u), \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (7.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R. \quad (7.2)$$

Burada $0 < \alpha < 1$, $h \in C^\infty(R \times R^+ \times R, R)$, $u_0(x) \in C^\infty(R \times R)$ dır (Al-Refai 2014).

$\alpha = \frac{p}{q}$ için (7.1) ve (7.2) başlangıç değer probleminin çözümünün

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}} \quad (7.3)$$

şekilde olduğunu kabul edelim (Al-Refai 2014). Burada $u(x, 0) = u_0(x) = a_0(x)$ ve $a_k(x)$ 'ler belirlenecek katsayılardır. Denklem (7.3), (7.1)' de yerine konulduğunda

$${}_0^C D_t^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k}{q}} + h \left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}} \right) \quad (7.4)$$

olarak bulunur (Al-Refai 2014). Toplam ve kesirli türev operatörünü yer değiştirebildiğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) {}^C_0D_t^\alpha t^{\frac{k}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k}{q}} + h\left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}}\right) \quad (7.5)$$

olarak yazılabilir (Al-Refai 2014). Burada $k = 0$ için

$$a_0(x) {}^C_0D_t^\alpha t^{\frac{0}{q}} = 0$$

olacağından

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \frac{\Gamma\left(\frac{k}{q} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{q} - \alpha + 1\right)} t^{\frac{k-p}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k}{q}} + h\left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}}\right) \quad (7.6)$$

olarak bulunur ve

$$s_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{q} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{q} - \alpha + 1\right)} \quad (7.7)$$

için Denklem (7.6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) s_k t^{\frac{k-p}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k}{q}} + h\left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}}\right) \quad (7.8)$$

olarak bulunur (Al-Refai 2014). $p > 1$ ise, (7.8)'in sol tarafındaki toplamda $k = 1, 2, \dots, p - 1$ için t 'nin negatif üsleri olacağından (7.8), $t^{\frac{p-1}{q}}$ ile çarpıldığında

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) s_k t^{\frac{k-1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k+p-1}{q}} + h\left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}}\right) \quad (7.9)$$

elde edilir ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(x) s_{k+1}(x) t^{\frac{k}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) t^{\frac{k+p-1}{q}} + t^{\frac{p-1}{q}} h\left(x, t, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}}\right) \quad (7.10)$$

olarak yazılabilir (Al-Refai 2014). (7.10)'da

$$t^{\frac{1}{q}} = w \quad (7.11)$$

değişken değişimi yapıldığında

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(x) s_{k+1}(x) w^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(x) w^{(k+p-1)} + w^{(p-1)} h \left(x, w^q, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) w^k \right) \quad (7.12)$$

elde edilir (Al-Refai 2014). (7.12)'nin w 'ye göre k kez türevi alınıp $s_{k+1}k!$ 'e bölünürse ve $k \geq 0$ için öz rekürans bağıntısı

$$a_{k+1}(x) = \frac{1}{s_{k+1}} a_{k-p+1}''(x) + \frac{1}{s_{k+1}k!} \times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[w^{p-1} h \left(x, w^q, \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \quad (7.13)$$

elde edilir, burada $j < 0$ için $a_j = 0$ dır (Al-Refai 2014). Denklem (7.1) kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem ise yani $u \equiv u(t)$ ve $h \equiv h(t, u)$ ise, $k \geq 0$ için öz rekürans bağıntısı

$$a_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1}k!} \times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[w^{p-1} h \left(w^q, \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \quad (7.14)$$

olarak yazılır (Al-Refai 2014).

7.2 Uygulamalar

Örnek 7.2.1: Tam çözümü $u_e(t) = t^{\frac{1}{2}}$ olan kesirli mertebeden başlangıç değer problemini

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} u = \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) (u^2 - t + 1), u(0) = 0 \quad (7.15)$$

ele alalım (Al-Refai 2014). Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $p = 1$ ve $q = 2$ 'dir.

Denklem (7.3)'den (7.15) için çözümü

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{2}} \quad (7.16)$$

olarak alınır ve $u(0) = a_0 = 0$ 'dır. Denklem (7.14) 'den $k \geq 0$ için;

$$a_{k+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s_{k+1} k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 - w^2 + 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.17)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 1$ için;

$$s_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (7.18)$$

elde edilir. Denklem (7.17)'den $k = 0$ için;

$$a_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s_1 0!} \left[\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 - w^2 + 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.19)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.18), (7.19)'da yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_1 = 1 \quad (7.20)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 2$ için;

$$s_2 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (7.21)$$

bulunur. Denklem (7.17)'den $k = 1$ için;

$$a_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s_2 1!} \left[\frac{\partial^1}{\partial w^1} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 - w^2 + 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.22)$$

elde edilir ve Denklem (7.21), (7.22)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_2 = 0 \quad (7.23)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 3$ için;

$$s_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad (7.24)$$

bulunur ve Denklem (7.17)'den $k = 2$ için;

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s_3 2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 - w^2 + 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.25)$$

elde edilir ve Denklem (7.24), (7.25)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_3 = 0 \quad (7.26)$$

yazılır. $k \geq 2$ için $a_k = 0$ 'dır. Bulunan a_k değerleri (7.16)'da yerine konulduğunda (7.15) başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekilde bulunur.

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{2}} = a_1 t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} \quad (7.27)$$

Bulunan çözüm problemin tam çözümüdür.

Şimdi (7.15) başlangıç değer problemini Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözelim. (ADM)'ni kullanmak için $y(t)$ çözümünün ve lineer olmayan $f(u) = u^2$ fonksiyonunun seri formunda aşağıdaki gibi yazıldığını kabul edelim.

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t), \quad f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (7.28)$$

Burada A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ Adomian polinomları olarak adlandırılır ve Denklem (6.9)'dan A_n :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n \geq 0 \quad (7.29)$$

şeklinde ifade edilir. Kesirli diferansiyel operatör L , $L = {}^C_0 D_t^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanırsa Denklem (7.15)

$$L(u) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (f(u) - t + 1) \quad (7.30)$$

olarak yazılır ve ters operatör $L^{-1} = j^{\frac{1}{2}}$ olarak alınıp Denklem (7.30)'a uygulandığında

$$u(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(f(u)) + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(-t + 1) \quad (7.31)$$

elde edilir. Denklem (7.28) (7.31)'de yerine konulduğunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(-t + 1) \quad (7.32)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$u_0(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(-t + 1), \quad (7.33)$$

$$u_{n+1}(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(A_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.34)$$

dir.

$$u_0(t) = -\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(t) + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(1) \quad (7.35)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$u_0(t) = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \quad (7.36)$$

olarak bulunur. Denklem (7.29)'dan

$$A_0 = f(u_0),$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0),$$

$$A_2 = f'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} f''(u_0),$$

$$\vdots$$

$$(7.37)$$

olur. $n = 0$ için;

$$u_1(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)j^{\frac{1}{2}}(A_0) \quad (7.38)$$

elde edilir. Denklem (7.37)'den

$$u_1(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J^{\frac{1}{2}}(f(u_0)) \quad (7.39)$$

olarak bulunur. $f(u) = u^2$ olduğundan

$$u_1(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J^{\frac{1}{2}}((u_0)^2) \quad (7.40)$$

olur. Denklem (7.36), (7.40)'da yerine konulduğunda

$$u_1(t) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J^{\frac{1}{2}}\left(\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \quad (7.41)$$

elde edilir. Buradan

$$u_1(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{45}t^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{315}t^{\frac{7}{2}} \quad (7.42)$$

olarak bulunur. Diğer u_n değerleri aynı şekilde bulunur ve

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{45}t^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{315}t^{\frac{7}{2}} + \dots \quad (7.43)$$

elde edilir. İki yöntemde de aynı sonuç elde edilir. Fakat seri çözüm yöntemiyle sonuca daha kolay ulaşıldığı görülmüştür.

Örnek 7.2.2: Tam çözümü $u_e(t) = (t - 1)^2$ olan kesirli mertebeden başlangıç değer problemini

$${}_0^C D_t^{\frac{2}{3}} u = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} t^{\frac{1}{3}}(-3\sqrt{u} - 1), \quad u(0) = 1 \quad (7.44)$$

ele alalım (Al-Refai 2014). Burada $\alpha = \frac{2}{3}$ olduğundan $p = 2$ ve $q = 3$ 'dür.

Denklem (7.3)'den (7.44) için çözümü

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{3}} \quad (7.45)$$

olarak alınır ve $u(0) = a_0 = 1$ dir. Denklem (7.14)'den $k \geq 0$ için;

$$a_{k+1} = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)s_{k+1}k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} w^2 \left[-3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.46)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 1$ için;

$$s_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (7.47)$$

bulunur. Denklem (7.46)'dan $k = 0$ için;

$$a_1 = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)s_1 0!} \left[w^2 \left[-3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.48)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.47), (7.48)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_1 = 0 \quad (7.49)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 2$ için;

$$s_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(1)} \quad (7.50)$$

bulunur. Denklem (7.46)'dan $k = 1$ için;

$$a_2 = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)s_2 1!} \left[\frac{\partial^1}{\partial w^1} w^2 \left[-3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.51)$$

elde edilir ve Denklem (7.50), (7.51)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_2 = 0 \quad (7.52)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 3$ için;

$$s_3 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (7.53)$$

bulunur. Denklem (7.46)'dan $k = 2$ için;

$$a_3 = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)s_3 2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} w^2 \left[-3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.54)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.53), (7.54)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_3 = -2 \quad (7.55)$$

yazılır. Denklem (7.7)'den $k = 4$ için;

$$s_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \quad (7.56)$$

bulunur. Denklem (7.46)'dan $k = 3$ için;

$$a_4 = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)s_4 3!} \left[\frac{\partial^3}{\partial w^3} w^2 \left[-3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]_{w=0} \quad (7.57)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.56), (7.57)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_4 = 0 \quad (7.58)$$

elde edilir. Aynı işlemler devam edildiğinde sırasıyla

$$\begin{aligned} a_5 &= 0, \\ a_6 &= 1, \\ a_7 &= 0, \\ a_8 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7.59)$$

olarak bulunur. Yani, $a_0 = 1$, $a_3 = -2$, $a_6 = 1$ değerleri hariç diğer a_k değerleri 0'dır. Bulunan a_k değerleri (7.45)'de yerine konulduğunda (7.44) başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{3}} = a_0 + a_3 t + a_6 t^2 = 1 - 2t + t^2 = (t-1)^2 \quad (7.60)$$

Bulunan çözüm problemin tam çözümüdür.

Örnek 7.2.3: Kesirli mertebeden başlangıç değer problemini

$${}_0^C D_t^\alpha u = 1 - u^2, u(0) = 0 \quad (7.61)$$

ele alalım (Al-Refai 2014). Burada $\alpha = \frac{p}{q}$ olduğundan, Denklem (7.3)'den (7.61) için çözümü

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{q}} \quad (7.62)$$

olarak alınır ve $u(0) = a_0 = 0$ 'dır. Denklem (7.14)'den $k \geq 0$ için;

$$a_{k+1} = \frac{1}{S_{k+1} k!} \times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} w^{p-1} \left(1 - \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 \right) \right]_{w=0} \quad (7.63)$$

elde edilir. Burada

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j} w^m \quad (7.64)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$C_m = \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j} \quad (7.65)$$

alınıp Denklem (7.64)'de yerine konulduğunda

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \quad (7.66)$$

olarak yazılabilir. Denklem (7.66), (7.63)' de yerine konulduğunda $k \geq 0$ için;

$$a_{k+1} = \frac{1}{S_{k+1} k!} \times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} w^{p-1} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right) \right]_{w=0} \quad (7.67)$$

elde edilir. $p = 1$ ve $q = 1$ yani $\alpha = 1$ için Denklem (7.3)'den

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (7.68)$$

olarak yazılır ve $u(0) = a_0 = 0$ 'dır ve (7.14)'den $k \geq 0$ için;

$$a_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1} k!} \times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right) \right]_{w=0} \quad (7.69)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 1$ için;

$$s_1 = 1 \quad (7.70)$$

bulunur. Denklem (7.69)'dan $k = 0$ için;

$$a_1 = \frac{1}{s_1 0!} \times \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right)_{w=0} \quad (7.71)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.70), (7.71)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_1 = 1 \quad (7.72)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 2$ için;

$$s_2 = 2 \quad (7.73)$$

bulunur. Denklem (7.69)'dan $k = 1$ için;

$$a_2 = \frac{1}{s_2 1!} \times \left[\frac{\partial^1}{\partial w^1} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right) \right]_{w=0} \quad (7.74)$$

elde edilir ve Denklem (7.73), (7.74)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_2 = 0 \quad (7.75)$$

olur. Denklem (7.7)'den $k = 3$ için;

$$s_3 = 3 \quad (7.76)$$

bulunur. Denklem (7.69)'dan $k = 2$ için;

$$a_3 = \frac{1}{s_3 2!} \times \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right) \right]_{w=0} \quad (7.77)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.76), (7.77)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_3 = -\frac{1}{3} \quad (7.78)$$

yazılır. Denklem (7.7)'den $k = 4$ için;

$$s_4 = 4 \quad (7.79)$$

ve Denklem (7.69)'dan $k = 3$ için;

$$a_4 = \frac{1}{s_4 3!} \times \left[\frac{\partial^3}{\partial w^3} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m w^m \right) \right]_{w=0} \quad (7.80)$$

olarak bulunur ve Denklem (7.79), (7.80)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_4 = 0 \quad (7.81)$$

Aynı işlemler devam edildiğinde sırasıyla

$$a_5 = \frac{2}{15},$$

$$a_6 = 0,$$

$$a_7 = -\frac{17}{315},$$

$$a_8 = 0,$$

$$a_9 = \frac{62}{2835},$$

$$\vdots \quad (7.82)$$

olarak bulunur. Bu örnekte

$$s_k = k \quad (7.83)$$

olduğu görülür. Bulunan a_k değerleri (7.68)'de yerine konulduğunda (7.61) başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

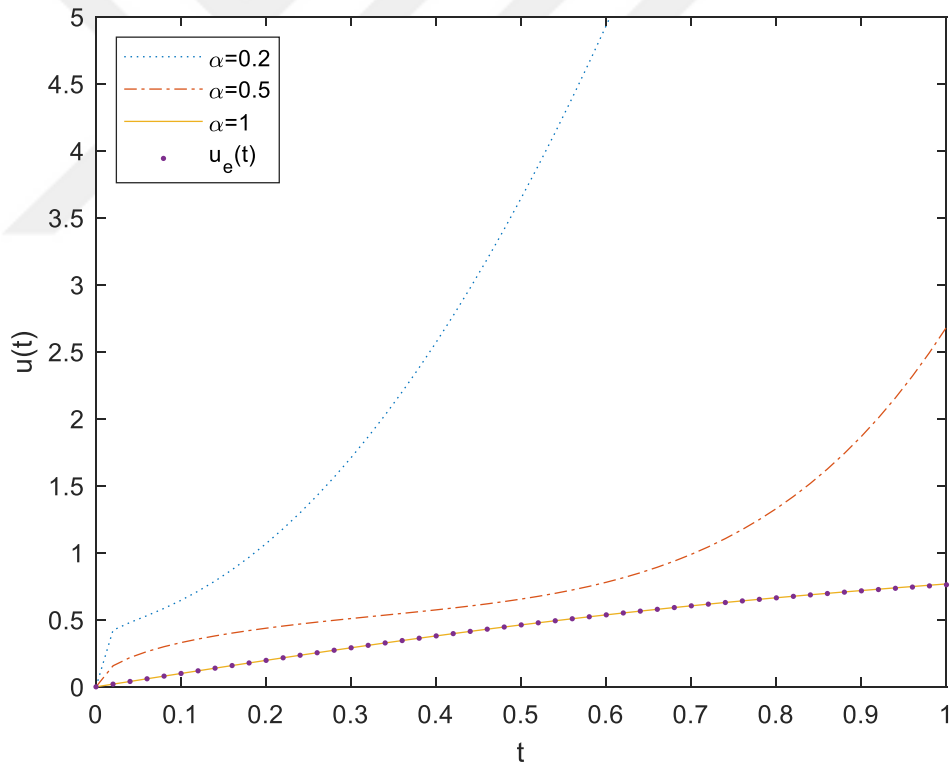
$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 - \frac{17}{315} t^7 + \frac{62}{2835} t^9 + \dots \quad (7.84)$$

Denklem (7.84), $u_e(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ tam çözümünün Taylor serisi açılımıdır. Bu tezde n terimli yaklaşık çözüm

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\frac{k}{q}} \quad (7.85)$$

olarak alınmıştır.

Şekil 7.1’de Denklem (7.61)’in $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ için $u_{10}(t)$ yaklaşık çözümü ve $u_e(t)$ tam çözümünün t ’nin 0 ile 1 arasındaki değerleri için iki boyutlu karşılaştırma grafiği verilmiştir. Grafikte $\alpha = 1$ için $u_{10}(t)$ yaklaşık çözümü ve $u_e(t)$ tam çözümünün çok yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 7.1: Denklem (7.61)’in farklı α değerleri için $u_{10}(t)$ yaklaşık çözümü ve $u_e(t)$ tam çözümünün iki boyutlu karşılaştırma grafiği.

Örnek 7.2.4: Kesirli mertebeden başlangıç değer problemini

$${}_0^C D_t^\alpha u = u_{xx} + \frac{1}{10}u(1-u), \quad u(x, 0) = x \quad (7.86)$$

ele alalım (Al-Refai 2014). Burada $\alpha = \frac{p}{q}$ olduğundan, Denklem (7.3)'den (7.86) için çözümü

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{q}} \quad (7.87)$$

olarak alınır ve $u(x, 0) = a_0(x) = x$ 'dir. Denklem (7.13)'den $k \geq 0$ için;

$$\begin{aligned} a_{k+1}(x) &= \frac{1}{s_{k+1}} a''_{k-p+1}(x) \\ &+ \frac{1}{s_{k+1} k!} \\ &\times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[\frac{1}{10} w^{p-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \end{aligned} \quad (7.88)$$

elde edilir. $p = 1$ ve $q = 2$ yani $\alpha = \frac{1}{2}$ için Denklem (7.3)'den

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{2}} \quad (7.89)$$

olarak yazılır ve $u(x, 0) = a_0(x) = x$ 'dir. Denklem (7.13) 'den $k \geq 0$ için;

$$\begin{aligned} a_{k+1}(x) &= \frac{1}{s_{k+1}} a''_{k-p+1}(x) \\ &+ \frac{1}{10 s_{k+1} k!} \\ &\times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \end{aligned} \quad (7.90)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right)^2
\end{aligned} \tag{7.91}$$

dir ve (7.66)'dan

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m \right)^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x) w^m
\end{aligned} \tag{7.92}$$

olarak yazılabilir. Denklem (7.92), (7.90)'da yerine konulduğunda $k \geq 0$ için;

$$\begin{aligned}
a_{k+1}(x) &= \frac{1}{s_{k+1}} a_k''(x) \\
&+ \frac{1}{10s_{k+1}k!} \\
&\times \left[\frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0}
\end{aligned} \tag{7.93}$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 1$ için;

$$s_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.94}$$

bulunur. Denklem (7.93)'den $k = 0$ için;

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= \frac{1}{s_1} a_0''(x) \\
&+ \frac{1}{10s_1 0!} \\
&\times \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x) w^m \right) \right]_{w=0}
\end{aligned} \tag{7.95}$$

elde edilir ve Denklem (7.94), (7.95)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_1(x) = -0.112837916709551(x^2 - x) \tag{7.96}$$

olur. Denklem (7.7)'den $k = 2$ için;

$$s_2 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (7.97)$$

bulunur. Denklem (7.93)'den $k = 1$ için;

$$\begin{aligned} a_2(x) &= \frac{1}{s_2} a_1''(x) \\ &+ \frac{1}{10s_2 1!} \\ &\times \left[\frac{\partial^1}{\partial w^1} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \end{aligned} \quad (7.98)$$

olarak bulunur. Denklem (7.97), (7.98)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$a_2(x) = 0.009999999999999998(2x^3 - 3x^2 + x) \quad (7.99)$$

elde edilir. Denklem (7.7)'den $k = 3$ için;

$$s_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad (7.100)$$

bulunur. Denklem (7.93)'den $k = 2$ için;

$$\begin{aligned} a_3(x) &= \frac{1}{s_3} a_2''(x) \\ &+ \frac{1}{10s_3 2!} \\ &\times \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) w^m - \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x) w^m \right) \right] \right]_{w=0} \end{aligned} \quad (7.101)$$

olarak bulunur. Denklem (7.100), (7.101)'de yerine konulup düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} a_3(x) &= -5.79514460408527e \\ &- 37(6.84505628060749e33x^4 - 1.3690112561215e34x^3 \\ &+ 8.1431304952412e33x^2 - 1.29807421463371e33x) \end{aligned} \quad (7.102)$$

elde edilir. Aynı işlemler devam edildiğinde sırasıyla

$$\begin{aligned}
a_4(x) = & 2.56021645987755e \\
& - 37(3.23146096214491e33x^5 - 8.07865240536228e33x^4 \\
& + 6.85351389792623e33x^3 - 2.20161844152707e33x^2 \\
& + 1.95295986818206e32x) \quad (7.103)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5(x) = & -2.57356118819508e \\
& - 55(6.89796235797276e50x^6 - 2.06938870739183e51x^5 \\
& + 2.27596956693503e51x^4 - 1.10295795488367e51x^3 \\
& + 2.18272872641844e50x^2 - 1.16920130986472e49x) \quad (7.104)
\end{aligned}$$

⋮

olarak bulunur. Bulunan a_k değerleri (7.89)'da yerine konulduğunda (7.86) başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

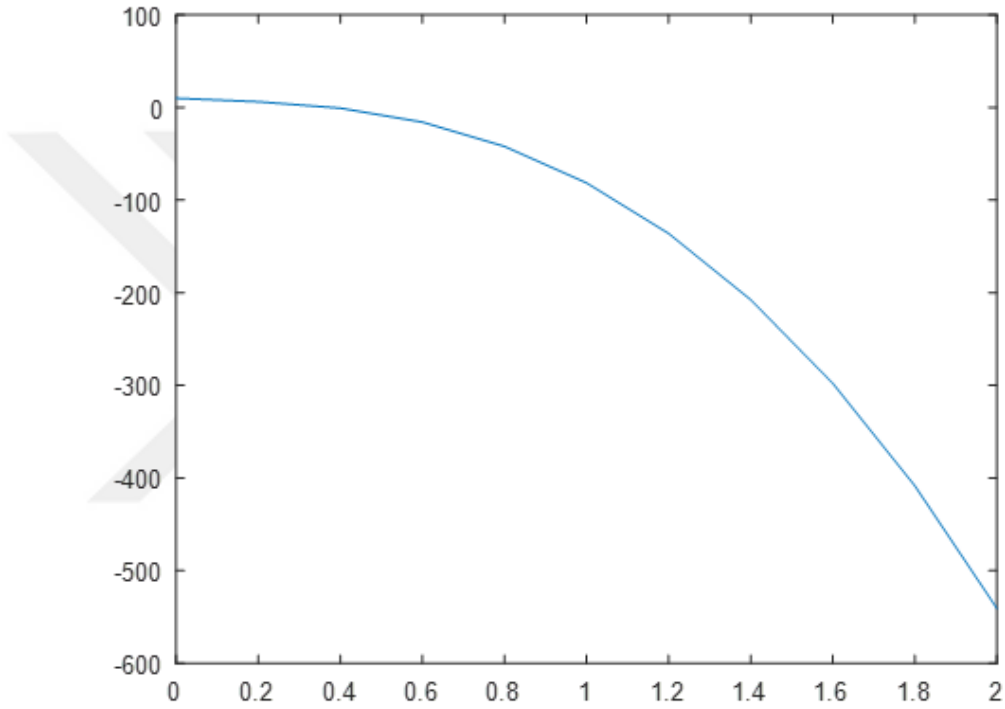
$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^{\frac{k}{2}} \\
= & x + (-0.112837916709551(x^2 - x))t^{\frac{1}{2}} \\
& + (0.00999999999999998(2x^3 - 3x^2 + x))t \\
& + (-5.79514460408527e \\
& - 37(6.84505628060749e33x^4 - 1.3690112561215e34x^3 \\
& + 8.1431304952412e33x^2 - 1.29807421463371e33x))t^{\frac{3}{2}} \\
& + (2.56021645987755e \\
& - 37(3.23146096214491e33x^5 - 8.07865240536228e33x^4 \\
& + 6.85351389792623e33x^3 - 2.20161844152707e33x^2 \\
& + 1.95295986818206e32x))t^2 \\
& + (-2.57356118819508e \\
& - 55(6.89796235797276e50x^6 - 2.06938870739183e51x^5 \\
& + 2.27596956693503e51x^4 - 1.10295795488367e51x^3 \\
& + 2.18272872641844e50x^2 - 1.16920130986472e49x))t^{\frac{5}{2}} \\
& + \dots \quad (7.105)
\end{aligned}$$

Bu tezde n terimli yaklaşık çözüm

$$u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) t^{\frac{k}{q}} \quad (7.85)$$

olarak alınmıştır.

Şekil 7.2’de Denklem (7.86)’nın $x = 10$ için $u_6(x, t)$ yaklaşık çözümünün t ’nin 0 ile 2 arasındaki değerleri için iki boyutlu grafiği verilmiştir.



Şekil 7.2: Denklem (7.86)’nın $x = 10$ için $u_6(x, t)$ yaklaşık çözümünün iki boyutlu grafiği.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde literatürde var olan kesirli diferansiyel denklemlerin seri çözümlerini içeren yöntemler incelenmiş ve bu yöntemler farklı kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

İkinci bölümde kesirli türev ve integral hesaplamalarında kullanılan gamma ve beta fonksiyonlarına yer verilmiş aynı zamanda taban ve tavan fonksiyonları hakkında da bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve kesirli integrallere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde rezidual kuvvet serisi metodu tanımlanmıştır. Kesirli kanser tümör modelleri, zaman kesirli KdV, mKdV denklemleri ve kesirli stiff sistemi için yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Bulunan bu çözümler tam sayı mertebeli denklem çözümleri ile karşılaştırılmıştır ve yaklaşık çözümlerin tam çözüme oldukça yakın olduğu görülmüştür. Kanser tümör modelleri için uygun seçilmiş parametrenin ve başlangıç koşulunun, kanser hücrelerinin konsantrasyonu için etkili olduğu zamanla azalıp kaybolduğu görülmüştür.

Beşinci bölümde FDTM, irrasyonel mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için yeterli olmadığından, rasyonel veya irrasyonel mertebeden kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için uygulanabilecek yeni bir yöntem olan sınırlı kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi (RFDTM) verilmiştir. Kesirli diferansiyel denklemler, RFDTM kullanılarak çözülmüştür.

Altıncı bölümde Adomian ayrıştırma yöntemi, lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmış ve yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Aynı zamanda Adomain polinomları kullanarak uyumlu lineer olmayan Lane-Emden kesirli diferansiyel denkleminin seri çözümleri sunulmuştur. Yöntem uyumlu Abel, Poisson-Boltzmann, Van Der Pol osilatör kesirli diferansiyel denklemleri gibi diğer birçok uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için uygulanabilir. Ayrıca Adomian ayrıştırma yöntemi, problemi lineer teoremin kullanımına uygun hale

getirmez. Çözümler sayısal olarak hesaplandığında, hızlı yakınsama açıktır. Ayrıca, doğrusallaştırma veya pertürbasyon gerekli değildir.

Yedinci bölümde lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem için Taylor serisi açılımına uygun bir seri çözüm yöntemi sunulmuştur. Kesirli türev yerine normal türev almayı sağlayan bir dönüşüm kullanılmıştır.

Bu tezde seri çözüm yöntemi caputo kesirli kısmi diferansiyel denklemler için geliştirilmiştir. Adomian ayrıştırma yöntemi ile karşılaştırılmış ve Adomian ayrıştırma yöntemine göre daha hızlı sonuca ulaşıldığı görülmüştür. Yöntemin dezavantajı, farklı kesirli diferansiyel denklemlere için uygulanamamasıdır. Adomian ayrıştırma yöntemi karmaşık Adomian polinom hesaplamalarından dolayı hızlı çözüm elde edilemediği için kullanışlı değildir. Rezidual kuvvet serisi yöntemi birçok türdeki kesirli diferansiyel denklem ve denklem sistemlerine başarıyla uygulanabileceği için diğer yöntemlere göre avantajlıdır.

9. KAYNAKLAR

Abbasbandy, S., “An approximation solution of a nonlinear equation with Riemann–Liouville’s fractional derivatives by He’s variational iteration method”, *J. Comput. Appl. Math.*, 207, 53-58, (2007).

Abdeljawad, T., “On conformable fractional calculus”, *J. Comput. Appl. Math.*, 279, 57-66, (2015).

Abdulaziz, O., Hashim, I. and Ismail, E.S., “Approximate analytical solution to fractional modified KdV equations”, *Math. and Comput. Modelling*, 49(1-2), 136-145, (2009).

Adomian, G., “Inversion of Nonlinear Stochastic Operators”, *J. Math. Anal. Appl.*, 91, 39-46, (1983).

Ahmad, R. S., “An analytical solution of the fractional navier-stokes equation by residual power series method”, Phd Thesis, Zarqa, *Zarqa University*, 10-90, (2015).

Akbulut, A. and Kaplan, M., “Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative”, *Comput. Math. with Appl.*, 75, 876-882, (2018).

Aljahdaly, N.H. and Al Zobidi, F.O., “On the Schrödinger equation for deep water waves using the Padé-Adomian decomposition method”, *J. Ocean Eng. and Sci.*, 1-6, (2022).

Alquran, M., “Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method”, *Math. Sci.*, 153-160, (2014).

Alquran, M., Jaradat, I. And Sivasundaram, S., “Elegant scheme for solving Caputo-time- fractional integro-differential equations”, *Nonlinear Stud.*, 25, 385-393, (2018).

Al-Refai, M., Hajji, M.A. and Syam, M.I., “An Efficient Series Solution for Fractional Differential Equations”, *Dept. Math. Sci.*, 2014, 1-7, (2014).

Al-Srihin, M. K. and Al-Refai, M., “An efficient series solution for nonlinear multiterm fractional differential equations”, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2017, 1-10, (2017).

Al-Zhour , Z., Al-Mutairi ,N., Alrawajeh, F. and Alkhasawneh, R., “Series solutions for the Laguerre and Lane-Emden fractional differential equations in the sense of conformable fractional derivative”, *Alex. Eng. J.*, 58, 1413–1420, (2019).

Angstmann, C. N. and Henry, B. I., “Generalized Fractional Power Series Solutions for Fractional Differential Equations”, *Appl. Math. Lett.*, 102, 1-10, (2020).

Caputo, M., *Elasticità e dissipazione*, Bologna: Zanichelli, (1969).

Caputo, M., “Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II”, *Geophys. J. Int.*, 13(5), 529-539, (1967).

Çetinkaya, F. A., “Uyumlu Kesirli Bir Dalga Denklemi Üzerine”, *SDU J. Nat. Appl. Sci.*, 22(3), 1110-1113, (2018).

Das, S., *Functional fractional calculus*, Berlin Heidelberg: Springer, (2011).

Diethelm, K., *The analysis of fractional differential equations*, Berlin: Springer, (2010).

Durur, H., Şenol, M., Kurt, A. and Taşbozan, O., “Approximate Solutions of the Time-Fractional Kadomtsev-Petviashvili Equation with Conformable Derivative”, *Erzincan Univ. J. Sci. Technol.*, 12(2), 796-806, (2019).

Düz, M., “Solutions of complex equations with adomian decomposition method”, *J. App. Eng. Math.*, 7(1), 66-73, (2017).

Düz, M., and Köse, B., “On Combining with Fourier Transform and Adomian Methods to solve the Riccati Equations”, *Usak Univ. J. Sci. Nat. Sci.*, 92-109, (2021).

El-Ajou, A., Abu Arqub, O. and Al-Smadi, M., “A general form of the generalized Taylor’s formula with some applications”, *Appl. Math. Comput.*, 256, 851–859, (2015).

El-Ajou, A., Arqub, O., Zhour, Z.A. and Momani, S., “New results on fractional power series: theories and applications”, *Entropy*, 15(12), 5305-5323, (2013).

Freihet, A., Hasan, S., Al-Smadi, M., Gaith, M. and Momani, S., “Construction of fractional power series solutions to fractional stiff system using residual functions algorithm”, *Adv. Differ. Equ.*, 95, 1-15, (2019).

Graham, R.L., Knuth, D.E. and Patashnik, O, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, USA: Addison-Wesley, (1994).

Gündoğdu, H. and Gözükızıll, Ö.F., “Solving Nonlinear Partial Differential Equations by Using Adomian Decomposition Method, Modified Decomposition Method and Laplace Decomposition Method”, *Manas J. Eng.*, 5(1), 1-13, (2017).

İnan, E.İ. ve Kaya, D., “Burgers Benzeri Denklemin Bazı Seyahat Eden Dalga Çözümleri”, *ALKU J. Sci.*, 3(1), 14-28, (2021).

Jaradat, H.M., Al-Shara, S., Khan, Q.J., Alquran, M. and Al-Khaled, K., “Analytical solution of time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system using residual power series method”, *IAENG Int. J. Appl. Math.*, 46(1), 64-70, (2016).

Kaya, A., “Approximate Solution of Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) Equations by Residual Power Series Method (RPSM)”, *Aksaray Univ. J. Sci. Eng.*, 5(2), 78-91, (2021).

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., “A new definition of fractional derivative”, *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70, (2014).

Khudair, A.R., Haddad, S. and Khalaf, S. L., “Restricted fractional differential transform for solving irrational order fractional differential equations”, *Chaos Solit. Fractals.*, 101, 81-85, (2017).

Komashynska, I., Al-Smadi, M., Abu Arqub, O. and Momani, S., “An efficient analytical method for solving singular initial value problems of nonlinear systems”. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 10(2), 647–656, (2016).

Körpınar, Z., Inc, M., Hınçal, E. and Baleanu, D., “Residual power series algorithm for fractional cancer tumor models”, *Alex. Eng. J.*, 59(3), 1405-1412, (2020).

Körpınar, Z., “The residual power series method for solving fractional Klein-Gordon equation”, *Sakarya Univ. J. Sci.*, 21(3), 285-293, (2017).

Kurulay, M. and Bayram, M., “Power Series Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order”, *Commun. Math. Appl.*, 1(2), 71–76, (2010).

Momani, S., Odibat, Z. and Alawneh, A., “Variational iteration method for solving the space-and time-fractional KdV equation”, *Wiley InterScience*, 24(1), 262-271, (2008).

Oldham, K., Spanier, J., *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Newyork: Academic Press, (1974).

Özpınar, F., “Kesirli Mertebe Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Ayrık Homotopi Perturbasyon Metodu ile Çözümü”, *AKU J. Sci. Eng.*, 20, 213-221, (2020).

Özpınar, F., “Solving fractional difference equations by discrete Adomian decomposition method”, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 20(3), 15-22, (2018).

Podlubny, I., *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, 198, San Diego: Academic Press, (1998).

Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, (1999).

Podlubny, L., *The laplace transform method for linear differantial equations of fractional order*, Slovak Republic: Slovak Academy of Science, (1994).

Podlubny, I., “What Euler could further write, or the unnoticed “Big Bang” of the fractional calculus”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16(2), 501-506, (2013).

Ross, B., “Fractional Calculus”, *Mathematics Magazine*, 50(3), 115-122, (1977).

Saha Ray, S., Bera, R.K., Bera, “An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method”, *Appl. Math. Comput.*, 167, 561–571, (2005).

Shat, R., Alrefi, S., Alhamayda, I., Sharan, A. and Al-Refai, M., “The fractional Laguerre equation: Series solutions and fractional Laguerre functions”, *Fron. Appl. Math. Stad.*, 5, 1-6, (2019).

Soytaş, C., “Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, (2006).

Şenol, M. and Ata, A., “Approximate solution of time-fractional KdV equations by residual power series method”, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 20(1), 430-439, (2018).

Tabak, G., “Bulanık diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kocaeli, (2018).

Uddin, M.H., Khatun, M. A., Arefin, M.A., and Akbar M.A., “Abundant new exact solutions to the fractional nonlinear evolution equation via Riemann-Liouville derivative”, *Alex. Eng. J.*, 60, 5183–5191, (2021).

Ünal, E. ve Gökdoğan, A., “Uyumlu Kesir Mertebeden Chebyshev Diferansiyel Denklemleri ve Kesirsel Chebyshev Polinomları”, *AKU J. Sci. Eng.*, 16, 576-584, (2016).

Weilbeer, M., “Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background”, PhD Thesis, *Technical University of Braunschweig*, Braunschweig, (2005).

Xu, F., Gao, Y., Yang, X. and Zhang, H., “Construction of fractional power series solutions to fractional Boussinesq equations using residual power series method”, *Math. Probl. Eng.*, 2016, 1-15, (2016).

Yılmaz, S. ve Taşbozan, O., “Yardımcı Denklemler Yöntemi Yardımı ile Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerinin Analitik Çözümleri”, *AKU J. Sci. Eng.*, 19, 626-634, (2019).

Zhang, Y., Kumar, A., Kumar, S., Baleanu, D. and Yang, X., “Residual power series method for time-fractional Schrödinger equations”, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9, 5821-5829, (2016).