

77396

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

10.0600.0000.078

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

77386

BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DELAY

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN

ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLARI

Neslihan Yılmaz

1998 - İZMİR

TEZİN KÜTÜPHANESİNE
GİRİŞİ

III

Neslihan YILMAZ'ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLARI adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği..... ile kabul edilmiştir.

30 / 09 / 1998

Adı Soyadı

İmza

Başkan : Y. Doç. Dr. Emine Kurpular

Üye : ..Prof. Dr. Turgut Öziş ...

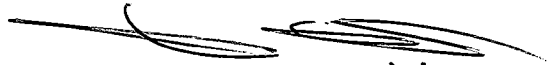
Üye : ..Prof. Dr. Hüseyin Hüseyinov



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/11/1998 gün ve44...../.....38..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Süleyman BORUZANLI
Enstitü Sekreteri



Prof. Dr. İsmet ERTAŞ

Enstitü Müdürü

ÖZET

**BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLARI**

YILMAZ, Neslihan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Emine Kurpınar
Eylül 1998, 45 sayfa

Bu tez çalışmasında fonksiyonel diferansiyel denklemler hakkında kısaca bilgi ve

$$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0, t \geq t_0$$

şeklindeki sabit katsayılı birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denklemlerin, τ , q , σ 'ların pozitif sabitler ve p 'nin reel bir parametre olduğu durumda, bütün çözümlerinin salınımı için koşullar ispatlarıyla verilmiştir.

Ayrıca

$$x'(t)+px'(t-\tau)+Q(t)x(t-\sigma)=0, t \geq t_0$$

şeklindeki değişken katsayılı birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denklemlerin, σ ve τ pozitif sabitler, $Q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ ve p 'nin reel bir parametre olduğu durumda, çözümlerinin salınımlı davranışı ve salınımsız çözümlerinin asimtotik davranışı incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Salınım, neutral delay diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

OSCILLATIONS OF SOLUTIONS

OF FIRST ORDER NEUTRAL DELAY

DIFFERENTIAL EQUATIONS

YILMAZ, Neslihan

MSc in Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Emine Kurpınar

September 1998, 45 pages

In this thesis, it has been given some information about functional differential equations and conditions with their proofs under which all solutions of the first order neutral delay differential equation

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0, t \geq t_0,$$

oscillate, where τ, q, σ are positive constants and p is a real parameter.

Besides, it has been studied the oscillatory behavior of solutions of the first order neutral delay differential equations of the form

$$x'(t) + px'(t-\tau) + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0$$

and the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions in the case where τ and σ are positive constants, $Q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ and p is a real parameter.

Keywords: Oscillation, neutral delay differential equations, functional differential equations.

VII

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın oluőturulması ve tamamlanmasında yaptığı değerli önerileri ve yapıcı eleőtirilerinden dolayı danıőmanım Yrd. Do. Dr. Emine KURPINAR'a ve aileme teőekkürü bir bor bilirim.



VIII

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	X
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	3
2.2 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılmaları.....	5
2.3 Çözümlerin Salınımı.....	8
2.4 Karakteristik Fonksiyon - Karakteristik Kökler.....	10
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLARI.....	11
3.1 Sabit Katsayılı Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları.....	11
3.2 Sonuçlar.....	28
3.3 Değişken Katsayılı Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları.....	30
4. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	40
YARARLANILAN KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45

IX

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Başlangıç fonksiyon problemi için başlangıç fonksiyonu	4
2.2 İkinci mertebeden denklemlerin lineer bağımsız çözümlerinin sınımları.....	9



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$C(E;F)$	$f:E \rightarrow F$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli fonksiyonlar uzayı.
$x'(t)$	$x(t)$ çözümünün birinci türevi.
$x''(t)$	$x(t)$ çözümünün ikinci türevi.

Kısaltmalar

BFP	Başlangıç fonksiyon problemi.
FDD	Fonksiyonel diferansiyel denklem.
NDDD	Neutral delay diferansiyel denklem.

1. GİRİŞ

Neutral delay diferansiyel denklemler, sapma (deviating) argümanlı ve sapma argümansız değişkenin, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinde yer aldığı diferansiyel denklemlerdir.

Neutral delay diferansiyel denklemlerin asimtotik ve sınımlı davranışları ya da çözümleri problemi, hem teorik hem de pratik açıdan önemlidir. Kayıpsız transmisyon hatlarını içeren şebekelerin incelenmesinde bu tip denklemler ortaya çıkar. Böyle şebekeler, örneğin kayıpsız transmisyon hatlarının açma-kapama devrelerinin birbirine bağlandığı yüksek hızlı bilgisayarlardan doğar (Brayton and Willoughby, 1967).

Delay diferansiyel denklemlerin salınım teorisi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlara örnek olarak Ladas (1979), Ladas ve Stavroulakis'in (1982) çalışmaları verilebilir. Örneğin Ladas ve Sficas (1986), Grammatikopoulos, Grove ve Ladas (1986) ise neutral delay diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sınımlı ve asimtotik davranışlarını incelemişlerdir. Bununla birlikte bu makalelerde sadece yeter koşullara ulaşılmıştır. Genellikle adi diferansiyel denklemler ile modellenebilen birçok olay, gecikmeli (delay) diferansiyel denklemler ile daha iyi modellenebilir. Uygulamada eğer τ gecikme terimi çok küçükse genellikle ihmal edilir ve gecikmeli diferansiyel denklem yerine adi diferansiyel denklem modeli kullanılabilir. Ancak Kuang (1993), küçük gecikmelerin büyük etkilere sahip olabileceğini belirtmiştir. Bu nedenle araştırmacılar, küçük olduklarını düşündükleri gecikmeleri ihmal ederek riske girmiş olurlar (Özer, 1998).

Bu çalışmada ikinci bölümde fonksiyonel diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde önce

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (1)$$

sabit katsayılı neutral delay diferansiyel denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için koşullar incelenmiştir. Burada τ , q , σ 'lar pozitif sabitler ve p , reel bir parametredir. Gerçekten, ancak ve ancak

$$\lambda + \lambda p e^{-\lambda\tau} + q e^{-\lambda\sigma} = 0$$

(1) denkleminin karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmaması durumunda (1) denkleminin her çözümünün salındığı Sficas ve Stavroulakis (1985) tarafından ispatlanmıştır.

Bu bölümde, ikinci olarak ise fonksiyonel diferansiyel denklem çeşitlerinden biri olan

$$\frac{d}{dt} [x(t) + px(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (2)$$

formundaki birinci mertebeden değişken katsayılı neutral delay diferansiyel denklemlerin, σ ve τ pozitif sabitler, $Q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ olduğu durumda; p reel parametresi üzerindeki koşullara göre çözümlerin salınımlarının davranışı ve salınımsız çözümlerin asimtotik davranışı incelenmiştir. Sabit katsayılı (1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul Sficas ve Stavroulakis (1985) tarafından bulunmuş, değişken katsayılı (2) denklemin için ise sadece yeter koşullar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Gerçek hayattaki birçok olay

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), t \geq t_0 & (2.1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 & (2.1.1a) \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer problemi kullanılarak modellenenabilir. Bu tür problemlerde t_0 başlangıç noktası; x_0 başlangıç değeridir. t_0 ve x_0 reel, sabit sayılardır. $F(t, \xi)$ üzerine belirli koşullar altında (2.1.1), (2.1.1a) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır ve bu problem

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, t \geq t_0 \quad (2.1.2)$$

integral denklemine eşdeğerdir. (2.1.1) denkleminin bir t noktasındaki türevi, bu noktadaki çözümün değeri biliniyorsa hesaplanabilir. Bu özellik, adi diferansiyel denklemlerin çözümünde çok önemlidir.

Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı, sadece t noktasındaki çözüme değil, aynı zamanda t 'den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı olursa sonuç diferansiyel denklem bir fonksiyonel diferansiyel denklem (FDD) olur. Bu denklemler literatürde, sapan (deviating) argümanlı diferansiyel denklemler olarak da geçer.

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)), t \geq t_0 \quad (2.1.3)$$

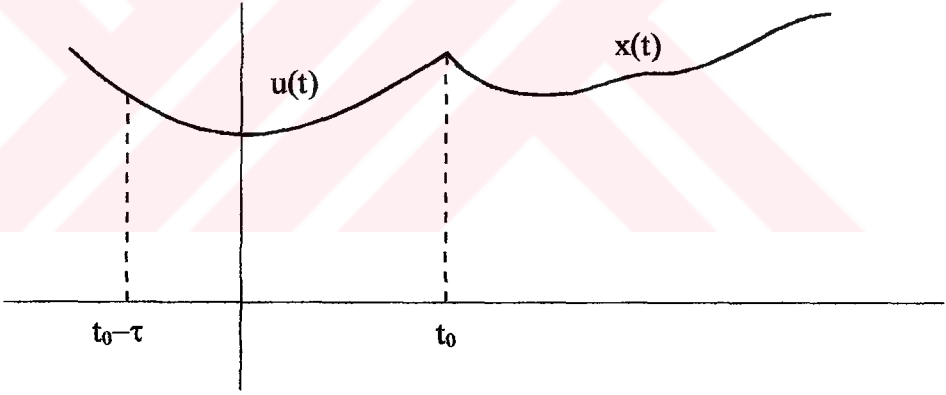
denklemini böyle bir diferansiyel denklem örneğidir. Burada τ , gecikme terimidir ve pozitif bir sabittir. (2.1.3) FDD'i

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s), x(s-\tau), x'(s-\tau)) ds \quad (2.1.4)$$

integral denkleminin eşdeğeri. (2.1.3) denkleminin çözümünü tanımlamak için, $x(t_0)=x_0$ başlangıç koşulu yerine, FDD'lerde $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında bilinen bir $u(t)$ fonksiyonuna gereksinim vardır. FDD'lerde

$$t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \text{ için } x(t) = u(t) \quad (2.1.5)$$

şeklinde verilen, sürekli u fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu adı verilir. (2.1.3) diferansiyel denklemi, (2.1.5) başlangıç fonksiyonu ile birlikte başlangıç fonksiyon problemi (BFP) olarak adlandırılabilir. Şekil 2.1'de gösterildiği gibi genellikle, $x(t_0^+) = u(t_0^-)$ olduğu kabul edilir.



Şekil 2.1: Başlangıç fonksiyon problemi için başlangıç fonksiyonu

Örneğin,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + x(t-1), & t \geq 0 \\ x(t) = 2t & , \quad -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

problemi bir BFP'dir.

Eğer gecikme terimi, t 'nin bir fonksiyonu (değişken gecikme durumu) ise, $t \geq t_0$ için $t - \tau(t)$ 'ler t_0 'dan küçük olmak üzere, başlangıç fonksiyonu $t - \tau(t)$ 'nin bütün değerlerini içeren aralıkta verilmelidir.

Örneğin,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t/2)), t \geq t_0$$

denklemi için eğer başlangıç noktası, $t_0 = 0$ ise sadece bir $u(t_0)$ başlangıç değerini belirtmek yeterlidir. Eğer $t_0 = 1$ ise $u(t)$, $1/2 \leq t \leq 1$ aralığında verilmelidir.

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \cos^2 t)), t \geq 0$$

alınırsa, $u(t)$ başlangıç fonksiyonu $-1 \leq t \leq 0$ aralığında belirtilmelidir.

2.2. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılmaları

Fonksiyonel diferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyonun içerdiği gecikmeli değişkenlere göre tanımlanabilirler.

Advanced FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümanının yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüman, geriye kalan bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin argümanlarından büyük değildir.

Örneğin,

$$x'(t) = -x(t+t^2) + x(t+4) - t + 2$$

denklemi bir advanced FDD'dir.

Mixed (karışık) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümanının yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argümandan daha küçük ve büyük olan argümanlar vardır.

Örneğin,

$$x'(t)=2x(t-1)-3tx(t+1)-8$$

$$x'(t)=2x(t+\sqrt{t})-tx(t-1)$$

denklemleri mixed FDD'lerdir.

Neutral FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin sapma argümanlı ve sapma argümansız terimleri içerdiği diferansiyel denklemlerdir.

Örneğin,

$$x'(t)=-tx'(t-1)+\frac{t}{t+2}x(t-3)+3\cos t$$

$$x'(t)=2x(t+\sqrt{t})-x'(t-1)+2t$$

$$x'(t)+a(t)x'(t-\tau)+b(t)x(t)=0, \tau>0$$

$$x''(t)+a(t)x''(t-\tau)+F(t,x(t),x'(t))=0, \tau>0$$

denklemleri neutral FDD'lerdir. Ancak,

$$x'(t)+c(t)x(t-\tau)=0, \tau>0$$

denklemleri neutral FDD değildir.

Delay (retarded) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümanının yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüman, bilinmeyen fonksiyonun ve onun denklemde ifade edilen türevlerinin argümanlarından daha küçük değildir.

Örneğin,

$$x'(t)=2tx(t/3)-x(t-1)+5$$

$$x''(t)=x'(t)-2x(t-\cos^2 t)$$

denklemleri delay (retarded) FDD'lerdir.

Yukarıda yapılan FDD'lerin sınıflandırılması tam değildir. t değerler kümesinin bu tiplerden birine ve diğer bir kümenin başka bir tipe ait olduğu bir diferansiyel denklem bulmak mümkündür. Örneğin,

$$x'(t) = tx(t) - x(t + \sin t)$$

denklemini, $\sin t \leq 0$ olan aralıklarda bir delay FDD ve $\sin t \geq 0$ olan aralıklarda bir advanced FDD'dir. Hala hiçbir isim verilemeyen denklemler vardır. $x'(t) = x(x(\tau(t)))$ gibi bir denklemin hangi tipten olduğuna karar vermek mümkün değildir.

Gecikmeli (delay) diferansiyel denklemler, matematiksel modellemenin birçok alanında ortaya çıkarlar: Nüfus dinamiği, immunoloji, enzim kinetiği, v.b. Aşağıda bunun için bir örnek verilmiştir.

Örnek: (Driver, 1976)

B galon taze deniz suyu içeren bir tank ele alınsın. Dakikada q galon oranında akararak deniz suyu tepeye varsın. Tanktaki tuzlu su sürekli karıştırılsın ve karışım bir delikten dakikada q galon aksın. t zamanında tanktaki deniz suyundaki tuz miktarı $x(t)$ (libre) olsun. Eğer öğrencinin tankı sürekli karıştırdığı kabul edilirse, tankta kalan deniz suyu her galon başına $x(t)/B$ libre tuz içerir. Böylece

$$x'(t) = -\frac{q}{B}x(t)$$

diferansiyel denklemi kurulur.

Ama gerçekte karışımın tankın her yerinde oluşamayacağı varsayılınsın. Böylece t zamanında tankta kalan deniz suyu konsantrasyonu, daha önceki bir andaki $(t-\tau)$ ortalama konsantrasyonuna eşit olacaktır. τ 'nin pozitif bir sabit olduğu kabul edilsin. x için diferansiyel denklem

$$x'(t) = -\frac{q}{B}x(t-\tau)$$

şeklinde bir delay diferansiyel denklem olur.

Başlangıç koşulu olarak

$$x(t) = c, \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0$$

kabul edilebilir. Bu, t_0 zamanından önce B galon deniz suyunun her yerinde karışmış, c libre tuz içeren tankı gösterir.

2.3. Çözümlerin Salınımı

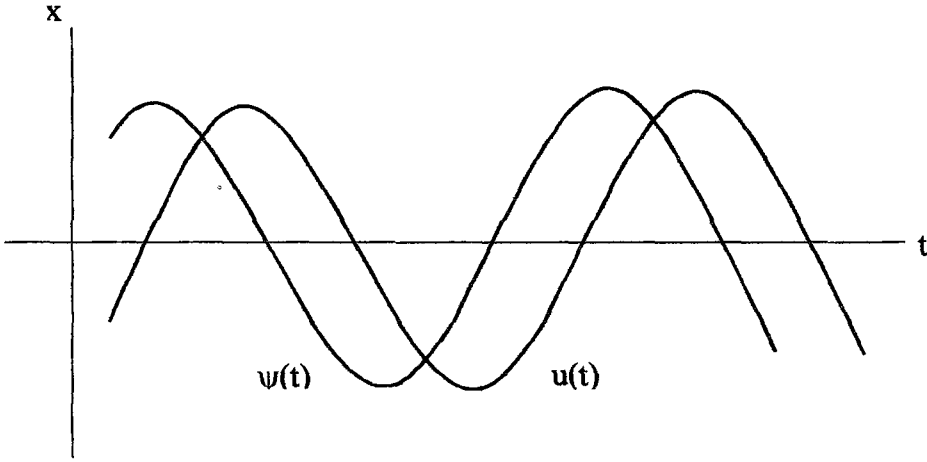
Çözümlerin salınımı tanımından önce regular (düzgün) çözümün tanımı yapılacaktır.

Örneğin,

$$x''(t) + a(t)x(t-\tau(t)) = 0 \quad (2.3.1)$$

denkleminin $x(t)$ çözümlerine bakılırsa $[T_x, \infty)$ ışınları üzerindedirler ve her $T \geq T_x$ için $\sup\{|x(t)| : t \geq T\}$ 'yi sağlarlar. Yani, her $[T, \infty)$ aralığında $|x(t)| \neq 0$ 'dır. Böyle bir çözüme regular (düzgün) çözüm denir. Düzgün çözümlerin salınım tanımı iki şekilde verilebilir:

Tanım 2.3.1: Trivial olmayan bir $x(t)$ çözümünün $t \geq t_0$ için eğer keyfi büyük kökleri varsa salınımlı olduğu söylenir. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ olacak şekilde $x(t)$ 'nin $\{t_n\}$ köklerinin bir dizisi vardır ($x(t) = 0$). Aksi halde $x(t)$ çözümü salınımsızdır. Şekil 2.2'de $x'' + A(t)x = 0$ 'ın iki lineer bağımsız $\psi(t)$ ve $u(t)$ çözümlerinin beraber yaptıkları salınımlar gösterilmektedir.



Şekil 2.2: İkinci mertebeden denklemlerin lineer bağımsız çözümlerinin salınımları.

Salınımsız çözümlerde, bütün $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 vardır.

Tanım 2.3.2: Trivial olmayan bir $x(t)$ çözümü eğer (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa bu çözüme salınımlıdır denir. Burada T , herhangi bir sayıdır.

Waltman (1986), salınım ve karşılaştırma teoremleri ile ilgili daha geniş bilgi vermiştir.

Şimdi çözümlerin salınımları ile ilgili birkaç örnek verilecektir.

Örnek 2.3.1: $x'' + x = 0$

denklemin $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ periyodik çözümlerine sahiptir.

Örnek 2.3.2: $x''(t) - (1/t)x'(t) + 4t^2x(t) = 0$

denkleminin çözümü, $x(t) = \sin t^2$ periyodik değildir ancak salınım özelliği taşır.

Örnek 2.3.3: $x''(t) - x(-t) = 0$

denkleminin sınımlı bir çözümü $x_1(t) = \sin t$ ve sınımsız bir çözümü de $x_2(t) = e^t + e^{-t}$ dir.

2.4. Karakteristik Fonksiyon - Karakteristik Kökler

Sabit katsayılı birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denkleminin (NDDD)

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0, t \geq t_0$$

şeklinde yazılabilir. Burada q, τ, σ sabitler, $p \in \mathbb{R}$ ve $q, \tau, \sigma > 0$ ' dir.

Bu denklemin lineer operatörü $L(x)$ olan denklemin,

$$L(x) = x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma)$$

şeklinde olur. $L(x) = 0$ şeklindeki denkleme homojen, $L(x) = f$ şeklindeki denkleme homojen olmayan denklemdir.

Homojen bir denklemin her çözümü, basit çözümlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Basit çözümler genelde üstel olduğundan diferansiyel denklemlerin çözümleri de üstel olarak bulunabilir.

$$L(e^{\lambda t}) = (\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma})e^{\lambda t}$$

olur. λ sayısı,

$$F(\lambda) = \lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma}$$

fonksiyonunun bir kökü olduğunda $x = e^{\lambda t}$, $\forall t$ için $L(x) = 0$ ' in bir çözümüdür. Karşıtı da doğrudur.

Tanım 2.4.1: $L(x) = 0$ denkleminin ile buna karşı gelen $F(\lambda)$ fonksiyonu, L ' nin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. $F(\lambda) = 0$ ' in kökleri de L ' nin karakteristik kökleri olarak tanımlanır.

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLARI

3.1. Sabit Katsayılı Birinci Mertebeden Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları

Bu kısımda ilk olarak

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (3.1.1)$$

sabit katsayılı neutral delay diferansiyel denklem ele alınmıştır. Burada τ , q , σ 'lar pozitif sabitler ve p reel bir parametredir. Ladas ve Sficas (1986), makalelerinde (3.1.1) denkleminde, q 'nun bir değişken olduğu yani $Q \in C\left(\left[t_0, \infty\right), \mathbb{R}^+\right)$ ve p reel parametresinin $[-1, 0]$ aralığında olması durumunda (diğer koşullar aynen geçerli) denklemin çözümlerinin salınımlı davranışını ve salınımsız çözümlerin asimtotik davranışını incelemişlerdir. Burada ise önce verilen denklemin çözümlerinin salınımı, $p < -1$ ve $p > 0$ aralıklarında ispatsız incelenecek sonra örnekler verilecektir (Grammatikopoulos et al., 1986). Daha sonra Sficas ve Stavroulakis (1987) tarafından (3.1.1) NDDD'in çözümlerinin salınımı için ortaya koydukları gerek ve yeter koşulu içeren teorem ve ispatı verilecektir. Grammatikopoulos, Grove ve Ladas (1986) konuda yer verdikleri teoremlerinde sadece yeter koşullara ulaşmışlardır. Halbuki Sficas ve Stavroulakis (1987) bütün çözümlerin salınımları için gerek ve yeter koşulu bulmuşlardır.

A-) $p < -1$ Durumu

(3.1.1) neutral delay diferansiyel denklemin karakteristik denklemini, $F(\lambda) = \lambda + \lambda p e^{-\lambda\tau} + q e^{-\lambda\sigma} = 0$ 'dır. Burada q , τ ve σ 'lar pozitif sabitlerdir ve $p < -1$ 'dir. $\lambda \leq 0$ için,

$$F(\lambda) = -\lambda(-p e^{-\lambda\tau} - 1) + q e^{-\lambda\sigma} > 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.1.1) denkleminin karakteristik denkleminin sahip olabileceği sadece reel kökleri pozitiftir. Bu gözlem, salınımsız çözümlerin asimtotik davranışına dair şu teoremi ortaya koyar.

Teorem 3.1.1 (3.1.1) denklemini ele alınsın. q , τ ve σ 'lar pozitif sabitler ve $p < -1$ olduğunda (3.1.1) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ için $+\infty$ 'a veya $-\infty$ 'a gider.

Sonraki teorem, (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için yeter koşulları verir.

Teorem 3.1.2 (3.1.1) denklemini ele alınsın. q , τ ve σ ; pozitif sabitler olsunlar.

$$p < -1, \tau > \sigma \text{ ve}$$

$$(c_1) \quad q(\sigma - \tau)/(p+1) > 1/e$$

olduğu kabul edildiğinde (3.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

B-) $p > 0$ Durumu

Teorem 3.1.3, teorem 3.1.1'deki gibi karakteristik denklemden çıkar. p , q , σ ve τ 'nun pozitif sabitler olduğu bu durumda

$$F(\lambda) = \lambda + \lambda p e^{-\lambda\tau} + q e^{-\lambda\sigma} = 0$$

karakteristik denklemini, negatif olmayan reel köklere sahip olamaz.

Teorem 3.1.3 (3.1.1) denklemi ele alınsın. p, q, σ ve τ 'lar pozitif sabitler olsunlar. Bu durumda (3.1.1) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ için sifira gider.

Eğer $\tau \geq \sigma > 0$ ise (3.1.1) denklemi daima salınımsız çözümlere sahip

olur. $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -\infty$ iken gerçekten (3.1.1) denkleminin karakteristik

denklemini

$$F(\lambda) = \lambda + \lambda p e^{-\lambda \tau} + q e^{-\lambda \sigma} = 0$$

ve $F(0) = q > 0$ 'dır.

Teorem 3.1.4 (3.1.1) denklemi ele alınsın. p, q, τ ve σ 'lar pozitif sabitler olsunlar. (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımları için gerek koşul

$$\sigma > \tau$$

olmasıdır. Bir sonraki teorem, (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımları için yeter koşulu sağlar.

Teorem 3.1.5 (3.1.1) denklemi ele alınsın. p, q, τ ve σ 'lar pozitif sabitler, $\sigma > \tau$ ve

$$(c_1) \quad q(\sigma - \tau)/(1 + p) > 1/e$$

olduğunda (3.1.1) denkleminin her çözümü salınır.

C-) Örnekler

İlk iki örnek, salınımsız çözümlerin asimtotik davranışını gösterir.

$$\text{Örnek 3.1.1 } \frac{d}{dt} [x(t) - 2ex(t-1)] + e^{1/2} x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.2)$$

q , τ ve σ 'ların pozitif olmasından ve $p < -1$ olmasından, (3.1.2) denklemi teorem 3.1.1'in hipotezini sağlar ve bu yüzden (3.1.2) denkleminin her salınımsız çözümü, $t \rightarrow \infty$ için ya $+\infty$ 'a ya da $-\infty$ 'a gider. Örneğin, $x(t) = e^t$ ve $x(t) = -e^t$ böyle çözümlerdir.

$$\text{Örnek 3.1.2 } \frac{d}{dt} \left[x(t) + \left(e - \frac{1}{e} \right) x(t-1) \right] + x(t-2) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.3)$$

p, q, σ ve τ 'lar pozitif sabitler olduğundan, (3.1.3) denklemi teorem 3.1.3'ün hipotezini sağlar ve bu nedenle (3.1.3) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ için sifira gider. Örneğin, $x(t) = e^{-t}$ böyle bir çözümdür.

Örnek 3.1.3 $p < -1$ olduğunda,

$$\frac{d}{dt} [x(t) + px(t-2\pi)] + (-p-1)x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.4)$$

$$p < -1, \quad \tau = 2\pi > \frac{3\pi}{2} = \sigma \quad \text{ve} \quad q(\sigma - \tau)/(p+1) > 1/e \quad \text{olmasından} \quad (3.1.4)$$

denklemi teorem 3.1.2'nin hipotezini sağlar ve bu nedenle (3.1.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Örneğin, $x(t) = \sin t$ böyle bir çözümdür.

Örnek 3.1.4 $p > 0$ olduğunda $t \geq 0$ için,

$$\frac{d}{dt} [x(t) + px(t-2\pi)] + e^{3\pi/4} (e^{2\pi} + p) \sqrt{2} x\left(t - \frac{11}{4}\pi\right) = 0, \quad (3.1.5)$$

$$p, q, \tau \text{ ve } \sigma \text{ 'lar pozitif sabitler, } \sigma = \frac{11}{4}\pi > 2\pi = \tau \text{ ve } q(\sigma - \tau)/(1+p) > 1/e$$

olmasından (3.1.5) denklemi teorem 3.1.5'in hipotezini sağlar. Bundan dolayı, (3.1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Şimdi de Sficas ve Stavroulakis (1987) tarafından (3.1.1) NDDD'nin çözümlerinin salınımı için ortaya koydukları gerek ve yeter koşulu içeren teoremi ve ispatı inceleyelim.

Teorem 3.1.6 3.1.1 sabit katsayılı neutral delay diferansiyel denklemi ele alınsın. τ, q, σ 'lar için daha önce belirtilen koşullar geçerlidir. (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınım için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0 \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmamasıdır.

$p=0$ olduğunda (3.1.1) denklemi,

$$x'(t) + qx(\tau - \sigma) = 0 \quad (3.1.7)$$

şeklinde delay diferansiyel denkleme dönüşür. Ladas'a (1979) göre (3.1.7) denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için gerek ve yeter koşul,

$$q\sigma > \frac{1}{e} \quad (3.1.8)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Sficas and Stavroulakis, 1987). Bu durumda karakteristik denklem,

$$\lambda + qe^{-\lambda\sigma} = 0 \quad (3.1.9)$$

olur. (3.1.8) eşitsizliği, (3.1.9) denkleminin gerçel köklerinin olmamasına eşdeğerdir.

Ayrıca $p=-1$ için (3.1.1) denklemi

$$x'(t) - x'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0 \quad (3.1.10)$$

şekline dönüşür ve bu durumda Ladas ve Sficas'a (1986) göre, (3.1.10) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Sficas and Stavroulakis, 1987).

Bu gözlemlere göre teoremin ispatlanması için p 'nin aşağıdaki üç durumu düşünülmelidir.

- (i) $-1 < p < 0$
- (ii) $p > 0$
- (iii) $p < -1$

Aşağıdaki lemma, (3.1.1) denkleminin pozitif bir $x(t)$ çözümünden asimtotik özellikli çözümler oluşturulabileceğini gösterir.

Lemma 3.1.1 $x(t)$, (3.1.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun.

(a) $p > -1$ için $z(t) = x(t) + px(t-\tau)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Azalandır ve $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ 'dır.

(b) $p < -1$ için $z(t) = -x(t) - px(t-\tau)$ fonksiyonu, (3.1.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Artandır ve $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$ 'dur.

Lemma 3.1.1'in ispatı elenmiştir. Çünkü Ladas ve Sficas'ın (1986) makalesindeki Lemma 1 ve teorem 5'i ve Grammatikopoulos, Grove ve Ladas'ın (1986) makalesindeki teorem 9 ve teorem 6'yı birleştirerek çıkarılabilir.

Teorem 3.1.6'nın İspatı

Teorem 3.1.6'nın ispatı olmayana ergi metoduyla yapılacaktır: (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, (3.1.6) karakteristik denkleminin bir gerçel kökünün olmasıdır.

Gereklilik: (3.1.6) denkleminin gerçel bir kökü olduğu kabul edilsin. Bu durumda (3.1.1) denklemi, $x(t) = e^{\lambda t}$ salınımsız çözümüne sahiptir.

Yeterlilik: (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı olmasın. Böylece, (3.1.1) denkleminin pozitif bir $x(t)$ çözümü varolur.

Bu durumda aşağıdaki üç durum incelenir:

(i) $-1 < p < 0$ Durumu

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau) \quad (3.1.11)$$

olsun. Lemma 3.1.1'e göre $z(t)$, pozitif ve azalandır ve $x(t)$ de azalan olarak düşünülebilir. Buradan $z(t) < x(t-\sigma)$ olduğu görülebilir:

(3.1.11) denkleminde $-1 < p < 0$ olmasından dolayı $z(t) < x(t)$ olur. $x(t)$ azalan olduğu için $x(t) < x(t-\sigma)$ yazılabilir. Bu son iki eşitsizlikten, $z(t) < x(t-\sigma)$ olur.

$$\Lambda(z) = \{\lambda > 0: z'(t) + \lambda z(t) < 0\} \quad (3.1.12)$$

kümesi tanımlansın. (3.1.1) denkleminde

$0 = z'(t) + qx(t-\sigma) > z'(t) + qz(t)$ elde edilir. Böylece $q \in \Lambda(z)$ olur. Yani $\Lambda(z)$ boş değildir.

Bununla birlikte,

$$0 = z'(t) + qx(t-\sigma) = z'(t) + qz(t-\sigma) - pqx(t-\tau-\sigma) \quad (3.1.13)$$

sonucu çıkar ve (3.1.13)'ü t' den $t+\tau$ 'ya integre ederek,

$$z(t+\tau) - z(t) + q \int_t^{t+\tau} z(s-\sigma) ds - pq \int_t^{t+\tau} x(s-\tau-\sigma) ds = 0 \quad (3.1.14)$$

elde edilir. $z(t)$ ve $x(t)$ pozitif ve azalan olduğu için (3.1.14) denklemini

$$z(t+\tau) - z(t) + q\tau z(t+\tau-\sigma) - pq\tau x(t-\sigma) \leq 0$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ifade

$$-pq\tau x(t-\sigma) \leq z(t)$$

olmasını gerektirir. Böylece sonuçta,

$$0 = z'(t) + qx(t-\sigma) \leq z'(t) + \left(\frac{1}{-p\tau} \right) z(t) \quad (3.1.15)$$

olur. Bu nedenle (3.1.15)'ten; $\lambda_0=1/(-p\tau)$, z' 'ye bağlı değildir ve $\Lambda(z)$ 'nin bir üst sınırdır. Böylece $\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır.

$\lambda \in \Lambda(z)$ olsun ve

$$w(t) \equiv Tz = z(t) + pz(t-\tau) \quad (3.1.16)$$

ele alınsın.

$$m = \inf_{\lambda > 0} \{-\lambda - p\lambda e^{\lambda\tau} + qe^{\lambda\sigma}\} \quad (3.1.17)$$

olsun. Çelişki elde edebilmek için (3.1.6) karakteristik denkleminin gerçek köklerinin olmadığı kabul edilsin. Üstelik, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (-\lambda - p\lambda e^{\lambda\tau} + qe^{\lambda\sigma}) = +\infty$ 'dur

ve bu yüzden m pozitifdir. $\lambda + m \in \Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir. (3.1.1) ve (3.1.16) denklemlerinden ve $z(t)$ ve $w(t)$ 'nin ikisinin de (3.1.1) denkleminin çözümleri olmalarından,

$$w'(t) = -qz(t-\sigma) \quad (3.1.18)$$

elde edilir. $u(t) = e^{\lambda t} z(t)$ olarak tanımlansın. Sonuçta

$$u'(t) = [z'(t) + \lambda z(t)] e^{\lambda t} < 0$$

olur. Bu nedenle $u(t)$ azalandır. $z(t) = e^{-\lambda t} u(t)$ olduğu için (3.1.16) ve (3.1.18) denklemleri sırasıyla,

$$w(t) = e^{-\lambda t} u(t) + pe^{-\lambda t} e^{\lambda\tau} u(t-\tau) \text{ ve}$$

$$w'(t) = -qe^{-\lambda t} e^{\lambda\sigma} u(t-\sigma)$$

olarak yazılabilirler. $u(t)$ 'nin azalan olmasından

$$w'(t) + (\lambda + m)w(t) = e^{-\lambda t} \left[-qe^{\lambda\sigma} u(t-\sigma) + (\lambda + m)u(t) + (\lambda + m)pe^{\lambda\tau} u(t-\tau) \right] \quad (3.1.19)$$

$$< e^{-\lambda t} u(t) \left[-qe^{\lambda\sigma} + \lambda + m + \lambda pe^{\lambda\tau} + mpe^{\lambda\tau} \right]$$

$$< e^{-\lambda t} u(t) \left[\lambda + p\lambda e^{\lambda\tau} - qe^{\lambda\sigma} + m \right]$$

$$\leq e^{-\lambda t} u(t) [-m + m] = 0$$

elde edilir. Bu sonuç, $(\lambda+m) \in \Lambda(w)$ olmasını gerektirir.

$z \equiv z_0$, $w \equiv Tz_0 = z_1$, $z_2 = Tz_1$ ve genel olarak $z_n = Tz_{n-1}$, $n=1, 2, \dots$, olsun. $\lambda \in \Lambda(z) \equiv \Lambda(z_0) \Rightarrow \lambda + nm \in \Lambda(z_n)$, $n=1, 2, \dots$, olduğu gözlenir. Bütün $\Lambda(z_n)$ 'ler için λ_0 ortak bir üst sınırdığından bu çelişkidir.

(ii) $p > 0$ Durumu

(i) durumundaki gibi

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau) \text{ ve} \quad (3.1.11)$$

$$\Lambda(z) = \{\lambda > 0: z'(t) + \lambda z(t) < 0\} \quad (3.1.12)$$

olsun. (3.1.1) denkleminin karakteristik denklemi kullanılarak

$$F(\lambda) = \lambda + \lambda p e^{-\lambda \tau} + q e^{-\lambda \sigma} = 0$$

olur. Grammatikopoulos, Grove ve Ladas'a (1986) göre,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -\infty \text{ iken eğer } \tau \geq \sigma > 0 \text{ ise } F(0) = q > 0$$

olduğu görülür. Bu nedenle (3.1.1) denklemi daima salınımsız çözümlere sahiptir. Böylece, $\sigma > \tau$; (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için gerekli bir şarttır (Sficas and Stavroulakis, 1987). Lemma 3.1.1'e göre $z(t)$, pozitif ve azalandır. O halde $x(t)$ de azalan olarak düşünülebilir. Böylece

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau) < x(t-\sigma) + px(t-\sigma) = (1+p)x(t-\sigma)$$

olur. Yani,

$$x(t-\sigma) > \frac{1}{1+p} z(t)$$

sonucu çıkar. (3.1.1) denkleminde,

$$0 = z'(t) + qx(t-\sigma) > z'(t) + \frac{q}{1+p} z(t)$$

elde edilir. Böylece $q/(1+p) \in \Lambda(z)$ olur. Yani $\Lambda(z)$ boş değildir.

Şimdi $\Lambda(z)$ 'nin üstten sınırlı olduğunu gösterelim. (3.1.1) denklemi otonomdur ve (3.1.1) denkleminin çözümlerinin bir lineer kombinasyonu olarak (3.1.11) denkleminde verilen $z(t)$ 'nin kendisi (3.1.1) denkleminin bir çözüdür. Bu nedenle

$$z'(t) + pz'(t-\tau) + qz(t-\sigma) = 0 \quad (3.1.20)$$

olur. Ayrıca, $z'(t) = -qx(t-\sigma) < 0$ ve $z''(t) = -qx'(t-\sigma) > 0$ 'dır. Yani $z'(t)$ artandır ve bu yüzden $z'(t) > z'(t-\tau)$ 'dur. Böylece (3.1.20) denklemi,

$$(1+p)z'(t-\tau) + qz(t-\sigma) \leq 0$$

veya

$$z'(t) + \frac{q}{1+p} z(t-(\sigma-\tau)) \leq 0 \quad (3.1.21)$$

eşitsizliklerini sağlar. (3.1.21) eşitsizliği $t - ((\sigma-\tau)/2)$ 'den t 'ye integre edilirse,

$$\int_{t-(\sigma-\tau)/2}^t z'(s) ds + \frac{q}{1+p} \int_{t-(\sigma-\tau)/2}^t z(s - (\sigma-\tau)) ds \leq c_1$$

$$c_1 \geq z(t) - z\left(t - \frac{(\sigma-\tau)}{2}\right) + \frac{q}{1+p} \int_{t-(\sigma-\tau)/2}^t z(s - (\sigma-\tau)) ds$$

elde edilir. $z(t)$ 'nin pozitif ve azalan olmasından

$$c_1 \geq z(t) - z\left(t - \frac{(\sigma-\tau)}{2}\right) + \frac{q}{1+p} \left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right) z(t - (\sigma-\tau)) \quad (3.1.22)$$

olur. (3.1.21) eşitsizliği, t 'den $t + ((\sigma-\tau)/2)$ 'ye integre edilirse

$$\int_t^{t+(\sigma-\tau)/2} z'(s) ds + \frac{q}{1+p} \int_t^{t+(\sigma-\tau)/2} z(s - (\sigma - \tau)) ds \leq c_2$$

$$c_2 \geq z\left(t + \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right) - z(t) + \frac{q}{1+p} \frac{(\sigma - \tau)}{2} z\left(t - \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right) \quad (3.1.23)$$

elde edilir. (3.1.22) ve (3.1.23)'de sabitler, $c_1=c_2=0$ kabul edilebilir.

(3.1.22)'de $z(t)$ pozitif olduğundan atılabilir. O zaman

$$\frac{q}{1+p} \frac{(\sigma - \tau)}{2} z(t - (\sigma - \tau)) \leq z\left(t - \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right)$$

olur.

$$z(t - (\sigma - \tau)) \leq \frac{2(1+p)}{q(\sigma - \tau)} z\left(t - \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right) \quad (3.1.24)$$

(3.1.23)'de $z(t)$ 'nin pozitif olmasından $z\left(t + \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right)$ atılabilir. O

zaman

$$\frac{q}{1+p} \frac{(\sigma - \tau)}{2} z\left(t - \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right) \leq z(t)$$

olur. Düzenlenirse,

$$z\left(t - \frac{(\sigma - \tau)}{2}\right) \leq \left[\frac{2(1+p)}{q(\sigma - \tau)} \right] z(t) \quad (3.1.25)$$

elde edilir. (3.1.24) ve (3.1.25)'den,

$$z(t - (\sigma - \tau)) \leq \left[\frac{2(1+p)}{q(\sigma - \tau)} \right]^2 z(t) \quad (3.1.26)$$

olur. Daha sonra $z'(t) + qx(\tau - \sigma) = 0$ denklemini $[t - \sigma + \tau, t]$ aralığında integre edilirse,

$$z(t) - z(t - (\sigma - \tau)) + q \int_{t - (\sigma - \tau)}^t x(s - \sigma) ds = 0$$

elde edilir. $x(t)$, pozitif ve azalan ve $z(t)$ pozitif olduğundan

$$q(\sigma - \tau)x(t - \sigma) \leq z(t - (\sigma - \tau)) \quad (3.1.27)$$

olur. (3.1.26) ve (3.1.27) eşitsizlikleri birleştirilerek,

$$x(t - \sigma) \leq \frac{[2(1 + p)]^2}{q^3 (\sigma - \tau)^3} z(t)$$

elde edilir. Böylece sonuçta

$$0 = z'(t) + qx(t - \sigma) \leq z'(t) + \left[\frac{4(1 + p)^2}{q^2 (\sigma - \tau)^3} \right] z(t)$$

olur. Bu nedenle

$\lambda_0 = 4(1 + p)^2 / q^2 (\sigma - \tau)^3$, z' 'ye bağlı değildir ve $\Lambda(z)$ 'nin bir üst sınıdır. Böylece $\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır.

Şimdi, (i) durumunun ispatındaki aynı işlemi $\lambda \in \Lambda(z)$ olduğu düşünülerek ve $w(t)$, m (3.1.16) ve (3.1.17) gibi tanımlanarak $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir. Burada

$$\mu = \frac{m}{1 + pe^{\lambda_0 \tau}} > 0$$

kabul edilir. (3.1.19) kullanılarak,

$$w'(t) + (\lambda + \mu)w(t)$$

$$= e^{-\lambda t} \left[-qe^{\lambda \sigma} u(t - \sigma) + (\lambda + \mu)u(t) + (\lambda + \mu)pe^{\lambda \tau} u(t - \tau) \right]$$

(ve $u(t)$, azalan ve $\sigma > \tau$ olduğu için)

$$< e^{-\lambda t} u(t - \sigma) \left[-qe^{\lambda \sigma} + \lambda + \mu + \lambda pe^{\lambda \tau} + \mu pe^{\lambda \tau} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} u(t-\sigma) \left[\lambda + p\lambda e^{\lambda\tau} - qe^{\lambda\sigma} + \mu(1 + pe^{\lambda\tau}) \right] \\
&\leq e^{-\lambda t} u(t-\sigma) \left[-m + \mu(1 + pe^{\lambda_0\tau}) \right] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç, $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olmasını gerektirir. (i) durumunda olduğu gibi bu, çelişki oluşturur.

(iii) $p < -1$ Durumu

$\tau \geq \sigma$ olsun.

$$z(t) = -x(t) - px(t-\tau) \quad (3.1.28)$$

kabul edilsin. Lemma 3.1.1'e göre $z(t)$, pozitif ve artandır. $x(t)$ de artan olarak düşünülebilir. (3.1.28)'den,

$$\begin{aligned}
-px(t-\tau) > z(t) &\Rightarrow x(t-\tau) > \frac{1}{(-p)} z(t) \text{ veya} \\
x(t-\sigma) &> \frac{1}{(-p)} z(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\Lambda(z) = \{ \lambda > 0 : -z'(t) + \lambda z(t) < 0 \} \quad (3.1.29)$$

kümesi tanımlansın. (3.1.1) denkleminde,

$$0 = -z'(t) + qx(t-\sigma) > -z'(t) + \frac{q}{(-p)} z(t)$$

olur. Böylece, $q/(-p) \in \Lambda(z)$ 'dir. Yani $\Lambda(z)$ boş değildir.

Şimdi $\Lambda(z)$ 'nin üstten sınırlı olduğu gösterilecektir. (3.1.28)'den

$$x(t-\tau) = \frac{1}{-p} [x(t) + z(t)]$$

vardır. Bu nedenle,

$$z'(t) = qx(t-\sigma) = \frac{q}{-p} \left[x(t+\tau-\sigma) + z(t+\tau-\sigma) \right] \quad (3.1.30)$$

olur. (3.1.30) denklemini $t-\tau$ 'dan t 'ye integre edildiğinde $x(t)$ ve $z(t)$ pozitif ve artan olduğu için,

$$z(t) - z(t-\tau) = \frac{q}{-p} \int_{t-\tau}^t \left[x(s+\tau-\sigma) + z(s+\tau-\sigma) \right] ds \geq \frac{q}{-p} \tau x(t-\sigma)$$

veya

$$x(t-\sigma) \leq \frac{-p}{q\tau} z(t)$$

elde edilir. Sonuçta,

$$0 = -z'(t) + qx(t-\sigma) \leq -z'(t) + \left(-\frac{p}{\tau} \right) z(t)$$

olarak bulunur. Bu nedenle $\lambda_0 = (-p/\tau)$, z 'ye bağlı değildir ve $\Lambda(z)$ 'nin bir üst sınırıdır. Yani $\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır.

Şimdi (i) durumunun ispatına benzer bir işlem takip edilecek ve $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir. $\lambda \in \Lambda(z)$ olsun ve

$$w(t) = -z(t) - pz(t-\tau) \quad (3.1.31)$$

kabul edilsin. Bu, (3.1.1)'in de bir çözümüdür. Bunun için (3.1.1) denkleminde

$$w'(t) = qz(t-\sigma)$$

elde edilir. Çelişki elde edebilmek için (3.1.6) denkleminin gerçel köklerinin olmadığı kabul edilsin.

$$m = \inf_{\lambda > 0} \{ \lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} \} \quad (3.1.32)$$

olarak tanımlansın. m pozitifdir. $\mu = m/(-p)e^{-\lambda_0\tau} > 0$ olmak üzere $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olduğunu gösterelim. $u(t) = e^{-\lambda t} z(t)$ tanımlandığında

$$u'(t) = [z'(t) - \lambda z(t)] e^{-\lambda t} > 0$$

olur. Bu yüzden u artandır. $z(t) = e^{\lambda t} u(t)$ olduğundan (3.1.19) denklemine benzer olarak

$$\begin{aligned} & -w'(t) + (\lambda + \mu)w(t) \\ & = e^{\lambda t} \left[-qe^{-\lambda\sigma} u(t - \sigma) - (\lambda + \mu)u(t) + (\lambda + \mu)(-p)e^{-\lambda\tau} u(t - \tau) \right] \end{aligned}$$

(ve $u(t)$ artan ve $\tau \geq \sigma$ olduğu için)

$$\begin{aligned} & < e^{\lambda t} u(t - \sigma) \left[-qe^{-\lambda\sigma} - (\lambda + \mu) + (\lambda + \mu)(-p)e^{-\lambda\tau} \right] \\ & = e^{\lambda t} u(t - \sigma) \left[-\lambda - p\lambda e^{-\lambda\tau} - qe^{-\lambda\sigma} + \mu(-pe^{-\lambda\tau} - 1) \right] \\ & \leq e^{\lambda t} u(t - \sigma) \left[-m + \mu(-p)e^{-\lambda\tau} - \mu \right] \\ & < e^{\lambda t} u(t - \sigma) \left[-m + \mu(-p)e^{-\lambda_0\tau} \right] = 0 \end{aligned}$$

sonucu çıkar. Bu, $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olmasını gerektirir ve çelişkiye ulaşılır. $p < -1$ durumundaki ispatın tamamlanması için $\sigma > \tau$ olduğu kabul edilmelidir.

$$z(t) = -x(t) - px(t - \tau) + q \int_{t-\sigma}^{t-\tau} x(s) ds \quad (3.1.33)$$

olarak tanımlansın. Bu, (3.1.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. (3.1.1) denkleminde,

$$z'(t) = qx(t - \tau) > 0$$

bulunur. Bu, $z(t)$ 'nin artan olmasını gerektirir ve $x(t)$ de artan olarak düşünülebilir. Bu nedenle (3.1.33) denkleminde,

$$\begin{aligned}
 z'(t) &< -px(t-\tau) + q \int_{t-\sigma}^{t-\tau} x(s) ds < -px(t-\tau) + q(\sigma-\tau)x(t-\tau) \\
 &= [q(\sigma-\tau) - p]x(t-\tau)
 \end{aligned}$$

veya

$$x(t-\tau) > \frac{1}{q(\sigma-\tau) - p} z(t) \quad (3.1.34)$$

elde edilir. $\Lambda(z)$ fonksiyonu, daha önce olduğu gibi

$$\Lambda(z) = \{\lambda > 0 : -z'(t) + \lambda z(t) < 0\} \quad (3.1.29)$$

şeklinde tanımlanır. (3.1.34) eşitsizliğinden,

$$0 = -z'(t) + qx(t-\tau) > -z'(t) + \frac{q}{q(\sigma-\tau) - p} z(t)$$

elde edilir. Bu nedenle $\frac{q}{q(\sigma-\tau) - p} \in \Lambda(z)$ 'dir. Yani $\Lambda(z)$ boş değildir.

Şimdi $\Lambda(z)$ 'nin üstten sınırlı olduğu gösterilecektir. $z(t)$, (3.1.1) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$z'(t) + pz'(t-\tau) + qz(t-\sigma) = 0$$

sonucu çıkar. Bu, $z'(t) + pz'(t-\tau) \leq 0$ olmasını gerektirir. Ancak,

$z'(t) = qx(t-\tau)$ 'dur. Böylece,

$$qx(t-\tau) + pz'(t-\tau) \leq 0 \quad (3.1.35)$$

elde edilir.

(3.1.35) eşitsizliği $[t, t+\tau]$ aralığında integre edildiğinde, $x(t)$ pozitif ve artan, $z(t)$ de pozitif olduğundan

$$0 \geq q \int_t^{t+\tau} x(s-\tau) ds + pz(t) - pz(t-\tau)$$

$$\geq q\tau x(t-\tau) + pz(t) - pz(t-\tau)$$

$$> q\tau x(t-\tau) + pz(t)$$

$$\text{veya } x(t-\tau) \leq \frac{(-p)}{q\tau} z(t)$$

olarak bulunur. Böylece sonuçta,

$$0 = -z'(t) + qx(t-\tau) \leq -z'(t) + \frac{(-p)}{\tau} z(t)$$

elde edilir. Bu, $\lambda_0 = (-p/\tau)$ 'nin $\Lambda(z)$ 'nin bir üst sınırı olmasını gerektirir. λ_0 , z 'ye bağlı değildir. Böylece $\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır.

$\lambda \in \Lambda(z)$ olsun ve

$$w(t) = -z(t) - pz(t-\tau) + q \int_{t-\sigma}^{t-\tau} z(s) ds$$

fonksiyonu alınsın. $z(t)$ ve $w(t)$ 'nin (3.1.1) denkleminin çözümleri olduğu kullanılarak,

$$w'(t) = qz(t-\tau)$$

elde edilir. m , (3.1.32)'deki gibi ve $u(t) = e^{-\lambda t} z(t)$ olarak tanımlansın.

$\mu = me^{\lambda_0 \tau} / ((q/\lambda_0) + (-p)) > 0$ olmak üzere $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir.

$$-w'(t) + (\lambda + \mu)w(t)$$

$$= e^{\lambda t} \left[-qe^{-\lambda \tau} u(t-\tau) - (\lambda + \mu)u(t) + (\lambda + \mu)(-p)e^{-\lambda \tau} u(t-\tau) \right.$$

$$\left. + (\lambda + \mu)qe^{-\lambda t} \int_{t-\sigma}^{t-\tau} e^{\lambda s} u(s) ds \right]$$

($u(t)$ artan ve $\sigma > \tau$ olduğu için)

$$\begin{aligned}
& \langle e^{\lambda t} u(t-\tau) \left[-qe^{-\lambda\tau} - (\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)(-p)e^{-\lambda\tau} \right. \\
& \quad \left. + (\lambda+\mu)q \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} (e^{\lambda(t-\tau)} - e^{\lambda(t-\sigma)}) \right] \\
& = e^{\lambda t} u(t-\tau) \left[-qe^{-\lambda\tau} - \lambda - \mu - \lambda p e^{-\lambda\tau} - \mu p e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\tau} - qe^{-\lambda\sigma} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu q}{\lambda} e^{-\lambda\tau} - \frac{\mu q}{\lambda} e^{-\lambda\sigma} \right] \\
& \langle e^{\lambda t} u(t-\tau) \left[-\lambda - p\lambda e^{-\lambda\tau} - qe^{-\lambda\sigma} - \mu p e^{-\lambda\tau} + \frac{\mu q}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right] \\
& \leq e^{\lambda t} u(t-\tau) \left[-m + \mu e^{-\lambda_0 \tau} \left(\frac{q}{\lambda_0} + (-p) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

Bu, $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olmasını gerektirir. (i) durumundaki gibi bu bir çelişkidir.

3.2 Sonuçlar

(3.1.1) sabit katsayılı neutral delay diferansiyel denklemi için τ , q , σ 'lar pozitif sabitler ve p , reel bir parametre olmak üzere sonuçlar ve ispatları verilmiştir.

Sonuç 3.1.1 $-1 < p < 0$

$$\text{ve } (-p)\tau q > 1 \quad (3.1.36)$$

koşulları sağlandığında (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmadığı kabul edilsin. Böylece (3.1.1) denkleminin $x(t)$ çözümü pozitif olur.

Teorem 3.1.6'nın ispatından; $q \in \Lambda(z)$ ve $1/(-p\tau)$ sayısının $\Lambda(z)$ kümesi için bir üst sınır olduğu bulunmuştur. Böylece, $q \leq 1/(-p\tau)$ 'dur. Bu ise (3.1.36) koşuluyla çelişir.

Sonuç 3.1.2 $p > 0$

$$\text{ve} \left(\frac{q}{1+p} \right)^3 \frac{(\sigma - \tau)^3}{4} > 1 \quad (3.1.37)$$

koşulları sağlandığında (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmadığı kabul edilsin. Böylece (3.1.1) denkleminin $x(t)$ çözümü pozitif olur. O zaman teorem 3.1.6'nın ispatından;

$$\frac{q}{1+p} \in \Lambda(z) \text{ ve } \frac{4(1+p)^2}{q^2 (\sigma - \tau)^3} \text{ 'nün } \Lambda(z) \text{ kümesi için bir üst sınır}$$

olduğu elde edildi. Böylece,

$$\frac{q}{1+p} \leq \frac{4(1+p)^2}{q^2 (\sigma - \tau)^3}$$

$$\frac{q^3 (\sigma - \tau)^3}{(1+p)^3 4} \leq 1 \text{ olur. Bu, (3.1.37) koşulu ile çelişir.}$$

Sonuç 3.1.3 $p < -1$, $\tau \geq \sigma$ ve

$$q\tau/p^2 > 1 \quad (3.1.38)$$

koşulları sağlanırsa (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmadığı kabul edilsin. Böylece (3.1.1) denkleminin $x(t)$ çözümü pozitif olur. O zaman teorem 3.1.6'nın ispatından;

$\frac{q}{-p} \in \Lambda(z)$ ve $\frac{-p}{\tau}$ 'nin $\Lambda(z)$ 'nin bir üst sınırı olduğu sonucu

elde edildi. Böylece,

$$\frac{q}{-p} \leq \frac{-p}{\tau} \Rightarrow \frac{q\tau}{p^2} \leq 1$$

olur. Bu sonuç (3.1.38) koşulu ile çelişir.

Sonuç 3.1.4 $p < -1$, $\sigma > \tau$ ve

$$\frac{q\tau}{p^2 + (-p)q(\sigma - \tau)} > 1 \quad (3.1.39)$$

koşulları sağlanırsa (3.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat (3.1.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmadığı kabul edilsin. Böylece (3.1.1) denkleminin $x(t)$ çözümü pozitif olur. O zaman teorem 3.1.6'nın ispatından;

$\frac{q}{q(\sigma - \tau) - p} \in \Lambda(z)$ ve $\frac{-p}{\tau}$ sayısının $\Lambda(z)$ kümesi için bir üst sınır olduğu elde edildi. Böylece,

$$\frac{q}{q(\sigma - \tau) - p} \leq -\frac{p}{\tau} \Rightarrow \frac{q\tau}{p^2 + (-p)q(\sigma - \tau)} \leq 1$$

olur. Bu sonuç, (3.1.39) koşulu ile çelişir.

3.3 Değişken Katsayılı Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları

Bu bölümde benzer iki denklemle çalışılacaktır. Birinci olarak verilen birinci mertebeden değişken katsayılı neutral delay diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dt} [x(t) + P(t)x(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (3.3.1)$$

ele alınmış ve burada

$$H.3.3.1 \quad P(t), Q(t) \in C([t_0, \infty); \mathbb{R})$$

$$H.3.3.2 \quad t \geq t_0 \text{ için } Q(t) \geq 0$$

$$H.3.3.3 \quad q \text{ sabit iken, } t \geq t_0 \text{ için } Q(t) \geq q > 0$$

koşullarının sağlandığı varsayılmıştır.

$p = \max\{\tau, \sigma\}$ olduğunda başlangıç fonksiyonu

$$\phi(t) \in C([t_0 - p, t_0]; \mathbb{R}) \text{ olsun.}$$

Diğer verilen denklem ve koşulları ise

$$\frac{d}{dt} [x(t) + px(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (3.3.2)$$

τ ve σ 'lar pozitif sabitler ve $Q(t) \in C([t_0, \infty); \mathbb{R})$ olsun. Reel

parametre p ise $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ arasındadır.

Burada çözümlerin salınımı için yeter koşulları içeren teoremler verilecektir. Salımsız çözümlerin asimtotik davranışını içeren teoremler ispatsız olarak verilecektir. Önce ilgili lemmayı verelim.

Lemma 3.3.1 Kabul edilsin ki $\mu = \text{sabit} > 0$ ve

$p(t) \in C([t_0, \infty); (0, \infty))$ iken $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t p(s) ds > \frac{1}{e}$ koşulu sağlansın.

O halde

$$(i) \quad x'(t) - p(t)x(t+\mu) \geq 0, t \geq t_0$$

diferansiyel eşitsizliğinin pozitif çözümleri yoktur.

$$(ii) \quad x'(t) - p(t)x(t+\mu) \leq 0, \quad t \geq t_0$$

diferansiyel eşitsizliğin negatif çözümleri yoktur.

$$(iii) \quad x'(t) + p(t)x(t-\mu) \leq 0, \quad t \geq t_0$$

diferansiyel eşitsizliğin pozitif çözümleri yoktur.

$$(iv) \quad x'(t) + p(t)x(t-\mu) \geq 0, \quad t \geq t_0$$

diferansiyel eşitsizliğin negatif çözümleri yoktur.

Bu lemma, Ladas ve Stavroulakis'in (1982) delay diferansiyel eşitsizliklerin bir sonucunun geliştirilmiş versiyonudur (Grammatikopoulos et al., 1986).

$x(t)$, (3.3.1) denkleminin bir çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) + P(t)x(t-\tau)$$

fonksiyonu,

$$z'(t) + R(t)z'(t-\tau) + Q(t)z(t-\sigma) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3.3)$$

denkleminin sürekli diferansiyellenebilir bir çözümüdür. Burada,

$$R(t) = P(t-\sigma) \frac{Q(t)}{Q(t-\tau)}$$

olur.

Şimdi verilecek teoremler ve ispatları dört ayrı bölüm altında incelenecektir.

A-) $p < -1$ Durumu

$p < -1$ olduğu durumda Grammatikopoulos, Grove ve Ladas (1986) teoremlerde şu yeter koşulları vermişlerdir.

Teorem 3.3.1 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p < -1$, $\tau > \sigma$ ve

$$(c_2) \quad -\frac{1}{p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

olsun. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat (3.3.2) denkleminin negatif bir çözümü, (3.3.2) denkleminin bir çözümü olduğundan teoremi, çözümün pozitif olduğu durumda ispatlamak yeterlidir. Bu yüzden, $x(t)$ 'nin (3.3.2) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu kabul edilsin.

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau) \quad (3.3.4)$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} z(t) < 0, \quad z'(t) = -Q(t)x(t-\sigma) \text{ ve } z'(t) < 0 \\ \text{ve } z(t) > px(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

sonucu çıkar. (3.3.5) eşitsizliğinden

$$-\frac{1}{p} Q(t)z(t+(\tau-\sigma)) > -Q(t)x(t-\sigma) = z'(t)$$

bulunur ve

$$z'(t) - \left(\frac{1}{-p} \right) Q(t)z(t+(\tau-\sigma)) < 0$$

olur. Ancak (c_2) ve lemma 3.3.1(ii)'ye göre, bu eşitsizliğin negatif bir çözümünün olması imkansızdır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3.2 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p < -1$, $\tau > \sigma$ ve τ periyodlu $Q(t)$ periyodik bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$(c_3) \quad -\frac{1}{1+p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

olduğu kabul edilsin. O zaman (3.3.2) denkleminin her çözümü salınır.

İspat Çelişki elde edebilmek için pozitif bir $x(t)$ çözümü olsun.

$$z(t)=x(t)+px(t-\tau) \text{ ve}$$

$$w(t)=z(t)+pz(t-\tau)$$

olduğu kabul edilsin. τ periyodlu $Q(t)$, periyodik olduğundan z ve w 'nun (3.3.2) denkleminin de çözümleri olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 3.3.1'in ispatındaki gibi sonuçta $z(t)<0$ ve $z'(t)<0$ elde edilir. $-z(t)$ çözüm kabul edilirse, $w(t)>0$ ve $w'(t)>0$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$w(t)=z(t)+pz(t-\tau)<(1+p)z(t-\tau)$$

$$\text{ve } -\frac{1}{1+p} Q(t)w(t+(\tau-\sigma))\leq-Q(t)z(t-\sigma)=w'(t) \quad (3.3.5a)$$

olur. (3.3.5a) eşitsizliğinden,

$$w'(t)-\left(-\frac{1}{1+p}\right) Q(t)w(t+(\tau-\sigma))\geq 0$$

sonucu çıkar. Ancak (c_3) ve lemma 3.3.1(i)'ye göre bu imkansızdır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3.3 (3.3.1) denklemini ele alınsın. Eğer $p<-1$ ise (3.3.1) denkleminin her salınımsız çözümü, $t\rightarrow\infty$ için $+\infty$ 'a ya da $-\infty$ 'a gider.

Lemma 3.3.2 $x(t)$, (3.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü ve $z(t)=x(t)+P(t)x(t-\tau)$ olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.

(a) Eğer H.3.3.1, H.3.3.2 koşulları sağlanırsa $z(t)$ monoton azalan bir fonksiyondur.

(b) H.3.3.1, H.3.3.2 şartları ve p_1 sabit olmak üzere

$$-1<p_1\leq P(t)$$

şartı da sağlanırsa

$$z(t) > 0$$

olur.

$$(c) \quad -1 < p_1 \leq P(t) \leq 0$$

$$\text{ve } \int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty$$

şartlarına ek olarak H.3.3.1, H.3.3.2 şartları da sağlanırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \text{ olur.}$$

$$(d) \quad P(t) \leq p_2 < -1 \text{ (} p_2 \text{ sabit)}$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.3 koşulları da sağlanırsa

$$z(t) < 0 \text{ olur.}$$

$$(e) \quad p_1 \leq P(t) \leq p_2$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.3 koşulları da sağlanırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty \text{ veya } \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \text{ olur.}$$

$$(f) \quad p_1 \leq P(t) \leq p_2 \leq -1$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.3 koşulları da sağlanırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty \text{ olur.}$$

$$(g) \quad -1 \leq P(t) \leq p_2$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.3 koşulları da sağlanırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \text{ olur.}$$

Bu lemma Bainov ve Mishev (1991) tarafından kullanılmıştır.

$p < -1$ olduğu durumda Bainov ve Mishev (1991) şu teoremi vermişlerdir.

Teorem 3.3.4 Kabul edilsin ki H.3.3.1, H.3.3.3 şartları;

$p_1 \leq P(t) \leq p_2 < -1$ ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^{t-\sigma} \left[-\frac{Q(s-\tau)}{P(s-\sigma)} \right] ds > 1/e \quad (3.3.6)$$

şartlarına ek olarak sağlansın. Bu durumda (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlı olmasın. $x(t)$, (3.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda $z(t) = x(t) + P(t)x(t-\tau)$ fonksiyonu (3.3.3) denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 3.3.2(a) ve (f)'den;

$$z'(t) < 0 \text{ ve } z(t) < 0 \quad (3.3.7)$$

sonucu çıkar. (3.3.3) denkleminde

$$\frac{P(t-\sigma)}{Q(t-\tau)} z'(t-\tau) + z(t-\sigma) > 0$$

elde edilir. Bu ise

$$z'(t) + \frac{Q(t)}{P(t+\tau-\sigma)} z(t+(t-\sigma)) < 0 \quad (3.3.8)$$

olmasını gerektirir. Lemma 3.3.1(iv) ve (3.3.6)'dan (3.3.8) eşitsizliğinin negatif çözümleri olmayacağı sonucu çıkar. Bu ise (3.3.7) ile çelişir.

B-) $p > 0$ Durumu

$p > 0$ durumunda Grammatikopoulos, Grove ve Ladas(1986) şu iki teoremi vermişlerdir:

Teorem 3.3.5 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p > 0$ olsun. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gider.

Teorem 3.3.6 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p > 0$, $\sigma > \tau$ ve τ periyodlu $Q(t)$ periyodik bir fonksiyon olsun. Bunlar dışında

$$(c_4) \quad \frac{1}{1+p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(\sigma-\tau)}^t Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her çözümü sınımlıdır.

İspat (3.3.2) denkleminin her çözümü sınımlı olmasın. $x(t)$, (3.3.2) denkleminin pozitif bir çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau)$$

$$\text{ve } w(t) = z(t) + pz(t-\tau)$$

olduğu kabul edilsin. Sonuçta,

$$z(t) > 0, z'(t) < 0, w(t) > 0 \text{ ve } w'(t) < 0$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$w(t) = z(t) + pz(t-\tau) < (1+p)z(t-\tau)$$

$$\text{ve } -\frac{1}{1+p} Q(t)w(t-(\sigma-\tau)) \geq -Q(t)z(t-\sigma)$$

olur. Ancak τ periyodlu $Q(t)$ 'nin periyodik olması, z ve w 'nin da (3.3.2) denkleminin çözümleri olmalarını gerektirir. Bu yüzden

$$-Q(t)z(t-\sigma) = w'(t)$$

sağlanır. Yani,

$$w'(t) + \frac{1}{1+p} Q(t)w(t-(\sigma-\tau)) \leq 0$$

olur. (c_4) 'e ve lemma 3.3.1(iii)'ye göre bu imkansızdır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

C-) $-1 < p \leq 0$ Durumu

$-1 < p \leq 0$ durumunda ve D-) şıkkındaki karışık durumda Bainov ve Mishev (1991) şu teoremleri vermişlerdir.

Teorem 3.3.7 $-1 < p_1 \leq P(t) \leq 0$ koşuluna ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t Q(s) ds > 1/e \quad (3.3.9)$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.2 koşulları da sağlansınlar. Bu durumda (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlı olmasın. $x(t)$, (3.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olduğunda, $z(t) = x(t) + P(t)x(t-\tau)$ fonksiyonu (3.3.3) denkleminin bir çözümüdür. Lemma 3.3.2(a) ve (b)'den dolayı

$$z'(t) < 0 \text{ ve } z(t) > 0 \quad (3.3.10)$$

olur. (3.3.3) denkleminde dolayı

$$z'(t) + Q(t)z(t-\sigma) < 0 \quad (3.3.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.3.1(iii) ve (3.3.9) eşitsizliğine göre (3.3.11) eşitsizliğinin pozitif çözümleri olmaz. Bu çözümler (3.3.10) sonucu ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

D-) Karışık Durum

Teorem 3.3.8 p_1, p_2 'ler sabit olmak üzere

$$0 \leq P(t) \leq p_2$$

veya $-1 < p_1 \leq P(t) \leq 0$

koşullarından birine ek olarak H.3.3.3 koşulu sağlandığında, (3.3.1) denkleminin her salınımsız $x(t)$ çözümü $t \rightarrow \infty$ için sifira gider.

Teorem 3.3.9 $P(t) \geq 0$

$$\text{veya } -1 < p_1 \leq P(t) \leq 0 \quad (3.3.12)$$

koşullarından birine ek olarak H.3.3.2 koşulu da sağlandığında aşağıdakiler doğrudur.

(a) (3.3.1) denkleminin her salınımsız çözümü sınırlıdır.

$$(b) \int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty \quad (3.3.13)$$

koşulu sağlanıp, $x(t)$ de (3.3.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olduğunda

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

olur.

(c) (3.3.12) ve (3.3.13) koşulları sağlandığında (3.3.1) denkleminin her salınımsız çözümü $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gider.

4. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

İlk olarak, birinci mertebeden sabit katsayılı

$$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma), t \geq t_0 \quad (3.1.1)$$

şeklindeki neutral delay diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Burada τ , q , σ 'lar pozitif sabitler ve p reel bir parametredir. (3.1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlı olmasını, gerek ve yeter koşul vererek sağlayan teorem şudur:

Teorem 3.1.6 (3.1.1) denkleminde; τ , q , σ 'lar pozitif sabitler ve p , reel bir parametre olduğunda, denklemin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0$$

karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmamasıdır.

Bu teoremden şu sonuçlar elde edilmiştir:

Sonuç 3.1.1 $-1 < p < 0$ ve $(-p)\tau q > 1$ koşulları sağlandığında (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.1.2 $p > 0$ ve $\left(\frac{q}{1+p}\right)^3 \frac{(\sigma-\tau)^3}{4} > 1$ koşulları sağlansın. O

zaman (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.1.3 $p < -1$, $\tau \geq \sigma$ ve $q\tau/p^2 > 1$ koşulları sağlanırsa (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.1.4 $p < -1$, $\sigma > \tau$ ve

$$\frac{q\tau}{p^2 + (-p)q(\sigma - \tau)} > 1$$

koşulları sağlandığında (3.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İkinci olarak birinci mertebeden değişken katsayılı

$$\frac{d}{dt} [x(t) + P(t)x(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (3.3.1)$$

neutral delay diferansiyel denklemini ele alınmış ve burada

$$H.3.3.1 \quad P(t), Q(t) \in C([t_0, \infty); \mathbb{R})$$

$$H.3.3.2 \quad t \geq t_0 \text{ için } Q(t) \geq 0$$

$$H.3.3.3 \quad q \text{ sabit iken, } t \geq t_0 \text{ için } Q(t) \geq q > 0$$

koşullarının sağlandığı varsayılmıştır.

$p = \max\{\tau, \sigma\}$ olduğunda başlangıç fonksiyonu

$$\phi(t) \in C([t_0 - p, t_0]; \mathbb{R}) \text{ olsun.}$$

Diğer verilen değişken katsayılı denklem ise

$$\frac{d}{dt} [x(t) + px(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0, t \geq t_0 \quad (3.3.2)$$

şeklinde. Burada,

τ ve σ 'lar pozitif sabitler ve $Q(t) \in C([t_0, \infty); \mathbb{R})$ olsun. Reel parametre p ise $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ arasındadır.

(3.3.1) ve (3.3.2) denklemleri için şu teoremler verilmiştir:

Teorem 3.3.1 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p < -1$, $\tau > \sigma$ ve

$$-\frac{1}{p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

olsun. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.3.2 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p < -1$, $\tau > \sigma$ ve τ periyodlu $Q(t)$ periyodik bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$-\frac{1}{1+p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.3.4 H.3.3.1, H.3.3.3 şartları;

$$p_1 \leq P(t) \leq p_2 < -1 \text{ ve}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^{t-\sigma} \left[-\frac{Q(s-\tau)}{P(s-\sigma)} \right] ds > \frac{1}{e}$$

koşullarına ek olarak sağlansınlar. Bu durumda (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.3.6 (3.3.2) denklemini ele alınsın. $p > 0$, $\sigma > \tau$ ve τ periyodlu $Q(t)$ periyodik bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\frac{1}{1+p} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(\sigma-\tau)}^t Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (3.3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.3.7 $-1 < p_1 \leq P(t) \leq 0$ koşulu ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t Q(s) ds > \frac{1}{e}$$

koşuluna ek olarak H.3.3.1, H.3.3.2 koşulları da sağlansınlar. Bu durumda (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sabit katsayılı denklemlerin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Değişken katsayılı denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için verilen teoremlerde yeter koşullara ulaşılmıştır. Burada salınımlı için gerek ve yeter koşullar bulunabilirse daha iyi olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bainov, D. D. and Mishev, D. P.**, 1991, Oscillation Theory For Neutral Differential Equations with Delay, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and Newyork, 277p.
- Bellman, R. and Cooke, K. L.**, 1963, Differential-Difference Equations, Academic Press., Newyork, 462p.
- Brayton, R. K. and Willoughby, R. A.**, 1967, On The Numerical Integration of a Symmetric System of Difference-Differential Equations of Neutral Type, J. Math. Anal. Appl., 18, 182-189.
- Driver, R. D.**, 1976, Ordinary and Delay Differential Equations, Kingston, R. I., 498p.
- Grammatikopoulos, M. K., Grove, E. A. and Ladas, G.**, 1986, Oscillations of First-Order Neutral Delay Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 120, 510-520.
- Ladas, G.**, 1979, Sharp Conditions for Oscillations Caused by Delays, Applicable Analysis., 9:93-98.
- Ladas, G. and Sficas, Y. G.**, 1986, Oscillations of Neutral Differential Equations, Math. Bull., 29(4), 438-445.
- Ladas, G. and Stavroulakis, I. P.**, 1982, Oscillations Caused by Several Retarded and Advanced Arguments, J. Differential Equations, 44, 134-152.
- Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. and Zhang, B. G.**, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker, Inc., Newyork and Basel, 305p.

KAYNAKLAR (devam)

Kuang, Y., 1993, Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Mathematics in Science and Engineering, Newyork, Academic Press., 398p.

Özer, Şebnem, 1998, Birinci Mertebeden Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Fen Fakültesi, 81s (yayımlanmamış).

Sficas, Y. G. and Stavroulakis, I. P., 1987, Necessary and Sufficient Conditions for Oscillations of Neutral Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 123, 494-507.

Waltman, Paul, 1986, A Second Course in Elementary Differential Equations, Academic Press., Inc., Emory University, Atlanta, 259p.

ÖZGEÇMİŞ

26/09/1971 Ankara doğumluyum. İlköğrenimimin ilk üç senesini Ankara Yücetepe İlkokulu'nda, son iki senesini İzmir Necatibey İlkokulu'nda okudum (1977-1982). Ortaokulu İzmir 9 Eylül Ortaokulu'nda okudum (1982-1985). Lise öğrenimimi İzmir İnönü Lisesi'nde tamamladım (1985-1988).

1989 yılında kazandığım Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1993 yılında mezun oldum. 1993 yılında yüksek lisansı kazandım. Bir sene hazırlık sınıfında okuduktan sonra kaydımı dondurup İstanbul'da Milli Eğitim'de matematik öğretmenliğine başladım. 1995 senesinden beri İzmir'de öğretmenliğe devam etmekteyim.