

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DÜZLEMDE UYUMLU TÜREVLİ EĞRİLER

Şeyda ÖZEL

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri

OCAK 2023

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

DÜZLEMDE UYUMLU TÜREVLİ EĞRİLER

Tez Yazarı
Şeyda ÖZEL

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

OCAK 2023
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı: Düzlemde Uyumlu Türevli Eğriler
Yazarı: Şeyda ÖZEL
İlk Teslim Tarihi: 23.03.2022
Savunma Tarihi: 23.01.2023

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	İmza Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mihriban ALYAMAÇ KÜLAHCI Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM Gümüşhane Üniversitesi, Kelkit Aydın Doğan MYO	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Düzlemde Uyumlu Türevli Eğriler” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

23.01.2023

Şeyda ÖZEL



ÖNSÖZ

Bu çalışmada Diferensiyel Geometri alanında mühim bir yere sahip olan eğriler teorisinde iki boyutlu düzlem eğrisinin uyumlu türev kullanılarak karakterize edilmesi amaçlanmıştır. Eğriler ailesi çeşitli bilimsel araştırmalarda integral veya diferensiyel yöntemleri baz alınarak dikkate alınmıştır. Fakat son zamanlarda bilim insanın çalışmalarına sağladığı kolaylıklardan dolayı uyumlu türev kavramı diferensiyel geometriye kayda değer bir bakış açısı sağlamıştır. Bu yüzden uyumlu türev eğrilerin geometrisini karakterize etmek için geometrideki diğer türevlere nispeten araştırmacılara kolaylık sağlamıştır. Tezimizde, güncel ve kayda değer sonuçlar elde edebileceğimiz bu alanda iki boyutlu uzayda düzlem eğrilerinin uyumlu türev kullanılarak karakterizasyonları ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Doktora eğitimim boyunca, ilk olarak bilgi ve birikiminden yararlandığım ve bu süre zarfında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen manevi olarak desteğini hep yanımda hissettiğim çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a, aynı zamanda doktora eğitim hayatım boyunca vermiş oldukları destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunmak isterim. Ayrıca, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü tüm akademik personeline teşekkürü bir borç bilirim.

Şeyda ÖZEL
ELAZIĞ, 2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2. Bir Düzlem Eğrisinin Uyumlu Yay Uzunluğu ve Frenet Çatısı	7
4. $\mathbb{R}^2$' DE UYUMLU EĞRİNİN KONUM VEKTÖRÜ.....	16
5. UYUMLU EĞRİNİN KENDİ FRENET VEKTÖRLERİNE GÖRE UYUMLU KONGRUENT EĞRİLERİ	20
5.1. Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Uyumlu Kongrüent Eğrisi.....	20
5.2. Uyumlu Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongruent Uyumlu Eğrisi.....	24
5.3. Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörünün Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongruent Uyumlu Eğrisi....	28
5.4. Uyumlu Eğrinin Normal Vektörünün Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Kongruent Eğrisi....	33
6. MATERYAL VE METOT	39
7. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	40
8. SONUÇLAR.....	41
ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Düzlemde Uyumlu Türevli Eğriler

Şeyda ÖZEL

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2023, Sayfa: viii+45

Diferensiyel geometride eğriler teorisi yaygın bir şekilde dikkat çeken bir çalışma alanı haline gelmiştir. Fakat son zamanlarda eğriler teorisinde uyumlu türevi kullanmak çok sayıda bilim insanına farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu doktora tezinin amacı ise iki boyutlu uzayda bir düzlem eğrisinin temel özelliklerini uyumlu türevi kullanarak karakterize etmektir.

Bu doktora tezi çalışmasında başlangıçta uyumlu türev ile ilgili önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Akabinde bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu, Frenet-Serret denklemleri ve kesirli eğriliği uyumlu türev kullanılarak detaylıca sunulmuştur. Daha sonra iki boyutlu uzayda iki düzlem eğrisinin açıortay eğriliklerine karşılık gelen çok değişkenli fonksiyonların bulunuş yöntemleri verilmiştir. Ayrıca α –Frenet çatılı uyumlu eğrinin konum vektörü ve eğriliği uyumlu türev kullanılarak elde edilmiştir.

Son olarak, uyumlu eğrilerin kendi Frenet vektörleri yardımıyla oluşturdukları kongrüans uyumlu eğrileri tanımlanıp, bazı özel durumlar altında özellikleri incelenmiş ve bazı teoriler ispatlanmıştır.

Tez çalışması süresince kullanılan yöntemle ilgili öneri, elde edilen neticelerin literatüre sunduğu katkı ve problemler son kısımda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Düzlem eğri, Uyumlu türev, α –Frenet-Serret formülleri.

ABSTRACT

Conformable Derivative Curves in the plane.

Şeyda ÖZEL

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2023, Pages: viii+45

The theory of curves in differential geometry has become a widely attractive field of study. But recently, using the Uyumlu derivative in the theory of curves has given a different perspective to a large number of scientists. The aim of this doctoral thesis is to obtain the characterization of the basic properties of a plane curve in two-dimensional space using the Uyumlu derivative. In this doctoral thesis study, important definitions and theorems related to conformable derivative are given at the beginning. Afterward, the arc length of a plane curve is presented in detail using the Frenet-Serret equations and the fractional curvature Uyumlu derivative. Then, methods for finding multivariate functions corresponding to the bisector curvatures of two plane curves in two-dimensional space are given. In addition, the position vector and curvature of the congruent curve with α –Frenet frame are obtained using the Uyumlu derivative. Finally, congruence-compatible curves formed by congruent curves with the help of their own Frenet vectors are defined, their properties are studied and proved under some special cases. The suggestion about the method used during the thesis study, the contribution of the obtained results to the literature and the problems are presented in the last part.

Keywords: Plane curve, Uyumlu Derivative, α –Frenet-Serret formulas.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^2$	: İki Boyutlu Uzay
s	: Yay parametresi
s^*	: Uyumlu yay parametresi
α	: Uyumlu mertebe
D	: Riemann-Liouville Kesirli Türevi
$T_\alpha f(x)$	: α –Uyumlu türevi
e_1	: İki-boyutlu Uzayda Teğet vektör
$e_1^{(\alpha)}$	: İki-boyutlu Uzayda Uyumlu Teğet Vektör
e_2	: İki-boyutlu Uzayda Normal vektör
$e_2^{(\alpha)}$	: İki-boyutlu Uzayda Uyumlu Normal vektör
$\{e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}\}$	: α –Frenet çatısı
$\ \cdot \ $	: Norm
$\times$	: $\mathbb{R}^2$ 'deki vektörel çarpım
κ	: İki-boyutlu Uzayda Eğrinin eğriliği
κ_α	: İki-boyutlu Uzayda Uyumlu eğrilik
$P(s,r)$	: İki değişkenli fonksiyon
γ	: Uyumlu eğri
$\beta(s^*)$	: Kongruent uyumlu eğri
$\{c_1(s), c_2(r)\}$	: İki-boyutlu Uzayda regüler parametrik iki düzlem eğrisi
$F(s,r)$	: Çok Değişkenli Fonksiyon
$\{E_1^{(\alpha)}(s^*), E_2^{(\alpha)}(s^*)\}$	: $\beta(s^*)$ eğrisinin α –Frenet çatısı
$k_\beta(s^*)$	: Kongruent uyumlu β eğrisinin eğriliği

1. GİRİŞ

Birçok mühendislik bilimleri, fizik, kimya gibi alanlarda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemelerinde genel olarak diferensiyel denklemlerle karşılaşılmaktadır. Ancak insanoğlunun ihtiyaçları değiştikçe insanın evrene, evrende meydana gelen ilginç olaylara ilgisinin artması, yaşanan teknolojik ve bilimsel gelişmeler klasik türev ve integralin bu olayları açıklamada yetersiz olduğunu göstermiştir. Günümüzde bilinen türev ve integral kavramının geliştirilerek evrenin doğrusal olmayan karmaşık formuna daha uyumlu hale getirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu uyum çalışmaları ‘Kesirli Hesap’ alanını ortaya çıkarmıştır. Kesirli hesap kavramı herhangi keyfi reel veya kompleks dereceden türev ve integral hesabı anlamına gelir. Kesirli hesap kavramı, güncel bir konu olmasına rağmen, kesirli hesabın temelleri bir hayli eskiye dayanır. Kesirli analiz kavramı, ilk olarak 30 Eylül 1695 yılında L’Hospital’in Leibniz’e yazmış olduğu bir mektupta geçmektedir. Bu mektupta L’Hospital Leibniz’e $f(x) = x$ lineer fonksiyonun n . dereceden türevi olan $\frac{d^n y}{dx^n}$ için çalışmalarında kullandığı özel bir yapı hakkında birkaç soru sormuştur. L’Hospital türevin derecesinin $n = \frac{1}{2}$ yani rasyonel sayı olması durumunda türevin ne olacağını sormuştur. Bu soru kesirli analizin başlangıcını oluşturmuştur [1]. Bu sorudan sonra kesirli analiz mevzusu Leibniz ve Bernoulli arasında tartışılmıştır. 1716’da Leibniz’in ölümüyle kesirli mertebeden türev ile alakalı bilimsel çalışmalar son bulmamıştır. Leonard Euler, 1783 ‘de bu alana temel olan çalışmalardan birini yapmıştır. Euler çalışmasında faktöriyel kavramını genelleştirip, kesirli analizde mühim bir kavram olan Gamma fonksiyonunu açıklamıştır [2]. Kesirli türevin ayrıntılı ilk tanımı P.S. Laplace’ in yazmış olduğu ‘Theorie analytique des probabilites’ adlı kitabında bulunmaktadır [2]. Ayrıca kesirli analizin analitik mekanik [3–5] ve dinamik sistemler [6–9] ile alakalı birçok uygulaması mevcuttur. En iyi bilinen kesirli türevlerden biri Riemann-Liouville kesirli türevidir. 1830’larda kesirli analiz ile ilgili başka bir çalışma J. Liouville tarafından yapılmıştır. Liouville iki farklı türev tanımını literatüre kazandırmıştır [2]. Başlangıçta $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ şeklinde seriye açılabilen bir fonksiyonu göz önüne almıştır. Burada $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde bilinen $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = D^n e^{ax} = a^n \cdot e^{ax}$ türevini göz önüne alarak $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeli kesirli türevi, $D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}$ şeklinde ifade etmiştir [2]. Fakat bu tanımda α ’nın seçiminde birkaç sınırlamalar olduğu ortaya çıkmıştır. Liouville’nin geliştirdiği diğer tanım ise, α keyfi bir sabit olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ fonksiyonun α –mertebeli kesirli türevidir [10]. İkinci türev ise Caputo kesirli türevidir. Bu türev fiziksel alanın görüntülenmesiyle ilgili olup bu amaçla yoğun olarak kullanılmaktadır. Günümüzde kullanılan diğer bir tanımda, Grünwald’ın 1867 ve Letnikov’un 1868 yılında farklı iki yayında değindikleri $D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h)^\alpha f(x)}{h^\alpha}$ şeklinde tanımladıkları kesirli türev tanımıdır. Bu tanıma Grünwald-Letnikov kesirli türevi adı verilir [2,10].

Sonrasında bu tanımın bazı şartlar altında Riemann-Liouville tanımına denk olduğu ispatlanmıştır [11]. Son zamanlarda, klasik geometrinin alt sınıfları olan diferansiyel geometri, fraktal geometri ve vektör analizine odaklanan kesirli türevlere geometrik bir yaklaşım getirmeye yönelik artan bir ilgi olmuştur [12–20]. Ayrıca kesirli türevler arasında bir sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevi yoktur [12,13]. Bu nedenle diferansiyel geometri bağlamında en çok tercih edilendir [12,13,19,20]. Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları, literatürdeki tüm kesirli türev tanımlarının klasik türev tanımından aldıkları tek ortak özellik lineer olma özelliğidir [21]. Bunun haricindeki özelliklerle alakalı bir uyumdan bahsedilemez.

Son zamanlarda Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları bilimsel çalışmalarda çok sık kullanılsa da, bunlardan Riemann-Liouville kesirli türev tanımında türevin mertebesi doğal sayı olmadığı takdirde sabit bir fonksiyonun türevi “0” değildir. Yine bir çok kesirli türev tanımı iki fonksiyonun çarpımının, bölümünün türevi formülünü sağlamaz. Ayrıca, birçok kesirli türev tanımı klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz. Üstelik Caputo kesirli türev tanımında verilen fonksiyonun türevlenebilir olması şartı vardır. Bu gibi problemlerin üstesinden gelmek için son günlerde Khalil ve diğ. kesirli mertebeden türev ve integral teorisi üzerine klasik türevin genişletilmesi olarak görülen uyumlu (comformable) kesirli türev tanımını ortaya çıkarmıştır [21]. Verilen bu yeni tanım klasik türeve benzerliğiyle ilgi çekmektedir. Yukarıda bahsettiğimiz diğer kesirli türevler için sağlanmayan, çarpım ve bölüm kuralı bu yeni kesirli türev tanımı için sağlanmaktadır. Zincir kuralıysa bildiğimiz klasik türevdeki kurala çok yakın yazılabilmektedir. Uyumlu (comformable) kesirli türev diye adlandırdığımız bu yeni kesirli türev tanımı sağladığı bu özelliklerden dolayı bir çok bilim insanının dikkatini çekmiştir. Kısa sürede uyumlu kesirli türev ile alakalı bir çok çalışma yapılmıştır. T. Abdeljavad, J. Alzabut, F. Jarad, R. P. Agarval, A. Zbekler, uyumlu türev çatısında Lyapunov-tipi eşitsizlikleri inceledi [22,23]. E. Uğurlu, D. Baleanu, M. Al. Horani ve R. Khalil uyumlu kesirli operatörleri semi-grup operatörleri çalıştı [24,25]. Ayrıca uyumlu türev ile ilgili daha ileri çalışmalar yapılmıştır [26–28]. Üstelik uyumlu türev aynı zamanda mühendislik ve fiziğe uygulandığında fiziksel yorumlamaya katkıda bulunmaktadır [29].

Bu tezde, başlangıçta kesirli türev ile uyumlu kesirli türevin tarihsel gelişiminden ve literatürde bu iki türevle alakalı bilimsel çalışmalardan bahsedilmiştir. 2. bölümde uyumlu (comformable) türev ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Akabinde bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu, Frenet-Serret denklemleri ve kesirli eğriliği uyumlu türev kullanılarak yeniden formüle edilmiştir. 3. bölümde ise $\mathbb{R}^2$ ’de iki düzlem eğrisinin açığortay eğriliklerine karşılık gelen çok değişkenli fonksiyonu uyumlu türev kullanılarak bu fonksiyonların bulunuş yöntemleri verilmiştir. 4. bölümde α –Frenet çatılı uyumlu eğrinin konum vektörü ve eğriliği uyumlu türev kullanılarak elde edilmiştir. Son bölüm yani 5. Bölümde ise uyumlu eğrilerin kendi Frenet

vektörleri yardımıyla oluşturdukları kongrüans uyumlu eğrileri tanımlanarak bazı özel durumlar altında özellikleri incelenmiş ve ispatlanmıştır.



2. BİR DÜZLEM EĞRİSİNİN UYUMLU YAY UZUNLUĞU VE FRENET ÇATISI

Bu bölümde ilk olarak uyumlu türev ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler baz alınmıştır. Akabinde ilk kez uyumlu türev kullanılarak α –Frenet denklemleri elde edilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun α –mertebeden uyumlu türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} f(x+hx^{1-\alpha}) - f(x)}{h},$$

burada $\forall x > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ dir [21].

Teorem 2.1.2. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in (0,1]$ için $t_0 > 0$ için α –mertebeden türevlenebilir ise, o halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir [21].

Teorem 2.1.3. Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α –türevlenebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

- 1) $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ $a, b \in \mathbb{R}$.
- 2) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ $p \in \mathbb{R}$.
- 3) $T_\alpha(\lambda) = 0$ bütün sabit fonksiyonlar için $f(t) = \lambda$ olur.
- 4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ sağlanır.
- 5) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.
- 6) f türevlenebilir ise o halde $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt}f(t)$ [21].

Tanım 2.1.4. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. O zaman f fonksiyonun bütün $t > \alpha$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α –mertebeden sol uyumlu türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(t + \varepsilon(t - \alpha)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_α olarak yazılır. Eğer $(T_\alpha^a f)(t), (a, b)$ aralığında oluşursa o zaman

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} (T_\alpha^a f)(t)$$

şeklinde yazılır [30].

Tanım 2.1.5. $f: [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun bütün $t < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α –mertebeden (sağ) uyumlu türevi,

$$({}^b_\alpha T f) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $({}^b_\alpha f)(b)$, (a, b) aralığında oluşursa o zaman,

$$({}^b_\alpha T f) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^b_\alpha T f)(t)$$

şeklinde elde edilir[30].

Tanım 2.1.6. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = a - n$ olsun. Bir $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun α' dan başlayarak α –mertebeden (sol) türevi, $f^n(t)$ vardır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_\alpha^a(f)(t) = T_\beta^a(f)^n(t),$$

burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_α şeklinde yazılır. f' nin b' de sona eren sıralı α –mertebeden (sağ) türevi

$$({}^b_\alpha T f)(b) = (-1)^{n+1} ({}^b_\alpha T f)(t)$$

şeklinde yazılır.

$\alpha = n+1$ ise $\beta = 1$ ve f' nin uyumlu türevi $f^{(n+1)}$ olur. Ayrıca $n = 0$ olduğunda (ya da $\alpha \in (0,1)$) $\beta = \alpha$ olur [30].

Teorem 2.1.7. Bazı fonksiyonların uyumlu türevleri aşağıdaki gibidir:

- a) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, $\forall p \in \mathbb{R}$ için.
- b) $T_\alpha(1) = 0$
- c) $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$
- d) $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha}\cos bx$, $b \in \mathbb{R}$
- e) $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha}\sin bx$, $b \in \mathbb{R}$
- f) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$
- g) $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- h) $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- i) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ [21].

Teorem 2.1.8. Kabul edelim ki, $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ iki α –diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde $g \circ f$ α –diferensiyellenebilirdir ve $\forall t \neq 0$, $f(t) \neq 0$ için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$T_\alpha(g \circ f)(t) = T_\alpha(g)(f(t))T_\alpha(f)(t)f(t)^{\alpha-1} [1].$$

Tanım 2.1.9. Kabul edelim ki f bir n reel değişkenli vektör değerli fonksiyon ve

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ olsun. Öyleyse f ' nin $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ noktasında α –diferensiyellenebilir olduğunu söyleyebiliriz, ki burada her $\forall a_i > 0$. Eğer

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm vardır, öyle ki

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a_1 + h_1 a_1^{1-\alpha}, \dots, a_n + h_n a_n^{1-\alpha}) - f(a_1, \dots, a_n) - L(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

burada $h = (h_1, \dots, h_n)$ ve $\alpha \in (0, 1]$. Ayrıca lineer dönüşüm $D^\alpha f(a)$ ile tanımlanır ve a noktasında f ' nin α –mertebeden uyumlu türevidir [1].

Teorem 2.1.10. Kabul edelim ki f fonksiyonu n değişkenine sahip bir vektör değerli fonksiyon olsun. Eğer f , $\forall a_i > 0$ için $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ noktasında α –diferensiyellenebilirse, o zaman $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir tek lineer dönüşüm vardır, öyle ki

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a_1 + h_1 a_1^{1-\alpha}, \dots, a_n + h_n a_n^{1-\alpha}) - f(a_1, \dots, a_n) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.1.1)$$

Teorem 2.1.11. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $\forall a_i > 0$ için $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ de α –diferensiyellenebilirse öyle ki $\alpha \in (0, 1]$ ve $g(y) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$, tüm $f_i(a) > 0$, $f(a) \in \mathbb{R}^m$ ve $\alpha \in (0, 1]$. O halde $g \circ f$ bileşkesi a noktasında α –diferensiyellenebilirdir ve

$$D^\alpha(g \circ f)(a) = D^\alpha g(f(a)) \circ f(a)^{\alpha-1} \circ D^\alpha f(a).$$

Burada $f(a)^{\alpha-1}$, $f(a)^{\alpha-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1 f_1(a)^{\alpha-1}, \dots, x_m f_m(a)^{\alpha-1})$ ile tanımlanan $\mathbb{R}^m$ den $\mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşümdür [1].

Teorem 2.1.12. Kabul edelim ki f , n değişkene sahip bir vektör değerli fonksiyon ve $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ olsun. O halde f , $\forall a_i > 0$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ de α –diferensiyellenebilirdir $\Leftrightarrow \forall f_i$ için $D^\alpha f(a) = (D^\alpha f_1(a), \dots, D^\alpha f_m(a))$ [1].

Tanım 2.1.13 γ fonksiyonu α –diferensiyellenebilir ise $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ ' de bir uyumlu eğri olarak adlandırılır [1].

Tanım 2.1.14. Kabul edelim ki $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. γ eğrisinin hız vektörü $\forall t \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\frac{T_\alpha \gamma(t)}{t^{1-\alpha}}$$

ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.15. Kabul edelim ki $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. Eğer $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ α –diferensiyellebilir ise, $\beta = \gamma(h): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uyumlu eğrisi h ile γ 'nın yeniden parametrizasyonu adı verilir [1].

Tanım 2.1.16. Kabul edelim ki $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. O halde γ 'nın hız fonksiyonu $\forall t \in (0, \infty)$ için

$$v(t) = \frac{\|T_\alpha \gamma(t)\|}{t^{1-\alpha}}$$

ile tanımlanır [1].

Tanım 2.1.17. Kabul edelim ki $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. γ 'nın s yay uzunluğu $\forall t \in (0, \infty)$ için

$$s(t) = \int_\alpha^0 \|T_\alpha \gamma(t)\|$$

ile tanımlanır. Eğer $\forall t \in (0, \infty)$ için $v(t) = 1$ ise, γ birim hızlı bir eğri adını alır [1].

Tanım 2.1.18. Kabul edelim ki $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uyumlu eğri olsun. Eğer $\forall t \in (0, \infty)$ için $T_\alpha \gamma(t) \neq 0$ ise, γ bir uyumlu regüler eğri olarak adlandırılır [1].

Teorem 2.1.19. Eğer γ bir uyumlu regüler eğriyse, o zaman γ 'nın öyle bir β yeniden parametrizasyonu vardır ki β birim hızlıdır [1].

2.2. Bir Düzlem Eğrisinin Uyumlu Yay Uzunluğu ve Frenet Çatısı

$I \subset \mathbb{R}$ den iki boyutlu $\mathbb{R}^2$ uzayına C^∞ sınıfından keyfi bir t parametresiyle parametrelendirilmiş

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eğrisini göz önüne alalım.

Bu eğrinin $t = 0$ dan t ye uzunluğu

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \int_0^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

formunda yazılır. O zaman (2.2.1) ifadesi $E_1(\tilde{s}) = \left(\frac{dx}{d\tilde{s}}, \frac{dy}{d\tilde{s}} \right)$ teğet vektörü için eğrinin yay uzunluğu olarak bilinir. Eğrinin eğriliği üzerinde uyumlu türevin etkisini göz önüne alalım. Eğrinin teğet vektörünün değişmesiyle eğrilik de değişeceği için uyumlu teğet vektörünü $\|E_1^\alpha(\tilde{s})\| \neq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
E_1^{(\alpha)}(\tilde{s}) &= (T_\alpha(x(\tilde{s}), T_\alpha(y(\tilde{s}))) \\
&= \left(\frac{d^\alpha x(\tilde{s})}{d\tilde{s}^\alpha}, \frac{d^\alpha y(\tilde{s})}{d\tilde{s}^\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlayalım. $\|E_1^{(\alpha)}(\tilde{s})\| \neq 1$ olduğundan (2.2.1) ifadesiyle verilen yay uzunluğu formülü eğrinin uyumlu türeve uygulanamaz. Şimdi uyumlu birim teğet vektörü tanımlayalım.

$$\frac{d^\alpha \gamma(s)}{ds^\alpha} = T_\alpha(\gamma(s)) = s^{1-\alpha} \cdot \frac{d\gamma(s)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \tag{2.2.3}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $\tilde{s}$ yi s ye dönüştürecek

$$s = (\alpha \tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.2.4}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada α , uyumlu türevin mertebesidir. Bu s parametresi için

$0 < \alpha \leq 1$ ve $s > 0$ için

$$\frac{ds}{dt} = s^{1-\alpha} \cdot \frac{d\tilde{s}}{dt} \tag{2.2.5}$$

dır. Bu durumda s parametresi cinsinden γ eğrisi $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ şeklinde tanımlanır. Şimdi eğrinin teğet vektörünü uyumlu türevi ve s yay parametresini kullanılarak

$$e_1^{(\alpha)}(s) = T_\alpha \gamma(s) = (T_\alpha(x(s)), T_\alpha(y(s))) \tag{2.2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (2.2.3) ve (2.2.4) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|e_1^{(\alpha)}(s)\| &= \|T_\alpha \gamma(s)\| \\
&= \left\| s^{1-\alpha} \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| \\
&= s^{1-\alpha} \cdot \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds} \\
&= s^{1-\alpha} \cdot \frac{d\tilde{s}}{dt} \cdot s^{\alpha-1} \cdot \frac{dt}{d\tilde{s}} = 1
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

yazılır. Böylece (2.2.3) kullanılarak eğrinin ortonormal birim vektörü

$$e_2^{(\alpha)}(s) = (-T_\alpha(y(s)), T_\alpha(x(s))) \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1. γ eğrisinin $s = (\alpha \tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay parametresi ile verilen $e_1^{(\alpha)}(s)$ birim teğet vektör ve $e_2^{(\alpha)}(s)$ birim normal vektörü vardır. Şimdi $\gamma(s)$ eğrisinin uyumlu frenet çatısını inşaa edelim.

2.3. Bir Düzlem Eğrisinin Uyumlu Frenet-Serret Formülleri

$s = (\alpha\tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay uzunluğu ile tanımlanan $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ C^∞ eğrisini göz önüne alalım. Uyumlu Frenet çatısını baz alarak eğrinin eğriliğini ve Frenet -Serret formüllerini bulalım. $\gamma(s)$ eğrisinin $e_1^{(\alpha)}(s)$ teğet vektörünün $\langle e_1^{(\alpha)}(s), e_1^{(\alpha)}(s) \rangle = 1$ şartını sağladığını biliyoruz. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle e_1^{(\alpha)}(s), \frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds} \rangle = 0 \quad (2.3.1)$$

bulunur. Böylece $\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds}$, $e_2^{(\alpha)}(s)$ normal vektörüyle açıklanır. Yani

$$\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = K^{(\alpha)}(s).e_2^{(\alpha)}(s) \quad (2.3.2)$$

olup $K^{(\alpha)}(s)$, γ nın uyumlu mertebeli eğriliğidir. O zaman $e_1^{(\alpha)}(s)$ nin normu gibi $e_2^{(\alpha)}(s)$ in normu da birdir. Yani $\|e_2^{(\alpha)}(s)\| = 1$ dir. Böylece $\langle e_2^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s) \rangle = 1$ olup bu ifadenin her iki tarafının s ye göre türevi alınır

$$\langle e_2^{(\alpha)}(s), \frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds} \rangle = 0 \quad (2.3.3)$$

yazılabilir. $\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds}$ e benzer şekilde bir $\lambda^{(\alpha)}(s)$ fonksiyonu için

$$\frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = \lambda^{(\alpha)}(s).e_1^{(\alpha)}(s) \quad (2.3.4)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $e_1^{(\alpha)}(s)$ ve $e_2^{(\alpha)}(s)$ ortogonal olduğundan $\langle e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s) \rangle = 0$

ve bu ifadenin s ye göre türevi alınır

$$\langle \frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds}, e_2^{(\alpha)}(s) \rangle + \langle e_1^{(\alpha)}(s), \frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds} \rangle = 0 \quad (2.3.5)$$

bulunur. Bu ifadede (2.3.2) ve (2.3.4) yerine yazılırsa $\lambda^{(\alpha)}(s) = -K^{(\alpha)}(s)$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.3.1. Uyumlu $\{e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}\}$ ile verilen Frenet-Serret formülleri

$$\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = K^{(\alpha)}(s).e_2^{(\alpha)}(s) \quad (2.3.6)$$

ve

$$\frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = -K^{(\alpha)}(s).e_1^{(\alpha)}(s)$$

şeklinde verilir.

2.4. Eğrinin Kesirli Eğriliği $K^{(\alpha)}(s)$

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin $K(s)$ eğriliğini hesaplamaya çalışalım. $J(\gamma(s)) = (-y(s), x(s))$ olmak üzere

$$K(s) = \frac{\langle \gamma''(s), J(\gamma'(s)) \rangle}{\|\gamma'(s)\|^3} \quad (2.4.1)$$

formülüyle hesaplanır. $T_\alpha \gamma(s) = s^{1-\alpha} \cdot \gamma'(s)$ den

$$\gamma'(s) = s^{\alpha-1} \cdot T_\alpha \gamma(s) \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\alpha - 1) \cdot s^{\alpha-2} \cdot T_\alpha \gamma(s) + s^{\alpha-1} \cdot (T_\alpha \gamma(s))' \\ &= (\alpha - 1) \cdot s^{\alpha-2} \cdot T_\alpha \gamma(s) + s^{\alpha-1} K^{(\alpha)}(s) e_2^{(\alpha)}(s) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

ve

$$\begin{aligned} J(\gamma'(s)) &= J(s^{\alpha-1} T_\alpha \gamma(s)) \\ &= s^{\alpha-1} J(T_\alpha \gamma(s)) = s^{\alpha-1} \cdot J(T_\alpha(x(s), T_\alpha(y)(s))) \\ &= s^{\alpha-1} (-T_\alpha y(s), T_\alpha x(s)) \\ &= s^{\alpha-1} e_2^{(\alpha)}(s) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\| &= \|s^{\alpha-1} T_\alpha \gamma(s)\| \\ &= s^{\alpha-1} \|e_1^{(\alpha)}(s)\| \\ &= s^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olup

$$\|\gamma'(s)\|^3 = s^{3\alpha-3} \quad (2.4.5)$$

bulunur. (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5) ifadeleri (2.4.1)'de yerine yazılırsa

$$K(s) = s^{1-\alpha} \cdot K^{(\alpha)}(s)$$

veya

$$K^{(\alpha)}(s) = s^{\alpha-1} \cdot K(s) \quad (2.4.6)$$

bulunur.

Sonuç 2.1. (2.4.6)'da (2.2.1) ve (2.2.4) de göz önüne alınırsa

$$K^{(\alpha)}(t) = \left(\alpha \int_0^t \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} K(t)$$

bağıntısı bulunur.

Örnek. $\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right), \sin\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right)$ çemberini göz önüne alalım. Bu çemberin $K(s) = 1$ dir.

Şimdi uyumlu eğriliğini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
T_\alpha \gamma &= s^{1-\alpha} \left[-s^{\alpha-1} \sin\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right), s^{\alpha-1} \cos\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right] \\
&= \left(-\sin\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right), \cos\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right) \\
&= e_1^{(\alpha)}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e_2^{(\alpha)}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right), -\sin\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right)$$

olur.

$$K^{(\alpha)}(s) = \left\langle \frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds}, e_2^{(\alpha)}(s) \right\rangle$$

den hesaplanırsa

$$\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = \left(-s^{\alpha-1} \cos\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right), -s^{\alpha-1} \sin\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right)$$

olacağından

$$\begin{aligned}
K^{(\alpha)}(s) &= \left\langle \frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds}, e_2^{(\alpha)}(s) \right\rangle \\
&= s^{\alpha-1} \left(\cos^2\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) + \sin^2\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right) \right) \text{ bulunur. } K(s) = 1 \text{ olduğundan } K^{(\alpha)}(s) = s^{\alpha-1} \cdot K(s) \text{ ifadesi} \\
&\text{sağlanır.}
\end{aligned}$$

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$\mathbb{R}^2$ de $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ regüler parametrik C^1 -sınıfından sürekli düzlem eğrileri olsun. Ayrıca bu eğriler

$$c_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$$

ve

$$c_2(r) = (x_2(r), y_2(r)) \quad (3.1)$$

şeklinde parametriselendirilsin. Bu durumda $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ açıortay eğrilerine karşılık gelen $F(s, r) = 0$ çok değişkenli fonksiyonu hesaplanır. Bu bölümde $i = 1, 2$ için $F_i(s, r)$ çok değişkenli fonksiyonları hesaplanacaktır.

3.1. $F_1(s, r)$ Fonksiyonu

$c_1(s)$ ve $c_2(r)$ eğrilerinin teğet vektörleri, sırasıyla

$$t_1(s) = (T_\alpha x_1(s), T_\alpha y_1(s))$$

ve

(3.1.1)

$$t_2(r) = (T_\alpha x_2(r), T_\alpha y_2(r))$$

şeklinde ve normalleştirilmemiş normal vektörleri, sırasıyla

$$n_1(s) = (-T_\alpha y_1(s), T_\alpha x_1(s))$$

ve

(3.1.2)

$$n_2(r) = (-T_\alpha y_2(r), T_\alpha x_2(r))$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ eğrilerinin normalleri doğrultusundaki kesişme noktaları

$\lambda = \lambda(s, r)$ ve $\beta = \beta(s, r)$ çok değişkenli fonksiyonları için

$$c_1(s) + n_1(s)\lambda = c_2(r) + n_2(r)\beta \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılır. (3.1) ve (3.1.2) denklemleri (3.1.3) de yerine yazılırsa

$$(x_1(s), y_1(s)) + (-T_\alpha y_1(s), T_\alpha x_1(s))\lambda = (x_2(r), y_2(r)) + (-T_\alpha y_2(r), T_\alpha x_2(r))\beta$$

veya

$$[x_1(s) - (T_\alpha y_1(s))\lambda, y_1(s) + (T_\alpha x_1(s))\lambda] = [x_2(r) - (T_\alpha y_2(r))\beta, y_2(r) + (T_\alpha x_2(r))\beta]$$

veya

$$x_1(s) - (T_\alpha y_1(s))\lambda = x_2(r) - (T_\alpha y_2(r))\beta$$

$$y_1(s) + (T_\alpha x_1(s))\lambda = y_2(r) + (T_\alpha x_2(r))\beta$$

veya

$$-(T_\alpha y_1(s))\lambda + (T_\alpha y_2(r))\beta = x_2(r) - x_1(s)$$

$$T_\alpha x_1(s)\lambda - (T_\alpha x_2(r))\beta = y_2(r) - y_1(s) \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (3.1.4) sisteminin Cramer sistemine göre çözümü olması için

$$\Delta = \begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ T_\alpha x_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix} \neq 0$$

kabul edilirse ve

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_2(r) & -x_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ y_2(r) - y_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix} \text{ ve } \Delta_2 = \begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & x_2(r) - x_1(s) \\ T_\alpha x_1(s) & y_2(r) - y_1(s) \end{vmatrix} \text{ denirse}$$

$$\lambda = \lambda(s, r) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ ifadesinden}$$

$$\lambda = \lambda(s, r) = \frac{\begin{vmatrix} x_2(r) & -x_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ y_2(r) - y_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ T_\alpha x_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}}, \quad (3.1.5)$$

benzer şekilde $\beta = \beta(s, r) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ifadesinden

$$\beta = \beta(s, r) = \frac{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & x_2(r) - x_1(s) \\ T_\alpha x_1(s) & y_2(r) - y_1(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ T_\alpha x_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}} \quad (3.1.6)$$

elde edilir.

$\lambda(s, r)$ ve $\beta(s, r)$ iki değişkenli fonksiyonları kesim noktasında iki değişkenli bir fonksiyonla yani:

$$P(s, r) = c_1(s) + n_1(s)\lambda(s, r) = c_2(r) + n_2(r)\beta(s, r) \quad (3.1.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $P(s, r)$ iki değişkenli fonksiyonu $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ den eşit uzaklıkta olmak zorunda olduğundan

$$\|P(s, r) - c_1(s)\| = \|P(s, r) - c_2(r)\|$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (3.1.7) kullanılırsa

$$n_1^2(s)(\lambda(s, r))^2 = n_2^2(r)(\beta(s, r))^2 \quad (3.1.8)$$

elde edilir. (3.1.8)'de (3.1.5) ve (3.1.6) kullanılırsa

$$n_1^2(s) \left(\frac{\begin{vmatrix} x_2(r) & -x_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ y_2(r) - y_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ T_\alpha x_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}} \right)^2 - n_2^2(r) \left(\frac{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & x_2(r) - x_1(s) \\ T_\alpha x_1(s) & y_2(r) - y_1(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_2(r) \\ T_\alpha x_1(s) & -T_\alpha x_2(r) \end{vmatrix}} \right)^2 = 0 \quad (3.1.9)$$

veya

$$n_1^2(s) [-(x_2(r) - x_1(s))T_\alpha x_2(r) - (y_2(r) - y_1(s))T_\alpha y_2(r)]^2 - n_2^2(r) [(-(y_2(r) - y_1(s))T_\alpha y_1(s) - (x_2(r) - x_1(s))T_\alpha x_1(s))]^2 = 0 \quad (3.1.10)$$

bulunur. Burada (3.1.2) denklemini kullanılırsa

$$P(s, r) = (T_\alpha^2 y_1(s) + T_\alpha^2 x_1(s)) [(x_2(r) - x_1(s))T_\alpha x_2(r) + (y_2(r) - y_1(s))T_\alpha y_2(r)]^2 - (T_\alpha^2 y_2(r) + T_\alpha^2 x_2(r)) [(y_2(r) - y_1(s))T_\alpha y_1(s) + (x_2(r) - x_1(s))T_\alpha x_1(s)]^2 = 0 \quad (3.1.11)$$

bulunur. Bu denklem $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ eğrilerinin açığortay eğrisidir.

3.2. $F_2(s, r)$ Fonksiyonu

Bu yöntemde $P(s, r)$ açkırtay noktalarını elde edeceğiz. $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ eğrilerinin açkırtayları $P(s, r)$ nin bir noktasında olduğu zaman $c_1(s)$ ve $c_2(r)$ eğrilerinin P yi içeren $L_1(s)$ ve $L_2(r)$ gibi iki noktası vardır. Bunun sonucu olarak P noktası aşığıdaki lineer iki denklemini sağlar öyle ki;

$$L_1(s): \langle P - c_1(s), T_1(s) \rangle = 0 \quad (3.2.1)$$

$$L_2(r): \langle P - c_2(r), T_2(r) \rangle = 0$$

Buradan direk hesaplamayla

$$\langle P, t_1(s) \rangle = \langle c_1(s), t_1(s) \rangle \quad (3.2.2)$$

ve

$$\langle P, t_2(r) \rangle = \langle c_2(r), t_2(r) \rangle \quad (3.2.3)$$

elde edilir.

$P(s, r) = (x(s, r), y(s, r))$ kabul edilip (3.1) ve (3.1.1) ifadeleri (3.2.2)'de kullanılırsa, yani

$$\langle (x(s, r), y(s, r)), (T_\alpha x_1(s), T_\alpha y_1(s)) \rangle = \langle (x_1(s), y_1(s)), (T_\alpha x_1(s), T_\alpha y_1(s)) \rangle$$

$$x(s, r)T_\alpha x_1(s) + y(s, r)T_\alpha y_1(s) = x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) \quad (3.2.4)$$

ve benzer şekilde (3.1) ve (3.1.1) ifadeleri (3.2.3)'de kullanılırsa

$$\langle (x(s, r), y(s, r)), (T_\alpha x_2(r), T_\alpha y_2(r)) \rangle = \langle (x_2(r), y_2(r)), (T_\alpha x_2(r), T_\alpha y_2(r)) \rangle$$

$$x(s, r)T_\alpha x_2(r) + y(s, r)T_\alpha y_2(r) = x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r) \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Böylece (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerinden

$$x(s, r)T_\alpha x_1(s) + y(s, r)T_\alpha y_1(s) = x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) \quad (3.2.6)$$

ve

$$x(s, r)T_\alpha x_2(r) + y(s, r)T_\alpha y_2(r) = x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r)$$

denklem sistemi bulunur. Bu sistemin $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} T_\alpha x_1(s) & T_\alpha y_1(s) \\ T_\alpha x_2(r) & T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix} \neq 0$ kabulü altında cramer

yöntemine göre çözümü aranır

$$\tilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_1(s) \\ x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r) & T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}$$

ve

$$\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} T_\alpha x_1(s) & x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) \\ T_\alpha x_2(r) & x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}$$

olmak üzere $x(s, r) = \frac{\tilde{\Delta}_1}{\tilde{\Delta}}$ ifadesinden

$$x(s, r) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) & T_\alpha y_1(s) \\ x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r) & T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T_\alpha x_1(s) & T_\alpha y_1(s) \\ T_\alpha x_2(r) & T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}}$$

elde edilir. Benzer şekilde $y(s, r) = \frac{\tilde{\Delta}_2}{\tilde{\Delta}}$ ifadesinden

$$y(s, r) = \frac{\begin{vmatrix} T_\alpha x_1(s) & x_1(s)T_\alpha x_1(s) + y_1(s)T_\alpha y_1(s) \\ T_\alpha x_2(r) & x_2(r)T_\alpha x_2(r) + y_2(r)T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T_\alpha x_1(s) & T_\alpha y_1(s) \\ T_\alpha x_2(r) & T_\alpha y_2(r) \end{vmatrix}}$$

bulunur. Yani $P(s, r) = ((x(s, r), y(s, r)))$ ifadesinden

$P(s, r) = c_1(s) + n_1(s)\lambda(s, r) = c_2(r) + n_2(r)\beta(s, r)$ bulunur. Ayrıca $P(s, r)$ aşağıdaki

$\|P(s, r) - c_1(s)\| = \|P(s, r) - c_2(r)\|$ denklemini sağlar. Böylece

$$\langle P(s, r) - c_1(s), P(s, r) - c_1(s) \rangle = \langle P(s, r) - c_2(r), P(s, r) - c_2(r) \rangle$$

veya

$$\langle P(s, r), P(s, r) \rangle - 2\langle P(s, r), c_1(s) \rangle + \langle c_1(s), c_1(s) \rangle = \langle P(s, r), P(s, r) \rangle - 2\langle P(s, r), c_2(r) \rangle + \langle c_2(r), c_2(r) \rangle$$

veya

$$2(\langle P(s, r), c_1(s) \rangle - \langle P(s, r), c_2(r) \rangle) = \langle c_2(r), c_2(r) \rangle - \langle c_1(s), c_1(s) \rangle$$

ya da açılırtay $P(s, r)$

$$\langle P(s, r), c_1(s) - c_2(r) \rangle = \frac{\langle c_2(r), c_2(r) \rangle - \langle c_1(s), c_1(s) \rangle}{2}$$

denklemini sağlar.

4. $\mathbb{R}^2$ DE UYUMLU EĞRİNİN KONUM VEKTÖRÜ

$\gamma = \gamma(s)$, $\mathbb{R}^2$ de birim hızlı uyumlu eğri olsun. Bu eğrinin α –Frenet çatısı $\{e_1^\alpha, e_2^\alpha\}$ şeklinde olmak üzere $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin bu çatıya göre konum vektörü

$$x = x(s) = \mu_1 e_1^\alpha(s) + \mu_2 e_2^\alpha(s) \quad (4.1.1)$$

şeklinde s parametresine bağlı μ_1, μ_2 fonksiyonları cinsinden yazılabilir. (4.1.1) ifadesinin türevi alınır

$$\frac{dx(s)}{ds} = \frac{d\mu_1}{ds} e_1^\alpha(s) + \mu_1 \frac{de_1^\alpha(s)}{ds} + \frac{d\mu_2}{ds} e_2^\alpha(s) + \mu_2 \frac{de_2^\alpha(s)}{ds}$$

ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$s^{\alpha-1} e_1^\alpha(s) = \frac{d\mu_1}{ds} e_1^\alpha(s) + \mu_1 K^\alpha e_2^\alpha(s) + \frac{d\mu_2}{ds} e_2^\alpha(s) - \mu_2 K^\alpha e_1^\alpha(s)$$

veya

$$\frac{d\mu_1}{ds} - \mu_2 K^\alpha - s^{\alpha-1} = 0$$

ve

$$\frac{d\mu_2}{ds} + \mu_1 K^\alpha = 0$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.2)' nin ikinci denklemini (4.1.2)' nin birinci denkleminde yazarsak (4.1.2)'nin ilk denkleminde

$$\mu_2 = \frac{1}{K^\alpha} \left(\frac{d\mu_1}{ds} - s^{\alpha-1} \right)$$

olacağından bu ifade (4.1.2)' nin ikinci denkleminde yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{K^\alpha} \left(\frac{d\mu_1}{ds} - s^{\alpha-1} \right) \right] + \mu_1 K^\alpha = 0 \quad (4.1.3)$$

elde edilir. μ_1 e göre ikinci mertebeden bu diferensiyel denklem $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinden elde edilen bir karakterizasyondur. (4.1.3) ifadesinde

$$\varrho = \frac{1}{K^\alpha} \text{ ve } \theta = \int_0^s K^\alpha ds \quad (4.1.4)$$

Değişken değişirmesi yapılırsa yani $\frac{d}{ds} \left(\varrho \left(\frac{d\mu_1}{ds} - s^{\alpha-1} \right) \right) + \mu_1 \frac{1}{\varrho} = 0$ dan

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{ds} \left(\frac{d\mu_1}{ds} - s^{\alpha-1} \right) + \varrho \left(\frac{d\mu_1}{ds} - \frac{ds^{\alpha-1}}{ds} \right) + \frac{\mu_1}{\varrho} \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

bulunur. Bu denklemi çözmeye çalışalım .

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{d\sigma} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varrho}{d\theta} \frac{1}{\varrho} \quad (4.1.6)$$

ve

$$\frac{d\mu_1}{ds} = \frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\mu_1}{ds} \frac{1}{\varrho} \quad (4.1.7)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu_1}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mu_1}{ds} \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{1}{\varrho} \right) \frac{1}{\varrho} \\ &= \frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^3} \frac{d\varrho}{d\theta} \frac{d\mu_1}{d\theta} \\ &= \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{d\varrho}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.8) ifadeleri (4.1.5)'de yerine yazılırsa

$$\frac{d\varrho}{d\theta} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{d\mu_1}{d\theta} \cdot \frac{1}{\varrho} - s^{\alpha-1} \right) + \varrho \left(\frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{d\varrho}{d\theta} \right) \right) - \varrho \frac{ds^{\alpha-1}}{ds} + \frac{\mu_1}{\varrho} = 0$$

veya

$$\frac{d\varrho}{d\theta} \frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{1}{\varrho^2} - \frac{s^{\alpha-1}}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d\mu_1}{d\theta} \frac{d\varrho}{d\theta} - \varrho \frac{ds^{\alpha-1}}{ds} + \frac{\mu_1}{\varrho} = 0$$

veya

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} + \frac{\mu_1}{\varrho} = \varrho \frac{ds^{\alpha-1}}{ds} + \frac{s^{\alpha-1}}{\varrho}$$

veya

$$\frac{d^2\mu_1}{d\theta^2} + \mu_1 = \varrho^2 \frac{ds^{\alpha-1}}{ds} + s^{\alpha-1}$$

en son

$$\frac{d\mu_1^2}{d\theta^2} + \mu_1 = \varrho^2(\alpha-1)s^{\alpha-2} + s^{\alpha-1} \quad (4.1.9)$$

bulunur. (4.1.9) denkleminin çözümünü yapalım. Bu denklemin homojen denkleminin çözümü

$$m^2 + 1 = 0$$

olacağından

$$m^2 = -1 = \pm\sqrt{-1}$$

olup

$$y_p = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$$

olacağından parametrenin değişimi metoduna göre

$$y_p = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta \quad (4.1.9)_1$$

şeklinde türevlenebilen v_1 ve v_2 fonksiyonları vardır. O halde buradan

$$y_p' = v_1' \cos \theta + v_2' \sin \theta - v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta$$

olup

$$v_1' \cos \theta + v_2' \sin \theta = 0 \quad (4.1.10)$$

olacağından $y_p'' = -v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - v_1' \sin \theta + v_2' \cos \theta$ denkleminde

$$-v'_1 \sin \theta + v'_2 \cos \theta = \varrho^2 (\alpha - 1) s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1} \quad (4.1.11)$$

bulunur. O halde (4.1.10) ve (4.1.11)' den

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \theta \\ \varrho^2(\alpha - 1)s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1} & \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \sin \theta \varrho^2 (\alpha - 1) s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1} \quad (4.1.12)$$

$$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta & \varrho^2(\alpha - 1)s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \cos \theta \varrho^2 (\alpha - 1) s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1} \quad (4.1.13)$$

elde edilir. O halde (4.1.12) ifadesinden yani $v'_1 = \sin \theta \varrho^2 (\alpha - 1) s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1}$ denkleminin her iki tarafın integrali alınır

$$v_1 = \left[\int \varrho^2 \sin \theta (\alpha - 1) s^{\alpha-2} d\theta - \int s^{\alpha-1} d\theta \right] \quad (4.1.14)$$

ve benzer şekilde (4.1.13)'den $v'_2 = \cos \theta \varrho^2 (\alpha - 1) s^{\alpha-2} - s^{\alpha-1}$ ifadesinin her iki tarafının integrali alınır

$$v_2 = \left[\int \varrho^2 \cos \theta (\alpha - 1) s^{\alpha-2} d\theta - \int s^{\alpha-1} d\theta \right] \quad (4.1.15)$$

bulunur. O halde (4.1.9)₁, (4.1.14) ve (4.1.15) denklemlerinden

$$\mu_1 = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + v_1 e^\theta + v_2 e^\theta$$

veya

$$\begin{aligned} = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + & \left[(\alpha - 1) \int_0^s s^2 \sin \theta (\alpha - 1) s^{\alpha-2} d\theta - \int_0^s s^{\alpha-1} d\theta \right] \\ & + \left[(\alpha - 1) \int_0^s \varrho^2 \cos \theta s^{\alpha-2} d\theta - \int_0^s s^{\alpha-1} d\theta \right] \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan $\frac{d\mu_1}{ds} = l(s)$ denilirse (4.1.2) denkleminin ilkinden

$$\mu_2 = \frac{1}{K^\alpha} [l(s) - s^{\alpha-1}] \quad (4.1.16)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $\gamma(s), \mathbb{R}^2$ de uyumlu birim hızlı α -Frenet çatılı uyumlu eğri olsun. O zaman Frenet çatılı uyumlu eğrinin konum vektörü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} X = X(s) = & \left\{ c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + \left[(\alpha - 1) \int_0^s \varrho^2 \sin \theta s^{\alpha-2} d\theta - \int_s^0 s^{\alpha-1} d\theta \right] \right. \\ & + \left[(\alpha - 1) \int_0^s \varrho^2 \cos \theta s^{\alpha-2} d\theta - \int_0^s s^{\alpha-1} d\theta \right] \Big\} e_1^\alpha(s) \\ & + \{ \varrho [l(s) - s^{\alpha-1}] \} e_2^\alpha(s) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Burada $\varrho = \frac{1}{K^\alpha}$, $\theta = \int_0^s d\theta$ dır.

Teorem 4.1.2. $\gamma(s), \mathbb{R}^2$ de uyumlu birim hızlı $\{e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s)\}$ α -Frenet çatılı bir uyumlu eğri olsun. Bu taktirde uyumlu eğrinin konum vektörü ve eğriliği:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K^\alpha} ((\alpha - 1)s^{\alpha-2} \frac{d\gamma}{ds} + s^{\alpha-1} \frac{d^2\gamma}{ds^2}) + K^\alpha s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds} \right) = 0 \quad (4.1.18)$$

dir.

İspat: $\gamma(s), \mathbb{R}^2$ de uyumlu birim hızlı $\{e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s)\}$ α -Frenet çatılı bir uyumlu eğri olsun. O

zaman α -Frenet çatısı

$$\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds^\alpha} = K^{(\alpha)} e_2^{(\alpha)}(s) \quad (4.1.19)$$

$$\frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds^\alpha} = -K^{(\alpha)} e_1^{(\alpha)}(s) \quad (4.1.20)$$

eşitliklerini sağlar. (4.1.19) denklemi (4.1.20)' de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K^\alpha} \frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds^\alpha} \right) + K^\alpha e_1^{(\alpha)}(s) = 0 \quad (4.1.21)$$

bulunur. Ayrıca $e_1^{(\alpha)}(s) = T_\alpha \gamma(s) = s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds}$ olduğu (4.1.21)'de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K^\alpha} \frac{d}{ds} \left(s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds} \right) \right) + K^\alpha s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

veya

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K^\alpha} (\alpha - 1)s^{\alpha-2} \frac{d\gamma}{ds} + s^{\alpha-1} \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right) + K^\alpha s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

bulunur.

5. UYUMLU EĞRİNİN KENDİ FRENET VEKTÖRLERİNE GÖRE UYUMLU KONGRUENT EĞRİLERİ

Bu bölümde uyumlu eğrilerin kendi frenet vektörleri yardımıyla oluşturdukları kongrüans uyumlu eğrileri tanımlanarak bazı özel durumlar altında özellikleri incelenecektir.

Tanım 5.1 Bir $\gamma(t)$ uyumlu eğrisi verilsin. $w(t)$ eğri boyunca eğrinin her noktasında $\{e_1^\alpha(t_0), e_2^\alpha(t_0)\}$ α –Frenet vektörleri ile sıkı sıkıya bağlı bir vektör alanı olsun. Herhangi bir

$t = t_0$ için $\{w(t_0), \gamma(t_0)\}$ lineer bağımsız olmak üzere $w(t_0)$ vektör alanına göre bir kongrüansı $\beta(t_0) - \gamma(t_0) \in Sp\{w(t_0)\} \Leftrightarrow \gamma(t_0) \equiv \beta(t_0) \pmod{w(t_0)}$ şeklinde tanımlanır.

Bu şekilde tanımlı bağıntının denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Her bir t_0 için tanımlanan denklik bağıntısı ile elde edilen $\overrightarrow{0\beta(t_0)}$ vektörleri düzlemde yeni bir uyumlu eğri oluşturur. Oluşturulan bu uyumlu eğrinin regüler olma şartı

$$\left. \frac{dw(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + w(t_0) \left. \frac{d\lambda(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + \lambda(t_0) \left. \frac{dw(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \neq 0$$

ile verilir.

Bu bölümde $\gamma(s)$ uyumlu eğrisinin α –Frenet çatısını $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ şeklinde bu eğriye kongruent olan s^* uyumlu yay parametrelili $\beta(s^*)$ eğrisinin α –Frenet çatısını $\{E_1^\alpha(s^*), E_2^\alpha(s^*)\}$ olmak üzere

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{d\beta(s^*)}{ds^*} \quad (5.1)$$

ve

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*}}{\left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanıp ve β eğrisinin eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\| \quad (5.3)$$

formülüyle hesaplanacaktır.

5.1. Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Uyumlu Kongrüent Eğrisi

Tanım 5.1.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet vektörleriyle verilen uyumlu eğri γ olsun. γ eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \gamma \in Sp\{e_1^\alpha(s)\} \Leftrightarrow \gamma \equiv \beta \pmod{e_1^\alpha(s)}$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye γ nın teğet vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi denir.

β eğrisinin uyumlu yay parametresi s^* olmak üzere β uyumlu eğrinin yer vektörü

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_1^\alpha(s) \quad (5.1.1)$$

olarak yazılabilir. (5.1.1) eşitliğinin her iki tarafının γ uyumlu eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır, γ eğrisinin α –Frenet çatısı kullanılırsa

$$\frac{d\beta(s^*)}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \lambda' e_1^\alpha(s) + \lambda K_\gamma e_2^\alpha(s)$$

olur. Burada

$$\frac{d^\alpha \beta(s^*)}{ds^*} = (s^*)^{1-\alpha} \frac{d\beta(s^*)}{ds^*} \Rightarrow \frac{d\beta(s^*)}{ds^*} = (s^*)^{\alpha-1} \frac{d^\alpha \beta(s^*)}{ds^{*\alpha}} = (s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*)$$

$$\frac{d^\alpha \gamma}{ds^\alpha} = s^{1-\alpha} \frac{d\gamma}{ds} \Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} = s^{\alpha-1} \frac{d^\alpha \gamma}{ds^\alpha} \Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} = s^{\alpha-1} \cdot \frac{d^\alpha \gamma}{ds^\alpha} = s^{\alpha-1} e_1^\alpha(s)$$

$$(s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} = s^{\alpha-1} e_1^\alpha(s) + \lambda' e_1^\alpha(s) + \lambda K_\gamma e_2^\alpha(s)$$

veya

$$(s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (s^{\alpha-1} + \lambda') e_1^\alpha(s) + \lambda K_\gamma e_2^\alpha(s)$$

veya

$$(s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (s^{\alpha-1} + \lambda') e_1^\alpha(s) + \lambda K_\gamma e_2^\alpha(s) \quad (5.1.2)$$

bulunur. Burada

$$\frac{ds^*}{ds} = (s^*)^{(1-\alpha)} \sqrt{(s^{\alpha-1} + \lambda')^2 + (\lambda K_\gamma)^2} \quad (5.1.3)$$

bağıntısı vardır. Eğer

$$(s^*)^{\alpha-1} \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(s^{\alpha-1} + \lambda')^2 + (\lambda K_\gamma)^2} = \sigma \quad (5.1.3)_2$$

denilirse (5.1.2) ifadesi

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(s^{\alpha-1} + \lambda')}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.1.4)$$

(5.1.4) ifadesinin s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} &= \frac{((\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'')\sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{(s^{\alpha-1} + \lambda')}{\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s) \\ &\quad + \frac{(\lambda' K_\gamma + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s) - \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} K_\gamma e_1^\alpha(s) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} \\
&= \frac{\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2\right)\sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) \\
&+ \frac{(\lambda'K_\gamma + \lambda K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s)
\end{aligned} \tag{5.1.4}_2$$

bu ifadede

$$P = \frac{\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2\right)\sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma'}{\sigma^2}$$

ve

$$R = \frac{(\lambda'K_\gamma + \lambda K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2}$$

denilirse (5.1.4)₂ ifadesi

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} = P e_1^\alpha(s) + R e_2^\alpha(s) \tag{5.1.4}_3$$

formuna dönüşür. Diğer taraftan

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} \tag{5.1.5}$$

olduğundan (5.1.3) ve (5.1.4)₃ ifadeleri (5.1.5) de göz önüne alınırsa

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = (P e_1^\alpha(s) + R e_2^\alpha(s)) \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} \tag{5.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*}}{\left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|}$$

olduğundan

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_2^\alpha(s) \tag{5.1.7}$$

elde edilir. Bunlara ilaveten

$$k_\beta(s^*) = \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|$$

eşitliğinden

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^2} \sqrt{P^2 + R^2}$$

veya

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^2} \sqrt{\left[(\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2 \sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma' \right]^2 + \left[(\lambda'K_\gamma + K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma' \right]^2}$$

dir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.1 γ, K_γ eğrilikli ve $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}, \alpha$ -Frenet çatılı uyumlu eğri olsun. γ uyumlu eğrisinin teğet vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi $\beta(s^*)$ ise β nın α -Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(s^{\alpha-1} + \lambda')}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\gamma K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^2} \sqrt{\left[(\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2\sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma' \right]^2 + \left[(\lambda'K_\gamma + K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma' \right]^2}$$

dır. Burada

$$\sigma = \sqrt{(s^{\alpha-1} + \lambda')^2 + (\lambda K_\gamma)^2}$$

$$P = \frac{\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2 \right) \sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma'}{\sigma^2}$$

$$R = \frac{(\lambda'K_\gamma + \lambda K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2}$$

dır.

Sonuç 5.1.1 γ, K_γ eğrilikli ve $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}, \alpha$ -Frenet çatılı uyumlu eğri olsun. γ uyumlu eğrisinin teğet vektörüne göre yani

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_1^\alpha(s)$$

şeklinde ifade edilen β uyumlu eğrisinin λ sabit ise β nın α -Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{s^{\alpha-1}}{\tilde{\sigma}} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\tilde{\sigma}} e_2^\alpha(s)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{\tilde{P}^2 + \tilde{R}^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\tilde{R}}{\sqrt{\tilde{P}^2 + \tilde{R}^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve eğriliği de

$$k_\beta = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\tilde{\sigma}^2} \sqrt{\left[((\alpha-1)s^{\alpha-2} + \lambda(K_\gamma)^2)\tilde{\sigma} - (s^{\alpha-1}\tilde{\sigma}') \right]^2 + \left[(\lambda K'_\gamma + (s^{\alpha-1})K_\gamma)\tilde{\sigma} - (\lambda K_\gamma)\tilde{\sigma}' \right]^2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{s^{2\alpha-2} + (\lambda K_\gamma)^2}$$

$$\tilde{P} = \frac{(\alpha-1)s^{\alpha-2} + (\lambda K_\gamma)^2\tilde{\sigma} - (s^{\alpha-1})\tilde{\sigma}'}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$\tilde{R} = \frac{(\lambda K'_\gamma + s^{\alpha-1} K_\gamma) \tilde{\sigma} - (\lambda K_\gamma) \tilde{\sigma}'}{\tilde{\sigma}^2}$$

dir.

İspat. Teorem (5.1.1) de $\lambda' = 0$ konumu ile yani

$\tilde{\sigma} = \sigma|_{\lambda'=0}$, $\tilde{P} = P|_{\lambda'=0}$, $\tilde{R} = R|_{\lambda'=0}$ dan sonuç (5.1.1) bulunur.

5.2. Uyumlu Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongruent Uyumlu Eğri

Tanım 5.2.1 $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$, α -Frenet vektörlü uyumlu eğri γ olsun. γ eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \gamma \in Sp\{e_2^\alpha(s)\} \Leftrightarrow \gamma \equiv \beta \pmod{e_2^\alpha(s)}$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden uyumlu eğriye γ nın normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğri denir.

β eğrisinin uyumlu yay parametresi s^* olmak üzere β eğrisinin yer vektörü

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_2^\alpha(s) \quad (5.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.1) eşitliğinin her iki tarafının γ eğrisinin uyumlu yay parametresi s ye göre türevi alınır ve γ ve β nın α -Frenet çatıları göz önüne alınırsa :

$$\frac{d\beta(s^*)}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \lambda' e_2^\alpha(s) + \lambda \frac{de_2^\alpha(s)}{ds}$$

veya

$$\begin{aligned} (s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} &= s^{\alpha-1} e_1^\alpha(s) + \lambda' e_2^\alpha(s) - \lambda K_\gamma e_1^\alpha(s) \\ &= (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) e_1^\alpha(s) + \lambda' e_2^\alpha(s) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

bulunur. $\beta(s^*)$ eğrisi uyumlu birim hızlı eğri olduğundan s^* ve s arasında

$$\frac{ds^*}{ds} = (s^*)^{1-\alpha} \sqrt{(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)^2 + (\lambda')^2} \quad (5.2.3)_1$$

bağıntısı vardır.

$$\sigma = \sqrt{(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)^2 + (\lambda')^2} \quad (5.2.3)_2$$

denilirse (5.2.2) ifadesi

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda'}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. $E_1^\alpha(s^*)$ in s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} &= \frac{((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda' K_\gamma - \lambda K'_\gamma) \sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) \sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma}{\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s) \\ &\quad + \frac{\lambda'' \sigma - \lambda' \gamma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s) - \frac{\lambda'}{\sigma} K_\gamma e_1^\alpha(s) \end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} &= \frac{\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} - 2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma\right)\sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) \\ &\quad + \frac{(\lambda''\sigma - \lambda'\gamma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)K_\gamma\sigma}{\sigma^2} e_2^\alpha(s) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

olur. Burada

$$K = \frac{\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} - 2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma\right)\sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} \quad (5.2.6)$$

ve

$$L = \frac{(\lambda''\sigma - \lambda'\gamma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)K_\gamma\sigma}{\sigma^2} \quad (5.2.7)$$

denilirse (5.2.5) ifadesi

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} = Ke_1^\alpha(s) + Le_2^\alpha(s) \quad (5.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = (Ke_1^\alpha(s) + Le_2^\alpha(s)) \frac{ds}{ds^*}$$

olduğundan (5.2.3)₁ ve (5.2.3)₂ den

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} (Ke_1^\alpha(s) + Le_2^\alpha(s)) \quad (5.2.9)$$

bulunur. O halde $E_2^\alpha(s^*) = \frac{\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*}}{\left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|}$ ifadesinden

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{L}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.2.10)$$

elde edilir. Ayrıca $\beta(s^*)$ eğriliği $k_\beta(s^*) = \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|$ olduğundan (5.2.9) veya (5.2.6), (5.2.7) den

$$= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{\left[\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} - 2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma\right)\sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)\sigma'\right]^2 + \left[(\lambda''\sigma - \lambda'\sigma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)K_\gamma\sigma\right]^2}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.1 $\gamma, \{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ uyumlu α –Frenet çatılı uyumlu eğri olsun. γ uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β ise β nın α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda'}{\sigma} e_2^\alpha(s)$$

ve

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{L}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve eğriligi

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{\left[\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} - 2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma \right) \sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) \sigma' \right]^2 + \left[(\lambda''\sigma - \lambda'\sigma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) K_\gamma \sigma \right]^2} \quad (5.2.11)$$

dır. Buradan aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.2.1. γ, K_γ eğrilikli ve $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet çatılı uyumlu eğri olsun. γ uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent yani

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_2^\alpha(s)$$

şeklinde yazılan $\beta(s^*)$ uyumlu eğrisinin λ nın sabit olması durumunda α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \pm e_1^\alpha(s) \quad (5.2.12)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = -e_2^\alpha(s) \quad (5.2.13)$$

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma \quad (5.2.14)$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun.

O zaman

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_2^\alpha(s)$$

şeklinde ifade edileceğinden ve hipotezde λ nın sabit olduğu göz önüne alınırsa (5.2.4) den

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)}{\sigma} e_1^\alpha(s) \quad (5.2.15)$$

ve (5.2.6) ifadesinden $K = \frac{((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda K'_\gamma)\sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2}$ olup (5.2.3)₂ den

$$\sigma = (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) \quad (5.2.16)$$

ve

$$\sigma' = ((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda K'_\gamma) \quad (5.2.17)$$

olacağından

$$K = \frac{((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda K'_\gamma)(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda K'_\gamma)}{(s^{\alpha-2} - \lambda K_\gamma)} = 0 \quad (5.2.18)$$

benzer şekilde

$$L = \frac{-(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)\sigma}{\sigma^2} K_\gamma \quad (5.2.19)$$

veya (5.2.16) ifadesi (5.2.19) da yerine yazılırsa

$$L = -K_\gamma \quad (5.2.20)$$

olacaktır. Nihayet (5.2.18) ve (5.2.20) ifadeleri (5.2.10) da göz önüne alınırsa

$$E_2^\alpha(s^*) = -e_2^\alpha(s) \quad (5.2.21)$$

elde edilir. β nın eğriliği (5.2.11) de

$$\begin{aligned} k_\beta(s^*) &= \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s), \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s) \right\rangle} \\ &= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma \end{aligned}$$

Sonuç 5.2.2 γ, K eğrilikli ve $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet çatılı uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. γ uyumlu eğrisinin eğriliği K_γ sabit ise β nın eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{\left[\left((\alpha-1)s^{\alpha-2} - \lambda' K_\gamma \right) \sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) \sigma' \right]^2 + \left[(\lambda'' \sigma - \lambda' \sigma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) K_\gamma \sigma \right]^2} \quad (5.2.22)$$

İspat. γ uyumlu eğrisinin K_γ eğriliği sabitse $K'_\gamma = 0$ olacağından (5.2.11) den (5.2.22) elde edilir.

Sonuç 5.2.3 γ, k_γ eğrilikli ve $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet çatılı uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olduğu durumda yani

$$\beta(s^*) = \gamma(s) + \lambda e_2^\alpha(s)$$

Yazılımında λ sabit ve k_γ sabit ise β nın α –Frenet elemanları

$$\begin{aligned} E_1^\alpha(s^*) &= \pm e_1^\alpha(s) \\ E_2^\alpha(s^*) &= \pm e_2^\alpha(s) \\ k_\beta &= \pm \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma \end{aligned}$$

dir.

İspat. γ uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. Eğer K_γ ve λ sabit ise (5.2.3)₂ den

$$\sigma = |s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma| \quad (5.2.23)$$

ve (5.2.4) ve (5.2.23) den $E_1^\alpha(s^*) = \pm e_1^\alpha(s)$ bulunur. Ayrıca (5.2.6)

$$K = \frac{((\alpha-1)s^{\alpha-2})(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)((\alpha-1)s^{\alpha-2})}{\sigma^2}$$

dan $K = 0$ bulunur ve

$$L = \pm \frac{(s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) K_\gamma (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma)}{\sigma^2}$$

$$L = \pm K_\gamma$$

olacağından

$$E_2^\alpha(s) = \pm e_2^\alpha(s)$$

bulunur. Ayrıca (5.2.11) denkleminde

$$\begin{aligned} k_\beta(s^*) &= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{\sigma^4 k_\gamma^2} \\ &= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma \end{aligned}$$

bulunur.

5.3. Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörünün Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongruent Uyumlu Eğri

Tanım 5.3.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ uyumlu Frenet vektörlü, uyumlu eğri γ olsun. γ eğrisinin teğet vektörü ile

$$\beta - e_1^\alpha(s) \in Sp\{e_2^\alpha(s)\} \Leftrightarrow e_1^\alpha(s) \equiv \beta(mode_2^\alpha(s))$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye γ nın teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi denir.

β uyumlu eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere β eğrisinin yer vektörü

$$\beta(s^*) = e_1^\alpha(s) + \lambda e_2^\alpha(s) \quad (5.3.1)$$

olarak yazılabilir. (5.3.1) ifadesinin her iki tarafının γ uyumlu eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(s^*)}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} &= \frac{de_1^\alpha(s)}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} e_2^\alpha(s) + \lambda \frac{de_2^\alpha(s)}{ds} \\ s^{*(\alpha-1)} \frac{ds^*}{ds} E_1^\alpha(s^*) &= K_\gamma e_2^\alpha(s) + \lambda' e_2^\alpha(s) - \lambda K_\gamma e_1^\alpha(s) \\ &= -\lambda K_\gamma e_1^\alpha(s) + (K_\gamma + \lambda') e_2^\alpha(s) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

bulunur. Böylece s^* ve s arasında

$$s^{*(\alpha-1)} \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(-\lambda K_\gamma)^2 + (K_\gamma + \lambda')^2} \quad (5.3.3)$$

bulunur. Eğer

$$s^{*(\alpha-1)} \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(-\lambda K_\gamma)^2 + (K_\gamma + \lambda')^2} = \sigma \quad (5.3.4)$$

denilirse (5.3.2) ifadesi

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{(K_\gamma + \lambda')}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} &= \frac{(-\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma)\sigma - (-\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{(-\lambda)K_\gamma}{\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s) \\
&\quad + \frac{(K'_\gamma + \lambda'')\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s) - \frac{(K_\gamma + \lambda')}{\sigma} K_\gamma e_1^\alpha(s) \\
&= \frac{(-2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{(K'_\gamma + \lambda'' - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s)
\end{aligned}$$

olacağından

$$M = \frac{(-2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} \quad (5.3.6)$$

$$N = \frac{(K'_\gamma + \lambda'' - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma'}{\sigma^2} \quad (5.3.7)$$

denilirse

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} = Me_1^\alpha(s) + Ne_2^\alpha(s)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = (Me_1^\alpha(s) + Ne_2^\alpha(s)) \frac{ds}{ds^*}$$

olduğundan (5.3.4) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} (Me_1^\alpha(s) + Ne_2^\alpha(s))$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
E_2^\alpha(s^*) &= \frac{\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*}}{\left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|} \\
&= \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.9)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde β eğrisinin eğriliği

$$\begin{aligned}
k_\beta(s^*) &= \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\| \\
&= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} \sqrt{M^2 + N^2} \quad (5.3.10)_1
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{\left[(-2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma'\right]^2 + \left[(\lambda'' + K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma'\right]^2} \quad (5.3.10)_2$$

Böylece aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.3.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ uyumlu Frenet çatılı konformable γ eğrisinin teğet vektörünün, eğrinin normal vektörüne göre kongruent eğrisi β ise β nın uyumlu Frenet çatısı

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{(\lambda' + K_\gamma)}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.11)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.12)$$

dır. Burada

$$M = \frac{(-2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2}$$

$$N = \frac{(K'_\gamma + \lambda'' - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma'}{\sigma^2}$$

dır. Ayrıca kongrüent uyumlu β eğrisinin eğriligi

$$k_\beta = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{[(-2\lambda'K_\gamma - \lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma']^2 + [(\lambda'' + K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (K_\gamma + \lambda')\sigma']^2}$$

dır.

Sonuç 5.3.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet çatılı ,uyumlu γ eğrisinin teğet vektörünün, eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β ise yani

$$\beta(s^*) = e_1^\alpha(s) + \lambda e_2^\alpha(s)$$

ise ve λ sabit olması durumunda β eğrisinin α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.13)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.14)$$

ve eğriligi

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}} K_\gamma$$

dır.

İspat: γ uyumlu eğrisinin teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olması halinde λ sabit ise (5.3.4) den

$$\sigma = |K_\gamma| \sqrt{1^2 + \lambda^2} \quad (5.3.15)$$

Ve (5.3.5) den

$$\sigma' = K'_\gamma \sqrt{1^2 + \lambda^2} \quad (5.3.16)$$

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.17)$$

olur. Diğer taraftan (5.3.6), (5.3.15), (5.3.16) den ,

$$M = \frac{(-\lambda K'_\gamma - K_\gamma^2)K_\gamma \sqrt{1^2 + \lambda^2} + (\lambda K_\gamma)(K'_\gamma) \sqrt{1^2 + \lambda^2}}{K_\gamma^2(1 + \lambda^2)}$$

$$= \frac{-K_\gamma^3 \sqrt{1^2 + \lambda^2}}{K_\gamma^2 (1 + \lambda^2)} = \frac{-K_\gamma \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \lambda^2} \quad (5.3.18)$$

ve (5.3.7), (5.3.15), (5.3.16) den

$$N = \frac{(K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)(K_\gamma \sqrt{1^2 + \lambda^2}) - K_\gamma K'_\gamma \sqrt{1^2 + \lambda^2}}{K_\gamma^2 (1 + \lambda^2)}$$

$$= \frac{-\lambda K_\gamma^3 \sqrt{1 + \lambda^2}}{K_\gamma^2 (1 + \lambda^2)} = \frac{-\lambda K_\gamma \sqrt{1^2 + \lambda^2}}{1 + \lambda^2}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sqrt{M^2 + N^2} &= \sqrt{\frac{K_\gamma^2 (1 + \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2} + \frac{\lambda^2 K_\gamma^2 (1 + \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}} = \sqrt{\frac{K_\gamma^2 (1 + \lambda^2) (1 + \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}} \\ &= K_\gamma \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

olur. Böylece (5.3.11) den

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e_2^\alpha(s)$$

elde edilir. Ayrıca (5.3.10)₁ ve (5.3.19) dan

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma} K_\gamma$$

bulunur.

Sonuç 5.3.2. γ uyumlu eğrisinin teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. Eğer γ nın K_γ eğriliği sabitse β nın α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{(K_\gamma + \lambda')}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.20)$$

ve

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{N_1}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.21)$$

ve eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma^3} \sqrt{[(-2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma']^2 + [(\lambda'' - \lambda K_\gamma)\sigma - (\lambda' + K_\gamma)\sigma']^2} \quad (5.3.22)$$

dır. Burada

$$M_1 = \frac{(-2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2)\sigma + (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} \quad (5.3.23)$$

ve

$$N_1 = \frac{(\lambda'' - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' + K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} \quad (5.3.24)$$

İspat: γ uyumlu eğrisinin teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. Eğer γ nın k_β eğriliği sabitse (5.3.5) aynı olacağından

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{(K_\gamma + \lambda')}{\sigma} e_2^\alpha(s)$$

ve (5.3.6), (5.3.23) ve (5.3.24), (5.3.21) ifadesine ve (5.3.12), (5.3.21) ifadesine ve nihayet (5.3.10)₂, (5.3.21) ifadesine dönüşür.

Sonuç 5.3.3. γ uyumlu eğrisinin teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. Yani

$$\beta(s^*) = e_1^\alpha(s) + \lambda e_2^\alpha(s)$$

yazılımında λ ve γ nın K_γ eğriliği sabitse β nın α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.25)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.3.26)$$

ve eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_\gamma \quad (5.3.27)$$

dir.

İspat: γ uyumlu eğrisinin teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi β olsun. λ ve k_γ sabit ise (5.3.4) den

$$\sigma = |K_\gamma| \sqrt{1+\lambda^2} \quad (5.3.28)$$

ve

$$\sigma' = 0 \quad (5.3.29)$$

olacağından (5.3.5) den

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve (5.3.6) dan

$$M_2 = \frac{-K_\gamma^2 K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2 (1+\lambda^2)} = \frac{-K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}$$

ve (5.3.7) den

$$N_2 = \frac{-\lambda K_\gamma^2 K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2 (1+\lambda^2)} = \frac{-\lambda K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}$$

ve

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve nihayet eğrilik

$$\sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{\left(\frac{-K_\gamma \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{-\lambda K_\gamma \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \lambda^2}\right)^2} = K_\gamma$$

olacağından

$$k_\beta = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma} K_\gamma$$

olur.

5.4. Uyumlu Eğrinin Normal Vektörünün Uyumlu Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Kongruent Eğrisi

Tanım 5.4.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$, α –Frenet çatılı uyumlu eğri γ olsun. γ eğrisinin normal vektörü ile

$$\beta - e_2^\alpha(s) \in Sp\{e_1^\alpha(s)\} \Leftrightarrow e_2^\alpha(s) \equiv \beta(mod e_1^\alpha(s))$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden uyumlu eğriye γ nın normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi denir.

β uyumlu eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere, β eğrisinin yer vektörü

$$\beta(s^*) = e_2^\alpha(s) + \lambda e_1^\alpha(s) \quad (5.4.1)$$

şeklinde yazılabilir. (5.4.1) eşitliğinin her iki tarafının γ uyumlu eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa ;

$$\frac{d_\beta(s^*)}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{de_2^\alpha(s)}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} e_1^\alpha(s) + \lambda \frac{de_1^\alpha(s)}{ds}$$

Ve α –Frenet eşitlikleri kullanılırsa

$$(s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -K_\gamma e_1^\alpha(s) + \lambda' e_1^\alpha(s) + K_\gamma e_2^\alpha(s)$$

veya düzenlenirse

$$(s^*)^{\alpha-1} E_1^\alpha(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (\lambda' - K_\gamma) e_1^\alpha(s) + K_\gamma e_2^\alpha(s) \quad (5.4.2)$$

bulunur. Böylece

$$(s^*)^{\alpha-1} \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(\lambda' - K_\gamma)^2 + \lambda^2 K_\gamma^2}$$

olacağından

$$(s^*)^{\alpha-1} \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(\lambda' - K_\gamma)^2 + \lambda^2 K_\gamma^2} = \sigma \quad (5.4.3)$$

denilirse (5.4.2) ifadesi

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(\lambda' - K_\gamma)}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} &= \frac{(\lambda'' - K'_\gamma)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda' - K_\gamma}{\sigma} K_\gamma e_2^\alpha(s) \\
&\quad + \frac{(\lambda' K_\gamma + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s) - \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} K_\gamma e_1^\alpha(s) \\
&= \frac{(\lambda'' - K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_1^\alpha(s) + \frac{(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} e_2^\alpha(s)
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

ve burada

$$\begin{aligned}
W &= \frac{(\lambda'' - K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2} \\
\theta &= \frac{(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma'}{\sigma^2}
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

denilirse (5.4.5) ifadesi

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} = W e_1^\alpha(s) + \theta e_2^\alpha(s) \tag{5.4.7}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = (W e_1^\alpha(s) + \theta e_2^\alpha(s)) \frac{ds}{ds^*}$ olduğundan (5.4.3) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} (W e_1^\alpha(s) + \theta e_2^\alpha(s)) \tag{5.4.8}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan $E_2^\alpha(s^*) = \frac{\frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*}}{\left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|}$ olduğundan

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{W}{\sqrt{W^2 + \theta^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\theta}{\sqrt{W^2 + \theta^2}} e_2^\alpha(s) \tag{5.4.9}$$

bulunur. O halde β uyumlu eğrisinin eğriliği $k_\beta(s^*) = \left\| \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} \right\|$ ifadesinden hesaplanırsa

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} \sqrt{W^2 + \theta^2} \tag{5.4.10}$$

veya

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{[(\lambda'' - K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma']^2 + [(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma']^2} \tag{5.4.11}$$

elde edilir.

Teorem 5.4.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ uyumlu Frenet çatılı uyumlu γ eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu kongruent eğrisi β ise β nın α -Frenet elemanları γ eğrisinin Frenet elemanları cinsinden

$$\begin{aligned}
E_1^\alpha(s^*) &= \frac{(\lambda' - K_\gamma)}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s) \\
E_2^\alpha(s^*) &= \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} (W e_1^\alpha(s) + \theta e_2^\alpha(s))
\end{aligned}$$

ve eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{[(\lambda'' - K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma']^2 + [(2\lambda'K_\gamma - K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma']^2}$$

Sonuç 5.4.1. $\{e_1^\alpha(s), e_2^\alpha(s)\}$ α –Frenet çatılı uyumlu γ eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β ise yani

$$\beta(s^*) = e_2^\alpha(s) + \lambda e_1^\alpha(s)$$

ise ve λ nın sabit olması durumunda β eğrisinin α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.4.12)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{dE_1^\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} (W e_1^\alpha(s) + \theta e_2^\alpha(s)) \quad (5.4.13)$$

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma^3} \sqrt{[(\lambda'' - K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)\sigma - (\lambda' - K_\gamma)\sigma']^2 + [(2\lambda'K_\gamma - K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma']^2} \quad (5.4.14)$$

İspat. γ uyumlu eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β ise ve λ sabit ise (5.4.3) den

$$\sigma = K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2} \quad (5.4.15)$$

ve

$$\sigma' = K'_\gamma \sqrt{1+\lambda^2} \quad (5.4.16)$$

olacağından (5.4.4) ifadesinde (5.4.15) kullanılırsa

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s)$$

olur. Diğer taraftan (5.4.6) da (5.4.15), (5.4.16) kullanılırsa

$$W = \frac{(-K'_\gamma - \lambda K_\gamma^2)K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2} + K_\gamma K'_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2(1+\lambda^2)} = \frac{-\lambda K_\gamma^3 \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2(1+\lambda^2)} = \frac{-\lambda K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} \quad (5.4.17)$$

ve benzer şekilde (5.4.7) de (5.4.15), (5.4.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(-K_\gamma^2 + \lambda K'_\gamma)K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2} - \lambda K_\gamma K'_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2(1+\lambda^2)} = \frac{-K_\gamma^3 \sqrt{1+\lambda^2}}{K_\gamma^2(1+\lambda^2)} \\ &= \frac{-K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

olur. O halde

$$\sqrt{W^2 + \theta^2} = \sqrt{\frac{K_\gamma^2 \lambda^2 (1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{K_\gamma^2 (1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}} = K_\gamma \quad (5.4.19)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
E_2^\alpha(s^*) &= \frac{\frac{-\lambda K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}}{K_\gamma} e_1^\alpha(s) + \frac{\frac{-K_\gamma \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}}{K_\gamma} e_2^\alpha(s) \\
&= \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^\alpha(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
k_\beta(s^*) &= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma^3} \sqrt{W^2 + \theta^2} \\
&= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma^3} K_\gamma
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 5.4.2. γ uyumlu eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β olsun. Eğer β nın K_γ eğriliği sabit ise β nın α –Frenet elemanları

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(\lambda' - K_\gamma)^2}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s) \quad (5.4.20)$$

$$E_2^\alpha(s^*) = \frac{W_1}{\sqrt{W_1^2 + \theta_1^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\theta_1}{\sqrt{W_1^2 + \theta_1^2}} e_2^\alpha(s) \quad (5.4.21)$$

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma} \sqrt{\left[(\lambda'' - \lambda K_\gamma^2) \sigma - (\lambda' - K_\gamma) \sigma' \right]^2 + \left[(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2) \sigma - (\lambda K_\gamma) \sigma' \right]^2} \quad (5.4.22)$$

dır. Burada

$$W_1 = \frac{(\lambda'' - \lambda K_\gamma^2) \sigma - (\lambda' - K_\gamma) \sigma'}{\sigma^2} \quad (5.4.23)$$

$$\theta_1 = \frac{(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2) \sigma - (\lambda K_\gamma) \sigma'}{\sigma^2} \quad (5.4.24)$$

dir.

İspat. γ uyumlu eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β olsun.

Eğer γ eğrisinin K_γ eğriliği sabitse (5.4.4) ifadesi

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(\lambda' - K_\gamma)}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s)$$

olup aynı kalır. Oysa K_γ sabit olduğundan (5.4.6) dan $W_1 = \frac{(\lambda'' - \lambda K_\gamma^2) \sigma - (\lambda' - K_\gamma) \sigma'}{\sigma^2}$ ve (5.4.7) den

$\theta_1 = \frac{(2\lambda' K_\gamma - K_\gamma^2) \sigma - (\lambda K_\gamma) \sigma'}{\sigma^2}$ elde edilir. Böylece (5.4.9) ifadesi

$$E_2^\alpha(s) = \frac{W_1}{\sqrt{W_1^2 + \theta_1^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{\theta_1}{\sqrt{W_1^2 + \theta_1^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve nihayet (5.4.10)₂ ifadesi

$$k_{\beta}(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} \sqrt{[(\lambda'' - \lambda K_{\gamma}^2)\sigma - (\lambda' - K_{\gamma})\sigma']^2 + [(2\lambda'K_{\gamma} - K_{\gamma}^2)\sigma - (\lambda K_{\gamma})\sigma']^2}$$

elde edilir.

Sonuç 5.4.3. γ uyumlu eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β olsun. Yani

$$\beta(s^*) = e_2^{\alpha}(s) + \lambda e_1^{\alpha}(s)$$

yazılımında λ ve γ nın K_{γ} eğriliği sabitse β nın α –Frenet elemanları

$$E_1^{\alpha}(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^{\alpha}(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^{\alpha}(s) \quad (5.4.25)$$

$$E_2^{\alpha}(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^{\alpha}(s) + \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^{\alpha}(s) \quad (5.4.26)$$

$$k_{\beta}(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_{\gamma} \quad (5.4.27)$$

dır.

İspat. γ uyumlu eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre uyumlu eğrisi β olsun. λ ve K_{γ} sabit ise (5.4.3) ten

$$\sigma = K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2} \quad (5.4.28)$$

ve

$$\sigma' = 0 \quad (5.4.29)$$

olur. O halde (5.4.4) ten

$$E_1^{\alpha}(s^*) = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^{\alpha}(s) + \frac{\lambda K_{\gamma}}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^{\alpha}(s)$$

ve (5.4.6) dan

$$W_2 = \frac{(-\lambda K_{\gamma}^2) K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}}{K_{\gamma}^2 (1+\lambda^2)} = \frac{-\lambda K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} \quad (5.4.30)$$

ve (5.4.7) den

$$\theta_2 = \frac{-K_{\gamma}^2 K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}}{K_{\gamma} (1+\lambda^2)} = \frac{-K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} \quad (5.4.31)$$

olur. (5.4.30) ve (5.4.31) den

$$\sqrt{W_2^2 + \theta_2^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2 K_{\gamma}^2 (1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{K_{\gamma}^2 (1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}} = K_{\gamma}$$

olduğundan (5.4.9) ifadesinden

$$E_2^{\alpha}(s^*) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_1^{\alpha}(s) + \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_2^{\alpha}(s)$$

ve β nın eğriliği

$$\begin{aligned}
k_{\beta}(s^*) &= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} \sqrt{W_2^2 + \theta_2^2} \\
&= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha}\sigma} K_{\gamma} \\
&= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} K_{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}} K_{\gamma} \\
&= \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sqrt{1+\lambda^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.



6. MATERYAL VE METOT

Diferensiyel geometri alanında eğriler teorisiyle ilgili çok sayıda araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalar başlangıçta Öklid uzayında dikkate alınmıştır. 17.yy dan sonra Öklid dışında var olan uzaylarda da eş değerlerinin olup olmadığı incelenmiş ve bunun sonucunda kayda değer birçok sonucun var olduğu görülmüştür. Eğriler teorisiyle ilgili çalışmalar yapılırken genellikle diferensiyel hesap ve integral ile ilgili yöntemleri baz alınmıştır. Ama son zamanlarda uyumlu türev kavramı birçok bilimsel araştırmaya, çalışmalara kolaylık sağladığı özelliklerinden dolayı bilim dünyasına farklı bir bakış açısı katmıştır. Tez çalışmasının giriş kısmında uyumlu türev ve literatürdeki diğer türevlerle ilgili kaynaklar detaylıca incelenmiş ve Öklid uzayında bildiğimiz klasik türevle elde edilen bazı sonuçların uyumlu türev ile de elde edilebileceği görülmüştür. Klasik türevle elde edilen bu çalışmalardaki yöntemler doktora tezine temel oluşturarak, uyumlu türevi baz alınmış ve bir düzlem eğrisinin bu türev kullanılarak elde edilen uyumlu Frenet çatısı elde edilmiş ve eğrinin uyumlu türev kullanılarak elde edilen geometrik elemanları elde edilmiştir. Ayrıca bir uyumlu eğrinin eğriliğiyle diferensiyel geometrideki standart eğrilik arasında bağıntı elde edilmiştir.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tez çalışması süresince uyumlu türev kullanılarak başlangıçta $s = (\alpha\tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir α eğrisinin uyumlu birim teğet vektörü ve uyumlu birim normal vektörü elde edilip eğrinin uyumlu Frenet çatısı inşa edilmiştir. Sonrasında eğrinin uyumlu eğriliği hesaplanmış ve elde ettiğimiz bu uyumlu eğrilik ile standart eğriliği arasındaki bağıntı elde edilmiştir.

Ayrıca $\mathbb{R}^2$ de regüler parametrik C^1 -sınıfından sürekli düzlem eğrileri $c_1(s), c_2(r)$ nin açıortay eğrililerine karşılık gelen $F_i(s, r)$ çok değişkenli fonksiyonları $i = 1, 2$ için bulunmuştur. Ardından $\mathbb{R}^2$ de γ birim hızlı uyumlu eğrisinin α –Frenet çatısına göre konum vektörü ve eğriliğinin mevcut olduğu elde edilmiştir. Son olarak α –Frenet çatılı uyumlu birim hızlı γ eğrisinin kendi Frenet vektörlerine göre, ilk olarak eğrinin teğet vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi, daha sonra normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi elde edilmiştir.

Bulunan denklemlerin klasik türevle elde edilen neticelerle temelde geometrik olarak örtüştüğü ama uyumlu türevin kullanılmasıyla bazı kısmi farklılıklar gözlemlendiği öne sürülebilir.

8. SONUÇLAR

Tez çalışması süresince ilk olarak

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} f(x + hx^{1-\alpha}) - f(x)}{h}$$

olarak verilen uyumlu türevi kullanılarak $s = (\alpha\check{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin sırasıyla uyumlu birim teğet vektörü $e_1^{(\alpha)}(s)$ ve uyumlu birim normal vektörü $e_2^{(\alpha)}(s)$ detaylı bir şekilde 2. bölümde elde edilmiştir. Buna bağlı olarak, $\gamma(s)$ eğrisinin uyumlu Frenet çatısı

$$\frac{de_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = K^{(\alpha)}(s) \cdot e_2^{(\alpha)}(s)$$

ve

$$\frac{de_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = -K^{(\alpha)}(s) \cdot e_1^{(\alpha)}(s)$$

şeklinde elde edilmiştir. Akabinde, $\gamma(s)$ eğrisinin uyumlu eğriliğiyle klasik eğriliği arasında

$$K^{(\alpha)}(t) = \left(\alpha \int_0^t \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} K(t)$$

bağıntısı bulunmuştur. Bu eşitliklerde uyumlu türev baz alındığı için mevcut klasik türevle kısmi farklılıklar görülmektedir. Daha sonra $\mathbb{R}^2$ de regüler parametrik C^1 –sınıfından sürekli düzlem eğrileri olan $c_1(s), c_2(r)$ eğrilerinin açığortay eğrilerine karşılık gelen $F_i(s, r) = 0$ çok değişkenli fonksiyonları $i = 1, 2$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} P(s, r) &= (T_\alpha^2 y_1(s) + T_\alpha^2 x_1(s)) [(x_2(r) - x_1(s)) T_\alpha x_2(r) + (y_2(r) - y_1(s)) T_\alpha y_2(r)]^2 \\ &\quad - (T_\alpha^2 y_2(r) + T_\alpha^2 x_2(r)) [(y_2(r) - y_1(s)) T_\alpha y_1(s) + (x_2(r) - x_1(s)) T_\alpha x_1(s)]^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\langle P(s, r), c_1(s) - c_2(r) \rangle = \frac{\langle c_2(r), c_2(r) \rangle - \langle c_1(s), c_1(s) \rangle}{2}$$

olarak detaylı bir şekilde 3. bölümde elde edilmiştir. Bunlara ilaveten $\mathbb{R}^2$ de birim hızlı α –Frenet çatılı uyumlu $\gamma(s)$ eğrisinin sırasıyla konum vektörünü ve konum vektörüyle eğriliği arasındaki bağıntıyı sırasıyla

$$X = X(s) = \left\{ c_1 \cos + c_2 \sin \theta + \left[(\alpha - 1) \int_0^s \varrho^2 \sin \theta s^{\alpha-2} d\theta - \int_s^0 s^{\alpha-1} d\theta \right] \right. \\ \left. + \left[(\alpha - 1) \int_0^s \varrho^2 \cos \theta s^{\alpha-2} d\theta - \int_0^s s^{\alpha-1} d\theta \right] \right\} e_1^\alpha(s) + \{ \varrho[l(s) - s^{\alpha-1}] \} e_2^\alpha(s)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K^\alpha} ((\alpha - 1)s^{\alpha-2} \frac{d\gamma}{ds} + s^{\alpha-1} \frac{d^2\gamma}{ds^2}) + K^\alpha s^{\alpha-1} \frac{d\gamma}{ds} \right) = 0$$

şeklinde elde ettik.

Son olarak, k_γ eğrilikli ve $\{e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s)\}$ α –Frenet çatılı uyumlu eğri olan γ eğrisinin teğet vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi $\beta^*(s)$ olup, $\beta(s)$ nin α –Frenet elemanlarını

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{(s^{\alpha-1} + \lambda')}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\gamma K_\gamma}{\sigma} e_2^\alpha(s) \\ E_2^\alpha(s^*) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \sigma^2} \sqrt{\left[(\alpha - 1)s^{\alpha-2} + \lambda'' - \lambda(K_\gamma)^2 \sigma - (s^{\alpha-1} + \lambda')\sigma' \right]^2 + \left[(\lambda' K_\gamma + K'_\gamma + (s^{\alpha-1} + \lambda')K_\gamma)\sigma - (\lambda K_\gamma)\sigma' \right]^2}$$

elde ettik. Benzer şekilde γ uyumlu eğrisinin normal vektörüne göre kongruent uyumlu eğrisi $\beta(s)$ olup β nın α –Frenet elemanlarını

$$E_1^\alpha(s^*) = \frac{s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma}{\sigma} e_1^\alpha(s) + \frac{\lambda'}{\sigma} e_2^\alpha(s) \\ E_2^\alpha(s^*) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_1^\alpha(s) + \frac{L}{\sqrt{K^2 + L^2}} e_2^\alpha(s)$$

ve eğriliği

$$k_\beta(s^*) = \frac{1}{(s^*)^{1-\alpha} \cdot \sigma^3} \sqrt{\left[((\alpha - 1)s^{\alpha-2} - 2\lambda' K_\gamma - \lambda K'_\gamma) \sigma - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) \sigma' \right]^2 + \left[(\lambda'' \sigma - \lambda' \gamma') - (s^{\alpha-1} - \lambda K_\gamma) K_\gamma \sigma \right]^2}$$

olarak elde ettik.

ÖNERİLER

Kesirli hesap yöntemleri özellikle uyumlu kesirli türev kullanılarak eğriler teorisi için daha önce klasik türevle elde edilen birçok karakterizasyonun temelde geometrik olarak örtüştüğü ama uyumlu türev kullanılarak bazı kısmi farklılıklar gözlemlendiği öngörülebilir. Diferensiyel geometri alanında önemli bir yere sahip olan eğriler teorisi konusunda klasik türev kullanılarak elde edilen birçok çalışma dikkate alındığında bu çalışmadaki metodlar uyumlu türev kullanılarak uygulandığında kayda değer sonuçlar öngörülmektedir. Ancak bu çalışmalar yapılırken $s = (\alpha\tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir α eğrisinin uyumlu birim teğet vektörü ve uyumlu birim normal vektörüne ihtiyaç vardır.

$s = (\alpha\tilde{s})^{\frac{1}{\alpha}}$ yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir α eğrisinin uyumlu birim teğet vektörü ve uyumlu birim normal vektörü tanımlanıp 2-boyutlu Öklid uzayda elde edilen Frenet çatısına benzer şekilde uyumlu türev kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayda ve Lorentz uzayda eğriler teorisi üzerine çeşitli çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] U. Gözütok, H.A. Çoban, Y. Sağiroğlu, Frenet Frame with Respect to Uyumlu Derivative, *Filomat*. 33 (2019) 1541–1550. <https://doi.org/10.2298/FIL1906541G>.
- [2] M. Weilbeer, *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*, (n.d.).
- [3] O.P. Agrawal, Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems, *J. Math. Anal. Appl.* 272 (2002) 368–379. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00180-4](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00180-4).
- [4] T.M. Atanacković, S. Konjik, L. Oparnica, S. Pilipović, Generalized Hamilton’s principle with fractional derivatives, *J. Phys. A Math. Theor.* 43 (2010) 255203. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/25/255203>.
- [5] D. Baleanu, T. Maaraba, F. Jarad, Fractional variational principles with delay, *J. Phys. A Math. Theor.* 41 (2008) 315403. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/31/315403>.
- [6] S. Liu, S.-S. Zhao, al -, J. Peng, G. Zhang, M. Xiang, A. Gjurchinovski, T. Sandev, V. Urumov, Delayed feedback control of fractional-order chaotic systems, *J. Phys. A Math. Theor.* 43 (2010) 445102. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/44/445102>.
- [7] I. Grigorenko, E. Grigorenko, Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 034101. <https://doi.org/10.1103/Physrevlett.91.034101/Figures/4/Medium>.
- [8] V.E. Tarasov, Fractional Generalization of Gradient Systems, *Lett. Math. Phys.* 2005 731. 73 (2005) 49–58. <https://doi.org/10.1007/S11005-005-8444-Z>.
- [9] T. Yajima, H. Nagahama, Geometric Structures of Fractional Dynamical Systems in Non-Riemannian Space: Applications to Mechanical and Electromechanical Systems, *Ann. Phys.* 530 (2018) 1700391. <https://doi.org/10.1002/ANDP.201700391>.
- [10] A Study of Fractional Calculus: Its Definitions and Properties. - ProQuest, (n.d.). <https://www.proquest.com/pagepdf/302745611?accountid=15927> (accessed August 19, 2022).
- [11] B. Ross, A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus, (1975) 1–36. <https://doi.org/10.1007/BFB0067096>.
- [12] D. Baleanu, S.I. Vacaru, Constant curvature coefficients and exact solutions in fractional gravity and geometric mechanics, *Cent. Eur. J. Phys.* 9 (2011) 1267–1279. <https://doi.org/10.2478/S11534-011-0040-5/HTML>.
- [13] D. Baleanu, · Sergiu, I. Vacaru, D. Baleanu, S.I. Vacaru, Fractional almost Kähler–Lagrange geometry, *Nonlinear Dyn.* 2010 644. 64 (2010) 365–373. <https://doi.org/10.1007/S11071-010-9867-3>.
- [14] R.A. El-Nabulsi, Modifications at Large Distances From Fractional and Fractal Arguments, <Http://Dx.Doi.Org/10.1142/S0218348X10004828>. 18 (2011) 185–190. <https://doi.org/10.1142/S0218348X10004828>.
- [15] R. Herrmann, Towards a geometric interpretation of generalized fractional integrals - Erdélyi-Kober type integrals on $\mathbb{R}^N$, as an example, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 17 (2014) 361–370. <https://doi.org/10.2478/S13540-014-0174-4/Machinereadablecitation/Ris>.
- [16] A.I. Journal, K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, Progress in Fractional Differentiation and Applications Fractional Differential Geometry of Curves & Surfaces, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2 (2016) 169. <https://doi.org/10.18576/pfda/020302>.
- [17] A.K. Lazopoulos, K.A. Lazopoulos, Progress in Fractional Differentiation and Applications An

- International Journal Fractional Vector Calculus and Fractional Continuum Mechanics, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2 (2016) 67–86. <https://doi.org/10.18576/pfda/020202>.
- [18] A.I. Journal, K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, Progress in Fractional Differentiation and Applications On the Mathematical Formulation of Fractional Derivatives, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 5 (2019) 261. <https://doi.org/10.18576/pfda/050402>.
- [19] T. Yajima, K. Yamasaki, Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows, *J. Phys. A Math. Theor.* 45 (2012) 065201. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/6/065201>.
- [20] T. Yajima, S. Oiwa, K. Yamasaki, Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret formulas, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 21 (2018) 1493–1505. <https://doi.org/10.1515/FCA-2018-0078/Machinereadablecitation/Ris>.
- [21] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* 264 (2014) 65–70. <https://doi.org/10.1016/J.CAM.2014.01.002>.
- [22] T. Abdeljawad, J. Alzabut, F. Jarad, A generalized Lyapunov-type inequality in the frame of Uyumlu derivatives, *Adv. Differ. Equations* 2017 20171. 2017 (2017) 1–10. <https://doi.org/10.1186/S13662-017-1383-Z>.
- [23] T. Abdeljawad, R.P. Agarwal, J. Alzabut, F. Jarad, A. Özbekler, Lyapunov-type inequalities for mixed non-linear forced differential equations within Uyumlu derivatives, *J. Inequalities Appl.* 2018 (2018) 1–17. <https://doi.org/10.1186/S13660-018-1731-X/Metrics>.
- [24] F. Jarad, E. Uğurlu, T. Abdeljawad, D. Baleanu, On a new class of fractional operators, *Adv. Differ. Equations* 2017 20171. 2017 (2017) 1–16. <https://doi.org/10.1186/S13662-017-1306-Z>.
- [25] T. Abdeljawad, M. AL Horani, R. Khalil, Uyumlu fractional semigroups of operators, *J. Semigr. Theory Appl.* 2015 (2015) Article ID 7. <http://www.scik.org/index.php/jsta/article/view/2410> (accessed August 19, 2022).
- [26] A. Atangana, D. Baleanu, A. Alsaedi, New properties of Uyumlu derivative, *Open Math.* 13 (2015) 889–898. <https://doi.org/10.1515/MATH-2015-0081/Machinereadablecitation/Ris>.
- [27] D.R. Anderson, D.J. Ulness, Newly Defined Uyumlu Derivatives Centered Polygonal Lacunary Functions View project Dynamic Equations on Times Scales View project Newly Defined Uyumlu Derivatives, 10 (2015) 109–137. <http://campus.mst.edu/adsa> (accessed August 19, 2022).
- [28] H. Aminikhah, A.H.R. Sheikhan, H. Rezazadeh, Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with Uyumlu fractional derivatives, *Sci. Iran.* 23 (2016) 1048–1054. <https://doi.org/10.24200/SCI.2016.3873>.
- [29] D.R. Anderson, E. Camrud, D.J. Ulness, On the nature of the Uyumlu derivative and its applications to physics, *J. Fract. Calc. Appl.* 10 (2018) 2090–5858. <https://doi.org/10.48550/arxiv.1810.02005>.
- [30] T. Abdeljawad, On Uyumlu fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* 279 (2015) 57–66. <https://doi.org/10.1016/J.CAM.2014.10.016>.

ÖZGEÇMİŞ

Şeyda ÖZEL

[illegible]

AKADEMİK FAALİYETLER

Makaleler:

1. Ş. Özel, M.A. Kūlahcı, M. Bektaş, The Characterizations of Null Quaternionic Curves in Minkowski 3-Space, Turkish Journal of Science and Technology, 16(2), 261-267.
2. Ş. Özel, M. Bektaş, On the Characterizations of Curves with Modified Orthogonal Frame in $\mathbb{E}^3$, Journal of New Theory, (40), 54-59.

Bildiriler:

1. Ş. Özel, M. Bektaş, Mas 14th International European Conference on Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences.
2. Ş. Özel, M. Bektaş, 2. International Bakü Scientific Researches Conference.
3. Ş. Özel, M. Bektaş, 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, CMES 2022.