



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ELEKTRİK AĞLARI VE BAZI TOPOLOJİK
İNDEKSLERİN İNCELENMESİ

Havva KIRGIZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Kasım-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Havva KIRGIZ tarafından hazırlanan “Elektrik Ağları ve Bazı Topolojik İndekslerin İncelenmesi” adlı tez çalışması 25/11/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

.....

Danışman

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

.....

Üye

Prof. Dr. Aslı KARAKAŞ

.....

Üye

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Sait GEZGİN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Havva KIRGIZ
Tarih: 25.11.2022

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ELEKTRİK AĞLARI VE BAZI TOPOLOJİK İNDEKSLERİN İNCELENMESİ

Havva KIRGIZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2022, 106 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Prof. Dr. Aslı KARAKAŞ
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN

Graf teori birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahiptir. Kimyasal graf teori moleküllerin özelliklerini çeşitli graf parametreleri ile hesaplamayı kolaylaştırırken, fiziksel graf teori ise özellikle karmaşık elektrik devrelerinin özelliklerini inceler.

Kimyasal yapıların graf kullanılarak incelenmesi yakın zamanlarda kimyasal graf teori ile gerçekleşmiştir. Bir topolojik indeks kimyasal bir yapının fiziko-kimyasal özelliklerini, kimyasal tepkime veya biyolojik aktivite ile ilişkisini açıklayan, bu kimyasal yapı ile ilgili sayısal bir ifadedir. Wiener'in (Wiener, 1947) çalışması öncülüğünde farklı özelliklere sahip topolojik indeksler tanımlanmış ve graf parametrelerine bağlı olarak incelemeler yapılmıştır. Bilim insanlarının topolojik indeksler ile ilgili yaptığı en önemli çalışmalar bu indekslerin alt ve üst sınırlarını incelemeye yöneliktir.

Fizik alanında, direnç ve pil bulunan elektrik devreleri ile ilgili problemleri çözmek için genellikle Kirchhoff kanunu kullanılmaktadır. Karmaşık bir elektrik devresi ise bir grafa dönüştürülerek, graf teori aracılığı ile istenilen sonuca kolaylıkla ulaşılabilmektedir. Elektrik devreleri ve graf teori çalışmaları Kirchhoff (1847) tarafından başlatılmıştır. Karmaşık elektrik devreleri ile yapılan çalışmalarda direnç mesafesine (resistance-distance) bağlı özelliklerin incelenmesi ve özellikle Kirchhoff indeksine bağlı çalışmalar büyük önem taşımaktadır.

Bu tez altı ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, graf teorisinin ortaya çıkışı ve graf teori uygulamaları ile ilgili bilgilere örneklerle birlikte yer verilmiştir. İkinci bölümde, ana sonuçlarda yer alacak teorik çalışma için gerekli temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise dört ve beşinci bölümler için graf teorisinin elektrik devrelerinde kullanımı ve topolojik indeksler ile ilgili kaynak araştırmasına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, neredeyse (nearly) tam iki parçalı graflar ile elektrik devreleri arasındaki ilişki incelenerek, elektrik devreleri yardımıyla neredeyse iki parçalı grafların direnç mesafesine dayalı özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca, iki parçalı graflar ile elektrik devreleri arasındaki ilişki incelenerek, elektrik devreleri yardımıyla iki parçalı grafların direnç mesafesine dayalı özellikleri ele alınmıştır. Tezin beşinci bölümünde dereceye bağlı harmonik, Sombor, forgotten ve Randić topolojik indeksleri için yeni bir yöntem kullanılarak, bu topolojik indeksler için yeni ve daha önce bulunan alt ve üst sınırlardan daha iyi olan sınırlar elde edilmiştir. Son bölümde ise, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Alt-üst sınır, direnç mesafesi, dış merkezlilik, elektrik ağları, Kirchhoff indeksi, topolojik indeks.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

INVESTIGATION OF ELECTRIC NETWORKS AND SOME TOPOLOGICAL INDICES

Havva KIRGIZ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Year, 106 Pages

Jury

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Prof. Dr. Aşlı KARAKAŞ

Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Asst. Prof. Dr. Bünyamin ŞAHİN

Graph theory has important applications in many disciplines. While chemical graph theory makes it easy to calculate the properties of molecules with various graph parameters, physical graph theory examines the properties of especially complex electrical circuits.

The study of chemicals using graphs has recently been realized with chemical graph theory. A topological index is a numerical expression of a chemical structure that describes its relationship to many physico-chemical properties, chemical reactions, or biological activities. With Wiener's (Wiener, 1947) work, topological indices with different properties were defined and investigations were made depending on the graph parameters. The most important studies of scientists on topological indices aim to examine the lower and upper limits of these indices.

In physics, Kirchhoff's rules are commonly used to solve problems with electrical circuits with resistors and batteries. Electrical circuits and graph theory studies were initiated by Kirchhoff (1847). In studies with complex electrical circuits, it has great importance to examine the properties depending on the resistance-distance and especially the studies related to the Kirchhoff index.

This thesis consists of six main parts. In the first section, information about the emergence of graph theory and its applications are given with examples. In the second section, the basic definitions, theorems and properties required for the theoretical study to be included in the main results are given. In the third chapter, the source research on the use of graph theory in electrical circuits and topological indices are given for the fourth and fifth chapters. In the fourth section, the relationship between nearly complete bipartite graphs and electrical circuits is examined, and the properties of nearly complete bipartite graphs based on resistance distance are discussed with the help of electrical circuits. Also, the relationship between bipartite graphs and electrical circuits is examined, and the properties of bipartite graphs based on resistance distance are discussed with the help of electrical circuits. In the fifth chapter of the thesis, a new method is used for degree-based harmonic, Sombor, forgotten and Randić topological indices, and new bounds for these topological indices, which are better than the lower and upper bounds found before, are obtained. The final section discusses the results obtained in the thesis with suggestions.

Keywords: Lower-upper bound, resistance-distance, eccentricity, electrical circuits, Kirchhoff index, topological index.

ÖNSÖZ

“Elektrik Ağları ve Bazı Topolojik İndekslerin İncelenmesi” isimli bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN danışmanlığında hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmalarımda öncülük eden, her konuda bilgi birikimini esirgmeden benimle paylaşan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan ve uygulamalarla tezimi anlamlı hale getirmem konusunda beni yönlendiren Prof. Dr. Aslı KARAKAŞ’a ve Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ’e teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarım boyunca her an yanımda olan, beni her zaman destekleyen anneme ve babama; elektrik devreleri ile ilgili sorularımı yanıtsız bırakmayan arkadaşlarıma; bu zorlu süreçte beni her konuda anlayışla karşılayan eşime ve oğluma da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Havva KIRGIZ
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	13
2.1 Elektrik Ağları ve İki Parçalı Graflar ile İlgili Kavramlar	22
2.2 Topolojik İndeksler ile İlgili Kavramlar	32
3. KAYNAK ARAŞTIRMASI	36
3.1 Direnç mesafesi ve Kirchhoff İndeksi.....	36
3.2 Topolojik İndeksler	39
4. ÇARPIMSAL DIŞ MERKEZLİLİK DİRENÇ MESAFESİ İLE İLGİLİ SONUÇLAR.....	43
4.1 Neredeyse Tam İki Parçalı Graflar İçin Çarpımsal Dış Merkezlilik Direnç Mesafesi	43
4.2 İki Parçalı Graflar İçin Çarpımsal Dış Merkezlilik Direnç Mesafesi	65
5. BAZI TOPOLOJİK İNDEKSLER İÇİN SINIRLAR.....	73
5.1. Harmonik ve Randić İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar	74
5.2. Sombor ve Unutulmuş İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar	81
5.3. Dış Merkezliliğe Bağlı Harmonik ve ABC İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar	88
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	95
6.1 Sonuçlar	95
6.2 Öneriler	95
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	104

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1. Euler tarafından çizilen gösterim	1
Şekil 1.2. Ball'un Königsberg köprüsü graf gösterimi	2
Şekil 1.3. Königsberg köprülerinin günümüzdeki yerleri	2
Şekil 1.4. $n = 4$ için ağaçlar	3
Şekil 1.5. Icosian oyunu ve çözümü	4
Şekil 1.6. Francis Galton'un dört renk problemi ile ilgili yazısı	5
Şekil 1.7. Dört renk probleminin graf ile temsili	5
Şekil 1.8. Bir molekülün graf ile gösterimi	6
Şekil 1.9. Sosyal medya kullanıcısı için graf örneği	7
Şekil 1.10. MPM Gen etkileşimi graf yapısı	8
Şekil 1.11. Kurallı yapıdaki Türkçe cümlelerde graf uygulaması örneği	9
Şekil 1.12. Kuralsız yapıda özne ile biten cümleler için örnek graf	10
Şekil 2.1. Bağlantısız (G_1) ve bağlantılı (G_2) graflar	14
Şekil 2.2. Komşu köşeler	14
Şekil 2.3. Komşu kenarlar	15
Şekil 2.4. 0-regüler, 1-regüler ve 2-regüler graf örnekleri	16
Şekil 2.5. K_5 tam grafi	17
Şekil 2.6. İki parçalı graf	17
Şekil 2.7. $K_{4,3}$ tam iki parçalı graf	18
Şekil 2.8. G grafi	19
Şekil 2.9. G grafi	19
Şekil 2.10. G grafi	20
Şekil 2.11. $Y - \Delta$ ve $\Delta - Y$ eşdeğer dönüşümü	24
Şekil 2.12. Elektrik devresinin graf gösterimi	25
Şekil 2.13. P_5 yol grafi	32
Şekil 2.14. $K_{3,2}$ grafi ve köşelerinin dereceleri	33
Şekil 4.1. $G^-(m+1, N-m-1, 1)$ için sıkıştırılmış graf	46
Şekil 4.2. $G^-(m+1, N-m-1, 1)$ için sıkıştırılmış grafın elektrik devresi ile gösterimi ..	46

Şekil 4.3. $B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ grafi	50
Şekil 4.4. $r_G(a_1, d_1)$ için sıkıştırılmış graf	50
Şekil 4.5. $\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2 \setminus \{b_1\}} r_G(b_i, b_j)$ için sıkıştırılmış graf	51
Şekil 4.6. Sıkıştırılmış grafin elektrik devresi ile gösterimi	52
Şekil 4.7. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü	52
Şekil 4.8. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi	53
Şekil 4.9. $\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)$ için sıkıştırılmış graf	54
Şekil 4.10. $\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)$ için sıkıştırılmış grafin elektrik devresi ile gösterimi	55
Şekil 4.11. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü	55
Şekil 4.12. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi	56
Şekil 4.13. $B_3^-\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ için sıkıştırılmış graf	57
Şekil 4.14. $B_3^-\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ için sıkıştırılmış grafin elektrik devresi ile gösterimi	58
Şekil 4.15. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi	59
Şekil 4.16. $B_2(1, K, N-K-2, 1)$ grafi	66
Şekil 4.17. $B_2^-(1, K, N-K-2, 1)$ grafi	67
Şekil 4.18. $B_2^-(1, K, N-K-2, 1)$ için sıkıştırılmış grafin elektrik devresi ile gösterimi	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

G	Graf
$E(G)$	G grafinın kenar kümesi
$V(G)$	G grafinın köşe kümesi
$A(G)$	G grafinın komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafinın derece matrisi
$\Delta(G)$	G grafinın maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafinın minimum derecesi
$F(G)$	G grafinın unutulmuş (forgotten) indeksi
$H(G)$	G grafinın harmonik indeksi
$L(G)$	G grafinın Laplacian matrisi
$R(G)$	G grafinın Randic indeksi
$S(G)$	G grafinın Sombor indeksi
$ABC(G)$	G grafinın atom-bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity indeksi)
$H_{\varepsilon}(G)$	G grafinın dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı harmonik indeksi
$ABC_{\varepsilon}(G)$	G grafinın dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı atom bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksi
$d(.)$	Bir köşenin derecesi
$\varepsilon(.)$	Bir köşenin dış merkezliliği (eccentricity)
γ	Baskınlık sayısı (domination number)
μ_i	Laplacian matrisin özdeğerleri
K_n	Tam graf
$G_{m,n}$	İki parçalı graf

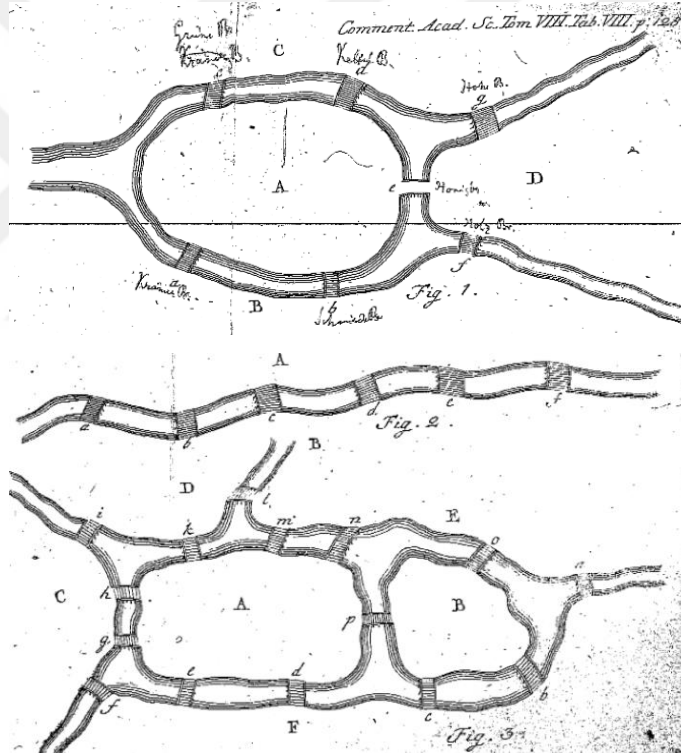
SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)

Simgeler

δ_n	En küçük asılı olmayan (non-pendant) köşe derecesi
p	Asılı (pendant) köşe sayısı
$C_{1,x}$	Uç köşelerinin derecesi 1 ve x olan kenarların sayısı
$\xi_r^*(G)$	G grafinin çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance)
$Y-\Delta$	Yıldız-delta eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation)
$\Delta-Y$	Delta-yıldız eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation)
$\xi^r(G)$	G grafinin dış merkezlilik toplam direnç mesafesi
B_D	Çapı D olan iki parçalı graf
$r_G(.,.)$	İki köşe arasındaki direnç mesafesi (resistance distance)
$Kf(G)$	G grafinin Kirchhoff indeksi
$G(x, y, p)$	Neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı graf
$G(x, p)$	Hemen hemen tam (almost complete) iki parçalı graf
$N(.)$	Bir köşenin komşuluk kümesi

1. GİRİŞ

Rusya'nın Kaliningrad (Königsberg) kentinde yaşayan insanlar, şehrin çevresinde bulunan yedi köprünün her birinden yalnızca bir kez geçecek bir rota oluşturmaya çalıştılar. Denemeleri başarısız olduğu için neredeyse herkes bu görevin imkansız olduğuna inanıyordu. 1736 yılında zamanın önde gelen matematikçilerinden Leonhard Euler bunu ispatlayana kadar kimse bu teoremin doğruluğunu gösteremedi. Euler'in ele aldığı problem "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" isimli makalesinde "Nehrin dallara bölünmesi, sıralanışı ve köprü sayısı ne olursa olsun, her köprüyü tam bir kez geçmek mümkün müdür?" şeklinde ifade edilmektedir (Euler, 1741). Aynı makalede problem için çizdiği gösterim ise Şekil 1.1'de yer almaktadır.



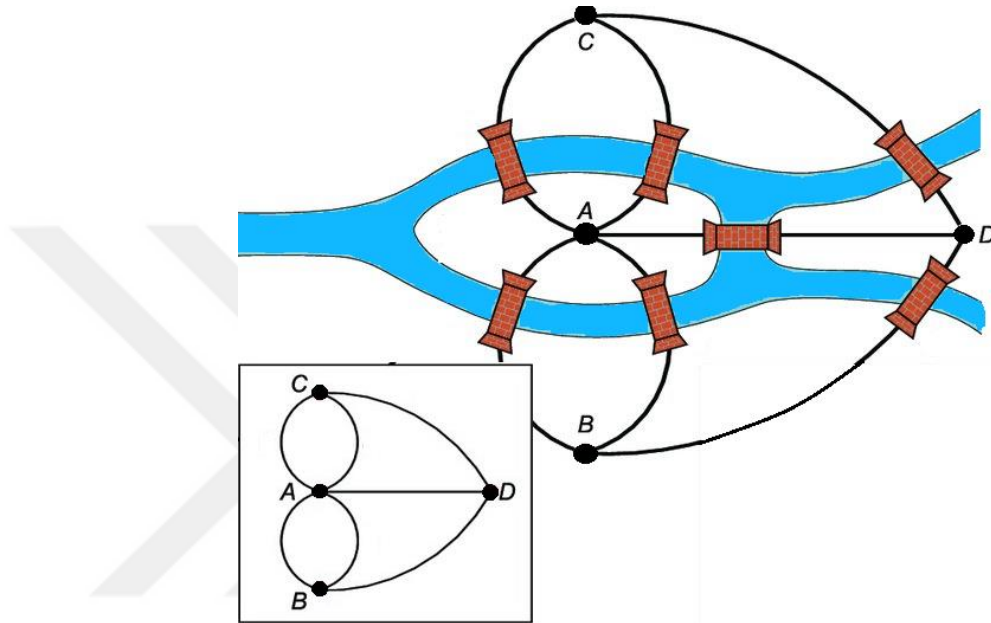
Şekil 1.1. Euler tarafından çizilen gösterim

Euler'e göre her köprüden yalnızca bir kere geçerek kara parçaları arasında bir seyahatin mümkün olmadığı aşağıda verilen kurallar ile belirlenebilir (Euler, 1741):

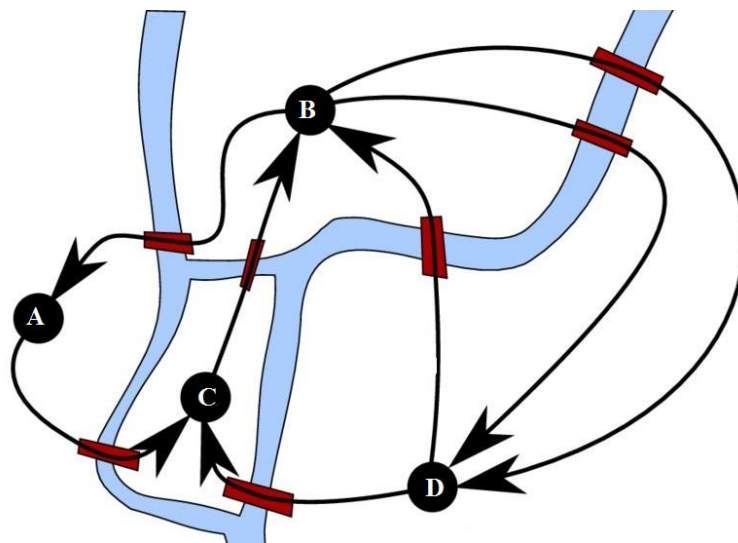
- İki den fazla kara parçasında tek sayıda köprü bulunuyorsa bu tur yapılamaz.

- Köprü sayısı tüm bölgeler için çift iken sadece iki bölge için tek ise, bu tur tek olan bölgelerden biriyle başlamak şartı ile yapılabilir.
- Eğer tek sayıda köprüye sahip hiç kara parçası yoksa, bu tur istenilen noktadan başlanarak yapılabilir.

Euler'den yaklaşık 150 yıl sonra W. W. Rouse Ball (Ball, 1892) Königsberg problemini ilk kez bir graf olarak göstermiştir (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Ball'un Königsberg köprüsü graf gösterimi

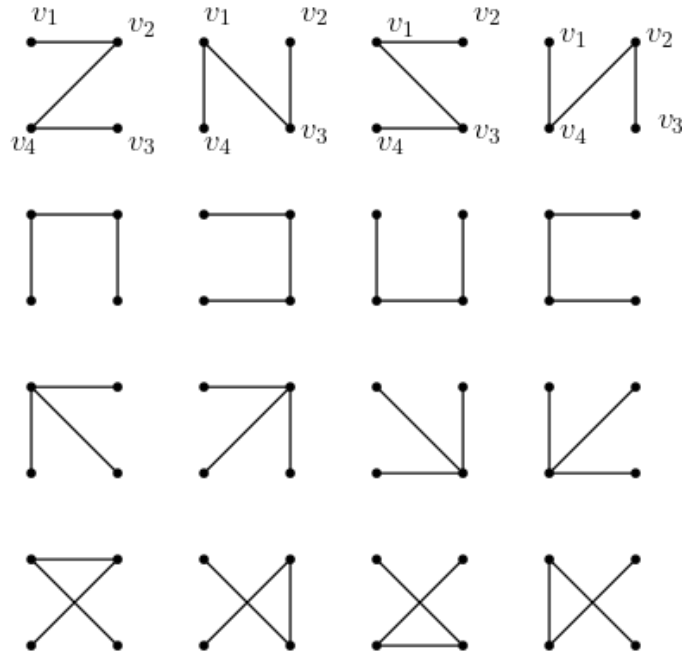


Şekil 1.3. Königsberg köprülerinin günümüzdeki yerleri

Günümüzde Königsberg köprüleri yeniden tasarlanmıştır. Şekil 1.3'de B noktası ile gösterilen Kneiphof adası ve C alanı Pregel nehrinin iki farklı kolu tarafından çevrelenmiş olan kısımlardır. Bu durumda her kırmızı köprüden yalnızca bir kere geçerek bir rota oluşturmak mümkündür. C ve B köşelerinin dereceleri tek sayı olduğu için burada bir Euler yolu bulunmaktadır. Yani, Şekil 1.3'deki harflendirmeler ve yönler takip edilerek, $BDBDCBAC$ şeklinde oluşturulan rota ile her bir köprüden sadece bir kere geçilir.

Königsberg köprü problemi ile başlayan graf teori çalışmaları, ağaçların disiplinlerarası problemlerde kullanılmasıyla yaygınlaşmıştır. 1847 yılında G. R. Kirchhoff elektrik ağlarının uygulamaları için ağaç yapılarını kullandı (Kirchhoff, 1847). Kirchhoff'un yaptığı çalışmalar ağaç yapısındaki graflar ile ilgili kavramların ve teoremlerin oluşmasında büyük rol oynadı.

Kirchhoff'un çalışmasından 10 yıl sonra, A. Cayley, kimyasal organik izomerlerin sayılması ve C_nH_{2n+2} yapısındaki doymuş hidrokarbonların izomerlerinin tespit edilmesi için ağaç yapısındaki grafları kullandı (Cayley, 1857). Cayley'in ağaçları ele alarak yaptığı çalışmalar graf teorisinde sayma tekniklerinin başlangıcını oluşturdu. Carl Wilhelm Borchardt tarafından 1860'ta belirli sayıda köşeye sahip ağaçları saymak için bulunan bir formülü genişletmiştir (Borchardt, 1860).



Şekil 1.4. $n = 4$ için ağaçlar

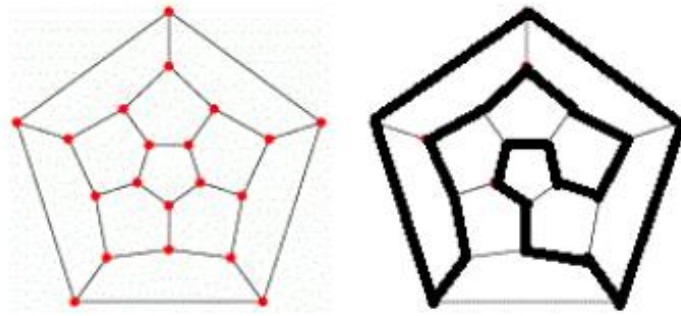
Cayley'in çalışmalarından sonra Sylvester ilk kez kimyasal graf kavramından bahsetmiştir (Sylvester, 1878). Bu çalışma graf isminin kullanılması ve kimyasal graf teorisi için başlangıç olarak kabul edilmektedir.

Cayley teoremine göre, n tane köşeye sahip, n^{n-2} tane etiketlenirilmiş ağaç bulunabilmektedir (Cayley, 1889). Örneğin, $n = 4$ olmak üzere Cayley teoremine göre $4^{4-2} = 16$ tane etiketlenirilmiş ağaç elde edilebilmektedir. Şekil 1.4'de de görüleceği üzere her bir satırdaki graflar birinci grafın rotasyonudur. Basit olarak Cayley formülünü

$$|T_n| = n^{n-2}$$

olarak ifade edebiliriz. 2 köşeye sahip sadece bir tane etiketlenirilmiş ağaç ve 3 köşeye sahip 3 etiketlenirilmiş ağaç olduğu aşıkardır.

Graf teori literatüründeki önemli gelişmelerden biri olarak bilinen *icosian* oyunu 1857 yılında William Rowan Hamilton tarafından bulunmuştur (Şekil 1.5). Hamilton oyunu bir yirmi yüzlüden (icosahedron) yola çıkılarak bulunduğu için bu şekilde adlandırılmıştır (Sowell, 2001).



Şekil 1.5. Icosian oyunu ve çözümü

Halbuki Hamilton yirmi yüzlünün duali olan 20 köşeli, 30 kenarlı on iki yüzlüyü (dodecahedron) kullanmıştır. Icosian oyununda amaç bir noktadan başlayarak bütün noktalardan sadece bir kez geçerek tekrar başladığın noktaya dönmektir. Bu oyundaki gibi turlara Hamilton turu adı verilmektedir.

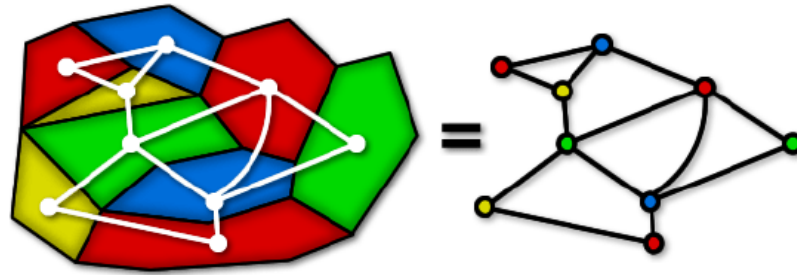
Graf teorisinin meşhur problemlerinden biri olan *Dört Renk Problemi* Francis Guthrie (1852) tarafından ortaya çıkarılmıştır (Şekil 1.6). Graf teorisinin ilk problemlerinin birçoğu gibi, dört renk probleminin yapısı da bulmaca gibiydi. Bu

problemde amaç, bir haritayı sadece dört renk kullanarak, iki sınır bölgesi aynı renk olmayacak şekilde renklendirmektir.

Tinting Maps.—In tinting maps, it is desirable for the sake of distinctness to use as few colours as possible, and at the same time no two conterminous divisions ought to be tinted the same. Now, I have found by experience that *four* colours are necessary and sufficient for this purpose,—but I cannot prove that this is the case, unless the whole number of divisions does not exceed five. I should like to see (or know where I can find) a general proof of this apparently simple proposition, which I am surprised never to have met with in any mathematical work. F. G.

Şekil 1.6. Francis Guthrie'nin dört renk problemi ile ilgili yazısı

Bu problemin graf teori ile ilişkisini göstermek için haritadaki bölgeler köşelerle gösterilebilir (Şekil 1.7).



Şekil 1.7. Dört renk probleminin graf ile temsili

1879 yılında Alfred Kempe dört renk teoremi için bir ispat yayınladı (Steen, 1999). Kempe'nin yöntemi dört renk teoreminin gerçek ispatına oldukça yakın olsa da hatalıydı. 1890 yılında Heawood tarafından beş renk teoremi ve ispatı yayınlandı. Bir haritanın en fazla beş renk ile renklendirilebileceğini ispatlamak için yine Kempe'nin yöntemini kullanmıştır. 1891 yılında Peterson, 1904 yılında Weinecke, 1912 yılında Veblen, 1922 yılında Franklin, 1926 yılında Reynolds, 1936 yılında König, 1940 yılında Winn, 1970 yılında Ore ve Stemple dört renk probleminin ispatı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. 1976 yılında Heesch'in bulduğu yöntemden sonra, problemin ilk geçerli ispatı Appel ve Haken (1978) tarafından yayınlanmıştır (Wilson, 2013). Bu ispat ilk kez bilgisayar aracılığı ile yapılan bir ispattı. Bu nedenle bilim insanları arasında ispatın doğruluğu konusunda bir tartışmaya neden olmuştu. 1997 yılında dört renk problemi

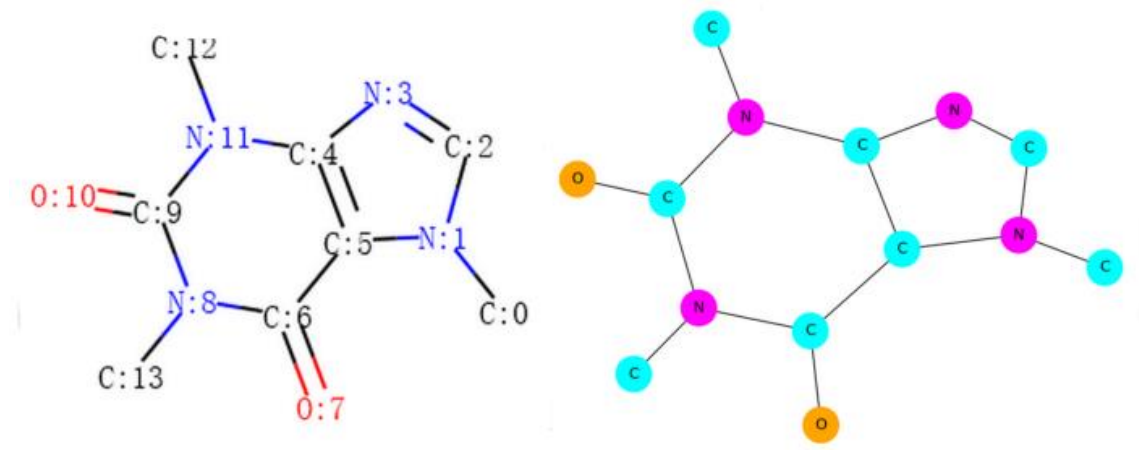
için yayınlanan yeni ispatta da yine bilgisayar ile hesaplamalar yapılmıştır (Robertson ve ark., 1997).

Graf teori ile ilgili ilk kitap olan “*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*” 1936 yılında Denes König tarafından yayınlandı (König, 1936).

Matematik alanında çalışan bilim insanları her ne kadar graf yapılarının teorik özellikleri ile ilgilenseler de aslında teorik özelliklerin gündelik hayattaki bir problemi çözmeye yönelik olduğu; her bir grafın da söz konusu problemin matematiksel modellemesi olduğu ve teorik olarak bulunmuş sonuçların bu problemin çözümünde kullanıldığı bilinmektedir.

Matematiksel anlamda karmaşık olarak görünen graf yapıları yaygın olarak bilgisayar bilimlerinde ağ yapıları için kullanılmıştır. Gündelik hayat problemlerini içeren temel bilimler (fizik, kimya, biyoloji) graf yapılarının uygulandığı alanlar olarak bilinmektedir. Kimyasal graf teori, klasik graf teoriiyi kimyasal maddelere ve olaylara uygulayan matematiksel kimyanın bir alt alanıdır:

- *moleküler yapılarda* grafın köşe noktaları atomları, kenarlar bağları ve ağırlıklı kenarlar çift bağları temsil eder (Şekil 1.8),
- *polimerlerde* köşe noktalar yapı taşlarını ve kenarlar bağlantıları temsil eder,
- *kinetikte* köşe noktalar ara maddeleri, kenarlar yolları temsil eder.



Şekil 1.8. Bir molekülün graf ile gösterimi

Yukarıda bahsedilen konu başlıkları dışında aromatik bileşikler, orbital ve elektronları içeren alanlar, nükleer manyetik rezonans (NMR) spektroskopisi analizi, kristaller, reaksiyon haritalama gibi konularda da graf teori uygulamalarından

yararlanılmaktadır (Bonchev, 1991; Dias, 1993; Trinajstić, 2018; Wagner ve Wang, 2018). Arthur Cayley 100 yıl önce organik moleküllerin yapılarını temsil etmek için graf ağaç yapılarını kullanmış olsa da, kimyasal bileşiklerin karakterizasyonu ve tanımlanması için teorik graf teknikleri yakın zamanlarda kullanılmaya başlanmıştır Deo (2017).

Graf teori bilgisayar biliminde de önemli bir yere sahiptir:

- *Ağ yapıları* dünya üzerindeki doğayı temsil eder. İletişim ağları devasa graflardan meydana gelir. Graf yapısının matematiksel temsili (matris gösterimleri) iletişim ağlarının veri kümelerine etki eder. Verilerin incelenmesi için görselleştirilmesini ve anlaşılmasını sağlar.
- *Veri madenciliğinde* kullanılan graf yapıları, verilerin ilişkisel özelliklerini temsil eder. Veri madenciliğinde varsayıma dayalı beş yaklaşım vardır. Makine öğrenmesi alanında çok yaygın olarak kullanılan izomorfizm, graf değişmezleri, madencilik ölçümü graf tabanlı veri madenciliği yaklaşımları olarak bilinmektedir.
- *Web tasarımı*nda; web sayfaları köşelerle, köprüler kenarlarla temsil edilir. Böylece web tasarımında çözülmesi gereken problem bir graf haline dönüşür. Grafların bu konuda başka bir uygulaması da web sitesi topluluğudur. Bu graf, bir tam graf ifade etmektedir.

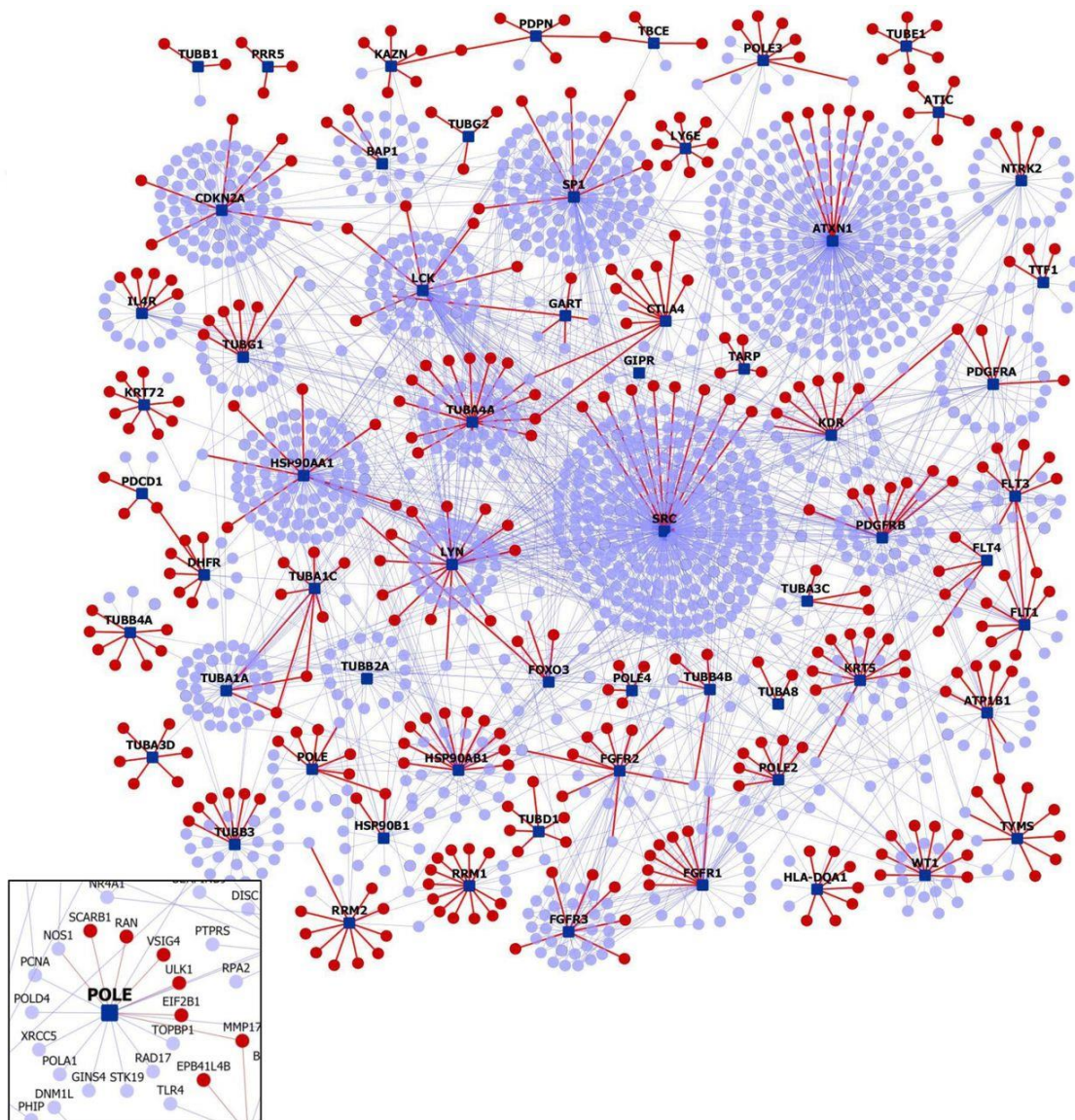


Şekil 1.9. Sosyal medya kullanıcıları için graf örneği

Sosyal medya platformlarından elde edilen veriler ile graf ağları oluşturulabilmektedir (Şekil 1.9). Bunun için kişiler köşe noktaları, kişilerin birbirini

takip etmeleri kenarlar olarak ele alınmaktadır. Köşe noktaları beğeni, paylaşım, yorum ve etiketleme olan grafları oluşturmak da mümkündür (Chakraborty ve ark., 2018).

Astronomi ve astrofizik alanlarında da graf teori uygulamaları yapılmaktadır. Uzaydaki her bir noktanın farklı dağılımları özel bir ağ yapısı (minimum spanning tree-MST) ile ilgilidir (Gower ve Ross, 1969; Zahn, 1971). Buradaki veriler graf ile ilişkilidir: galaksiler köşeleri, galaksileri bağlayan düz çizgiler kenarları ve galaksiler arası uzaklıklar da kenar ağırlıklarını oluşturur (Barrow ve ark., 1985).

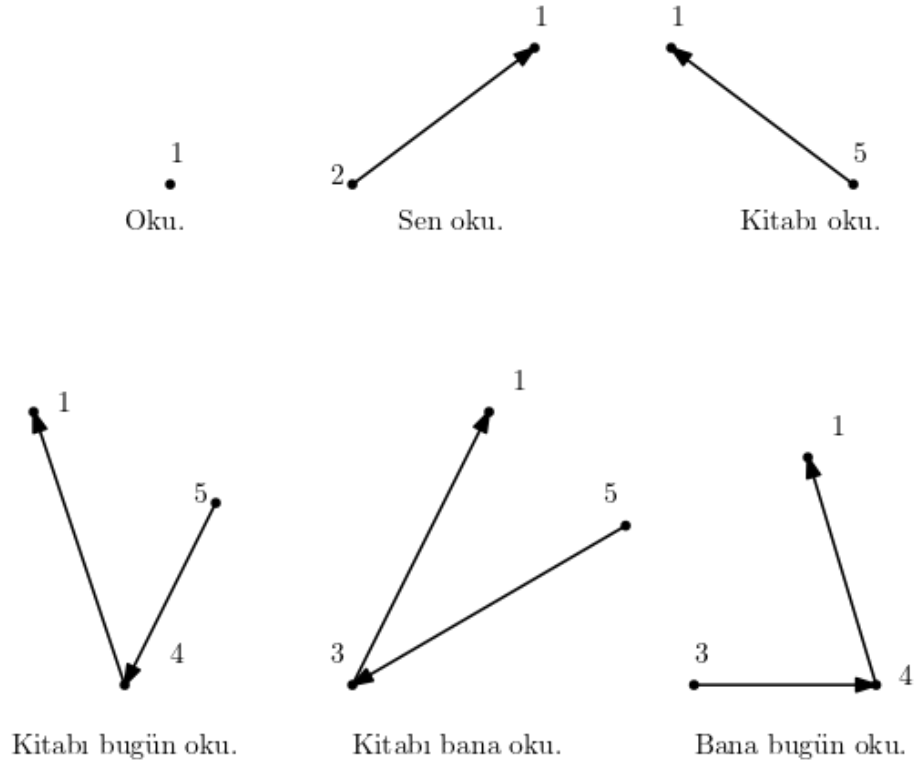


Şekil 1.10. MPM Gen etkileşimi graf yapısı

Biyoloji ve tıp alanlarında, graf teori uygulamaları arasında uygun ilaç belirlenmesi, bir proteinin veya genin işlevinin belirlenmesi, çeşitli hastalıkların tedavisi için etkili stratejiler tasarlanması veya hastalıkların erken teşhisinin sağlanması yer alır. Protein-protein etkileşimi (PPI) ağları, biyokimyasal ağlar, transkripsiyonel düzenleyici ağları, sinyal iletimi veya metabolik ağlar, salgın hastalıklar grafları ile temsil edilebilmektedir. Örneğin; Şekil 1.10'da, Malignant pleural mesothelioma (MPM) isimli kanser türü ile ilişkili genler koyu mavi kare şekilli köşelerle; bu genlerle etkileşimde bulunan yeni tespit edilmiş genler kırmızı dairesel köşelerle ve etkileşimi bilinen genler ise açık mavi dairesel köşelerle gösterilmiştir. Örneğe benzer şekilde biyoloji alanında bio-moleküler ağların modellenmesi ile büyük bir ağıdaki önemli genleri ya da proteinleri tanımlamak köşeler kullanılır. Burada köşeler proteinleri ya da genleri temsil eder.

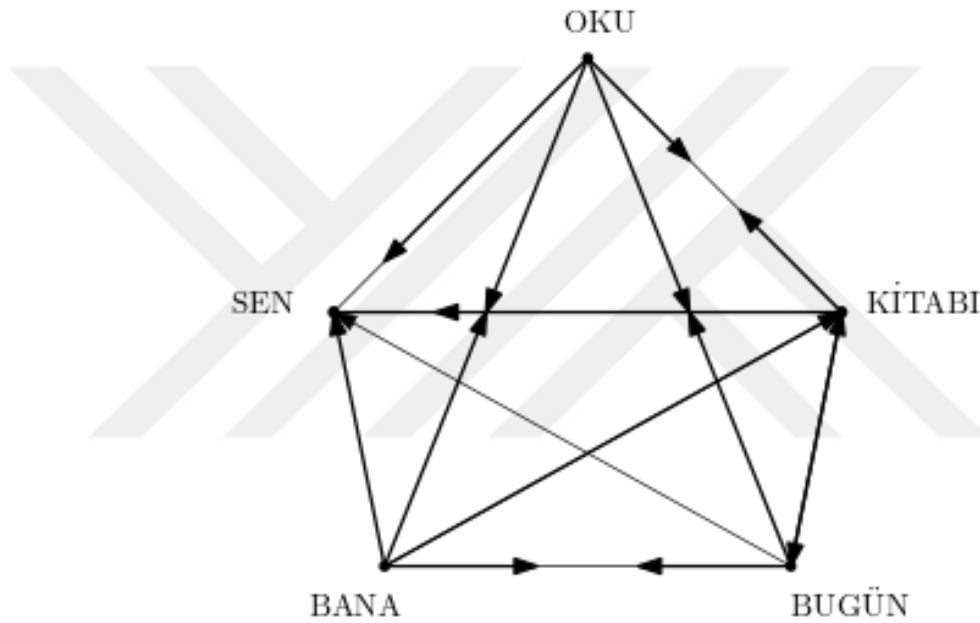
Graf teori uygulamaları son yıllarda dilbilimde de yer almaktadır:

- *Kurallı yapıda* olan dillerin öğretilmesi için graf teoriden yararlanılmaktadır (Şekil 1.11). Türkçe'de kurallı bir dil olduğu için bu konu ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Graf yapısı oluştururken ağırlıklı köşelerden yararlanılmaktadır. Yüklem (1), Özne (2), Dolaylı Tümleç (3), Zarf tümleci (4) ve Nesne (5) ifade etmektedir (Mete, 2015)



Şekil 1.11. Kurallı yapıdaki Türkçe cümlelerde graf uygulaması örneği

- *Kuralsız (devrik) yapıda* olan cümleler de graflar ile temsil edilebilmektedir. Devrik cümleler nesne, özne, zarf ve dolaylı tümleç ile biten cümleler olarak sınıflandırılarak incelenmektedir (Şekil 1.12). Bu yöntem Türkçe öğretimini görselleştirmek için kullanılmaktadır (Ceylan ve Filiz, 2018).
- *Kavram haritalarında* graf teorisinin matrissel gösteriminden faydalanılmaktadır. Böylece kavram haritası oluştururken kolaylık sağlanmaktadır. Kavramlar köşe noktalarını ve kavramlar arasındaki ilişkiler de kenarları temsil eder. Kavram haritaları, graf yapısı ile matrissel olarak gösterilir (Uyangör ve Devrim, 2005).



Şekil 1.12. Kuralsız yapıda özne ile biten cümleler için örnek graf

Yukarıda belirtilen graf uygulamalarının yanı sıra ağ yapısı oluşturan tüm veri setleri için graf yapıları kullanılabilir. Müzeler için kişiye özel optimum gezi rotasının oluşturulması, öğrenci sınav sonuçlarında, seçimlerde, altyapı çalışmalarında graf örneklerine rastlamak mümkündür.

Elektrik mühendisliği ve fizik uygulamalarında graf teorisine olan ilginin son zamanlarda artmasının nedenlerinden biri, graf teorisinin moleküler fiziğin yanı sıra elektrik devrelerinin (ağlarının) analizi ve tasarımına uygulanmasıdır. Bir elektrik devresinin davranışını tahmin etmek için graf teorisini kullanma fikri, 1847'de G. Kirchhoff ile ortaya çıktı Kirchhoff (1847) ve 1892'de J. C. Maxwell tarafından

geliştirildi (Maxwell, 1892). Sonrasında W. S. Percival (Percival, 1937), Kirchhoff ve Maxwell'in yöntemlerini karmaşık yapılara sahip ağlara genişlettiğinde, elektrik ağlarının graf yapıları ile analizinde bir dönüm noktası elde edildi. Günümüzde karmaşık elektrik devrelerinin graf teorisi ile analizi için bilgisayar programları kullanılmaktadır (Calahan, 1972). Elektrik devreleri dirençlerine göre seri, paralel ve karışık bağlı olmak üzere üç tipe ayrılır. Bir grafın elektrik devresi ile temsil edilebilir. Aynı şekilde bir elektrik devresi de graf haline dönüştürülebilir. Grafın yönü devredeki akım akışını ve kenarlar da dirençler arasındaki seri ya da paralel bağlantıları ifade eder (Chen, 2012). Bu tez çalışmasında da graf teorisinin elektrik ağlarına uygulamaları üzerine yeni yöntemler ile sonuçlar elde edilmiştir.

Moleküler tanımlayıcı olarak da adlandırılan topolojik indeksler, moleküler yapıları modelleyen herhangi bir graf için uygulanabilen matematiksel bir formüllerdir. Topolojik indeksler aracılığı ile matematiksel değerleri analiz etmek ve bir molekülün bazı fiziko-kimyasal özelliklerini detaylı olarak araştırmak mümkündür. Bu sayede, pahalı ve zaman alıcı laboratuvar deneylerinin yerine matematiksel olarak sonuçlar elde edilmektedir. Bu kapsamda, tez çalışmasında harmonik, Randić, Sombor ve forgotten topolojik indeksleri için yeni bir metot kullanılarak alt ve üst sınırlar verilmiştir. Bulunan yeni sınırlar daha önce bulunmuş sınırlar ile karşılaştırılmıştır. Yeni sınırların daha öncekilerden daha iyi olduğu görülmüştür.

Tez çalışmasının sonraki bölümleri aşağıdaki şekilde hazırlanmıştır:

Tezin ikinci bölümünde graflar, elektrik ağları ve topolojik indeksler ile ilgili temel tanım ve teoremler bulunmaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde neredeyse tam iki parçalı graflar ve iki parçalı grafların elektrik ağları ile temsil edilmesi ve graf teori ile uygulamaları ile tezde alt ve üst sınırları araştırılan topolojik indeksler ile ilgili literatür taraması yer almaktadır.

Tezin dördüncü bölümünde çarpımsal dış merkezliliğe (multiplicative eccentricity) bağlı sonuçlar elde edilmiştir. Neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı grafların çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafeleri (multiplicative eccentricity resistance distance) ile ilgili çalışmalar ve neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı grafların elektrik ağları vasıtasıyla gösterimleri yer almaktadır. Ayrıca baskınlık sayısına (domination number) göre sınıflandırılan iki parçalı graflarda çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) ile ilgili sonuçlar sunulmuştur.

Tezin beşinci bölümünde integraller için karşılaştırma teoremi (comparison theorem for integrals) kullanılarak önerilen yeni yöntemle bazı topolojik indeksler için yeni alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Bulunan yeni sınırların daha önceki sınırlardan daha iyi olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise tez kapsamında elde edilen sonuçlar ve gelecekte yapılabilecek muhtemel çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Tez çalışmasının bu bölümünde ana sonuçlarda kullanılacak olan temel graf kavramları verilmiştir.

Tanım 2.1. $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ köşe kümesi ve köşe kümesinin elemanlarını birbirine bağlayan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kenar kümesinden oluşan yapıya **graf** denir ve $G = (V(G), E(G))$ şeklinde gösterilir (Wilson, 1979).

Tanım 2.2. G_1 ve G_2 graflarının köşe kümeleri sırasıyla V_1 ve V_2 ; kenar kümeleri de sırasıyla E_1 ve E_2 olsun. Köşe kümesi $V_1 \cup V_2$ ve kenar kümesi $E_1 \cup E_2$ olan $G_3 = G_1 \cup G_2$ grafi, G_1 ve G_2 graflarının **birleşimi** (union) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.3. G_1 ve G_2 graflarının köşe ve kenar kümeleri sırasıyla V_1 ve V_2 ; E_1 ve E_2 olsun. Eğer bu iki grafın hiçbir ortak köşesi yoksa **ayrık graflar** denir (Wilson, 1979).

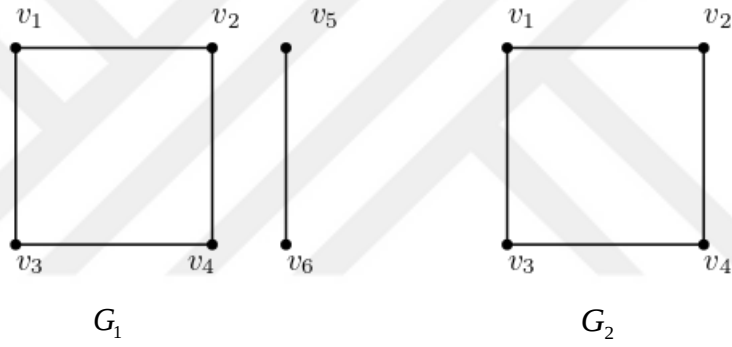
Tanım 2.4. G_1 ve G_2 graflarının köşe kümeleri sırasıyla V_1 ve V_2 ; kenar kümeleri de sırasıyla E_1 ve E_2 olsun. $V_1 \cap V_2$ köşe kümesine ve $E_1 \cap E_2$ kenar kümesine sahip olan $G_3 = G_1 \cap G_2$ grafi, G_1 ve G_2 graflarının **kesişimi** (intersection) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.5. $S(G)$, G grafının köşe kümesinin bir alt kümesi olsun. $G[V(G) \setminus S(G)]$ kümesi graftan $S(G)$ kümesinin silinmesi ile elde edilen kümedir ve $G - S(G)$ olarak gösterilir. Eğer $S(G) = \{v_1\}$ olacak şekilde tek elemana sahipse, $G - S(G)$ yerine $G - v_1$ kullanılır. Bu işleme G grafindan **köşe silme** (deletion of vertex) denir. Köşe çıkarma işlemine benzer şekilde bir graftan kenar(ları) da çıkarılabilir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

Tanım 2.6. n tane köşeye sahip G grafının köşeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ gibi bir etikete sahipse, bu grafa **etiketlendirilmiş** (labeled) graf denir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

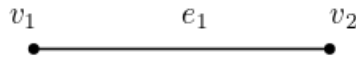
Tanım 2.7. G grafının köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olsun. Köşelerin $W : v_1 v_2 \dots v_m$ şeklinde oluşturduğu diziye G de bir **yürüme** (walk) denir. W nin başlangıç köşesi v_1 ve bitiş köşesi de v_m dir. G grafının aynı köşesinde başlayıp aynı köşesinde biten yürümeye **kapalı yürüme** (closed walk); ilk ve son köşeleri hariç tüm köşeleri farklı olan kapalı olan yürümeye ise **devir** (cycle) denir. İlk ve son köşeleri hariç bütün köşeleri farklı olan yürümeye ise **yol** (path) denir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

Tanım 2.8. G grafi iki grafın birleşimi olarak yazılabiliyorsa **bağlantısızdır** (disconnected); iki grafın birleşimi olarak yazılamıyorsa ya da tüm $v_i, v_j \in V(G)$ köşeleri arasında bir yol (path) varsa **bağlantılıdır** (connected) denir (Wilson, 1979).



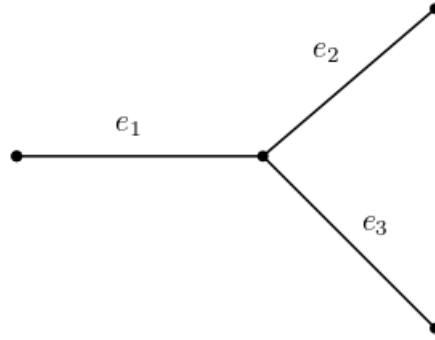
Şekil 2.1. Bağlantısız (G_1) ve bağlantılı (G_2) graflar

Tanım 2.9. Herhangi iki $v_1, v_2 \in V(G)$ köşe çiftini bağlayan bir kenar varsa bu iki köşe **komşudur** (adjacent) denir ve $v_1 \sim v_2$ şeklinde gösterilir .



Şekil 2.2. Komşu köşeler

$E(G)$ kenar kümesinin elemanları en az bir ortak köşeye sahipse **komşudur** denir (Wilson, 1979).



Şekil 2.3. Komşu kenarlar

Tanım 2.10. G grafının bir köşesi kendisi ile komşu ise bu kenara **ilmek** (loop) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.11. G grafi ilmek (loop) içermiyorsa ve graftaki aynı iki köşe birbirine birden fazla kenar ile bağlanmıyorsa, bu grafa **basit graf** (simple graph) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.12. G grafının iki köşesi arasında birden fazla kenar varsa; v_i köşesini yine kendisine bağlayan bir kenar varsa G grafi **çoklu graf** (multi graph) olarak adlandırılır (Wilson, 1979).

Bu tez çalışmasında sadece basit graflar göz önüne alınmıştır.

Tanım 2.13. Sonlu sayıda köşeye sahip grafa **sonlu graf** denir. Sonlu olmayan graf sonsuz graftır (Wilson, 1979).

Tanım 2.14. Herhangi bir $v_1 \in V(G)$ köşesinin **komşuluk kümesi**

$$N_G(v_1) = \{v_2 \in V(G) : v_1v_2 \in G\}$$

olarak tanımlanır. v_1 köşesinin **derecesi** (degree) ise komşularının sayısıdır, yani

$$d_1 = d(v_1) = |N_G(v_1)|$$

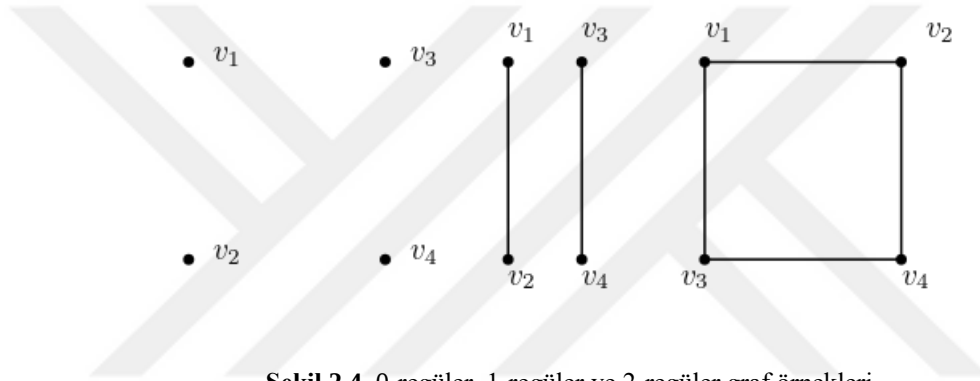
dir. v_1 köşesinde bir ilmek var ise derece hesaplanırken iki kere sayılır (Wilson, 1979).

Tanım 2.15. G grafında derecesi 0 olan bir köşe varsa, bu köşeye **izole köşe** (isolated vertex) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.16. G grafında derecesi 1 olan köşe varsa, bu köşeye **ayrık köşe** (pendant vertex) denir (Wilson, 1979).

Tanım 2.17. G grafının köşelerinin derecelerinden oluşan diziye **derece dizisi** (degree sequence) denir. Derece dizisi köşe sırasına göre oluşturulduğu için artan ya da azalan herhangi bir dizi ile benzer değildir (Wilson, 1979).

Tanım 2.18. G grafının köşelerinin derecelerinin hepsi birbirine eşitse, G grafına **re-güler** (regular) denir. $v_i \in V(G)$ olmak üzere, $d(v_i) = r$ ise G grafı r -regülerdir (Wilson, 1979).



Şekil 2.4. 0-regüler, 1-regüler ve 2-regüler graf örnekleri

Tanım 2.19. G grafının **minimum** ve **maksimum** dereceleri

$$\delta(G) = \min \{d(v) : v \in G\} \text{ ve } \Delta(G) = \max \{d(v) : v \in G\}$$

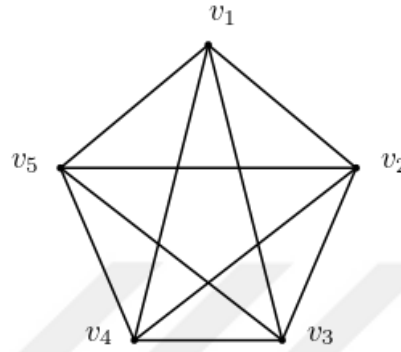
olarak tanımlanır (Wilson, 1979).

Tanım 2.20. G grafının köşe kümesi $V(G)$ olsun. Eğer $v_1 \in V(G) \setminus S(G)$ koşulunu sağlayan tüm köşeler $v_2 \in S(G)$ olacak şekilde bir komşuya sahipse, $S(G) \subseteq V(G)$ kümesine G grafının **baskınlık kümesi** (dominating set) denir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

Tanım 2.21. G grafının kardinalitesi minimum olan baskınlık kümesi γ -**kümesi** olarak adlandırılır (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

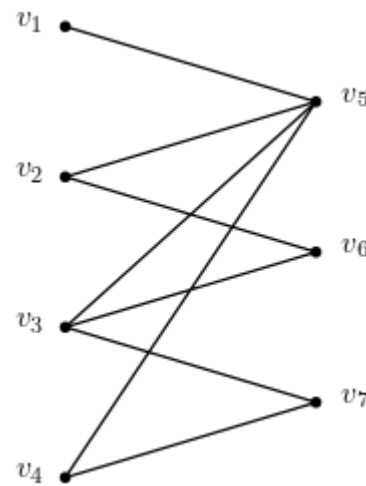
Tanım 2.22. G grafının γ – kümesinin kardinalitesine **baskınlık sayısı** (domination number) denir ve $\gamma = \gamma(G)$ ile gösterilir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

Tanım 2.23. Bir G grafını oluşturan tüm köşe çiftleri komşu ise **tam graf** (complete graph) olarak adlandırılır ve K_n ile gösterilir (Wilson, 1979).



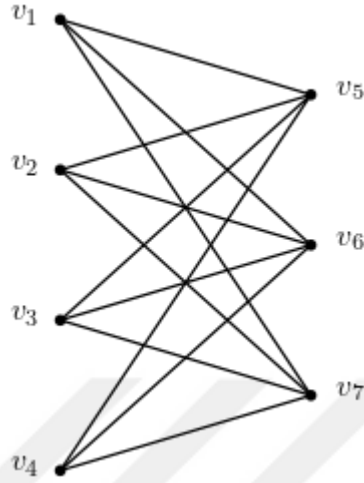
Şekil 2.5. K_5 tam grafı

Tanım 2.24. Bir G grafını oluşturan köşeler iki farklı küme içerisinde yer alıyorsa ve karşılıklı kümeler arasında kenarlar var ise G grafı **iki parçalı graf** (bipartite graph) olarak adlandırılır. İki parçalı graflar, aynı küme içerisindeki köşeleri kendi aralarında kenara sahip olmayan, karşı kümedeki köşelerle bağlantılı iki köşe kümesinden oluşur. Kümelerin eleman sayıları m ve n olmak üzere iki parçalı graf $G_{m,n}$ ile gösterilir.



Şekil 2.6. İki parçalı graf

İki parçalı grafın kümelerinin bütün köşeleri karşılıklı komşu ise bu grafa **tam iki parçalı graf** (complete bipartite graph) denir. Tam iki parçalı graf m ve n kümelerin elaman sayıları olmak üzere $K_{m,n}$ ile gösterilir (Wilson, 1979).



Şekil 2.7. $K_{4,3}$ tam iki parçalı graf

Tanım 2.25. Devir içermeyen bağlantılı bir grafa **ağaç** (tree) denir. Ağaç grafta derecesi 1 olan köşeye **yaprak** (leaf) denir. Tüm ağaçlar iki parçalı graftır (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

Tanım 2.26. Ağaç grafta yalnız bir köşe diğer tüm köşelere komşu ise **yıldız graf** (star graph) denir. n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir (Wilson, 1979).

Tanım 2.27. Bir G grafında $d_i, v_i \in V(G)$ köşesinin derecesi olmak üzere, G nin tüm köşelerinin derecelerinden oluşan köşegen matris

$$D(G) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

derece matrisi (degree matrix) olarak adlandırılır.

Örnek 2.2. Yukarıda Şekil 2.9’da verilen G grafının komşuluk matrisini hesaplayalım.

A matrisinin satırları ve sütunları köşeleri temsil etmek üzere,

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Köşelerin dereceleri de komşuluk matrisinden kolaylıkla hesaplanır:

$$d_1 = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$$

$$d_2 = 1 + 2 = 3$$

$$d_3 = 1 + 2 = 3$$

$$d_4 = 0.$$

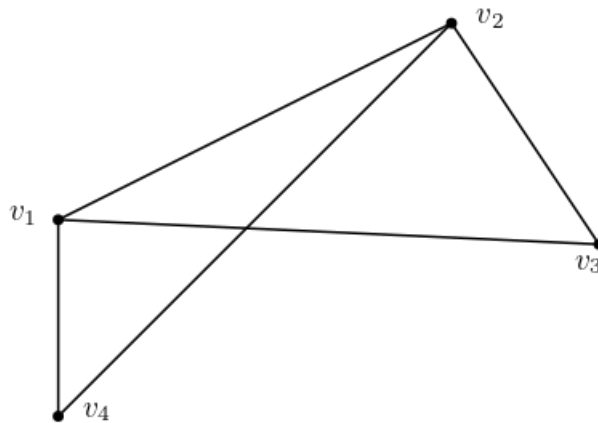
Tanım 2.29. Laplacian matrisi, $n \times n$ tipinde simetrik bir matris olup, elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Laplacian matris $L(G) = [l_{ij}]$ ile gösterilir (Wilson, 1979).

Bir G grafının Laplacian matrisini, derece matrisi ile komşuluk matrisi arasındaki fark olarak da aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$L(G) = D(G) - A(G).$$



Şekil 2.10. G grafi

Örnek 2.3. Yukarıda (Şekil 2.10) verilen G grafinin Laplacian matrisini hesaplayalım.

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $L(G) = D(G) - A(G)$ olduğundan, G grafinin Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.30. G grafinin herhangi iki köşesi arasındaki en kısa yola bu köşeler arasındaki **uzaklık** denir. G grafinin v_i ve v_j köşeleri arasındaki uzaklık $d_G(v_i, v_j)$ ile gösterilir (Wilson, 1979).

Tanım 2.31. G grafinin $v_i \in V(G)$ köşesinin **dış merkezliliği** (eccentricity) bu köşe ile bu köşeye en uzak köşe arasındaki uzaklık olarak tanımlanır ve $\varepsilon(v_i)$ ile gösterilir. Yani, $\varepsilon(v_i) = \max \{d(v_i, v_j) : v_j \in V(G)\}$ dir (Wilson, 1979).

Tanım 2.32. Bir G grafindaki tüm köşelerin dış merkezliliklerinin en büyüğüne **çap** (diameter) denir (Wilson, 1979). Yani, herhangi iki köşe arasındaki en büyük uzaklıktır:

$$D = D(G) = \max \{\varepsilon(v_i) : v_i \in V(G)\}.$$

Tanım 2.33. Bir G grafindaki tüm köşelerin dış merkezliliklerinin en küçüğüne **yarıçap** (radius) denir (Wilson, 1979). Yani, herhangi iki köşe arasındaki en küçük uzaklıktır:

$$r = r(G) = \min \{\varepsilon(v_i) : v_i \in V(G)\}.$$

Tanım 2.34. G grafında dış merkezliliği yarıçapına eşit olan köşeye merkez köşe denir. Bu özelliğe sahip köşelerden oluşan kümeye G grafının **merkezi** (center) denir ve $c = c(G)$ ile gösterilir (Wilson, 1979).

Tanım 2.35. G grafının tüm köşelerinin dış merkezliliği eşitse, yani $r(G) = D(G)$ ise **yarı merkezli** (self-centered) graf olarak adlandırılır (Wilson, 1979).

Bu tez çalışmasında yer alan “Çarpımsal Dışmerkezlilik Direnç Mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) İle İlgili Sonuçlar” ana başlıklı bölümde bahsedilecek olan elektrik ağları (electric circuits), iki parçalı, neredeyse tam iki parçalı (nearly complete bipartite) ve hemen hemen tam iki parçalı (almost complete bipartite) graflar ile ilgili temel kavramlar ve sonuçlar, “2.1 Elektrik Ağları ve İki Parçalı Graflar ile İlgili Kavramlar” başlıklı bölümde verilmiştir.

2.1 Elektrik Ağları ve İki Parçalı Graflar ile İlgili Kavramlar

Elektrik ağları kapsamında aşağıda verilen kavramlar ile ilgili detaylı bilgi Young ve ark. (1996) tarafından yazılan kitapta bulunabilir.

Kirchhoff akım kanunu: Birinci ya da düğüm kanunu olarak da adlandırılan bu kanuna göre devrenin bir köşesine gelen toplam akım çıkan toplam akıma eşittir. Bu nedenle, $x \neq a, b$ ve $N(x)$, x in komşuluğu olmak üzere, $\sum_{y \in N(x)} i_{xy} = \sum_{y \in V} i_{xy} = 0$ dır. a ve b köşeleri için I_{ab} akımı a üzerinden b ye geçerek güç kaynağına ulaşır. Buradan

$$\sum_{y \in V} i_{xy} = \begin{cases} I_{ab} & x = a, \\ -I_{ab} & x = b, \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

olarak ifade edebiliriz.

Diğer bir ifade ile bir köşeden akım kollara ayrılıyorsa bu köşeye gelen akım ile bu köşeden ayrılan akımların matematiksel olarak toplamı sıfıra eşittir. Bir formül ile ifade edecek olursak, $I - (I_1 + I_2 + I_3 + \dots) = 0$ olacaktır.

Kirchhoff gerilim kanunu: İkinci Kirchhoff kanunu olup, gerilim ile alakalıdır. Kapalı bir elektrik devresinde her bir elemana düşen gerilim miktarının toplamı ile bu devreye uygulanan toplam gerilime eşittir. U_{xy} , x ve y ($U_{xy} = -U_{yx}$) köşeleri arasındaki gerilimi göstermek üzere bir ağ üzerindeki C döngüsü için gerilim kanunundan

$$\sum_{(x,y) \in C} U_{xy} = 0$$

olmaktadır.

Ohm kanunu: V , I akımının geçtiği bir R direncinin uç köşeleri arasındaki potansiyel farkı göstermek üzere $V = I R$ ile ifade edilir. Yani, her $x, y \in V$ için $V_{xy} = i_{xy} r_{xy}$ dir.

Tanım 2.1.1. a ve b (aralarına bir gerilim kaynağı bağlandıktan sonra) köşeleri arasındaki **efektif direnç** a ve b arasındaki birim net akım başına potansiyel fark olarak tanımlanır. Yani

$$R_{ab} = \frac{v_a - v_b}{I_{ab}}$$

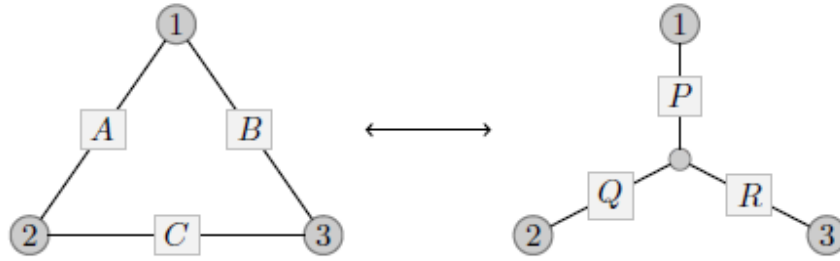
olarak ifade edilebilir.

Bir G grafının tüm kenarlarına 1Ω luk direnç yerleştirildiğinde, herhangi iki v_i ve v_j köşesi arasındaki efektif direnç, **direnç mesafesi** olarak adlandırılır ve $r_G(v_i, v_j)$ ile gösterilir. G grafının bağlantılı ve kenar ağırlıklı bir graf olduğunu varsayalım. $v_i v_j \in E(G)$ kenarının ağırlığı da w_{ij} olsun. Kenar ağırlıklı bu grafın direnç mesafesi $r_G(v_i, v_j) = \frac{1}{w_{ij}}$ olarak tanımlanır.

Efektif direnci bulmak için kullanılan yöntemler: Efektif direnci hesaplamak için en yaygın kullanılan teknik seri ve paralel dirençler kanunudur. Bu kanun ile seri ya da paralel olan dirençler elektrik devresinin yapısı değiştirilmeden tek bir direnç ile ifade edilebilmektedir. R_1 ve R_2 dirençleri seri olarak bağlı ise toplam direnç $R_{ab} = R_1 + R_2$

formülü kullanılarak elde edilir. Paralel bağlı dirençler için ise $\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ formülü

kullanılır. Başka bir teknik ise $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) uygulamaktır. Bu dönüşüm ile yıldız şeklindeki devre üçgen şeklindeki bir devre haline dönüştürülebilir (Şekil 2.11).



Şekil 2.11. $Y-\Delta$ ve $\Delta-Y$ eşdeğer dönüşümü

Δ dönüşümünden $A + B + C = M$ olmak üzere

$$R_{12} = \frac{(B+C)A}{M}, R_{13} = \frac{(A+C)B}{M}, R_{23} = \frac{C(A+B)}{M}$$

ve Y dönüşümünden

$$R_{12} = Q + P, R_{13} = R + P, R_{23} = R + Q$$

elde edilir. Tüm direnç mesafelerini toplarsak

$$\frac{R_{12} + R_{13} + R_{23}}{2} = \frac{AB + AC + BC}{M} = R + P + Q$$

elde edilir. Buradan

$$P = \frac{AB}{M}, Q = \frac{AC}{M}, R = \frac{BC}{M}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$PC = QB = RA = \frac{ABC}{M}$$

dir. Bu eşitliği

$$PQR = \left(\frac{ABC}{A+B+C} \right)^3 \frac{1}{ABC}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Q} = \left(\frac{A+B+C}{ABC} \right) (A+B+C)$$

olduğundan

$$PQ + PR + QR = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Q} \right) PQR = \frac{ABC}{A+B+C}$$

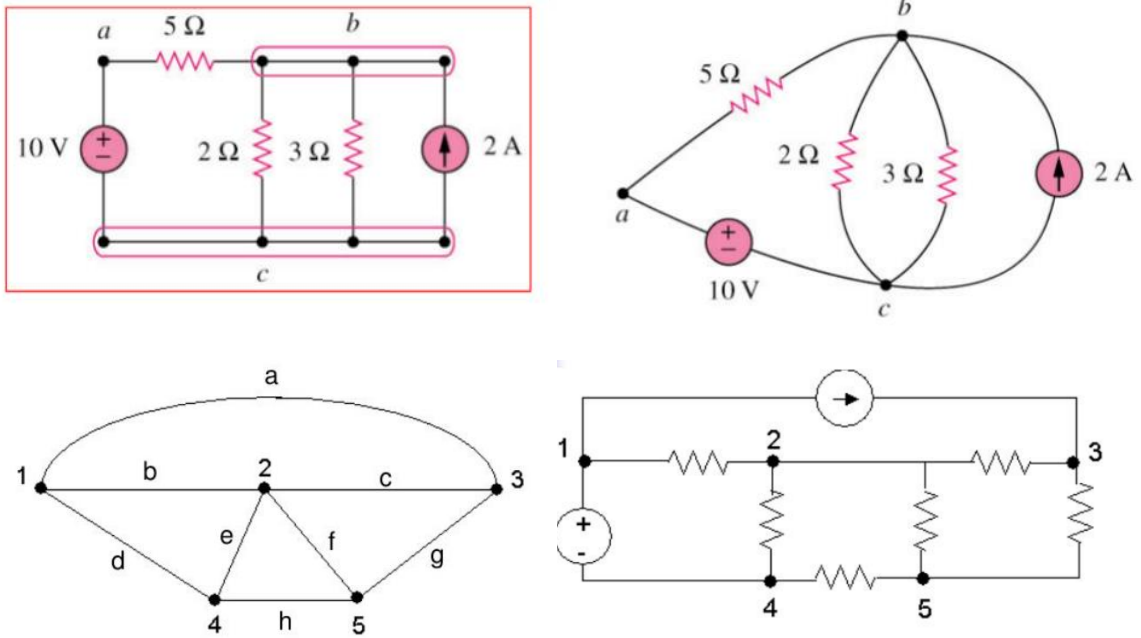
elde edilir. Yani, eşdeğer dönüşüm (equivalent transformation) yapılırken direnç değerleri

$$A = \frac{PQ + PR + QR}{R}, \quad P = \frac{AB}{A+B+C}$$

$$B = \frac{PQ + PR + QR}{Q}, \quad Q = \frac{AC}{A+B+C}$$

$$C = \frac{PQ + PR + QR}{P}, \quad R = \frac{BC}{A+B+C}$$

formülleri kullanılarak hesaplanır.



Şekil 2.12. Elektrik devresinin graf gösterimi

Şekil 2.12’de elektrik devreleri ve devrelerin graf olarak gösterimi mevcuttur. Elektrik devreleri graf haline dönüştürülebildiği gibi graflar da elektrik devrelerine dönüştürülebilir.

Efektif direnci bulmak için yukarıda bahsedilen yöntemleri graflar için de uygulayabiliriz.

Tanım 2.1.2. $r_G(v_i, v_j)$, bağlantılı bir n – mertebeli G grafının v_i ve v_j köşeleri arasındaki direnç mesafesi, L matrisi G grafının Laplacian matrisi ve $\mathbf{1}$ de $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$\Gamma = L + \frac{\mathbf{1}}{n}$$

ise

$$r_G(v_i, v_j) = (\Gamma)_{v_i v_i}^{-1} + (\Gamma)_{v_j v_j}^{-1} - 2(\Gamma)_{v_i v_j}^{-1}$$

dir (Γ^{-1} , Γ nın tersidir) (Babić ve ark., 2002).

Direnç mesafesi kavramı kullanılarak, aşağıda Kirchhoff indeksi tanımı verilmiştir:

Tanım 2.1.3. Kirchhoff indeksi G grafının her bir v_i, v_j ($1 \leq i < j \leq n$) köşe ikilisinin direnç mesafelerinin toplamına eşittir. Yani, açıkça

$$Kf(G) = \sum_{v_i, v_j \in V(G)} r_G(v_i, v_j)$$

dir (Klein ve Randić, 1993).

Kirchhoff indeksi ayrıca aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

Teorem 2.1.1. G grafının Laplacian matrisinin özdeğerleri $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ ($n \geq 2$) olmak üzere

$$Kf(G) = n \sum_{k=2}^n \frac{1}{\mu_k}$$

ile gösterilir (Gutman ve Mohar, 1996).

Tez çalışmasının 4. bölümünde kullanılacak olan çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi tanımı, sonucu ve diğer kavramlar aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.1.4. G grafinin çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) aşağıdaki gibi tanımlanır (Hong ve ark., 2018):

$$\xi_r^*(G) = \sum_{v_i, v_j \in V(G)} \varepsilon_G(v_i) \varepsilon_G(v_j) r_G(v_i, v_j).$$

Lemma 2.1.1. e , G grafinin komşu olmayan iki köşesini bağlayan bir kenar ve $G' = G + e$ olmak üzere, $\xi_r^*(G') < \xi_r^*(G)$ elde edilir (Hong ve ark., 2019).

Tanım 2.1.5. N mertebeli $B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1})$ grafi, P_{D+1} yolunda bulunan i -inci köşenin ayrık n_i köşe kümesi $(N = \sum_{i=1}^{D+1} n_i)$ ile değiştirilmesi ile elde edilir. P_{D+1} yolundaki komşu köşeler için o köşelere karşılık gelen ayrık kümelerdeki köşeler de komşudur. $B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1})$ grafi D çaplı **iki parçalı graftır** ve D çaplı her iki parçalı graf $B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1})$ in bir altgrafıdır (Jiang ve ark., 2020).

Lemma 2.1.2. $D \geq 3$ için $N = \sum_{i=1}^{D+1} n_i$ olmak üzere D çaplı (diameter) herhangi bir iki parçalı graf $B_D(n_1 = 1, n_2, \dots, n_{D+1} = 1)$ grafinin bir alt grafıdır (Jiang ve ark., 2020).

Lemma 2.1.3. n_j kümesindeki bir köşenin derecesi $d_j = n_{j-1} + n_{j+1}$ ve $n_0 = n_{D+2} = 0$

olsun. $P_D(\lambda) = \prod_{j=1}^{D+1} \theta_j$, $\theta_1 = \lambda - d_1$, $\theta_j = (\lambda - d_j) - \frac{n_{j-1}n_j}{\theta_{j-1}}$ ($2 \leq j \leq D+1$) olmak üzere

$B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1})$ grafinin Laplacian matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(\lambda I - L_{B_D}) = p_D(\lambda) \prod_{j=1}^{D+1} (\lambda - d_j)^{n_{j-1}}$$

eşitliği ile elde edilir (Jiang ve ark., 2020).

Jiang ve ark. (2020), $B_D(n_1 = 1, n_2, \dots, n_D, n_{D+1} = 1)$ iki parçalı grafinin Kirchhoff indeksini aşağıdaki yöntem ile bulmuştur.

Lemma 2.1.4. $n_0 = n_{D+2} = 0$ olmak üzere D çaplı (diameter) iki parçalı grafların Kf ile gösterilen Kirchhoff indeksi

$$Kf(B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1})) = \sum_{q=2}^{D+1} \left(\frac{N - \sum_{k=1}^{q-1} n_k}{n_{q-1} n_q} \sum_{k=1}^{q-1} n_k \right) + N \sum_{j=1}^{D+1} \frac{n_j - 1}{n_{j-1} + n_{j+1}}$$

eşitliği ile verilen $Kf(B_D(n_1, n_2, \dots, n_{D+1}))$ değeridir (Jiang ve ark., 2020).

Tanım 2.1.6. P_{D+1} yol grafinin i – inci köşesinin n_i ile temsil edilen bir klik (clique) ile değiştirilmesinden elde edilen $G_D^*(n_1, n_2, \dots, n_D, n_{D+1})$ grafına, D çaplı bir graf denir. Yol grafında köşeler komşu ise $G_D^*(n_1, n_2, \dots, n_D, n_{D+1})$ grafında karşılık gelen köşelerde komşudur (Ellens ve ark., 2011).

Lemma 2.1.5. $G = G_D^*(1, n_2, \dots, n_D, 1)$ grafi N köşeli D çaplı (diameter) bir graf olsun. G grafi $\{G_D^*(1, n_2, \dots, n_D, 1) : \sum_{i=2}^D n_i = N - 2\}$ sınıfının bir alt kümesidir (Wang ve ark., 2010).

Ellens ve ark. (2011) herhangi bir D çaplı (diameter) grafin Kirchhoff indeksini aşağıdaki gibi hesaplamıştır:

Lemma 2.1.6. $n_0 = n_{D+2} = 0$ olmak üzere G grafinin Kirchhoff indeksi

$$Kf(G) = \sum_{q=2}^{D+1} \left(\frac{N - \sum_{k=1}^{q-1} n_k}{n_{q-1} n_q} \right) \sum_{k=1}^{q-1} n_k + N \sum_{j=1}^{D+1} \frac{n_j - 1}{n_j + n_{j-1} + n_{j+1}}$$

eşitliği ile elde edilir (Ellens ve ark., 2011).

Lemma 2.1.7. Eğer iki parçalı bir grafin çapı (diameter) 2 ise bu graf tam iki parçalı graf olmalıdır (Jiang ve ark., 2020).

Lemma 2.1.8. K_{n_1, n_2} , bir parçasında n_1 , diğer parçasında n_2 köşe bulunan tam iki parçalı graf olsun. K_{n_1, n_2} grafinin Kirchhoff indeksi

$$K_{n_1, n_2} = \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1^2 + n_2^2)}{n_1 n_2} - 1$$

olarak hesaplanır (Jiang ve ark., 2020).

Aşağıdaki lemmada tüm direnç mesafelerini (resistance distance) elde etmek için bir bölgesel toplam kuralı verilmiştir.

Lemma 2.1.9. G grafi basit, bağlantılı, N mertebeli bir graf ve her bir kenarında 1 ohmluk direnç olsun. G grafının herhangi iki v_i ve v_j köşesi için, $d(v_i)$ v_i köşesinin derecesi ve $N(v_i)$ de v_i köşesinin komşuluk kümesi olmak üzere,

$$d(v_i)r_G(v_i, v_j) + \sum_{a \in N(v_i)} (r_G(v_i, a) - r_G(v_j, a)) = 2$$

eşitliği ile bir grafın tüm direnç mesafeleri hesaplanır (Chen ve Zhang, 2008).

Lemma 2.1.9'un özel bir durumu olarak Lemma 2.1.10 elde edilmiştir.

Lemma 2.1.10. G grafi v_a ve v_b ayrık köşelerini içersin. Eğer $N(v_a) = N(v_b)$ ise

$$r_G(v_a, v_b) = \frac{2}{|N(v_a)|} \text{ elde edilir (Gervacio, 2016).}$$

Tanım 2.1.7. $K_{x,y}$, $|X| = x$ ve $|Y| = y$ olmak üzere, (X, Y) parçalanışı ile bir tam iki parçalı graf olsun. $G(x, y, p) = K_{x,y} - pK_2$ ($p \leq \min\{x, y\}$) grafına **neredeyse tam iki parçalı** (nearly complete bipartite) graf denir. $G(x, y, p)$ neredeyse tam iki parçalı grafının köşe kümesi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_y\}$ ve kenar kümesi $\{\alpha_s \beta_t : 1 \leq s \leq x, 1 \leq t \leq y\} \setminus \{\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_p \beta_p\}$ dir. $G(x, p) = K_{x,x} - pK_2$ ($p \leq x$) grafına ise **hemen hemen tam iki parçalı graf** (almost complete bipartite graph) denir. $G(x, p) = K_{x,x} - pK_2$ ($p \leq x$) ise neredeyse tam iki parçalı (nearly complete bipartite) grafların özel halidir (Ge ve Dong, 2020).

Yukarıdaki tanımdan faydalananarak aşağıdaki lemma verilmiştir (Ge ve Dong, 2020):

Lemma 2.1.11. $G(x, y, p)$ neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı graf ve

$[x] = \{1, 2, \dots, x\}$, $[y] = \{1, 2, \dots, y\}$, $[p] = \{1, 2, \dots, p\}$ olsun. Buradan,

1. $1 \leq s, t \leq x$ için,

$$r_G(\alpha_s, \alpha_t) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{xy-x-y}, & \text{eğer } s \neq t \text{ ve } s, t \in [p], \\ \frac{2}{y}, & \text{eğer } s \neq t \text{ ve } s, t \in [x] \setminus [p], \\ \frac{2x-1}{y(y-1)} + \frac{x+xy^2-2xy+yp-y^2}{y(y-1)(x+y-xy)(x+y-p-xy)}, & \text{eğer } s \in [p] \text{ ve } s, t \in [x] \setminus [p]. \end{cases}$$

2. $1 \leq s, t \leq y$ için,

$$r_G(\beta_s, \beta_t) = \begin{cases} \frac{2(y-1)}{xy-x-y}, & \text{eğer } s \neq t \text{ ve } s, t \in [p], \\ \frac{2}{x}, & \text{eğer } s \neq t \text{ ve } s, t \in [y] \setminus [p], \\ \frac{2y-1}{x(x-1)} + \frac{y+x^2y-2xy+xp-x^2}{x(x-1)(x+y-xy)(x+y-p-xy)}, & \text{eğer } s \in [p] \text{ ve } s, t \in [y] \setminus [p]. \end{cases}$$

3. $1 \leq s, t \leq x$ ve $1 \leq s, t \leq y$ için,

$$r_G(\alpha_s, \beta_t) = \begin{cases} \frac{x+y}{xy-x-y} - \frac{xy}{(xy-x-y)(xy-x-y+p)}, & \text{eğer } s = t \in [p], \\ \frac{x+y-2}{xy-x-y} - \frac{xy}{(xy-x-y)(xy-x-y+p)}, & \text{eğer } s \neq t \in [p], \\ \frac{1}{x} + \frac{(p-1)(x-1)}{p(xy-x-y)} + \frac{(x-p)(x-1)}{px(xy-x-y+p)}, & \text{eğer } s \in [p] \text{ ve } t \in [y] \setminus [p], \\ \frac{1}{y} + \frac{(p-1)(y-1)}{p(xy-x-y)} + \frac{(y-p)(y-1)}{py(xy-x-y+p)}, & \text{eğer } s \in [x] \setminus [p] \text{ ve } t \in [p], \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{xy-x-y}{xy(xy-x-y+p)}, & \text{eğer } s \in [x] \setminus [p] \text{ ve } t \in [y] \setminus [p]. \end{cases}$$

Neredeyse tam iki parçalı (nearly complete bipartite) bir grafın Kirchhoff indeksi aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 2.1.12. $G(x, y, p)$ bir neredeyse tam iki parçalı (nearly complete bipartite) graf olsun. $G(x, y, p)$ nin Kirchhoff indeksi:

$$\begin{aligned} Kf(G(x, y, p)) = & x + y + \frac{p^2(x + y - 2) + 2p}{xy - x - y} + \frac{(x - p)(x - 1)}{y} + \frac{(y - p)(y - 1)}{x} \\ & - \frac{pxy}{(xy - x - y)(xy - x - y + p)} + \frac{(x - p)(y - p)}{y(y - 1)(xy - x - y + p)} \\ & + \frac{(y - p)(p - 1)}{(x - 1)(xy - x - y)} + \frac{(x - p)(y - p)}{x(x - 1)(xy - x - y + p)} + \frac{p(x - p)}{y - 1} \\ & + \frac{p(y - p)}{x - 1} + \frac{(x - p)(p - 1)}{(y - 1)(xy - x - y)} - 1. \end{aligned}$$

dir (Ge ve Dong, 2020).

Lemma 2.1.13. G grafının Kirchhoff indeksini γ baskınlık sayısına (domination number) bağlı olarak

$$q = \begin{cases} 2\gamma \text{ ve } n_0 = n_{2\gamma+1} = 0, & \text{eğer } N = \sum_{i=1}^{2\gamma} n_i, \\ 2\gamma - 1 \text{ ve } n_0 = n_{2\gamma} = 0, & \text{eğer } N = \sum_{i=1}^{2\gamma-1} n_i \end{cases}$$

olmak üzere,

$$Kf(G) = \sum_{i=1}^q \left(\frac{N - \sum_{k=1}^{i-1} n_k}{n_{i-1}n_i} \sum_{k=1}^{i-1} n_k \right) + N \sum_{j=1}^q \frac{n_j - 1}{n_{j-1} + n_{j+1}}$$

ile hesaplanır (Kirgiz ve Maden, 2021).

Bu tez çalışmasında yer alan bazı topolojik indeksler için sınırlar başlığı altındaki sonuçlar ile ilgili temel kavramlar ve sonuçlar, 2.2 bölümünde verilmiştir.

2.2 Topolojik İndeksler ile İlgili Kavramlar

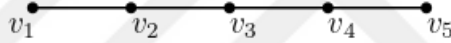
Randić indeksi üzerinde en çok çalışılan topolojik indekslerden birisidir (Li ve Shi, 2008; Du ve ark., 2021). Randić (1975), bu topolojik indeksi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.1. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_i ile komşu olan bir v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere G grafının $R(G)$ ile gösterilen **Randić indeksi**

$$R(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$$

dir (Randić, 1975).

Örnek 2.2.1. P_5 yol grafının Randić indeksini hesaplayalım.



Şekil 2.13. P_5 yol grafi

$d_1 = d_5 = 1$ ve $d_2 = d_3 = d_4 = 2$ olduğu açıkça görülmektedir. Buradan, P_5 yol grafının Randić indeksi

$$\begin{aligned} R(G) &= \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

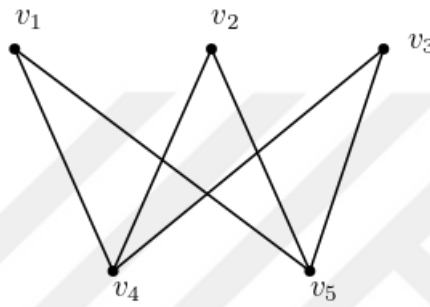
Randić indeksinin özel hali olarak harmonik indeksi tanımlanmıştır. Fajtlowicz (1987), harmonik indeksin tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.2.2. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_i ile bağlantılı bir v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere G grafının $H(G)$ ile gösterilen **harmonik indeksi**

$$H(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2}{d_i + d_j}$$

dir (Fajtlowicz, 1987).

Örnek 2.2.2. $K_{3,2}$ grafının harmonik indeksini hesaplayalım.



Şekil 2.14. $K_{3,2}$ grafi ve köşelerinin dereceleri

$d_1 = d_2 = d_3 = 2$ ve $d_4 = d_5 = 3$ olduğu açıkça görülmektedir. Buradan, $K_{3,2}$ yol grafının harmonik indeks değeri hesaplandığında

$$\begin{aligned} H(G) &= \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2}{d_i + d_j} \\ &= 6 \cdot \frac{2}{2+3} \\ &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.3. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_i ile bağlantılı bir v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere G grafının $ABC(G)$ ile gösterilen **atom-bağ bağlantılılık** (atom-bond connectivity) indeksi

$$ABC(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} - \frac{2}{d_i d_j}}$$

ile tanımlanır (Estrada ve ark., 1998).

Furtula ve Gutman (2015), unutulmuş (forgotten) indeksi aşağıdaki gibi tanımladılar.

Tanım 2.2.4. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_i ile bağlantılı bir v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere G grafının $F(G)$ ile gösterilen **unutulmuş (forgotten) indeksi**

$$F(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} (d_i^2 + d_j^2)$$

dir (Furtula ve Gutman, 2015).

Yukarıda bahsedilen topolojik indekslerin varlığı son zamanlarda yeni bir indeksin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Gutman (2021) yeni topolojik indeksi Sombor olarak adlandırmıştır.

Tanım 2.2.5. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_i ile bağlantılı bir v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere G grafının $SO(G)$ ile gösterilen **Sombor indeksi**

$$SO(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \sqrt{d_i^2 + d_j^2}$$

dir (Gutman, 2021).

Dereceye bağlı (degree based) topolojik indekslere benzer şekilde dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı topolojik indeksler de tanımlanmış ve bunlarla ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 2.2.6. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) ε_i , v_j köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) de ε_j olmak üzere G grafının $H_\varepsilon(G)$ ile gösterilen dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı **harmonik indeksi**

$$H_{\varepsilon}(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2}{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$$

dir (Ediz ve ark., 2017).

Tanım 2.2.7. Herhangi bir G grafında v_i köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) ε_i , v_j köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) de ε_j olmak üzere G grafının $ABC_{\varepsilon}(G)$ ile gösterilen dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı atom bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksi

$$ABC_{\varepsilon}(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_j} - \frac{2}{\varepsilon_i \varepsilon_j}}$$

dir (Farahani, 2013).

3. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Graf teori ve uygulamaları tezin giriş bölümünde de bahsedildiği üzere çok farklı alanları kapsamaktadır. Her bir alan içerisinde ise çeşitli konular ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Graf teorisinin literatürde geniş bir yer kaplamasından dolayı, tezin bu bölümünde özel olarak direnç mesafesi ve Kirchhoff indeksi üzerine yapılan çalışmalar ve topolojik indekslerin alt ve üst sınırları ile ilgili literatüre yer verilmiştir.

3.1 Direnç mesafesi ve Kirchhoff İndeksi

Stephenson ve Zelen (1989) “Rethinking centrality: Methods and examples” başlıklı çalışmalarında graf teorisinin elektrik devrelerinde kullanılabileceği fikrini ortaya attılar.

Klein ve Randić (1993) “Resistance Distance” başlıklı makalelerinde ilk olarak direnç mesafesi ve direnç mesafesi matrisini elektrik devrelerinin temellerinden yararlanarak tanımladılar. Ayrıca Kirchhoff indeksi $Kf(G)$ için de bir tanım verdiler.

Gutman ve Mohar (1996) “The Quasi-Wiener and the Kirchhoff Indices Coincide” başlıklı çalışmalarında Quasi-Wiener indeks ve Kirchhoff indeksin benzer özelliklere sahip olduğunu buldular.

Palacios (2001) “Resistance distance in graphs and random walks” başlıklı makalesinde direnç mesafesini bağlantılı yönsüz graflar üzerinde inceleyerek, bu kavramı graflarda rastgele yürüyüşler (random walks) ile ilişkilendirdi. Ayrıca direnç mesafesi ve Kirchhoff indeksi için genel bir alt sınır buldu.

Xiao ve Gutman (2003) “Resistance distance and Laplacian spectrum” başlıklı çalışmalarında direnç mesafesi matrisinden yola çıkarak, direnç mesafesi değerlerinin Laplacian özdeğerler ve özvektörlerle ifade edilebileceğini gösterdiler. Ayrıca $R = [r_G(v_i, v_j)]$ direnç mesafesi matrisinin özdeğer ve özvektörlerinin Laplacian özdeğer ve özvektörleri ile ilişkili olduğunu ispatladılar.

Bapat ve ark. (2003) “A Simple Method for Computing Resistance Distance” başlıklı makalelerinde, bir G grafinin Laplacian matrisini kullanarak direnç mesafesini hesapladılar. Laplacian matrisinin i – inci satırı ve sütunun silinmesi ile elde edilen matris $L(i)$ ve i – inci satır ile j – inci sütunun silinmesi ile elde edilen matris $L(i, j)$

olmak üzere $r_G(v_i, v_j) = \det L(i, j) / \det L(i)$ ile hesaplanabilmektedir.

Zhou ve Trinajstić (2009) “On resistance-distance and Kirchhoff index” başlıklı çalışmalarında bağlantılı bir grafın direnç mesafesi ve Kirchhoff indeksinin normalleştirilmiş Laplacian özdeğerleri ile ilişkili özelliklerini verdiler.

Palacios (2010) “On the Kirchhoff index of regular graphs” başlıklı çalışmalarında d – regüler N mertebeli graflar için bir Kirchhoff indeks hesaplama formülü verdi.

Das ve ark. (2012) “On Kirchhoff index and resistance-distance energy of a graph” başlıklı çalışmalarında direnç mesafesi enerjisini direnç mesafesi matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri toplamı olarak tanımladılar ve direnç mesafesi enerjisi için alt ve üst sınırlar verdiler. Ayrıca, bağlantılı, moleküler grafların Kirchhoff indeksi için köşe sayısı, kenar sayısı, maksimum köşe derecesi, ikinci maksimum köşe derecesi ve minimum köşe derecesine bağlı olarak bir alt sınır buldular.

Vos (2016) “Methods for determining the effective resistance” başlıklı yüksek lisans tezinde, daha önce efektif direnci (resistance distance) hesaplamak için literatürde verilen yöntemlerden farklı bir yöntem kullanmıştır.

Güçlü tanımlayıcılar (resistive descriptors) özellikle fizik ve matematiksel kimya alanındaki bilim insanları tarafından uygulamalı olarak kullanılmaktadır. $f_G(v_i, v_j)$, $v(G)$ de bir reel fonksiyon olmak üzere $\Upsilon(G)$ ile gösterilen güçlü tanımlayıcıların (resistive descriptors) genel formülü aşağıda verilmiştir:

$$\Upsilon(G) = \sum_{v_i, v_j \in V(G)} f_G(v_i, v_j) r_G(v_i, v_j)$$

Kirchhoff indeksi $\Upsilon(G)$ ile tanımlanmak istenirse, formülde

$$f_G(v_i, v_j) = 1$$

olarak yazılabilir. $\Upsilon(G)$ indeksi matematik, fizik ve kimya alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Palacios, 2016).

Li ve Wei (2016) “Some edge-grafting transformations on the eccentricity resistance distance sum and their applications” başlıklı çalışmalarında, güçlü tanımlayıcılarda (resistive descriptors) $f_G(v_i, v_j) = \varepsilon_G(v_i) + \varepsilon_G(v_j)$ ifadesini kullanarak

bir G grafinın dış merkezlilik direnç mesafesi toplamını $\varepsilon(\cdot)$, $V(G)$ deki bir köşenin dış merkezliliği (eccentricity) olmak üzere

$$\xi^r(G) = \sum_{v_i, v_j \in V(G)} \left(\varepsilon_G(v_i) + \varepsilon_G(v_j) \right) r_G(v_i, v_j)$$

olarak tanımladılar.

Hong ve ark. (2018) “Some transformations on multiplicative eccentricity resistance-distance and their applications” başlıklı çalışmalarında bir G grafinın çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) $\xi_r^*(G)$ yi aşağıdaki gibi tanımladılar:

$$\xi_r^*(G) = \sum_{v_i, v_j \in V(G)} \varepsilon_G(v_i) \varepsilon_G(v_j) r_G(v_i, v_j).$$

Hong ve Zhu (2019) “The First Two Cacti with Larger Multiplicative Eccentricity Resistance-Distance” başlıklı çalışmalarında, ortak sadece bir köşesi olan kaktüs graflar için maksimum ve ikinci maksimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafelerini hesapladılar.

Hong ve ark. (2019) “Extremal graphs with diameter 2 for two indices on resistance-distance” başlıklı çalışmalarında, çapı 2 olan graflar için 1–inci, 2–inci ve 3–üncü en büyük ve 1–inci, 2–inci ve 3–üncü en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafelerini bulmuşlardır. Ayrıca çapı 2 olan grafların direnç mesafesi matrisi için de 1–inci, 2–inci ve 3–üncü en büyük ve 1–inci, 2–inci ve 3–üncü en küçük spektral yarıçap (radius) değerlerini hesapladılar.

Das ve Gutman (2019) “Comparing Laplacian Energy and Kirchhoff Index” başlıklı çalışmalarında Laplacian enerji (LE) ile Kirchhoff indeksi (Kf) karşılaştırmışlardır ve $LE > Kf$ olduğunu buldular.

Liu (2020) “Resistance Distance and Kirchhoff Index of the Diamond Hierarchical Graph and the Generalized Corona Graph” başlıklı çalışmasında genelleştirilmiş pırlanta hiyerarşik (diamond hierarchical) ve corona graflar için direnç mesafesi ve Kirchhoff indeksi hesapladı.

Jiang ve ark. (2020) “On the Kirchhoff index of bipartite graphs with given diameters” başlıklı çalışmalarında belli yarıçapa (radius) sahip iki parçalı grafların

Kirchhoff indeksleri için bir formül verdiler. Ayrıca bu graflar arasında en büyük ve en küçük, ikinci en küçük, üçüncü en küçük Kirchhoff indekse sahip olanları karakterize ettiler.

Li ve Shen (2021) “Extremal bipartite graphs and unicyclic graphs with respect to the eccentric resistance-distance sum” başlıklı çalışmalarında belli yarıçapa sahip iki parçalı ve unicyclic graflardan en küçük ve en büyük dış merkezlilik direnç-mesafesi toplamına sahip olanları karakterize ettiler.

Kirgiz ve Maden (2021) “A Note On Bipartite Graphs with Domination Number 2 and 3” başlıklı çalışmalarında baskınlık katsayısı (domination number) 2 ve 3 olan iki parçalı graflar için en küçük ve en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesini elde ettiler.

3.2 Topolojik İndeksler

Uluslararası Temel ve Uygulamalı Kimya Birliği (International Union of Pure and Applied Chemistry-IUPAC)’a göre bir topolojik indeks (veya moleküler yapı tanımlayıcı - molecular descriptor), kimyasal yapının çeşitli fiziksel özellikleri, kimyasal tepkime veya biyolojik aktivite ile korelasyonu için kimyasal yapı ile ilişkili sayısal bir değerdir. Topolojik indekslerin sayısı oldukça fazladır ve bunların kimyasal ya da biyolojik yapılarla ilişkileri bilim insanları tarafından araştırılmaktadır (Gutman, 2013).

Randić (connectivity) indeksi dereceye bağlı topolojik indeksler içerisinde önemli bir yere sahiptir. Randić indeksinin farklı özelliklerine ait pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu kısımda Randić indeksinin alt ve üst sınırları ile ilgili yapılmış çalışmalara yer verilecektir.

Bollobás ve Erdős (1998) “Graphs of extremal weights” başlıklı çalışmalarında, bağlantılı bir G grafi için $R(G) \geq \sqrt{n-1}$ ve eşitlik durumunun sadece G grafinin yıldız graf olması halinde sağlandığını gösterdiler.

Pavlovic ve Gutman (2001) “Graphs with extremal connectivity index” başlıklı çalışmalarında, en küçük ve en büyük Randić indekse sahip grafları buldular.

Delorme ve ark. (2002) “On the Randić indices” başlıklı çalışmalarında, üçgensel yapı içermeyen ve minimum derecesi δ olan bir G grafinin Randić indeksi

$$\text{için } R(G) - \frac{\delta(n-\delta)}{\sqrt{\delta(n-1)}} - \frac{\delta(\delta-1)}{2} \frac{1}{n-1} \geq 0 \text{ alt sınırını buldular.}$$

Caporossi ve ark. (2003) “Graphs with maximum connectivity index” başlıklı çalışmalarında, N mertebeli izole köşe içermeyen graflar arasında S_n grafinin minimum Randić indekse sahip olduğunu buldular.

Aouchiche ve Hansen (2007) “On a conjecture about the Randić index” başlıklı çalışmalarında, Randić indeksi ile bazı graf değişkenleri arasındaki ilişkileri buldular. Ayrıca, $R(G)$ için bir alt sınır elde ettiler.

Lokesha ve ark. (2013) “New bounds for Randić and GA indices” başlıklı çalışmalarında, Randić indeksi için değiştirilmiş Zagreb indeksi ile bağlantılı yeni alt ve üst sınırlar verdi. Ayrıca G nin asılı köşe sayısı, maksimum köşe derecesi ve asılı olmayan (non-pendant) minimum köşe derecesi değerlerini kullanarak bir üst sınır elde etmişlerdir.

Suil ve Shi (2018) “Sharp bounds for the Randić index of graphs with given minimum and maximum degree” başlıklı çalışmalarında, N mertebeli, en küçük derecesi δ ve en büyük derecesi Δ olan bir G grafi için $R(G) \geq \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{\delta + \Delta} N$ olduğunu ispatlamışlardır.

Zhang ve Wu (2022) “Randić index of a line graph” başlıklı çalışmalarında, line grafların Randić indeksi ile ilgili alt sınır tanımlamışlardır.

Buyukkose ve Cangul (2022) “Some notes on Randić index” başlıklı çalışmalarında, Randić, ağırlıklı Randić ve genelleştirilmiş Randić indeksi ile ilgili yeni sonuçlar bulmuşlardır.

Harmonik indeks ve sınırları ile ilgili yapılan çalışmalara aşağıda yer verilmiştir.

Zhong (2012) “The harmonic index for graphs” başlıklı çalışmalarında, bait bağlantılı graflar için minimum ve maksimum harmonik indeks değerlerini bulmuşlardır.

Li ve Shiu (2014) “The harmonic index of a graph” başlıklı çalışmalarında, en büyük köşe derecesi ve asılı kenarların sayısı gibi yapısal parametrelerini kullanarak harmonik indeks üzerinde bir alt sınır oluşturmuşlardır.

Zhong ve Xu (2014) “Inequalities between vertex-degree-based topological indices” başlıklı çalışmalarında, Randić ve harmonik indeksler arasındaki ilişkileri kurdu ve ayrıca G grafinin harmonik indeksi için alt sınırlar verdi.

Li ve ark. (2016) “The harmonic index of some graphs” başlıklı çalışmalarında, minimum harmonik indekse sahip ağaç yapısındaki grafları buldular.

Sun ve ark. (2019) “The harmonic index of two-trees and quasi-tree graphs” başlıklı çalışmalarında quasi ağaç yapısındaki grafların harmonik indeksi için alt ve üst sınırlar verdiler.

Hu ve Zhong (2022) “The harmonic index for trees with given domination number” başlıklı çalışmalarında, ağaç yapısındaki grafların harmonik indeksi için alt ve üst sınırlar verdiler.

Unutulmuş (forgotten) indeksin sınırları ile ilgili yapılan çalışmalar:

Khaksari ve Ghorbani (2017) “On the forgotten topological index” başlıklı makalelerinde, unutulmuş (forgotten) indeks için yeni sınırlar önerdiler ve bazı özel grafların unutulmuş (forgotten) indekslerini hesapladılar.

Gutman ve ark. (2017) “Graphs with Smallest Forgotten Index” başlıklı makalelerinde, en küçük unutulmuş (forgotten) indekse sahip grafları karakterize etmiştir.

Unutulmuş (forgotten) ve graf parametreleri arasındaki ilişkiler; maksimum ve minimum köşe derecesi (Elumalai ve ark., 2017), düzensizlik (irregularity) (Che ve Chen, 2016; Milovanović ve ark., 2017), baskınlık sayısı (domination number) (Alyar ve Khoeilar, 2021) ve döngüsel (cyclomatic) sayı (Gutman ve ark., 2017) olarak kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır.

Topolojik indekslere ait özelliklere dair çalışmalar devam ederken Gutman (2021), Sombor indeks ile topolojik indekslere yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. 2021 yılında tanımlanan bu indeks ile geometrik bir yorum yapılmaktadır.

Reti ve ark. (2021) “On the Sombor index of graphs” başlıklı çalışmalarında, Sombor indeksi için bazı yeni sınırlar elde etti.

Das ve ark. (2021) “On Sombor index” başlıklı çalışmalarında, Sombor indeksi ile birinci Zagreb graf indeksi arasındaki ilişkileri elde etti. Ayrıca Sombor indeksi üzerinde bazı yeni sınırlar verdiler.

Horoldagva (2021) “On Sombor index of graphs” başlıklı çalışmalarında, maksimum derecesi Δ olan n mertebeli bir grafın ve çevresi (girth) g olan N mertebeli bir grafın Sombor indeksi üzerinde alt sınırlar elde ettiler.

Filipovski (2021) “Relations between Sombor index and some degree-based topological indices” başlıklı çalışmalarında, Sombor ve unutulmuş (forgotten) ile Sombor ve Randić indeksler arasındaki temel ilişkileri gösterdi.

Li ve ark. (2022) “On the extremal Sombor index of trees with a given diameter” başlıklı çalışmalarında, Sombor indeksine göre N mertebeli ağaçlar arasındaki en büyük ve en küçük değerlere sahip grafları karakterize etmiştir.

Cruz ve Rada (2021) “Sombor index of chemical graphs” başlıklı çalışmalarında, tek döngülü graflar ve çift döngülü graflar arasında en büyük ve en küçük Sombor indeksini inceledi.

Chen ve ark. (2022) “Extremal values on the Sombor index of trees” başlıklı çalışmalarında verilen bazı parametrelerle ağaçların Sombor indekslerinin ekstremlerini belirledi.

Kırgız ve Maden (2022) “New Bounds for Some Topological Indices” başlıklı çalışmalarında yeni bir metot kullanarak Harmonik, Sombor, Randić ve unutulmuş (forgotten) indeksleri için yeni alt ve üst sınırlar buldular.

Harmonik, Sombor, Randić ve unutulmuş (forgotten) indekslerin sınırları hakkında daha fazla bilgi (Li ve Shi, 2008; Che ve Chen, 2016; Ali ve ark., 2019; Liu ve ark., 2020; Milovanović ve ark., 2021; Phanjoubam ve Mawiong, 2021)'de bulunabilir.

4. ÇARPIMSAL DIŞ MERKEZLİLİK DİRENÇ MESAFESİ İLE İLGİLİ SONUÇLAR

$d_G(v_i, v_j)$ ile gösterilen uzaklık kavramı, graflarla ilgili bir çok problemin çözümünde kullanılan bir graf parametresidir. Bu parametre bazı durumlarda dezavantajlar oluşturmaktadır. Uzaklık parametresi iki köşe arasındaki en kısa yol olduğu için, bu parametreye bağlı çözümlerde en kısa yoldan biraz daha uzun olan yolların dikkate alınmadığı sonucuna varılabilir.

Bu dezavantajları gidermek için üzerinde birim direnç bulunan bir kenarın iki köşesi arasındaki efektif direnç olarak tanımlanan $r_G(v_i, v_j)$ direnç mesafesi (Klein ve Randić, 1993) kullanılmaya başlanmıştır. Direnç mesafesinin ve direnç mesafesine bağlı diğer özelliklerin hesaplaması hem teorik çalışmalar hem de gerçek uygulamalar için oldukça önemlidir.

Tüm bu bilgiler göz önünde bulundurularak, tez çalışmasının bu bölümünde neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı ve iki parçalı graflar için çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafeleri ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

4.1 Neredeyse Tam İki Parçalı Graflar İçin Çarpımsal Dış Merkezlilik Direnç Mesafesi

$D = 3$ çapına (diameter) sahip neredeyse tam iki parçalı graflardan minimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip olanları ve minimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi değerini bulalım:

Teorem 4.1.1. G , N mertebeli ve çapı (diameter) $D = 3$ olan bir neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı graf olsun. Buradan

$$\xi_r^*(G) \geq \begin{cases} \frac{8N^4 - 28N^3 + 44N^2 + 60N - 128}{N(N-2)^2}, & N \text{ çift} \\ \frac{4N(2N^2 - 7N + 13)}{(N-1)(N-3)}, & N \text{ tek} \end{cases}$$

dir.

Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong G\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, 1\right)$ olmasıdır.

İspat. $B_3(n_1=1, n_2, n_3, n_4=1)$ sınıfındaki iki parçalı graflar, $G(n_1+n_3, n_2+n_4, 1)$ neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı graflar ile gösterilebilir.

Eğer $n_2 = m$ olarak alırsak, buradan $1 \leq m \leq 3$ olmak üzere $B_3(1, m, N-m-2, 1)$ elde ederiz. $B_3(1, m, N-m-2, 1)$ grafini da $G(m+1, N-m-1, 1)$ biçiminde yazabiliriz. Burada Lemma 2.1.11'i kullanarak, $G(m+1, N-m-1, 1)$ grafinin Kirchhoff indeksini aşağıdaki biçimde hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} Kf(G(m+1, N-m-1, 1)) &= N-1 + \frac{(m-N+2)^2}{m+1} - \frac{m}{m-N+2} - \frac{m-N+2}{m} \\ &\quad + \frac{m+1}{N+(m+1)(m-N+1)} - \frac{m-N+1}{N+(m+1)(m-N+1)-1} \\ &\quad + \frac{m-N+2}{(m+1)(N+(m+1)(m-N+1)-1)} \\ &\quad - \frac{m^2}{m-N+1} - \frac{N}{N+(m+1)(m-N+1)}. \end{aligned}$$

$U_1 = \{a_1\}$, $U_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $U_3 = \{c_1, c_2, \dots, c_{N-m-2}\}$ ve $U_4 = \{d_1\}$ olarak alınırsa, $B_3(1, n_2, n_3, 1)$ grafi neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı $G(x, y, p)$ grafi olarak yazılabilir. $x = |X|$, $y = |Y|$, $p = 1$ ve $X = U_2 \cup U_4 = \{d_1, b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $Y = U_1 \cup U_3 = \{a_1, c_1, c_2, \dots, c_{N-m-2}\}$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq N-m-2$ olmak üzere U_1 , U_2 , U_3 ve U_4 kümelerinde bulunan köşelerin dış merkezliliği (eccentricity) açıkça

$$\varepsilon(a_1) = \varepsilon(d_1) = 3,$$

$$\varepsilon(b_i) = \varepsilon(c_j) = 2$$

dir. $G(m+1, N-m-1, 1)$ in çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi

$$\xi_r^*(G(m+1, N-m-1, 1)) = 6Kf(G(m+1, N-m-1, 1)) + 3r_G(a_1, d_1) - 2 \left[\sum_{b_i \in X, y_i \in Y} r_G(b_i, c_j) + \sum_{b_i \in X, y_i \in Y} r_G(b_i, b_j) + \sum_{b_i \in X, y_i \in Y} r_G(c_i, c_j) \right]$$

eşitliğinden elde edilir.

Lemma 2.1.9, 2.1.10 ve 2.1.11'den yararlanılarak, $G(m+1, N-m-1, 1)$ in çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

İlk olarak $r_G(a_1, d_1)$ i hesaplayalım. $G(m+1, N-m-1, 1)$ in her bir kenarında 1 Ohm'luk direnç olsun. Buradan,

$$r_G(a_1, d_1) = \frac{2m - 2N + mN^2 - m^2N - 3mN + Np + m^2 + 1}{(2m - mN + m^2 + 1)(2m - p - mN + m^2 + 1)}$$

elde edilir. Burada $p=1$ olduğundan, $r_G(a_1, d_1)$ in direnç mesafesi

$$r_G(a_1, d_1) = \frac{1-N}{m(m-N+2)}$$

dir.

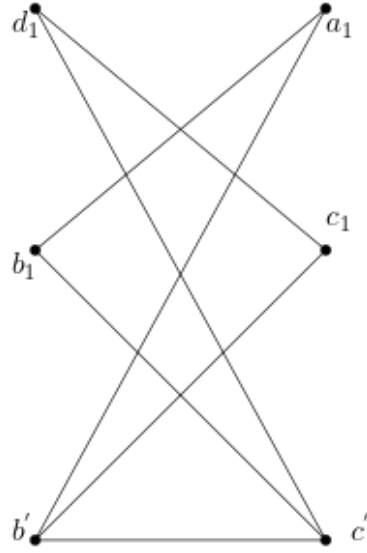
İkinci olarak, $\sum_{b_i \in X, c_j \in Y} r_G(b_i, c_j)$ yi bulalım. b_1 ve c_1 arasındaki kenar silindiği takdirde

$$G^-(m+1, N-m-1, 1) = G(m+1, N-m-1, 1) - b_1c_1$$

elde edilir.

b_1 ve c_1 arasına bir pil (battery) koyulursa, X ve Y kümelerindeki diğer tüm köşelerin voltajları eşit olur. Bu nedenle, $b_2, b_3, \dots, b_m$ köşelerini sıkıştırarak (contract) b' köşesini ve $c_2, c_3, \dots, c_{N-m-1}$ köşelerini sıkıştırarak (contract) c' köşesini elde ederiz (Şekil 4.1).

Sıkıştırılmış grafın (contracted graph) elektrik devresi ile gösterimi ise Şekil 4.2'de verilmiştir.

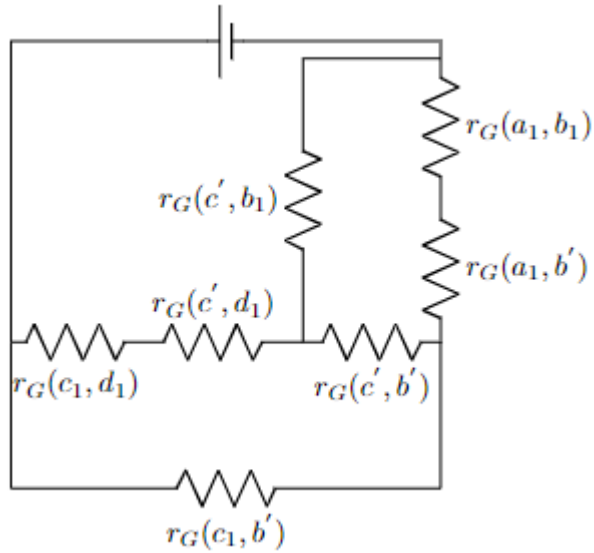


Şekil 4.1. $G^-(m+1, N-m-1, 1)$ için sıkıştırılmış graf

Öncelikli olarak $r_G(b_1, c_1)$ i bulalım. Bunun için $r_G^-(b_1, c_1)$ in hesaplanması gerekir:

$$r_G^-(b_1, c_1) = \frac{2m - 2N + mN^2 - m^2N - 3mN + Np + m^2 + 1}{(2m - mN + m^2 + 1)(2m - p - mN + m^2 + 1)}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.2. $G^-(m+1, N-m-1, 1)$ için sıkıştırılmış grafın elektrik devresi ile gösterimi

Burada $p = 2$ olduğundan,

$$r_G^-(b_1, c_1) = \frac{2m - 2N + mN^2 - m^2N - 3mN + 2N + m^2 + 1}{(2m - mN + m^2 + 1)(2m - 2 - mN + m^2 + 1)}$$

elde edilir. $r_G(b_1, c_1)$ direnç mesafesi, $r_G^-(b_1, c_1)$ ile 1Ω luk direncin paralel olarak bağlanmasına eşittir. Yani,

$$r_G(b_1, c_1) = \frac{m^2 - m^2N + mN^2 - 3mN + 2m + 1}{m(m+1)(m^2 - 2mN + 3m + N^2 - 3N + 2)}$$

dir. Buradan,

$$\sum_{b_i \in X, c_j \in Y} r_G(b_i, c_j) = \frac{m(mN - m - N^2 + 3N - 2) - 1}{(m+1)(m - N + 1)}$$

sonucu elde edilir.

Şimdi, $\sum_{b_i \in X, c_j \in Y} r_G(b_i, b_j)$ yi hesaplayalım. Tüm $b_i, b_j \in X$ direnç mesafeleri birbirine eşittir. Bu nedenle, sadece $r_G(b_2, b_3)$ ü hesaplamak yeterli olacaktır. Neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı grafların direnç mesafesi özelliklerini kullanarak,

$$r_G(b_2, b_3) = \frac{2}{N - m - 1}$$

ve

$$\sum_{b_i, b_j \in X} r_G(b_i, b_j) = \frac{m(m-1)}{N - m - 1}$$

elde edilir.

Son olarak, $\sum_{c_i, c_j \in Y} r_G(c_i, c_j)$ direnç mesafesini neredeyse tam (neredeyse tam) iki parçalı grafların direnç mesafesi özelliklerini kullanarak hesaplayalım:

$$\sum_{c_i, c_j \in Y} r_G(c_i, c_j) = \frac{(N - m - 2)(N - m - 3)}{m + 1}.$$

Sonuç olarak, $G(m+1, N-m-1, 1)$ in çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesi

$$\begin{aligned}\xi_r^*(G(m+1, N-m-1, 1)) &= \frac{m^4(-8N-4) + m^3(16N^2 - 24N - 16)}{m(m+1)(m-N+1)(m-N+2)} \\ &+ \frac{m^2(34N^2 - 12N^3 - 3N - 23)}{m(m+1)(m-N+1)(m-N+2)} \\ &+ \frac{m(4N^4 - 14N^3 - N^2 + 33N - 14) + 3(2N-1)(N-1)^2}{m(m+1)(m-N+1)(m-N+2)}\end{aligned}$$

dir. $\xi_r^*(G(m+1, N-m-1, 1))$ minimum değerini $m = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1$ olduğunda alır. Bu

nedenle, $G\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, 1\right)$, $1 \leq m \leq N-3$ durumunda minimum değeri alan graftır.

Sonuç olarak N nin tek ve çift değerleri için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\xi_r^*\left(G\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, 1\right)\right) = \begin{cases} \frac{8N^4 - 28N^3 + 44N^2 + 60N - 128}{N(N-2)^2}, & N \text{ çift ise,} \\ \frac{4N(2N^2 - 7N + 13)}{(N-1)(N-3)}, & N \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Sonuç 4.1.1. Eğer $G = B_3(n_1=1, n_2, n_3, n_4=1)$ hemen hemen tam (almost complete) iki parçalı graf ise, G nin en küçük çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesi

$$\xi_r^*\left(G\left(\frac{N}{2}, 1\right)\right) = \frac{8N^4 - 28N^3 + 44N^2 + 60N - 128}{N(N-2)^2}$$

dir.

Şimdi $D=3$ çapına (diameter) sahip neredyse tam iki parçalı graflardan ikinci minimum çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesine sahip olanları ve ikinci minimum çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesi değerini bulalım:

Teorem 4.1.2. G grafi çapı (diameter) $D=3$ olan neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı tam graf olsun. Eğer N çift ve $N \geq 6$ ise

$$\xi_r^*(G) \geq \frac{8N^4 - 12N^3 + 20N^2 - 28N + 24}{N(N+1)(N-4)}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong G\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}+1, 1\right)$ dır. Yani,

$G\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}+1, 1\right)$ grafi ikinci en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahiptir.

İspat. X, Y, U_1, U_2, U_3, U_4 kümeleri Teorem 4.1.1'in ispatında tanımlanan kümeler olsun. İkinci en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı grafları bulmak için dört farklı durum incelemek gerekir:

Durum 1. X ve Y kümelerinden alınan birer köşeyi karşılıklı yer değiştirerek, $G\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}+1, 1\right)$ grafi elde edilir. Teorem 4.1.1'den faydalananarak, $G\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}+1, 1\right)$ grafinin çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi

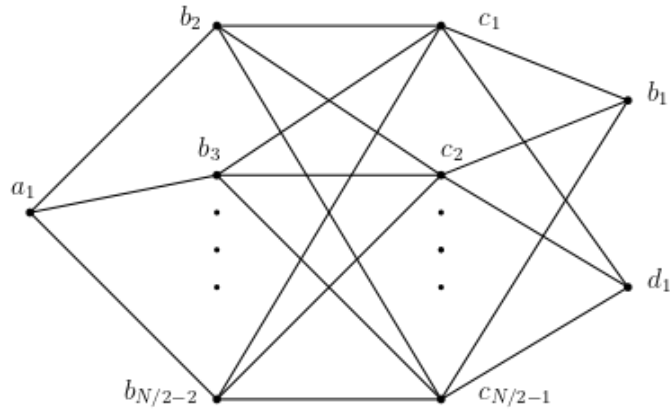
$$\xi_r^*\left(G\left(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}+1, 1\right)\right) = \frac{8N^4 - 12N^3 + 20N^2 - 28N + 24}{N(N+2)(N-4)}$$

olarak bulunur.

Durum 2. $B_3\left(1, \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}-1, 1\right)$ grafinin U_1 ve U_2 köşe kümeleri arasındaki kenarlardan birisini silerek, $B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ grafi elde edilir.

$B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ grafinin çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \xi_r^*\left(B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)\right) &= 6Kf\left(B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, N-1, 2\right)\right) + 3r_G(a_1, d_1) + r_G(a_1, b_1) \\ &\quad - 2\left[\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2 \setminus \{b_1\}} r_G(b_i, b_j) + \sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)\right] - 2\sum_{\substack{b_i \in U_2 \setminus \{b_1\} \\ c_j \in U_3}} r_G(b_i, c_j). \end{aligned}$$



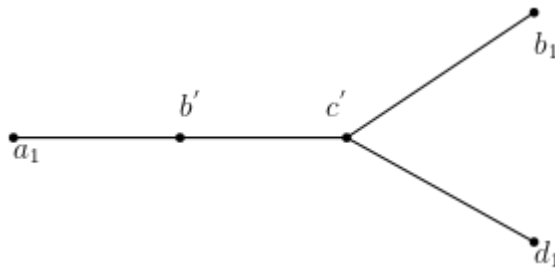
Şekil 4.3. $B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ grafi

Şimdi çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi formülünde yer alan Kirchhoff indeksini ve ilgili tüm direnç mesafelerini hesaplayalım. $B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ in Kirchhoff indeksi Lemma 2.1.4 kullanılarak,

$$Kf\left(B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)\right) = \frac{2N^3 - 15N^2 + 50N - 64}{(N-2)(N-4)}$$

elde edilir.

Kirchhoff indeksinin ardından, ilk olarak $r_G(a_1, d_1)$ i hesaplayalım. $r_G(a_1, d_1)$ direnç mesafesini bulmak için a_1 ve d_1 arasına bir pil (battery) koyalım. $b_1, b_2, \dots, b_{\frac{N}{2}-2}$ ve $c_1, c_2, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}$ köşelerinin voltajı aynıdır. Bu nedenle, bu köşeleri sıkıştırarak (contract) b' noktasını ve c' köşelerini elde ederiz (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. $r_G(a_1, d_1)$ için sıkıştırılmış graf

Sıkıştırılmış graftaki (contracted graph) yeni direnç mesafelerinin ise

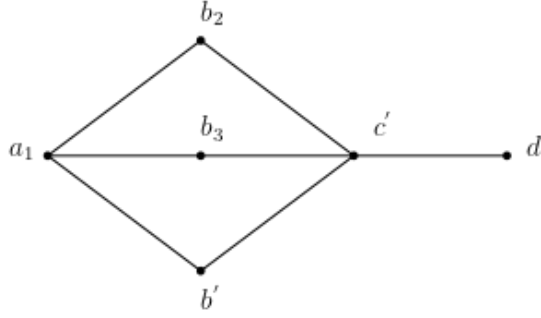
$$r_G(a_1, b') = \frac{2}{N-4}, r_G(c', b') = \frac{4}{(N-4)(N-2)}, r_G(c', d_1) = \frac{2}{N-2}$$

olduğu açıkça görülür. Buradan,

$$r_G(a_1, d_1) = r_G(a_1, b_1) = \frac{2(3N-8)}{(N-2)(N-4)}$$

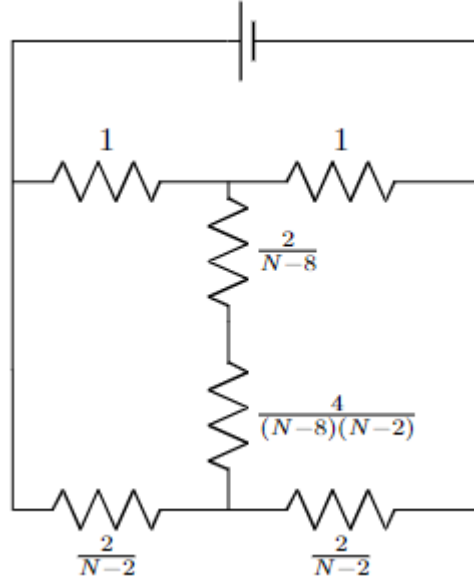
olarak hesaplanır.

İkinci olarak $\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2 \setminus \{b_1\}} r_G(b_i, b_j)$ i hesaplayalım. Tüm (b_i, b_j) ikililerin direnç mesafeleri $r_G(b_2, b_3)$ ün direnç mesafesi ile aynıdır. Bu nedenle b_2 ve b_3 arasına bir pil (battery) koyalım. $b_4, b_5, \dots, b_{\frac{N}{2}-2}$ yi sıkıştırarak b' köşesine; $c_1, c_2, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}$ köşelerini sıkıştırarak (contract) c' köşesine dönüştürelim. Benzer şekilde d_1 ve b_1 köşelerini de d' köşesine dönüştürelim (Şekil 4.5).

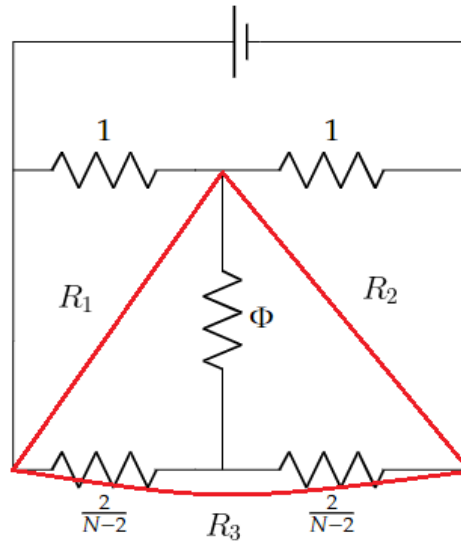


Şekil 4.5. $\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2 \setminus \{b_1\}} r_G(b_i, b_j)$ için sıkıştırılmış graf

Bu sıkıştırma (contract) işlemlerini yaptıktan sonra Şekil 4.6'da verilen elektrik devresi elde edilir.



Şekil 4.6. Sıkıştırılmış grafin elektrik devresi ile gösterimi



Şekil 4.7. Y - Δ eşdeğer dönüşümü

Sıkıştırılmış grafin direnç mesafeleri

$$r_G(a_1, b_1) = r_G(a_1, b_2) = 1, r_G(b_2, c') = r_G(b_1, c') = \frac{2}{N-2},$$

$$r_G(b', c') = \frac{4}{(N-8)(N-2)}, r_G(a_1, b') = \frac{2}{N-8}$$

olduğu açıkça görülmektedir. $Y-\Delta$ dönüşümü ile R_1 , R_2 ve R_3 dirençleri bulunur (Şekil 4.7).

$$\phi = r_G(a_1, b') + r_G(c', b') = \frac{2}{N-8} + \frac{4}{(N-8)(N-2)} = \frac{2N}{N^2 - 10N + 16}$$

olmak üzere, Y biçiminden Δ biçimine dönüşüm yapıldığından,

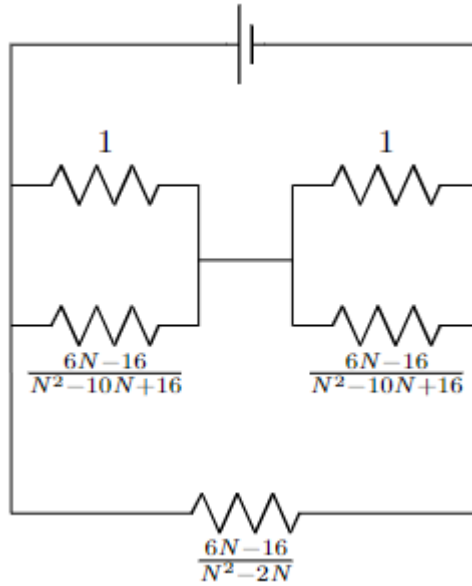
$$R_1 = R_2 = \frac{\frac{2\phi}{N-2} + \frac{2\phi}{N-2} + \frac{4}{(N-2)^2}}{\frac{2}{N-2}} = \frac{6N-16}{N^2 - 10N + 16},$$

$$R_3 = \frac{\frac{2\phi}{N-2} + \frac{2\phi}{N-2} + \frac{4}{(N-2)^2}}{\phi} = \frac{6N-16}{N(N-2)}$$

elde edilir. Tekrar $Y-\Delta$ dönüşümü yapılarak, Şekil 4.8'de verilen elektrik devresi elde edilir. R_1 ve R_2 dirençleri de 1 değerli dirençlere paralel olduğundan,

$$R_1 \parallel 1 = R_2 \parallel 1 = \frac{6N-16}{N(N-4)}$$

elde edilir.



Şekil 4.8. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi

Eşdeğer direnç $R_{eş} = \frac{4}{N}$ olarak hesaplanır. $\frac{N}{2} - 2$ dirençten ikililer seçerek toplam direnç hesaplanabileceğinden,

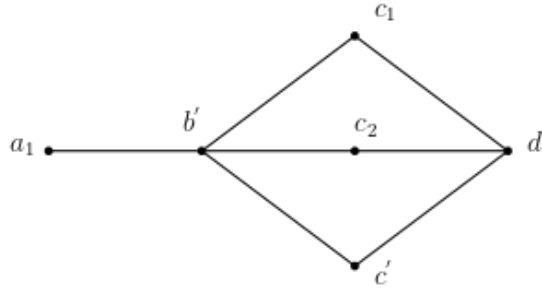
$$\binom{\frac{N}{2}-2}{2} \frac{4}{N} = \left(\frac{N}{2}-2\right) \left(\frac{N}{2}-3\right) \frac{2}{N}$$

elde edilir. Yani,

$$\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2 \setminus \{b_1\}} r_G(b_i, b_j) = \frac{(N-4)(N-6)}{2N}$$

bulunur.

Üçüncü olarak, $\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)$ direnç mesafesi toplamını bulalım. (c_i, c_j) ikililerinin tüm direnç mesafeleri $r_G(c_1, c_2)$ direnç mesafesine eşittir. Bu nedenle c_1 ve c_2 arasına pil (battery) koyalım. $b_2, b_3, \dots, b_{\frac{N}{2}-2}$ köşelerini sıkıştırarak (contract) b' köşesine; $c_3, c_4, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}$ köşelerini sıkıştırarak (contract) c' köşesine dönüştürelim. Benzer şekilde d_1 ve b_1 köşelerini de d' köşesine dönüştürelim (Şekil 4.9).

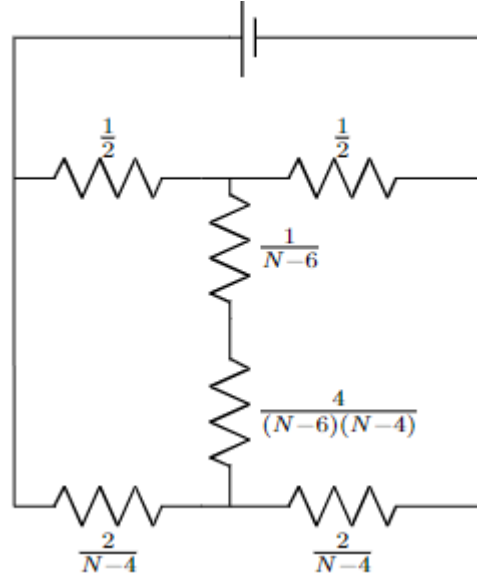


Şekil 4.9. $\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)$ için sıkıştırılmış graf

Sıkıştırma (contract) işlemleri yapıldıktan sonra Şekil 4.10'da verilen elektrik devresi elde edilir. Yeni grafın direnç mesafeleri aşağıdaki gibidir:

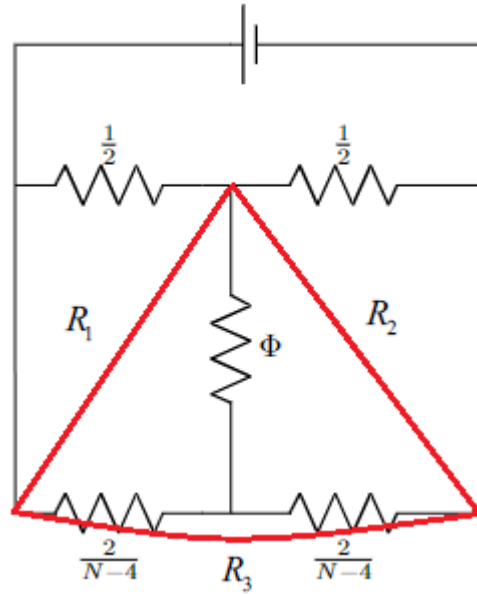
$$r_G(b', c_1) = r_G(b', c_2) = \frac{2}{N-4}, r_G(b', c') = \frac{4}{(N-6)(N-4)}, r_G(c', d') = \frac{1}{N-6},$$

$$r_G(c_1, d') = r_G(c_2, d') = \frac{1}{2}.$$



Şekil 4.10. $\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j)$ için sıkıştırılmış grafın elektrik devresi ile gösterimi

$Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) uygulandıktan sonra Şekil 4.11’de verilen elektrik devresi oluşur.



Şekil 4.11. $Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü

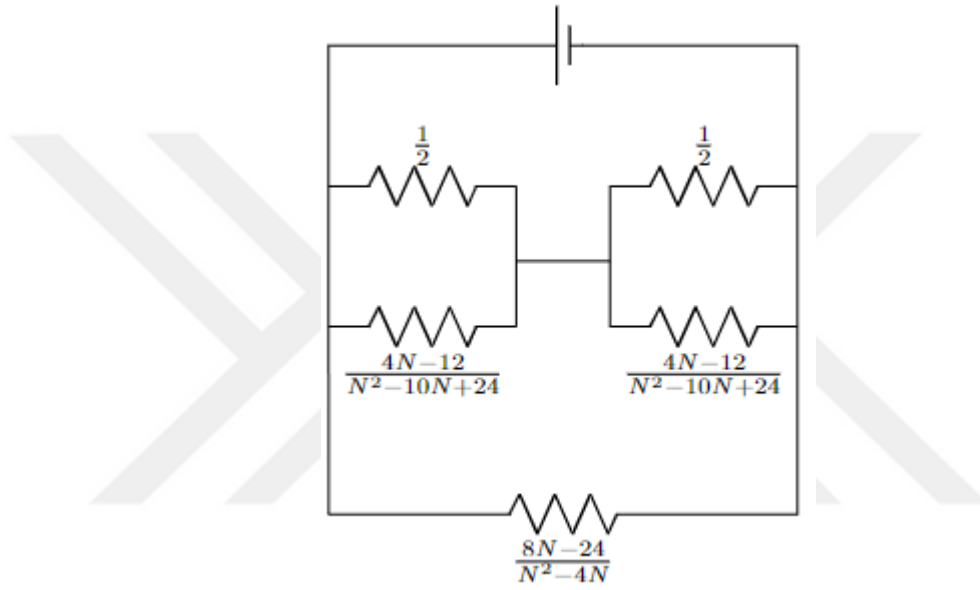
$Y - \Delta$ dönüşümü için uygulanan işlemler aşağıda verilmiştir:

$$r_G(c', d') + r_G(b', c') = \frac{1}{N-6} + \frac{4}{(N-6)(N-4)} = \frac{N}{N^2 - 10N + 24}$$

ve Y biçiminden Δ biçimine dönüşüm yapıldığından,

$$R_1 = R_2 = \frac{\frac{2\Phi}{N-4} + \frac{2\Phi}{N-4} + \frac{4}{(N-4)^2}}{\frac{2}{N-4}} = \frac{4N-12}{N^2-10N+24}, R_3 = \frac{8N-24}{N(N-4)}$$

elde edilir. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümünden (equivalent transformation) sonra Şekil 4.12’de verilen elektrik devresi elde edilir.



Şekil 4.12. $Y-\Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi

R_1 ve R_2 dirençleri $1/2$ değerli dirençlere paralel olduğundan,

$$R_1 \parallel \frac{1}{2} = R_2 \parallel \frac{1}{2} = \frac{4N-12}{N(N-2)}$$

elde edilir ve eşdeğer direnç $R_{es} = \frac{4}{N}$ olarak hesaplanır. Buradan,

$$\sum_{\{c_i, c_j\} \in U_3} r_G(c_i, c_j) = \frac{4}{N} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \frac{1}{2} = \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \frac{2}{N}$$

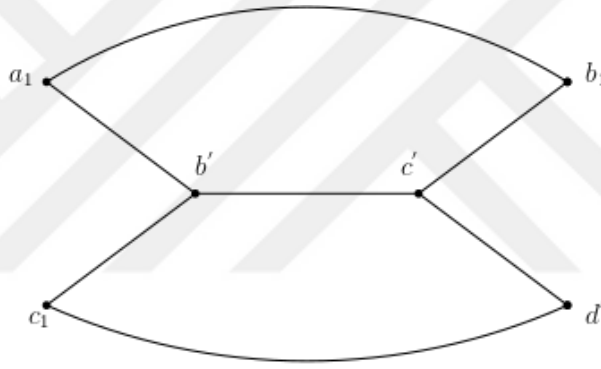
U_3 kümesi üzerindeki direnç mesafesi toplamı olarak hesaplanır.

Dördüncü olarak $\sum_{\substack{b_i \in U_2 \setminus \{b_1\} \\ c_j \in U_3}} r_G(b_i, c_j)$ direnç mesafesi toplamını hesaplayalım. Tüm

(b_i, c_j) ikilileri için direnç mesafesi $r_G(b_2, c_1)$ direnç mesafesine eşittir. Bu nedenle sadece $r_G(b_2, c_1)$ direnç mesafesini hesaplamak yeterli olacaktır.

$$B_3^-\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right) = B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right) - b_2c_1$$

olsun. b_2 ve c_1 arasına bir pil (battery) koyalım. $b_3, b_4, \dots, b_{\frac{N}{2}-2}$ köşelerini b' köşesine, $c_2, c_3, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}$ köşelerini c' köşesine sıkıştırılalım (Şekil 4.13).



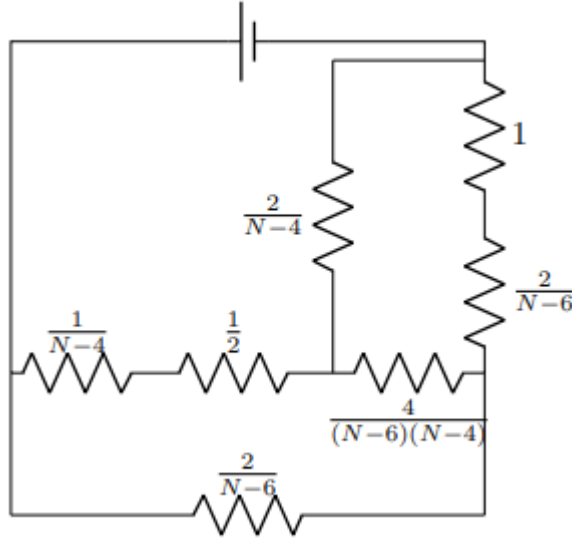
Şekil 4.13. $B_3^-\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)$ için sıkıştırılmış graf

Graf elektrik devresine dönüştürüldükten sonra işlemler yapıldığında yeni direnç mesafeleri:

$$r_G(c_1, d') = \frac{1}{2}, r_G(c_1, b') = r_G(a_1, b') = \frac{2}{N-6}, r_G(a_1, b_2) = 1,$$

$$r_G(b', c') = \frac{4}{(N-6)(N-4)}, r_G(c', d') = \frac{1}{N-4}, r_G(c', b_2) = \frac{2}{N-4}$$

olarak hesaplanır. Sıkıştırılmış grafın (contracted graph) elektrik devresi ile gösterimi Şekil 4.14'de verilmiştir.



Şekil 4.14. $B_3 \left(1, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} - 1, 2 \right)$ için sıkıştırılmış grafın elektrik devresi ile gösterimi

$Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) için uygulanan işlemler aşağıda verilmiştir:

$$r_G(b', b_1) = r_G(a_1, b_1) + r_G(b', a_1) = 1 + \frac{2}{N-6} = \frac{N-4}{N-6},$$

$$r_G(c_1, c') = \frac{1}{2} + \frac{1}{N-4} = \frac{N-2}{2(N-4)}.$$

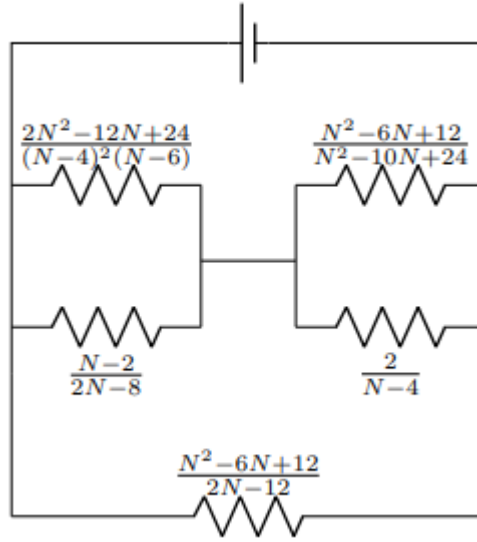
Y biçiminden Δ biçimine dönüşüm yapıldığından R_1 , R_2 ve R_3 dirençleri

$$R_1 = \frac{\frac{2}{N-6} \frac{N-4}{N-6} + \frac{4}{(N-6)(N-4)} \frac{N-4}{N-6} + \frac{2}{N-6} \frac{4}{(N-6)(N-4)}}{\frac{4}{(N-6)(N-4)}},$$

$$R_2 = \frac{\frac{2}{N-6} \frac{N-4}{N-6} + \frac{4}{(N-6)(N-4)} \frac{N-4}{N-6} + \frac{2}{N-6} \frac{4}{(N-6)(N-4)}}{\frac{2}{N-6}},$$

$$R_3 = \frac{\frac{2}{N-6} \frac{N-4}{N-6} + \frac{4}{(N-6)(N-4)} \frac{N-4}{N-6} + \frac{2}{N-6} \frac{4}{(N-6)(N-4)}}{\frac{N-4}{N-6}}.$$

olarak hesaplanır. Dönüşüm ile elde edilen elektrik devresi Şekil 4.15'deki gibidir.



Şekil 4.15. $Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü ile elde edilen elektrik devresi

Buradan

$$r_G^-(b_2, c_1) = \frac{4N^2 - 28N + 56}{N^3 - 10N^2 + 36N - 56}$$

elde edilir. $r_G(b_2, c_1)$ direnç mesafesi $r_G^-(b_2, c_1)$ e 1Ω luk direncin paralel bağlanması ile elde edileceğinden

$$r_G(b_2, c_1) = \frac{4N^2 - 28N + 56}{N(N-2)(N-4)}$$

olarak hesaplanır. Toplam direnç mesafesi ise

$$\sum_{\substack{b_i \in U_2 \setminus \{b_1\} \\ c_j \in U_3}} r_G(b_i, c_j) = \left(\frac{N-4}{2}\right) \left(\frac{N-2}{2}\right) r_G(b_2, c_1) = \frac{N^2 - 7N + 14}{N}$$

olarak bulunur.

$$B_3\left(1, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} - 1, 2\right) \text{ grafının çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi}$$

aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\xi_r^* \left(B_3 \left(1, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} - 1, 2 \right) \right) = \frac{4(2N^4 - 9N^3 + 16N^2 + 30N - 120)}{N(N-2)(N-4)}$$

Durum 3. $B_3 \left(1, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1, 1 \right)$ grafında yer alan U_3 ve U_4 köşe kümelerinin arasındaki bir kenar silinirse, $B_3 \left(2, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, 1 \right)$ elde edilir. Bu graf ile Durum 2’de elde edilen graf birbirine izomorfik oldukları için çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafeleri (multiplicative eccentricity resistance distance) eşittir.

Durum 4. $B_3 \left(1, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1, 1 \right)$ grafında bulunan U_1 ve U_2 köşe kümelerini birbirine bağlayan kenarlardan birini silerek $B_3^- \left(1, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1, 1 \right)$ grafi elde edilir.

Bu grafi $G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right)$ neredeyse tam iki parçalı grafi olarak yazabiliriz.

$G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right)$ grafının çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi aşağıdaki gibidir:

$$\xi_r^* \left(G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right) \right) = Kf \left(G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right) \right) - 2 \left[\sum_{\substack{b_i \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\} \\ c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}}} r_G(b_i, c_j) + \sum_{b_i, b_j \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\}} r_G(b_i, b_j) \right] \\ - 2 \sum_{c_i, c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}} r_G(c_i, c_j) + 3 \sum_{\{x_i, y_j\} \in \{a_1, d_1, b_1, c_1\}} r_G(x_i, y_j).$$

ve $G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right)$ grafının Kirchhoff indeksi

$$Kf \left(G \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2 \right) \right) = \frac{2N^4 - 19N^3 + 88N^2 - 224N + 256}{(N-4)(N^2 - 4N + 8)}$$

dir. Direnç mesafelerini hesaplayalım:

$$r_G(a_1, b_1) = r_G(d_1, c_1)$$

$$r_G(d_1, a_1) = r_G(c_1, b_1)$$

$$r_G(d_1, b_1) = r_G(c_1, a_1)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \sum_{\{x_i, y_j\} \in \{a_1, d_1, b_1, c_1\}} r_G(x_i, y_j) &= r_G(a_1, b_1) + r_G(d_1, c_1) + r_G(d_1, a_1) + r_G(c_1, b_1) \\ &\quad + r_G(d_1, b_1) + r_G(c_1, a_1) \end{aligned}$$

dir. İspatın devamında Lemma 2.1.9, 2.1.10 ve 2.1.11'den yararlanılarak

$$\sum_{\{x_i, y_j\} \in \{a_1, d_1, b_1, c_1\}} r_G(x_i, y_j) = 2 \left[\frac{4(N^2 - 3N + 4)}{N(N^2 - 4N + 8)} + \frac{4(N^2 - 5N + 8)}{N^3 - 8N^2 + 24N - 32} \right] + \frac{8(N - 2)}{N(N - 4)}$$

elde edilir.

$$\text{Şimdi } \sum_{b_i, b_j \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\}} r_G(b_i, b_j) = \sum_{c_i, c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}} r_G(c_i, c_j) \text{ değerlerini hesaplayalım.}$$

Lemma 2.10'dan yararlanarak,

$$\sum_{b_i, b_j \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\}} r_G(b_i, b_j) = \sum_{c_i, c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}} r_G(c_i, c_j) = \frac{N^2 - 10N + 24}{2N}$$

elde edilir. Ardından $\sum_{\substack{b_i \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\} \\ c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}}} r_G(b_i, c_j)$ değerini bulalım. Bunun için b_2 ve c_2 arasına

bir pil koyalım. X ve Y kümelerinin diğer köşeleri arasındaki voltaj değerleri aynıdır. Bu nedenle, $r_G(b_2, c_2)$ yi bulmamız yeterli olacaktır. b_2 ile c_2 arasındaki kenar silindiğinde

$$G^-\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2\right) = G\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2\right) - b_2 c_2$$

elde edilir. Bunun için $n \geq 8$ olmak üzere $r_G^-(b_2, c_2)$ yi hesaplayalım:

$$r_G^-(b_2, c_2) = \frac{4(N^2 - 5N + 12)}{N(N^2 - 4N + 8)}.$$

Buradan,

$$\sum_{\substack{b_i \in X - \{b_1\} \cup \{d_1\} \\ c_j \in Y - \{c_1\} \cup \{a_1\}}} r_G(b_i, c_j) = \frac{(N-4)^2(N^2 - 5N + 12)}{N(N^2 - 4N + 8)}$$

olarak hesaplanır. $G\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2\right)$ nin çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesi

$$\xi_r^*\left(G\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 2\right)\right) = \frac{4(2N^5 - 11N^4 + 26N^3 + 12N^2 - 272N + 576)}{N(N^3 - 8N^2 + 24N - 32)}$$

dir.

Sonuç olarak $N \geq 6$ ve çift ise 1. durumda verilen graf en küçük ikinci çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesine sahiptir.

Teorem 4.1.3. G grafi çapı (diameter) $D = 3$ olan neredeyse tam (nearly complete) iki parçalı tam graf olsun. Eğer N tek ve $N \geq 11$ ise

$$\xi_r^*(G) \geq \frac{4(2N^5 - 7N^4 + 11N^3 - 57N^2 - 72)}{(N+3)(N-3)(N+1)(N-5)}$$

dir. Eşitlik durumunun sağlanması için yeter ve gerek koşul $G \cong G\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+3}{2}, 1\right)$

olmasıdır. $G\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+3}{2}, 1\right)$ grafi ikinci en küçük çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesine sahiptir.

İspat. Teorem 4.1.2'ye benzer olarak, dört durum söz konusudur:

1. $G\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+3}{2}, 1\right),$
2. $B_3\left(2, \frac{N-3}{2}, \frac{N-3}{2}, 1\right),$

$$3. \quad B_3\left(1, \frac{N-5}{2}, \frac{N-1}{2}, 2\right),$$

$$4. \quad G\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, 2\right).$$

Bu dört durum için dış merkezlilik çarpımsal direnç mesafeleri:

$$\xi_r^*\left(G\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+3}{2}, 1\right)\right) = \frac{4(2N^5 - 7N^4 + 11N^3 - 57N^2 - 5N - 72)}{(N-5)(N+3)(N-3)(N+1)},$$

$$\xi_r^*\left(B_3\left(2, \frac{N-3}{2}, \frac{N-3}{2}, 1\right)\right) = \frac{4N(2N^4 - 9N^3 + 21N^2 + 17N - 111)}{(N^2 - 1)(N-3)^2},$$

$$\xi_r^*\left(B_3\left(1, \frac{N-5}{2}, \frac{N-1}{2}, 2\right)\right) = \frac{4(2N^4 - 7N^3 + 4N^2 + 21N - 40)}{(N-5)(N-1)(N+1)}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi, $G\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, 2\right)$ in çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesini

hesaplayalım. Bu grafin Kirchhoff indeksi

$$Kf\left(G\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, 2\right)\right) = \frac{2N^7 - 19N^6 + 86N^5 - 219N^4 + 270N^3 - 97N^2 + 90N + 15}{(N-1)(N+1)(-4N + N^2 - 1)(-4N + N^2 + 7)}$$

olarak hesaplanır. Buradan $G\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, 2\right)$ in çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \xi_r^*\left(G\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, 2\right)\right) &= \frac{2(4N^8 - 22N^7 + 51N^6 - 46N^5 - 129N^4 + 78N^3 + 953N^2)}{N(N+1)(N-1)(-4N + N^2 - 1)(-4N + N^2 + 7)} \\ &\quad - \frac{2(74N + 175)}{N(N-1)(N+1)(-4N + N^2 - 1)(-4N + N^2 + 7)}. \end{aligned}$$

n tek olduğunda;

1. $7 \leq N \leq 9$ koşulunda $B_3\left(2, \frac{N-3}{2}, \frac{N-3}{2}, 1\right)$,
2. $N \geq 11$ koşulu için ise $G\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+3}{2}, 1\right)$

en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahiptir.

Aşağıdaki teoremden en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip 3 çaplı (diameter) graflar verilmiştir.

Teorem 4.1.4. G grafi $N \geq 6$ köşeli ve $D = 3$ çaplı (diameter) bir graf olsun. Buradan

$$\xi_r^*(G) \geq \begin{cases} \frac{4N^4 - 8N^2 + 48N - 68}{(N-1)(N-2)^2}, & N \text{ çift} \\ \frac{4N^3 + 4N^2 - 8N + 48}{N^2 - 4N + 3}, & N \text{ tek} \end{cases}$$

dir ve eşitlik durumu için gerek ve yeter şart $G \cong G\left(1, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, 1\right)$ olmasıdır.

İspat. $1 \leq m \leq N-3$ olmak üzere $n_2 = m$ ve $n_3 = N-m-2$ olsun. $G_3(1, m, N-m-2, 1)$ in çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \xi_r^*(G_3(1, m, N-m-2, 1)) &= 6Kf\left(B_3\left(1, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1, 2\right)\right) + 3r_G(a_1, d_1) \\ &\quad - 2\left[\sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2} r_G(b_i, b_j) + \sum_{\{b_i, b_j\} \in U_2} r_G(c_i, c_j) + \sum_{b_i \in U_2, c_j \in U_3} r_G(b_i, c_j)\right]. \end{aligned}$$

Lemma 2.1.6'dan faydalanarak,

$$Kf(G_3(1, m, N-m-2, 1)) = \frac{(N-2)(N-1) + (m+1)(N-1-m)}{m(N-m-2)} - \frac{(4-N)N}{N-1}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1'in ispatına benzer şekilde direnç mesafeleri bulunarak, G grafının minimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
& \xi_r^*(G_3(1, m, N-m-2, 1)) \\
&= 6 \left(\frac{(N-1)(N-m-2) + (N-1)m + (N-1-m)(m+1)}{m(N-m-2)} + \frac{N(N-4)}{N-1} \right) \\
&+ 3 \left(-\frac{3(N-1)}{m(m-N+2)} \right) - 2 \left(-\frac{4m-2Nm+2m^2-1}{N-1} + m \frac{m-1}{N-1} \right) + \frac{(m-N+2)(m-N+3)}{N-1} \\
&= \frac{m^2(4N^2-8N-20) + m(16N^2-4N^3+4N-40) + N^2(9-6N)-3}{m(N-1)(2+m-N)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\xi_r^*(G_3(1, m, N-m-2, 1))$ minimum değerini $m = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1$ durumunda alır.

Sonuç olarak,

$$\xi_r^*(G_3(1, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, 1)) = \begin{cases} \frac{4N^4-8N^2+48N-68}{(N-1)(N-2)^2}, & N \text{ çift ise} \\ \frac{4N^3+4N^2-8N+48}{N^2-4N+3}, & N \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

4.2 İki Parçalı Graflar İçin Çarpımsal Dış Merkezlilik Direnç Mesafesi

Bu bölümde, $N = \sum_{i=1}^{2\gamma} n_i$ mertebeli $B_\gamma(n_1, n_2, \dots, n_{2\gamma})$ biçimindeki iki parçalı grafların çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. G grafi $N(N \geq 6)$ köşeli ve baskınlık sayısı (domination number) $\gamma = 2$ olan iki parçalı graf olsun. Bu durumda, $B_2(1, \lfloor N/2 \rfloor, \lceil N/2 \rceil, 1)$ en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine (multiplicative eccentricity resistance distance) sahiptir.

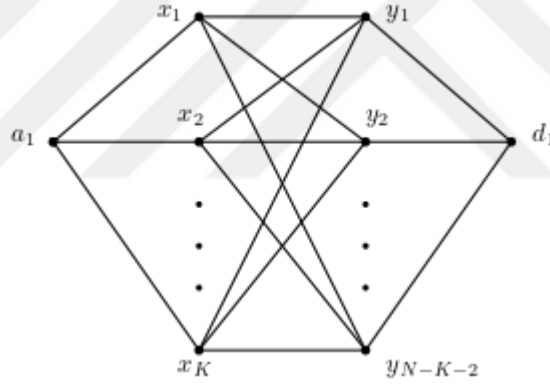
İspat. G grafi $B_2(1, n_2, n_3, 1)$ sınıfında olmalıdır. $1 \leq K \leq 3$ olmak üzere, Lemma 2.1.13 kullanılarak, $Kf(B_2(1, K, N-K-2, 1))$ kolaylıkla hesaplanır. Buradan, Şekil 4.16'da

verilen $B_2(1, K, N - K - 2, 1)$ grafinin çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance)

$$\begin{aligned} \xi_R^*(B_2(1, K, N - K - 2, 1)) &= 6Kf(B_2(1, K, N - K - 2, 1)) + 3r_G(a_1, d_1) \\ &\quad - 2 \left[\sum_{x_i \in V_2, y_j \in V_3} r_G(x_i, y_j) + \sum_{x_i, x_j \in V_2} r_G(x_i, x_j) \right] \\ &\quad - 2 \sum_{y_i, y_j \in V_3} r_G(y_i, y_j) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesini (multiplicative eccentricity resistance distance) hesaplamak için öncelikle $r_G(a_1, d_1)$ değerini hesaplayalım. Bunun için a_1 ve d_1 arasına bir pil koyalım.



Şekil 4.16. $B_2(1, K, N - K - 2, 1)$ grafi

$x_1, x_2, \dots, x_K$ ve $y_1, y_2, \dots, y_{N-K-2}$ köşelerindeki voltaj değerleri aynıdır. Bu nedenle, bu köşeler sıkıştırılarak (contract) x' ve y' olarak gösterilebilir. Sıkıştırılmış graf (contracted graph) her bir kenarı için aşağıda verilen direnç mesafelerine sahip olacaktır:

$$r_G(a_1, x') = \frac{1}{K}, r_G(x', y') = \frac{1}{K(N - K - 2)}, r_G(y', d_1) = \frac{1}{N - K - 2}.$$

Buradan,

Yeni grafın direnç mesafeleri aşağıdaki gibidir (Şekil 4.18):

$$r_G(a_1, x') = r_G(y_1, x') = \frac{1}{K-1}, r_G(a_1, x_1) = r_G(d_1, y_1) = 1,$$

$$r_G(x', y') = \frac{1}{(K-1)(N-K-3)}, r_G(d_1, y') = r_G(a_1, y') = \frac{1}{N-K-3}.$$

$Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) kullanılarak,

$$r_G^-(x_1, y_1) = \frac{K^2(1-N) + 2K + KN(N-3K) + 1}{(K^2 - K(2+N) + 1)(K^2 + K(2-N) - 1)}$$

ve

$$\sum_{x_i \in V_2, y_j \in V_3} r_G(x_i, y_j) = \frac{K^2N - K^2 - KN^2 + 3KN - 2K - 1}{(K - N + 1)(K + 1)}$$

elde edilir.

$r_G(x_1, x_2)$ değeri bulunarak, $\sum_{x_i, x_j \in V_2} r_G(x_i, x_j)$ hesaplanır. x_1 ve x_2 arasına bir pil (battery) koyalım. $x_3, x_4, \dots, x_K$ ve $y_1, y_2, \dots, y_{N-K-2}$ köşeleri sıkıştırılarak (contract), x' ve y' haline getirilir. $Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) kullanılarak $r_G(x_1, x_2)$ direnç mesafesi

$$r_G(x_1, x_2) = \frac{2}{N-K-1}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\sum_{x_i, x_j \in V_2} r_G(x_i, x_j) = \frac{K(K-1)}{N-K-1}$$

olduğu açıktır.

Sonrasında, $\sum_{y_i, y_j \in V_3} r_G(y_i, y_j)$ değeri bulunur. Bunun için $\sum_{x_i, x_j \in V_2} r_G(x_i, x_j)$

değerini elde etmek için kullanılan yöntem aracılığı ile

$$\sum_{y_i, y_j \in V_3} r_G(y_i, y_j) = \frac{(N-K-2)(N-K-3)}{K+1}$$

elde edilir.

Son olarak $B_2(1, K, N - K - 2, 1)$ grafının çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \xi_R^*(B_2(1, K, N - K - 2, 1)) &= 6Kf(B_2(1, K, N - K - 2, 1)) + \frac{3(1 - N)}{K(K - N + 2)} \\ &\quad - 2 \left[\frac{K^2N - K^2 - KN^2 + 3KN - 2K - 1}{(K - N + 1)(K + 1)} \right] - \frac{2K(K - 1)}{N - K - 1} \\ &\quad - \frac{2[(N - K - 2)(N - K - 3)]}{K + 1}. \end{aligned}$$

$\xi_R^*(B_2(1, K, N - K - 2, 1))$ ifadesinin $K = (N - 2)/2$ için minimum değerini aldığı açıktır.

Teorem 4.2.2. G grafı N köşeli ve baskınlık sayısı (domination number) $\gamma = 2$ olan iki parçalı bir graf olmak üzere, en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip graf sınıfı

$$B_2(\lfloor N/2 \rfloor - 1, 1, 1, \lceil N/2 \rceil - 1)$$

dır.

İspat. $\gamma = 2$ baskınlık sayısına (domination number) sahip iki parçalı graflardan en büyük Kirchhoff indekse sahip olanlar ağaç yapısında olduğundan, en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip olanlar $B_2(K, 1, 1, N - K - 2)$ ($1 \leq K \leq N - 3$) sınıfında yer almaktadır.

Lemma 2.1.13'den

$$Kf(B_2(K, 1, 1, N - K - 2)) = N^2 - (K + N)(K + 2) + 1$$

olarak hesaplanır.

T, X, Y ve Z kümeleri bağımsız kümeler olmak üzere, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{N-K-2}\}$,

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$, $Y = \{y_1\}$ ve $Z = \{z_1\}$ olsun. Direnç mesafeleri

$$r_G(y_1, z_1) = 1, \sum_{t_i, t_j \in T} r_G(t_i, t_j) = \frac{2(N-K-2)(N-K-3)}{2}, \sum_{x_i, x_j \in X} r_G(x_i, x_j) = \frac{2K(K-1)}{2},$$

$$\sum_{x_i \in X, t_j \in T} r_G(x_i, t_j) = 3K(N-K-2)$$

dir. Kirchhoff indeksi ve direnç mesafeleri yukarıdaki gibi olmak üzere $B_2(K, 1, 1, N-K-2)$ grafinin çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesi

$$\begin{aligned} \xi_R^*(B_2(K, 1, 1, N-K-2)) &= 6Kf(B_2(K, 1, 1, N-K-2)) - 2r_G(y_1, z_1) \\ &\quad + 3 \left(\sum_{x_i \in X, t_j \in T} r_G(x_i, t_j) + \sum_{x_i, x_j \in X} r_G(x_i, x_j) + \sum_{t_i, t_j \in T} r_G(t_i, t_j) \right) \\ &= 9K(N-K) - 18K + 9N(1-3N) + 22 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\xi_R^*(B_2(K, 1, 1, N-K-2))$ değeri $K = \lfloor N/2 \rfloor - 1$ için maksimum değerini alır.

Teorem 4.2.3’de kolaylık olması için $G(m, p) = K_{m,m} - pK_2$ biçimindeki hemen hemen tam (almost complete) iki parçalı graflardan yararlanılacaktır. Burada, baskınlık sayısı (domination number) $\gamma = 3$ ve $N(N = 4\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^+)$ mertebeli olan iki parçalı graflardan en küçük çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesine (multiplicative eccentricity resistance distance) sahip olanlar karakterize edilmiştir.

Teorem 4.2.3. Baskınlık sayısı (domination number) $\gamma = 3$ ve mertebesi $N(N = 4\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^+)$ olan graflar içerisinde, $B_3\left(1, \frac{N}{4}, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{4}, 1\right)$ graf sınıfı en küçük çarpımsal dış merkezlik direnç mesafesine (multiplicative eccentricity resistance distance) sahiptir.

İspat. Teorem 4.2.3’ün ifadesinde bahsedilen graflar $1 \leq M + K \leq N - 2$ ve $N = 4\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$B_3(n_1=1, n_2=M, n_3=K, n_4=N-M-K-2, n_5=1)$$

graf sınıfının bir alt sınıfıdır. Lemma 2.1.12'den

$$\begin{aligned} Kf(B_3(1, M, K, N-K-2-M, 1)) &= \frac{N-1}{M} - \frac{N-1}{K+M-N+2} - N \left(\frac{K-1}{K-N+2} - \frac{M-1}{K+1} \right) \\ &+ \frac{(1+M+K)(1+M+K-N)}{(M+K+2-N)K} - \frac{(1+M)(1-N+M)}{MK} \\ &+ \frac{(M+K+3-N)N}{1+K}. \end{aligned}$$

(X, Y) iki parçalı grafın parçalanışı olsun. $X = V_1 \cup V_3 \cup V_5 = \{a_1, y_1, y_2, \dots, y_K, d_1\}$, $Y = V_2 \cup V_4 = \{x_1, x_2, \dots, x_K, z_1, z_2, \dots, z_{N-M-K-2}\}$ dir. Graf hemen hemen tam (almost complete) iki parçalı graf olduğu için $X = Y$ dir.

a_1 ve d_1 köşelerinin dış merkezlilikleri (eccentricity) $\varepsilon(a_1) = \varepsilon(d_1) = 4$ dür. V_2, V_3 ve V_4 kümelerinin dış merkezlilikleri (eccentricity) ise $\varepsilon(V_2) = \varepsilon(V_4) = 3$ ve $\varepsilon(V_3) = 2$ dir. Buradan $B_3(1, M, K, N-K-2-M, 1)$ grafının çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi

$$\begin{aligned} \xi_R^*(B_3(1, M, K, N-K-2-M, 1)) &= 12Kf(B_3(1, M, K, N-K-2-M, 1)) + 4r_G(a_1, d_1) \\ &- 6 \left[\sum_{x_i \in V_2, y_j \in V_3} r_G(x_i, y_j) + \sum_{y_i \in V_3, z_j \in V_4} r_G(y_i, z_j) \right] \\ &- 3 \left(\sum_{x_i, x_j \in V_2} r_G(x_i, x_j) + \sum_{z_i, z_j \in V_4} r_G(z_i, z_j) \right) \\ &- 3 \sum_{x_i \in V_2, z_j \in V_4} r_G(x_i, z_j) - 8 \sum_{y_i, y_j \in V_3} r_G(y_i, y_j) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $N(N=4\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^+)$ mertebeli, baskınlık katsayısı (domination number) $\gamma = 3$ olan en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesine sahip hemen hemen tam (almost complete) iki parçalı graf

$$B_3\left(1, \frac{N}{4}, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{4}, 1\right)$$

olarak elde edilir.

$N = \sum_{i=1}^{2^{\gamma}-1} n_i$ mertebeli $B_{\gamma}(n_1, n_2, \dots, n_{2^{\gamma}-1})$ biçimindeki iki parçalı graflar için de benzer sonuçlar verilebilir.



5. BAZI TOPOLOJİK İNDEKSLER İÇİN SINIRLAR

Grafların en önemli uygulama alanlarından biri Kimya alanıdır. Kimyasal bileşiklerin bazı temel biyolojik ve fiziko kimyasal özelliklerini tahmin etmek için birçok moleküler yapı tanımlayıcıları (topolojik indeksler) ortaya çıkmış; kimya veya matematik alanlarındaki araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Wiener'in (Wiener, 1947) çalışması referans alınarak, birçok farklı topolojik indeks tanıtılmış ve incelenmiştir. Atom-bağ bağlantılılık (atom bond-connectivity), aritmetik-geometrik, Zagreb, Randić, harmonik, Sombor, unutulmuş (forgotten) indeksleri, moleküler yapı tanımlayıcı indeksler grubundaki dereceye bağlı topolojik indekslerdir. Topolojik indeksler için üst ve alt sınırların incelenmesi kimya, teorik ve uygulamalı matematikte oldukça önemlidir.

Tez çalışmasının bu bölümünde dereceye bağlı Randić, harmonik, Sombor ve unutulmuş (forgotten) indeksleri ile dış merkezliliğe bağlı harmonik ve dış merkezliliğe bağlı atom-bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksleri ele alınarak alt ve üst sınırların bulunması için yeni bir metot önerilmiştir.

Bu bölüm boyunca, $f_y : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \geq 1$ sabit olmak üzere f_y fonksiyonu kullanılacaktır. Aşağıda verilen integraller için karşılaştırma teoremi ve ortalama değer teoremi ana sonuçlar için kullanılacaktır:

Teorem 5.1. (*İntegraller için karşılaştırma teoremi*) $s, t \in [a, b]$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için

$$s(x) \leq t(x) \Rightarrow \int_a^b s(x) dx \leq \int_a^b t(x) dx$$

dir (Buck, 1956).

Teorem 5.2. (*Ortalama değer teoremi*) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ mevcuttur (Buck, 1956).

5.1. Harmonik ve Randić İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar

Aşağıda verilen lemmalar ana sonuçlarda kullanılacaktır.

Lemma 5.1.1. y bir sabit olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu azalan fonksiyon olsun. Eğer $y \geq 1$ ve $x_0 \geq 2$ ise

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx \leq f_y(x_0) \leq \int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. y bir sabit olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu azalan fonksiyon olsun. Eğer $y \geq 1$ ve $x_0 \geq 2$ ise integraller için ortalama değer teoreminden

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx = f_y(c)$$

olacak şekilde bir $c \in [x_0, x_0 + 1]$ mevcuttur. Buradan,

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx = f_y(c) \leq f_y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x_0) dx$$

yazılabilir.

Ayrıca, $f_y(x_0) \geq 0$ ve f_y fonksiyonu azalan olduğu için, $\int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx$ integrali

en az $f_y(x_0)$ olmalıdır. Yani,

$$\int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x_0) dx = f_y(x_0) \leq \int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx$$

dir. Sonuç olarak ise

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx \leq f_y(x_0) \leq \int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx$$

elde edilir.

Lemma 5.1.1'den yararlanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Lemma 5.1.2. y sabit ve $\delta_n \leq x_0 \leq \Delta$ olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu azalan fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$y=1$ için,

$$\text{i. } f_1(x_0) \geq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx \geq f_1(\Delta),$$

$$\text{ii. } f_1(x_0) \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx \leq f_1(\delta_n).$$

$\delta_n \leq y \leq \Delta$ için,

$$\text{iii. } f_y(x_0) \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx \leq f_{\delta_n}(\delta_n),$$

$$\text{iv. } f_y(x_0) \geq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx \geq f_{\Delta}(\Delta).$$

İspat. $\delta_n \leq x_0 \leq \Delta$ olsun. Eğer $y=1$ ise f_y azalan olduğu için

$$f_1(x_0) \geq f_1(\Delta-1) \geq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx \geq f_1(\Delta)$$

ve

$$f_1(x_0) \leq f_1(\delta_n+1) \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx \leq f_1(\delta_n)$$

yazılır. Eğer $\delta_n \leq y \leq \Delta$ ise Lemma 5.1.1'den

$$f_y(x_0) \leq f_y(\delta_n+1) \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_y(x) dx \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx \leq f_{\delta_n}(\delta_n)$$

ve benzer şekilde

$$f_y(x_0) \geq f_y(\Delta-1) \geq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_y(x) dx \geq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx \geq f_{\Delta}(\Delta)$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur.

Herhangi bir G grafında v_i köşesinin derecesi d_i , v_j köşesinin derecesi de d_j olmak üzere, G grafının harmonik indeksin $H(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2}{d_i + d_j}$ olduğunu hatırlatalım. $x, y \geq 1$ olmak üzere, $f_y(x) = \frac{2}{x+y}$ olsun. Eğer y bir sabit olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu azalandır. Elementer integral işlemleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_a^b f_y(x) dx = 2 \ln \left(\frac{y+b}{y+a} \right).$$

Yukarıda verilen bilgiler göz önünde bulundurularak, aşağıdaki teoremden harmonik indeks için alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 5.1.1. G , m kenarlı, p asılı (pendant) köşeli, en büyük derecesi Δ , asılı olmayan (non-pendant) en küçük dereceli köşesinin derecesi δ_n olan bir graf ve $C_{1,x}$, uç köşelerinin derecesi 1 ve x olan kenarların sayısı olmak üzere

$$H(G) \geq (m-p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx + (p-C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} \frac{2}{1+\Delta}$$

ve

$$H(G) \leq (m-p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p-C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} \frac{2}{1+\delta_n}$$

dir. Yukarıdaki her iki eşitsizlikte eşitlik koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. $E(G)$ kenar kümesini aşağıdaki gibi üç farklı kümeye ayıralım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (d_i, d_j) = (1, \Delta)\},$$

$$Y = \{v_i v_j \in E(G) : v_i v_j \notin X \text{ ve } v_i v_j \text{ asılı kenar}\},$$

$$Z = E(G) - \{X \cup Y\}.$$

$\beta \in \{X, Y, Z\}$ olmak üzere $S_\beta = \sum_{v_i v_j \in \beta} f_{d_{v_j}}(d_{v_i})$ olsun. Böylece harmonik indeks

$$H(G) = S_X + S_Y + S_Z$$

biçiminde yazılabilir.

$$S_X = C_{1,\Delta} \frac{2}{1+\Delta}$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir. Lemma 5.1.2 (i) ve (iv)'den

$$S_Y \geq |S_Y| \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx = (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx$$

ve

$$S_Z \geq |S_Z| \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_\Delta(x) dx = (m - p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_\Delta(x) dx$$

olacağından, buradan harmonik indeks için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$H(G) \geq (m - p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_\Delta(x) dx + (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} \frac{2}{1+\Delta}.$$

Şimdi yine $E(G)$ kümesini aşağıdaki şekilde parçalayalım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (d_i, d_j) = (1, \delta_n)\},$$

$$Y = \{v_i v_j \in E(G) : v_i v_j \notin X \text{ ve } v_i v_j \text{ asıllı kenar}\},$$

$$Z = E(G) - \{X \cup Y\}.$$

$\beta \in \{X, Y, Z\}$ olmak üzere S_β yukarıdaki gibi tanımlansın. Böylece benzer şekilde

$$H(G) = S_X + S_Y + S_Z$$

elde edilecek ve

$$S_X = C_{1,\delta_n} \frac{2}{1+\delta_n}$$

olacaktır. Lemma 5.1.2 (ii) ve (iii)'den

$$S_Y \leq |S_Y| \int_{\delta_n-1}^{\delta_n} f_1(x) dx = (p - C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n-1}^{\delta_n} f_1(x) dx$$

ve

$$S_Z \leq |S_Z| \int_{\delta_n-1}^{\delta_n} f_{\delta_n}(x) dx = (m - p) \int_{\delta_n-1}^{\delta_n} f_{\delta_n}(x) dx$$

olacağından, buradan harmonik indeks için aşağıdaki üst sınır bulunur:

$$H(G) \leq (m - p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p - C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} \frac{2}{1 + \delta_n}.$$

Şimdi eşitlik durumunu alt sınır için ispatlayalım. Alt sınır için eşitliğin sağlandığını kabul edelim. Aynı zamanda

$$I_Y = (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta}^{\Delta+1} f_1(x) dx$$

ve

$$I_Z = (m - p) \int_{\Delta}^{\Delta+1} f_{\Delta}(x) dx$$

olsun.

Lemma 5.1.2'den $S_Y \geq I_Y$ ve $S_Z \geq I_Z$ olduğu açıktır. Alt sınır için eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. Yani, $S_Y = I_Y$ ve $S_Z = I_Z$ durumunu göz önüne alalım. Eşitlik koşulunun sağlanması için $I_Y = 0$ ve $I_Z = 0$ olmalıdır. Buradan $p - C_{1,\Delta} = 0$ ve $m - p = 0$ dır. Bu nedenle, her $v_i v_j \in E(G)$ için $v_i v_j \in X$ olduğu açıktır.

Eğer $G \cong K_{1,n-1}$ ise

$$H(K_{1,n-1}) = \frac{2m}{n}$$

dir. Harmonik indeksin üst sınırı için de ispat benzer yöntemle gösterilebilir.

Lemma 5.1.2'den aşağıdaki sonucu elde ederiz. Alt sınır, Li ve Shiu (2014)'de

bulunan alt sınır ile aynıdır.

Sonuç 5.1.1. G grafi Teorem 5.1.1’de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun. Buradan

$$\frac{m-p}{\Delta} + \frac{2p}{1+\Delta} \leq H(G) \leq \frac{m-p}{\delta_n} + \frac{2p}{1+\delta_n}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafta da sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ ya da G regüler graf olmasıdır.

İspat. Alt sınır için Lemma 5.1.2 (i) ve (iv) koşullarından $\int_{\Delta}^{\Delta+1} f_1(x) dx \geq f_1(\Delta) = \frac{2}{1+\Delta}$

ve $\int_{\Delta}^{\Delta+1} f_{\Delta}(x) dx \geq f_{\Delta}(\Delta) = \frac{1}{\Delta}$ dir. Üst sınır için Lemma 5.1.2 (ii) ve (iii) koşullarından

$$\int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx \leq f_{\delta_n}(\delta_n) = \frac{1}{\delta_n} \text{ ve } \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx \leq f_1(\delta_n) = \frac{2}{1+\delta_n} \text{ dir.}$$

Üst sınır için eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. Sonuç 5.1.1’de üst sınır için verilen eşitsizlikler eşitlik durumuna gelir. $m = p$ olduğunu yani tüm kenarların asılı (pendant) olduğunu kabul edelim. Tüm asılı (pendant) $v_i v_j \in E(G)$ için $d(v_i) = \Delta$ ve $d(v_j) = 1$ olur. Bu nedenle $G = K_{1,n-1}$ dir. Eğer $p = 0$ ise asılı (pendant) kenar olmayacağından tüm $v_i, v_j \in V(G)$ için $d(v_i) = d(v_j)$ olur. Yani graf regülerdir.

Uyarı 5.1.1. Teorem 5.1.1’de verilen alt sınır Sonuç 5.1.1’de ve dolayısıyla Li ve Shiu (2014)’nın makalesinde verilen alt sınırdan daha iyidir.

Özel olarak, Sonuç 5.1.1’de $p = 0$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir. Alt sınır Li ve Shiu (2014)’de bulunan alt sınır ile aynıdır.

Sonuç 5.1.2. G grafi basit bağlantılı m kenarlı, en büyük köşe derecesi Δ ve en küçük köşe derecesi δ olan bir graf olsun. Buradan

$$\frac{m}{\Delta} \leq H(G) \leq \frac{m}{\delta}$$

elde edilir. Her iki sınır için de eşitlik G grafının regüler graf olması ile sağlanır.

Herhangi bir G grafında v_i derecesi d_i , v_j de derecesi d_j olan iki köşe olmak üzere, G grafının Randić indeksinin $R(G) = \sum_{v_i, v_j \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$ biçiminde tanımlandığını hatırlayalım. $x, y \geq 1$ olmak üzere, $f_y(x) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ olsun. Eğer y sabit alınırsa $f_y(x)$ fonksiyonu azalandır. Bu fonksiyonun integral değeri

$$\int_a^b f_y(x) dx = \frac{2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 5.1.2. G , m kenarlı, p asılı (pendant) köşeli, en büyük derecesi Δ , asılı olmayan (non-pendant) en küçük dereceli köşesinin derecesi δ_n olan bir graf ve $C_{1,x}$, uç köşelerinin derecesi 1 ve x olan kenarların sayısı olmak üzere

$$R(G) \geq (m-p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx + (p-C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

ve

$$R(G) \leq (m-p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p-C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}$$

dir. Her iki sınır için de eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. Teorem 5.1.1'in ispatında yapılan ispata benzer olarak yapılabilir.

Lemma 5.1.2'yi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz. Üst sınır aynı zamanda Lokesha ve ark. (2013) tarafından da elde edilmiştir. Burada aynı üst sınır farklı bir metot kullanılarak elde edilmiştir.

Sonuç 5.1.3. G grafi Teorem 5.1.2'de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun. Buradan

$$\frac{m-p}{\Delta} + \frac{p}{\sqrt{\Delta}} \leq R(G) \leq \frac{m-p}{\delta_n} + \frac{p}{\sqrt{\delta_n}}$$

dir. Her iki sınır için de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ ya da G grafının regüler olmasıdır.

İspat. Sonuç 5.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Uyarı 5.1.2. Teorem 5.1.2'deki üst sınırın, Sonuç 5.1.3 ve dolayısıyla Lokesha ve ark. (2013) tarafından verilen üst sınırdan daha iyi olduğu açıktır.

Eğer $p = 0$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.1.4. G grafi basit bağlantılı m kenarlı, en büyük derecesi Δ ve en küçük derecesi δ olan bir graf olsun. Buradan

$$\frac{m}{\Delta} \leq R(G) \leq \frac{m}{\delta}$$

elde edilir. Her iki sınır için de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olması durumunda sağlanır.

5.2. Sombor ve Unutulmuş İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar

Lemma 5.1.1'e benzer olarak aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 5.2.1. y bir sabit olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu artan fonksiyon olsun. Eğer $y \geq 1$ ve $x_0 \geq 2$ ise integraller için ortalama değer teoreminden

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx = f_y(c)$$

olacak şekilde bir $c \in [x_0, x_0 + 1]$ mevcuttur. Buradan,

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx = f_y(c) \geq f_y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x_0) dx.$$

Ayrıca, $f_y(x_0) \geq 0$ ve f_y fonksiyonu $y \geq 2$ için artan olduğu için, $\int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx$

integralinin değeri en az $f_y(x_0)$ olmalıdır. Yani,

$$\int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x_0) dx = f_y(x_0) \geq \int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx.$$

Sonuç olarak,

$$\int_{x_0-1}^{x_0} f_y(x) dx \leq f_y(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+1} f_y(x) dx$$

elde edilir.

Lemma 5.2.1'den faydalanarak, Lemma 5.1.2'ye benzer şekilde Lemma 5.2.2 verilir.

Lemma 5.2.2. y sabit ve $\delta_n \leq x_0 \leq \Delta$ olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu artan fonksiyon olsun. Dört durum söz konusudur:

$y=1$ için,

- i. $f_1(x_0) \leq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx \leq f_1(\Delta),$
- ii. $f_1(x_0) \geq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx \geq f_1(\delta_n).$

$\delta_n \leq y \leq \Delta$ için,

- iii. $f_y(x_0) \geq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx \geq f_{\delta_n}(\delta_n),$
- iv. $f_y(x_0) \leq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx \leq f_{\Delta}(\Delta).$

İspat. $\delta_n \leq x_0 \leq \Delta$ olsun. Eğer $y=1$ ise f_y artan olduğu için

$$f_1(x_0) \leq f_1(\Delta-1) \leq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx \leq f_1(\Delta)$$

ve

$$f_1(x_0) \leq f_1(\delta_n+1) \leq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx \leq f_1(\delta_n)$$

elde edilir. Eğer $\delta_n \leq y \leq \Delta$ ise Lemma 5.2.1'den

$$f_y(x_0) \geq f_y(\delta_n+1) \geq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_y(x) dx \geq \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx \geq f_{\delta_n}(\delta_n)$$

ve benzer şekilde

$$f_y(x_0) \leq f_y(\Delta-1) \leq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_y(x) dx \leq \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx \leq f_{\Delta}(\Delta).$$

Herhangi bir G grafında v_i derecesi d_i , v_j de derecesi d_j olan iki köşe olmak üzere, G grafının Sombor indeksinin $SO(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \sqrt{d_i^2 + d_j^2}$ olduğunu hatırlayalım.

$x, y \geq 1$ olmak üzere, $f_y(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$ olsun. Eğer $y \geq 1$ sabit ise f_y fonksiyonu artandır. Fonksiyonun integral değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I = \int \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) 1 dx \text{ olmak üzere,}$$

$$\int f_1(x) g_1(x) dx = f_1(x) \int g_1(x) dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \int g_1(x) \right] dx$$

formülü I için uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2 + y^2} \int 1 dx - \int \left[\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2} \left(\int 1 dx \right) \right] dx \\ &= x \sqrt{x^2 + y^2} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} x dx \\ &= x \sqrt{x^2 + y^2} - \int \frac{x^2 + y^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + y^2} - \int \frac{-y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \int \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \end{aligned}$$

$$I = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \int \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

elde edilir ve $I = \int \sqrt{x^2 + y^2} dx$ olduğundan,

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{y^2}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

olarak hesaplanır. Son olarak, $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ olduğundan

$$\int \sqrt{x^2 + y^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{y^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

sonucu elde edilir. Belirli integral için de aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_a^b f_y(x) dx = y^2 \left(\frac{b\sqrt{y^2 + b^2} - a\sqrt{y^2 + a^2}}{2y^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b + \sqrt{y^2 + b^2}}{a + \sqrt{y^2 + a^2}} \right) \right).$$

Teorem 5.2.1. G , m kenarlı, p asılı (pendant) köşeli, en büyük derecesi Δ , asılı olmayan (non-pendant) en küçük dereceli köşesinin derecesi δ_n olan bir graf ve $C_{1,x}$ uç köşelerinin derecesi 1 ve x olan kenarların sayısı olmak üzere

$$SO(G) \leq (m - p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx + (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} \sqrt{1 + \Delta^2}$$

ve

$$SO(G) \geq (m - p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p - C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} \sqrt{1 + \delta_n^2}$$

dir. Alt ve üst sınırdaki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. $E(G)$ kenar kümesini aşağıda gösterilen biçimde alalım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (d_i, d_j) = (1, \Delta)\},$$

$$Y = \{v_i v_j \in E(G) : v_i v_j \notin X \text{ ve } v_i v_j \text{ asılı kenar}\},$$

$$Z = E(G) - \{X \cup Y\}.$$

$\beta \in \{X, Y, Z\}$ olmak üzere $S_\beta = \sum_{v_i v_j \in \beta} f_{d_{v_j}}(d_{v_i})$ olsun. Böylece Sombor indeksi

$SO(G) = S_X + S_Y + S_Z$ dir. Buradan,

$$S_X = C_{1,\Delta} \sqrt{1 + \Delta^2}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Lemma 5.2.2 (i) ve (iv)'den

$$S_Y \leq |S_Y| \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx = (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx$$

ve

$$S_Z \leq |S_Z| \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx = (m - p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx$$

olduğundan, Sombor indeksi için aşağıdaki üst sınır elde edilir:

$$SO(G) \leq (m - p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx + (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} \sqrt{1 + \Delta^2}.$$

Lemma 5.2.2 (ii) ve (iii)'yi kullanarak Sombor indeksi için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$SO(G) \geq (m - p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p - C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} \sqrt{1 + \delta_n^2}.$$

$I_Y = (p - C_{1,\Delta}) \int_{\Delta}^{\Delta+1} f_1(x) dx$ ve $I_Z = (m - p) \int_{\Delta}^{\Delta+1} f_{\Delta}(x) dx$ olmak üzere, üst sınır için eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. Yani, $S_Y = I_Y$ ve $S_Z = I_Z$ durumunu göz önüne alalım. Eşitlik koşulunun sağlanması için $I_Y = 0$ ve $I_Z = 0$ olmalıdır. Buradan $p - C_{1,\Delta} = 0$ ve $m - p = 0$ dır. Bu nedenle, her $v_i v_j \in E(G)$ için $v_i v_j \in X$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan, $G \cong K_{1,n-1}$ ise

$$SO(K_{1,n-1}) = m \sqrt{1 + (n-1)^2}$$

dir. Sombor indeksin alt sınırı için de ispat benzer yöntemle gösterilebilir.

Teorem 5.2.1'in sonucu olarak, Sombor indeks için aşağıdaki sınırları elde ederiz.

Sonuç 5.2.1. G grafi Teorem 5.2.1'de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun. Buradan

$$(m-p)\sqrt{2}\delta_n + p\sqrt{1+\delta_n^2} \leq SO(G) \leq (m-p)\sqrt{2}\Delta + p\sqrt{1+\Delta^2}$$

olur ve her bir eşitsizliğin eşit olması durumu için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ ya da G grafının regüler olmasıdır.

Sonuç 5.2.1'de $p = 0$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2.2. G grafi basit bağlantılı m kenarlı, en büyük derecesi Δ ve en küçük derecesi δ olan bir graf olsun. Buradan

$$m\sqrt{2}\delta \leq SO(G) \leq m\sqrt{2}\Delta$$

dır. Her iki sınırdaki eşitlik koşulu için gerek ve yeter şart G grafının regüler olmasıdır.

Herhangi bir G grafında v_i derecesi d_i , v_j de derecesi d_j olan iki köşe olmak üzere, G grafının unutulmuş (forgotten) indeksin $F(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} (d_i^2 + d_j^2)$ olduğunu

hatırlayalım. $x, y \geq 1$ olmak üzere, $f_y(x) = x^2 + y^2$ olsun. Eğer $y \geq 1$ sabit ise f_y fonksiyonu artandır. İlgili fonksiyonun integral değeri

$$\int_a^b f_y(x) dx = y^2(b-a) + \frac{b^3 - a^3}{3}$$

olarak hesaplanır.

Son olarak unutulmuş (forgotten) indeks için yeni sınırlar verelim.

Teorem 5.2.2. G , m kenarlı, p asılı (pendant) köşeli, en büyük derecesi Δ , asılı ol-

mayan (non-pendant) en küçük dereceli köşesinin derecesi δ_n olan bir graf ve $C_{1,x}$, uç köşelerinin derecesi 1 ve x olan kenarların sayısı olmak üzere

$$F(G) \leq (m-p) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_{\Delta}(x) dx + (p-C_{1,\Delta}) \int_{\Delta-1}^{\Delta} f_1(x) dx + C_{1,\Delta} (1+\Delta^2)$$

ve

$$F(G) \geq (m-p) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_{\delta_n}(x) dx + (p-C_{1,\delta_n}) \int_{\delta_n}^{\delta_n+1} f_1(x) dx + C_{1,\delta_n} (1+\delta_n^2)$$

dir. Her iki sınır için de eşitlik sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. Teorem 5.2.1'in ispatına benzer şekilde verilebilir.

Sonuç 5.2.3. G grafı Teorem 5.2.1'de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun.

Buradan

$$(m-p)\delta_n^2 + p(1+\delta_n^2) \leq F(G) \leq (m-p)\Delta^2 + p(1+\Delta^2)$$

olur ve her bir eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ ya da G grafının regüler olmasıdır.

Eğer G grafında $p=0$ ise aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2.4. G grafı basit bağlantılı m kenarlı, en büyük derecesi Δ ve en küçük derecesi δ olan bir graf olsun. Buradan

$$2m\delta^2 \leq F(G) \leq 2m\Delta^2$$

dır. Eşitlik koşulunun her iki sınır için de sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olmasıdır.

5.3. Dış Merkezliliğe Bağlı Harmonik ve ABC İndeksleri İçin Yeni Sonuçlar

Lemma 5.1.1'den yararlanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Lemma 5.3.1. y bir sabit ve $r \leq x_0 \leq D$ olmak üzere $f_y(x)$ fonksiyonu azalan fonksiyon olsun. $y \geq 1$ için, iki durum söz konusudur:

- i. $f_y(x_0) \leq \int_r^{r+1} f_r(x) dx \leq f_r(r),$
- ii. $f_y(x_0) \geq \int_{D-1}^D f_D(x) dx \geq f_D(D).$

İspat. $r \leq x_0 \leq d$ olsun. Lemma 5.1.1'den

$$f_y(x_0) \leq f_y(r+1) \leq \int_r^{r+1} f_y(x) dx \leq \int_r^{r+1} f_r(x) dx \leq f_r(r)$$

ve benzer şekilde

$$f_y(x_0) \geq f_y(D-1) \geq \int_{D-1}^D f_y(x) dx \geq \int_{D-1}^D f_D(x) dx \geq f_D(D).$$

Herhangi bir G grafında v_i köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) ε_i ve v_j köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) de ε_j olmak üzere, G grafının dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı harmonik indeksinin $H_\varepsilon(G) = \frac{2}{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$ $x, y \geq 1$ olmak üzere,

$f_y(x) = \frac{2}{x+y}$ olsun. Eğer $y \geq 1$ sabit ise $f_y(x)$ fonksiyonu azalandır. Temel işlemlerden yararlanarak,

$$\int_a^b f_y(x) dx = 2 \ln \left(\frac{y+b}{y+a} \right)$$

elde edilir.

Yukarıda verilen bilgiler göz önünde bulundurularak, aşağıdaki teoremden dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı harmonik indeks için alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 5.3.1. G , m kenarlı, yarıçapı (radius) r ve çapı (diameter) D olan bir graf olsun.

Uç köşelerdeki dış merkezliliği (eccentricity) $D-1$ ve D olan kenar sayısı ρ_1 ise

$$H_{\varepsilon}(G) \geq (m - \rho_1) \int_{D-1}^D f_D(x) dx + \frac{2}{2D-1} \rho_1$$

ve uç köşelerde dış merkezliliği (eccentricity) r ve $r+1$ olan kenar sayısı ρ_2 ise

$$H_{\varepsilon}(G) \leq (m - \rho_2) \int_r^{r+1} f_r(x) dx + \frac{2}{1+2r} \rho_2$$

dir. Her iki sınır için de eşitlik durumunun sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. $E(G)$ kenar kümesini X ve Y biçiminde iki farklı kümeye ayıralım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (D-1, D)\},$$

$$Y = E(G) - X.$$

$\beta \in \{X, Y\}$ olmak üzere $S_{\beta} = \sum_{v_i v_j \in \beta} f_{D_{v_j}}(D_{v_i})$. Buradan $H_{\varepsilon}(G) = S_X + S_Y$ olup,

$$S_X = \frac{2}{2D-1} \rho_1$$

dir. Lemma 5.3.1'den

$$S_Y \geq |S_Y| \int_{D-1}^D f_D(x) dx = (m - \rho_1) \int_{D-1}^D f_D(x) dx$$

elde edilir. Buradan dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı harmonik indeks için bir alt sınır elde ederiz:

$$H_{\varepsilon}(G) \geq (m - \rho_1) \int_{D-1}^D f_D(x) dx + \frac{2}{2D-1} \rho_1.$$

Yine $E(G)$ kenar kümesini aşağıdaki şekilde parçalayalım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (r, r+1)\},$$

$$Y = E(G) - X.$$

$\beta \in \{X, Y, Z\}$ olmak üzere $S_\beta = \sum_{v_i v_j \in \beta} f_{D_{v_j}}(D_{v_i})$. Buradan $H_\varepsilon(G) = S_X + S_Y$ dir ve

$$S_X = \frac{2}{1+2r} \rho_2$$

olduğu kolaylıkla görülür. Lemma 5.3.1'den

$$S_Y \leq |S_Y| \int_r^{r+1} f_D(x) dx = (m - \rho_2) \int_r^{r+1} f_D(x) dx$$

olacağından, dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı harmonik indeks için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$H_\varepsilon(G) \leq (m - \rho_2) \int_r^{r+1} f_r(x) dx + \frac{2}{1+2r} \rho_2.$$

Şimdi eşitlik durumunu alt sınır için inceleyelim. Alt sınır için eşitliğin sağlandığını ve

$$I_Y = (m - \rho_1) \int_{D-1}^D f_D(x) dx$$

olduğunu varsayalım. Eşitliğin sağlanması için $I_Y = 0$ olmalıdır. Buradan $m - \rho_1 = 0$ dır. Bu nedenle, her $v_i v_j \in E(G)$ için $v_i v_j \in X$ olduğu açıktır.

Lemma 5.3.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.3.1. G grafi Teorem 5.3.1'de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun. Buradan

$$\frac{m - \rho_1}{D} + \frac{2\rho_1}{2D-1} \leq H_\varepsilon(G) \leq \frac{m - \rho_2}{r} + \frac{2\rho_2}{1+2r}$$

bulunur. Eşitlik koşulunun her iki tarafta da sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

Uyarı 5.3.1. Teorem 5.3.1’de verilen sınırlar Sonuç 5.3.1’de verilen sınırlardan daha iyidir.

Sonuç 5.3.1’den, daha önce Sowaity ve ark. (2019) tarafından da elde edilen sonuç yeni bir yöntem ile elde edilir.

Sonuç 5.3.2. G grafi basit bağlantılı m kenarlı, r yarıçaplı ve D çaplı bir graf olsun. Buradan

$$\frac{m}{D} \leq H_{\varepsilon}(G) \leq \frac{m}{r}$$

elde edilir. Her iki sınır için de eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G grafının yarı merkezli (self-centered) graf olmasıdır.

Uyarı 5.3.2. Sonuç 5.3.1’de verilen sınırlar Sonuç 5.3.2’de verilen sınırlardan daha iyidir.

Herhangi bir G grafında v_i köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) ε_i , v_j köşesinin dış merkezliliği (eccentricity) de ε_j olmak üzere G grafının dış merkezliliğe (eccentricity) bağlı atom bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksinin

$$ABC(G) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_j} - \frac{2}{\varepsilon_i \varepsilon_j}} \text{ olduğunu hatırlayalım.}$$

$$x, y \geq 1 \text{ olmak üzere, } f_y(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{xy}} \text{ olsun. } y > 2 \text{ için fonksiyon}$$

azalandır. Fonksiyonun integral değerini hesaplayalım:

$$I = \int \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{xy}} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int \sqrt{\frac{x+y-2}{x}} dx$$

ve $u = \sqrt{x+y-2}$ alınırsa,

$$I = \frac{2}{\sqrt{y}} \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - (y-2)}} du$$

elde edilir.

$y > 2$ durumu için $u = \sqrt{y-2} \sec t$ ve $du = \sqrt{y-2} \sec t \tan t dt$ dönüşümü uygulanarak,

$$t = \operatorname{arcsec} \sqrt{\frac{u}{y-2}} = \operatorname{arcsec} \sqrt{\frac{x+y-2}{y-2}} \text{ olmak üzere}$$

$$I = \frac{2y-4}{\sqrt{y}} \int \sec^3 t dt$$

dir.

$$\int \sec^3 t dt = \sec t \tan t - \int \tan^2 t \sec t dt$$

$$\int \sec^3 t dt = \sec t \tan t - \int \sec^3 t + \int \sec t dt$$

ve

$$t = \operatorname{arcsec} \sqrt{\frac{x+y-2}{y-2}}$$

olduğundan,

$$I = \frac{y-2}{\sqrt{y}} \left[\sqrt{\frac{x+y-2}{y-2}} \sqrt{\frac{x}{y-2}} + \ln \frac{\sqrt{x+y-2} + \sqrt{x}}{\sqrt{y-2}} \right] = f_y(x)x + \frac{y-2}{\sqrt{y}} \ln \frac{\sqrt{x+y-2} + \sqrt{x}}{\sqrt{y-2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_a^b f_y(x) dx = f_y(b)b - f_y(a)a + \frac{y-2}{\sqrt{y}} \ln \frac{\sqrt{b}(f_y(b)\sqrt{y}+1)}{\sqrt{a}(f_y(a)\sqrt{y}+1)}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 5.3.2. G , m kenarlı, yarıçapı (radius) r ve çapı (diameter) D olan bir graf olsun.

Uç köşelerdeki dış merkezliliği (eccentricity) $D-1$ ve D olan kenar sayısı ρ_1 ise

$$ABC_e(G) \geq (m - \rho_1) \int_{D-1}^D f_D(x) dx + \rho_1 \sqrt{\frac{2D-3}{D(D-1)}}$$

ve uç köşelerdeki dış merkezliliği (eccentricity) r ve $r+1$ olan kenar sayısı ρ_2 ise

$$ABC_{\varepsilon}(G) \leq (m - \rho_2) \int_r^{r+1} f_r(x) dx + \rho_2 \sqrt{\frac{2r-1}{r(r+1)}}$$

dir. Her iki sınırdaki eşitlik durumu için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat. $E(G)$ kenar kümesini aşağıdaki şekilde ayıralım:

$$X = \{v_i v_j \in E(G) : (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (d-1, d)\},$$

$$Y = E(G) - X.$$

İspatın devamı Teorem 5.3.1'in ispatı ile benzer şekilde verilebilir.

Lemma 5.3.2'yi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.3.3. G grafi Teorem 5.3.2'de verilen graf ile aynı özelliklere sahip olsun. Buradan

$$ABC_{\varepsilon}(G) \geq (m - \rho_1) \frac{\sqrt{2D-2}}{D} + \rho_1 \sqrt{\frac{2D-3}{D(D-1)}}$$

ve

$$ABC_{\varepsilon}(G) \leq (m - \rho_2) \frac{\sqrt{2r-2}}{r} + \rho_2 \sqrt{\frac{2r-1}{r(r+1)}}$$

dir. Her iki sınır için de eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

Uyarı 5.3.3. Teorem 5.3.2'deki sınırlar Sonuç 5.3.3'de verilen sınırlardan daha iyidir.

Sonuç 5.3.3'de elde edilen eşitsizlik Lee (2016) tarafından farklı metot kullanılarak bulunmuştur.

Sonuç 5.3.4. G grafi basit bağlantılı m kenarlı, r yarıçaplı ve D çaplı bir graf olsun. Buradan

$$m \frac{\sqrt{2D-2}}{D} \leq ABC_{\varepsilon}(G) \leq m \frac{\sqrt{2r-2}}{r}$$

elde edilir. Sınırlarda eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının yarı merkezli (self-centered) graf olmasıdır.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

6.1 Sonuçlar

Tez çalışmasında öncelikli olarak neredeyse tam iki parçalı graflar ele alınmıştır. Bu graflar elektrik devreleri haline getirilerek, karmaşık devreler elde edilmiştir. $Y - \Delta$ eşdeğer dönüşümü (equivalent transformation) kullanılarak, devreler basit hale dönüştürülmüştür. $D = 3$ için minimum ve ikinci minimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) değerine sahip olan neredeyse (nearly) tam iki parçalı graflar karakterize edilmiştir. Ayrıca, $D = 3$ çaplı (diameter) bütün graflar içerisinde minimum çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi değerine (multiplicative eccentricity resistance distance) sahip olan graf sınıfı da karakterize edilmiştir.

Sonrasında iki parçalı graflar ele alınmıştır. Burada iki parçalı graflar baskınlık sayısına (domination number) bağlı olarak sınıflandırılmıştır. Baskınlık sayısı (domination number) 2 olan iki parçalı graflardan en küçük ve en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) değerine sahip olanlar karakterize edilmiştir. Ayrıca baskınlık sayısı (domination number) 3 olan iki parçalı graflardan en küçük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) değerine sahip olanlar karakterize edilmiştir.

Ana sonuçların yer aldığı son bölümde ise dereceye bağlı bazı topolojik indeksler için yeni bir metot kullanılarak, yeni alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Özetle, Randić, harmonik, Sombor ve unutulmuş (forgotten) indeksleri ele alınarak alt ve üst sınırların bulunması için yeni bir metot önerilmiştir. Yeni metot ile elde edilen sınırların daha önce bulunmuş olan sınırlardan daha iyi olduğu gösterilmiştir.

6.2 Öneriler

Graf teorisinin elektrik ağları üzerine uygulamaları ile ilgili yapılabilecek çalışmalar aşağıda sıralanmıştır:

1. Direnç mesafesine bağlı yeni bir indeks tanımlanıp, bu indeks için en küçük ve en büyük değerler belirlenebilir.
2. İki parçalı, hemen hemen (almost) tam iki parçalı ve neredeyse (nearly) tam iki parçalı grafların en büyük, ikinci, üçüncü ve diğer en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) değerleri hesaplanabilir.
3. Özel graf türleri için en küçük ve en büyük çarpımsal dış merkezlilik direnç mesafesi (multiplicative eccentricity resistance distance) değerleri hesaplanabilir.

Tez çalışmasında verilen yeni metot aracılığıyla topolojik indeksler ile ilgili yapılabilecek çalışmalar ise aşağıda bulunmaktadır:

1. Dereceye bağlı farklı topolojik indeksler için yeni alt ve üst sınırlar tanımlanabilir.
2. Dış merkezliliğe bağlı diğer topolojik indeksler için benzer uygulamalar yapılabilir.
3. Direnç mesafesine bağlı indeksler için benzer uygulamaların yapıp yapılamayacağı araştırılabilir.
4. Verilen yeni yöntemden yola çıkarak, topolojik indekslerin alt ve üst sınırlarının incelenmesi için yeni yöntemler bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Ali, A., Lingping, Z. ve Gutman, I., 2019, Harmonic index and its generalizations: extremal results and bounds, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 81 (2), 249-311.
- Alyar, S. ve Khoeilar, R., 2021, Upper bounds for the forgotten topological index of graphs with given domination number, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14 (9), 2150148.
- Aouchiche, M. ve Hansen, P., 2007, On a conjecture about the Randić index, *Discrete Mathematics*, 307 (2), 262-265.
- Appel, K. ve Haken, W., 1978, The four-color problem, In: *Mathematics Today Twelve Informal Essays*, Eds: Springer, p. 153-180.
- Babić, D., Klein, D. J., Lukovits, I., Nikolić, S. ve Trinajstić, N., 2002, Resistance-distance matrix: A computational algorithm and its application, *International Journal of Quantum Chemistry*, 90 (1), 166-176.
- Balakrishnan, R. ve Ranganathan, K., 2012, *A textbook of graph theory*, Springer Science & Business Media, p.
- Ball, W. W. R., 1892, *Mathematical recreations and problems of past and present times*, Macmillan and Company, p. 232.
- Bapat, R. B., Gutman, I. ve Xiao, W., 2003, A simple method for computing resistance distance, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 58 (9-10), 494-498.
- Barrow, J. D., Bhavsar, S. P. ve Sonoda, D., 1985, Minimal spanning trees, filaments and galaxy clustering, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 216 (1), 17-35.
- Bollobás, B. ve Erdős, P., 1998, Graphs of extremal weights, *Ars combinatoria*, 50, 225.
- Bonchev, D., 1991, *Chemical graph theory: introduction and fundamentals*, CRC Press, p. 300.
- Borchardt, C. W., 1860, Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante.
- Buck, R., 1956, *Advanced Calculus* New York, McGraw-Hill: 423.
- Buyukkose, S. ve Cangul, I. N., 2022, Some notes on Randic index, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 40, 1-7.
- Calahan, D. A., 1972, *Computer-Aided Network Design: Revised Edition*, Michigan Univ Ann Arbor Dept of Electrical Engineering.

- Caporossi, G., Gutman, I., Hansen, P. ve Pavlović, L., 2003, Graphs with maximum connectivity index, *Computational biology and chemistry*, 27 (1), 85-90.
- Cayley, A., 1857, XXVIII. On the theory of the analytical forms called trees, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 13 (85), 172-176.
- Cayley, A., 1889, A Theorem on Trees, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 23, 376-378.
- Ceylan, İ. ve Filiz, M., 2018, Türkçe Kuralsız (Devrik) Cümle Yapısının Graf Çizimlerle Gösterilmesi, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33 (3), 631-643.
- Chakraborty, A., Dutta, T., Mondal, S. ve Nath, A., 2018, Application of graph theory in social media, *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, 6 (10), 722-729.
- Che, Z. ve Chen, Z., 2016, Lower and upper bounds of the forgotten topological index, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 76 (3), 635-648.
- Chen, H. ve Zhang, F., 2008, Resistance distance local rules, *Journal of Mathematical Chemistry*, 44 (2), 405-417.
- Chen, H., Li, W. ve Wang, J., 2022, Extremal values on the Sombor index of trees, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 87 (01), 23-49.
- Chen, W.-K., 2012, Applied graph theory, Elsevier, p. 498.
- Cruz, R. ve Rada, J., 2021, Extremal values of the Sombor index in unicyclic and bicyclic graphs, *Journal of Mathematical Chemistry*, 59 (4), 1098-1116.
- Das, C. ve Gutman, I., 2019, Comparing Laplacian energy and Kirchhoff index, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 81 (2), 419-424.
- Das, K. C., Güngör, A. D. ve Çevik, A. S., 2012, On Kirchhoff Index and Resistance–Distance Energy of a Graph, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 67, 541-556.
- Das, K. C., Çevik, A. S., Cangul, I. N. ve Shang, Y., 2021, On Sombor Index, *Symmetry*, 13 (1), 140.
- Delorme, C., Favaron, O. ve Rautenbach, D., 2002, On the Randic index, *Discrete Mathematics*, 257, 29-38.
- Deo, N., 2017, Graph theory with applications to engineering and computer science, Courier Dover Publications, p. 463.

- Dias, J. R., 1993, Molecular orbital calculations using chemical graph theory, Springer, p. 115.
- Du, Z., Jahanbani, A. ve Sheikholeslami, S. M., 2021, Relationships between Randić index and other topological indices, *Communications in Combinatorics and Optimization*, 6 (1), 137-154.
- Ediz, S., Farahani, M. R. ve Imran, M., 2017, On novel harmonic indices of certain nanotubes, *International Journal of Advanced Biotechnology and Research*, 8 (4), 87-92.
- Ellens, W., Spieksma, F. M., Van Mieghem, P., Jamakovic, A. ve Kooij, R. E., 2011, Effective graph resistance, *Linear Algebra and its Applications*, 435 (10), 2491-2506.
- Elumalai, S., Mansour, T. ve Rostami, M. A., 2017, On the bounds of the forgotten topological index, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 1687-1702.
- Estrada, E., Torres, L., Rodriguez, L. ve Gutman, I., 1998, An atom-bond connectivity index: modelling the enthalpy of formation of alkanes.
- Euler, L., 1741, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 128-140.
- Fajtlowicz, S., 1987, On conjectures of graffiti-ii, *Congr. Numer*, 60, 187-197.
- Farahani, M. R., 2013, Eccentricity version of atom-bond connectivity index of benzenoid family ABC5 (Hk), *World Applied Sciences Journal*, 21 (9), 1260-1265.
- Filipovski, S., 2021, Relations between Sombor index and some degree-based topological indices, *Iranian J. Math. Chem.*, 12 (1), 19-26.
- Furtula, B. ve Gutman, I., 2015, A forgotten topological index, *Journal of Mathematical Chemistry*, 53 (4), 1184-1190.
- Ge, J. ve Dong, F., 2020, Spanning trees in complete bipartite graphs and resistance distance in nearly complete bipartite graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 283, 542-554.
- Gervacio, S. V., 2016, Resistance distance in complete n-partite graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 203, 53-61.
- Gower, J. C. ve Ross, G. J., 1969, Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 18 (1), 54-64.
- Gutman, I. ve Mohar, B., 1996, The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide, *Journal of chemical information and computer sciences*, 36 (5), 982-985.

- Gutman, I., 2013, Degree-based topological indices, *Croatica chemica acta*, 86 (4), 351-361.
- Gutman, I., Ghalavand, A., Zadeh, T. D. ve Ashrafi, A. R., 2017, Graphs with smallest forgotten index, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 8 (3), 259-273.
- Gutman, I., 2021, Geometric approach to degree-based topological indices: Sombor indices, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 86 (1), 11-16.
- Hong, Y., Zhu, Z. ve Luo, A., 2018, Some transformations on multiplicative eccentricity resistance-distance and their applications, *Applied Mathematics and Computation*, 323, 75-85.
- Hong, Y. ve Zhu, Z., 2019, The first two cacti with larger multiplicative eccentricity resistance-distance, *Filomat*, 33 (6), 1783-1800.
- Hong, Y., Zhu, Z. ve Luo, A., 2019, Extremal graphs with diameter 2 for two indices on resistance-distance, *Discrete Mathematics*, 342 (2), 487-497.
- Horoldagva, B. X., C., 2021, On sombor index of graphs, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 86, 703-713.
- Hu, Z. ve Zhong, L., 2022, The harmonic index for trees with given domination number, *Discrete Mathematics Letters*, 9, 31-37.
- Jiang, X., He, W., Liu, Q. ve Li, J., 2020, On the Kirchhoff index of bipartite graphs with given diameters, *Discrete Applied Mathematics*, 283, 512-521.
- Khaksari, A. ve Ghorbani, M., 2017, On the forgotten topological index, *Iranian J. Math. Chem.*, 8 (3), 327 – 338.
- Kirchhoff, G., 1847, Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik*, 148 (12), 497-508.
- Kirgiz, H. ve Maden, A. D., 2021, A Note On Bipartite Graphs with Domination Number 2 and 3, *European Journal of Science and Technology* (28), 1071-1076.
- Kirgiz, H. ve Maden, A. D., 2022, New Bounds for Some Topological Indices, *International Journal of Foundations of Computer Science*, 1-13.
- Klein, D. J. ve Randić, M., 1993, Resistance distance, *Journal of Mathematical Chemistry*, 12 (1), 81-95.
- Konig, D., 1936, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akad. Verlagsgesellschaft, p. 100.
- Lee, D.-W., 2016, Some lower and upper bounds on the third ABC index, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 13 (1), 11-15.

- Li, J. ve Shiu, W. C., 2014, The harmonic index of a graph, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 44 (5).
- Li, J., Lv, J.-B. ve Liu, Y., 2016, The harmonic index of some graphs, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39 (1), 331-340.
- Li, S. ve Wei, W., 2016, Some edge-grafting transformations on the eccentricity resistance-distance sum and their applications, *Discrete Applied Mathematics*, 211, 130-142.
- Li, S. ve Shen, C., 2021, Extremal bipartite graphs and unicyclic graphs with respect to the eccentric resistance-distance sum, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 500 (2), 125121.
- Li, S., Wang, Z. ve Zhang, M., 2022, On the extremal Sombor index of trees with a given diameter, *Applied Mathematics and Computation*, 416, 126731.
- Li, X. ve Shi, Y., 2008, A survey on the randic index, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 59, 127-156.
- Liu, J. B., Matejić, M. M., Milanović, E. I. ve Milanović, I. Z., 2020, Some New Inequalities for the Forgotten Topological Index and Coindex of Graphs, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 84, 719-738.
- Liu, Q., 2020, Resistance Distance and Kirchhoff Index of the Diamond Hierarchical Graph and the Generalized Corona Graph, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 50 (4), 878-882.
- Lokesha, V., Shetty, B. S., Ranjini, P. S., Cangul, I. N. ve Cevik, A. S., 2013, New bounds for Randić and GA indices, *Journal of inequalities and applications*, 2013 (1), 1-7.
- Maxwell, J. C., 1892, Matter and motion, Van Nostrand, p. 162.
- Mete, F., 2015, Türkçe kurallı cümle yapısının graf teori ile gösterilmesi, *Journal of Turkish Studies*, 10 (16).
- Milovanović, E. I., Matejić, M. M. ve Milovanović, I. Z., 2017, Remark on Lower Bound for Forgotten Topological Index, *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar Series A: Applied Mathematics, Informatics and mechanics*, 9 (1), 19-24.
- Milovanović, I., Milovanović, E. ve Matejic, M., 2021, On some mathematical properties of Sombor indices, *Bulletin of the International Mathematicak Virtual Institute*, 11 (2), 2303-4955.
- Palacios, J. L., 2001, Resistance distance in graphs and random walks, *International Journal of Quantum Chemistry*, 81 (1), 29-33.

- Palacios, J. L., 2010, On the Kirchhoff index of regular graphs, *International Journal of Quantum Chemistry*, 110 (7), 1307-1309.
- Palacios, J. L., 2016, Some more interplay of the three Kirchhoffian indices, *Linear Algebra and its Applications*, 511, 421-429.
- Pavlovic, L. ve Gutman, I., 2001, Graphs with extremal connectivity index, *Novi Sad J. Math*, 31 (2), 53-58.
- Percival, W., 1937, Thermionic valve circuits, *British Patent 460562*.
- Phanjoubam, C. ve Mawiong, S. M., 2021, On sombor index and some topological indices, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 12 (4), 209-215.
- Randić, M., 1975, Characterization of molecular branching, *Journal of the American chemical society*, 97 (23), 6609-6615.
- Reti, T., Doslić, T. ve Ali, A., 2021, On the Sombor index of graphs, *Contributions to Mathematics*, 3, 11-18.
- Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P. ve Thomas, R., 1997, The four-colour theorem, *journal of combinatorial theory, Series B*, 70 (1), 2-44.
- Sowaity, M., Pavithra, M., Sharada, B. ve Naji, A., 2019, Eccentric harmonic index of a graph, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 26 (1), 497-501.
- Sowell, K. O., 2001, Hamilton's Icosian Calculus and His Icosian Game, *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1 (24), 14.
- Steen, L. A., 1999, The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof, *The American Mathematical Monthly*, 106 (2), 187.
- Stephenson, K. ve Zelen, M., 1989, Rethinking centrality: Methods and examples, *Social networks*, 11 (1), 1-37.
- Suil, O. ve Shi, Y., 2018, Sharp bounds for the Randić index of graphs with given minimum and maximum degree, *Discrete Applied Mathematics*, 247, 111-115.
- Sun, X., in Gao, Y. ve ei Du, J., 2019, The harmonic index of two-trees and quasi-tree graphs, *Journal of Mathematical Inequalities* (2), 479-493.
- Sylvester, J. J., 1878, Chemistry and algebra, *Nature*, 17 (432), 284.
- Trinajstić, N., 2018, Chemical graph theory, CRC press, p. 352.
- Uyangör, S. M. ve Devrim, Ü., 2005, Kavram haritaları kullanılarak yapılan öğretimde graf teorisinin yeri, *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25 (2), 135-144.

- Vos, V. S. S., 2016, Methods for determining the effective resistance, *Mestrado, Mathematisch Instituut Universiteit Leiden*.
- Wagner, S. ve Wang, H., 2018, Introduction to chemical graph theory, Chapman and Hall/CRC, p. 269.
- Wang, H., Kooij, R. ve Van Mieghem, P., 2010, Graphs with given diameter maximizing the algebraic connectivity, *Linear Algebra and its Applications*, 433 (11-12), 1889-1908.
- Wiener, H., 1947, Structural determination of paraffin boiling points, *Journal of the American chemical society*, 69 (1), 17-20.
- Wilson, R., 2013, Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved-Revised Color Edition, Princeton university press, p. 195.
- Wilson, R. J., 1979, Introduction to graph theory, Pearson Education India, p. 171.
- Xiao, W. ve Gutman, I., 2003, Resistance distance and Laplacian spectrum, *Theoretical chemistry accounts*, 110 (4), 284-289.
- Young, H. D., Freedman, R. A., Sandin, T. ve Ford, A. L., 1996, University physics, Addison-Wesley Reading, MA, p. 495.
- Zahn, C. T., 1971, Graph-theoretical methods for detecting and describing gestalt clusters, *IEEE Transactions on computers*, 100 (1), 68-86.
- Zhang, J. ve Wu, B., 2022, Randić Index of a Line Graph, *Axioms*, 11 (5), 210.
- Zhong, L., 2012, The harmonic index for graphs, *Applied Mathematics Letters*, 25 (3), 561-566.
- Zhong, L. ve Xu, K., 2014, Inequalities between vertex-degree-based topological indices, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 71 (3), 627-642.
- Zhou, B. ve Trinajstić, N., 2009, On resistance-distance and Kirchhoff index, *Journal of Mathematical Chemistry*, 46 (1).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Havva Kırğız
Uyruğu : T.C.

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: S.D.Milli Piyango Anadolu Lisesi	2006
Üniversite	: Süleyman Demirel Üniversitesi	2010
Üniversite	: Anadolu Üniversitesi (Açıköğretim Fakültesi)	2014
Yüksek Lisans	: Süleyman Demirel Üniversitesi	2013
Doktora	: Selçuk Üniversitesi	2022

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni
2014-2015	Konya Bilim Merkezi	Eğitim Rehberi
2015-2022	Konya Bilim Merkezi	Eğitim Uzmanı
2022-Halen	Konya Bilim Merkezi	İş Geliştirme Koordinatör Yard.

UZMANLIK ALANI:

Graf Teori ve uygulamaları

Yüksek Lisans Tez Konusu: Yeni Global Optimizasyon Tekniği ve Uygulaması

YABANCI DİLLER:

İngilizce

PROJE DENEYİMİ:

1. 1139B422201545 nolu TÜBİTAK 2242 Üniversite Öğrencileri Araştırma Projesi, Bilim Merkezlerini İyileştirmeye Yönelik Çalışma, *Teşvik Ödülü*, Danışman
2. TEKNOFEST Eğitim Teknolojileri Yarışması, Şeklen Formül, *En İyi Sunum Ödülü*, Danışman

3. 119B420 nolu TÜBİTAK 4007 Bilim Şenlikleri Projesi, Konya Matematik Festivali, Yürütücü
4. 121B678 nolu TÜBİTAK 4004 Doğa Eğitimi ve Bilim Okulları Projesi, Doğanın Keşfi Konya Yaz Okulu 2, Eğitimci
5. 119B563 nolu TÜBİTAK 4004 Doğa Eğitimi ve Bilim Okulları Projesi, Doğanın Keşfi Yaz Okulu, Eğitimci
6. 121B179 nolu TÜBİTAK 4007 Bilim Şenlikleri Projesi, Konya Nanobilim Festivali (Nanofest42), Atölye Lideri
7. 116B042 nolu TÜBİTAK 4007 Bilim Şenlikleri Projesi, Konya Bilim Şenliği: Geçmişten Geleceğe Bilim, Atölye Lideri
8. 211T128 nolu TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Projesi, Diferansiyellenemeyen Fonksiyonlar İçin Filled Fonksiyon Metodu, Bursiyer

DIĞER

Kitap Bölümü Yazarlığı

Havva Kırgız, Ersin Gençoğlu, Şule Koçyiğit, Hatice Günay, Matematik Eğitiminde STEM Çalışmaları, *Okul Öncesinden Ortaöğretime Farklı Disiplinlerde STEM Eğitimi Uygulamaları*, Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü, 461 s., Eylül, 2021.

Havva Kırgız, Bilim Merkezlerinde Matematik Eğitimi, *Okul Duvarlarının Ötesine Öğrenme Yolculuğu, Bilim-Teknoloji Merkezleri ve Bilim Müzeleri*, Nobel Yayınları, 840 s., Eylül, 2019.

Çalıştay Düzenleme

Algebraic Combinatorics Workshop, Organizing Committee Member, July 22-23, 2022, Konya, Türkiye.

YAYINLAR

Kırgız H., Maden, A. D., New bounds for some topological indices, *International Journal of Foundations of Computer Science*, Special Issue, (2022) 1-13.

Kırgız H., Maden, A. D., New bounds for eccentric based harmonic and atom-bond connectivity indices, *Submitted*, (2022).

Kırgız H., Maden A. D., On multiplicative eccentricity resistance distance, *Submitted*, (2022).

Kırgız H., Maden, A. D., A note on bipartite graphs with domination number 2 and 3. *European Journal of Science and Technology*, 28 (2021) 1071-1076.

Kırgız H., Maden, A. D., On harmonic and Randić indices, 8th IFS and Contemporary Mathematics Conference, June 16-19, 2022, Mersin, Türkiye.

Kırgız H., Maden, A. D., On forgotten and Sombor indices, Algebraic Combinatorics Workshop, July 22-23, 2022, Konya, Türkiye.

