

**KUADRA FIBONA-PELL DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ
VE UYGULAMALARI****Eda GÜNDÜZ****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KUADRA FIBONA-PELL DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ
VE UYGULAMALARI

Eda GÜNDÜZ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Üniversitesi

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 30/05/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

30 Mayıs 2023

Eda GÜNDÜZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca benden yardımını esirgemeyen, her konuda yardımcı olan ve tez çalışmamın her aşamasında aynı titizlikle yardımına devam eden konu ile ilgiliengin bilgi ve birikimini ustalık ve samimiyetiyle aktaran sayın hocam Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen varlıkları ile hayatımı şekillendiren çok sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

30 Mayıs 2023

Eda GÜNDÜZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
SİMGELER	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	7
2.1. TAMSAYI DİZİLERİ	7
2.2. BİNOM KATSAYISI VE ÖZELLİKLERİ	14
2.3. ÜRETEÇ FONKSİYON.....	18
2.4. KUATERNİYONLAR.....	19
2.4.1. Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları	21
2.4.2. Kuadra Fibona-Pell Kuaterniyonları ve Bazı Özellikleri	24
3. KUADRA FIBONA-PELL DİZİSİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMÜ....	26
4. KUADRA FIBONA-PELL KUATERNİYONUNUN BİNOM DÖNÜŞÜMÜ	35
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	47
6. KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	51

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Pascal Üçgeni	15



ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 2.1. İlk On Fibonacci Sayısı	7
Çizelge 2.2. İlk On Lucas Sayısı	8
Çizelge 2.3. İlk On Pell Sayısı	10
Çizelge 2.4. İlk On Pell-Lucas Sayısı	11
Çizelge 2.5. İlk On Kuadrapell Sayısı	12
Çizelge 2.6. İlk On Kuadra Fibona-Pell Sayısı	13

SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
P	Kuaterniyon
H	Kuaterniyonlar kümesi
F_n	n . Fibonacci sayısı
L_n	n . Lucas sayısı
P_n	n . Pell sayısı
q_n	n . Pell-Lucas sayısı
D_n	n . Kuadrapell sayısı
W_n	n . Kuadra Fibona-Pell sayısı
Q_n	n . Fibonacci kuaterniyonu
K_n	n . Lucas kuaterniyonu
QP_n	n . Pell kuaterniyonu
QW_n	n . Kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu
b_n	n . Kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü
bq_n	n . Kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

ÖZET

KUADRA FIBONA-PELL DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Eda GÜNDÜZ

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK

Mayıs 2023, 50 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak bazı özel tam sayı dizileri ve kuaterniyonların günümüze kadar olan süreci incelendi. İkinci bölümde, yine özel tam sayı dizileri, binom katsayıları, üreteç fonksiyonu ve kuaterniyonlar ile ilgili temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde ise çalışmanın asıl konusu olan kuadra Fibona-Pell dizisi için binom dönüşümü tanımlandı ve ardından bu yeni binom dönüşümü için rekürans bağıntısı bulundu. Daha sonra dizinin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve çeşitli toplam formülleri elde edildi. Dördüncü bölümde ise daha önce bir tezde ele alınan kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu için binom dönüşümü uygulandı. Ardından üçüncü bölümdeki benzer sonuçlar kuadra Fibona-Pell kuaterniyonunun binom dönüşümü için bulundu. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar sözcükler: Binom Dönüşümleri, Fibonacci Dizisi, Pell Dizisi, Kuadra Fibona-Pell dizisi, Kuaterniyonlar.

ABSTRACT

BINOMIAL TRANSFORMS AND APPLICATIONS OF QUADRA FIBONA-PELL SEQUENCES

Eda GÜNDÜZ

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK

May 2023, 50 pages

In this study, first of all, the process of some special integer sequences and quaternions until today was examined. In the second part, basic information about special integer sequence, binomial coefficients, generating function and quaternions are given. In the third part, the binomial transform is defined for the quadra Fibona-Pell sequence, which is the main subject of thesis, and then the recurrence relation is found for this new binomial transform. Then the Binet formula of the sequence, the generating function and various sum formulas are found. In the fourth part, binomial transform is applied for the quadra Fibona-Pell quaternion, which was discussed in a thesis before. Next, similar results in the third section were found for binomial transform of the quadra Fibona-Pell quaternion. In the last part, results and suggestions are presented.

Keywords: Binomial transforms, Fibonacci sequences, Pell sequence, Kuadra Fibona-Pell sequence, Quaternions.

1. GİRİŞ

Fibonacci, Ortaçağ Avrupasının önde gelen matematikçilerinden birisidir. İtalyanın Pisa şehrinde dünyaya gelmiştir (1170-1250). Bu şehirde doğduğu için Leonardo Pisano ya da Pisalı Leonardo olarak da biliniyordu. Babası Afrika'nın kuzey kıyısında Bugia'de gümrük tahsildarıyken Fibonacci'yi Hint-Arap sayı sistemi ve hesaplama yöntemleri ile tanıştırmıştır. Fibonacci, 1202'de Hint-Arap rakamlarını hesaplamada nasıl kullandığını açıkladığı Liber Abaci isimli kitabı yazmıştır. Leonarda Fibonacci, Liber Abaci (Hesaplama kitabı) isimli eserinde yazdığı Fibonacci sayılarıyla ilgili şu problemi ortaya atmıştır. Bir adam her yanı kapalı bir yere bir çift tavşan koymuş. Eğer bir çift tavşan her ay yeni bir çift tavşan doğurursa ve dünyaya gelen her yeni bir çift tavşan sonraki ay üretken olursa, bir yıl sonunda tavşan sayısı ne olur? Fibonacci bu hesaplamaların sonucunda 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... sayı dizisini bulmuştur. Bu sayı dizisinde her terim kendinden önceki iki terimin toplamını vermektedir .

Bu sayı dizisi 1634 yılında Fransız kökenli Felemenkli matematikçi Albert Girard aracılığıyla

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (1.1)$$

biçiminde formülleştirilmiştir [1].

Fibonacci sayı dizisinin bazı kullanım alanları vardır, bunlardan bazıları şunlardır: Bitkilerin çiçek göbeklerinde, ayçiçeğinin tanelerinde, tütün bitkisinin yapraklarının dizilişinde, çam kozalağında, karnabaharın yapraklarında, muz bitkisinin pullarında, papatya filizlerinde, salyangozun kabuk yapısından insan anatomisine kadar pek çok yerde Fibonacci sayı dizileri görülmektedir. Ayrıca Süleymaniye ve Selimiye camilerinin mimarisinde de Fibonacci sayı dizisi görülmektedir.

Leonardo Da Vinci'nin Kusursuz Adam modelinde yer alan ölçümler, binlerce yıldır üzerine tartışılan ve araştırmalar yapılmakta olan altın orana dayanmaktadır. Dizinin herhangi bir terimini kendinden önceki terime böldüğümüzde sonuç yaklaşık olarak aynı çıkmaktadır. Bu sayıya da "Altın oran" denilmektedir [2].

Fibonacci sayı dizileri diğer bilimlerinde ilgisini çekmiştir. Fibonacci sayılarına benzeyen ama başlangıç terimleri farklı olan birçok sayı dizisi vardır. Bunlardan bazıları Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal-Lucas sayıları gibi sayı dizileridir [3].

19.yy'da Fransız matematikçi Edouard Lucas bu sayı örüntüsüne Fibonacci dizisi adını vermiştir. Edouard Lucas var olan Fibonacci sayı dizisindeki başlangıç değerlerini değiştirerek Lucas sayılarını oluşturmuştur. Bunlar 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... dir. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin çeşitli özellikleri ve genelleştirmeleri için [4–6] kaynaklarına başvurulabilir.

D. Taşçı [7] çalışmasında, başlangıç koşulları $D_0 = D_1 = D_2 = 1$ ve $D_3 = 2$ olan, $n \geq 4$ için,

$$D_n = D_{n-2} + 2D_{n-3} + D_{n-4} \quad (1.2)$$

şeklinde dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip quadrapell sayılarını tanımlamış ve bu sayılar üzerine bazı cebirsel özdeşlikler elde etmiştir.

A. Özkoç [8] makalesinde, $W_0 = W_1 = 0$, $W_2 = 1$ ve $W_3 = 3$ başlangıç koşulları ile, $n \geq 4$ için

$$W_n = 3W_{n-1} - 3W_{n-3} - W_{n-4} \quad (1.3)$$

şeklinde kuadra Fibona-Pell sayı dizisini tanımlamış, Fibonacci ve Pell sayılarının özelliklerinden faydalananarak kuadra Fibona-Pell sayı dizisi üzerinde bazı çalışmalar yapmıştır.

Binom katsayısı $(x + y)^n$ nin binom açılımında önemli bir yere sahiptir. Euclid M.Ö. 300 yıl civarında 'Elements' isimli kitabında $n = 2$ için binom açılımını tanımlamıştır. Hintli matematikçi Aryabhata (476-550) ise $n = 2$ ve $n = 3$ için bu açılımı gösteren bir başka

matematikçi olmuştur. Daha sonra Fars matematikçi Ömer Hayyam (1048-1131) tarafından pozitif tam sayılı üstler için binom teoremi bulunmuştur. Ama buna rağmen İngiliz matematikçi ve fizikçi olan Isaac Newton (1642-1727) teoremi şimdiki haline getirerek literatüre geçirmiştir. 1915 yılında G. Fontene [9] çalışmasında, genelleştirilmiş binom katsayılarını tanımlamıştır. Daha sonra M. Ward [10] tarafından 1936'da bu katsayılar yeniden tanımlanmıştır. 1969'da H. W. Gould bu sayılara, Fontene-Word binom katsayıları adını vermiştir [11].

Bunların yanında binom dönüşümleri ile ilgili literatürde gün gittikçe artan çalışmalara devam edilmektedir. Örneğin, H. Prodinger 1994 yılında [12] çalışmasında binom dönüşümleri hakkında genel bilgiler vermiştir. M. Z. Spivey ve L. L. Steil 2006 yılında [13]'de Hankel dönüşümlerinin binom dönüşümlerini incelemişlerdir. K. W. Chen 2007 yılında [14] makalesinde, binom dönüşümlerinin çeşitli özelliklerini vermiştir. H. H. Gülec ve N. Taskara [15]'de binom katsayılı Fibonacci sayılarını tanımlamışlardır ve bu sayı dizileri üzerine çalışmışlardır. S. Falcon ve A. Plaza [16]'da k -Fibonacci dizilerinin binom dönüşümlerini tanımlamışlardır. N. Taskara, K. Uslu ve H. H. Gülec [17] çalışmalarında, binom katsayılı Lucas sayılarının çeşitli özelliklerini vermişlerdir. P. Bhadouria, D. Jhala ve B. Singh [18]'de k -Lucas dizilerinin çeşitli tipteki binom dönüşümlerini vermişlerdir. [19] makalesinde S. Falcon, k -Fibonacci dizisinin yinelemeli binom dönüşümleri üzerinde çalışmıştır. N. Yılmaz ve N. Taskara [20] çalışmasında, Padovan ve Perrin sayılarının binom dönüşümlerini çalışmışlardır. Yine S. Falcon referanslardaki [21] makalesinde Fibonacci dizisi ve genelleştirilmiş k -Fibonacci sayılarının binom dönüşümlerinden, rekürans ilişkilerinden ve bazı toplam formüllerinden bahsetmiştir. C. Kızılateş, N. Tuğlu ve B. Çekim [22]'de quadrapell dizileri, quadrapell dizilerinin binom dönüşümü, quadrapell sayılarının matris dizilerinden ve son olarak quadrapell matris dizilerinin binom dönüşümü üzerine çalışmışlardır.

Modern cebirdeki en önemli gelişmelerden biri de kuaterniyonların keşfi olmuştur. Kuaterniyonlar 1843 yılında İrlandalı William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmıştır. Hamilton kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için bölme işleminin de mümkün olabileceğini, yeni bir çarpma işlemini vektör cebirine dahil ederek göstermiştir. Hamilton'un keşfi olan kuaterniyonlar, günümüzde kuantum fiziğinden bilgisayar bilimlerine pek çok alanda kendisini göstermektedir, daha fazla bilgi için [23,

24] kaynaklarına başvurulabilir. Kuaterniyonlar, üç boyutlu uzayda dönen hareketin hesaplanmasında, fiziksel büyüklükleri ifade etmede, grup teorisinde, elementer parçacıkların sınıflandırılmasında, kontrol sistemlerinde, endüstriyel robot kollarının hareketlerinde kullanılmaktadır. Ayrıca fizik alanında da kullanılmaktadır. Fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein'ın özel ve genel rölativite teorileridir.

Geçmişten günümüze kadar birçok alanda kendisine yer bulan Fibonacci ve Fibonacci tipli sayı dizisi olan Lucas sayı dizileri polinomlarla ve kuaterniyonlarla da ilişkilendirilmiştir. 1883 yılında polinomlarla olan ilişkilendirmeyi de Belçikalı matematikçi Charles Catalan ile Alman matematikçi Ernst Jacobsthal ilk olarak ortaya çıkarmıştır. [25–27] çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas polinomlarının çeşitli genellemeleri yapılmıştır. [28]'de, A. F. Horadam tarafından literatüre katsayıları Fibonacci sayı dizisinin terimleri ile oluşturulan kuaterniyonlar girmiştir. Ayrıca A. F. Horadam [29] çalışmasında, kuaterniyonların rekürans bağıntılarını incelemiştir. Yine [30, 31] çalışmalarında ise Fibonacci ve Lucas sayı dizileri kuaterniyon ve polinomlarla ilişkilendirilmiştir. Son zamanlarda kuaterniyon dizilerinin genelleştirmeleri üzerine de birçok çalışma yapılmıştır. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin yanı sıra farklı sayı dizilerinden yararlanarak oluşturulmuş kuaterniyon dizileri de mevcuttur [32, 33]. M. R. Iyer, Fibonacci kuaterniyonları ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkiyi [34]'de çalışmıştır. Daha sonra M. R. Iyer [35] çalışmasında, Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkiyle veren çalışmalar yapmıştır. S. Halıcı [36] makalesinde, Fibonacci kuaterniyonlarını ve Lucas kuaterniyonlarını ele almış ve bu kuaterniyonlarla ilgili çeşitli toplam formülleri bulmuştur. E. Polatlı [37] çalışmasında, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının yeni bir genelleştirmesi üzerine yoğunlaşmış ve elde ettiği bu yeni genelleştirilmiş kuaterniyonlar için toplam formülleri türetmiştir.

A. Özkoç ve A. Porsuk [30] “A Note for the (p, q) –Fibonacci and Lucas Quaternion Polynomials” isimli çalışmalarında (p, q) –Fibonacci ve Lucas kuaternion polinomlarını tanımlamışlardır. Ayrıca yazarlar tarafından Binet formülü, üreteç fonksiyonu, toplam formülleri ve binom toplamları türetilmiştir.

E. Polatlı ve S. Kesim [38] de “On Quaternions with Generalized Fibonacci and Lucas Number Components” isimli çalışmalarında Binet formüllerini kullanarak binomiyal toplam formüllerini elde etmişlerdir.

Son yıllarda reel sayı dizileri kullanılarak kuaterniyon ve oktonyon sayı dizileri tanımlama, yeni tanımlanan bu sayı dizilerinin cebirsel özelliklerini araştırma ve özgün sonuçlara ulaşma yönünde bilimsel çalışmalar artmaktadır, daha fazla bilgi için [39–41] çalışmalarına başvurulabilir.

A. F. Horadam [28] makalesinde, kompleks Fibonacci sayılarını ve Fibonacci kuaterniyon sayılarını tanımlamış ve bu sayıların bazı özelliklerini sunmuştur.

S. Halıcı [39]’da Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin, C. B. Çimen ve A. İpek [42]’de Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin, A. Szynal-Liana ve I. Wloch [33]’de Jacobsthal sayı dizisini kuaterniyonlarla ifade edip, bu yeni kuaterniyon dizilerinin sayı dizileri ile aralarındaki ilişkiyi detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

F. Kaplan ve A. Özkoç Öztürk [43] çalışmalarında, Horadam kuaterniyon dizilerinin binom dönüşümünden bahsetmiş ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar vermiştir. Yine aynı makalede yazarlar Horadam kuaterniyonlarının yinelemeli binom dönüşümü ile ilgili çalışmışlardır.

E. Polatlı [44] makalesinde, quadrapell kuaterniyonlarının belirli özellikleri üzerine cebirsel özdeşliklerden bahsetmiş ve aynı zamanda quadrapell kuaterniyonların binom dönüşümlerini ilk kez ele almıştır.

T. Çetinalp [45] tezinde, kuadra Fibona-Pell kuaterniyonlarının yanı sıra kuadra Fibona-Jacobsthal sayı dizilerinin özellikleri ile kuaterniyon kavramının bazı cebirsel özellikleriyle ilgili çalışmalar yapmıştır.

Bu çalışmada giriş kısmından sonra ikinci bölümde gerekli ön bilgiler, tanım ve teoremler verilmiştir. Orjinal sonuçlardan oluşan üçüncü bölümde ise kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü tanımlanmış ardından bu binom dönüşümü için rekürans bağıntısı bulunmuş ve en son Binet formülü elde edilmiştir. Buradan hareketle kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü için çeşitli toplam formülleri ve bağıntılar elde edilmiştir. Çalışmanın son bölümü olan dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde Fibona-Pell tamsayı

dizisinin binom dönüşümü için bulunmuş benzer sonuçlar Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü için bulunmuştur.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. TAMSAYI DİZİLERİ

Bu alt bölümde çalışmanın temelini oluşturan ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip tamsayı dizilerine örnek olan Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizileri ile ilgili bazı temel kavramlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1. F_n , n . Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir [3, 46].

Bazı Fibonacci sayıları,

Çizelge 2.1. İlk On Fibonacci Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

şeklinde ifade edilir. (1.1) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (2.1)$$

olup bu denklemin kökleri ise,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (2.2)$$

dır. Fibonacci sayı dizisi için Binet formülü,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.3)$$

dır [3].

Tanım 2.2. L_n , n . Lucas sayısını göstermek üzere, $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad (2.4)$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir [3, 46].

Fibonacci sayı dizisi gibi bazı Lucas sayıları verilecek olursa,

Çizelge 2.2. İlk On Lucas Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

çizelgesi elde edilir. (2.4) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri Fibonacci sayı dizisinin de kökleri olup,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. Buradan sonuç olarak Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin karakteristik denklemleri ve köklerinin aynı olduğu söylenebilir. Lucas sayı dizisi için Binet formülü ise,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.5)$$

dır.

Fibonacci ve Lucas tam sayı dizilerinin karakteristik denklemlerinin kökleri arasında

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 1, \\ \alpha - \beta &= \sqrt{5}, \\ \alpha\beta &= -1\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas tam sayı dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \quad (2.6)$$

ve

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} \quad (2.7)$$

dir [3].

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bazı cebirsel özdeşlikler mevcuttur. Bu özdeşliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

$$F_{2n} = F_n L_n,$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad L_n = F_{n+2} - F_{n-2},$$

$$5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n,$$

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1},$$

$$2F_{n+1} = F_n + L_n,$$

$$2F_n = F_{n+1} + F_{n-2},$$

$$F_m F_n - F_{m+k} F_{n-k} = (-1)^{n-k} F_{m+k-n} F_k,$$

$$L_n = L_m F_{n-m+1} + L_{m-1} F_{n-m},$$

$$L_{2m} L_{2n} = L_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 - 4(-1)^{m+n},$$

$$F_{m+k} F_{m-k} - F_{m+s} F_{m-s} = (-1)^{m-s} F_s F_{k+s},$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_i = L_{2n},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-1} F_i = F_{mn},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_m^i L_{m-1}^{n-1} L_i = L_{mn},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{m-i} = F_{m+n},$$

$$\sum_{i=0}^n F_{mi} = \frac{F_{mn+m} - (-1)^m F_{mn} - F_m}{L_m - (-1)^m - 1},$$

$$\sum_{i=0}^n L_{mi} = \frac{L_{mn+m} - (-1)^m F_{mn} - F_m}{L_m - (-1)^m - 1},$$

Tam sayı dizileri arasında bir diğer ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip dizi olan Pell sayı dizisi aşağıda verilmiştir.

P_n , n . Pell sayısını göstermek üzere, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tam sayısı için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad (2.8)$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine, Pell sayı dizisi denir [3].

Bazı Pell sayıları,

Çizelge 2.3. İlk On Pell Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378

şeklinde ifade edilir. (2.8) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (2.9)$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2} \quad (2.10)$$

dır.

n . Pell sayı dizisi için Binet formülü ise,

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} \quad (2.11)$$

dir [47]. P_n Pell sayı dizisi olmak üzere, üretic fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir [6].

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2} \quad (2.12)$$

Son olarakta Pell-Lucas sayı dizisinden bahsedilecek olursa; q_n , n . Pell-Lucas sayısını göstermek üzere, $q_0 = 2$ ve $q_1 = 2$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2.13)$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Pell-Lucas sayı dizisi denir.

Bazı Pell-Lucas sayıları,

Çizelge 2.4. İlk On Pell-Lucas Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726

şeklindedir. (2.13) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2}$$

dir.

Sonuç olarak, Pell sayı dizisi ile Pell-Lucas sayı dizisinin karakteristik denklemlerinin ve köklerinin aynı olduğunu görülmektedir.

n . Pell-Lucas sayı dizisi için Binet formülü ise,

$$q_n = \gamma^n + \delta^n \quad (2.14)$$

dir [48]. q_n Pell-Lucas sayı dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

ile ifade edilir [8].

Yukarıda ele alınan ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizilerine ek olarak şimdi de dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip Kuadrapell ve kuadra Fibona-Pell tam sayı dizileriyle ilgili bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.3. D_n , n . Kuadrapell sayısını göstermek üzere $D_0 = D_1 = D_2 = 1$ ve $D_3 = 2$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 4$ tamsayısı için

$$D_n = D_{n-2} + 2D_{n-3} + D_{n-4}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Kuadrapell sayı dizisi denir.

Bazı Kuadrapell sayıları,

Çizelge 2.5. İlk On Kuadrapell Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	1	1	2	4	5	9	15	23	38	62

şeklindedir. (1.2) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (2.15)$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \gamma = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ve } \delta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

dir. Kuadrapell sayı dizisi için Binet formülü,

$$D_n = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(\frac{\gamma^{2n} - \delta^{2n}}{\gamma - \delta} \right) \quad (2.16)$$

dir. Ayrıca Kuadrapell sayı dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = \frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{1 - 4x + 5x^2 - 4x^3 + x^4} \quad (2.17)$$

ile verilir [22].

Şimdi de kuadra Fibona-Pell tam sayı dizisi ele alınsın.

Tanım 2.4. W_n, n . kuadra Fibona-Pell sayısını göstermek üzere $W_0 = W_1 = 0$, $W_2 = 1$ ve $W_3 = 3$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 4$ tamsayısı için

$$W_n = 3W_{n-1} - 3W_{n-3} - W_{n-4}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine kuadra Fibona-Pell sayı dizisi denir.

Bazı kuadra Fibona-Pell sayıları,

Çizelge 2.6. İlk On Kuadra Fibona-Pell Sayısı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W_n	0	0	1	3	9	24	62	156	387	951	2323

şeklindedir. (1.3) bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0 \quad (2.18)$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2}$$

dir. Kuadra Fibona-Pell sayı dizisi için Binet formülü,

$$W_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.19)$$

dir [8]. Ayrıca W_n kuadra Fibona-Pell sayı dizisi için üreteç fonksiyonu ise,

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{x^2}{x^4 + 3x^3 - 3x + 1} \quad (2.20)$$

ile verilir [8].

Teorem 2.5. W_n, F_n, L_n ve P_n sayı dizileri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur [8]:

$$W_n = P_n - F_n, \quad n \geq 0,$$

$$W_{n+1} + W_{n-1} = (\gamma^n + \delta^n) - (\alpha^n + \beta^n), \quad n \geq 1,$$

$$\sqrt{5}F_n + 2\sqrt{2}P_n = (\gamma^n - \delta^n) + (\alpha^n - \beta^n), \quad n \geq 1,$$

$$L_n + P_{n+1} + P_{n-1} = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n, \quad n \geq 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = \gamma.$$

2.2. BİNOM KATSAYISI VE ÖZELLİKLERİ

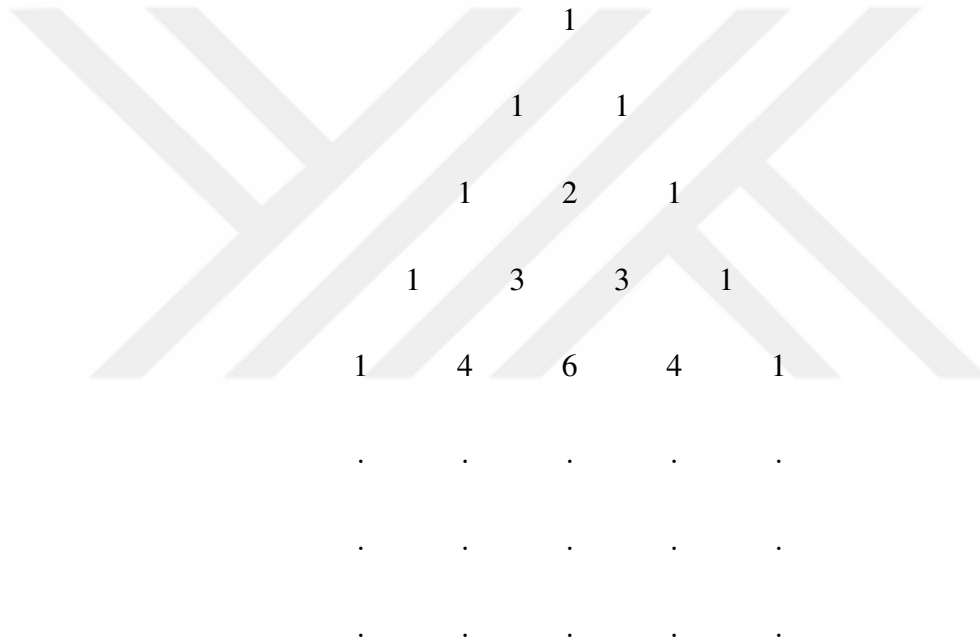
Tanım 2.6. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$, negatif olmayan n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısını veren ifadeler binom katsayısı denir ve

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (2.21)$$

ile gösterilir. Burada $n < k$ ise $\binom{n}{k} = 0$ ve $0! = 1$ olarak tanımlanır.

Binom katsayılarının Pascal üçgenini ürettiği bilinmektedir. Pascal üçgeninin pek çok ilginç özelliği mevcuttur. Bunlardan biri Pascal üçgeninin simetrik olmasıdır. Pascal üçgeninin diğer bir özelliği ise satırlarındaki sayıların toplamının 2^n 'nin kuvvetlerini verdiği bilinmektedir ve $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ile bulunmaktadır. Son olarak Pascal üçgeni kullanılarak Fibonacci sayıları da bulunabilmektedir.

Şekil 2.1. Pascal Üçgeni



Teorem 2.7. (Pascal Özdeşliği) n ve r pozitif tam sayılar ve $r \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad (2.22)$$

dir [3].

İspat. (2.21) kullanılarak

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!r}{(r-1)!(n-r)!r} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r-1)!(n-r)} \\
&= \frac{(n-1)!r + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \binom{n}{r}
\end{aligned}$$

bulunur. □

Yine çok kullanışlı bir özellik aşağıda ispatıyla verilmiştir ve ardından binom teoremine değinilmiştir.

Teorem 2.8. r ve n negatif olmayan tam sayılar ve $r \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

dir [3].

İspat. (2.21) eşitliğinden

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

bulunur. □

Teorem 2.9. (Binom Teoremi) x, y reel sayılar ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (2.23)$$

dir [47].

Koshy [3] eserinde aşağıdaki sonuçları vermiştir, bu sonuçların ispatları açık ve net olduğundan ispatları verilmeyecektir.

Teorem 2.10. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k,$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

$$\sum_{k \text{ çift}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ tek}} \binom{n}{k}.$$

Yukarıdaki sonuçlar dışında binom katsayısıyla ilgili literatürde bir çok özellik mevcuttur.

Bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$$\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r},$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} = (n-k+1) \binom{n}{k-1},$$

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k} \binom{m}{0} + \binom{n}{k-1} \binom{m}{1} + \binom{n}{k-2} \binom{m}{2} + \dots + \binom{n}{0} \binom{m}{k},$$

$$\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad k \neq 0,$$

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n^2 \binom{2n-2}{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{n}{k} = \binom{3n}{n},$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1},$$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{k-1}{r-1} = \binom{n+k-1}{k},$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n,$$

$$\sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n,$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+k}{p+q} = \binom{n}{p} \binom{n}{q},$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+p+q-k}{p+q} = \binom{n+p}{p} \binom{n+q}{q}.$$

Binom katsayısı ile ilgili toplam notasyonu tanımlanacak olursa; $r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(k) = a_k$ olsun. $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$ terimlerinin toplamı

$$a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_n = \sum_{k=r}^n a_k$$

dır. Binom katsayısı ile ilgili diğer bir kaç sonuçta aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{k=1}^n b = nb, \quad b \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k=r}^n (a_k \mp b_k) = \sum_{k=r}^n a_k \mp \sum_{k=r}^n b_k,$$

$$\sum_{k=r}^n b(a_k) = b \sum_{k=r}^n a_k, \quad b \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq k} \binom{i}{j} x^i y^j = \sum_{0 \leq i \leq k} x^i \sum_{0 \leq j \leq k} \binom{i}{j} y^j.$$

2.3. ÜRETEÇ FONKSİYON

Üreteç fonksiyonu Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) tarafından keşfedilmiştir. Rekürans bağıntısı ve kombinatorik problemlerin çözümü için önemlidir. Üreteç fonksiyonları temelde çeşitli katsayıları takip eden kuvvet serileridir [49].

Üreteç fonksiyonun tanımı matematiksel olarak ifade edilecek olursa, $a_0, a_1, a_2, \dots$ herhangi bir gerçel sayı dizisi olmak üzere

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (2.24)$$

fonksiyonu, $\{a_n\}$ dizisi için üreteç fonksiyon olarak tanımlanır.

$i > n$ için $a_i = 0$ olduğunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlu dizisi için üreteç fonksiyonları da tanımlıdır. Dolayısıyla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlu dizisi için

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

üreteç fonksiyondur. Üreteç fonksiyonla ilgili bazı temel matematiksel işlemlerin yapılabileceği bilinmektedir. Buna örnek olarak, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ ve $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ üreteç fonksiyonları arasında toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilmesi sayılabilir. Bu işlemler $c_n = \sum_{i=0}^n a_ib_{n-i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) \mp g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n)x^n \\ f(x) \cdot g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \end{aligned}$$

dir. $\{c_n\}$ dizisi, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin konvolüsyonu olup üreteç fonksiyonu $f(x) \cdot g(x)$ dir.

Özellikle, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = g(x)$ dir. Bu durumda her n için $a_n = 1 = b_n$ olur. O zaman $c_n = \sum_{i=0}^n 1 \cdot 1 = n+1$ olur. Buradan, her pozitif tamsayı 1'lerin dizisinin kendisiyle konvolüsyonu ile elde edilir. Yani sonuç olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

elde edilir [47].

2.4. KUATERNİYONLAR

Çalışmanın bu bölümünde kuaterniyon kavramı ve kuaterniyonlarla ilgili bazı özellikler verilecektir. Ayrıca Fibonacci, Lucas, Pell ve kuadra Fibona-Pell kuaterniyonları tanıtılacak ve bu kuaterniyonlar ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler verilecektir.

Tanım 2.11. $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$ ve $ijk = -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ij &= k = -ji, \\ jk &= i = -kj, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$ki = j = -ik$$

eşitlikleri ile tanımlı i, j ve k birimsel imajiner elemanları için,

$$H = \{P = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \quad (2.26)$$

kümesine reel kuaterniyonlar kümesi denir. Bu kümenin her bir elemanına reel kuaterniyon denir.

$P = a + bi + cj + dk$ bir kuaterniyon olsun. Burada P kuaterniyonunun skaler kısmı $P_0 = a$ ve vektörel kısmı $P = bi + cj + dk$ olarak tanımlanır.

Şimdi de kuaterniyonların eşitliği için iki tane kuaterniyon tanımlansın:

$$P = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$$

ve

$$Q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$$

kuaterniyonlar ise burada,

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2 \text{ ve } d_1 = d_2$$

oluyorsa P ve Q kuaterniyonları eşit kuaterniyonlar olarak ifade edilmektedir [50].

Tanım 2.12. $P = a + bi + cj + dk$ kuaterniyon olmak üzere

$$a - bi - cj - dk$$

kuaterniyonuna P kuaterniyonunun eşleniği denir.

Ayrıca $P, Q \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere eşitlikler

$$\overline{P \mp Q} = \overline{P} \mp \overline{Q},$$

$$\overline{\overline{P}} = P,$$

$$\overline{\lambda P} = \lambda \overline{P},$$

$$\overline{PQ} = \overline{QP}$$

dir.

2.4.1. Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları

A. F. Horadam [28]'de tam sayı dizilerinin rekürans bağıntılarının katsayılarının alınmasıyla oluşturulan tam sayı dizilerine örnek olarak Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını tanımlamıştır. A. F. Horadam yine aynı çalışmada bu kuaterniyonların cebirsel özelliklerini çalışmış ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını türetmiştir. S. Halıcı [36]'da yine Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili çalışmalar yapmış ve S. Halıcı'nın [36]'daki çalışması ile bu kuaterniyon dizilerine ilginin arttığı görülmüştür.

Tanım 2.13. F_n, n . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} \quad (2.27)$$

eşitliğine n . Fibonacci kuaterniyonu denir [28].

Şimdi de Lucas kuaterniyonu tanımlansın. L_n, n . Lucas sayısı olmak üzere

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3} \quad (2.28)$$

eşitliğine n . Lucas kuaterniyonu denir [28].

Q_n ve K_n eşitliklerinin rekürans bağıntıları sırasıyla

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$$

ve

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

dir.

Karakteristik denklemleri ise

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir.

Şimdi Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili ispatlanmış bir kaç teorem verilsin.

Teorem 2.14. Q_n Fibonacci kuaterniyonu olmak üzere

$$Q_n - iQ_{n+1} - jQ_{n+2} - kQ_{n+3} = 3L_{n+3}$$

eşitliği geçerlidir [36].

Teorem 2.15. $n \geq 1$ için

$$K_n = Q_{n-1} + Q_{n+1}$$

eşitliği geçerlidir [36].

Teorem 2.16. Q_n Fibonacci kuaterniyonu ve K_n Lucas kuaterniyonu olmak üzere, Binet formülleri sırasıyla, $n \geq 0$ için

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\sqrt{5}} \quad (2.29)$$

ve

$$K_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n \quad (2.30)$$

dir. Burada $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ dir [36].

Teorem 2.17. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için Q_{m+n} Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+n}x^n = \frac{Q_m + Q_{m-1}x}{1 - x - x^2}$$

dir [36].

Teorem 2.18. Q_n Fibonacci kuaterniyonu için ilk $n + 1$ tek terim toplamı ve ilk $n + 1$ çift terim toplamı sırasıyla,

$$\sum_{i=0}^n Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0$$

ve

$$\sum_{i=0}^n Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1, 0, 1, 1)$$

dir [36].

Teorem 2.19. $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} Q_i = Q_{2n}$$

ve

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} Q_i (-1)^i = (-1)^n Q_{-n}$$

dir [36].

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları gibi ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip bir başka tam sayı dizisi ise Pell kuaterniyonlarıdır. Aşağıda Pell kuaterniyonlarının tanımı ve Pell kuaterniyonlarıyla ilgili ispatlanmış bir kaç formül mevcuttur.

Tanım 2.20. P_n , Pell sayı dizisi olmak üzere

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3} \quad (2.31)$$

eşitliğine n . Pell kuaterniyonu denir [39, 42].

Teorem 2.21. $n \geq 0$ olmak üzere Pell kuaterniyonunun Binet formülü,

$$QP_n = \frac{\underline{\gamma}\gamma^n - \underline{\delta}\delta^n}{2\sqrt{2}} \quad (2.32)$$

dir. Burada $\underline{\gamma} = 1 + i\gamma + j\gamma^2 + k\gamma^3$ ve $\underline{\delta} = 1 + i\delta + j\delta^2 + k\delta^3$ dir [45].

Teorem 2.22. QP_n Pell kuaterniyonu olmak üzere üreteç fonksiyonu,

$$G(x) = \frac{x + i + j(x+2) + k(2x+5)}{1 - 2x - x^2} \quad (2.33)$$

dir [45].

Teorem 2.23. QP_n Pell kuaterniyonu için ilk $n+1$ terim toplamı,

$$\sum_{i=0}^n QP_i = \frac{1}{2} [QP_{n+2} + QP_{n+1} - QP_1 + QP_0]$$

dir [45].

2.4.2. Kuadra Fibona-Pell Kuaterniyonları ve Bazı Özellikleri

Yukarıda incelenen Fibonacci, Lucas ve Pell kuaterniyonları ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizilerine örnektir, bu kısımda ise dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizilerine örnek olan kuadra Fibona-Pell kuaterniyonlarıyla ilgili bilgi verilecektir.

Tanım 2.24. W_n kuadra Fibona-Pell sayı dizisi olmak üzere

$$QW_n = W_n + iW_{n+1} + jW_{n+2} + kW_{n+3} \quad (2.34)$$

biçiminde tanımlanan QW_n ifadesine kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu denir [45].

Teorem 2.25. $n \geq 0$ olmak üzere kuadra Fibona-Pell kuaterniyonunun Binet formülü,

$$QW_n = \frac{\gamma\gamma^n - \delta\delta^n}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha\alpha^n - \beta\beta^n}{\sqrt{5}} \quad (2.35)$$

dir [45].

Teorem 2.26. QW_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu,

$$G(x) = \frac{x^2 + ix + j + k(3 - 3x^2 - x^3)}{x^4 + 3x^3 - 3x + 1} \quad (2.36)$$

dir [45].

Teorem 2.27. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için QW_{m+n} kuadra Fibona-Pell kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} QW_{m+n}x^n = \frac{\left\{ \begin{array}{l} QW_m + (QW_{m-1} - QW_m + Q_m)x \\ + (QW_m + QW_{m-1} - Q_{m-1})x^2 - QW_{m-1}x^3 \end{array} \right\}}{x^4 + 3x^3 - 3x + 1}$$

dir [45].

Teorem 2.28. QW_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu için ilk $n + 1$ terim toplamı,

$$\sum_{i=0}^n QW_i = \frac{1}{2} [QW_{n+2} - QW_{n+1} - Q_{n+3} + (1, 1, 1, -1)]$$

dir [45].

Teorem 2.29. QW_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} QW_i = 2^{\frac{n}{2}} QP_n - Q_{2n}$$

dir [45].



3. KUADRA FIBONA-PELL DİZİSİNİN BINOM DÖNÜŞÜMÜ

Literatürde dizilerin binom dönüşümleri ile ilgili bir çok makale bulmak mümkündür [51]. Bunlardan biri K. W. Chen [14] tarafından çalışılmış ve daha sonra S. Falcon ve A. Plaza [16] tarafından incelenmiştir. [12]'de $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ dizisi verildiğinde, B dizisi binom dönüşümü $B(A) = \{b_n\}$ olarak aşağıdaki gibi tanımlanır

$$b_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i. \quad (3.1)$$

Ayrıca binom dönüşü ile ilgili detaylı bilgi [21, 52] çalışmalarında bulunabilir. Örneğin [22]'de yazarlar Kuadrapell dizisinin binom dönüşümü için dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip özel binom dizilerini dikkate almışlardır.

Bu bölümde benzer mantıkla kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü oluşturuldu. Dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip olan kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü uygulandığında elde edilen yeni dizi için üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve toplam formülleri başta olmak üzere bazı cebirsel özdeşlikler bulundu [53].

Tanım 3.1. W_n , n . kuadra Fibona-Pell dizisi olsun. Kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü

$$b_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i \quad (3.2)$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.2. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (W_i + W_{i+1})$$

dir.

İspat. (3.2) yardımıyla,

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} W_i = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} W_i + W_0.$$

elde edilir. Ayrıca $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ ve $\binom{n}{n+1} = 0$ olduğundan

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] W_i + W_0$$

dır. Böylece

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (W_i + W_{i+1}).$$

elde edilir, yani ispat tamamlanır. □

Yukarıdaki Yardımcı Teorem yardımıyla kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü için aşağıdaki Teorem verilir.

Teorem 3.3. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde

$$b_{n+1} = b_n + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_{i+1}$$

dir.

Kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümünün rekürans ilişkisi aşağıda elde edilmiştir.

Teorem 3.4. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun . O halde $n \geq 4$ ve $b_0 = b_1 = 0, b_2 = 1$ ve $b_3 = 6$ başlangıç değerleri için b_n

$$b_{n+3} = 7b_{n+2} - 15b_{n+1} + 10b_n - 2b_{n-1} \quad (3.3)$$

rekürans bağıntısını verir.

İspat. Yardımcı Teorem 3.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$b_{n+3} = K_1 b_{n+2} + L_1 b_{n+1} + M_1 b_n + N_1 b_{n-1}.$$

Tanım 2.1 göz önünde bulundurularak denklem sistemi çözülecek olursa

$$n = 1 \Rightarrow b_4 = K_1 b_3 + L_1 b_2 + M_1 b_1 + N_1 b_0$$

$$n = 2 \Rightarrow b_5 = K_1 b_4 + L_1 b_3 + M_1 b_2 + N_1 b_1$$

$$n = 3 \Rightarrow b_6 = K_1 b_5 + L_1 b_4 + M_1 b_3 + N_1 b_2$$

$$n = 4 \Rightarrow b_7 = K_1 b_6 + L_1 b_5 + M_1 b_4 + N_1 b_3$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$K_1 = 7, L_1 = -15, M_1 = 10, N_1 = -2.$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Elde edilen yeni binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu aşağıda bulunmuştur.

Teorem 3.5. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. Binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$b(x) = \frac{x^2 - x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4}$$

dir.

İspat. Varsayalım ki

$$b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i,$$

W_n için binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. O halde

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

$$7xb(x) = 7b_0 x + 7b_1 x^2 + 7b_2 x^3 + 7b_3 x^4 + \dots$$

$$15x^2 b(x) = 15b_0 x^2 + 15b_1 x^3 + 15b_2 x^4 + 15b_3 x^5 + \dots$$

$$10x^3 b(x) = 10b_0 x^3 + 10b_1 x^4 + 10b_2 x^5 + 10b_3 x^6 + \dots$$

$$2x^4 b(x) = 2b_0 x^4 + 2b_1 x^5 + 2b_2 x^6 + 2b_3 x^7 + \dots$$

olup, (3.3) denkleminde,

$$(1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4)b(x) = x^2 - x^3$$

elde edilir ve buradan b_n 'in binom dönüşümü için üreteç fonksiyonu

$$b(x) = \frac{x^2 - x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4}$$

olarak bulunur. □

b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümüne ait cebirsel özdeşlikleri bulmak için gerekli olan bir diğer formülde aşağıda bulunan Binet formülüdür.

Teorem 3.6. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. $n \geq 0$ için b_n nin Binet formülü

$$b_n = \frac{(\gamma + 1)^n - (\delta + 1)^n}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \quad (3.4)$$

dır.

İspat. Üreteç fonksiyonun $b(x) = \frac{x^2 - x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4}$ olduğuna dikkat edilsin. Buradan $1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4 = (2x^2 - 4x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. Böylece $b(x)$ aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4} &= \frac{x}{2x^2 - 4x + 1} - \frac{x}{x^2 - 3x + 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)^n - (\delta + 1)^n}{\gamma - \delta} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\gamma + 1)^n - (\delta + 1)^n}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \right) \end{aligned}$$

burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ dir. Kuadra Fibona-Pell dizisinin köklerini kullanarak,

$$b_n = \frac{(\gamma + 1)^n - (\delta + 1)^n}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. □

En genel haldeki seri açılımları için aşağıdaki sonuç bulunmuştur.

Teorem 3.7. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde, tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $m, s \in \mathbb{N}$, $s > m$ için

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - (\gamma + 1)^m x)(1 - (\delta + 1)^m x) \\ B_1 &= (1 - \alpha^{2m} x)(1 - \beta^{2m} x) \\ C_1 &= \frac{1}{A_1} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_1} \left(\frac{(\gamma + 1)^s - (\delta + 1)^s}{\gamma - \delta} \right) \\ &\quad - \frac{2^m}{A_1} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x + \frac{1}{B_1} \left(\frac{(\gamma + 1)^{s-m} - (\delta + 1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn+s} x^n = b_s \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{B_1} \right) - b_{s-m} \left(\frac{2^m}{A_1} + \frac{1}{B_1} \right) x + C_1$$

dir.

İspat. (3.4) denkleminde

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn+s} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\gamma + 1)^{mn+s} - (\delta + 1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\gamma + 1)^{mn+s} - (\delta + 1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} \right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) x^n \\ &= \frac{(\gamma + 1)^s}{\gamma - \delta} \sum_{n=0}^{\infty} ((\gamma + 1)^m x)^n - \frac{(\delta + 1)^s}{\gamma - \delta} \sum_{n=0}^{\infty} ((\delta + 1)^m x)^n \\ &\quad - \frac{\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{2m} x)^n + \frac{\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^{2m} x)^n \end{aligned}$$

elde edilir. Toplam formülü yardımıyla işlemlere devam edilecek olursa,

$$\begin{aligned} &\frac{(\gamma + 1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{1}{1 - (\gamma + 1)^m x} \right) - \frac{(\delta + 1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{1}{1 - (\delta + 1)^m x} \right) \\ &- \frac{\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \alpha^{2m} x} \right) + \frac{\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \beta^{2m} x} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{(\gamma + 1)^s (1 - (\delta + 1)^m x) - (\delta + 1)^s (1 - (\gamma + 1)^m x)}{(1 - (\gamma + 1)^m x)(1 - (\delta + 1)^m x)} \right) \\ &- \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{2s} (1 - \beta^{2m} x) - \beta^{2s} (1 - \alpha^{2m} x)}{(1 - \alpha^{2m} x)(1 - \beta^{2m} x)} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{((\gamma + 1)^s - (\delta + 1)^s) - ((\gamma + 1)^s (\delta + 1)^m - (\delta + 1)^s (\gamma + 1)^m) x}{1 - ((\gamma + 1)^m + (\delta + 1)^m) x + ((\gamma + 1)(\delta + 1))^m x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{(\alpha^{2s} - \beta^{2s}) - (\alpha^{2s} \beta^{2m} - \beta^{2s} \alpha^{2m})x}{1 - (\alpha^{2m} + \beta^{2m})x + (\alpha\beta)^{2m}x^2} \right) \\
& = \frac{\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma - \delta} - ((\gamma+1)(\delta+1))^m \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x}{1 - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m)x + ((\gamma+1)(\delta+1))^m x^2} \\
& - \frac{\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} - (\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x}{1 - (\alpha^{2m} + \beta^{2m})x + (\alpha\beta)^{2m}x^2} \\
& = \frac{1}{A_1} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \right) - \frac{((\gamma+1)(\delta+1))^m}{A_1} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x \\
& - \frac{1}{B_1} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{B_1} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn+s} x^n & = \frac{1(\alpha - \beta)}{A_1} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{(\gamma - \delta)(\alpha - \beta)} \right) - \frac{1(\gamma - \delta)}{B_1} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{((\gamma+1)(\delta+1))^m (\alpha - \beta)}{A_1} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{(\gamma - \delta)(\alpha - \beta)} \right) x \\
& + \frac{(\alpha\beta)^{2m} (\gamma - \delta)}{B_1} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) x \\
& = \frac{1}{A_1} \left(\frac{b_s((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2s} - \beta^{2s})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{1}{B_1} \left(\frac{(\alpha - \beta)((\gamma+1)^s - (\delta+1)^s) - b_s((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{((\gamma+1)(\delta+1))^m}{A_1} \left(\frac{\left\{ \begin{aligned} & b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) \\ & + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}) \end{aligned} \right\}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) x \\
& + \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{B_1} \left(\frac{(\alpha - \beta)((\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}) - b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) x \\
& = \frac{1}{A_1} b_s + \frac{1}{A_1} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_1} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \right) + \frac{1}{B_1} b_s - \frac{2^m}{A_1} b_{s-m} x \\
& - \frac{2^m}{A_1} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x + \frac{1}{B_1} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x - \frac{1}{B_1} b_{s-m} x \\
& = b_s \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{B_1} \right) - b_{s-m} \left(\frac{2^m}{A_1} + \frac{1}{B_1} \right) x + C_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla sonuç bulunur. $\square$

Bir sonraki teoremdede tüm toplam sonuçlarını içeren genel bir formül elde edilmiştir.

Teorem 3.8. b_n kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $m, s \in \mathbb{Z}, s > m$ için

$$\begin{aligned}
A_2 &= (\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1 \\
B_2 &= \alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1 \\
C_2 &= \frac{2^m}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+s} - (\delta+1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} \right) \\
&\quad - \frac{2^m}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+m+s)} - \beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma - \delta} \right) \\
&\quad + \frac{1}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n b_{mk+s} = \frac{2^m}{A_2} (b_{mn+s} - b_{s-m}) + \frac{1}{B_2} (b_{mn+s} + b_{s-m} + b_{mn+m+s} - b_s) + \frac{1}{A_2} (b_s - b_{mn+m+s}) + C_2$$

dir.

İspat. (3.4)'den

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n b_{mk+s} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{(\gamma+1)^{mk+s} - (\delta+1)^{mk+s}}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^{2(mk+s)} - \beta^{2(mk+s)}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{(\gamma+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{((\gamma+1)^m)^{n+1} - 1}{(\gamma+1)^m - 1} \right) - \frac{(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{((\delta+1)^m)^{n+1} - 1}{(\delta+1)^m - 1} \right) \\
&\quad - \frac{\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{(\alpha^{2m})^{n+1} - 1}{\alpha^{2m} - 1} \right) + \frac{\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{(\beta^{2m})^{n+1} - 1}{\beta^{2m} - 1} \right) \\
&= \frac{(\gamma+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{(((\gamma+1)^m)^{n+1} - 1)((\delta+1)^m - 1)}{((\gamma+1)^m - 1)((\delta+1)^m - 1)} \right) \\
&\quad - \frac{(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{(((\delta+1)^m)^{n+1} - 1)((\gamma+1)^m - 1)}{((\delta+1)^m - 1)((\gamma+1)^m - 1)} \right) \\
&\quad - \frac{\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{((\alpha^{2m})^{n+1} - 1)(\beta^{2m} - 1)}{(\alpha^{2m} - 1)(\beta^{2m} - 1)} \right) + \frac{\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{((\beta^{2m})^{n+1} - 1)(\alpha^{2m} - 1)}{(\beta^{2m} - 1)(\alpha^{2m} - 1)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\gamma+1)^{mn+m+s}(\delta+1)^m - (\gamma+1)^{mn+m+s} - (\gamma+1)^s(\delta+1)^m + (\gamma+1)^s}{(\gamma-\delta)((\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1)} \\
&- \frac{(\delta+1)^{mn+m+s}(\gamma+1)^m - (\delta+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^s(\gamma+1)^m + (\delta+1)^s}{(\gamma-\delta)((\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1)} \\
&- \frac{\alpha^{2(mn+m+s)}\beta^{2m} - \alpha^{2(mn+m+s)} - \alpha^{2s}\beta^{2m} + \alpha^{2s}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1)} \\
&+ \frac{\beta^{2(mn+m+s)}\alpha^{2m} - \beta^{2(mn+m+s)} - \beta^{2s}\alpha^{2m} + \beta^{2s}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1)} \\
&= \frac{\left\{ (\gamma+1)^m(\delta+1)^m \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+s} - (\delta+1)^{mn+s}}{\gamma-\delta} \right) - (\gamma+1)^m(\delta+1)^m \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma-\delta} \right) \right.}{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1} \\
&\quad \left. - \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma-\delta} \right) + \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \right) \right\} \\
&- \frac{\left\{ (\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{\alpha-\beta} \right) + (\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha-\beta} \right) \right.}{\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1} \\
&\quad \left. + \left(\frac{\alpha^{2(mn+m+s)} - \beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha-\beta} \right) - \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha-\beta} \right) \right\}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

İşlemler sonucunda

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n b_{mk+s} \\
&= \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m(\alpha-\beta)}{A} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+s} - (\delta+1)^{mn+s}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) - \frac{(\alpha\beta)^{2m}(\gamma-\delta)}{B_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) \\
&- \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m(\alpha-\beta)}{A_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) + \frac{(\alpha\beta)^{2m}(\gamma-\delta)}{B_2} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \\
&- \frac{\alpha-\beta}{A_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^{mn+m+s}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) + \frac{\gamma-\delta}{B_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+m+s)} - \beta^{2(mn+m+s)}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \\
&+ \frac{\alpha-\beta}{A_2} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) - \frac{\gamma-\delta}{B_2} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \\
&= \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m}{A_2} \left(\frac{b_{mn+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha-\beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)})}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) \\
&- \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{B_2} \left(\frac{(\alpha-\beta)((\gamma+1)^{mn+s} - (\delta+1)^{mn+s}) - b_{mn+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) \\
&- \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m}{A_2} \left(\frac{b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha-\beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)})}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) \\
&+ \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{B_2} \left(\frac{(\alpha-\beta)((\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}) - b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{A_2} \left(\frac{b_{mn+m+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2(mn+m+s)} - \beta^{2(mn+m+s)})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& + \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\alpha - \beta)((\gamma+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^{mn+m+s}) - b_{mn+m+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& + \frac{1}{A_2} \left(\frac{b_s((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha^{2s} - \beta^{2s})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Karakteristik denklemin (2.18) kökleri yerlerine koyulduğunda,

$$\begin{aligned}
& = \frac{2^m}{A_2} b_{mn+s} + \frac{1}{B_2} b_{mn+s} + \frac{2^m}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+s)} - \beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+s} - (\delta+1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} \right) \\
& - \frac{2^m}{A_2} b_{s-m} + \frac{1}{B_2} b_{s-m} + \frac{2^m}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(s-m)} - \beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{s-m} - (\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) \\
& + \frac{1}{B_2} b_{mn+m+s} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2(mn+m+s)} - \beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^{mn+m+s} - (\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma - \delta} \right) \\
& + \frac{1}{A_2} b_s - \frac{1}{B_2} b_s + \frac{1}{A_2} \left(\frac{\alpha^{2s} - \beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{B_2} \left(\frac{(\gamma+1)^s - (\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \right) - \frac{1}{A_2} b_{mn+m+s} \\
& = \frac{2^m}{A_2} (b_{mn+s} - b_{s-m}) + \frac{1}{B_2} (b_{mn+s} + b_{s-m} + b_{mn+m+s} - b_s) + \frac{1}{A_2} (b_s - b_{mn+m+s}) + C_2
\end{aligned}$$

sonucu çıkar.

□

4. KUADRA FIBONA-PELL KUATERNİYONUNUN BİNOM DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü oluşturulup bu binom dönüşümü ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler elde edilecektir [53]. T. Çetinalp [45] tezinde kuadra Fibona-Pell dizisinin kuaterniyon halini incelemiş ve Binet formülü, üreteç fonksiyonu, toplam formülleri elde etmiştir. [43]'de ise ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip Horadam kuaterniyon dizisine binom dönüşümü uygulanarak elde edilen yeni kuaterniyon dizisine ait sonuçlar incelenmiştir. T. Çetinalp [45] tezinde, W_n kuadra Fibona-Pell dizisi olmak üzere,

$$QW_n = W_n + iW_{n+1} + jW_{n+2} + kW_{n+3}$$

eşitliğini kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu olarak tanımlamıştır. Başlangıç değerleri

$$QW_0 = j + 3k,$$

$$QW_1 = i + 3j + 9k,$$

$$QW_2 = 1 + 3i + 9j + 24k,$$

$$QW_3 = 3 + 9i + 24j + 62k$$

olmak üzere QW_n , n . kuadra Fibona-Pell kuaterniyonu olsun. Kuadra Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü

$$bq_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} QW_i$$

dir.

Binom dönüşümünün rekürans bağıntısını bulmak için ilk adım olarak bir Yardımcı Teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1. bq_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde

$$bq_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (QW_i + QW_{i+1})$$

dir.

İspat. (3.1) denkleminde

$$\begin{aligned} bq_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} QW_i, \\ bq_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} QW_i, \\ bq_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} QW_i + QW_0 \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilsin. Burada $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$ ve $\binom{n}{n+1} = 0$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} bq_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] QW_i + QW_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} QW_i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} QW_i + QW_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} QW_i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} QW_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (QW_i + QW_{i+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teoremden yukarıdaki Yardımcı Teorem kullanılarak bq_n için rekürans bağıntısı elde edilmiştir.

Teorem 4.2. bq_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. $n \geq 4$ için

$$bq_{n+3} = 7bq_{n+2} - 15bq_{n+1} + 10bq_n - 2bq_{n-1} \quad (4.1)$$

dir. Burada başlangıç değerleri

$$\begin{aligned} bq_0 &= j + 3k, \\ bq_1 &= i + 4j + 12k, \end{aligned}$$

$$bq_2 = 1 + 5i + 16j + 45k$$

ve

$$bq_3 = 6 + 21i + 61j + 164k$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 4.1 kullanılırsa

$$bq_{n+3} = K_2 bq_{n+2} + L_2 bq_{n+1} + M_2 bq_n + N_2 bq_{n-1}$$

elde edilir. $n = 1, 2, 3, 4$ olarak alındığında

$$n = 1 \Rightarrow bq_4 = K_2 bq_3 + L_2 bq_2 + M_2 bq_1 + N_2 bq_0,$$

$$n = 2 \Rightarrow bq_5 = K_2 bq_4 + L_2 bq_3 + M_2 bq_2 + N_2 bq_1,$$

$$n = 3 \Rightarrow bq_6 = K_2 bq_5 + L_2 bq_4 + M_2 bq_3 + N_2 bq_2,$$

$$n = 4 \Rightarrow bq_7 = K_2 bq_6 + L_2 bq_5 + M_2 bq_4 + N_2 bq_3$$

bulunur. Bu çözüm için yukarıdaki tanım ve cramer kuralı dikkate alınırsa

$$K_2 = 7, L_2 = -15, M_2 = 10, N_2 = -2$$

elde edilir. Böylece

$$bq_{n+3} = 7bq_{n+2} - 15bq_{n+1} + 10bq_n - 2bq_{n-1}$$

olup ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3. bq_n kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. Binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$bq(x) = \frac{\begin{pmatrix} bq_0 + (bq_1 - 7bq_0)x + (bq_2 - 7bq_1 + 15bq_0)x^2 \\ + (bq_3 - 7bq_2 + 15bq_1 - 10bq_0)x^3 \end{pmatrix}}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4}$$

dir. Burada $bq_0 = j + 3k$, $bq_1 = i + 4j + 12k$, $bq_2 = 1 + 5i + 16j + 45k$ ve $bq_3 = 6 + 21i + 61j + 164k$ dır.

İspat. Varsayalım ki

$$bq(x) = \sum_{i=0}^{\infty} bq_i x^i$$

QW_n için binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu olsun. O halde

$$\begin{aligned} bq(x) &= bq_0 + bq_1 x + bq_2 x^2 + bq_3 x^3 + \dots, \\ 7xbq(x) &= 7bq_0 x + 7bq_1 x^2 + 7bq_2 x^3 + 7bq_3 x^4 + \dots, \\ 15x^2 bq(x) &= 15bq_0 x^2 + 15bq_1 x^3 + 15bq_2 x^4 + 15bq_3 x^5 + \dots, \\ 10x^3 bq(x) &= 10bq_0 x^3 + 10bq_1 x^4 + 10bq_2 x^5 + 10bq_3 x^6 + \dots, \\ 2x^4 bq(x) &= 2bq_0 x^4 + 2bq_1 x^5 + 2bq_2 x^6 + 2bq_3 x^7 + \dots, \end{aligned}$$

dir. (4.1) denkleminde

$$\begin{aligned} &(1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4)bq(x) \\ &= j + 3k + (i - 3j - 9k)x + (1 - 2i + 3j + 6k)x^2 + (-1 + i - j - k)x^3 \end{aligned}$$

elde edilir ve bq_n binom dönüşümü için üreteç fonksiyonu

$$bq(x) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &bq_0 + (bq_1 - 7bq_0)x + (bq_2 - 7bq_1 + 15bq_0)x^2 \\ &+ (bq_3 - 7bq_2 + 15bq_1 - 10bq_0)x^3 \end{aligned} \right\}}{1 - 7x + 15x^2 - 10x^3 + 2x^4}$$

bulunur.

□

Şimdi cebirsel özdeşlikler için kullanılacak olan Binet formülü bulunsun.

Teorem 4.4. bq_n , kuadra Fibona-Pell kuarterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. $n \geq 0$ ve

$$A + B(\gamma + 1) = P,$$

$$A + B(\delta + 1) = R,$$

$$C + D(\alpha^2) = S,$$

$$C + D(\beta^2) = T$$

olmak üzere binom dönüşümü için Binet formülü

$$bq_n = \frac{P(\gamma + 1)^n - R(\delta + 1)^n}{\gamma - \delta} + \frac{S\alpha^{2n} - T\beta^{2n}}{\alpha - \beta} \quad (4.2)$$

dir.

İspat. Varsayalım ki, Teorem 4.3 de

$$bq(x) = \frac{Ax + B}{2x^2 - 4x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - 3x + 1}$$

payda eşitlendiğinde

$$B + D = bq_0,$$

$$A + 2C = bq_3 - 7bq_2 + 15bq_1 - 10bq_0,$$

$$B - 3A - 4C + 2D = bq_2 - 7bq_1 + 15bq_0,$$

$$A - 3B + C - 4D = bq_1 - 7bq_0$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözüldüğünde

$$A = -10bq_0 + 15bq_1 - 7bq_2 + bq_3,$$

$$B = -3bq_0 + 10bq_1 - 6bq_2 + bq_3,$$

$$C = -10bq_0 + 24bq_1 - 13bq_2 + 2bq_3,$$

$$D = 4bq_0 - 10bq_1 + 6bq_2 - bq_3$$

bulunur. Kuaterniyon değerleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} A &= -10(j + 3k) + 15(i + 4j + 12k) - 7(1 + 5i + 16j + 45k) \\ &\quad + 6 + 21i + 61j + 164k \\ &= i - j - k - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= -3(j+3k) + 10(i+4j+12k) - 6(1+5i+16j+45k) \\
&\quad + 6 + 21i + 61j + 164k \\
&= i + 2j + 5k, \\
C &= -10(j+3k) + 24(i+4j+12k) - 13(1+5i+16j+45k) \\
&\quad + 2(6+21i+61j+164k) \\
&= -1 + i + k, \\
D &= 4(j+3k) - 10(i+4j+12k) + 6(1+5i+16j+45k) \\
&\quad - (6+21i+61j+164k) \\
&= -i - j - 2k
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
bq(x) &= \frac{Ax+B}{2x^2-4x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+1} \\
&= \frac{Ax}{2x^2-4x+1} + \frac{B}{2x^2-4x+1} + \frac{Cx}{x^2-3x+1} + \frac{D}{x^2-3x+1} \\
&= A \left(\frac{(\gamma+1)^n - (\delta+1)^n}{\gamma-\delta} \right) + B \left(\frac{(\gamma+1)^{n+1} - (\delta+1)^{n+1}}{\gamma-\delta} \right) \\
&\quad + C \left(\frac{(\alpha+1)^n - (\beta+1)^n}{\alpha-\beta} \right) + D \left(\frac{(\alpha+1)^{n+1} - (\beta+1)^{n+1}}{\alpha-\beta} \right) \\
&= \frac{A(\gamma+1)^n - A(\delta+1)^n + B(\gamma+1)^{n+1} - B(\delta+1)^{n+1}}{\gamma-\delta} \\
&\quad + \frac{C\alpha^{2n} - C\beta^{2n} + D\alpha^{2n+2} - D\beta^{2n+2}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{(\gamma+1)^n (A+B(\gamma+1)) - (\delta+1)^n (A+B(\delta+1))}{\gamma-\delta} \\
&\quad + \frac{\alpha^{2n} (C+D\alpha^2) - \beta^{2n} (C+D\beta^2)}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. İfadeyi daha net yazabilmek için

$$A + B(\gamma+1) = P,$$

$$A + B(\delta+1) = R,$$

$$C + D\alpha^2 = S,$$

$$C + D\beta^2 = T$$

notasyonları kullanılırsa

$$bq_n = \frac{P(\gamma+1)^n - R(\delta+1)^n}{\gamma - \delta} + \frac{S\alpha^{2n} - T\beta^{2n}}{\alpha - \beta}$$

bulunur. □

Aşağıdaki iki teoremden, bq_n binom dönüşümü için toplam formülleri türetilmiştir.

Teorem 4.5. bq_n , kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $m, s \in \mathbb{N}, s > m$ için

$$\begin{aligned} E_1 &= (1 - (\gamma+1)^m x)(1 - (\delta+1)^m x), \\ G_1 &= (1 - \alpha^{2m} x)(1 - \beta^{2m} x), \\ H_1 &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{S\gamma^{2s} - T\delta^{2s}}{\gamma - \delta} \right) + \frac{1}{G_1} \left(\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \right) \\ &\quad - \frac{2^m}{E_1} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x - \frac{4^m}{G_1} \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq_{mn+s} x^n = b_s \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{G_1} \right) - b_{s-m} \left(\frac{2^m}{E_1} - \frac{1}{G_1} \right) x + H_1$$

dir.

İspat. Yine (4.2) denkleminde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} bq_{mn+s} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} + \frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) x^n \\ &= \frac{P(\gamma+1)^s}{\gamma - \delta} \sum_{n=0}^{\infty} ((\gamma+1)^m x)^n - \frac{R(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \sum_{n=0}^{\infty} ((\delta+1)^m x)^n \\ &\quad + \frac{S\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{2m} x)^n - \frac{T\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^{2m} x)^n \\ &= \frac{P(\gamma+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{1}{1 - (\gamma+1)^m x} \right) - \frac{R(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} \left(\frac{1}{1 - (\delta+1)^m x} \right) \\ &\quad + \frac{S\alpha^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \alpha^{2m} x} \right) - \frac{T\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \beta^{2m} x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma - \delta} \frac{P(\gamma + 1)^s (1 - (\delta + 1)^m x) - R(\delta + 1)^s (1 - (\gamma + 1)^m x)}{(1 - (\gamma + 1)^m x)(1 - (\delta + 1)^m x)} \\
&+ \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{S\alpha^{2s} (1 - \beta^{2m} x) - T\beta^{2s} (1 - \alpha^{2m} x)}{(1 - \alpha^{2m} x)(1 - \beta^{2m} x)} \\
&= \frac{1}{\gamma - \delta} \frac{(P(\gamma + 1)^s - R(\delta + 1)^s) - (P(\gamma + 1)^s (\delta + 1)^m - R(\delta + 1)^s (\gamma + 1)^m) x}{1 - ((\gamma + 1)^m + (\delta + 1)^m) x + ((\gamma + 1)(\delta + 1))^m x^2} \\
&+ \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{(S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}) - (S\alpha^{2s} \beta^{2m} - T\beta^{2s} \alpha^{2m}) x}{1 - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) x + (\alpha\beta)^{2m} x^2} \\
&= \frac{\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{\gamma - \delta} - ((\gamma + 1)(\delta + 1))^m \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x}{1 - ((\gamma + 1)^m + (\delta + 1)^m) x + ((\gamma + 1)(\delta + 1))^m x^2} \\
&+ \frac{\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{\alpha - \beta} - (\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x}{1 - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) x + (\alpha\beta)^{2m} x^2} \\
&= \frac{1}{E_1} \left(\frac{P(\gamma + 1)^s - R(\delta + 1)^s}{\gamma - \delta} \right) - \frac{((\gamma + 1)(\delta + 1))^m}{E_1} \left(\frac{P(\gamma + 1)^{s-m} - R(\delta + 1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) x \\
&+ \frac{1}{G_1} \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{G_1} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) x \\
&= \frac{1(\alpha - \beta)}{E_1} \left(\frac{P(\gamma + 1)^s - R(\delta + 1)^s}{(\gamma - \delta)(\alpha - \beta)} \right) + \frac{1(\gamma - \delta)}{G_1} \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
&- \frac{((\gamma + 1)(\delta + 1))^m (\alpha - \beta)}{E_1} \left(\frac{P(\gamma + 1)^{s-m} - R(\delta + 1)^{s-m}}{(\gamma - \delta)(\alpha - \beta)} \right) x \\
&- \frac{(\alpha\beta)^{2m} (\gamma - \delta)}{G_1} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) x
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{E_1} \left(\frac{b_s((\gamma + 1) - (\delta + 1))(\alpha - \beta) + ((\gamma + 1) - (\delta + 1))(S\alpha^{2s} - T\beta^{2s})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
&+ \frac{1}{G_1} \left(\frac{(\alpha - \beta)(P(\gamma + 1)^s - R(\delta + 1)^s) - b_s((\gamma + 1) - (\delta + 1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
&- \frac{((\gamma + 1)(\delta + 1))^m}{E_1} \left(\frac{\left\{ \begin{aligned} &b_{s-m}((\gamma + 1) - (\delta + 1))(\alpha - \beta) \\ &+ ((\gamma + 1) - (\delta + 1))(S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}) \end{aligned} \right\}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\alpha\beta)^{2m}}{G_1} \left(\frac{\left\{ \begin{array}{l} (\alpha-\beta)(P(\gamma+1)^{s-m}-R(\delta+1)^{s-m}) \\ -b_{s-m}((\gamma+1)-(\delta+1))(\alpha-\beta) \end{array} \right\}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) x \\
& = \frac{1}{E_1} b_s + \frac{1}{E_1} \left(\frac{S\alpha^{2s}-T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \right) + \frac{1}{G_1} \left(\frac{P(\gamma+1)^s-R(\delta+1)^s}{(\gamma-\delta)} \right) \\
& - \frac{1}{G_1} b_s - \frac{2^m}{E_1} b_{s-m} x - \frac{2^m}{E_1} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)}-T\beta^{2(s-m)}}{\alpha-\beta} \right) x \\
& - \frac{1}{G_1} \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m}-R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma-\delta} \right) x + \frac{1}{G_1} b_{s-m} x \\
& = b_s \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{G_1} \right) - b_{s-m} \left(\frac{2^m}{E_1} - \frac{1}{G_1} \right) x + H_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla sonuç açıktır. $\square$

Teorem 4.6. bq_n , kuadra Fibona-Pell kuaterniyon dizisinin binom dönüşümü olsun. O halde tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $m, s \in \mathbb{Z}, s > m$ için ve

$$\begin{aligned}
E_2 &= (\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1, \\
G_2 &= \alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1, \\
H_2 &= \frac{2^m}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)}-T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha-\beta} \right) + \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s}-R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma-\delta} \right) \\
& - \frac{2^m}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)}-T\beta^{2(s-m)}}{\alpha-\beta} \right) - \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m}-R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma-\delta} \right) \\
& - \frac{1}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+m+s)}-T\beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha-\beta} \right) - \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s}-R(\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma-\delta} \right) \\
& + \frac{1}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2s}-T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \right) + \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^s-R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n bq_{mk+s} = \frac{2^m}{E_2} (b_{mn+s} - b_{s-m}) - \frac{1}{G_2} (b_{mn+s} - b_{s-m} - b_{mn+m+s} + b_s) - \frac{1}{E_2} (b_{mn+m+s} + b_s) + H_2$$

dir.

İspat. (4.2) denkleminde,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n b_{q_{mk+s}} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{P(\gamma+1)^{mk+s} - R(\delta+1)^{mk+s}}{\gamma-\delta} + \frac{S\alpha^{2(mk+s)} - T\beta^{2(mk+s)}}{\alpha-\beta} \right) \\
&= \frac{P(\gamma+1)^s}{\gamma-\delta} \sum_{k=0}^n (\gamma+1)^{mk} - \frac{R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \sum_{k=0}^n (\delta+1)^{mk} \\
&\quad + \frac{S\alpha^{2s}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^n \alpha^{2mk} - \frac{T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^n \beta^{2mk} \\
&= \frac{P(\gamma+1)^s}{\gamma-\delta} \left(\frac{((\gamma+1)^m)^{n+1} - 1}{((\gamma+1)^m - 1)((\delta+1)^m - 1)} \right) \\
&\quad + \frac{S\alpha^{2s}}{\alpha-\beta} \left(\frac{((\alpha^{2m})^{n+1} - 1)(\beta^{2m} - 1)}{(\alpha^{2m} - 1)(\beta^{2m} - 1)} \right) \\
&\quad - \frac{R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \left(\frac{(((\delta+1)^m)^{n+1} - 1)((\gamma+1)^m - 1)}{((\delta+1)^m - 1)((\gamma+1)^m - 1)} \right) \\
&\quad - \frac{T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \left(\frac{((\beta^{2m})^{n+1} - 1)(\alpha^{2m} - 1)}{(\beta^{2m} - 1)(\alpha^{2m} - 1)} \right) \\
&= \frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s}(\delta+1)^m - P(\gamma+1)^{mn+m+s} - P(\gamma+1)^s(\delta+1)^m + P(\gamma+1)^s}{(\gamma-\delta)((\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1)} \\
&\quad - \frac{R(\delta+1)^{mn+m+s}(\gamma+1)^m - R(\delta+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^s(\gamma+1)^m + R(\delta+1)^s}{(\gamma-\delta)((\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1)} \\
&\quad + \frac{S\alpha^{2(mn+m+s)}\beta^{2m} - S\alpha^{2(mn+m+s)} - S\alpha^{2s}\beta^{2m} + S\alpha^{2s}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1)} \\
&\quad - \frac{T\beta^{2(mn+m+s)}\alpha^{2m} - T\beta^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2s}\alpha^{2m} + T\beta^{2s}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1)} \\
&= \frac{\left\{ \begin{aligned} &(\gamma+1)^m(\delta+1)^m \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma-\delta} \right) \\ &- (\gamma+1)^m(\delta+1)^m \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma-\delta} \right) \\ &- \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma-\delta} \right) + \left(\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \right) \end{aligned} \right\}}{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m - ((\gamma+1)^m + (\delta+1)^m) + 1} \\
&\quad + \frac{\left\{ \begin{aligned} &(\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha-\beta} \right) - (\alpha\beta)^{2m} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha-\beta} \right) \\ &- \left(\frac{S\alpha^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha-\beta} \right) + \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \right) \end{aligned} \right\}}{\alpha^{2m}\beta^{2m} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) + 1} \\
&= \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma-\delta} - \frac{P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma-\delta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma-\delta} \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\alpha\beta)^{2m}}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} - \frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) \\
& -\frac{1}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{\alpha - \beta} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Hesaplamalar sonucunda,

$$\begin{aligned}
& = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m(\alpha-\beta)}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) + \frac{(\alpha\beta)^{2m}(\gamma-\delta)}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) \\ & - \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m(\alpha-\beta)}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m} - T(\delta+1)^{s-m}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) - \frac{(\alpha\beta)^{2m}(\gamma-\delta)}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \\ & - \frac{(\alpha-\beta)}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^{mn+m+s}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) - \frac{(\gamma-\delta)}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2(mn+m+s)}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \\ & + \frac{(\alpha-\beta)}{E_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \right) + \frac{(\gamma-\delta)}{G_2} \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \right) \end{aligned} \right\} \\
& = \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m}{E_2} \left(\frac{\left\{ \begin{aligned} & b_{mn+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) \\ & + ((\gamma+1) - (\delta+1))(S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}) \end{aligned} \right\}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& + \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{G_2} \left(\frac{(\alpha - \beta)(P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}) - b_{mn+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{(\gamma+1)^m(\delta+1)^m}{E_2} \left(\frac{b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{(\alpha\beta)^{2m}}{G_2} \left(\frac{(\alpha - \beta)(P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}) - b_{s-m}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{1}{E_2} \left(\frac{b_{mn+m+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(S\alpha^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2(mn+m+s)})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& - \frac{1}{G_2} \left(\frac{(\alpha - \beta)(P(\gamma+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^{mn+m+s}) - b_{mn+m+s}((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& + \frac{1}{E_2} \left(\frac{b_s((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta) + ((\gamma+1) - (\delta+1))(S\alpha^{2s} - T\beta^{2s})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& + \frac{1}{G_2} \left(\frac{(\alpha - \beta)(P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s) - b_s((\gamma+1) - (\delta+1))(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \right) \\
& = \frac{2^m}{E_2} b_{mn+s} - \frac{1}{G_2} b_{mn+s} + \frac{2^m}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+s)} - T\beta^{2(mn+s)}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+s} - R(\delta+1)^{mn+s}}{\gamma - \delta} \right) \\
& - \frac{2^m}{E_2} b_{s-m} + \frac{1}{G_2} b_{s-m} - \frac{2^m}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(s-m)} - T\beta^{2(s-m)}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{s-m} - R(\delta+1)^{s-m}}{\gamma - \delta} \right) \\
& - \frac{1}{E_2} b_{mn+m+s} + \frac{1}{G_2} b_{mn+m+s} - \frac{1}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2(mn+m+s)} - T\beta^{2(mn+m+s)}}{\alpha - \beta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^{mn+m+s} - R(\delta+1)^{mn+m+s}}{\gamma-\delta} \right) + \frac{1}{E_2} b_s - \frac{1}{G_2} b_s + \frac{1}{E_2} \left(\frac{S\alpha^{2s} - T\beta^{2s}}{\alpha-\beta} \right) \\
& + \frac{1}{G_2} \left(\frac{P(\gamma+1)^s - R(\delta+1)^s}{\gamma-\delta} \right) \\
& = \frac{2^m}{E_2} (b_{mn+s} - b_{s-m}) - \frac{1}{G_2} (b_{mn+s} - b_{s-m} - b_{mn+m+s} + b_s) - \frac{1}{E_2} (b_{mn+m+s} + b_s) + H_2
\end{aligned}$$

elde edilir. □



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak gerekli ön bilgiler verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizilerinden; Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas tam sayı dizileri tanıtılmış ve bazı cebirsel özdeşlikler verilmiştir. Bunun yanısıra dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip tam sayı dizilerinden; kuadra-Pell ve kuadra Fibona-Pell tam sayı dizilerinin tanımları ve yine bu dizilerle ilgili önemli özdeşlikler hatırlatılmıştır. Akabinde binom dönüşümü ve özelliklerinden, üreteç fonksiyon tanımından ve son olarakta kuaterniyon kavramından bahsedilmiştir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları, kuadra Fibona-Pell kuaterniyonlarıyla ilgili tanımlar ve bazı önemli özdeşlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise daha önce tanımlanmış kuadra Fibona-Pell tam sayı dizisinin binom dönüşümü oluşturulmuş ve elde edilen yeni tam sayı dizisi için rekürans bağıntısı, Binet formülü ve üreteç fonksiyon kavramları yeniden ele alınmıştır. Ardından Fibona-Pell dizisinin binom dönüşümü ile ilgili en genel haldeki toplam formülleri bulunmuştur. Son bölümde ise Fibona-Pell kuaterniyon dizisi için binom dönüşümü uygulanıp elde edilen dizi için benzer sonuçlar incelenmiştir.

Gelecekteki çalışmalarda yine dördüncü dereceden rekürans bağıntısına sahip bir tam sayı dizisi olan kuadra Fibona-Jacobsthal dizisi için binom dönüşümü yapıp rekürans bağıntısı, Binet formülü, üreteç fonksiyon ve diğer cebirsel özdeşliklerin bulunması planlanmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- [1] A. Dönmez, *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni*. New York, U.S.A.: Toplumsal Dönüşüm Yayınları, 2005.
- [2] R. A. Dunlap ve B. A. (Çevirmen), *Altın Oran ve Fibonacci Sayıları*. Ankara, Türkiye: Tübitak, 2010.
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New Jersey, U.S.A: John Wiley, Sons, 2018.
- [4] A. F. Horadam, “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 3, sayı 3, ss. 161–176, 1965.
- [5] A. F. Horadam, “Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers”, *Duke Mathematical Journal*, c. 32, sayı 2, ss. 437–446, 1965.
- [6] T. Mansour, “A formula for the generating functions of powers of horadam’s sequence”, *The Australasian Journal of Combinatorics*, c. 30, ss. 207–212, 2004.
- [7] D. Taşçı, “On quadrapell numbers and quadrapell polynomials”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 38, sayı 3, ss. 265–275, 2009.
- [8] A. Özkoç, “Some algebraic identities on quadra fibona-pell integer sequence”, *Advances in Difference Equations*, c. 2015, sayı 148, 2015.
- [9] G. Fontene, “Généralisation d’une formule connue”, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, c. 15, ss. 110–112, 1915.
- [10] M. Ward, “A calculus of sequences”, *American Journal of Mathematics*, c. 58, sayı 2, ss. 255–266, 1936.
- [11] H. W. Gould, “The bracket function and fontené-ward generalized binomial coefficients with applications to fibonomial coefficients”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 7, sayı 1, ss. 23–40, 1969.
- [12] H. Prodinger, “Some information about the binomial transform”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 32, sayı 5, ss. 412–415, 1994.
- [13] M. Z. Spivey ve L. L. Steil, “The k - binomial transforms and the hankel transform”, *Journal of Integer Sequences*, c. 9, ss. 1–18, 2006.
- [14] K. W. Chen, “Identities from the binomial transform”, *Journal of Number Theory*, c. 124, ss. 142–150, 2007.
- [15] H. H. Gulec ve N. Taskara, “On the properties of fibonacci numbers with binomial coefficients”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 25, ss. 1251–1256, 2009.
- [16] S. Falcon ve A. Plaza, “Binomial transforms of the k-fibonacci sequence”, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, c. 10, sayı 11-12, ss. 1527–1538, 2009.

- [17] N. Taskara, K. Uslu, ve H. H. Gulec, “On the properties of lucas numbers with binomial coefficients”, *Applied Mathematics Letters*, c. 23, sayı 1, ss. 68–72, 2010.
- [18] P. Bhadouria, D. Jhala, ve B. Singh, “Binomial transforms of the k-lucas sequence”, *Journal of Mathematical Computer Sciences*, c. 8, sayı 1, ss. 81–92, 2014.
- [19] S. Falcon, “Iterated binomial transforms of the k-fibonacci sequence”, *British Journal of Mathematics and Computer Science*, c. 4, sayı 22, ss. 3135–3145, 2014.
- [20] N. Yılmaz ve N. Taskara, “Binomial transforms of the padovan and perrin numbers”, *Journal of Abstract and Applied Mathematics*, c. 2013, ss. 1–7, 2013.
- [21] E. Polatli ve S. Kesim, “Binomial transform of the generalized k-fibonacci numbers”, *Communications in Mathematical Analysis*, c. 10, sayı 3, ss. 643–651, 2019.
- [22] C. Kızılateş, N. Tuğlu, ve B. Çekim, “Binomial transform of quadrapell sequences and quadrapell matrix sequences”, *Journal of Science and Arts*, c. 1, sayı 38, ss. 69–80, 2017.
- [23] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*. London, England: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [24] K. Gürlebeck ve W. Sprossig, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. West Sussex, England: John Wiley, Sons, 1997.
- [25] M. N. S. Swamy, “Generalized fibonacci and lucas polynomials, and their associated diagonal polynomials”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 37, sayı 3, ss. 213–222, 1999.
- [26] M. Catalani. (Jun. 2004). Generalized bivariate fibonacci polynomials, [Online]. Available: <http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0211366>.
- [27] A. Nalli ve P. Haukkanen, “On generalized fibonacci and lucas polynomials”, *Chaos, Solitons and Fractals*, c. 42, sayı 5, ss. 3179–3186, 2009.
- [28] A. F. Horadam, “Complex fibonacci numbers and fibonacci quaternions”, *The American Mathematical Monthly*, c. 70, sayı 3, ss. 289–291, 1963.
- [29] A. F. Horadam, “Quaternion recurrence relations”, *Ulam Quarterly*, c. 2, sayı 2, ss. 23–33, 1993.
- [30] A. Özkoç ve A. Porsuk, “A note for the (p,q)-fibonacci and lucas quaternion polynomials”, *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 5, sayı 2, ss. 36–46, 2017.
- [31] P. Catarino, “A note on h(x)-fibonacci quaternion polynomials”, *Chaos, Solitons and Fractals*, c. 77, ss. 1–5, 2015.
- [32] A. Szynal-Liana ve I. Wloch, “The pell quaternions and the pell octonions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 26, sayı 1, ss. 435–440, 2016.
- [33] A. Szynal-Liana ve I. Wloch, “A note on jacobsthal quaternions”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 26, sayı 1, ss. 441–447, 2016.
- [34] M. R. Iyer, “A note on fibonacci quaternions”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 7, sayı 3, ss. 225–229, 1969.
- [35] M. R. Iyer, “Some results on fibonacci quaternions”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 7, sayı 2, ss. 201–210, 1969.
- [36] S. Halıcı, “On fibonacci quaternions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 22, sayı 2, ss. 321–327, 2012.

- [37] E. Polatlı, “A generalization of fibonacci and lucas quaternions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 26, sayı 2, ss. 719–730, 2016.
- [38] E. Polatlı ve S. Kesim, “On quaternions with generalized fibonacci and lucas number components”, *Advances in Difference Equations*, c. 2015, ss. 1–8, 2015.
- [39] S. Halıcı, “Some sums formulae for products of terms of pell, pell-lucas and modified pell sequences”, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, c. 15, sayı 2, ss. 151–155, 2011.
- [40] A. L. Iakin, “Generalized quaternions with quaternion components”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 15, sayı 4, ss. 350–352, 1977.
- [41] M. N. S. Swamy, “On generalized fibonacci quaternions”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 11, sayı 5, ss. 547–549, 1973.
- [42] C. B. Çimen ve A. Ipek, “On pell quaternions and pell-lucas quaternions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 26, sayı 1, ss. 39–51, 2016.
- [43] F. Kaplan ve A. Öztürk, “On the binomial transforms of the horadam quaternion sequences”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 45, sayı 18, ss. 12 009–12 022, 2022.
- [44] E. Polatlı, “On certain properties of quadrapell sequences”, *Karaelmas Science and Engineering Journal*, c. 8, sayı 1, ss. 305–308, 2018.
- [45] T. Çetinalp, “Kuada fibona-pell kuaterniyon dizileri üzerine bazı cebirsel özdeşlikler”, Master’s thesis, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Karaman, Türkiye, 2017.
- [46] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section*. Chichester, England: Ellis Horwood, 1989.
- [47] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*. USA: Springer, 2014.
- [48] M. Bicknell, “A primer on the pell sequence and related sequences”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 13, sayı 4, ss. 345–349, 1975.
- [49] H. S. Wilf, *Generating functionology 2nd edition*. San Diego, California, U.S.A.: Academic Press, 1994.
- [50] J. P. Morais, S. Georgiev, ve W. Spröbig, *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Sofia, Bulgaria: Springer, 2014.
- [51] R. L. Graham, D. E. Knuth, ve O. Patashnik, *Concrete Mathematics*. U.S.A.: Addison Wesley Publishing Co., 1998.
- [52] H. W. Gould, “Series transformations for findings recurrences for sequences”, *The Fibonacci Quarterly*, c. 28, sayı 2, ss. 166–171, 1990.
- [53] A. Özkoç Öztürk ve E. Gündüz, “Binomial transform for quadra fibona-pell sequence and quadra fibona-pell quaternion”, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, c. 5, sayı 4, ss. 145–155, 2022.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Eda GÜNDÜZ

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik Bölümü	Sakarya Üniversitesi	2019
Lise	Çocuk Gelişimi	Mevlana Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	2015

YAYINLAR

A. Özkoç Öztürk, E. Gündüz, “Binomial Transform for Quadra Fibona-Pell Sequence and Quadra Fibona-Pell Quaternion,” *Universal Journal of Mathematics and Applications (UJMA)*, vol. 5, no. 4, pp. 145-155, 2022.