



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ARŞİMEDYEN KAPULALARI
KULLANILARAK YENİ İKİ DEĞİŞKENLİ
BİR İSTATİSTİKSEL DAĞILIMIN ELDE
EDİLMESİ

Rahime Nur ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

Mayıs-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞİMEDYEN KAPULALARI KULLANILARAK YENİ İKİ DEĞİŞKENLİ BİR İSTATİSTİKSEL DAĞILIMIN ELDE EDİLMESİ

Rahime Nur ŞAHİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Buğra SARAŞOĞLU

2023, 201 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Buğra SARAŞOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet PEKGÖR
Dr. Öğr. Üyesi Kadir KARAKAYA

Son yıllarda, kapulalar kullanılarak iki değişkenli yeni istatistiksel dağılımların elde edilmesi ile ilgili çalışmalar artmaktadır. 1959 yılında Abe Sklar tarafından tanıtılan kapulalar, tek boyutlu marjinaleri (0,1) aralığında düzgün dağılım olan çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır. Ayrıca, kapulalar, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını da ortaya koymaya olanak sağlayan fonksiyonlardır. Literatürde Arşimedyen, Fairlie-Gumbel-Morgenstern, Gauss gibi çeşitli kapula aileleri bulunmaktadır. Bu aileler kullanılarak güncel hayatta karşılaşılan çeşitli iki değişkenli veri setlerinin analizi için mevcut dağılımlardan daha esnek yeni istatistiksel dağılımlar elde edilebilir. Bu dağılımların bilinmeyen parametreleri için istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması gerçek verilerin modellenmesinde oldukça önemlidir.

Bu çalışmada, tez çalışması için ihtiyaç duyulan genel tanımlar verildikten sonra modifiyeli unit üstel dağılım adında yeni dağılım tanıtılmıştır. Dağılıma ilişkin bazı dağılımsal özellikler; yaşam fonksiyonu, hazard fonksiyonu ve kuantil fonksiyonları elde edilmiştir. Parametre tahmini için en çok olabilirlik, bayes, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, Anderson-Darling ve Cramer-von Mises yöntemleri kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında parametre tahminlerinin yan ve hata kareler ortalaması hesaplanmıştır. Ayrıca gerçek veri uygulaması yapılarak yeni modifiyeli unit üstel dağılımının diğer dağılımlarla kıyaslanması yapılmıştır. Bu tez çalışmasının sonraki bölümlerinde Arşimedyen kapula üreticileri, fonksiyonları ve önerdiğimiz modifiyeli unit üstel dağılımı kullanarak iki değişkenli yeni dağılımlar üretilmiştir. Bu yeni dağılımlara ilişkin bazı dağılımsal özellikler; kapalı formda yaşam fonksiyonu, hazard fonksiyonu elde edilmiştir. Parametre tahmini için en çok olabilirlik ve bayes tahmin yöntemleri kullanılarak simülasyon çalışmasında parametre tahminlerinin yan ve hata kareler ortalaması hesaplanmıştır. Ayrıca yeni elde edilen iki değişkenli dağılımların gerçek verilere uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Arşimedyen Kapula, Bayes Tahmini, En Çok Olabilirlik Tahmini, İki Değişkenli Dağılım, Modifiyeli Unit Üstel Dağılım.

ABSTRACT

MS THESIS

OBTAINING A NEW BIVARIABLE STATISTICAL DISTRIBUTION USING ARCHIMEDIAN COPULAS

Rahime Nur ŞAHİN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY**

**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE /
IN DEPARTMENT OF STATISTICS**

Advisor: Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2023, 201 Pages

Jury

Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

Assist. Prof. Dr. Ahmet PEKGÖR

Assist. Prof. Dr. Kadir KARAKAYA

In recent years, studies on obtaining new bivariate statistical distributions using copulas have been increasing. Copulas introduced by Abe Sklar in 1959 are multivariate distribution functions whose one-dimensional marginal ranges are uniform distribution. In addition, copulas are functions that allow to reveal the dependency structure between variables. In the literature there are various families of copula such as Archimedean, Fairlie-Gumbel-Morgenstern, Gauss. By using these families, new statistical distributions that are more flexible than existing distributions can be obtained for the analysis of various bivariate data sets encountered in daily life. Making statistical conclusions for the unknown parameters of these distributions is very important in modeling real data.

In this study, after giving general definitions which are needed to for his thesis study, new unit distribution called, the modified unit exponential distribution, is introduced. Some distributional properties of this new distribution such as survival function, hazard function and quantile functions are obtained. Maximum likelihood, bayesian, least squares, weighted least squares, Anderson-Darling and Cramer-von Mises methods are used for parameter estimation. In the simulation study, the mean error squares of the parameter estimates are calculated. In addition, the new modified unit exponential distribution is compared with other distributions by applying real data. In the next sections, a new bivariate distributions is generated using Archimedean copula generators, their functions and the modified unit exponential distribution proposed. Some distributional properties of this new distributions such as survival function and hazard function are obtained. In the simulation study, the biases and the mean error squared of parameter estimations are calculated by using the maximum likelihood and bayesian estimation methods for parameter estimation. In addition, the new bivariate distributions obtained have been applied to the real data.

Keywords: Archimedean Copula, Bayes Estimation, Bivariate distribution, Maximum Likelihood Estimation, Modified Unit Exponential Distribution.

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın başından sonuna kadar sürekli yanımda olan hem ders aşamasında kazandırdığı bilgilerden hem de tez aşamasındaki desteklerinden, değerli görüşlerinden ve tezimin son haline gelmesindeki katkılarından dolayı danışman hocam sayın Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU'na, her zaman yanımda olan annem Betül ŞAFAK'a, kıymetli nişanlım Oğuzhan ALTUNTOP'a, sevgili dostum Şeyma ÖZÇELİK'e ve değerli abim Ömer Faruk ŞAHİN'e teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı 2021/1 kapsamında beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Rahime Nur Şahin
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
TABLO LİSTESİ	xii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvi
1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Bazı Sürekli Dağılımlar	5
2.1.1. Üstel Dağılım	5
2.1.2. Gamma Dağılımı.....	5
2.1.3. Weibull Dağılımı	6
2.1.4. Unit Weibull Dağılımı	6
2.1.5. Beta Dağılımı	6
2.1.6. Kumaraswamy Dağılımı	7
2.1.7. Topp Leone Dağılımı.....	7
2.1.8. Unit Lindley Dağılımı.....	7
2.2. Bazı Kesikli Dağılımlar	8
2.2.1. Logaritmik Dağılımı	8
2.2.2. Geometri Dağılımı	8
2.2.3. Sibuya Dağılımı	8
2.3. Hazard ve Yaşam Fonksiyonları.....	9
2.4. Olasılık Dağılımların Laplace Dönüşümü	10
2.5. Markov Zincirleri.....	10
2.6. Parametre Tahmini.....	12
2.6.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	12

2.6.2. Bayes Çıkarımı	14
2.6.2.1. Markov Zincirleri Monte Carlo Yaklaşımı	15
2.6.2.1.1. Gibbs Örneklemesi.....	16
2.6.2.1.2. Metropolis-Hastings Algoritması.....	17
2.6.3. En Küçük Kareler Yöntemi	18
2.6.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi	19
2.6.5. Anderson-Darling Yöntemi	19
2.6.6. Cramer-von Mises Yöntemi.....	19
2.7.7. Tahmin Edicilerde Aranılan Özellikler	20
2.7.7.1. Yan ve MSE	20
2.8. Uyum İyiği Kriterleri.....	21
3. KAPULALAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ.....	22
3.1 Sklar Teoremi	23
3.2. Kapula Oluşturma Metotları	27
3.2.1. Ters Dönüşüm Metodu	27
3.3. Bazı Uyumluluk Katsayıları	28
3.3.1. Uyum	28
3.3.1.1. Kendall'ın Tau Katsayısı	29
3.3.1.2. Spearman'ın Rho Katsayısı	30
3.4. Arşimedyen Kapula	30
3.4.1. Clayton Kapula	31
3.4.2. Gumbel Kapula	34
3.4.3. Frank Kapula.....	36
3.4.4. Ali-Mikhail Haq Kapula	40
3.4.5. Joe Kapula.....	43
3.5. Kapulalar İçin Uyum İyiği Testi.....	46
3.5.1. Ampirik Kapula ve Bootstrap	46
3.5.1.1. Ampirik Kapula Süreçlerine Dayalı Bazı Testler	47
3.5.1.2. Rosenblatt'ın Dönüşümü	47
3.5.1.3. Parametrik Bootstrap	48

4. MODİFİYELİ UNIT ÜSTEL DAĞILIMI	50
4.1. Kuantil ve Moment	53
4.1.1. Kuantil	53
4.1.2. Momentler.....	54
4.2. Parametre Tahmini.....	55
4.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini	55
4.2.2. Bayes Tahmini	56
4.2.3. En Küçük Kareler Yöntemi	56
4.2.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler	57
4.2.5. Anderson-Darling Yöntemi	58
4.2.6. Cramer-von Mises Yöntemi.....	59
4.3. Simülasyon Çalışması.....	59
4.4. Gerçek Veri Uygulaması	66
4.4.1. Birinci Gerçek Veri.....	66
4.4.2. İkinci Gerçek Veri	72
4.4.3. Üçüncü Gerçek Veri	78
5. ARŞİMEDYEN KAPULALARI KULLANILARAK YENİ İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ.....	85
5.1. İki Değişkenli Clayton Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı	86
5.1.1. Parametre Tahmini.....	90
5.1.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	91
5.1.1.2. Bayes Tahmini	94
5.1.2. Simülasyon Çalışması.....	95
5.2. İki Değişkenli Gumbel Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı	107
5.2.1. Parametre Tahmini.....	111
5.2.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmini	112
5.2.1.2. Bayes Tahmini	116
5.2.2. Simülasyon Çalışması.....	117
5.3. İki Değişkenli Frank Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı	128
5.3.1. Parametre Tahmini.....	132
5.3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmini	132
5.3.1.2. Bayes Tahmini	137

5.3.2. Simülasyon Çalışması.....	138
5.4. İki Değişkenli Ali-Mikhail Haq Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı	148
5.4.1. Parametre Tahmini.....	152
5.4.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	152
5.4.1.2. Bayes Tahmini	155
5.4.2. Simülasyon Çalışması.....	156
5.5. İki Değişkenli Joe Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı	166
5.5.1. Parametre Tahmini.....	170
5.5.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	170
5.5.1.2. Bayes Tahmini	175
5.5.2. Simülasyon Çalışması.....	176
5.6. Gerçek Veri Uygulaması	186
5.6.1. Birinci Gerçek Veri.....	186
5.6.2. İkinci Gerçek Veri Seti	190
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	194
6.1 Sonuçlar	194
6.2 Öneriler	195
KAYNAKLAR	196
ÖZGEÇMİŞ	201

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$F(.)$	: Dağılım fonksiyonu
$f(.)$	: Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu
$h(.)$	: Hazard (tehlike) fonksiyonu
$S(.)$	: Yaşam fonksiyonu
$L(\theta ..)$	: Olabilirlik fonksiyonu
$\ell(\theta ..)$	: log-olabilirlik fonksiyonu
$\pi(\theta)$	: Önsel dağılım
$Q(.)$	: Teklif Fonksiyonu
$g(\theta ..)$	: Sonsal dağılım
$E(\theta ..)$	: Beklenen değer
$LS(\theta)$	: En küçük kareler ampirik dağılımı
$WLS(\theta)$	: Ağırlıklandırılmış en küçük kareler ampirik dağılımı
$AD(\theta)$	: Anderson-Darling ampirik dağılımı
$CVM(\theta)$	: Cramer-von Mises ampirik dağılımı
$C(u, v)$	: Kapula dağılım fonksiyonu
$c(u, v)$	: Kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\phi(.)$	: Arşimedyen Kapula üretic fonksiyonu
τ	: Kendall'ın Tau'su
ρ	: Sperman Rho'su

Kısaltmalar

DF	: Dağılım fonksiyonu
OYF	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
EÇO	: En çok olabilirlik
EKK	: En küçük kareler
AEKK	: Ağırlıklandırılmış en küçük kareler
AD	: Anderson-Darling
CVM	: Cramer-von Mises
MZMC	: Markov Zincirleri Monte Carlo
M-H	: Metropolis-Hastings
AIC	: Akaiki bilgi kriteri
BIC	: Bayesci bilgi kriteri
CAIC	: Düzeltilmiş Akaiki bilgi kriteri
HQIC	: Hannan-Quin bilgi kriteri
HKO	: Hata Kareler Ortalaması
MUÜ	: Modifiyeli Unit Üstel
AMH	: Ali-Mikhail Haq

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1. Farklı β ve α parametre değerleri için MUÜ dağılımının beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık kat sayısı	54
Tablo 4.2. Farklı β ve α parametre değerleri için MUÜ dağılımının ilk dört momenti	54
Tablo 4.3. ($\alpha=0.9, \beta=0.7$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	60
Tablo 4.4. ($\alpha=0.9, \beta=0.7$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	60
Tablo 4.5. ($\alpha=0.9, \beta=0.7$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	61
Tablo 4.6. ($\alpha=0.9, \beta=0.7$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	61
Tablo 4.7. ($\alpha=1.5, \beta=1$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	62
Tablo 4.8. ($\alpha=1.5, \beta=1$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	62
Tablo 4.9. ($\alpha=1.5, \beta=1$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	63
Tablo 4.10. ($\alpha=1.5, \beta=1$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	63
Tablo 4.11. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	64
Tablo 4.12. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri	64
Tablo 4.13. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	65
Tablo 4.14. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri	65
Tablo 4.15. Veri Seti 1	66
Tablo 4.16. Veri Seti 1 için parametre tahminleri	67

Tablo 4.17. Veri Seti 1 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	67
Tablo 4.18. Veri Seti 1 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	68
Tablo 4.19. Veri Seti 1 İçin Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri....	69
Tablo 4.20. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri.....	70
Tablo 4.21. AD ve CVM Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği Testleri	71
Tablo 4.22. Veri Seti 2.....	72
Tablo 4.23. Veri Seti 2 için parametre tahminleri	73
Tablo 4.24. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	73
Tablo 4.25. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	74
Tablo 4.26. Veri Seti 2 İçin Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri....	75
Tablo 4.27. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri.....	76
Tablo 4.28. AD ve CVM Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği Testleri	77
Tablo 4.29. Veri Seti 3.....	78
Tablo 4.30. Veri Seti 3 için parametre tahminleri	79
Tablo 4.31. Veri Seti 3 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	79
Tablo 4.32. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	80
Tablo 4.33. Veri Seti 3 İçin Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri....	81
Tablo 4.34. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri.....	82
Tablo 4.35. AD ve CVM Yöntemlerini Kullanılarak Uyum İyiliği Testleri	83
Tablo 5.1. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	95
Tablo 5.2. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	96
Tablo 5.3. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	99
Tablo 5.4. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	100
Tablo 5.5. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	102

Tablo 5.6. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	104
Tablo 5.7. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	118
Tablo 5.8. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	119
Tablo 5.9. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	121
Tablo 5.10. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	122
Tablo 5.11. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	124
Tablo 5.12. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	125
Tablo 5.13. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	138
Tablo 5.14. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	139
Tablo 5.15. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	141
Tablo 5.16. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	142
Tablo 5.17. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	144
Tablo 5.18. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	145
Tablo 5.19. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	156
Tablo 5.20. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	157
Tablo 5.21. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri	159

Tablo 5.22. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri.....	160
Tablo 5.23. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri.....	162
Tablo 5.24. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	163
Tablo 5.25. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri.....	176
Tablo 5.26. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	177
Tablo 5.27. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri.....	179
Tablo 5.28. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	180
Tablo 5.29. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri.....	182
Tablo 5.30. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri	183
Tablo 5.31. Veri Seti 1.....	186
Tablo 5.32. Veri Seti 1 için parametre tahminleri	186
Tablo 5.33. Veri Seti 1 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri.....	187
Tablo 5.34. Veri Seti 1 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	187
Tablo 5.35. Veri Seti 2.....	190
Tablo 5.36. Veri seti 2 için parametre tahminleri	190
Tablo 5.37. Veri seti 2 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri	191
Tablo 5.38. Veri Seti 2 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri.....	191

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1. Clayton kapulasının $\theta = 0.2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	32
Şekil 3.2. Clayton kapulasının $\theta = 1.2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	32
Şekil 3.3. Clayton kapulasının $\theta = 3$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	33
Şekil 3.4. Farklı θ parametre değerleri için Clayton kapulasının korelasyonu.....	33
Şekil 3.5. Gumbel kapulasının $\theta = 1.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	35
Şekil 3.6. Gumbel kapulasının $\theta = 3$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	35
Şekil 3.7. Gumbel kapulasının $\theta = 6$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	35
Şekil 3.8. Farklı θ parametre değerleri için Gumbel kapulasının korelasyonu	36
Şekil 3.9. Frank kapulasının $\theta = -2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	38
Şekil 3.10. Frank kapulasının $\theta = 2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	38
Şekil 3.11. Frank kapulasının $\theta = 8$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	39
Şekil 3.12. Farklı θ parametre değerleri için Frank kapulasının korelasyonu	39
Şekil 3.13. AMH kapulasının $\theta = -1$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	41
Şekil 3.14. AMH kapulasının $\theta = 0.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	41
Şekil 3.15. AMH kapulasının $\theta = 0.9$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	41
Şekil 3.16. Farklı θ parametre değerleri için AMH kapulasının korelasyonu	42
Şekil 3.17. Joe kapulasının $\theta = 1.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	44
Şekil 3.18. Joe kapulasının $\theta = 5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	44
Şekil 3.19. Joe kapulasının $\theta = 10$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu	45
Şekil 3.20. Farklı θ parametre değerleri için Joe kapulasının korelasyonu	45
Şekil 4.1. $\beta = 0.3$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si	50
Şekil 4.2. $\beta = 3$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si	51
Şekil 4.3. $\alpha = 0.3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si	51

Şekil 4.4. $\alpha = 3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si	51
Şekil 4.5. $\beta = 0.5$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu.	52
Şekil 4.6. $\beta = 5$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu...	52
Şekil 4.7. $\alpha = 3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu .	52
Şekil 4.8. $\alpha = 5$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu .	53
Şekil 4.9. $(\alpha = 0.9, \beta = 0.7)$ durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar	60
Şekil 4.10. $(\alpha = 0.9, \beta = 0.7)$ durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla parametresi için HKO'lar	61
Şekil 4.11. $(\alpha = 0.9, \beta = 0.7)$ durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi...	61
Şekil 4.12. $(\alpha = 0.9, \beta = 0.7)$ durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi...	62
Şekil 4.13. $(\alpha = 1.5, \beta = 1)$ durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar	62
Şekil 4.14. $(\alpha = 1.5, \beta = 1)$ durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla parametresi için HKO'lar	63
Şekil 4.15. $(\alpha = 1.5, \beta = 1)$ durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	63
Şekil 4.16. $(\alpha = 1.5, \beta = 1)$ durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	64
Şekil 4.17. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar.....	64
Şekil 4.18. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda α parametresi için HKO	65
Şekil 4.19. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	65
Şekil 4.20. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	66
Şekil 4.21. EÇO tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	68
Şekil 4.22. Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	69
Şekil 4.23. EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	70
Şekil 4.24. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	71
Şekil 4.25. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	72
Şekil 4.26. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	72
Şekil 4.27. EÇO tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	74

Şekil 4.28. Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	75
Şekil 4.29. EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	76
Şekil 4.30. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	77
Şekil 4.31. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	78
Şekil 4.32. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	78
Şekil 4.33. EÇÖ tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	80
Şekil 4.34. Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	81
Şekil 4.35. EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	82
Şekil 4.36. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	83
Şekil 4.37. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar.....	84
Şekil 4.38. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar	84
Şekil 5.1. $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının df'si.....	87
Şekil 5.2. $\beta_1 = 3.5$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Clayton-MUÜ dağılımının df'si ..	87
Şekil 5.3. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si.....	87
Şekil 5.4. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si	88
Şekil 5.5. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si.....	88
Şekil 5.6. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	89
Şekil 5.7. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Clayton-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	89
Şekil 5.8. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Clayton-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	90
Şekil 5.9. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	90
Şekil 5.10. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	95
Şekil 5.11. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	96
Şekil 5.12. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ Durumunda θ parametresi için yan	96

Şekil 5.13. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	97
Şekil 5.14. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	97
Şekil 5.15. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için HKO	97
Şekil 5.16. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	98
Şekil 5.17. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	98
Şekil 5.18. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	98
Şekil 5.19. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	98
Şekil 5.20. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	98
Şekil 5.21. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	99
Şekil 5.22. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	99
Şekil 5.23. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için yan	100
Şekil 5.24. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	100
Şekil 5.25. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	101
Şekil 5.26. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için HKO	101
Şekil 5.27. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	101
Şekil 5.28. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	101
Şekil 5.29. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	102

Şekil 5.30. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	102
Şekil 5.31. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	102
Şekil 5.32. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	103
Şekil 5.33. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	103
Şekil 5.34. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için yan ...	103
Şekil 5.35. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar.....	104
Şekil 5.36. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar.....	104
Şekil 5.37. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için HKO	105
Şekil 5.38. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	105
Şekil 5.39. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	105
Şekil 5.40. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	105
Şekil 5.41. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	106
Şekil 5.42. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	106
Şekil 5.43. $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının df'si.....	108
Şekil 5.44. $\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının df'si	108
Şekil 5.45. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının oyf'si.....	108
Şekil 5.46. $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının oyf'si	109
Şekil 5.47. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının oyf'si....	109

Şekil 5.48. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	110
Şekil 5.49. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 6, \alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	110
Şekil 5.50. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	111
Şekil 5.51. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	111
Şekil 5.52. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	118
Şekil 5.53. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	118
Şekil 5.54. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda θ parametresi için yan	119
Şekil 5.55. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	119
Şekil 5.56. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	119
Şekil 5.57. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO	120
Şekil 5.58. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	120
Şekil 5.59. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	120
Şekil 5.60. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	120
Şekil 5.61. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	120
Şekil 5.62. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	121
Şekil 5.63. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	121

Şekil 5.64. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	121
Şekil 5.65. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için yan.....	122
Şekil 5.66. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	122
Şekil 5.67. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	122
Şekil 5.68. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için HKO.....	123
Şekil 5.69. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	123
Şekil 5.70. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	123
Şekil 5.71. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	123
Şekil 5.72. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	123
Şekil 5.73. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	124
Şekil 5.74. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	124
Şekil 5.75. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	124
Şekil 5.76. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için yan.	125
Şekil 5.77. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	125
Şekil 5.78. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	125
Şekil 5.79. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için HKO	126
Şekil 5.80. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	126

Şekil 5.81. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	126
Şekil 5.82. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	126
Şekil 5.83. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	127
Şekil 5.84. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	127
Şekil 5.85. $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının df'si	128
Şekil 5.86. $\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Frank-MUÜ dağılımının df'si .	129
Şekil 5.87. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 7$ ve $\alpha_2 = 6$ iken Frank-MUÜ dağılımının oyf'si	129
Şekil 5.88. $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Frank MUÜ dağılımının oyf'si	129
Şekil 5.89. $\beta_1 = 6, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 8$ ve $\alpha_2 = 5$ iken Frank MUÜ dağılımının oyf'si.....	130
Şekil 5.90. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	131
Şekil 5.91. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 6, \alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 15$ iken Frank-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	131
Şekil 5.92. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Frank-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	131
Şekil 5.93. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	132
Şekil 5.94. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	138
Şekil 5.95. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	139
Şekil 5.96. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda θ parametresi için yan...	139
Şekil 5.97. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	139
Şekil 5.98. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	140
Şekil 5.99. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda θ parametresi için HKO	140

Şekil 5.100. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	140
Şekil 5.101. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	140
Şekil 5.102. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	141
Şekil 5.103. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	141
Şekil 5.104. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	141
Şekil 5.105. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	142
Şekil 5.106. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	142
Şekil 5.107. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için yan	142
Şekil 5.108. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	143
Şekil 5.109. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	143
Şekil 5.110. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için HKO	143
Şekil 5.111. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	143
Şekil 5.112. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	143
Şekil 5.113. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	144
Şekil 5.114. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	144
Şekil 5.115. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	144

Şekil 5.116. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	145
Şekil 5.117. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	145
Şekil 5.118. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için yan	145
Şekil 5.119. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	146
Şekil 5.120. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	146
Şekil 5.121. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için HKO	146
Şekil 5.122. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	146
Şekil 5.123. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	147
Şekil 5.124. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	147
Şekil 5.125. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	147
Şekil 5.126. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	147
Şekil 5.127. $\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının df'si	148
Şekil 5.128. $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının df'si	149
Şekil 5.129. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 9$ iken AMH-MUÜ dağılımının oyf'si	149
Şekil 5.130. $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının oyf'si	149
Şekil 5.131. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının oyf'si	150
Şekil 5.132. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	150
Şekil 5.133. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 6, \alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	151

Şekil 5.134. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken AMH-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	151
Şekil 5.135. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	151
Şekil 5.136. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	157
Şekil 5.137. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	157
Şekil 5.138. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için yan	157
Şekil 5.139. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	158
Şekil 5.140. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	158
Şekil 5.141. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO	158
Şekil 5.142. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	158
Şekil 5.143. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	159
Şekil 5.144. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	159
Şekil 5.145. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	159
Şekil 5.146. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	159
Şekil 5.147. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	160
Şekil 5.148. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	160
Şekil 5.149. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda θ parametresi için yan	160

Şekil 5.150. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	161
Şekil 5.151. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	161
Şekil 5.152. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) Durumunda θ parametresi için HKO	161
Şekil 5.153. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	161
Şekil 5.154. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	161
Şekil 5.155. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	162
Şekil 5.156. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	162
Şekil 5.157. ($\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	162
Şekil 5.158. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	163
Şekil 5.159. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	163
Şekil 5.160. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda θ parametresi için yan	163
Şekil 5.161. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	164
Şekil 5.162. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	164
Şekil 5.163. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda θ parametresi için HKO	164
Şekil 5.164. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	164
Şekil 5.165. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	165
Şekil 5.166. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	165

Şekil 5.167. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	165
Şekil 5.168. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	165
Şekil 5.169. $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının df'si	166
Şekil 5.170. $\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının df'si ...	167
Şekil 5.171. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Joe-MUÜ dağılımının oyf'si	167
Şekil 5.172. $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 2.5, \alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının oyf'si .	167
Şekil 5.173. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının oyf'si	168
Şekil 5.174. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	168
Şekil 5.175. $\beta_1 = 5, \beta_2 = 6, \alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu	169
Şekil 5.176. $\beta_1 = 8, \beta_2 = 7, \alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Joe-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	169
Şekil 5.177. $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1.5, \alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu	169
Şekil 5.178. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	176
Şekil 5.179. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	176
Şekil 5.180. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda θ parametresi için yan	177
Şekil 5.181. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	177
Şekil 5.182. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	177
Şekil 5.183. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda θ parametresi için HKO .	178
Şekil 5.184. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	178
Şekil 5.185. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	178

Şekil 5.186. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	178
Şekil 5.187. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	178
Şekil 5.188. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi.....	179
Şekil 5.189. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	179
Şekil 5.190. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	179
Şekil 5.191. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için yan	180
Şekil 5.192. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	180
Şekil 5.193. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	180
Şekil 5.194. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için HKO	181
Şekil 5.195. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	181
Şekil 5.196. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	181
Şekil 5.197. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	181
Şekil 5.198. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	181
Şekil 5.199. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	182
Şekil 5.200. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar	182
Şekil 5.201. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar	182

Şekil 5.202. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için yan	183
Şekil 5.203. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar	183
Şekil 5.204. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar	183
Şekil 5.205. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için HKO	184
Şekil 5.206. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	184
Şekil 5.207. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	184
Şekil 5.208. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	184
Şekil 5.209. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi	185
Şekil 5.210. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi	185
Şekil 5.211. Sırasıyla X ve Y ampirik dağılımları ve MUÜ df'si	188
Şekil 5.212. Veri 1 için Clayton-MUÜ dağılımının df'si	188
Şekil 5.213. Veri 1 için Gumbel-MUÜ dağılımının df'si	188
Şekil 5.214. Veri 1 için Frank-MUÜ dağılımının df'si	189
Şekil 5.215. Veri 1 için AMH-MUÜ dağılımının df'si	189
Şekil 5.216. Veri 1 için Joe-MUÜ dağılımının df'si	189
Şekil 5.217. Sırasıyla X ve Y ampirik dağılımları ve MUÜ df'si	192
Şekil 5.218. Veri 2 için Clayton-MUÜ dağılımının df'si	192
Şekil 5.219. Veri 2 için Gumbel-MUÜ dağılımının df'si	192
Şekil 5.220. Veri 2 için Frank-MUÜ dağılımının df'si	193
Şekil 5.221. Veri 2 için AMH-MUÜ dağılımının df'si	193
Şekil 5.222. Veri 2 için Joe-MUÜ dağılımının df'si	193

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Literatürde tek değişkenli ve çok değişkenli yeni dağılımların elde edilmesi ve özelliklerinin incelenmesi ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Mevcut çok değişkenli istatistiksel dağılımların marjinal dağılımları genelde aynı dağılımdır. Örneğin çok değişkenli normal dağılımın marjinal dağılımları tek değişkenli normal dağılımdır. Gerçek hayatta birbirlerini etkileyen rasgele değişkenlerin aynı dağılıma sahip olması mümkün olmayabilir. Bu tip nedenler ile yeni çok değişkenli dağılımlar elde etmek için literatürde kapula fonksiyonları kullanılmaya başlanmıştır. Sklar (1959) tarafından ortaya atılan Kapula terimi, “bağlantı, bağ” anlamına gelen Latince isimlerin bir araya gelmesinden oluşmuştur. Kapulalar, tek boyutlu marjinalleri (0,1) aralığında düzgün olan çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır. Ayrıca, kapulalar, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını da ortaya koymaya olanak sağlayan fonksiyonlardır. Yani kapulalar, çok değişkenli dağılımın bağımlılık yapısından marjinal dağılımları ayırmamızı sağlayan fonksiyonlardır (Nelsen, 2006). Literatürde Arşimedyen, Fairlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), Gauss gibi parametrik kapula aileleri yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Morgenstern (1956), Gumbel (1960) ve Farlie (1960) tarafından yazılan makalelerdeki modellerin birleştirilmesi ile elde edilen kapulalar FGM kapulalar ailesi olarak adlandırılmıştır (Lai ve ark., 2009). Amblard ve Girard (2002), genel bir üretici fonksiyon kullanarak Fairlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapulalarını genelleştirmişler ve bazı önemli özelliklerini incelemişlerdir. Fischer ve Klein (2007), bu genelleştirilmiş FGM kapulalar için belli tek değişkenli dağılımların olasılık yoğunluk-kuantil fonksiyonlarına dayalı yeni üreticiler sınıfı tanıtmışlar ve iki yeni kapulayı ifade eden iki yeni üretici fonksiyon önermişlerdir. Kapulalar, değişkenler arasında lineer veya lineer olmayan ilişkiyi ölçmek için kullanılabilirler (Nelsen, 2006). Genest ve MacKay (1986), iki değişken arasındaki ilişkiyi ölçmeye yarayan Kendall’ın uyum katsayısına geometrik bir yorum vermek için literatürde en yaygın kullanılan Arşimedyen kapulalarının nasıl kullanılabileceğini göstermişlerdir. Genest ve Rivest (1993) ise Arşimedyen kapulaları için Kendall’ın τ ’suna dayalı parametrik olmayan bir tahmin prosedürü önermişlerdir. Ali ve ark. (1978), Cook ve Johnson (1981), Frank (1979) ve Gumbel (1960), Arşimedyen kapulalarının genel üretici fonksiyonu yerine çeşitli fonksiyonlar kullanarak literatüre yeni tek parametrelili kapula ailelerini kazandırmışlardır. Nelsen (1997), Arşimedyen kapulalarının üretici fonksiyonu için yeni bir fonksiyon

kullanarak yeni iki parametrelili kapulalar ailesini tanıtımış ve özelliklerini incelemiştir. Hasan ve Najjari (2013), Arşimedyen kapulalar ailesinin üretici fonksiyonu olarak kosekant hiperbolik fonksiyonunu kullanarak bu kapulalar ailesinin yeni bir üreticisini tanımlamışlardır. Najjari (2018), Arşimedyen kapulalar ailesinin üretici fonksiyonu olarak kotanjant fonksiyonunu kullanarak yeni bir trigonometrik Arşimedyen kapulalar ailesini elde etmiştir. Alhadlaq ve Alzaid (2020), belli koşullar altında (0,1) aralığında tanımlı dağılım fonksiyonlarının ve olasılık çıkaran fonksiyonlarının Arşimedyen üreticileri olarak kullanılabileceğini gözlemişlerdir. İyi bilinen Arşimedyen kapulalarının çoğunun bu üreticiler aracılığı ile elde edilebileceğini göstermişlerdir. Susam (2020) ise, üretici fonksiyon olarak farklı bir kotanjant fonksiyonu kullanarak Arşimedyen kapulalarının yeni bir tipini elde etmiş ve kotanjant kapulasının bağımlılık parametresini tahmin etmek için sözde (pseudo) en çok olabilirlik yöntemini kullanmıştır. Ayrıca bu yeni kapulaya ilişkin gerçek veri analizi de yapmıştır. Çelebioğlu (2003), iki değişken arasındaki bağımlılık yapısını Arşimedyen kapulaları ile modellemek için gerçek veri uygulaması gerçekleştirmiştir. Arslan ve ark. (2012), iki boyutlu Arşimedyen kapulalarından Clayton, Gumbel ve Frank kapulalarına ilişkin Kendall'ın τ 'su aracılığıyla Ki-kare uyum iyiliği testinin döviz (dolar-euro) verilerine uygulanması sureti ile hangi kapulanın bu veriler için kullanılması gerektiğini tespit etmişlerdir. Karakas ve ark. (2017), Genest ve Rivest (1993) tarafından önerilen Kendall'ın τ 'suna dayalı parametrik olmayan tahmin prosedürünü kullanarak Arşimedyen kapulalar ailesinden olan Clayton, Gumbel, Frank, Ali Mikhail Haq ve Joe kapulalarının bağımlılık parametreleri gerçek veri kullanarak tahmin etmişlerdir. Karakaş (2018), Bitlis'in 2012-2017 yılları arasındaki günlük maksimum ve minimum sıcaklıkları arasındaki ilişkiyi açıklamak için Gumbel, Clayton, Frank, Joe ve Gauss kapula ailelerinin bağımlılık parametrelerini tahmin etmek için parametrik olmayan metot olan Kendall Tau ve Spearman Rho katsayılarını kullanmışlardır. Guloksuz ve Kumar (2019), yeni tek parametrelili iki değişkenli Arşimedyen kapulası tanımlamak için yeni bir üretici fonksiyon önermişlerdir. Ayrıca, Genest ve Rivest (1993) tarafından önerilen Kendall'ın τ 'suna dayalı parametrik olmayan tahmin prosedürünü kullanarak yeni bağımlılık parametresini tahmin etmişlerdir. Son olarak gerçek veri seti kullanarak yeni elde ettikleri kapulayı diğer kapulalar ile karşılaştırmışlardır. El-Sherpieny ve Almetwally (2019), Arşimedyen kapulalarından Clayton kapulasına dayalı iki değişkenli genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını tanıtır

bu dağılıma ilişkin güvenilirlik ve hazard fonksiyonlarını incelemişlerdir. Ayrıca bu dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik (MLE) metodunu kullanmışlardır. Tahmin edicilerin performansını değerlendirmek için monte carlo simülasyon çalışması yapmışlar ve bu dağılımı gerçek veri seti ile analiz etmişlerdir. Muhammed ve ark. (2021), Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), Ali-Mikhail-Haq (AMH), Plackett ve Clayton kapulalarına dayalı iki değişkenli ters Topp-Leone (BITL) dağılımlarını türetmişlerdir. Farklı kapulalara dayalı olarak elde edilen bu BITL dağılımlarının bilinmeyen parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik tahmin yöntemini kullanarak model parametreleri için asimptotik güven aralıklarını elde etmişlerdir. Bu modellerin performansına yönelik Monte Carlo simülasyon çalışması gerçekleştirmişlerdir.

Bu tez çalışmasında 3. Bölümde kapula ve özelliklerinden bahsedildikten sonra bir alt bölümde (0,1) aralığına sahip modifiyeli unit üstel Dağılımı önerilmiştir. (0,1) aralığına sahip sürekli birçok dağılım bulunmaktadır. Bunlar içerisinde en çok bilinmekte olan dağılımlardan bir tanesi beta dağılımıdır. Ancak beta dağılımının veri modellemede yetersiz kaldığı durumlar, ortaya (0,1) aralığında beta dağılımına alternatif olacak yeni dağılımlar çıkması ihtiyacını doğurmuştur. Bunlara Johnson SB dağılımı (Johnson, 1955), Topp-Leone dağılımı (Topp ve Leone, 1955) ve Kumaraswamy dağılımı (Kumaraswamy, 1980) örnek olarak verilebilir. Bahsettiğimiz bu dağılımlara ek olarak $(0, \infty)$ aralığında olan dağılımları, dönüşüm yöntemi ile (0,1) aralığına çevirerek üretilmiş olan yeni birim dağılımlar da önerilmiştir. Birim dağılımlara, birim-lojistik dağılımı (Tadikamalla ve Johnson, 1982), birim-gama dağılımı (Consul ve Jain, 1971), Birim-Weibull dağılımı (Mazucheli ve ark., 2018), birim-Lindley dağılımı (Mazucheli ve ark., 2019b) gibi bazı alternatif dağılımlar vardır.

Çalışmamızda üstel dağılıma $Y = (1 - \text{sech}(X))^{\frac{1}{\alpha}}$ dönüşümü uygulanarak yeni birim aralıkta modifiyeli unit üstel dağılım elde edilip, veri modelleme ve daha esnek dağılım elde etme amacıyla ekstra parametre ekleme ve dönüşüm sayesinde unit üstel dağılımının daha genel hali elde edilmiştir. Dağılım elde edilirken kullanılan $Y = (1 - \text{sech}(X))^{\frac{1}{\alpha}}$ dönüşümü, taranan ilgili literatürde ilk kez kullanılmıştır. Elde edilen modifiyeli unit üstel dağılımın bazı temel dağılımsal özellikleri incelenmiş, dağılıma ait parametre tahminleri için en çok olabilirlik, bayes, en küçük kareler,

ağırlıklandırılmış en küçük kareler, Anderson-Darling ve Cramer-von Mises yöntemleri kullanılmıştır. Tahmin edicilerin HKO ve yan kriterlerine göre performansları simülasyon yardımı ile kıyaslanmıştır. Ayrıca gerçek veri uygulaması yapılarak, elde edilen yeni modifiyeli unit üstel dağılımının diğer dağılımlarla kıyaslaması yapılmıştır.

Daha sonra 5. Bölümde literatürde mevcut olan Arşimedyen kapulalarına dayalı üretici fonksiyonları ve önerdiğimiz modifiyeli unit üstel Dağılımı kullanarak yeni iki değişkenli bir istatistiksel dağılımın elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu dağılımlara ilişkin bazı istatistiksel özelliklerin incelenmesi, elde edilecek dağılımların bilinmeyen parametreleri için en çok olasılık ve bayes tahmin edicilerinin elde edilmesi ve bu tahmin edicilerin performanslarını göstermek adına R yazılımı kullanılarak monte carlo ve markov zincirleri monte carlo simülasyon çalışmalarının yapılması ve bu yeni dağılımların gerçek hayatta kullanılabilirliğini gösterebilmek için gerçek veri uygulamaları yapılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız bazı sürekli ve kesikli dağılımlara ve temel kavramlara değinilmiştir.

2.1. Bazı Sürekli Dağılımlar

Bu başlıkta üstel, gamma, Weibull, unit Weibull, beta, Kumaraswamy, Topp Leone ve unit Lindley dağılımlarından bahsedilmiştir.

2.1.1. Üstel Dağılım

X , üstel dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x|\beta) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

ve

$$f(x|\beta) = \beta e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

Burada $\beta > 0$ dağılımın şekil parametresidir.

2.1.2. Gamma Dağılımı

X , gamma dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x|\beta, \alpha) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0.$$

Burada $\Gamma(\cdot)$ gamma fonksiyonu, $\beta > 0$ ve $\alpha > 0$ sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleridir.

2.1.3. Weibull Dağılımı

X , Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x | \beta, \alpha) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha), \quad x > 0$$

ve

$$f(x | \beta, \alpha) = \beta \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), \quad x > 0.$$

Burada $\beta > 0$ ve $\alpha > 0$ sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleridir.

2.1.4. Unit Weibull Dağılımı

X , unit Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x | \beta, \alpha) = \exp\left(-\beta(-\log(x))^\alpha\right)$$

ve

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{x} \beta \alpha (-\log(x))^{\alpha-1} \exp\left(-\beta(-\log(x))^\alpha\right).$$

Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleridir ve $x \in (0,1)$ tanım aralığındadır.

2.1.5. Beta Dağılımı

X , beta dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}.$$

Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ dağılımın şekil parametreleridir ve $x \in (0,1)$ tanım aralığındadır.

2.1.6. Kumaraswamy Dağılımı

X , Kumaraswamy dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x | \beta, \alpha) = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta$$

ve

$$f(x | \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}.$$

Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sırasıyla dağılımın parametreleridir ve $x \in (0,1)$ tanım aralığındadır.

2.1.7. Topp Leone Dağılımı

X , Topp Leone dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x | \beta) = x^\beta (2 - x)^\beta$$

ve

$$f(x | \beta) = 2\beta x^{\beta-1} (1 - x)(2 - x)^{\beta-1}.$$

Burada $\beta > 0$ dağılımın ölçek parametresidir ve $x \in (0,1)$ tanım aralığındadır.

2.1.8. Unit Lindley Dağılımı

X , unit Lindley dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x | \beta) = 1 - \left(1 - \frac{\beta x}{(1 + \beta)(x - 1)} \right) \exp \left(-\frac{\beta}{1 - x} \right)$$

ve

$$f(x | \beta) = \frac{\beta^2}{1 + \beta} (1 + x)^{-3} \exp \left(-\frac{\beta x}{1 - x} \right).$$

Burada $\beta > 0$ dağılımın ölçek parametresidir ve $x \in (0,1)$ tanım aralığındadır.

2.2. Bazı Kesikli Dağılımlar

Bu bölümde Logaritmik, Geometri ve Sibuya dağılımlarından bahsedilmiştir.

2.2.1. Logaritmik Dağılımı

X , logaritmik dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x|\beta) = \frac{-1}{\ln(1-\beta)} \frac{\beta^x}{x}, \quad x=1,2,\dots,n.$$

Burada $0 < \beta < 1$ dağılımın parametresidir.

2.2.2. Geometri Dağılımı

X , geometri dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu ve olasılık fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x|\beta) = 1 - (1-\beta)^x, \quad x=1,2,\dots,n$$

ve

$$f(x|\beta) = \beta(1-\beta)^{x-1}, \quad x=1,2,\dots,n.$$

Burada $0 < \beta < 1$ dağılımın parametresidir.

2.2.3. Sibuya Dağılımı

X , sibuya dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x|\beta) = \binom{\beta}{x} (-1)^{x+1}, \quad x=1,2,\dots,n.$$

Burada $0 < \beta < 1$ dağılımın parametresidir.

2.3. Hazard ve Yaşam Fonksiyonları

Yaşam analizi yöntemleri yaşam dağılımına bağlıdır ve onu belirlemenin yolu yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonudur. Hazard fonksiyonu, bir olayın belirli bir zaman aralığında gerçekleşme olasılığıdır, yaşam fonksiyonu ise bir olayın gerçekleşme olasılığının zamanla nasıl değiştiğini gösterir.

Yaşam fonksiyonu bir t noktasına kadar yaşam olasılığını tanımlar;

$$S(t) = p(T > t) = 1 - F(t), \quad t > 0$$

bu fonksiyon 0 anında 1 değerini alır, zamanla azalır (veya sabit kalır)

Yaşam fonksiyonu genellikle, başarısızlık oranı olan hazard fonksiyonu cinsinden tanımlanır. Bir deneğin t zamanına kadar hayatta kaldığı düşünülürse, bir sonraki küçük zaman aralığında başarısız olma olasılığının bu aralığın uzunluğuna bölümüdür. Hazard fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}, \quad t > 0$$

bu fonksiyon aynı zamanda ölüm oranı olarak da bilinir (Moore ve Moore, 2016).

İki değişkenli yaşam ve hazard fonksiyonları, iki değişkenin etkisini incelemede kullanılan bir kavramdır. İki değişkenli yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$S(t_1, t_2) = p(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = 1 - F(t_1) - F(t_2) + F(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

ve

$$h(t_1, t_2) = \frac{f(t_1, t_2)}{S(t_1, t_2)}, \quad t_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

Yaşam fonksiyonu, bir olayın gerçekleşme olasılığının zamanla nasıl değiştiğini gösteren bir kavramdır. İki değişkenli hazard fonksiyonu ise, belirli bir zaman aralığı için bir olayın gerçekleşme olasılığını iki değişkenin değerlerine göre gösterir.

2.4. Olasılık Dağılımların Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü, istatistik, mühendislik, fizik ve matematik çalışmalarında kullanıldığı gibi kapula fonksiyonlarında da kullanılmaktadır. Arşimedyen kapulalarının ters üreteç fonksiyonu, Laplace dönüşümü ile elde edilmiştir.

Fonksiyonlar sürekli ve kesikli olmak üzere iki farklı şekilde karşımıza çıkabilmektedir. Sürekli ve kesikli olan bir fonksiyonlarda Laplace dönüşümü kullanımına örnekler sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$f(x)$, $x \geq 0$ 'a tanımlanmış bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $f(x)$ 'in Laplace dönüşümü;

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-xt} dx = E(e^{-xt})$$

şeklinde yazılabilir. Kesikli durum için ise $f(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$ 'e tanımlanmış bir olasılık fonksiyonu olmak üzere $f(x)$ 'in Laplace dönüşümü;

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x)e^{-xt} = E(e^{-xt})$$

şeklinde tanımlanır (Spiegel, 1965).

2.5. Markov Zincirleri

Bir Markov zincirinin inşası, bir geçiş matrisi ve bir başlangıç dağılım olmak üzere iki temel bileşenden oluşmaktadır.

Tanım 2.1. Sonlu bir $S = \{1, 2, \dots, m\}$ durum kümesi olsun. $\forall (i, j) \in S^2$ çiftine aşağıdaki özellikleri sağlayan bir p_{ij} gerçel sayısı atanmış olduğunu varsayalım.

$$i. \quad p_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in S^2$$

$$ii. \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S$$

Bu durumda P geçiş matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, S 'deki değerlere sahip bir rasgele değişken dizisi olsun. Burada t , X_t durumunun meydana geldiği zamanı gösterilmiştir.

Tanım 2.2. Markov zincirleri kesikli zamanlı ve kesikli uzaylı $\{X_t : t=1,2,\dots\}$, $\forall t=1,2,\dots$ için

$$P\{X_{t+1}=j \mid X_0=i_0,\dots,X_t=i_t\}=P(X_{t+1}=j \mid X_t=i_t)=p_{i_t,j}$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\{X_t : t=1,2,\dots\}$ sürecine “Markov zinciri” denir ve bu özdeşlik, homojenlik koşulu olarak adlandırılır.

Bir Markov zincirinin inşasının tamamlanması için bir başlangıç dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. S üzerinde ayrık dağılımlar kümesi, π ,

$$\pi = \left\{ P = (P_i)_{i \in S} : P_i \geq 0, \sum_{j \in S} P_i = 1 \right\}$$

biçimde gösterilebilir. $i \in S$ durumları için $P_0 = (P_{0i})_{i \in S} \in \pi$ zinciri için başlangıç dağılım $P[X_0=i]=P_{0i}$ şeklindedir.

Tanım 2.3. $P = (P_1, \dots, P_m) \in \pi$ ve durum uzayı S , geçiş matrisi $P = (p_{ij})_{(i,j) \in S^2}$ ve keyfi başlangıç dağılım $P_0 \in \pi$ ile bir Markov zinciri tanımlanmış olsun. O zaman tüm $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$P[X_{t+1}=j \mid X_0=i_0,\dots,X_t=i_t]=P[X_{t+1}=j \mid X_t=i_t]=P_j$$

bu eşitliğe P ’ye göre “bağımsız zincir” denir.

Tanım 2.4. Tüm $(i,j) \in S^2$ çiftleri için $p_{ij}^{(t)} > 0$ sağlayacak şekilde t tam sayısı varsa, bir Markov zinciri “indirgenemez” veya “ayrıştırılamaz” olarak adlandırılır.

Tanım 2.5. İndirgenemez bir zincir, p periyodu 1’e eşitse, tüm $(i,j) \in S^2$ çiftleri için, tüm $t > t_{ij}$ için olasılık $p_{ij}^{(t)} > 0$ olacak şekilde t_{ij} tam sayısı varsa, bir Markov zinciri “periyodik olmayan” olarak adlandırılır.

Tanım 2.6. Matris gösterimindeki tüm $j \in S$ veya $PP = P$ durumları için

$$\sum_{i \in S} P_i p_{ij} = P_j$$

denklemini karşılayan $P \in \pi$ dağılımına “Durağan Dağılım” denir.

Tanım 2.7. Tüm $(i,j) \in S^2$ çiftleri için S üzerinde bir olasılık dağılımı π varsa,

$$\sum_{i \in S} P_i p_{ij} = \sum_{j \in S} P_j p_{ji}$$

$P \in \pi$, bir Markov zincirinin “Tersinir” ve “Ayrıntılı Denge Denklemi” olarak adlandırılır (Norris, 1998).

2.6. Parametre Tahmini

İstatistiğin ana amaçlarından biri, üzerinde çalışılan kitle hakkında bilgi sahibi olmaktır. Yani, kitlenin bilinmeyenleri hakkında tahminlerde bulunmaktır. Kitlenin bilinmeyenlerine parametre adı verilir. Kitlenin birden fazla parametresi olabilir. Kitle özellikleri hakkında bilgi sahibi olunabilmesi için bu parametrelerin tahmin edilmesi gerekir. Bu parametrelerin tahmin edilmesi için olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x|\theta)$ olan ve dağılım fonksiyonu $F(x|\theta)$ olan bir kitleden çekilen rasgele örneklem kullanılır (Akdi, 2005). Parametre tahmini probleminde kullanılan kavramlar ve tanımlar aşağıda verilmiştir

2.6.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

En çok olabilirlik tahmin yöntemi, rasgele bir örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna uygun bilinmeyen parametreleri veya bu parametrelerin bir fonksiyonunu tahmin etmek için kullanılan bir yöntemdir.

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim f(\mathbf{x}|\theta = \theta_1, \dots, \theta_n), \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip bir rasgele vektör olmak üzere θ 'nın bir fonksiyonu olarak düşünülen ve $L(\theta|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta)$ biçiminde tanımlanan $L(\theta|\mathbf{x})$ fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu denir. Burada Θ parametre uzayını göstermektedir. Eğer, $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı dağılımdan gelen ve bağımsız olan rasgele değişkenler ise olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1|\theta) \dots f(x_n|\theta) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir (Rohatgi ve Saleh, 2001). Görüldüğü gibi olabilirlik fonksiyonu rasgele örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ile aynı fonksiyonel formdadır. Ancak iki fonksiyon arasında yorumlamada önemli bir fark vardır. Ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu, $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ parametrelerinin değerleri verildiğinde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gözlenen değerlerin bir fonksiyonu olarak yorumlanırken, olabilirlik fonksiyonu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gözlenen değerleri verildiğinde $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ parametre değerlerinin bir fonksiyonu olarak yorumlanır. Olabilirlik fonksiyonunu en büyük

yaparak elde edilen ve $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ ile gösterilen θ 'nın en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicisi;

$$\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \mathbf{x})$$

şeklinde tanımlanır. En çok olabilirlik tahmin edicisi (EÇO), bir rasgele değişken veya rasgele vektördür. En çok olabilirlik tahmin edicisinin aldığı değere de bilinmeyen parametrenin en çok olabilirlik tahmini adı verilir. En çok olabilirlik prosedürü, gözlenen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değerleri için, rasgele değişkenlerin kesikli olması durumunda ortak olasılık fonksiyonunun en yüksek olmasını sağlayan ve rasgele değişkenlerin sürekli olması durumunda ise ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun en yüksek ağırlıklı yoğunluğa sahip olmasını sağlayan $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ parametre vektörünün değerlerinin seçimi olarak yorumlanır. Yani θ 'nın en çok olabilirlik tahmini;

$$\left[\frac{\partial L(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right]_{k \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}_{k \times 1} = [\mathbf{0}]_{k \times 1}$$

denkleminin çözümü ile elde edilir. $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \arg_{\theta \in \Theta} \left(\frac{\partial L(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} = 0 \right)$ çözümü,

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gözlem değerlerinin bir fonksiyonu olacaktır. Olabilirlik fonksiyonun ikinci türevindeki θ yerine bu çözüm $(\hat{\theta}(\mathbf{x}))$ yazıldığında sonuç negatif çıkıyor ise olabilirlik fonksiyonu bu çözüm ile maksimize edilmiş demektir. Sonuç olarak ilk türevin sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen çözüm, ikinci türevin sıfırdan küçük olması koşulu altında θ 'nın en çok olabilirlik tahmini verir. e tabanlı logaritmik bir fonksiyon (log) ciddi monoton artan olduğundan olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\hat{\theta}$ tahmini ile olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını (log) maksimum yapan $\hat{\theta}$ tahmini aynıdır. Yani;

$$\ell(\theta | \mathbf{x}) = \hat{\theta}(\mathbf{X}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \mathbf{x}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log L(\theta | \mathbf{x})$$

şeklindedir (Mittelhammer ve Mittelhammer, 2013). Bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonunu veya logaritmasını maksimum yapan değer yani en çok olabilirlik tahmini her zaman türev kullanılarak bulunamayabilir. Bu durum, özellikle destek

kümesi parametreye bağlı olan veya parametreye göre türevlenemeyen dağılımlarda söz konusudur. Bu tür durumlarda gösterge fonksiyonu yardımıyla olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değeri yani parametrenin en çok olabilirlik tahmin edicisi tespit edilmeye çalışılır.

2.6.2. Bayes Çıkarımı

Teorem 2.1. (Bayes Teoremi) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ayrık olayların dizisi olsun. $P(A_n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ olduğunda, $\forall B \in U$, $P(B)$ için

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B | A_j)} \quad (2.2)$$

olarak verilir. Bayes teoreminin, toplamaların integrallerle değiştiği sürekli versiyonu da mevcuttur.

$\mathfrak{F} = \{f(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$ ailesi için θ bilinmeyen bir sabit olarak ele alınabileceği gibi bir olasılık dağılımına sahip rasgele değişken şeklinde de düşünülebilir. Bayes çıkarımında, bilinmeyen parametreler tahmin edilirken, bir modelin kendisi tarafından doğrudan belirtilmediği her parametre için önsel dağılım belirlenmesi gerekmektedir.

Bayes çıkarımında $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleme θ rasgele değişkenine koşullandırılmış dağılımdan alınmış gibi düşünülür. Bayes tahmin işlemi, önsel ve sonsal dağılım aracılığıyla gerçekleşir. Önsel dağılım, bir olayın gerçekleşme olasılığının, olayın gerçekleştiği bilgisi olmadan önceden belirlenmiş bir değerdir. Önsel dağılıma ait fonksiyon $\pi(\theta)$ olarak gösterilecektir.

Örneklemin değerleri verildiğinde (2.2)'de verilen Bayes teoremine göre θ 'nın koşullu dağılımı yani θ 'nın sonsal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$g(\theta | x) = \frac{f(x | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta} f(x | \theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (2.3)$$

Bayes tahmininde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için risk fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır. Bir risk fonksiyonunun seçimi, ele alınan

probleme bağlıdır fakat uygun bir risk fonksiyonunun nasıl seçileceğine dair belirli bir kural yoktur. Bilinmeyen parametre olan θ , $\hat{\theta}$ 'yı tahmin ettiğimizde ortaya çıkan bir kaybı temsil eder. Sonsal risk olarak bilinen beklenen kayıpla ölçülür, yani bu durumda θ 'nın Bayes tahmin edicisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$E(\theta | x) = \int_{\theta} \theta g(\theta | x) d\theta \quad (2.4)$$

Bayes tahmin edicisi, risk fonksiyonunu minimum yapan değerdir (Lehmann ve Casella, 2006)

2.6.2.1. Markov Zincirleri Monte Carlo Yaklaşımı

Bir rasgele süreci kullanarak çeşitli problemleri çözmeye yönelik matematiksel yaklaşımlara Monte Carlo algoritması ve simülasyon tekniğine ise Monte Carlo simülasyonu ve Markov zincirleri kullanılarak stokastik simülasyon yapma tekniğine ise Markov Zincirleri Monte Carlo (MZMC) simülasyonu denir.

Bayes çıkarımında denklem (2.3)'deki payda entegre olmayabilir. Bu durumda kabul-ret algoritması kullanılabilen ancak yüksek boyutlarda verimsiz kalmaktadır. Buna benzer durumlarda alternatif yaklaşım olarak Markov Zincirleri Monte Carlo yaklaşımının kullanılması önerilmektedir. MZMC yöntemi sonsal dağılımdan yeni bir örnekleme sürecini ifade eder. Bu simülasyonda iterasyon sürecinde sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonuna eşit olan durağan dağılım ve tersinir dağılıma sahip bir Markov zinciri oluşturarak dağılımdan kolaylıkla örneklem çekebilmemizi ve çekilen örneklemelerden dağılım hakkında istatistiksel çıkarım yapabilmemizi sağlar.

MZMC algoritmasındaki ana sorun, sonsal dağılıma yakınsasa bile, başlangıç değerleri sonuçları saptırabilmektedir. Başlangıç değerleri bilinmediği için başlangıç durumlarını yani örneklemedeki başlangıç değerlerini etkisini kaldırmak için bir yanma süresi vardır. Bir Markov zincirinde yeterli sayıda m (yanma süresi) adımı ve karşılık gelen X ile gösterilen Markov zinciri, sonsal dağılımın ortalaması aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\bar{X} = \frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n X_t$$

n , Markov zincirinde atılan adım sayısıdır. Benzer denklemler ile momentleri, varyansları vb. gibi sonsalın istatistiksel özelliklerini hesaplamak için kullanılabilir.

İlgilenilen sonsal dağılıma eşit durağan dağılımlara sahip Markov zincirleri oluşturmak için en popüler iki tane MZMC yöntemi vardır, bunlar Gibbs örnekleme ve Metropolis-Hastings algoritmasıdır (Martinez ve Martinez, 2002).

2.6.2.1.1. Gibbs Örnekleme

Gibbs örnekleme algoritması, Geman ve Geman (1984) tarafından tanıtılan bir MZMC örnekleycisidir. $\theta_i \in \Theta$ bileşenlerinin her birinin tam koşullu dağılımlarından örnekleme mümkün olduğu durumlarda θ_i parametrelerini tahmin etmek için kullanılır. Metropolis-Hastings algoritmasından farklı olarak kabul olasılığı 1'dir ve sonsal dağılımın analitik bir ifadenin yazılmasıyla doğrudan koşullu sonsal dağılımdan bir örneklemedir.

Gibbs Örnekleme Algoritması

- 1- Her θ_i parametrelerinin değerlerini, $\theta_i^0 = \{\theta_1^0, \dots, \theta_k^0\}$ olacak şekilde başlangıç değeri verilir.
- 2- 1'den N 'e k iterasyonu için
 - a- $\theta = \theta^{t-1}$
 - b- $\theta_t^k = \{p(\theta_1^k | \theta_{-1}^{k-1}), \dots, p(\theta_N^k | \theta_{-N}^{k-1})\}$ dağılımından θ_N^k güncellenir.
 - c- $\theta_t^k = \theta$ alınır.

Gibbs örnekleme algoritmasının her model için çalışmamasının iki nedeni vardır;

- 1- Model yeterince karmaşık olduğunda tahmin etmek istenen her parametrenin tam koşullu dağılımını türetmek mümkün olmayabilir.
- 2- Bazen Gibbs örnekleme oldukça yavaş yakınsama sağlar, yani ortaya çıkan Markov zinciri durağan dağılıma oldukça yavaş yakınsar.

Bu durumlarda Metropol-Hastings algoritması kullanılır. Bu algorithmada yalnızca sonsal dağılımı bilmemiz yeterlidir ve bu sayede algoritma çok genel bir hal alır. Çünkü Bayes teoremine göre, önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonu bilindiği sürece sonsal dağılımın orantılığı da bilinecektir (Martinez ve Martinez, 2002).

2.6.2.1.2. Metropolis-Hastings Algoritması

Metropolis ve ark. (1953) tarafından önerilen Metropolis algoritmasının orijinal makalesi; kimyasal makalelerin özelliklerin hesaplanmasıyla ilgiliydi fakat daha sonra yapılan çalışmalarda Bayes çıkarımında sonsal dağılımın entegre olmadığı durumlarda kullanılmaya başlanmıştır.

Metropolis algoritması, Markov zincirinde bir aday değeri oluşturmak için bir teklif fonksiyonunun tanımlanması gerekmektedir. Bu teklif fonksiyonu için en uygun seçim modele bağlıdır. Yaygın bir seçim, belirli bir ortalama ve varyansa sahip çok değişkenli normal dağılımdır. Teklif fonksiyonu $Q(\theta^* | \theta_t) = Q(|\theta_t - \theta^*|)$ özelliğine sahipse, algoritmaya rasgele yürüyüş Metropolü denir (Martinez ve Martinez, 2002). Metropolis algoritmasının arkasındaki önemli fikir, aday değer mevcut değerden daha iyi uyuyorsa, bu değer belirli bir olasılıkla kabul edilir, eğer edilmezse eski değerde kalınır ve algoritma devam eder. Metropolis algoritması aşağıdaki şekildedir.

Metropolis-Algoritması: Rasgele Yürüyüş Metropolü

1- Her θ_i parametrelerin değerlerini, $\theta^0 = \{\theta_1^0, \dots, \theta_k^0\}$ olacak şekilde başlangıç değeri verilir.

2- N iterasyonu için, Markov geçiş matrisi Q için $\theta^* \sim Q(\cdot | \theta_N)$, $Q(\theta_N | \theta^*) = Q(\theta^* | \theta_N)$ koşulunu sağlayan θ^* değer üretilir

3- Kabul olasılığı $p = \min \left\{ \frac{g(\theta^*)}{g(\theta_N)}, 1 \right\}$ hesaplanır.

4- Tekdüze dağılımdan $U \sim U(0,1)$ rasgele değişken üretilir.

5- $U \leq p$ ise;

$$\theta_{N+1} \rightarrow \theta^*$$

Aksi halde;

$$\theta_{N+1} \rightarrow \theta_N$$

6- $N = N + 1$

Adım 1’de parametrelerin başlangıç değerleri için En çok olabilirlik yöntemi veya diğer tahmin yöntemleri ile elde edilebilir. Orijinal Metropolis algoritmasının

bir dezavantajı, Q önerme fonksiyonunun simetrik olması yani $Q(\theta_N | \theta^*) = Q(\theta^* | \theta_N)$ olması gerektir. Hastings (1970), Metropolis algoritmasındaki 3. Adımındaki p değerini $p = \min \left\{ \frac{g(\theta_{N+1}^*)}{g(\theta_N)} \cdot \frac{Q(\theta_{N+1}^*, \theta_N)}{Q(\theta_N, \theta_{N+1}^*)}, 1 \right\}$ değerle değiştirerek algoritmayı genelleştirmeyi önerdi. Bu sürüm Metropolis-Hastings algoritması olarak adlandırılır. Metropolis-Hastings algoritması aşağıdaki şekildedir.

Metropolis-Hastings Algoritması

- 1- Her θ_i değişkeninin değerlerini, $\theta^0 = \{\theta_1^0, \dots, \theta_i^0\}$ olacak şekilde başlangıç değeri verilir.
- 2- N iterasyonu için, Markov geçiş matrisi Q için $\theta^* \sim Q(\cdot | \theta_N)$, θ_N bağlı olduğu durumlarda üretilir.
- 3- Kabul olasılığı $p = \min \left\{ \frac{g(\theta^*)}{g(\theta_N)} \cdot \frac{Q(\theta^*, \theta_N)}{Q(\theta_N, \theta^*)}, 1 \right\}$ hesaplanır.
- 4- Tekdüze dağılımdan $U \sim U(0,1)$ rasgele değişken üretilir.
- 5- $U \leq p$ ise;

$$\theta_{N+1} \rightarrow \theta^*$$

Aksi halde;

$$\theta_{N+1} \rightarrow \theta_N$$

- 6- $N = N + 1$

Teklif fonksiyonu Q , sonsal dağılıma çok benzer olduğunda algoritma en iyi şekilde çalışır (Martinez ve Martinez, 2002). Yöntemin başarısı kabul oranının çok düşük olmamasına bağlıdır.

2.6.3. En Küçük Kareler Yöntemi

$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$, $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ parametrelili aynı dağılıma sahip kitleden alınmış sıra istatistiklerinin gözlenen değeri olsun. $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ parametresi için en küçük kareler (EKK) yöntemi

$$LS(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left[F(x_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (2.5)$$

fonksiyonunu minimum yapan değer ya da değerlerdir. En küçük kareler yöntemi Swain ve ark. (1988) tarafından önerilmiştir (Taniş ve Karakaya, 2021).

2.6.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi

$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ parametrelili aynı dağılıma sahip kitleden alınmış sıra istatistiklerinin gözlenen değeri olsun. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ parametresi için ağırlıklandırılmış en küçük kareler (AEKK) yöntemi

$$WLS(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(x_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (2.6)$$

fonksiyonunu minimum yapan değer ya da değerlerdir. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi Swain ve ark. (1988) tarafından önerilmiştir (Taniş ve Karakaya, 2021).

2.6.5. Anderson-Darling Yöntemi

Bu tahmin edici, Anderson ve Darling (1952) tarafından tanıtılan Anderson-Darling (AD) uyum iyiliği istatistiklerine dayanmaktadır. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ için Anderson-Darling tahmini

$$AD(\boldsymbol{\theta}) = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \left[\log(F(x_{(i)})) + \log(S(x_{(i)})) \right] \quad (2.7)$$

fonksiyonunu minimum yapan değer ya da değerlerdir. Anderson-Darling yöntemi hakkında detaylı bilgi Chen ve Balakrishnan (1995) çalışmasında bulunmaktadır (Taniş ve Karakaya, 2021).

2.6.6. Cramer-von Mises Yöntemi

Bu tahmin edici, ismini Cramer (1928) ve Von Mises (1928) tarafından almış ve iki örneğe yapılan genelleme Anderson (1962) tarafından tanıtılmıştır, Cramer-

von Mises (CVM) uyum iyiliği testine dayanmaktadır. $\theta \in \Theta \subset \mathfrak{R}^k$ için Cramer-von Mises tahmini

$$CVM(\theta) = \frac{1}{12} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (2.8)$$

fonksiyonunu minimum yapan değer ya da değerlerdir. Cramer-von Mises yöntemi hakkında detaylı bilgi Chen ve Balakrishnan (1995) çalışmasında bulunmaktadır (Taniş ve Karakaya, 2021).

2.7.7. Tahmin Edicilerde Aranan Özellikler

Kitlenin bilinmeyen parametreleri için birçok tahmin edici bulunabilir. Bu tahmin edicilerden hangisinin en iyi tahmin edici olduğu önemli bir problemdir. Bütün tahmin edicilerin bulunduğu bir sınıf içerisinde en iyi tahmin ediciyi bulmak zordur. Bu sınıf $\mathfrak{I}$ ile gösterilirse bu sınıftaki tahmin edicilerden belli kriterlere sahip olanlardan başka bir sınıf ($\Upsilon \subset \mathfrak{I}$) oluşturulursa Υ sınıfı içerisinde en iyi tahmin ediciyi bulmak mümkündür. Bir tahmin edicinin performansını ölçmek için kullanılan kriterlerden en yaygını HKO (Hata Kareler Ortalaması) ve yan kriterleridir. Bir tahmin edici ile bilinmeyen parametre arasındaki ortalama karesel fark HKO ile, tahmin edicinin beklenen değeri ile bilinmeyen parametre arasındaki fark ise yan ile ölçülür (Casella ve Berger, 2021), (Öztürk, 2015). Bu kavramların tanımları aşağıda verilmiştir.

2.7.7.1. Yan ve HKO

$X_1, X_2, \dots, X_n$, $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip n -birimlik örneklem olmak üzere bu rasgele değişkenlere ilişkin beklenen değerler mevcut olsun. $\tau(\theta)$, θ 'nın gerçel değerli bir fonksiyon ve $T = T(X_1, \dots, X_n)$, $\tau(\theta)$ 'nın bir tahmin edicisi olsun. $\tau(\theta)$ için $T = T(X_1, \dots, X_n)$ tahmin edicisinin yanı;

$$Yan_{\tau(\theta)}(T) = E_{\theta}(T) - \tau(\theta)$$

biçiminde tanımlanır. $\tau(\theta)$ için $T = T(X_1, \dots, X_n)$ tahmin edicisinin HKO'su

$$\begin{aligned}
HKO_{\tau(\theta)}(T) &= E_{\theta}(T - \tau(\theta))^2 \\
&= Var_{\tau(\theta)}(T) + [Bias_{\tau(\theta)}(T)]^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Şayet, $\forall \theta \in \Theta$ için $E_{\theta}(T) = \tau(\theta)$ ise $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 'ye $\tau(\theta)$ 'nin yansız tahmin edicisi adı verilir. (2.9) eşitliği incelenirse yansız bir tahmin edicinin HKO'su bu tahmin edicinin varyansına eşittir (Olive, 2014). Tahmin probleminde, $\tau(\theta)$ için birçok tahmin edici olduğundan bu tahmin edicilerden HKO'su küçük olan tahmin edicinin seçilmesi tercih edilmelidir. Fakat Θ parametre uzayının bazı değerleri için bir tahmin edicinin HKO'su diğer tahmin edicinin HKO'sundan küçük olup Θ 'nın diğer değerleri için büyük çıkabilir. Bu durumda bir tahmin edicinin seçilmesi uygun değildir. Ancak, $\forall \theta \in \Theta$ için iki tahmin ediciden en küçük HKO'ya sahip tahmin edicinin seçilmesi önemlidir. Bu düşünce ile göreceli etkinlik (relative efficiency) kavramı tanımlanmıştır.

2.8. Uyum İyiliği Kriterleri

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x} = \theta_1, \dots, \theta_n), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \Re^k$ ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip n birimlik örneklem, $\ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ örnekleme ait log-olabilirlik fonksiyonu ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi olmak üzere, en uygun modelin belirlenebilmesi için, uyum iyiliği kriterleri sırasıyla Akaiki bilgi kriteri (AIC) Bayesci bilgi kriteri (BIC), düzeltilmiş Akaiki bilgi kriteri (CAIC), Hannan-Quinn bilgi kriteri (HQIC) aşağıdaki şekildedir.

$$AIC = -2\ell + 2k$$

$$BIC = -2\ell + k \log(n)$$

$$CAIC = -2\ell + \frac{2kn}{n-k-1}$$

$$HQIC = -2\ell + 2k \log(\log(n))$$

Belirli bir veri kümesi için ilgilenilen dağılımlar arasında en küçük AIC, BIC, CAIC ve HQIC değerlerine sahip olan dağılım en iyi model olarak düşünülür.

3. KAPULALAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

$C : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ biçiminde tanımlanan fonksiyonu için;
 $(u, v) \rightarrow C(u, v)$

- 1- $\forall u, v \in [0,1]$ için $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$
- 2- $\forall u, v \in [0,1]$ için $C(u, 1) = u$, $C(1, v) = v$
- 3- $\forall u, v \in [0,1]$ için $0 \leq C(u, v) \leq 1$
- 4- $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ ve $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ için

$$C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) \geq 0$$

özellikleri sağlanıyorsa C fonksiyonuna $[0,1] \times [0,1]$ 'de tanımlanan iki boyutlu bir kapula adı verilir. $C(u, v)$ 'ye ise C kapulası tarafından atanan kapula fonksiyon adı verilir. Burada $C(u, v)$, $[0,1]$ aralığındaki bir sayının $[0, u] \times [0, v]$ dikdörtgenine atanması olarak düşünülebilir. Yukarıdaki eşitlik ise $[0,1] \times [0,1]$ 'deki her bir $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ dikdörtgenine C tarafından atanan sayı için bir formül verir. Bu atanan sayı negatif olmamalıdır. Kapulaların önemli bir özelliği de azalmayan ve düzgün sürekli bir fonksiyon olmasıdır. Yani, bir C kapulası için yukarıdaki 4. özelliğin sağlanmasının yanı sıra; $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ olmak üzere $|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$ eşitsizliği de sağlanır (Nelsen, 2006).

Teorem 3.1. C bir kapula olmak üzere $\forall (u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

biçimindedir. Burada $\min(u, v)$ sayısına Frechet-Hoeffding üst sınırı ve $\max(u + v - 1, 0)$ sayısına ise Frechet-Hoeffding alt sınırı adı verilir. Bu alt sınır ve üst sınırlar da yukarıdaki özellikleri sağladığından birer kapula fonksiyonlardır. Ayrıca, $C(u, u)$ ile gösterilen fonksiyona köşegen kapula fonksiyonu, $\Pi(u, v) = uv$ biçiminde tanımlanan fonksiyona ise bağımsız kapula fonksiyonu denir (Nelsen, 2006).

Teorem 3.2. C bir kapula olmak üzere $\forall u, v \in [0,1]$ için $C(u, v)$ 'nin u ve v 'ye göre kısmi türevleri mevcut olup;

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq 1$$

biçimindedir. Ayrıca bu kısmi türevlerden oluşan fonksiyonlar da azalmayandır (Nelsen, 2006). Kapulaların dağılım fonksiyonları ile ilişkisi ise aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

Sürekli X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla $F(x_1) = P(X_1 \leq x_1)$, $G(x_2) = P(X_2 \leq x_2)$ ve (X_1, X_2) rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu $H(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ olmak üzere her bir (x_1, x_2) reel sayı çiftinin $[0,1]$ aralığında değer alan $F(x_1)$, $G(x_2)$ ve $H(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ sayıları ile ilişkilendirildiği düşünölsün. Diğer bir anlatımla, her bir (x_1, x_2) reel sayı çifti $[0,1] \times [0,1]$ birim karede tanımlı bir $(F(x_1), G(x_2))$ noktasına karşılık gelir ve bu her bir $(F(x_1), G(x_2))$ sıralı çifti $[0,1]$ aralığında tanımlı bir $H(x_1, x_2)$ noktasına karşılık getirilir. Bu düşünce ile ortak dağılım fonksiyonunun değerini marjinal dağılım fonksiyonlarının değerlerinden oluşan her bir sıralı çiftte atayan fonksiyonlar kapula olarak isimlendirilir.

Teorem 3.3. X_1 ve X_2 sırasıyla sürekli F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenler olmak üzere olasılık integral dönüşümü gereğince $U_1 = F(X_1)$ ve $U_2 = G(X_2)$ rasgele değişkenleri $U(0,1)$ düzgün dağılıma sahiptir (Nelsen, 2006).

3.1 Sklar Teoremi

Sklar Teoremi, kapulalar teorisinin merkezinde yer alan bir teoremdir. Sklar Teoremi, kapulaların çok değişkenli dağılım fonksiyonları ile tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkide oynadığı rolü açıklar (Nelsen, 2006).

Teorem 3.4. H , marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. O zaman, $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$ ile gösterilen genişletilmiş reel sayılar kümesindeki tüm x_1, x_2 sayıları için

$$H(x_1, x_2) = C(F(x_1), G(x_2)) \quad (3.1)$$

$$h(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)c(F(x_1), G(x_2)) \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir C kapulası vardır. F ve G sürekli ise o zaman C kapulası tektir. Şayet C bir kapula, F ve G dağılım fonksiyonu ise (3.1) eşitliğinde tanımlanan H fonksiyonu, F ve G marjinallerine sahip bir dağılım fonksiyonudur ve (3.2) eşitliğinde tanımlanan h fonksiyonu F ve G marjinallerine sahip bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Sklar, 1959).

Sonuç 3.4. C bir kapula, H , F ve G marjinallerine sahip ortak dağılım fonksiyonu olsun, F^{-1} ve G^{-1} sırasıyla F ve G 'nin tersleri olmak üzere C deki herhangi bir $(F(x_1), G(x_2)) = (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ için $C(u, v)$;

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

biçimindedir (Nelsen, 2006).

Örnek 3.1. (X_1, X_2) 'nin ortak dağılım fonksiyonu $H(x_1, x_2)$, $U_1 = F_1(X_1)$ ve

$U_2 = F_2(X_2)$ olmak üzere (U_1, U_2) rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

(X_1, X_2) 'nin C ile gösterilen kapulasıdır.

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)) \\ &= P(F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

(X_1, X_2) 'nin ortak yaşam fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \bar{H}(x_1, x_2) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + H(x, y) \\ &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x_1), 1 - \bar{F}_2(x_2)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilir. (X_1, X_2) 'nin $\hat{C}$ ile gösterilen yaşam kapulası ise

$$\hat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2)$$

biçiminde ifade edilir. Buna göre (3.4) eşitliği;

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$$

şeklinde elde edilir. (3.3) eşitliğine benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \bar{C}(u_1, u_2) &= \bar{H}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \bar{F}_2^{-1}(u_2)) \\ &= P(X_1 > \bar{F}_1^{-1}(u_1), X_2 > \bar{F}_2^{-1}(u_2)) \\ &= P(\bar{F}_1(X_1) > u_1, \bar{F}_2(X_2) > u_2) \\ &= P(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) = \hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir (Nelsen, 2006).

Örnek 3.2. (Bağımsız kapula, (Chang, 2019)). X_1 ve X_2 bağımsız rastgele değişkenler olsun. $U_1 = F_1(X_1)$ ile $U_2 = F_2(X_2)$ şeklinde tanımlanan rasgele değişkenler de bağımsızdır. (X_1, X_2) 'nin C ile gösterilen kapulası;

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq u_1) P(U_2 \leq u_2) \\ &= u_1 u_2. \end{aligned}$$

Örnek 3.3. (Komonotonik kapula). $X_2 = 2X_1$ olsun. $U_1 = F_1(X_1)$ ve $U_2 = F_2(X_2)$ olmak üzere X_1 'in dağılım fonksiyonu;

$$F_1(x) = P(X_1 \leq x) = P(2X_1 \leq 2x) = P(X_2 \leq 2x) = F_2(2x)$$

biçiminde elde edilir. U_1 ile U_2 arasında;

$$U_1 = F_1(X_1) = F_2(2X_1) = F_2(X_2) = U_2$$

şeklinde bir ilişki söz konusudur. O halde (X_1, X_2) 'nin C ile gösterilen kapulası;

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq \min\{u_1, u_2\}) \\ &= \min\{u_1, u_2\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Komonotonik kapulası güçlü bir pozitif bağımlılığa sahiptir. Bu örnekteki $X_2 = T(X_1)$ biçimindeki ciddi artan herhangi bir T dönüşümü için kapula her zaman (3.5) eşitliğindeki gibi olacaktır (Chang, 2019).

Örnek 3.4. (Karşı monotonluk kapula). $X_2 = -2X_1$ olsun, $U_1 = F_1(X_1)$ ve $U_2 = F_2(X_2)$ olmak üzere X_1 'in dağılım fonksiyonu;

$$F_1(x) = P(X_1 \leq x) = P(-2X_1 \geq -2x) = P(X_2 \geq -2x) = 1 - F_2(-2x)$$

biçiminde elde edilir. U_1 ile U_2 arasında;

$$U_1 = F_1(X_1) = 1 - F_2(-2X_1) = 1 - F_2(X_2) = 1 - U_2$$

şeklinde bir ilişki elde edilip (X_1, X_2) 'nin C ile gösterilen kapulası;

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) \\ &= P(1 - u_2 \leq U_1 \leq u_1) \\ &= \max\{u_1 - (1 - u_2), 0\} \\ &= \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Karşı monotonluk kapulası, güçlü bir negatif bağımlılığa sahiptir. Ciddi azalan $X_2 = T(X_1)$ biçimindeki herhangi bir T dönüşüm için bu kapula her zaman (3.6) eşitliğindeki gibi olacaktır (Chang, 2019).

Örnek 3.5. Her kapula C ve her $u, v \in [0, 1]^2$ için $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ ve $M(u, v) = \min(u, v)$ fonksiyonlarının birer kapula olduğu ve bu kapulaların sırasıyla Frechet-Hoeffding alt sınırı, Frechet-Hoeffding üst sınırı olduğu daha önce belirtilmişti. $\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm 2.5. C iki boyutlu bir kapula olmak üzere X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinalleri sırasıyla F ve G olmak üzere ortak dağılım fonksiyonu $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ olsun. Burada;

$$H(x, y) \leq P[X \leq x] \text{ ve } H(x, y) \leq P[Y \leq y] \tag{3.7}$$

biçiminde olup

$$H(x, y) \leq \min(P[X \leq x], P[Y \leq y]) \tag{3.8}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca $P[X > x, Y > y]$ biçiminde tanımlanan iki boyutlu yaşam fonksiyonu;1

$$P[X > x, Y > y] = 1 + H(x, y) - P[X \leq x] - P[Y \leq y] \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca;

$$P[X \leq x] + P[Y \leq y] - 1 \leq P[X \leq x] + P[Y \leq y] + P[X > x, Y > y] - 1 \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilen bir eşitsizliğin sağ tarafı (3.9) eşitliğinden $H(x, y)$ olduğu kolayca görülebilir. Yani (3.10) eşitsizliği

$$P[X \leq x] + P[Y \leq y] - 1 \leq H(x, y) \quad (3.11)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. $H(x, y) \geq 0$ olduğundan (3.8) ve (3.11) eşitsizliklerinden

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y))$$

biçiminde yazılır. $u = F(x)$ ve $v = G(y)$ kullanılarak (X, Y) 'nin C ile gösterilen kapulası için $\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$ eşitsizliği doğrudur (Kpanzou, 2007).

3.2. Kapula Oluşturma Metotları

Eğer bir kapula mevcut ise, o zaman Sklar teoreminin bir sonucu olarak, istenilen marjinal dağılımlar ile iki değişkenli veya çok değişkenli dağılımlar elde edilebilir. Kapula oluşturma metotları modelleme ve simülasyonda faydalı olabilir. Bu metotlardan ters dönüşüm metodu aşağıda verilmiştir.

3.2.1. Ters Dönüşüm Metodu

Tersine dönüşüm yönteminde, ortak dağılım fonksiyonlarından doğrudan kapula üretmek için Sklar teoreminden yararlanılır.

Sürekli ve marjinalleri F ve G olan bir iki değişkenli bir dağılım fonksiyonu H verildiğinde, bir kapula elde etmek için

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

metodu kullanılır. Bu kapula ile keyfi F' ve G' gibi marjinallere sahip yeni iki değişkenli dağılımlar Sklar'ın teoremi kullanılarak oluşturulabilir: bu durumda

(X, Y) rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu $H'(x, y) = C(F'(x), G'(y))$ olur. Bu durum yaşam fonksiyonları kullanılarak da benzer şekilde yapılabilir.

$$\hat{C}(u, v) = \bar{H}(\bar{F}^{-1}(u), \bar{G}^{-1}(v))$$

Burada $\bar{F}^{-1}(t) = F^{-1}(1-t)$ biçiminde gösterilir (Nelsen, 2006).

3.3. Bazı Uyumluluk Katsayıları

Bu bölümde rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık veya ilişki çalışmasında kapulaların nasıl kullanabileceğini araştırıyoruz. Rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkileri, olasılık ve istatistikte en çok çalışılan konulardan biridir. Bağımlılık hakkında özel varsayımlar yapılmadıkça anlamlı bir istatistiksel model tasarlanamaz. Korelasyon katsayıları, tek bir sayı kullanarak iki değişken arasındaki bağımlılık yapısını özetlemede yararlıdır. Pearson korelasyonu en yaygın kullanılanıdır. Ancak pearson korelasyon katsayısı yalnızca doğrusal korelasyonu ölçer ve artan dönüşümler altında değişmez değillerdir. Ancak, kapulaların artan veya azalan dönüşümler altında invaryantlık yani değişmezlik özelliği vardır. Parametrik olmayan istatistiklerde, Spearman'ın rho'su ve Kendall'ın tau'su gibi sıra korelasyonları, verilerin kendisinden ziyade sıraları tarafından tanımlanırlar. Sonuç olarak, artan dönüşüm altında değişmezlerdir. Kopulalar ayrıca marjinallerden bağımsız olduklarından, kopulalar ve sıra korelasyonları arasında doğal bir bağlantı vardır. Aslında hem Spearman'ın rho'su hem de Kendall'ın tau'su doğrudan bir kopulanın fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

3.3.1. Uyum

İki rastgele değişkenden birinin “büyük” değerleri diğerinin “büyük” değerleriyle ve birinin “küçük” değerleri diğerinin “küçük” değerleriyle ilişkili olma eğilimindeyse bu rasgele değişken çifti uyumludur. Daha açık olmak gerekirse, (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) sürekli rasgele değişkenlerden oluşan bir (X, Y) rasgele vektöründen iki gözlemi gösterebilir. $x_i < x_j$ ve $y_i < y_j$ veya $x_i > x_j$ ve $y_i > y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) 'nin uyumlu olduğu söylenir. Benzer şekilde, $x_i < x_j$ ve $y_i > y_j$ veya $x_i > x_j$ ve $y_i < y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumsuzdur denir. Bir başka

anlatımla, (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) , $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ ise uyumlu $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ ise uyumsuzdur denilebilir (Nelsen, 2006).

3.3.1.1. Kendall'ın Tau Katsayısı

H ortak dağılım fonksiyonuna sahip bir (X, Y) sürekli rasgele vektörüne ilişkin Kendall'ın Tau ölçütü, her biri H dağılım fonksiyonuna sahip (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) biçiminde gösterilen iki bağımsız rastgele vektöre ilişkin uyum ve uyumsuzluk olasılıkları arasındaki fark olarak tanımlanır ve

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

biçiminde formülize edilir. Bu ölçütün kapulalardaki karşılığı aşağıdaki teoremden verilen uyum fonksiyonudur.

Teorem 3.5. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) sırası ile H_1 ve H_2 ortak dağılım fonksiyonlarına sahip bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele vektörler olmak üzere X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları F ve Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları G olsun. C_1 ve C_2 sırası ile (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) rasgele vektörlerinin kapulalarını göstermek üzere bu kapulalara dayalı ortak dağılım fonksiyonları aşağıda tanımlanmıştır.

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$$

$$H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$$

(X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) rasgele vektörlerinin uyum ve uyumsuzluk olasılıkları arasındaki fark Q ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde formülize edilir (Nelsen, 2006).

$$\begin{aligned} Q &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \end{aligned}$$

Teorem 3.6. X ve Y sürekli rasgele değişkenler olmak üzere bu rasgele değişkenlerin kopulası C olsun. X ve Y için Kendall'ın τ ölçütü;

$$\tau_C = \tau_{X,Y} = Q(C, C) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E(C(U, V)) - 1$$

şeklindedir (Nelsen, 2006).

3.3.1.2. Spearman'ın Rho Katsayısı

(X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ve (X_3, Y_3) , (X, Y) 'den alınan bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele vektörler olmak üzere X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları F ve Y_1, Y_2, Y_3 rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları G olsun. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_3) rasgele vektörlerinden (X_1, Y_1) H dağılım fonksiyonuna sahip ve diğerinin bileşenleri ise bağımsız olsun. Yani, X_2 ile Y_3 bağımsız olsun. O halde (X_2, Y_3) 'ün ortak dağılım fonksiyonu $F(x)G(y)$ olur. Bu durumda, X ve Y 'nin Spearman 'ın Rho ölçütü, (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_3) rastgele vektörlerine ilişkin uyum ve uyumsuzluk olasılıkları arasındaki fark olarak tanımlanır ve

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$$

biçiminde formülize edilir (Nelsen, 2006).

Teorem 3.7. (Nelsen, 2006). X ve Y sürekli rasgele değişkenler olmak üzere bu rasgele değişkenlerin kopulası C olsun. X ve Y için Spearman 'ın Rho ölçütü;

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= \rho_C = 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3 \end{aligned}$$

3.4. Arşimedyen Kapula

En önemli kopula sınıflarından biri olan Arşimedyen kapulaları, kendilerini analiz etmeyi kolaylaştıran birtakım özelliklere sahip olduklarından dolayı ilgi çeken bir sınıftır. 2-boyutlu Arşimedyen kapulaları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (3.12)$$

Burada $\varphi(\cdot)$ fonksiyonuna, C kapulasının üretici denir ve $\varphi^{-1}(\cdot)$ üreteç fonksiyonun tersini gösterir. C 'nin tanım kümesi $(0,1]^2$ 'dir ve C , $(0,1)$ üzerinde kesinlikle süreklidir. $\varphi(\cdot)$ 'nin önemli bir alt sınıfı $t \in (0,1)$ için $\varphi'(t) < 0$ ve $\varphi''(t) > 0$ ile $(0,1)$

üzerinde iki türevi olan φ elemanlarından oluşur (Nelsen. 1997). φ 'nin bir kapula üretmesi için $\varphi(0) = \infty$ olması gerekmektedir aksi halde $\varphi(0)$ 'ın sonlu olduğu durumlarda, φ tarafından üretilen Arşimedyen kapulası aşağıdaki şekilde verilir.

$$\varphi^{(-1)} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \end{cases}$$

Burada $t \in [0, \varphi(0)]$ için $\varphi^{(-1)} = \varphi^{-1}$ ve $t \in [\varphi(0), \infty]$ için $\varphi^{(-1)} = 0$ 'dır. Bu durumda sadece ve ancak $\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} = 0$ ise C kesinlikle süreklidir; aksi halde $C, [0,1]^2$ 'deki

$\varphi(u) + \varphi(v) = 0$ eğrisi üzerinde yoğunlaşan tek bileşendir.

Bir Arşimedyen kapulasının üretici durumunda olan $\varphi, [0,1]$ üzerinde dışbükeydir ve kesin olarak azalan bir fonksiyondur. Dolayısıyla herhangi bir $t \in (0,1)$ için aşağıdaki özellikleri karşılar:

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(t) < 0, \quad \varphi''(t) > 0$$

Bu özellikler, herhangi bir iki değişkenli Arşimedyen kapulası üretici için yeterli koşullardır (Najjari, 2018).

Ek olarak $\varphi^{-1}(\cdot), f(0) = 0$ 'ı sağlayan $\mathfrak{R}^+$ üzerindeki laplace dönüşüm fonksiyonunun $f(\cdot)$ tersine eşittir. $f(\cdot)$ 'nin laplace dönüşümü $\varphi(\cdot)$ üreteç fonksiyonun tersi olur.

3.4.1. Clayton Kapula

Bu kapula ailesi Clayton (1978) tarafından ortaya konulmuş olan Arşimedyen kapula ailesidir.

Clayton kapulasının ters üreticisi Gamma dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun parametreleri $\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$ şeklinde alınarak laplace dönüşümünden oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(t) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1/\theta)} x^{\frac{1}{\theta}-1} e^{-x} e^{-tx} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\theta)} \Gamma(1/\theta) \frac{1}{(1+t)^{1/\theta}} \\ &= (1+t)^{-1/\theta} \end{aligned}$$

Şeklinde elde edilir ve $\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonun tersi alınarak Clayton kapulasının üreticini $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$ elde ederiz.

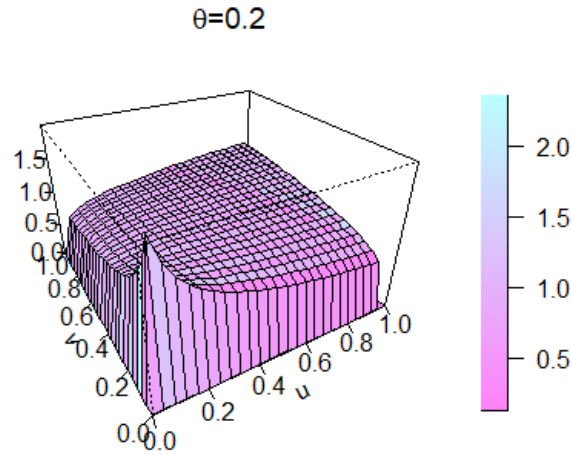
Bu durumda denklem (3.12) kullanılarak Clayton kapulasının dağılım fonksiyonu denklem (3.13)'teki gibidir:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0 \quad (3.13)$$

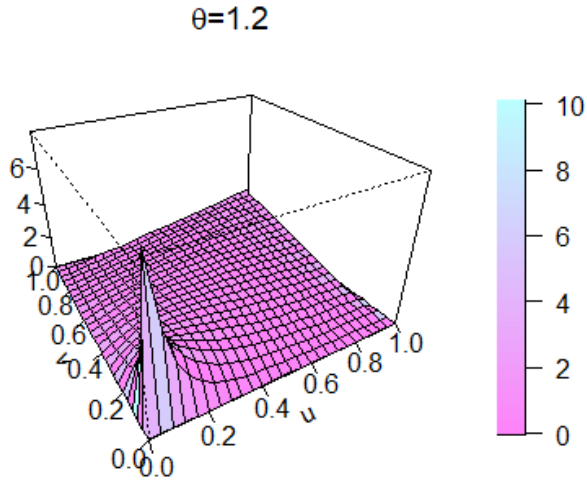
Burada $u, v \in [0, 1]$ 'dir. Clayton kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (3.14)'teki gibidir:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = (\theta + 1)(uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{2\theta+1}{\theta}} \quad (3.14)$$

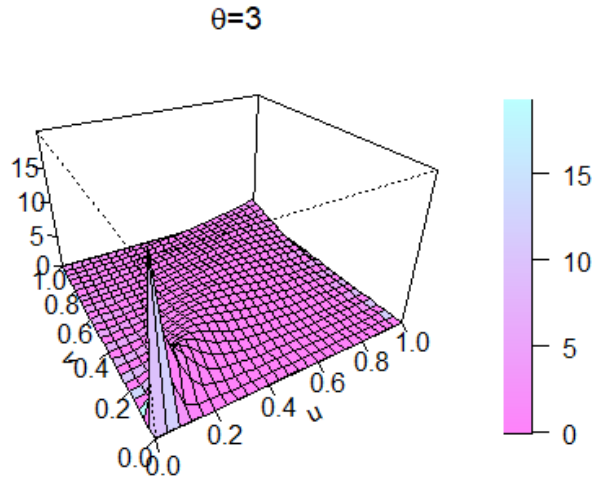
Clayton kapulasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı θ parametreleri için grafikleri aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.1. Clayton kapulasının $\theta = 0.2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.2. Clayton kapulasının $\theta = 1.2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

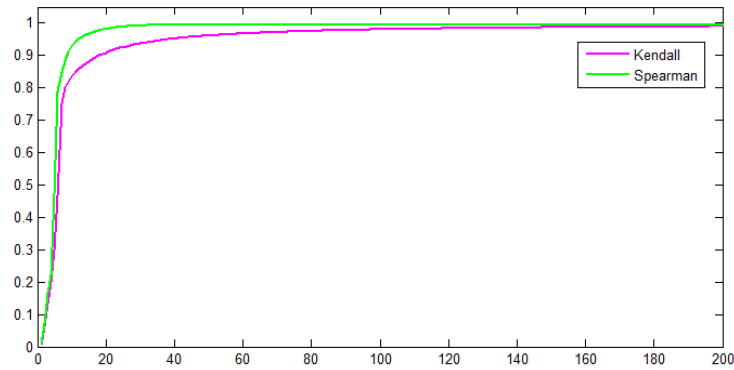


Şekil 3.3. Clayton kapulasının $\theta = 3$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

Clayton kapulası için Kendall τ korelasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

Clayton kapulasının, Kendall τ ve Spearman ρ Korelasyonları Şekil 3.4’de verilmiştir.



Şekil 3.4. Farklı θ parametre değerleri için Clayton kapulasının korelasyonu

Şekil 3.4’de görüldüğü gibi Clayton kapulasının korelasyonunda, θ parametresi sonsuza doğru gittiğinde bağımlılık maksimum olurken, θ parametresi sıfıra doğru gittiğinde ise (u, v) değişkenlerinin bağımsız hale geldiği gözlemlenmektedir.

3.4.2. Gumbel Kapula

Bu kapula ailesi Gumbel (1960) tarafından ortaya konulmuş olan Arşimedyen kapula ailesidir.

Gumbel kapulasının ters üreticisi Pozitif Stable dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\left(\frac{1}{\alpha}, 1, \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^\alpha, 0\right)$ parametreleri kullanılarak laplace dönüşümünden oluşturulmuştur.

$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\theta})$ şeklinde elde edilmiştir ve $\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonun tersi alınarak Gumbel kapulasının üreticini $\varphi(t) = (-\log(t))^\theta$ elde ederiz.

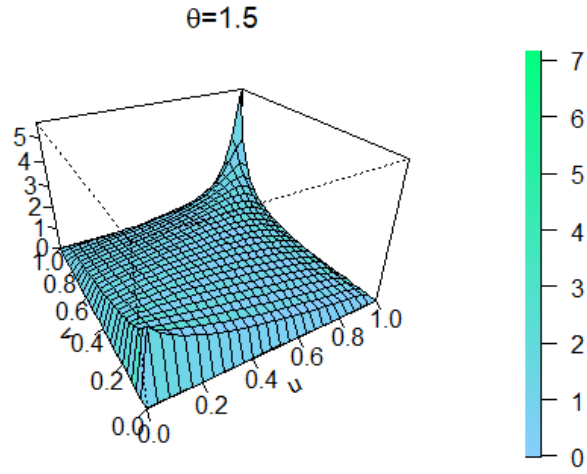
Bu durumda denklem (3.12) kullanılarak Gumbel kapulası:

$$C(u, v) = \exp\left[-\left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^{1/\theta}\right], \quad \theta > 1 \quad (3.15)$$

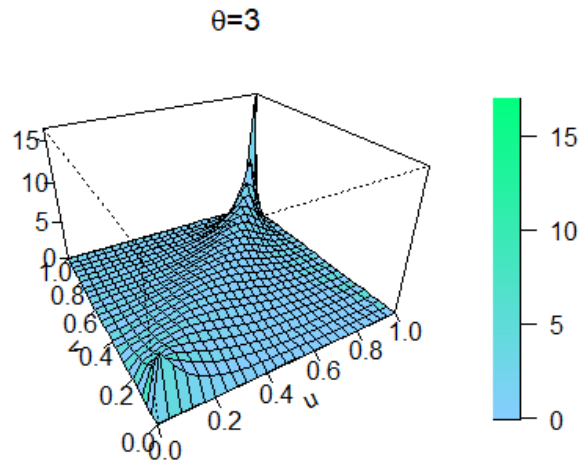
Burada $u, v \in [0, 1]$ 'dir. Gumbel kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (3.16)'deki gibidir:

$$\begin{aligned} c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = & \exp\left[-\left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^{1/\theta}\right] \times \\ & (-\log(u))^\theta (-\log(v))^\theta \left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^{1/\theta} \times \\ & \left\{-1 + \theta + \left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^{1/\theta}\right\} \times \\ & \left(1 / \left[uv \log(u) \log(v) \left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^2\right]\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

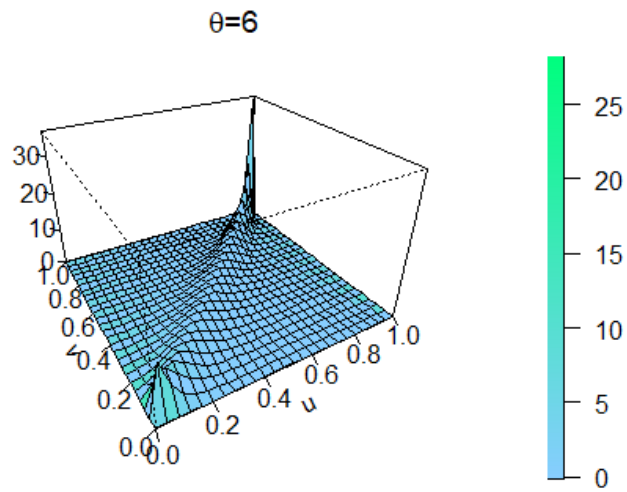
Gumbel kapulasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı θ parametreleri için grafikleri aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.5. Gumbel kapulasının $\theta = 1.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.6. Gumbel kapulasının $\theta = 3$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

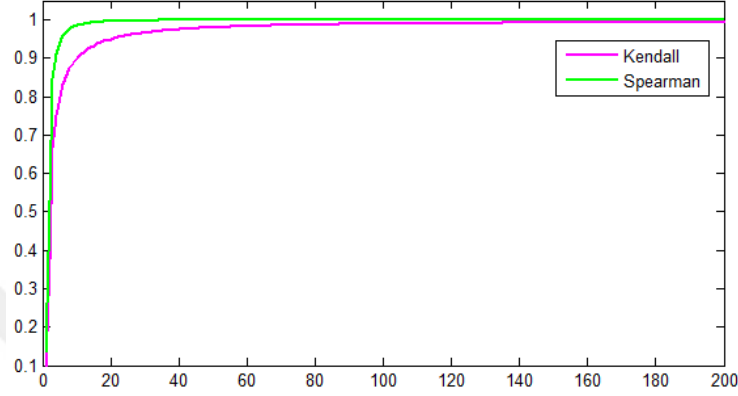


Şekil 3.7. Gumbel kapulasının $\theta = 6$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

Gumbel kapulası için Kendall τ korelasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta}$$

Gumbel kapulasının, Kendall τ ve Spearman ρ Korelasyonları Şekil 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3.8. Farklı θ parametre değerleri için Gumbel kapulasının korelasyonu

Şekil 3.8’de görüldüğü gibi Gumbel kapulasının korelasyonunda, θ parametresi sonsuza doğru gittiğinde bağımlılık maksimum olurken, θ parametresi 1’e doğru gittiğinde ise (u, v) değişkenlerinin bağımsız hale geldiği gözlemlenmektedir.

3.4.3. Frank Kapula

Bu kapula ailesi Frank (1979) tarafından ortaya konulmuş olan Arşimedyen kapula ailesidir.

Frank kapulasının ters üreticisi Logaritmik dağılımına ait olasılık fonksiyonunun $\beta = 1 - \exp(-\theta)$ parametresi kullanılarak laplace dönüşümünden oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\theta} \frac{(1 - e^{-\theta})^x}{x} e^{-tx} \\ &= \frac{1}{\theta} - \log(1 - \exp(-t + \theta)(\exp(-\theta) - 1)) \\ &= -\frac{1}{\theta} \log(1 + \exp(-t)(\exp(-\theta) - 1)) \end{aligned}$$

Şeklinde elde edilir ve $\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonun tersi alınarak Frank kapulasının üreticini

$$\varphi(t) = -\log\left(\frac{\exp(-t\theta)-1}{\exp(\theta)-1}\right) \text{ elde ederiz.}$$

Bu durumda denklem (3.12) kullanılarak Frank Kapulası

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u)-1)(\exp(-\theta v)-1)}{\exp(\theta)-1}\right), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.17)$$

şeklindedir. $\theta = 0$ durumu Frank kapulasında yerine konulduğu zaman kapula değerini $0/0$ verir. Bunun yerine $\lim_{\theta \rightarrow 0}$ olarak değerlendirilmelidir.

$x \rightarrow 0$ olarak $e^x - 1 \approx x$ ve $\log(1+x) \approx x$ yaklaşımlarını kullanarak, iki değişkenli bağımsız kapula olan $\theta \rightarrow 0$, $C(u, v) = uv$ olarak gösterilebilir. Bu nedenle $\theta = 0$ için Frank kapulasını bağımsızlık kapulası olarak tanımlayabiliriz.

$\theta \rightarrow 0$ olduğunda bağımsız kapula $C(u, v) = uv$

$$e^x - 1 \approx x, \log(1+x) \approx x \text{ ve } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C(u, v) = uv$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} C(u, v) &= -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{\frac{(1-\exp(\theta u))(1-\exp(\theta v))}{\exp(\theta u)\exp(\theta v)}}{\frac{1-\exp(\theta)}{\exp(\theta)}}\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \log\left(1 - \frac{(1-\exp(\theta u))(1-\exp(\theta v))}{\exp(\theta(u+v))} \frac{\exp(\theta)}{1-\exp(\theta)}\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \log\left(1 - \frac{\theta u \theta v}{(\theta(u+v-1)+1)\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{-uv\theta}{(\theta(u+v-1)+1)\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \left(\frac{-uv\theta}{\theta(u+v-1)+1}\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{uv}{\theta(u+v-1)+1}\right) = uv \end{aligned}$$

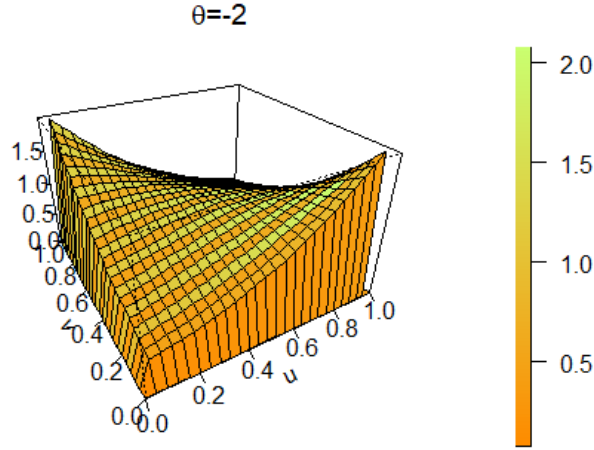
Şeklinde bağımsız Frank kapulası elde edilir.

$\theta \rightarrow \mp\infty$ olarak incelendiğinde iki değişkenli Frank kapulası monotonluk karşısı kapulaya yakınsar.

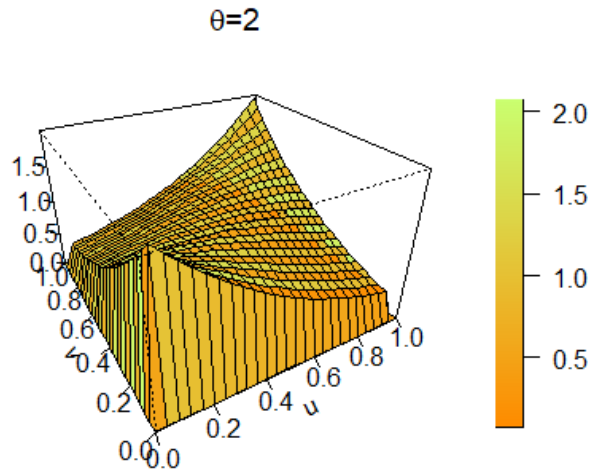
Frank kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{-\theta \exp(-\theta(u+v))(\exp(-\theta)-1)}{[(\exp(-\theta u)-1)(\exp(-\theta v)-1) + (\exp(-\theta)-1)]^2} \quad (3.18)$$

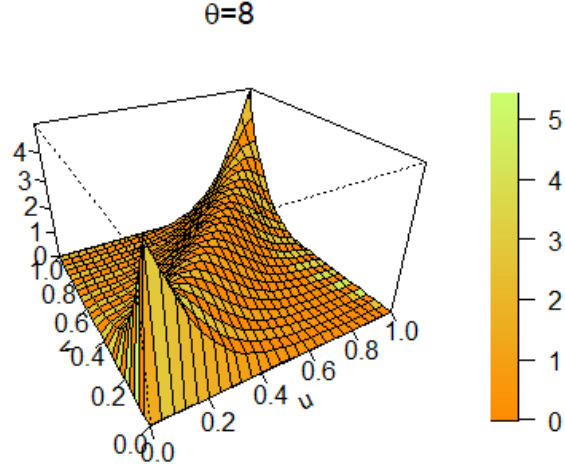
Frank kapulasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı θ parametreleri için grafikleri aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.9. Frank kapulasının $\theta = -2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.10. Frank kapulasının $\theta = 2$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.11. Frank kapulasının $\theta=8$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

Frank kapulası için Kendall τ ve Spearman ρ korelasyonları aşağıdaki gibidir.

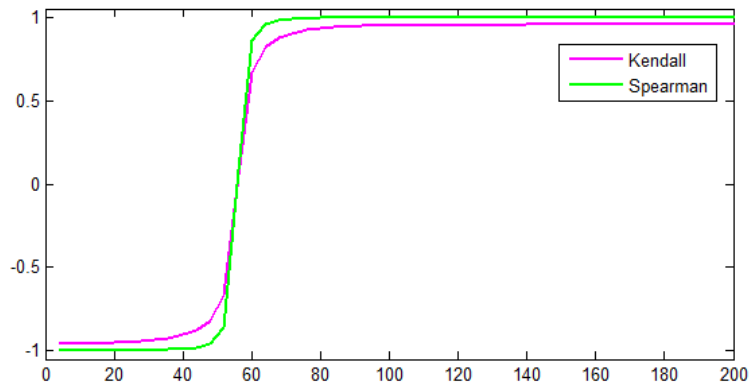
$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)]$$

$$\rho = 1 - \frac{12}{\theta} [D_1(\theta) - D_2(\theta)]$$

Burada $D_k(x)$, herhangi bir pozitif tam sayı için tanımlanan Debye fonksiyonudur, bu fonksiyon Denklem (3.19)'da verilmiştir (Genest 1987, Nelsen 1986).

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt \quad (3.19)$$

Frank kapulasının, Kendall τ ve Spearman ρ Korelasyonları Şekil 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.12. Farklı θ parametre değerleri için Frank kapulasının korelasyonu

Şekil 3.12’de görüldüğü gibi Frank kapulasının korelasyonunda, θ parametresi -sonsuz ve sonsuza doğru gittiğinde bağımlılık maksimum olurken, θ parametresi sıfıra doğru gittiğinde ise (u, v) değişkenlerinin bağımsız hale geldiği gözlemlenmektedir.

3.4.4. Ali-Mikhail Haq Kapula

Bu kapula ailesi Ali ve ark. (1978) tarafından ortaya konulmuş olan Arşimedyen kapula ailesidir.

Ali-Mikhail Haq kapulasının ters üreticisi Geometrik dağılımına ait olasılık fonksiyonunun $\beta = 1 - \theta$ parametresi kullanılarak laplace dönüşümünden oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} (1-\theta)\theta^{x-1} \exp(-tx) \\ &= \frac{1-\theta}{\exp(t)-\theta}\end{aligned}$$

Şeklinde elde edilir ve $\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonun tersi alınarak Ali-Mikhail Haq kapulasının üreticini $\varphi(t) = \log\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$ elde ederiz.

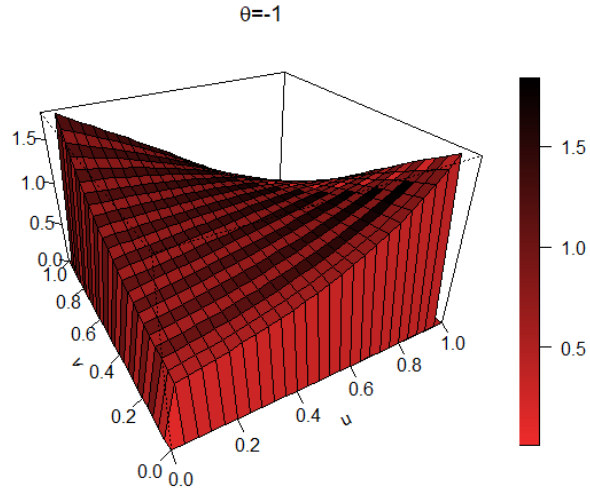
Bu durumda denklem (3.12) kullanılarak Ali-Mikhail Haq kapulası:

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \quad \theta \in [-1, 1] \quad (3.20)$$

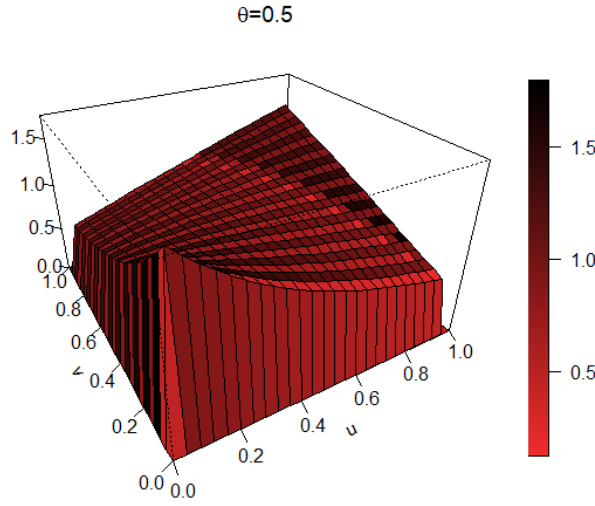
Şeklinde elde edilir. Ali-Mikhail Haq kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (3.21)’da ki gibidir

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\theta^2(u+v-uv-1) + \theta(2-u-v-uv)-1}{(\theta(1+uv-u-v)-1)^3} \quad (3.21)$$

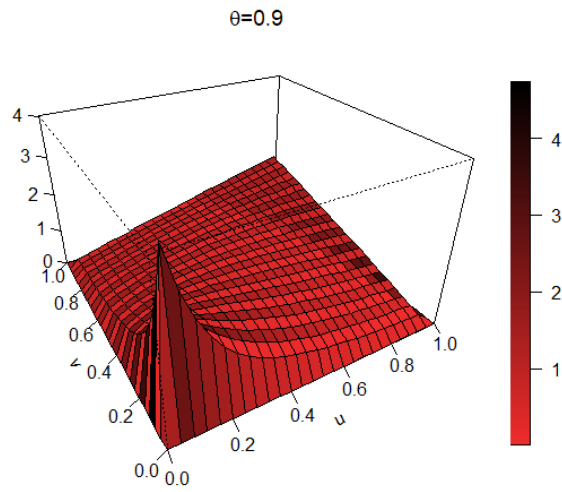
Ali-Mikhail Haq kapulasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı θ parametreleri için grafikleri aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.13. AMH kapulasının $\theta = -1$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.14. AMH kapulasının $\theta = 0.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.15. AMH kapulasının $\theta = 0.9$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

Ali-Mikhail Haq kapulası için Kendall τ ve Spearman ρ korelasyonları aşağıdaki gibidir.

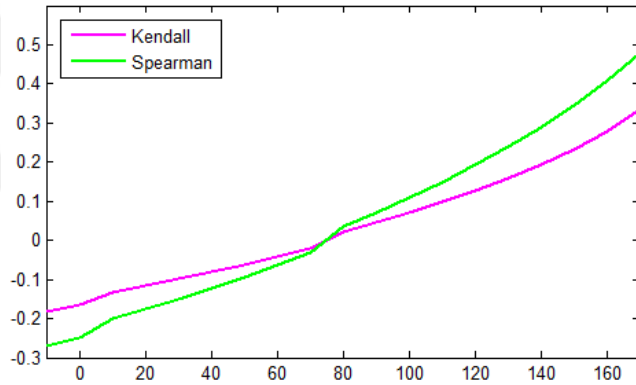
$$\tau = 1 - 4 \iint \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} dudv = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1-\theta)^2}{3\theta^2} \ln(1-\theta)$$

$$\rho = \frac{12(1+\theta)}{\theta^2} \operatorname{dilog}(1-\theta) - \frac{24(1-\theta)}{\theta^2} \ln(1-\theta) - \frac{3(\theta+12)}{\theta}$$

Burada $\operatorname{dilog}(x)$, digolaritma fonksiyonudur (Nelsen, 2006). Bu fonksiyon denklem (2.30)'da verilmiştir.

$$\operatorname{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt \quad (3.22)$$

Ali-Mikhail Haq kapulasının, Kendall τ ve Spearman ρ Korelasyonları Şekil 3.16'da verilmiştir.



Şekil 3.16. Farklı θ parametre değerleri için AMH kapulasının korelasyonu

Şekil 3.16'da görüldüğü gibi AMH kapulasının korelasyonunda, θ parametresi -1 ve 1'e doğru gittiğinde diğer Arşimedyen kapulalarına kıyasla bağımlılığın çok daha az arttığı gözlemlenmiştir. θ parametresi sıfıra doğru gittiğinde ise (u,v) değişkenleri bağımsız hale geldiği gözlemlenmektedir.

3.4.5. Joe Kapula

Bu kapula ailesi Joe (1997) tarafından ortaya konulmuş olan Arşimedyen kapula ailesidir.

Joe kapulasının ters üreticisi Sibuya dağılımına ait olasılık fonksiyonunun $\beta = \frac{1}{\theta}$ parametresi kullanılarak laplace dönüşümünden oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x=1}^{\infty} \binom{\beta}{x} (-1)^{x+1} \exp(-tx) \\
 &= - \frac{(1 - \exp(-t))^{\beta} \exp(-t) + (1 - \exp(-t))^{\beta}}{(1 - \exp(-t)) \exp(t)} \\
 &= \frac{(1 - \exp(-t))^{\beta} ((1 - \exp(-t)))}{(1 - \exp(-t))} + 1 \\
 &= 1 - (1 - \exp(-t))^{\beta} \\
 \beta = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \\
 & \varphi^{-1}(t) = 1 - (1 - \exp(-t))^{\frac{1}{\theta}}
 \end{aligned}$$

Şeklinde elde edilir ve $\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonun tersi alınarak Joe kapulasının üreticini

$\varphi(t) = -\log(1 - (1 - t)^{\theta})$ elde ederiz.

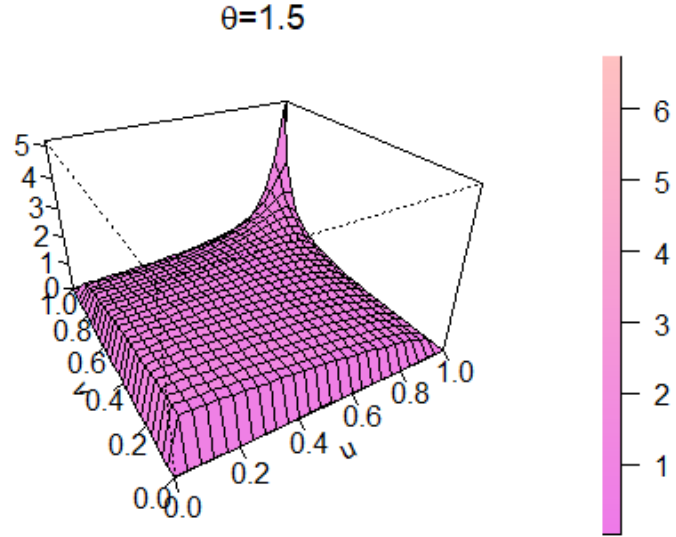
Bu durumda denklem (3.12) kullanılarak Joe kapulası:

$$C(u, v) = 1 - \left[(1 - u)^{\theta} + (1 - v)^{\theta} - (1 - u)^{\theta} (1 - v)^{\theta} \right]^{1/\theta}, \quad \theta \in [1, \infty) \quad (3.23)$$

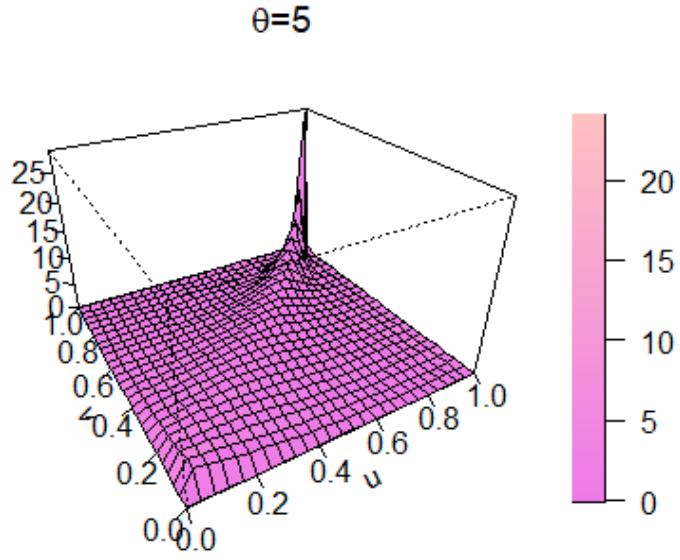
Şeklinde elde edilir. Joe kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (3.24)'deki gibidir.

$$\begin{aligned}
 c(u, v) &= \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = - \frac{\left\{ (1 - u)^{\theta} (1 - (1 - v)^{\theta}) + (1 - v)^{\theta} \right\}^{1/\theta} (1 - v)^{\theta} (1 - u)^{\theta} \\
 & \quad \times \left\{ 1 - (1 - v)^{\theta} - (1 - u)^{\theta} (1 - (1 - v)^{\theta}) - \theta \right\}}{(1 - u)(1 - v) \left\{ (1 - u)^{\theta} + (1 - v)^{\theta} - (1 - u)^{\theta} (1 - v)^{\theta} \right\}^2} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

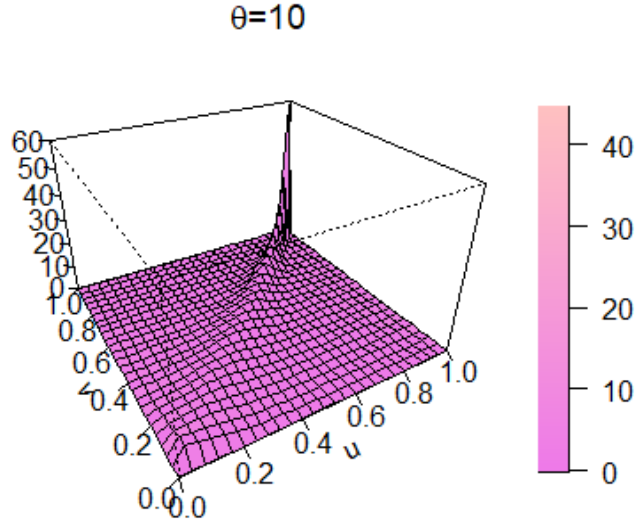
Joe kapulasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı θ parametreleri için grafikleri aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.17. Joe kapulasının $\theta = 1.5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.18. Joe kapulasının $\theta = 5$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu



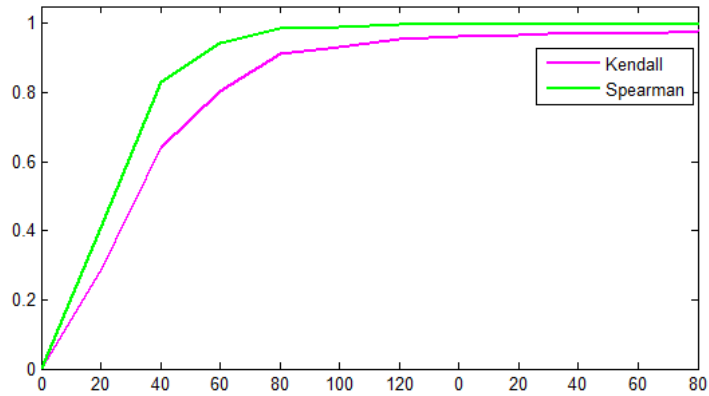
Şekil 3.19. Joe kapulasının $\theta = 10$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu

Joe kapulası için Kendall τ korelasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\tau = 1 + \frac{4}{\theta} D_j(\theta)$$

$D_k(x)$, denklem (3.19)'da verilmiştir.

Joe kapulasının, Kendall τ ve Spearman ρ Korelasyonları Şekil 3.20'da verilmiştir.



Şekil 3.20. Farklı θ parametre değerleri için Joe kapulasının korelasyonu

Şekil 3.20'de görüldüğü gibi Joe kapulasının korelasyonunda, θ parametresi sonsuza doğru gittiğinde bağımlılık maksimum olurken, θ parametresi sıfıra doğru gittiğinde ise (u, v) değişkenlerinin bağımsız hale geldiği gözlemlenmektedir.

3.5. Kapulalar İçin Uyum İyiliği Testi

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, $d \geq 2$ dağılım fonksiyonu H ve sürekli marjinalleri $F_1, \dots, F_d$ rasgele bir vektör olsun. $\mathbf{X}$ için bir kapula modelinde, C 'nin parametrik bir $C_0 = \{C(\cdot; \boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$, $p \in \mathbb{N}$ ailesi tarafından iyi temsil edilip edilmediğini bilmek isteriz bu sebepten ötürü uyum iyiliği testleri kullanırız. Uyum iyiliği testi için yokluk hipotezi aşağıdaki şekildedir

$$H_0 : C = C_0$$

H_0 'ı test etmek için, (genellikle bilinmeyen) marjinal dağılımlar rahatsız edici parametreler olarak ele alınır ve ampirik karşılıkları olan sözde (pseduo) gözlemler $U_i = (U_{i1}, \dots, U_{id})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ile değiştirilir.

$$U_{ij} = \frac{n}{n+1} \hat{F}_{nj}(X_{ij}), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, d\} \quad (3.25)$$

Burada $\hat{F}_{nj}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I\{X_{kj} \leq x\}$, X_{ij} , $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ girişlerinden oluşan veri matrisinin j 'inci veri sütununun ampirik dağılım fonksiyonunu gösterir (Genest C. ve ark, 2006). Bu yaklaşımının ardından C 'nin gözlemleri olarak yorumlanan dolayısıyla $\boldsymbol{\theta}$ 'yı tahmin etmek ve H_0 'ı test etmek için kullanılan sıra tabanlı sözde gözlemler elde edilir.

Uyum iyiliği testi yapmak için, sözde gözlemler U_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, genellikle önce U'_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ değişkenlerine Rosenblatt dönüşümü ile dönüştürülür, bu yöntem yokluk hipotezi altında test etmek için yeterince basit olabilir (Hering ve Hofert, 2015).

3.5.1. Ampirik Kapula ve Bootstrap

Bu bölümde Ampirik kapula süreçlerine dayalı bazı testleri ve Bootstrap testinden bahsedilmiştir.

3.5.1.1. Ampirik Kapula Süreçlerine Dayalı Bazı Testler

Bu tür kapula uyum iyiliği testler, kapula parametresi θ 'nın bazı yakınsak ve uygun tahmincisi $\hat{\theta}_n$ için ampirik C_n kapulası ile gerçek bağdaştırıcısı C_0 veya C_n ile C_{θ_n} arasındaki mesafelere dayanır (Fermanian, 2013). Bu tip testlerden, Kolmogorov-Smirnov ve Cramer-von Mises testlerini ele alacağız.

Kolmogorov-Smirnov test istatistiği

$$T_n^{KS} = \sup_{u \in [0,1]^d} |\sqrt{n}C_n(u) - C_{\theta_n}|,$$

Cramer-von Mises test istatistiği

$$T_n^{CvM} = n \int_{[0,1]^d} \{C_n(u) - C_{\theta_n}(u)\}^2 dC_n(u)$$

ve yaklaşık p – değeri aşağıdaki formülle hesaplanır,

$$\sum_{b=1}^M \frac{I(|T_b| \geq |T_n|)}{M}$$

Burada T_n ve T_b , sırasıyla test istatistiğini ve Bootstrap test istatistiğini gösterir.

3.5.1.2. Rosenblatt'ın Dönüşümü

Rosenblatt (1952) tarafından tanıtılan dönüşüm, doğrudan test edilebilen veya test amaçları için tek boyutlu değişkenlere daha fazla eşlenebilen kesinlikle sürekli bir kapula C 'den verilen rasgele vektörler U_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ olan standart tek-boyutlu rasgele vektörlerin U'_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ gerçekleşmesini elde etmek için standart bir yaklaşımdır. $U \sim C$, d – boyutlu rasgele bir vektör olsun. $U' \sim U[0,1]^d$ dönüşümünü elde etmek için (yani her biri $[0,1]$ üzerinde eşit olarak dağılan bağımsız bileşenlere sahip rasgele bir vektör) Rosenblatt (1952) tarafından verilen $R: U \rightarrow U'$ dönüşümü aşağıdaki şekildedir

$$\begin{aligned} U'_1 &= U_1 \\ U'_2 &= C_2(U_2 | U_1) \\ &\vdots \\ U'_d &= C_d(U_d | U_1, \dots, U_{d-1}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

burada $j \in \{2, \dots, d\}$ için $C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1})$, $U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1}$ ile verilen U_j 'nin koşullu dağılım fonksiyonunu gösterir. Uyum iyiliği testleri oluşturmak için Rosenblatt dönüşümünü aşağıda ve simgesel olarak “ R ” olarak göstereceğiz.

Belirli bir kapula C için $C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1})$, $j \in \{2, \dots, d\}$ rasgele vektörlerini genellikle koşullu dağılımlar ve kısmi türevler yardımıyla bulunabilir. C 'nin ilk $d-1$ argümanlarına göre sürekli kısmi türevleri olduğunu varsayalım, bu durumda

$$C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = \frac{D_{j-1, \dots, 1} C^{(1, \dots, j)}(u_1, \dots, u_j)}{D_{j-1, \dots, 1} C^{(1, \dots, j-1)}(u_1, \dots, u_{j-1})}, \quad j \in \{2, \dots, d\}$$

burada $C^{(1, \dots, j)}$, C 'nin ilk k argümanına karşılık gelen k -boyutlu marjinal kapulasını belirtir ve $D_{j-1, \dots, 1}$, ilk $j-1$ argümanlarına göre $j-1$ mertebesinin karışık kısmi türevini gösterir. $(d-1)$ kez sürekli olarak türevlenebilir üreteç φ ile d -boyutlu Arşimedyen kapulası için

$$C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = \frac{\varphi^{(j-1)}\left(\sum_{k=1}^j \varphi^{-1}(u_k)\right)}{\varphi^{(j-1)}\left(\sum_{k=1}^{j-1} \varphi^{-1}(u_k)\right)}, \quad j \in \{2, \dots, d\} \quad (3.27)$$

şeklinde. Denklem (3.26) ve denklem (3.27) yüksek boyutlarda uygulanabilirken sorun olabilmektedir, söz konusu türevleri nümerik olarak çözmek oldukça zordur (Hering ve Hofert, 2015).

3.5.1.3. Parametrik Bootstrap

Parametrik Bootstrap prosedürü aracılığıyla uyum iyiliği testlerinde p -değeri hesaplamalarında Bootstrap test istatistiği tahminleri elde edilir.

- 1- $\mathbf{X}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ verisi verildiğinde, denklem (3.25)'de verildiği gibi U_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ gözlemleri oluşturulur ve bilinmeyen kapula parametre vektörü $\boldsymbol{\theta}$ tahmin edilir.
- 2- U_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ ile verilen kapula ailesi ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ parametre tahmini temelinde, R dönüşümünün ilk $d-1$ bileşeni U'_{ij} , $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, d-1\}$ denklem

(3.27)'deki gibi $Y_i = \sum_{j=1}^{d-1} (\phi^{-1}(U_{ij}'))^2$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ve test istatistikleri

$$T_n^{KS} = \sup_{u \in [0,1]^d} |\sqrt{n}C_n(Y_i) - C_{\theta_n}| \text{ ve } T_n^{CvM} = n \int_{[0,1]^d} \{C_n(Y_i) - C_{\theta_n}(Y_i)\}^2 dC_n(Y_i)$$

3- Bootstrap çoğaltmaları için M sayısı seçilir ve her $k \in \{1, \dots, M\}$ için aşağıdaki adımlar uygulanır.

a. $\hat{\theta}_n$ parametresi ile verilen kapula ailesinden n büyüklüğünde rasgele bir örneklem oluşturulur ve karşılık gelen sözde (pseduo) gözlemler $U_{i,k}^*$, $i \in \{1, \dots, n\}$ hesaplanır, ardından bilinmeyen parametre vektörü θ 'yı $\hat{\theta}_{n,k}^*$ ile tahmin edilir.

b. $U_{i,k}^*$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ile verilen kapula ailesi ve $\hat{\theta}_{n,k}^*$ parametre tahmini temelinde, R dönüşümünün ilk $d-1$ bileşeni $U_{ij,k}^*$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, d-1\}$, denklem (3.27)'deki gibi,

$$Y_{i,k}^* = \sum_{j=1}^{d-1} (\phi^{-1}(U_{ij,k}^*))^2, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ve} \quad \text{test istatistikleri}$$

$$T_n^{KS*} = \sup_{u \in [0,1]^d} |\sqrt{n}C_n(Y_i^*) - C_{\theta_n}|, \quad T_n^{CvM*} = n \int_{[0,1]^d} \{C_n(Y_i^*) - C_{\theta_n}(Y_i^*)\}^2 dC_n(Y_i^*)$$

hesaplanır.

4- Yaklaşık bir p değerleri $\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I(T_n^{KS*} > T_n^{KS})$ ve $\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I(T_n^{CvM*} > T_n^{CvM})$ ile verilir.

Diğer yaklaşımlar için Bootstrap prosedürleri benzer şekilde elde edilebilir (Hering ve Hofert, 2015). Bu tez çalışmasında Bootstrap çoğaltması $M=1000$ olarak kullanılmıştır.

4. MODİFİYELİ ÜNİT ÜSTEL DAĞILIMI

Bu bölümde birim aralığı (0,1) olan yeni iki parametrelili modifiyeli unit üstel (MUÜ) dağılımı önerilmiştir.

X , dağılım fonksiyonu $G(x)$ olan β parametrelili üstel dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. $Y = (1 - \text{sech}(X))^{\frac{1}{\alpha}}$ dönüşümü kullanılarak modifiyeli unit üstel dağılımı elde edilmiştir. Y 'nin dağılım fonksiyonu;

$$\begin{aligned} F(y) = P(Y \leq y) &= P((1 - \text{sech}(x))^{\frac{1}{\alpha}} \leq y) = P(x \leq \text{arcsech}(1 - y^\alpha)) \\ &= G(\text{arcsech}(1 - y^\alpha)) \end{aligned}$$

şeklindedir.

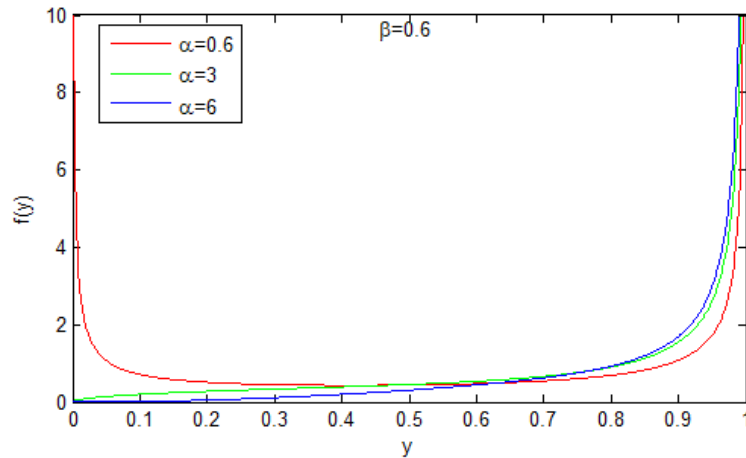
$G(x) = 1 - \exp(-\beta x)$, $x > 0$, $\beta > 0$ ile verilen üstel dağılıma ait dağılım fonksiyonudur, o zaman Y 'nin dağılım fonksiyonu;

$$F(y | \alpha, \beta) = 1 - \exp(-\beta(\text{arcsech}(1 - y^\alpha))), \quad x \in (0,1) \quad (4.1)$$

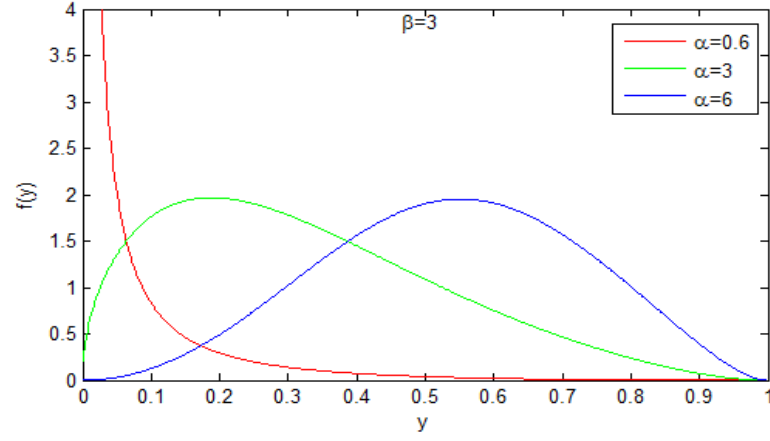
şeklinde elde edilmiştir. Burada β ve α sırasıyla dağılımın ölçek ve şekil parametreleridir. Y rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(y | \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha y^{(\alpha-1)} \exp(-\beta(\text{arcsech}(1 - y^\alpha)))}{\sqrt{y^\alpha - y^{2\alpha}} \sqrt{2 - 3y^\alpha + y^{2\alpha}}} \quad (4.2)$$

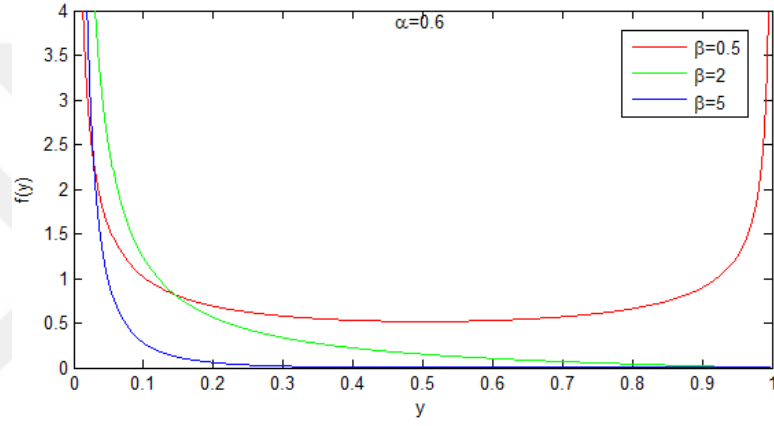
elde edilir. Elde edilen yeni dağılıma ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonun bazı parametreleri için grafikleri şekil 4.1-4.4 de verilmiştir.



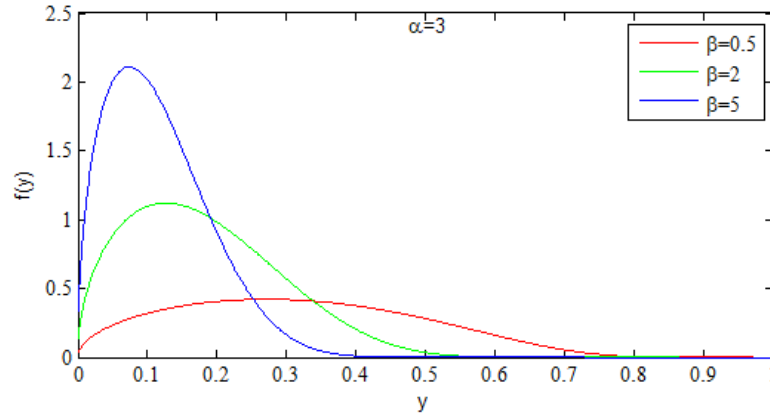
Şekil 4.1. $\beta = 0.3$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si



Şekil 4.2. $\beta = 3$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si



Şekil 4.3. $\alpha = 0.3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si



Şekil 4.4. $\alpha = 3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için MUÜ dağılımının oyf'si

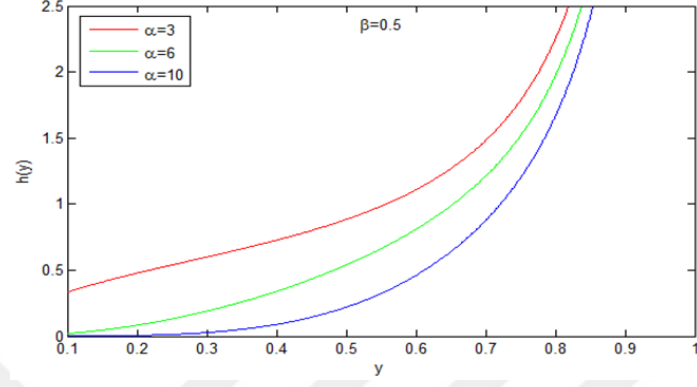
Şekil 4.1-4.4'de görüldüğü gibi MUÜ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun parametrelere göre artan, azalan ve sağa çarpık olduğu gözlenmektedir.

MUE dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla

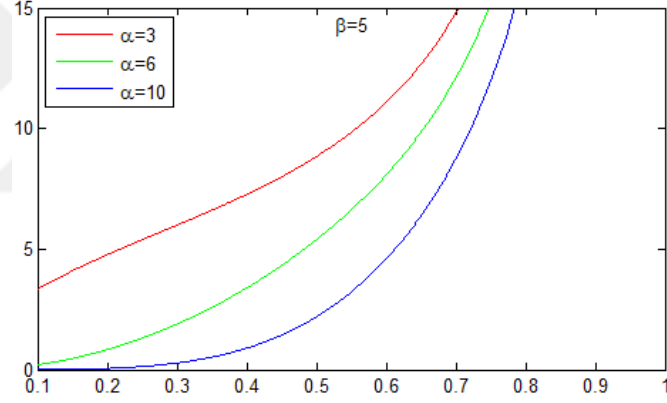
$$S(y | \alpha, \beta) = \exp(-\beta(\operatorname{arcsech}(1 - y^\alpha))) \quad (4.3)$$

$$h(y|\alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha y^{(\alpha-1)}}{\sqrt{y^\alpha - y^{2\alpha}} \sqrt{2 - 3y^\alpha + y^{2\alpha}}} \quad (4.4)$$

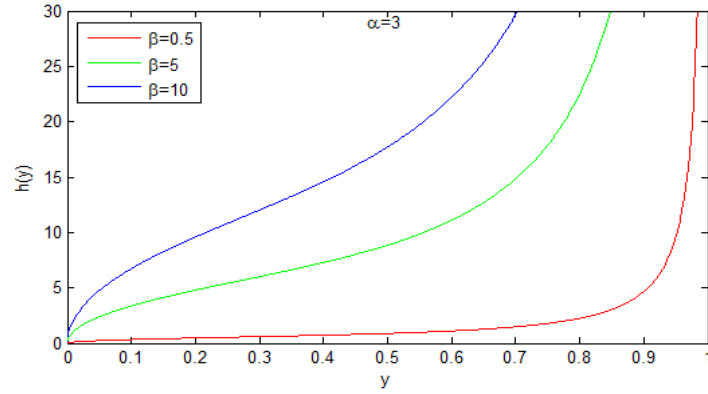
MUE dağılıma ilişkin hazard fonksiyonun bazı parametreleri için Şekil 4.5-4.8’de verilmiştir.



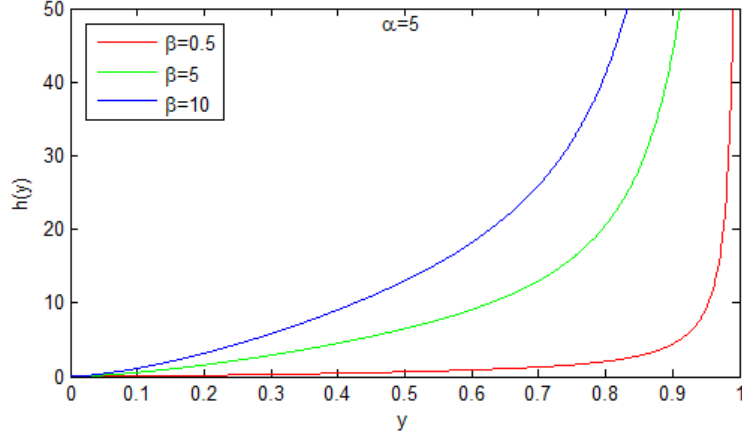
Şekil 4.5. $\beta = 0.5$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu



Şekil 4.6. $\beta = 5$ olduğunda α parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu



Şekil 4.7. $\alpha = 3$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu



Şekil 4.8. $\alpha = 5$ olduğunda β parametresinin farklı değerleri için hazard fonksiyonu

Şekil 4.5-4.8’de görüldüğü gibi MUÜ dağılımının, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olacak şekilde özellikle artan tehlike oranı yönüne sahiptir.

4.1. Kuantil ve Moment

Bu bölümde modifiyeli unit üstel dağılımına ait kuantil fonksiyonuna ve momentlere bakılacaktır.

4.1.1. Kuantil

modifiyeli unit üstel dağılımından sayı üretmek ve medyanı elde etmek için kuantil fonksiyonu elde edilecektir. X , dağılım fonksiyonu (4.2) olan bir modifiyeli unit üstel dağılımdan gelen rasgele değişkeni olsun. Daha sonra modifiyeli unit üstel dağılımın kuantil fonksiyonu $x = F^{-1}(y, \beta, \alpha)$

$$x = \left(1 - \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\beta} \ln(1-U) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.5)$$

şeklindedir. Burada U , Düzgün (0,1) dağılımından gelmektedir. MUÜ dağılımının p th quantil fonksiyonu ve medyanı sırasıyla verilmiştir.

$$x_p = x = \left(1 - \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\beta} \ln(1-p) \right) \right)^{1/\alpha}$$

$$x_{0.5} = x = \left(1 - \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\beta} \ln(1-0.5) \right) \right)^{1/\alpha}.$$

4.1.2. Momentler

Y, MUE dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Y rasgele değişkeninin r. Momenti

$$\mu_r = \int_0^1 y^r f(y) dy = \int_0^1 y^r \frac{\beta \alpha y^{(\alpha-1)} \exp(-\beta(\operatorname{arcsech}(1-y^\alpha)))}{\sqrt{y^\alpha - y^{2\alpha}} \sqrt{2-3y^\alpha + y^{2\alpha}}} dy$$

olarak elde edilebilir.

MUÜ dağılımının farklı ve parametre değerleri için ortalama, varyans, çarpıklık, basıklık katsayısı ve moment değerleri Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Farklı β ve α parametre değerleri için MUÜ dağılımının beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık kat sayısı

β	α	Beklenen Değer	Varyans	Çarpıklık	Basıklık
0.5	2	0.5960	0.0993	-0.2806	1.7615
	4	0.7673	0.0520	-0.9363	2.7619
	6	0.8122	0.0409	-1.2061	3.7904
2	2	0.3243	0.0587	0.6522	2.4265
	4	0.4472	0.0551	0.3652	2.1328
	6	0.6394	0.0390	-0.1693	1.9668
3.5	2	0.1800	0.0239	1.0364	3.8251
	4	0.3867	0.0373	0.3269	2.6464
	6	0.5254	0.0317	-0.2369	2.3931

Tablo 4.2. Farklı β ve α parametre değerleri için MUÜ dağılımının ilk dört momenti

β	α	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0.3	2	0.7395	0.6380	0.5760	0.5321
	4	0.8406	0.7496	0.6858	0.6375
	6	0.8963	0.8258	0.7734	0.7323
1.7	2	0.3660	0.1911	0.1185	0.0821
	4	0.4944	0.3045	0.2115	0.1581
	6	0.6480	0.4625	0.3516	0.2791
3	2	0.2135	0.0793	0.0373	0.0199
	4	0.3902	0.1933	0.1102	0.0691
	6	0.5463	0.3322	0.2158	0.1470

α parametresi arttığı zaman beklenen değer ve basıklık katsayısı artmakta iken varyans ve çarpıklık katsayısı azalmakta olduğu görülmektedir, β parametresi arttığı zaman çarpıklık katsayısı artmakta iken beklenen değer, varyans ve basıklık katsayısı azalmaktadır.

4.2. Parametre Tahmini

Bu bölümde, MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için 6 farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; en çok olabilirlik yöntemi, bayes yöntemi, en küçük kareler yöntemi, ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi, Anderson-Darling ve cramer-von misas tahmin edicileri.

4.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, MUÜ dağılımından rasgele alınmış bir örneklem olmak üzere; örnekleme ait olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n \frac{\beta \alpha y_i^{(\alpha-1)} \exp(-\beta(\operatorname{arcsech}(1-y_i^\alpha)))}{\sqrt{y_i^\alpha - y_i^{2\alpha}} \sqrt{2-3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha}}} \\ &= \beta^n \alpha^n \exp\left\{(\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log(y_i)\right\} \exp\left\{-\beta \left[\sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-y_i^\alpha) \right]\right\} \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^\alpha - y_i^{2\alpha})\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2-3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha})\right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= n \log(\beta) + n \log(\alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \sum_{i=1}^n (\beta(\operatorname{arcsech}(1-y_i^\alpha))) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^\alpha - y_i^{2\alpha}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2-3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 4.8 ve 4.9'da verilmiştir.

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-y_i^\alpha) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i^\alpha \log(y_i) (1-y_i^\alpha)^{-2}}{\sqrt{y_i^\alpha} \sqrt{1-y_i^\alpha}} \quad (4.9)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\alpha \log(y_i) - 2y_i^{2\alpha} \log(y_i)}{y_i^\alpha - 2y_i^{2\alpha}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3y_i^\alpha \log(y_i) + 2y_i^{2\alpha} \log(y_i)}{2-3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha}}$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

4.2.2. Bayes Tahmini

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, MUÜ dağılımından rasgele alınmış bir örneklem olmak üzere, MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha \in (0, \infty)$ ve $\forall \beta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta \sim \text{Gamma}(c, d)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\alpha, \beta) = \alpha^{a-1} \exp(-b\alpha) \beta^{c-1} \exp(-d\beta) \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.10)'da verilen Önsel dağılım ve denklem (4.6)'da verilen örneklem olabirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | y) = \frac{\exp \left\{ \alpha \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \exp \left\{ -\beta \left[d + \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - y_i^\alpha) \right] \right\} \times \beta^{n+c-1} \alpha^{n+a-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^\alpha - y_i^{2\alpha}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha}) \right\}}{\int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{\beta=0}^{\infty} \exp \left\{ \alpha \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \exp \left\{ -\beta \left[d + \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - y_i^\alpha) \right] \right\} \times \beta^{n+c-1} \alpha^{n+a-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^\alpha - y_i^{2\alpha}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^\alpha + y_i^{2\alpha}) \right\} d\alpha d\beta} \quad (4.11)$$

Denklem (4.11)'deki Sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülemediği için R programında Metropol-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

4.2.3. En Küçük Kareler Yöntemi

$y_{(1)} < y_{(2)} < \dots < y_{(n)}$, β ve α parametrelili MUÜ dağılımına sahip kitleden alınmış sıra istatistiklerinin gözlenen değeri olsun. β ve α parametreleri için en küçük kareler yöntemi

$$F(y_{(i)}) = 1 - \exp(-\beta(\text{arc sech}(1 - y_{(i)}^\alpha))), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. denklem (4.12)'de ki $F(y_{(i)})$ yerine ampirik dağılım fonksiyonu yazıldığında

$$\begin{aligned}
LS(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \left[F(y_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{i}{n+1} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Fonksiyonu minimize edilerek, α ve β parametrelerinin EKK tahminleri aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olarak elde edilebilir. β ve α parametreleri için sırasıyla

$$\frac{\partial LS(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{i}{n+1} \right] \eta_1(y_{(i)}) = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial LS(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{i}{n+1} \right] \eta_2(y_{(i)}) = 0 \tag{4.15}$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\eta_1(y_{(i)}) = \operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha) \exp(-\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha))) \tag{4.16}$$

ve

$$\eta_2(y_{(i)}) = \frac{\beta y_{(i)}^\alpha \ln(y_{(i)}) \exp(-\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)))}{\sqrt{y_{(i)}^\alpha - y_{(i)}^{2\alpha}} \sqrt{2 - 3y_{(i)}^\alpha + y_{(i)}^{2\alpha}}} \tag{4.17}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen denklemler nümerik olarak çözülemediğinden iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir.

4.2.4. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler

$y_{(1)} < y_{(2)} < \dots < y_{(n)}$, β ve α parametrelili MUÜ dağılımına sahip kitleden alınmış sıra istatistiklerinin gözlenen değeri olsun. β ve α parametreleri için ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi;

$$\begin{aligned}
WLS(\beta, \alpha) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(y_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{i}{n+1} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

fonksiyonu minimize edilerek, α ve β parametrelerinin AEKK tahminleri aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olarak elde edilebilir. β ve α parametreleri için sırasıyla

$$\frac{\partial WLS(\beta, \alpha)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[1 - \exp\{-\beta(\operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha))\} - \frac{i}{n+1} \right] \eta_1(y_{(i)}) = 0 \quad (4.19)$$

ve

$$\frac{\partial WLS(\beta, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[1 - \exp\{-\beta(\operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha))\} - \frac{i}{n+1} \right] \eta_2(y_{(i)}) = 0 \quad (4.20)$$

tahmin denklemleri elde edilir, η_1 ve η_2 denklemleri denklem (4.16) ve (4.17)'de verilmiştir. Elde edilen denklemler nümerik olarak çözülemediğinden iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir.

4.2.5. Anderson-Darling Yöntemi

α ve β parametrelerinin minimum uzaklık tahminleri AD fonksiyonu minimize edilerek elde edilir.

$$\begin{aligned} AD(\alpha, \beta) &= -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \left[\log(F(y_{(i)})) + \log(S(y_{(i)})) \right] \\ &= -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \left[\log(1 - \exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}) \right. \\ &\quad \left. + \log(\exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}) \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fonksiyonu α ve β parametrelerinin AD tahminleri aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olarak elde edilebilir. β ve α parametreleri için sırasıyla

$$\frac{\partial AD(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\frac{\eta_1(y_{(i)})}{1 - \exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}} - \frac{\eta_1(y_{(n+1-i)})}{\exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}} \right] \quad (4.22)$$

ve

$$\frac{\partial AD(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\frac{\eta_2(y_{(i)})}{1 - \exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}} - \frac{\eta_2(y_{(n+1-i)})}{\exp\{-\beta \operatorname{arcsech}(1-y_{(i)}^\alpha)\}} \right] \quad (4.23)$$

tahmin denklemleri elde edilir, η_1 ve η_2 denklemleri denklem (4.16) ve (4.17)'de verilmiştir. Elde edilen denklemler nümerik olarak çözülemediğinden iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir.

4.2.6. Cramer-von Mises Yöntemi

α ve β parametrelerinin Cramer-von Mises (CVM) minimum uzaklık tahminleri CVM fonksiyonu minimize edilerek elde edilir.

$$\begin{aligned} CVM(\alpha, \beta) &= \frac{1}{12} + \sum_{i=1}^n \left[F(y_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \\ &= \frac{1}{12} + \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta \operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha) \right\} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

fonksiyonu α ve β parametrelerinin CVM tahminleri aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olarak elde edilebilir. β ve α parametreleri için sırasıyla

$$\frac{\partial CVM(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \eta_1(y_{(i)}) = 0 \quad (4.25)$$

ve

$$\frac{\partial CVM(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ -\beta (\operatorname{arcsech}(1 - y_{(i)}^\alpha)) \right\} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \eta_2(y_{(i)}) = 0 \quad (4.26)$$

tahmin denklemleri elde edilir, η_1 ve η_2 denklemleri denklem (4.16) ve (4.17)'de verilmiştir. Elde edilen denklemler nümerik olarak çözülemediğinden iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir.

4.3. Simülasyon Çalışması

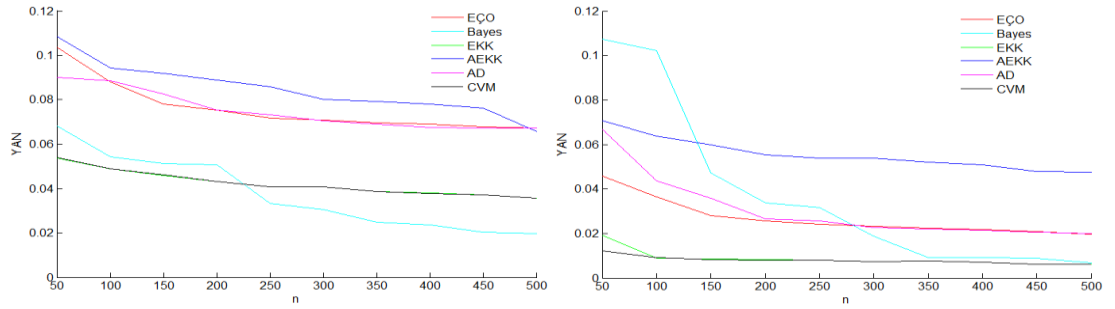
Bu bölümde, MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO, bayes, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin edicilerinin HKO ve yanlışlık kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemleri ve R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı α ve β parametreleri için Tablo 4.3-4.14’de verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 4.3. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.10349	0.04564	0.06824	0.10728
100	0.08800	0.03634	0.05436	0.10202
150	0.07791	0.02805	0.05128	0.04736
200	0.07536	0.02556	0.05070	0.03390
250	0.07184	0.02409	0.03334	0.03178
300	0.07095	0.02325	0.03067	0.01884
350	0.06952	0.02230	0.02461	0.00915
400	0.06893	0.02175	0.02374	0.00902
450	0.06782	0.02071	0.02041	0.00899
500	0.06717	0.01970	0.01972	0.00874

Tablo 4.4. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.05366	0.01911	0.10833	0.07071	0.08997	0.06671	0.05399	0.01210
100	0.04873	0.00891	0.10432	0.06381	0.08851	0.04365	0.04894	0.00907
150	0.04597	0.00852	0.10187	0.05978	0.08241	0.03584	0.04614	0.00815
200	0.04306	0.00834	0.09897	0.05529	0.07522	0.02665	0.04310	0.00803
250	0.04089	0.00805	0.09601	0.05375	0.07311	0.02552	0.04087	0.00802
300	0.04083	0.00729	0.09011	0.05383	0.07061	0.02273	0.04081	0.00726
350	0.03868	0.00774	0.08913	0.05192	0.06892	0.02199	0.03866	0.00772
400	0.03792	0.00697	0.07798	0.05081	0.06750	0.02146	0.03789	0.00693
450	0.03705	0.00621	0.07623	0.04778	0.06724	0.02064	0.03710	0.00623
500	0.03571	0.00604	0.06573	0.04756	0.06713	0.01994	0.03570	0.00602



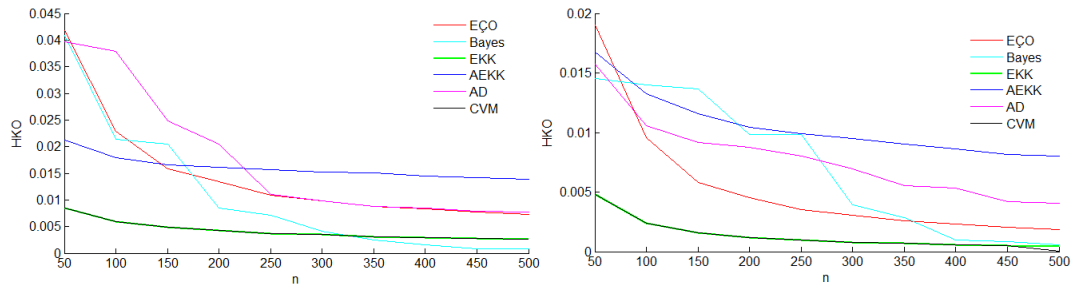
Şekil 4.9. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar

Tablo 4.5. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

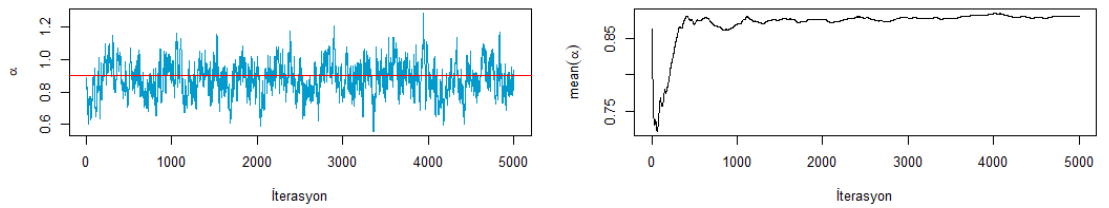
	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.04179	0.01901	0.04092	0.01452
100	0.02294	0.00955	0.02135	0.01402
150	0.01588	0.00582	0.02049	0.01368
200	0.01337	0.00454	0.00847	0.00986
250	0.01087	0.00354	0.00711	0.00762
300	0.00986	0.00304	0.00419	0.00390
350	0.00877	0.00258	0.00244	0.00288
400	0.00827	0.00230	0.00151	0.00095
450	0.00777	0.00208	0.00084	0.00081
500	0.00735	0.00186	0.00079	0.00057

Tablo 4.6. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

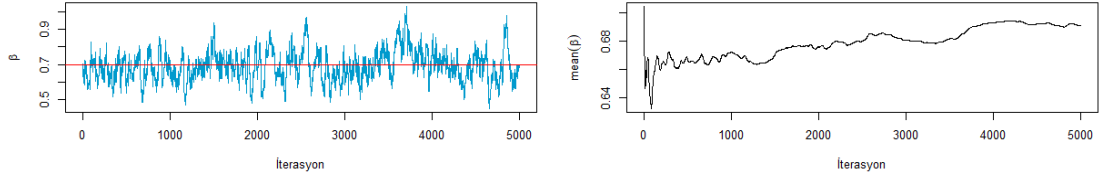
	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.00852	0.00480	0.02121	0.01677	0.03975	0.01573	0.00852	0.00482
100	0.00595	0.00241	0.01797	0.01326	0.03782	0.01054	0.00598	0.00241
150	0.00481	0.00157	0.01658	0.01156	0.02485	0.00914	0.00484	0.00157
200	0.00428	0.00120	0.01606	0.01041	0.02052	0.00874	0.00428	0.00120
250	0.00367	0.00097	0.01562	0.00993	0.01102	0.00801	0.00367	0.00097
300	0.00348	0.00078	0.01522	0.00947	0.00976	0.00695	0.00348	0.00078
350	0.00310	0.00069	0.01502	0.00905	0.00883	0.00561	0.00309	0.00069
400	0.00291	0.00057	0.01451	0.00861	0.00841	0.00534	0.00289	0.00057
450	0.00275	0.00053	0.01418	0.00815	0.00794	0.00417	0.00276	0.00534
500	0.00259	0.00043	0.01391	0.00802	0.00775	0.00408	0.00259	0.00004



Şekil 4.10. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla parametresi için HKO'lar



Şekil 4.11. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi



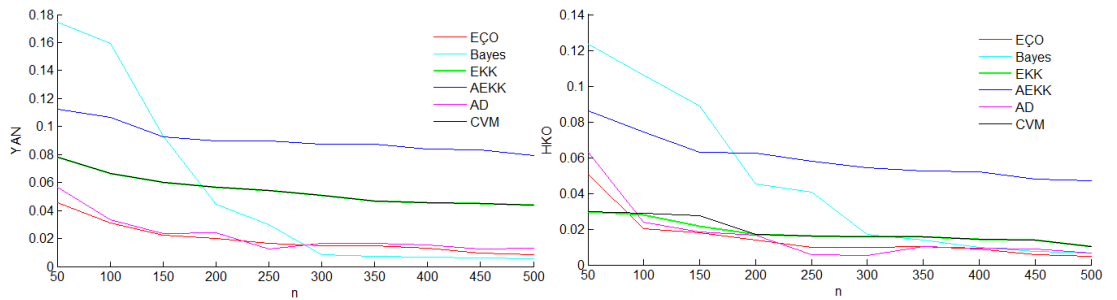
Şekil 4.12. ($\alpha = 0.9, \beta = 0.7$) durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 4.7. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.04536	0.05053	0.17450	0.12350
100	0.03104	0.02015	0.15960	0.10604
150	0.02233	0.01814	0.09344	0.08899
200	0.02022	0.01367	0.04470	0.04508
250	0.01641	0.00992	0.02973	0.04086
300	0.01468	0.00978	0.00817	0.01711
350	0.01506	0.01012	0.00725	0.01377
400	0.01284	0.00882	0.00695	0.00982
450	0.00970	0.00574	0.00590	0.00758
500	0.00869	0.00461	0.00547	0.00678

Tablo 4.8. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.07798	0.02973	0.11249	0.08627	0.05642	0.06297	0.07830	0.02968
100	0.06672	0.02799	0.10676	0.07436	0.03347	0.02407	0.06660	0.02872
150	0.06024	0.02749	0.09265	0.06313	0.02376	0.01861	0.06018	0.02767
200	0.05647	0.01715	0.08987	0.06260	0.02422	0.01640	0.05666	0.01722
250	0.05405	0.01633	0.08958	0.05808	0.01245	0.00547	0.05404	0.01629
300	0.05099	0.01587	0.08764	0.05453	0.01672	0.00519	0.05097	0.01579
350	0.04660	0.01563	0.08723	0.05246	0.01660	0.01039	0.04676	0.01571
400	0.04573	0.01452	0.08408	0.05227	0.01560	0.00954	0.04573	0.01451
450	0.04504	0.01369	0.08354	0.04814	0.01264	0.00886	0.04515	0.01374
500	0.00402	0.01018	0.07912	0.04713	0.01300	0.00670	0.04404	0.01012



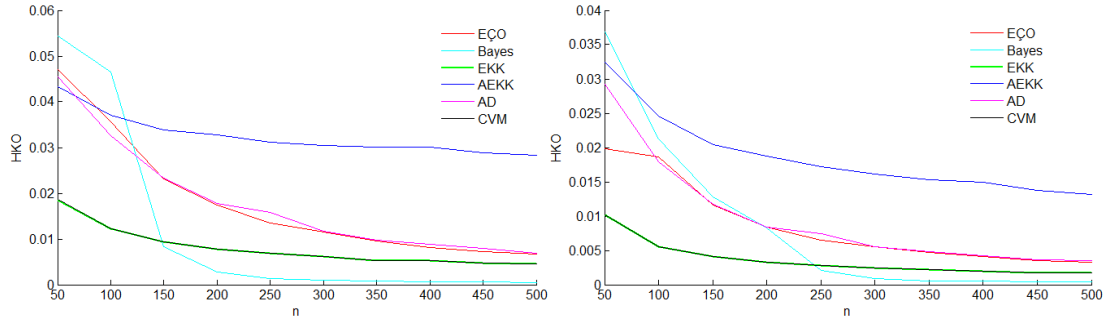
Şekil 4.13. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar

Tablo 4.9. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

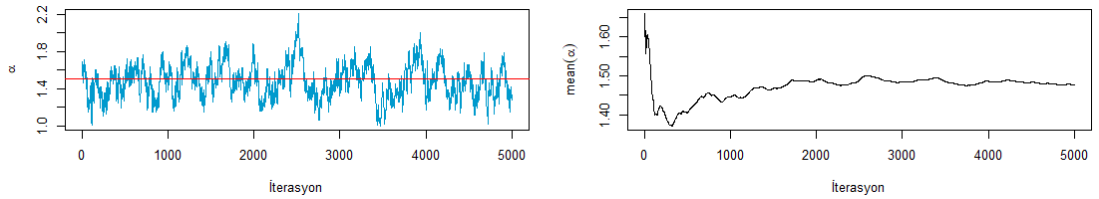
	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.04705	0.01988	0.05432	0.03676
100	0.03571	0.01861	0.04645	0.02126
150	0.02312	0.01166	0.00825	0.01282
200	0.01744	0.00836	0.00271	0.00829
250	0.01347	0.00653	0.00137	0.00213
300	0.01152	0.00551	0.00092	0.00085
350	0.00947	0.00473	0.00078	0.00059
400	0.00816	0.00411	0.00062	0.00058
450	0.00725	0.00353	0.00056	0.00045
500	0.00667	0.00327	0.00052	0.00038

Tablo 4.10. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

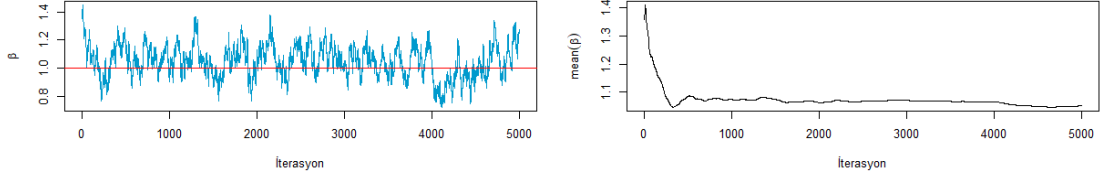
	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.01849	0.01013	0.04322	0.03246	0.04541	0.02927	0.01859	0.01014
100	0.01222	0.00552	0.03706	0.02462	0.03256	0.01793	0.01221	0.00554
150	0.00940	0.00414	0.03378	0.02045	0.02335	0.01173	0.00939	0.00413
200	0.00771	0.00333	0.03268	0.01871	0.01777	0.00838	0.00770	0.00333
250	0.00692	0.00281	0.03116	0.01725	0.01578	0.00747	0.00690	0.00281
300	0.00611	0.00249	0.03038	0.01615	0.01165	0.00557	0.00610	0.00248
350	0.00527	0.00221	0.03016	0.01530	0.00975	0.00484	0.00530	0.00221
400	0.00520	0.001981	0.03004	0.01491	0.00886	0.00417	0.00526	0.00197
450	0.00473	0.00176	0.02886	0.01370	0.00790	0.00362	0.00475	0.00176
500	0.00455	0.00170	0.02829	0.01319	0.00682	0.00348	0.00455	0.00170



Şekil 4.14. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla parametresi için HKO'lar



Şekil 4.15. ($\alpha = 1.5, \beta = 1$) durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi



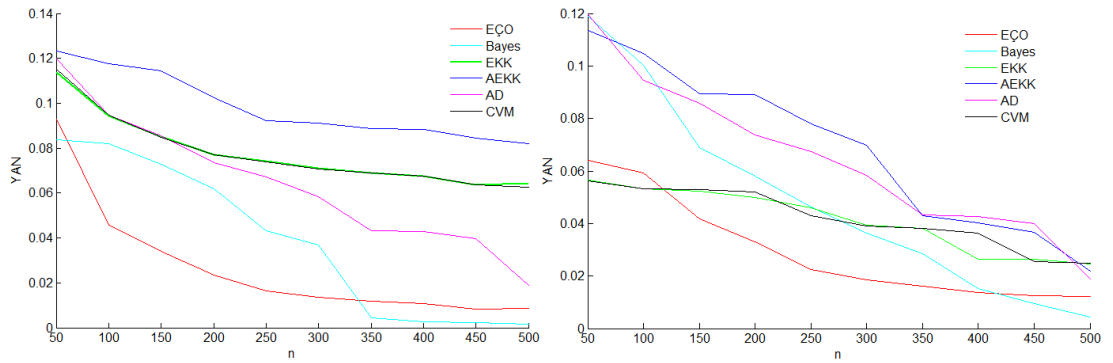
Şekil 4.16. ($\alpha=1.5, \beta=1$) durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 4.11. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.09288	0.06421	0.08377	0.11909
100	0.04553	0.05918	0.08199	0.10026
150	0.03405	0.04167	0.07867	0.06903
200	0.02349	0.03300	0.07224	0.05814
250	0.01630	0.02251	0.04325	0.04630
300	0.01341	0.01846	0.03688	0.03633
350	0.01166	0.01625	0.00455	0.02860
400	0.01061	0.01373	0.00249	0.01508
450	0.00815	0.01239	0.00213	0.00952
500	0.00871	0.01222	0.00154	0.00437

Tablo 4.12. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin Yan tahminleri

	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.11389	0.05641	0.12327	0.11339	0.11962	0.12435	0.11522	0.05611
100	0.09437	0.05336	0.11776	0.10476	0.09457	0.09519	0.09459	0.05316
150	0.08510	0.05240	0.11441	0.08925	0.08564	0.08642	0.08488	0.05295
200	0.07706	0.04991	0.10251	0.08918	0.07367	0.05674	0.07714	0.05199
250	0.07408	0.04594	0.09206	0.07804	0.06729	0.05506	0.07404	0.04309
300	0.07095	0.03932	0.09127	0.06994	0.05846	0.04752	0.07081	0.03912
350	0.06897	0.03804	0.08874	0.04296	0.04317	0.04738	0.06905	0.03809
400	0.06769	0.02652	0.08835	0.04020	0.04270	0.04335	0.06763	0.03643
450	0.06369	0.02636	0.08434	0.03654	0.03984	0.04287	0.06354	0.02550
500	0.06448	0.02471	0.08215	0.02190	0.01877	0.03167	0.06245	0.02474



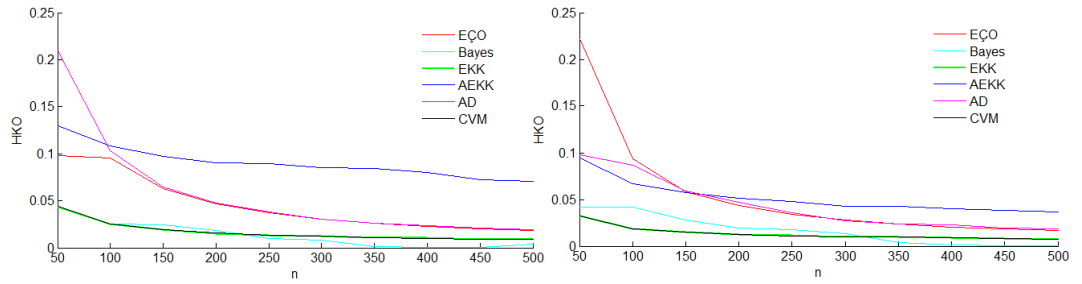
Şekil 4.17. ($\alpha=3, \beta=2$) durumunda α ve β parametreleri için sırasıyla yanlar

Tablo 4.13. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

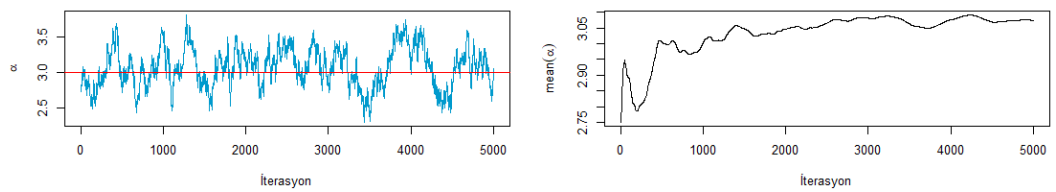
	EÇO		Bayes	
n	α	β	α	β
50	0.09786	0.22192	0.05432	0.03676
100	0.09527	0.09357	0.04645	0.02126
150	0.06306	0.05826	0.00825	0.01282
200	0.04657	0.04339	0.00271	0.00829
250	0.03749	0.03435	0.00137	0.00213
300	0.03038	0.02814	0.00092	0.00085
350	0.02619	0.02367	0.00078	0.00059
400	0.02281	0.02051	0.00062	0.00058
450	0.02025	0.01827	0.00056	0.00045
500	0.01877	0.01651	0.00052	0.00038

Tablo 4.14. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda EKK, AEKK, AD ve CVM tahminleri için α ve β parametrelerinin HKO tahminleri

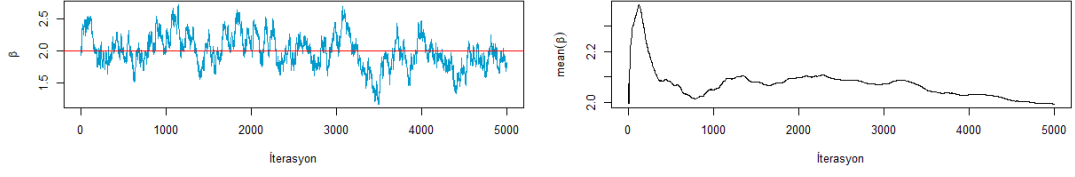
	EKK		AEKK		AD		CVM	
n	α	β	α	β	α	β	α	β
50	0.04365	0.03221	0.12948	0.09415	0.20926	0.09786	0.04418	0.03208
100	0.02558	0.01862	0.10803	0.06681	0.10297	0.08661	0.02560	0.01860
150	0.01962	0.01490	0.09733	0.05696	0.06469	0.05908	0.01956	0.01479
200	0.01539	0.01274	0.08998	0.05087	0.04745	0.04736	0.01543	0.01273
250	0.01369	0.01123	0.08907	0.04821	0.03792	0.03566	0.01368	0.01120
300	0.01231	0.01027	0.08503	0.04299	0.03059	0.02752	0.01229	0.01023
350	0.01113	0.00975	0.08409	0.04296	0.02621	0.02413	0.01113	0.00974
400	0.01057	0.00872	0.07970	0.04020	0.02333	0.02305	0.01022	0.00870
450	0.00924	0.00778	0.07198	0.03842	0.02069	0.01912	0.00925	0.00776
500	0.00916	0.00775	0.07074	0.03643	0.01919	0.01861	0.00917	0.00767



Şekil 4.18. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda α parametresi için HKO



Şekil 4.19. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda α parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 4.20. $(\alpha = 3, \beta = 2)$ durumunda β parametresi için MCMC iterasyon çizimi

EÇO, Bayes, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları, modifiye unit üstel dağılımına ait (α, β) parametrelerinin simülasyonları yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarıdaki tablo ve şekillerde görüldüğü gibi, MUÜ dağılımının tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde (α, β) parametreleri için Bayes tahmin edicisinin ortalama HKO ve yan değerlerinin diğer genel tahmin edicilerden daha küçük olduğu görülmektedir. Ancak tüm tahmin edicilerin HKO ve yan değerleri çok küçüktür, dolayısıyla MUÜ dağılımının parametre tahminleri için tüm tahmin ediciler kullanılabilir.

4.4. Gerçek Veri Uygulaması

Bu bölümde modifiyeli unit üstel dağılımının potansiyelini göstermek için literatürde iyi bilinen beta, Kumaraswamy (KW), Topp Leone (TL), unit Weibull (UW), unit Lindley (Ulin) dağılımlarıyla yukarıdaki tahmin edicilerin uyum iyiliği istatistik değerleriyle karşılaştırıyoruz.

4.4.1. Birinci Gerçek Veri

Kullanacağımız gerçek veri setlerinden ilki, Quesenberry ve Hales (1980) ve Mazucheli ve ark. (2019a) tarafından çalışılan polyester elyafların çekme gerilme dirençlerine dayanan 30 ölçümlü verilerdir.

Tablo 4.15. Veri Seti 1

Veri Seti 1
0.023, 0.032, 0.054, 0.069, 0.081, 0.094, 0.105, 0.127, 0.148, 0.169, 0.188, 0.216, 0.255, 0.277, 0.311, 0.361, 0.376, 0.395, 0.432, 0.463, 0.481, 0.519, 0.529, 0.567, 0.642, 0.674, 0.752, 0.823, 0.887, 0.926

Birinci gerçek veri seti için EÇO, Bayes, EKK, AEKK, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri Tablo 4.16’da verilmiştir.

Tablo 4.16. Veri Seti 1 için parametre tahminleri

	EÇO		Bayes		EKK	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	2.1801	1.6092	2.0021	1.4994	2.1886	1.6657
Beta	0.9664	1.6204	0.8848	1.5581	1.6934	0.9599
KW	0.9687	1.6083	0.9662	1.5857	0.9675	1.6982
TL	-	1.1090	-	1.1081	-	1.1265
UW	1.3688	0.5717	1.3751	0.5659	1.4264	0.5596
ULind	-	1.0500	-	0.9478	-	1.9015
	AEKK		AD		CVM	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	2.1953	1.6307	2.1865	1.6103	2.1886	1.6657
Beta	1.6934	0.9599	1.6198	0.9678	1.6934	0.9592
KW	0.9675	1.6982	0.9691	1.6857	0.9691	1.6512
TL	-	1.1650	-	1.4870	-	1.1265
UW	1.4535	0.5605	1.4574	0.5706	1.4264	0.5596
ULind	-	1.7906	-	1.8079	-	1.9015

Birinci gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriter değerleri Tablo 4.17’de verilmiştir.

Tablo 4.17. Veri Seti 1 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

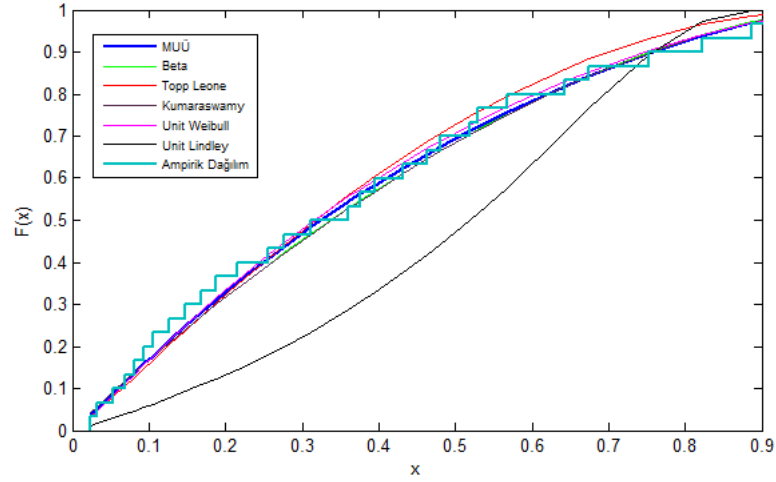
Model	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>CAIC</i>	<i>HQIC</i>	$\hat{\ell}$
MUÜ	-3.1586	-0.3562	1.6437	-2.2621	3.5793
Beta	-2.6101	0.1922	2.1922	-1.7136	3.3050
KW	-2.6220	0.1803	2.1803	-1.7255	3.3110
TL	-1.8077	0.9946	2.9946	-0.9112	2.9038
UW	-3.4345	-0.6321	1.3678	-2.5379	3.7172
ULind	181.3202	182.7214	183.7214	181.7685	-89.6601

Birinci gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistiği değerleri Tablo 4.18’de verilmiştir.

Tablo 4.18. Veri Seti 1 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	EÇO		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.0559 (0.9999)	0.1248 (0.9997)	0.01526 (0.9996)
BETA	0.0669 (0.9979)	0.1702 (0.9966)	0.0220 (0.9953)
KW	0.0649 (0.9987)	0.1633 (0.9975)	0.0207 (0.9968)
TL	0.0664 (0.9981)	0.3277 (0.9153)	0.0332 (0.9153)
UW	0.0576 (0.9998)	0.1259 (0.9997)	0.01630 (0.9994)
ULind	0.2723 (0.0186)	6.0694 (0.0009)	0.9799 (0.0024)

Tablo 4.17 ve Tablo 4.18’de görüldüğü üzere, EÇO yönteminde test istatistikleri ve uyum iyiliği ölçüleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 1 için uygun bir modeldir. EÇO yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.21’de verilmiştir.

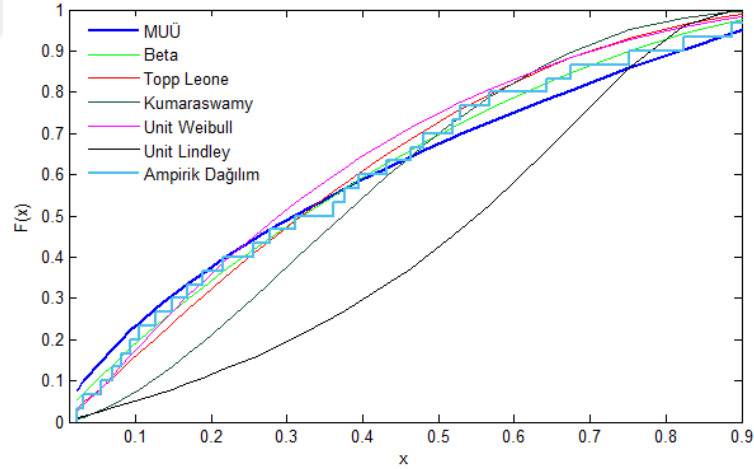
**Şekil 4.21.** EÇO tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

Birinci gerçek veri seti için, Bayes yöntemiyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.19’da verilmiştir.

Tablo 4.19. Veri Seti 1 için Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	Bayes		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.0544 (0.9999)	0.1098 (0.9999)	0.0110 (1.000)
BETA	0.0595 (0.9997)	0.1633 (0.9974)	0.0144 (0.9998)
KW	0.0701 (0.9961)	0.1824 (0.9946)	0.0257 (0.9893)
TL	0.0662 (0.9982)	0.3275 (0.9946)	0.0331 (0.9669)
UW	0.0595 (0.9997)	0.1273 (0.9997)	0.0164 (0.9994)
ULind	6.8151 (0.0004)	7.6545 (0.0010)	1.2778 (0.0004)

Tablo 4.19’da görüldüğü üzere, Bayes yönteminde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 1 için uygun bir modeldir. Bayes yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.22’de verilmiştir.

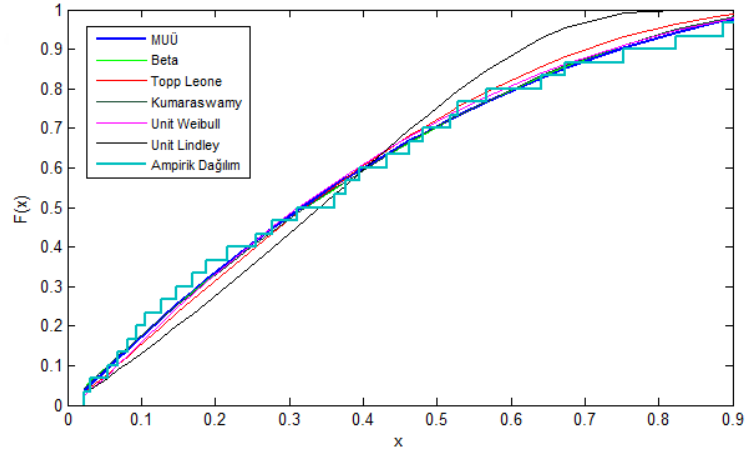
**Şekil 4.22.** Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

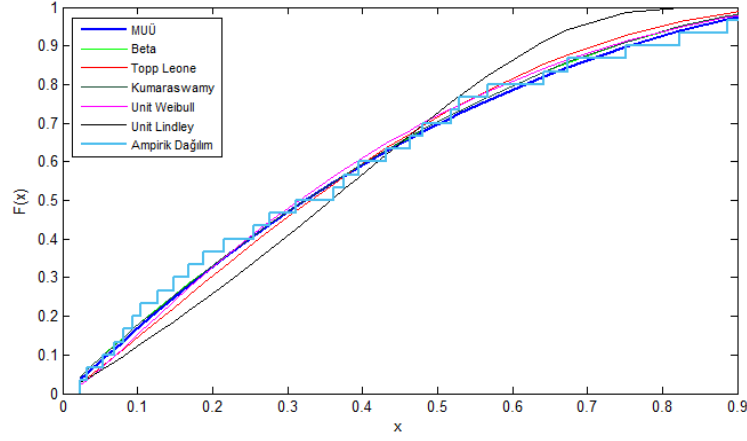
Birinci gerçek veri seti için, EKK ve AEKK yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.20’de verilmiştir.

Tablo 4.20. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri

Model	EKK			AEKK		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.0550 (0.9999)	0.1267 (0.9997)	0.0144 (0.9998)	0.0562 (0.9999)	0.1274 (0.9997)	0.0157 (0.9996)
BETA	0.0531 (1.0000)	0.1581 (0.9980)	0.0154 (0.9997)	0.0531 (1.0000)	0.1581 (0.9980)	0.0154 (0.9997)
KW	0.0543 (1.0000)	0.1599 (0.9978)	0.0156 (0.9996)	0.0647 (0.9987)	0.1661 (0.9971)	0.0201 (0.9974)
TL	0.0711 (0.9953)	0.3347 (0.9093)	0.0348 (0.9602)	0.0814 (0.9790)	0.3702 (0.8768)	0.0414 (0.9286)
UW	0.0653 (0.9985)	0.1783 (0.9953)	0.0233 (0.9936)	0.0723 (0.9943)	0.2205 (0.9838)	0.0285 (0.9823)
ULind	0.1281 (0.6616)	3.2609 (0.0204)	0.1182 (0.5050)	0.1256 (0.6842)	2.9927 (0.0279)	0.1296 (0.4602)

Tablo 4.20’de görüldüğü üzere, EKK ve AEKK yöntemlerinde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 1 için uygun bir modeldir. EKK ve AEKK yöntemleri, kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.23 ve Şekil 4.24’de verilmiştir.

**Şekil 4.23.** EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



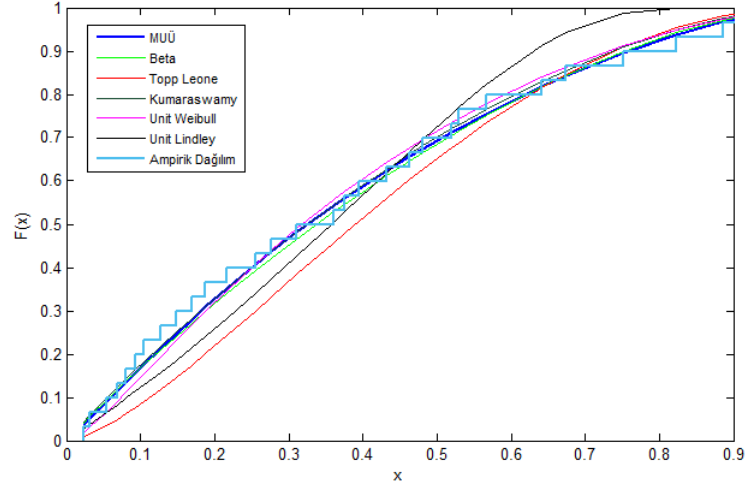
Şekil 4.24. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

Birinci gerçek veri seti için, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.21’de verilmiştir.

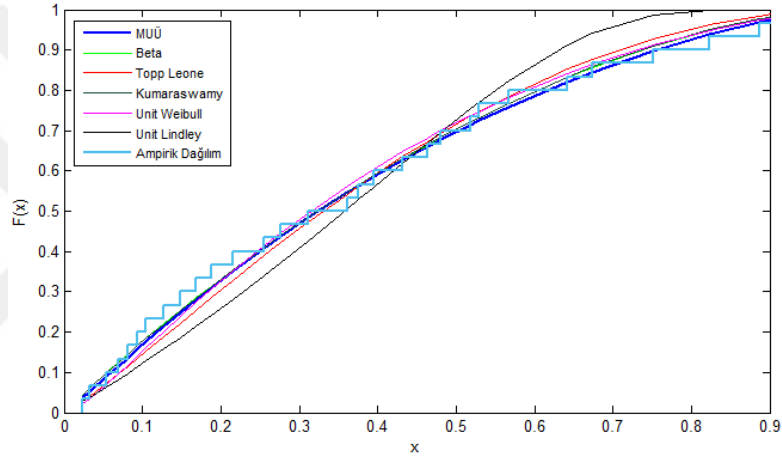
Tablo 4.21. AD ve CVM Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiği Testleri

Model	AD			CVM		
	KS (p)	AD (p)	CVM (p)	KS (p)	AD (p)	CVM (p)
MUÜ	0.0560 (0.9999)	0.1254 (0.9997)	0.0153 (0.9996)	0.0550 (0.9999)	0.1267 (0.9997)	0.0144 (0.9998)
BETA	0.0531 (1.0000)	0.1581 (0.9980)	0.0154 (0.9997)	0.0531 (1.0000)	0.1581 (0.9980)	0.0154 (0.9997)
KW	0.0541 (1.0000)	0.1578 (0.9974)	0.1552 (0.9996)	0.0534 (1.0000)	0.1599 (0.9978)	0.0156 (0.9996)
TL	0.0874 (0.9792)	0.3265 (0.9124)	0.0374 (0.9662)	0.0711 (0.9953)	0.3347 (0.9093)	0.0348 (0.9602)
UW	0.0725 (0.9945)	0.2052 (0.9820)	0.0280 (0.9912)	0.0653 (0.9985)	0.1783 (0.9953)	0.0233 (0.9936)
ULind	0.1297 (0.6617)	3.0578 (0.0248)	0.1193 (0.4875)	0.1281 (0.6616)	3.2609 (0.0204)	0.1182 (0.5050)

Tablo 4.21’de görüldüğü üzere, AD ve CVM yöntemlerinde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 1 için uygun bir modeldir. AD ve CVM yöntemleri, kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.25 ve Şekil 4.26’da verilmiştir.



Şekil 4.25. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



Şekil 4.26. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

4.4.2. İkinci Gerçek Veri

İkinci veri seti, Türkiye’deki yeni tip korana virüs pandemisine ilişkindir, Türkiye’deki günlük toplam iyileşen sayısının toplam doğrulanmış vaka sayısına oranının hesaplandığı 25 gözlemden oluşmaktadır. Bu veri seti Gündüz ve Korkmaz (2020) tarafından Türkiye Sağlık Bakanlığından alınan veriler kullanılarak analiz edilmiştir.

Tablo 4.22. Veri Seti 2

Veri Seti 2									
0.007371007,	0.009456904,	0.011325639,	0.014962594,	0.017958761,	0.021238599,	0.022883926,	0.023134649,	0.032840311,	0.038494218,
0.043882583,	0.046380721,	0.048291739,	0.050659855,	0.051521402,	0.056836698,	0.060502844,	0.064816787,	0.073704904,	0.081767351,
0.095548098,	0.109884654,	0.126966197,	0.138762079,	0.14761486					

İkinci gerçek veri seti için EÇO, Bayes, EKK, AEKK, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri Tablo 4.23’de verilmiştir.

Tablo 4.23. Veri Seti 2 için parametre tahminleri

	EÇO		Bayes		EKK	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	2.8599	37.9621	2.8601	37.9628	2.8553	38.7149
Beta	1.7469	29.5368	1.7476	29.5364	1.7840	30.5768
KW	1.4158	50.8868	1.4160	50.8632	1.4150	50.8867
TL	-	0.3972	-	0.4193	-	0.2855
UW	0.0054	4.1559	4.1546	0.0063	0.0046	4.3551
ULind	-	17.2468	-	17.1543	-	15.1221
	AEKK		AD		CVM	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	2.8616	38.0592	2.8611	38.0174	2.8553	38.7149
Beta	1.7615	29.8980	1.7587	30.2847	1.7840	30.5768
KW	1.4058	50.7784	1.4575	51.8473	1.4158	50.8868
TL	-	0.2845	-	0.2853	-	0.2855
UW	0.0051	4.1921	0.0056	4.1875	0.0046	4.3565
ULind	-	14.9040	-	16.4702	-	15.1221

İkinci gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri değerleri Tablo 4.24’de verilmiştir.

Tablo 4.24. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

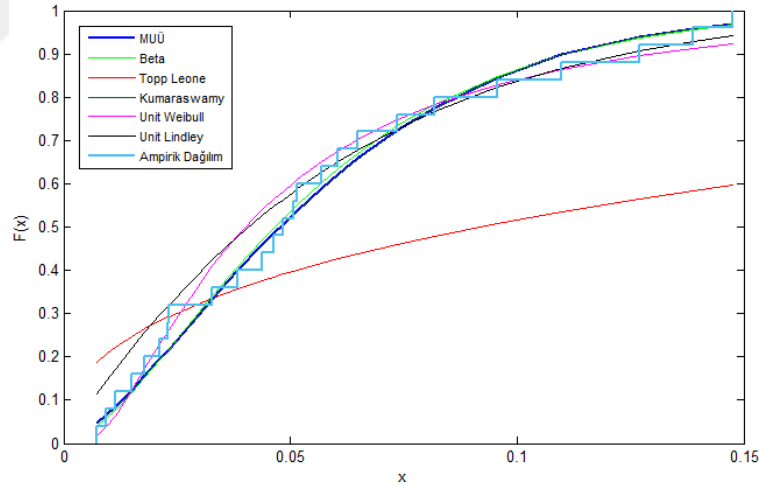
Model	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>CAIC</i>	<i>HQIC</i>	$\hat{\ell}$
MUÜ	-94.6689	-92.2311	-90.2311	-93.9928	49.3344
Beta	-94.8859	-92.8859	-90.4482	-94.2098	49.44298
KW	-94.6843	-92.2465	-90.2465	-94.0082	49.3421
TL	-59.4423	-58.2234	-57.2234	-59.1042	30.7211
UW	-93.1361	-90.6984	-88.6984	-92.4600	48.5608
ULind	-76.7707	-75.5518	-74.5518	-76.4326	39.3853

İkinci gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistiği değerleri Tablo 4.25’de verilmiştir.

Tablo 4.25. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	EÇO		
	KS (p)	AD (p)	CVM (p)
MUÜ	0.1020 (0.9337)	0.2110 (0.9872)	0.0275 (0.9854)
BETA	0.1024 (0.9315)	0.2041 (0.9893)	0.0271 (0.9863)
KW	0.1016 (0.9335)	0.2125 (0.9867)	0.0277 (0.9847)
TL	0.4025 (0.0003)	5.3408 (0.0020)	1.0832 (0.0013)
UW	0.1360 (0.6936)	0.3582 (0.8879)	0.0604 (0.8157)
ULind	0.1272 (0.7671)	0.6149 (0.6323)	0.0913 (0.6329)

Tablo 4.24 ve Tablo 4.25’de görüldüğü üzere, EÇO yönteminde test istatistikleri ve uyum iyiliği ölçüleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 2 için uygun bir modeldir. EÇO yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.27’de verilmiştir.

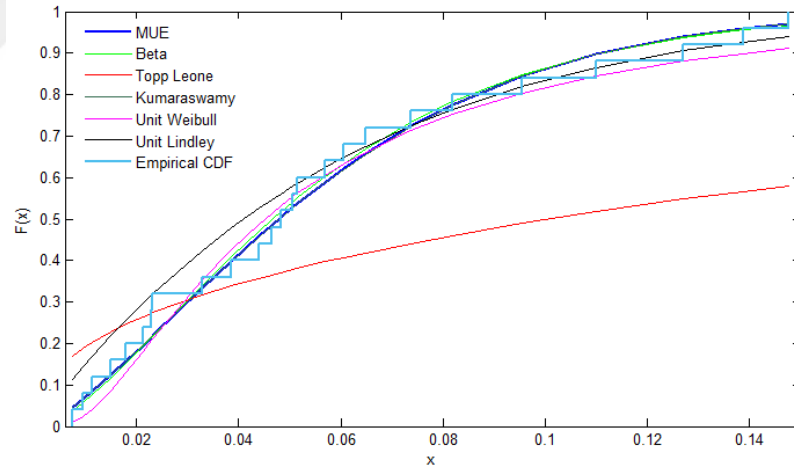
**Şekil 4.27.** EÇO tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

İkinci gerçek veri seti için, Bayes yöntemiyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.26’da verilmiştir.

Tablo 4.26. Veri Seti 2 İçin Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	Bayes		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.1021 (0.9337)	0.2111 (0.9871)	0.0275 (0.9853)
BETA	0.1027 (0.9303)	0.2044 (0.9892)	0.0271 (0.9998)
KW	0.1017 (0.9347)	0.2127 (0.9866)	0.0278 (0.9845)
TL	0.4194 (0.0001)	5.7777 (0.0012)	1.2003 (0.0006)
UW	0.1134 (0.8691)	0.4819 (0.7637)	0.0509 (0.8749)
ULind	0.1304 (0.7409)	0.6025 (0.6126)	0.0885 (0.6079)

Tablo 4.26’da görüldüğü üzere, Bayes yönteminde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 2 için uygun bir modeldir. Bayes yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.28’de verilmiştir.

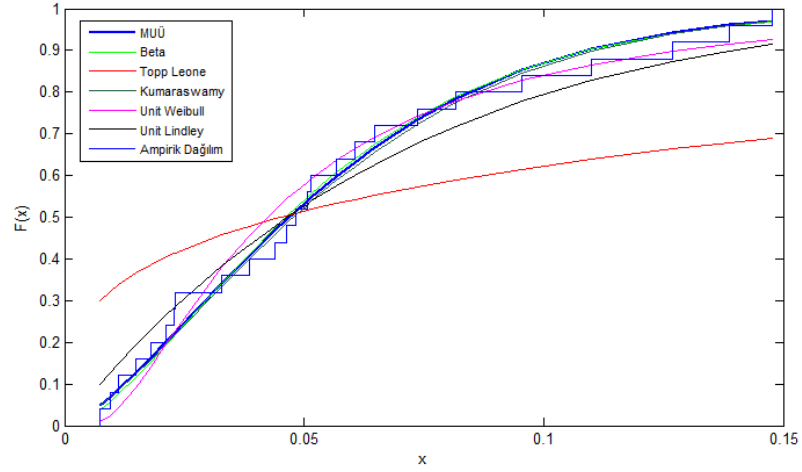
**Şekil 4.28.** Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

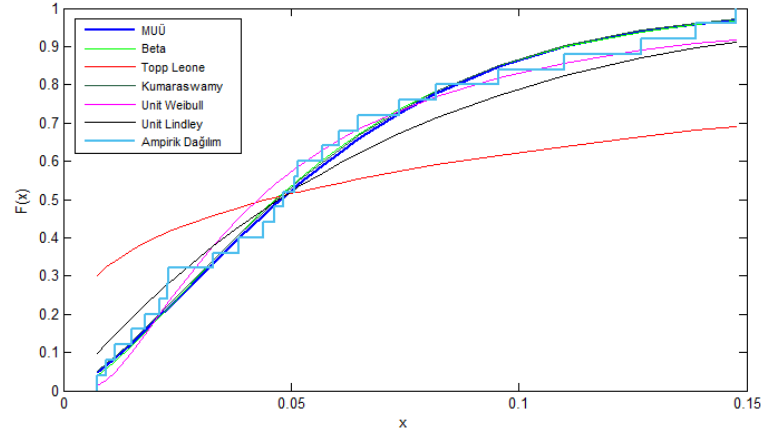
İkinci gerçek veri seti için, EKK ve AEKK yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.27’de verilmiştir.

Tablo 4.27. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri

Model	EKK			AEKK		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.0964 (0.9566)	0.2127 (0.9866)	0.0260 (0.9888)	0.1020 (0.9333)	0.2115 (0.9870)	0.0275 (0.9853)
BETA	0.1025 (0.9312)	0.2203 (0.9830)	0.0286 (0.9823)	0.1029 (0.9292)	0.2095 (0.9877)	0.0276 (0.9850)
KW	0.0745 (0.9358)	0.2124 (0.9867)	0.0277 (0.9848)	0.1015 (0.9358)	0.2124 (0.9867)	0.0277 (0.9848)
TL	0.3094 (0.0126)	4.4420 (0.0055)	0.8128 (0.0062)	0.3085 (0.0130)	4.4249 (0.0055)	0.8139 (0.0062)
UW	0.1159 (0.8522)	0.4192 (0.8281)	0.0526 (0.8645)	0.1427 (0.6366)	0.3810 (0.8661)	0.0677 (0.7701)
ULind	0.0999 (0.9427)	0.5150 (0.7298)	0.0645 (0.7896)	0.0990 (0.9466)	0.5294 (0.7153)	0.0669 (0.7748)

Tablo 4.27’de görüldüğü üzere, EKK ve AEKK yöntemlerinde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 2 için uygun bir modeldir. EKK ve AEKK yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.29 ve Şekil 4.30’da verilmiştir.

**Şekil 4.29.** EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



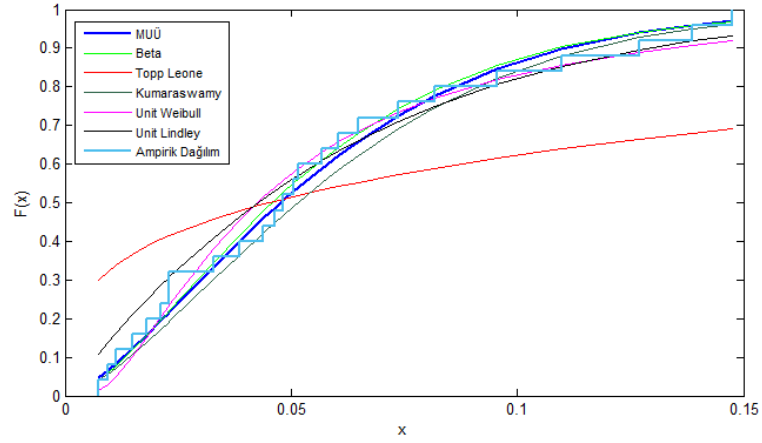
Şekil 4.30. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

İkinci gerçek veri seti için, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.28’de verilmiştir.

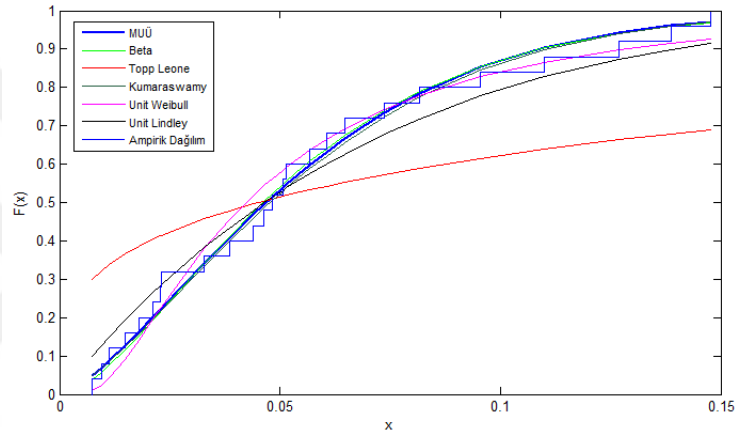
Tablo 4.28. AD ve CVM Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiiliği Testleri

Model	AD			CVM		
	KS (p)	AD (p)	CVM (p)	KS (p)	AD (p)	CVM (p)
MUÜ	0.0927 (0.9457)	0.2117 (0.9871)	0.0270 (0.9853)	0.0964 (0.9566)	0.2127 (0.9866)	0.0260 (0.9888)
BETA	0.1041 (0.9298)	0.2099 (0.9870)	0.0268 (0.9849)	0.1025 (0.9312)	0.2203 (0.9830)	0.0286 (0.9823)
KW	0.1015 (0.9627)	0.2098 (0.9790)	0.0249 (0.9848)	0.0946 (0.9630)	0.2088 (0.9879)	0.0255 (0.9899)
TL	0.3092 (0.0126)	4.4250 (0.0055)	0.8135 (0.0062)	0.3094 (0.0126)	4.4203 (0.0055)	0.8128 (0.0062)
UW	0.1587 (0.6052)	0.3978 (0.8678)	0.0568 (0.7917)	0.1159 (0.8522)	0.4192 (0.8274)	0.0526 (0.8642)
ULind	0.0999 (0.9448)	0.5163 (0.7145)	0.0668 (0.7791)	0.0999 (0.9427)	0.5150 (0.7298)	0.0645 (0.7896)

Tablo 4.28’de görüldüğü üzere, AD ve CVM yöntemlerinde test istatistikleri ve p değerleri göz önünde bulundurulduğunda dağılımımız veri seti 2 için uygun bir modeldir. AD ve CVM yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.31 ve Şekil 4.32’de verilmiştir.



Şekil 4.31. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



Şekil 4.32. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

4.4.3. Üçüncü Gerçek Veri

Üçüncü veri seri, uzun dönemli işsizlik oranını hesaplayan 38 gözlemden oluşmaktadır. Bu veri seri seti Karakaya ve ark. (2022) tarafından <https://stats.oecd.org/> adresinden alınan veriler kullanılarak analiz edilmiştir.

Tablo 4.29. Veri Seti 3

Veri Seti 3												
0.0131,	0.0184,	0.0354,	0.0077,	0.0079,	0.0104,	0.0131,	0.0192,	0.0213,	0.0400,	0.0157,	0.1565,	0.0172,
0.0026,	0.0323,	0.0049,	0.0659,	0.0103,	0.0005,	0.0335,	0.0269,	0.0235,	0.0007,	0.0197,	0.0074,	0.0066,
0.0152,	0.0443,	0.0478,	0.0317,	0.0766,	0.0112,	0.0182,	0.0239,	0.0113,	0.0066,	0.0159,	0.1646	

Üçüncü gerçek veri seti için EÇO, Bayes, EKK, AEKK, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri Tablo 4.30’da verilmiştir.

Tablo 4.30. Veri Seti 3 için parametre tahminleri

	EÇO		Bayes		EKK	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	1.9181	21.8920	1.9057	22.0541	1.9032	22.0421
Beta	0.9798	33.2394	0.9647	34.2572	0.9628	35.4181
KW	0.9406	28.1414	0.9515	28.9954	0.9433	29.7444
TL	-	0.2898	-	0.2024	-	0.2087
UW	3.6134	0.0041	3.6214	0.0045	3.6503	0.0040
ULind	-	33.5000	-	34.2414	-	37.8999
	AEKK		AD		CVM	
Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
MUÜ	1.8825	23.9357	1.9201	21.9074	2.4567	21.2528
Beta	1.0046	33.1888	0.9802	33.2564	0.9628	35.4181
KW	0.9706	29.2581	0.9446	28.9532	0.9433	29.7444
TL	-	0.2081	-	0.2862	-	0.2086
UW	3.7528	0.0040	3.6247	0.0041	3.6503	0.0040
ULind	-	33.5515	-	33.9571	-	37.8999

Üçüncü gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterler değerleri Tablo 4.31’de verilmiştir.

Tablo 4.31. Veri Seti 3 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

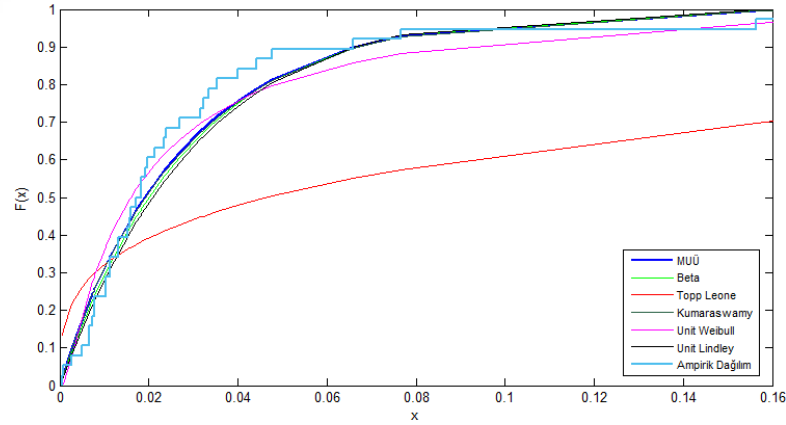
Model	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>CAIC</i>	<i>HQIC</i>	$\hat{\ell}$
MUÜ	-190.7878	-187.5126	-185.5126	-185.5126	97.3939
Beta	-190.0578	-186.7826	-184.7826	-188.8925	97.0288
KW	-190.2959	-187.0207	-185.0207	-189.1306	97.1476
TL	-140.534	-138.8964	-137.8964	-139.9514	71.2670
UW	-188.4059	-185.1307	-183.1307	-187.2406	96.2029
ULind	-178.1922	-176.5546	-175.5546	-177.6096	90.0961

Üçüncü gerçek veri seti için, EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistik değerleri Tablo 4.32’de verilmiştir.

Tablo 4.32. Veri Seti 2 İçin EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	EÇO		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUÜ	0.1166 (0.6792)	0.7842 (0.4916)	0.1228 (0.4859)
BETA	0.1223 (0.6200)	0.8569 (0.4409)	0.1365 (0.4348)
KW	0.1169 (0.6764)	0.8367 (0.4545)	0.1317 (0.4521)
TL	0.3918 (0.0000)	8.4408 (0.0000)	1.7433 (0.0000)
UW	0.1374 (0.4649)	1.0251 (0.3439)	0.1584 (0.3661)
ULind	0.1350 (0.4928)	0.9810 (0.3668)	0.1607 (0.3596)

Tablo 4.31 ve Tablo 4.32’de görüldüğü üzere, EÇO yönteminde tüm dağılımların uyum iyiliği kriterleri ve test istatistiği değerleri göz önüne alındığında veri setini en iyi modelleyen dağılımın MUÜ dağılımı olduğu sonucuna varılmıştır. EÇO yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.33’de verilmiştir.

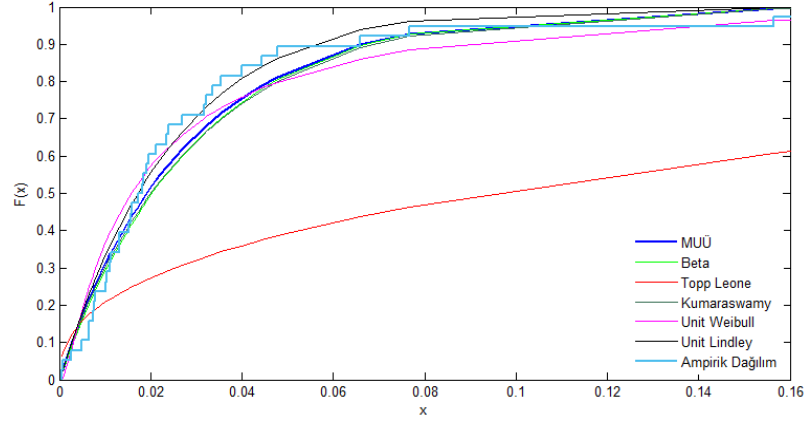
**Şekil 4.33.** EÇO tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

Üçüncü gerçek veri seti için, Bayes yöntemiyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.33’de verilmiştir.

Tablo 4.33. Veri Seti 3 İçin Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	Bayes		
	KS (<i>p</i>)	AD (<i>p</i>)	CVM (<i>p</i>)
MUİ	0.1144 (0.7020)	0.7630 (0.5075)	0.1141 (0.5219)
BETA	0.1192 (0.6523)	0.8607 (0.4385)	0.1368 (0.4337)
KW	0.1242 (0.6008)	0.9067 (0.4094)	0.1519 (0.3851)
TL	0.5090 (0.0000)	14.6690 (0.0000)	3.2425 (0.0000)
UW	0.1426 (0.4216)	1.0525 (0.3304)	0.1664 (0.3441)
ULind	0.1262 (0.5822)	0.8271 (0.4610)	0.1225 (0.4871)

Tablo 4.33’de görüldüğü üzere, Bayes yönteminde tüm dağılımların uyum test istatistiği ve *p* değerleri göz önüne alındığında veri setini en iyi modelleyen dağılımın MUİ dağılımı olduğu sonucuna varılmıştır. Bayes yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği şekil 4.34’de verilmiştir.

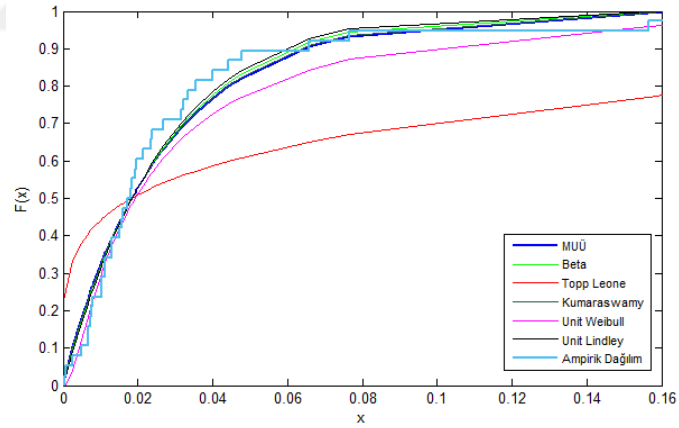
**şekil 4.34.** Bayes tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

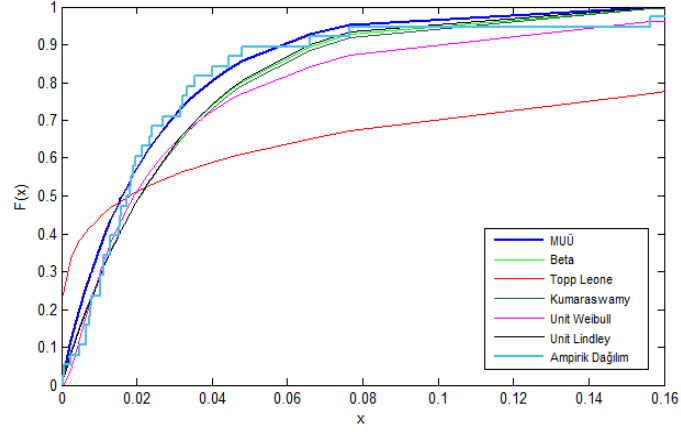
nc gerçek veri seti için, EKK ve AEKK yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.34’de verilmiştir.

Tablo 4.34. EKK ve AEKK Yöntemleri Kullanılarak Uyum İyiliği İstatistikleri

Model	EKK			AEKK		
	KS (p)	AD (p)	CVM (p)	KS (p)	AD (p)	CVM (p)
MUÜ	0.0926 (0.8998)	0.6922 (0.5643)	0.0528 (0.8619)	0.11629 (0.6830)	0.8429 (0.4502)	0.0923 (0.6261)
BETA	0.1191 (0.6533)	0.7478 (0.5192)	0.0987 (0.5935)	0.1344 (0.4984)	0.9489 (0.3846)	0.1615 (0.3575)
KW	0.1252 (0.5902)	0.7845 (0.4914)	0.1134 (0.5248)	0.1377 (0.4671)	1.0087 (0.3522)	0.1788 (0.3135)
TL	0.3016 (0.0019)	7.0081 (0.0003)	1.3331 (0.0003)	0.3070 (0.0015)	6.9704 (0.0003)	1.3293 (0.0003)
UW	0.1220 (0.6234)	0.9576 (0.3797)	0.1373 (0.4311)	0.1265 (0.5765)	1.096 (0.3102)	0.1461 (0.4029)
ULind	0.1223 (0.7240)	0.7510 (0.5167)	0.0843 (0.6696)	0.1344 (0.4982)	0.9753 (0.3699)	0.1592 (0.3639)

Tablo 4.34’de görüldüğü üzere, EKK ve AEKK yöntemlerinde tüm dağılımların test istatistiği ve p değerleri göz önüne alındığında veri setini en iyi modelleyen dağılımın MUÜ dağılımı olduğu sonucuna varılmıştır. EKK ve AEKK yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.35 ve 4.36’da verilmiştir.

**Şekil 4.35.** EKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



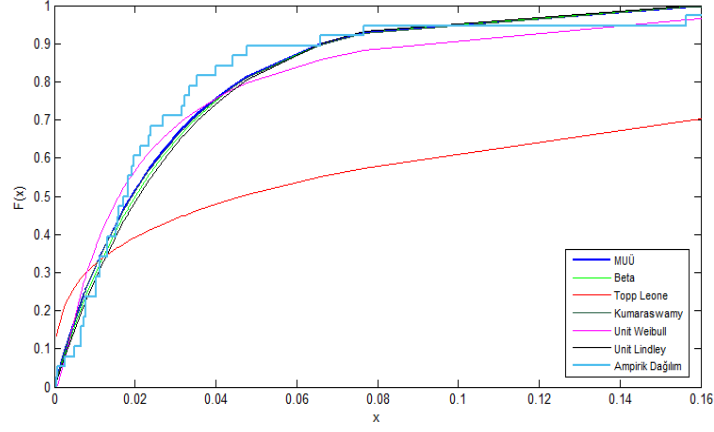
Şekil 4.36. AEKK tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

Üçüncü gerçek veri seti için, AD ve CVM yöntemleriyle elde edilen uyum istatistiği değerleri Tablo 4.35’de verilmiştir.

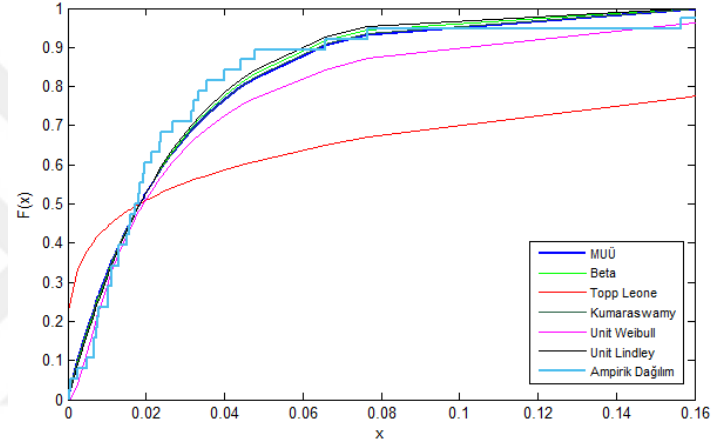
Tablo 4.35. AD ve CVM Yöntemlerini Kullanılarak Uyum İyiliği Testleri

Model	AD			CVM		
	KS (p)	AD (p)	CVM (p)	KS (p)	AD (p)	CVM (p)
MUÜ	0.01032 (0.7034)	0.8128 (0.4409)	0.0931 (0.6124)	0.0933 (0.8949)	0.6613 (0.5909)	0.0536 (0.8569)
BETA	0.1341 (0.4984)	0.6341 (0.3941)	0.1597 (0.3789)	0.1191 (0.6533)	0.7478 (0.5192)	0.0987 (0.5935)
KW	0.1258 (0.6011)	0.3578 (0.3220)	0.1250 (0.5205)	0.1252 (0.5902)	0.7845 (0.4914)	0.1134 (0.5248)
TL	0.3042 (0.0017)	7.0087 (0.0003)	1.3258 (0.0003)	0.3016 (0.0019)	7.0081 (0.0003)	1.1331 (0.0003)
UW	0.1232 (0.6008)	0.9914 (0.3043)	0.1462 (0.4054)	0.1220 (0.6234)	0.9576 (0.3797)	0.1376 (0.4311)
ULind	0.1268 (0.5292)	0.8647 (0.3949)	0.1278 (0.3374)	0.1223 (0.7240)	0.7510 (0.5167)	0.0843 (0.6696)

Tablo 4.35’de görüldüğü üzere, AD ve CVM yöntemlerinde tüm dağılımların test istatistiği ve p değerleri göz önüne alındığında veri setini en iyi modelleyen dağılımın MUÜ dağılımı olduğu sonucuna varılmıştır. AD ve CVM yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlara göre kıyaslanan dağılımların ve ampirik dağılımın grafiği Şekil 4.37 ve 4.38’de verilmiştir.



Şekil 4.37. AD tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar



Şekil 4.38. CVM tahminine göre Ampirik ve Kıyaslanan Dağılımlar

Yapılan analizler sonucunda dağılımımızın, ilk iki veri seti için diğer dağılımlarla yakın sonuçlar verdiği ancak üçüncü veri seti için diğer dağılımlara kıyasla en iyi model olduğu tespit edilmiştir. Dolayısıyla MUÜ modelimizin çeşitli gerçek veri kümelerinin modellemesinde kullanılabileceğini söyleyebiliriz. Önerilen yeni modelin farklı alanlarda, özellikle artan tehlike oranına sahip dağılımlara dayalı veri setlerini içeren durumlarda faydalı olması beklenmektedir.

5. ARŞİMEDYEN KAPULALARI KULLANILARAK YENİ İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde önerdiğimiz modifiyeli unit üstel dağılımı ve Arşimedyen kapulaları kullanarak yeni iki değişkenli ve üç parametrelili dağılımları önereceğiz.

Denklem (4.1)'deki modifiyeli unit üstel dağılımı kullanılarak denklem (3.1) ve denklem (3.2)'da ki Sklar Teoremi uygulanarak herhangi bir kapula için iki değişkenli modifiyeli unit üstel dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(x, y) = C \left(\left[1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right], \left[1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right] \right) \quad (5.1)$$

$$f(x, y) = \left(\frac{\beta \alpha x^{(\alpha_1-1)} \exp(-\beta_1 (\operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})))}{\sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}}} \times \frac{\beta \alpha y^{(\alpha_2-1)} \exp(-\beta_2 (\operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))}{\sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}}} \right) \times c \left(\left[1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right], \left[1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right] \right) \quad (5.2)$$

Önerdiğimiz dağılımlara ilişkin dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve hazard fonksiyonu kapalı formlar şeklinde üretilecektir. Model parametrelerinin tahmini için En çok olabilirlik ve Bayes yöntemlerine dayalı iki farklı tahmin edici sunulmuş ve performanslarını göstermek için Monte Carlo ve MZMC simülasyon çalışması yapılacaktır. Simülasyon çalışmamızda ortak dağılımlardan rasgele değişken üretmek için Nelsen (2006) tarafından önerilen koşullu dağılım yöntemi kullanılacaktır, $c_u(v)$ ile gösterilen $U = u$ bilinirken V için koşullu dağılım aşağıdaki şekildedir.

$$c_u(v) = P[V \leq v | U = u] = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

$c_u(v)$ hesaplandıktan sonra algoritmaya geçilir;

Algoritma:

- 1- Bağımsız tek tip (0,1) aralığında u ve t değişkenleri üretilir.
- 2- $v = c_u^{-1}(t)$ olacak şekilde v üretilir.

3- MUÜ dağılımının Denklem (4.1)'deki dağılım fonksiyonunun tersi alınarak;

$$x = F^{-1}(x, \beta_1, \alpha_1) = \left(1 - \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\beta_1} \ln(1-u) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$y = F^{-1}(v, \beta_2, \alpha_2) = \left(1 - \operatorname{sech} \left(\frac{1}{\beta_2} \ln(1-v) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \text{ şeklinde } x \text{ ve } y \text{ üretilir.}$$

Simülasyon çalışmamızdan sonra gerçek veri setleri üzerine uygulama yapıp Arşimedyen kapulalarına kıyasla performanslarını göstermek için kullanacağımız tahmin edicilerin uyum iyiliği istatistik değerleri karşılaştırılarak sunulacaktır.

5.1. İki Değişkenli Clayton Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı

Denklem (5.1) ve denklem (5.2) ile denklem (3.13)'deki Clayton kapulasına dayalı iki değişkenli Clayton modifiyeli unit üstel (Clayton-MUÜ) dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu;

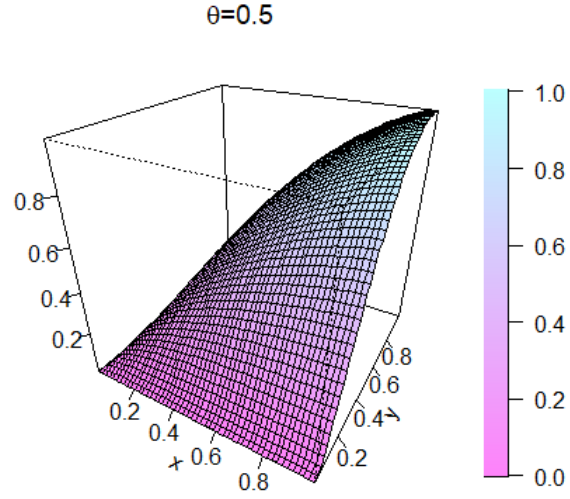
$$F_C(x, y) = \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^{-\theta} + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^{-\theta} - 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (5.4)'de verilmiştir.

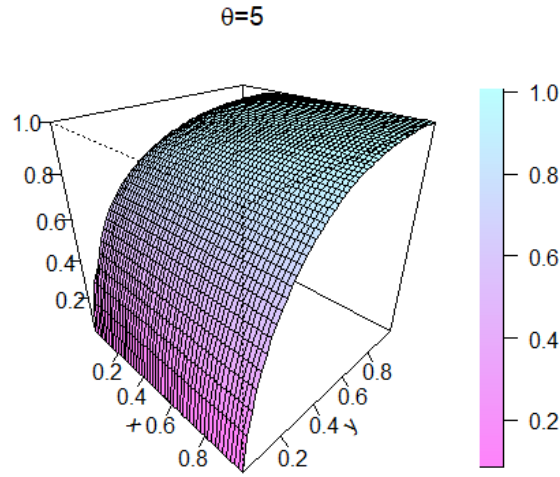
$$f_C(x, y) = \frac{\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x^{(\alpha_1-1)} y^{(\alpha_2-1)} (\theta+1) (1-A)(1-B) \{AB\}^{(\theta-1)} \{A^{-\theta} + B^{-\theta} - 1\}^{\left(\frac{-2\theta-1}{\theta}\right)}}{\sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}} \sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}}} \quad (5.4)$$

Burada $A = (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})))$ ve $B = (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))$ şeklindedir.

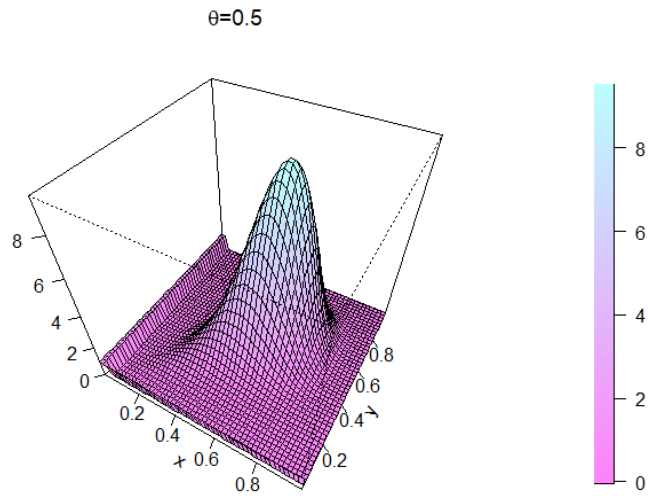
Elde edilen yeni dağılıma ilişkin denklem (5.3)'de verilen dağılım fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.1 ve 5.2'de ve denklem (5.4)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.3, 5.4 ve 5.5'de verilmiştir.



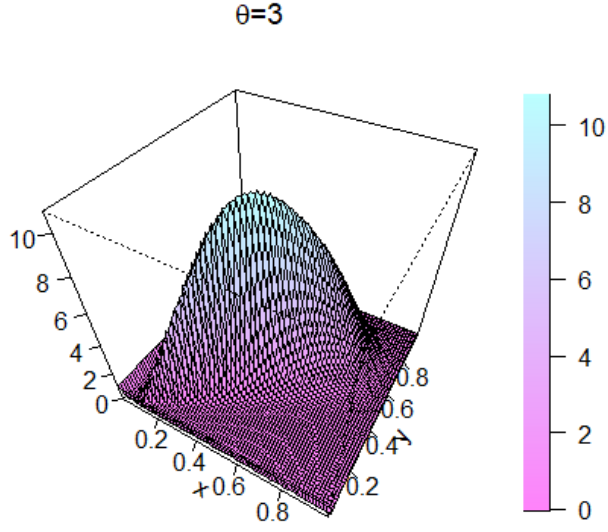
Şekil 5.1. $\beta_1=1.5$, $\beta_2=3$, $\alpha_1=2$ ve $\alpha_2=3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının df'si



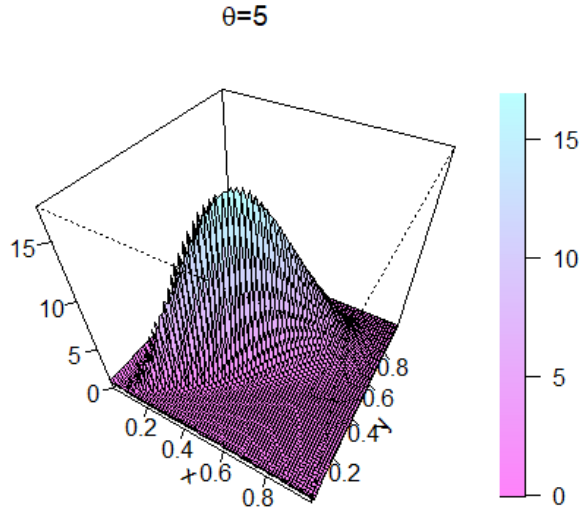
Şekil 5.2. $\beta_1=3.5$, $\beta_2=2.5$, $\alpha_1=0.5$ ve $\alpha_2=1.5$ iken Clayton-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.3. $\beta_1=8$, $\beta_2=7$, $\alpha_1=10$ ve $\alpha_2=9$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si



Şekil 5.4. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si



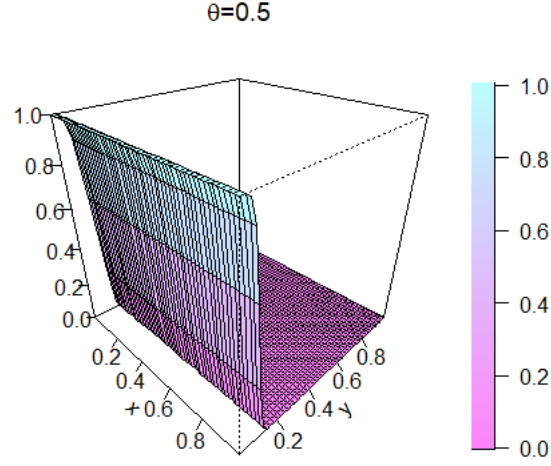
Şekil 5.5. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının oyf'si

Clayton-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırası ile;

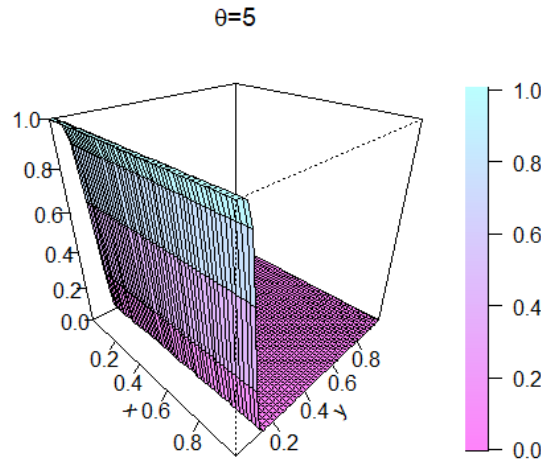
$$S_C(x, y) = 1 - \left[\frac{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))\right)^{-\theta} + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1}{\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1} \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (5.5)$$

$$h_C(x, y) = \frac{f_C(x, y)}{\left(1 - \left[\frac{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))\right)^{-\theta} + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1}{\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)} \quad (5.6)$$

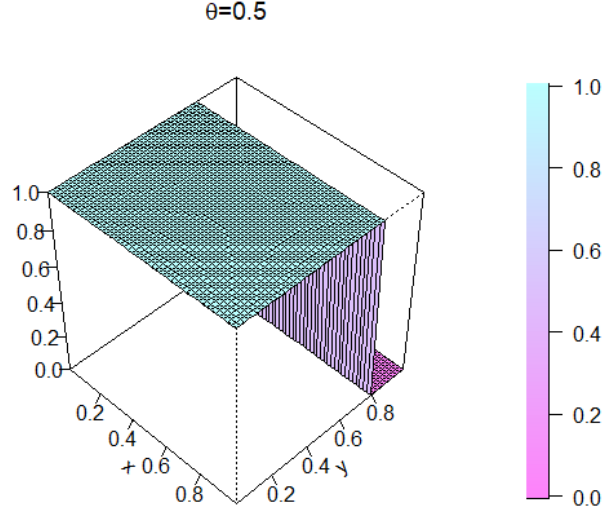
Yeni dağılıma ilişkin denklem (5.5)'de verilen yaşam fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.6 ve 5.7'de ve denklem (5.6)'da verilen hazard fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.8-5.9'da verilmiştir.



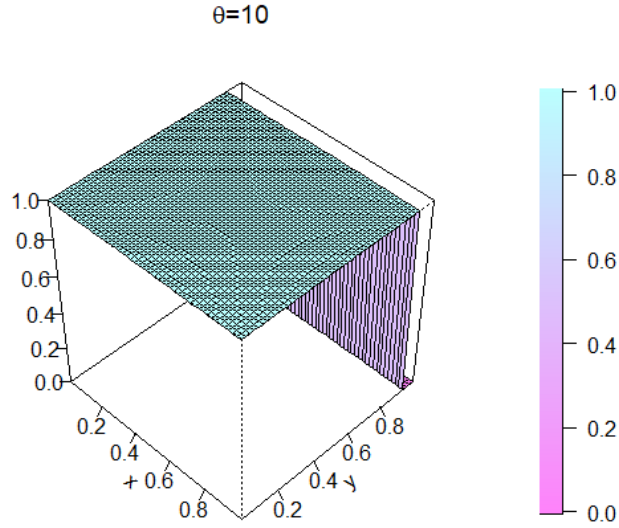
Şekil 5.6. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MU dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.7. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Clayton-MU dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.8. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Clayton-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu



Şekil 5.9. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Clayton-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 5.2-5.9'a göre Clayton-MUÜ dağılımı, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olmakla birlikte, özellikle kuvvet tehlike oranına sahip uygulamalarda kullanılmaya uygun olabileceği düşünülmektedir.

5.1.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde Clayton-MUÜ dağılımının bilinmeyen $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametrelerini tahmin etmek için iki farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; En çok olabilirlik yöntemi ve Bayes çıkarımıdır.

5.1.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Clayton-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, örnekleme ait $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametreleri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
 L(\Theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x_i^{(\alpha_1-1)} y_i^{(\alpha_2-1)} (\theta+1) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))) \times}{\left\{ \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right) \right\}^{(\theta-1)} \times} \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right)^{-\theta} + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1 \right\}^{\left(\frac{-2\theta-1}{\theta}\right)} \times \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{2-3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}} \sqrt{2-3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}}} \right\} \\
 &= \beta_1^n \alpha_1^n \beta_2^n \alpha_2^n \exp \left\{ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} (\theta+1)^n \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\beta_1 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ (\theta-1) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right) \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ \left(\frac{-2\theta-1}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right)^{-\theta} \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2-3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2-3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 \ell(\Theta) &= n \log(\beta_1) + n \log(\alpha_1) + n \log(\beta_2) + n \log(\alpha_2) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\
 &\quad (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) + n \log(\theta+1) - \sum_{i=1}^n (\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) - \sum_{i=1}^n (\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\
 &\quad + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{-2\theta-1}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))\right)^{-\theta} + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))\right)^{-\theta} - 1 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2-3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2-3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2})
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 5.9-5.13’de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_1} &= \frac{n}{\beta_1} - \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) + \\ &(\theta - 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))}{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right] + \\ &(2\theta + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{\theta-1} \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_2} &= \frac{n}{\beta_2} - \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) + \\ &(\theta - 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))}{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right] + \\ &(2\theta + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{\theta-1} \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}}} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\ &(\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \times}{1 / \left[(1 - x_i^{\alpha_1})^2 \sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \times \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. \left\{ (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right\} \right] \right] + \\ &(-2\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{\theta-1} \times}{1 / \left[(1 - x_i^{\alpha_1})^2 \sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \times \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. \left\{ (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1 \right\} \right] \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_1} \log(x_i) - 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2x_i^{2\alpha_1}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3x_i^{\alpha_1} \log(x_i) + 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i)}{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_2} &= \frac{n}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}}} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) + \\
&(\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{1 / \left[(1 - y_i^{\alpha_2})^2 \sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \times \right.} \right] + \\
&\left. \left. \left\{ (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right\} \right] \right] + \\
&(-2\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(x_i) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{\theta-1} \times}{1 / \left[(1 - y_i^{\alpha_2})^2 \sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \times \right.} \right] \right] \\
&\left. \left. \left\{ (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1 \right\} \right] \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha_2} \log(y_i^{\alpha_2}) - 2 y_i^{2\alpha_2} \log(y_i^{\alpha_2})}{y_i^{\alpha_2} - 2 y_i^{2\alpha_2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) + 2 y_i^{2\alpha_2} \log(y_i)}{2 - 3 y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \log \left[(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right] \\
&\frac{2 \sum_{i=1}^n \log \left[(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1 \right]}{\theta} \\
&- \frac{(-2\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1 \right]}{\theta^2} \\
&+ \frac{(-2\theta - 1)}{\theta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left((1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) - \right.}{\left. (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1} \right.} \\
&\left. \frac{(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))}{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^{-\theta} + (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^{-\theta} - 1} \right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözülemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.1.1.2. Bayes Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Clayton-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, Clayton-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall \alpha_2 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_2 \in (0, \infty)$ ve $\forall \theta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta_1 \sim \text{Gamma}(c, d)$, $\alpha_2 \sim \text{Gamma}(e, s)$, $\beta_2 \sim \text{Gamma}(g, h)$, $\theta \sim \text{Gamma}(z, l)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\Theta) = \alpha_1^{a-1} \exp(-b\alpha_1) \beta_1^{c-1} \exp(-d\beta_1) \alpha_2^{e-1} \exp(-s\alpha_2) \beta_2^{g-1} \exp(-h\beta_2) \theta^{z-1} \exp(-l\theta) \quad (5.14)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.14)'de verilen Önsel dağılım ve denklem (5.7)'de verilen örneklem olabirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | x, y) = \frac{\beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{z-1} \exp(-l\theta) (\theta+1)^n T}{\int_{\beta_1=0}^{\infty} \int_{\alpha_1=0}^{\infty} \int_{\beta_2=0}^{\infty} \int_{\alpha_2=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\infty} \beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{z-1} \exp(-l\theta) (\theta+1)^n T d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2 d\theta} \quad (5.15)$$

Burada

$$\begin{aligned} T = & \exp \left\{ \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - s \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\beta_1 \left[d + \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \right] \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \left[h + \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \right] \right\} \times \\ & \exp \left\{ (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right\} \times \\ & \exp \left\{ \left(\frac{-2\theta - 1}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^{-\theta} \left(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^{-\theta} \right] \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \end{aligned}$$

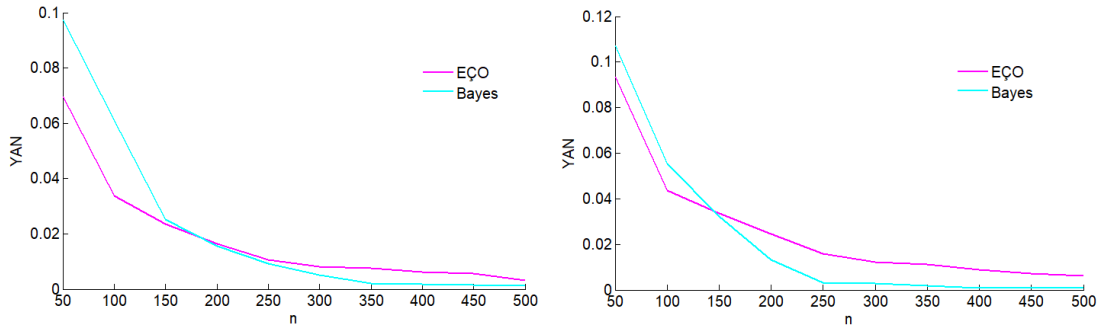
şeklindedir. Denklem (5.15)'deki sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülemediği için R programında Metropolis-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.1.2. Simülasyon Çalışması

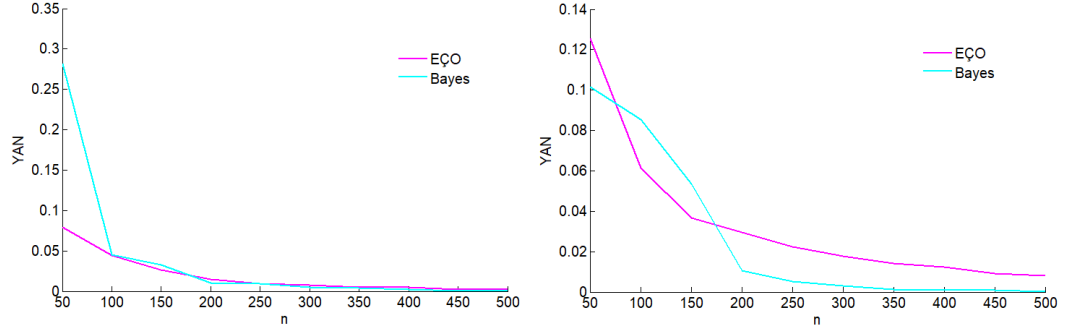
Bu bölümde, Clayton-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin HKO ve yan kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemleri R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$ ve θ parametreleri için Tablo 5.1-5.6’da verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.1. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

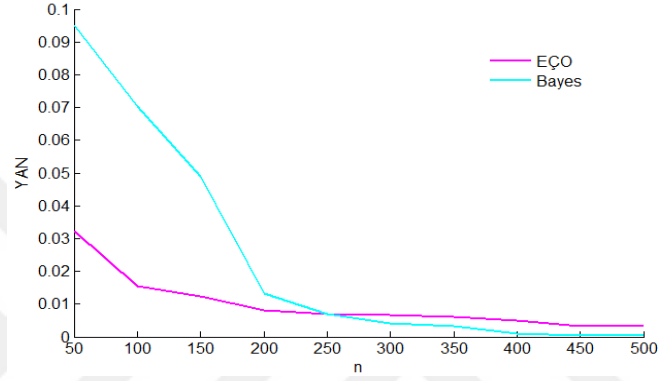
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0694	0.0932	0.0794	0.1255	0.0322	0.0974	0.1071	0.2817	0.1015	0.0909
100	0.0336	0.0437	0.0443	0.0615	0.0154	0.0609	0.0551	0.0447	0.0954	0.0702
150	0.0236	0.0334	0.0267	0.0366	0.0123	0.0251	0.0524	0.0323	0.0735	0.0691
200	0.0164	0.0244	0.0214	0.0294	0.0082	0.0256	0.0432	0.0100	0.0104	0.0132
250	0.0107	0.0157	0.0136	0.0225	0.0068	0.0092	0.0032	0.0094	0.0101	0.0069
300	0.0082	0.0122	0.0099	0.0177	0.0068	0.0081	0.0029	0.0047	0.0061	0.0040
350	0.0074	0.0111	0.0082	0.0139	0.0061	0.0019	0.0019	0.0040	0.0012	0.0032
400	0.0062	0.0088	0.0079	0.0124	0.0050	0.0018	0.0009	0.0018	0.0009	0.0010
450	0.0056	0.0071	0.0061	0.0091	0.0033	0.0013	0.0008	0.0003	0.0008	0.0005
500	0.0032	0.0062	0.0059	0.0080	0.0031	0.0012	0.0007	0.0001	0.0007	0.0004



Şekil 5.10. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



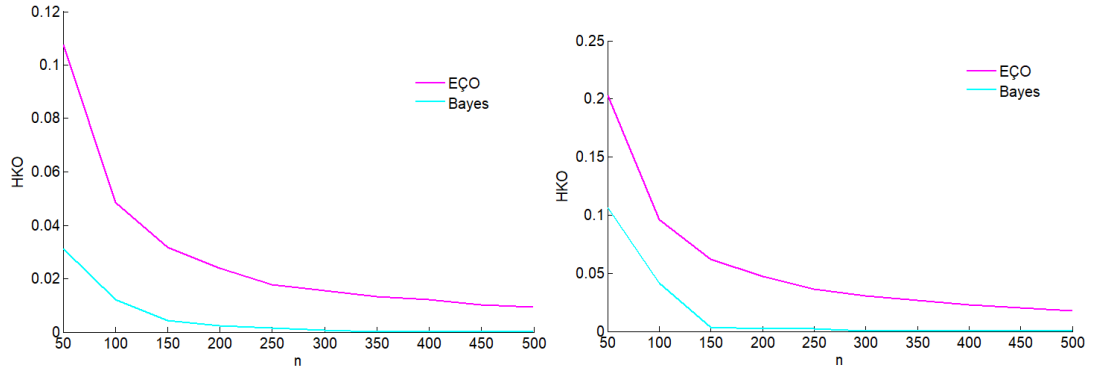
Şekil 5.11. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



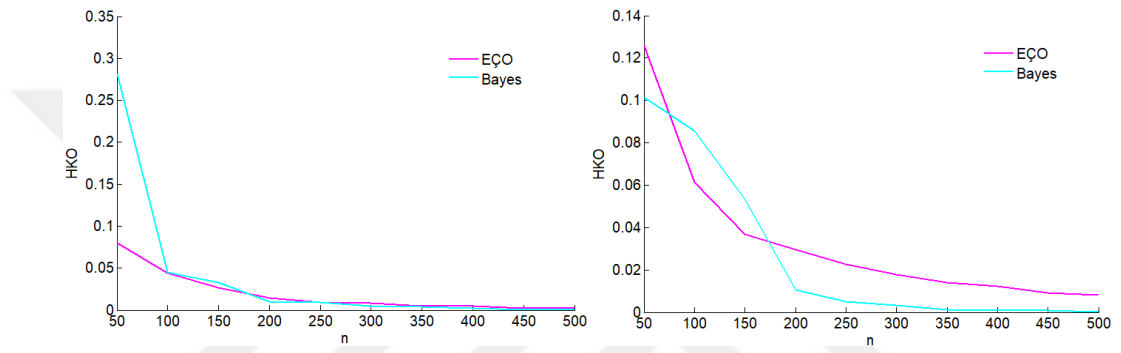
Şekil 5.12. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.2. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

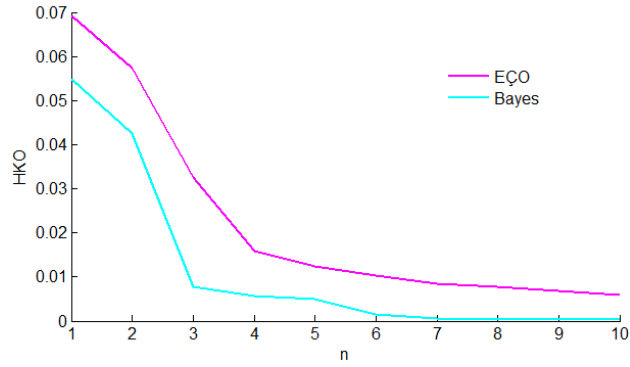
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.1074	0.2030	0.1105	0.2337	0.0691	0.0312	0.1060	0.1016	0.1041	0.0548
100	0.0486	0.0963	0.0480	0.0955	0.0574	0.0120	0.0415	0.0381	0.0715	0.0426
150	0.0318	0.0621	0.0294	0.0294	0.0325	0.0042	0.0033	0.0059	0.0013	0.0078
200	0.0238	0.0474	0.0216	0.0434	0.0159	0.0023	0.0021	0.0024	0.0099	0.0055
250	0.0176	0.0362	0.0165	0.0343	0.0123	0.0018	0.0020	0.0024	0.0077	0.0049
300	0.0154	0.0304	0.0138	0.0280	0.0104	0.0011	0.0014	0.0015	0.0038	0.0016
350	0.0132	0.0264	0.0121	0.0233	0.0084	0.0007	0.0012	0.0003	0.0024	0.0005
400	0.0120	0.0229	0.0105	0.0202	0.0078	0.0004	0.0006	0.0001	0.0022	0.0003
450	0.0102	0.0203	0.0090	0.0185	0.0068	0.0004	0.0004	0.0001	0.0014	0.0003
500	0.0093	0.0179	0.0085	0.0158	0.0059	0.0002	0.0003	0.0001	0.0007	0.0003



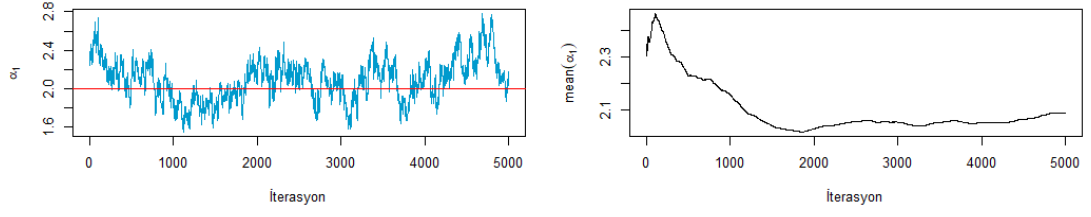
Şekil 5.13. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



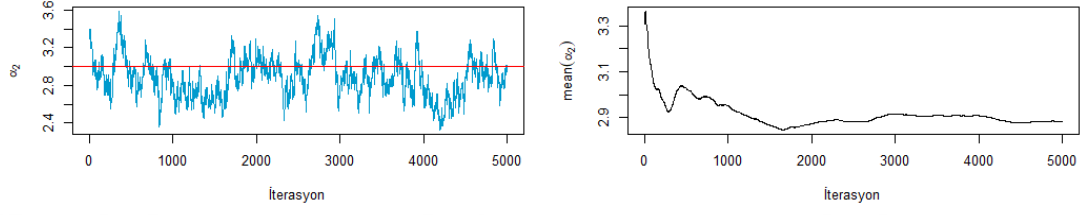
Şekil 5.14. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



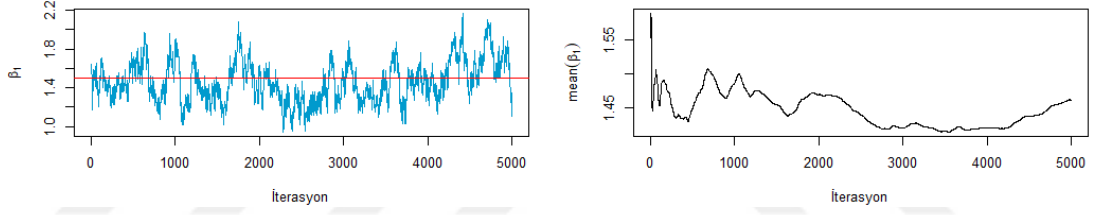
Şekil 5.15. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için HKO



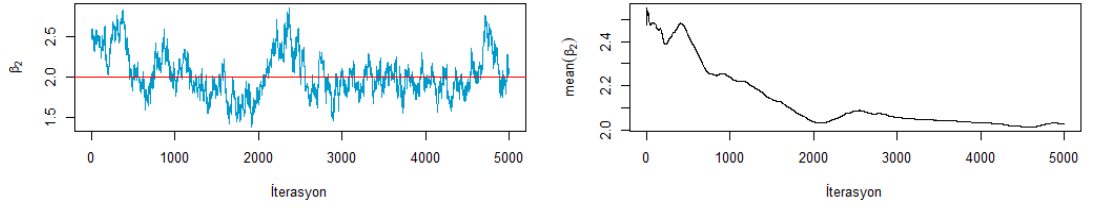
Şekil 5.16. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



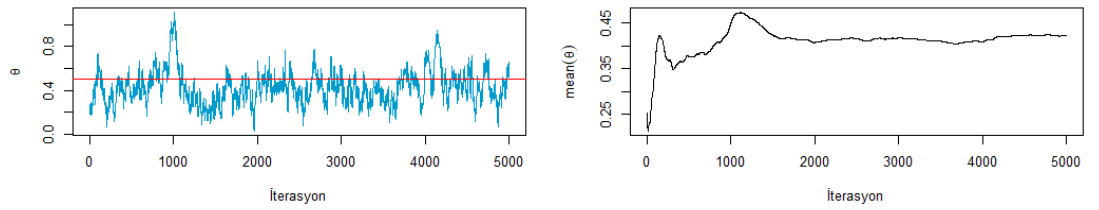
Şekil 5.17. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.18. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



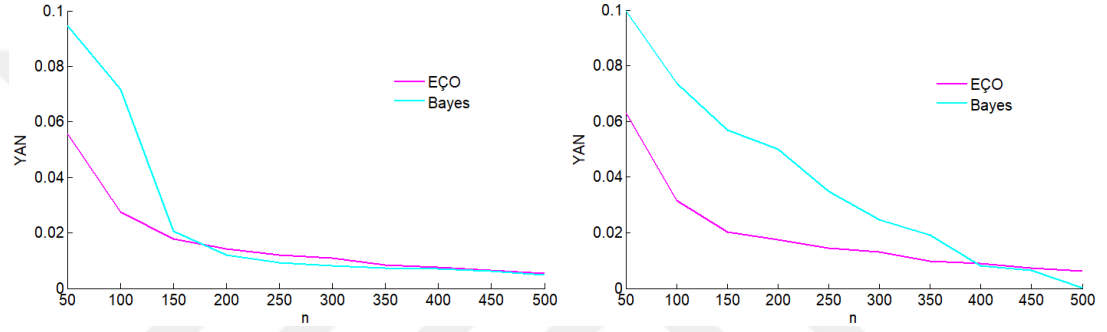
Şekil 5.19. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



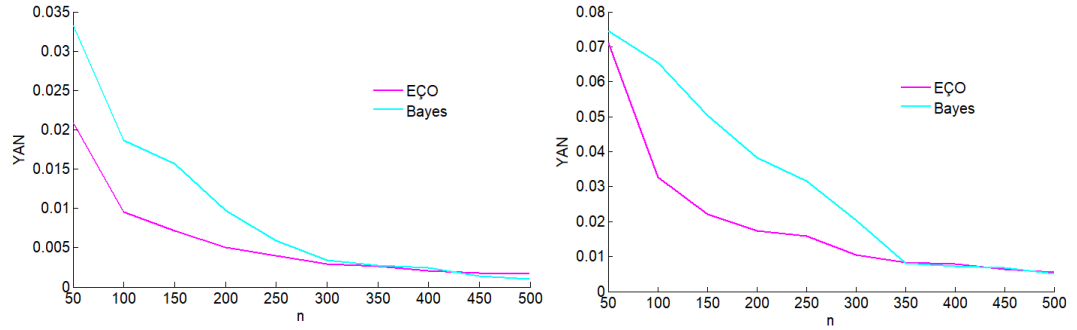
Şekil 5.20. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.3. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

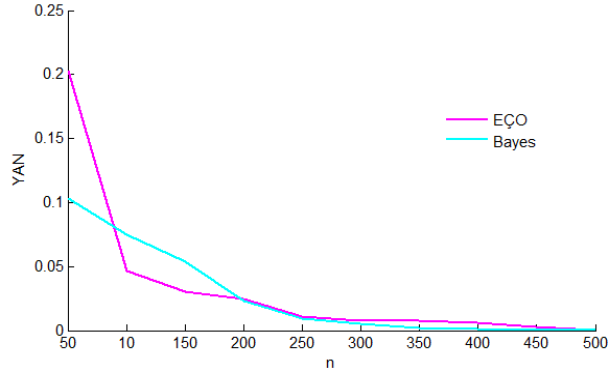
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0556	0.0629	0.0208	0.0709	0.2029	0.0947	0.0969	0.0332	0.0745	0.1029
100	0.0275	0.0315	0.0095	0.0327	0.0468	0.0717	0.0735	0.0186	0.0655	0.0756
150	0.0178	0.0203	0.0071	0.0220	0.0301	0.0204	0.0567	0.0156	0.0604	0.0540
200	0.0141	0.0174	0.0050	0.0174	0.0247	0.0118	0.0500	0.0047	0.0582	0.0228
250	0.0118	0.0145	0.0040	0.0158	0.0111	0.0093	0.0449	0.0039	0.0115	0.0094
300	0.0109	0.0131	0.0029	0.0104	0.0075	0.0081	0.0246	0.0037	0.0104	0.0049
350	0.0083	0.0098	0.0026	0.0082	0.0073	0.0072	0.0191	0.0027	0.0096	0.0022
400	0.0076	0.0090	0.0021	0.0078	0.0058	0.0069	0.0081	0.0024	0.0082	0.0014
450	0.0063	0.0072	0.0017	0.0063	0.0026	0.0061	0.0066	0.0015	0.0078	0.0007
500	0.0053	0.0061	0.0016	0.0055	0.0006	0.0048	0.0001	0.0010	0.0051	0.0002



Şekil 5.21. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



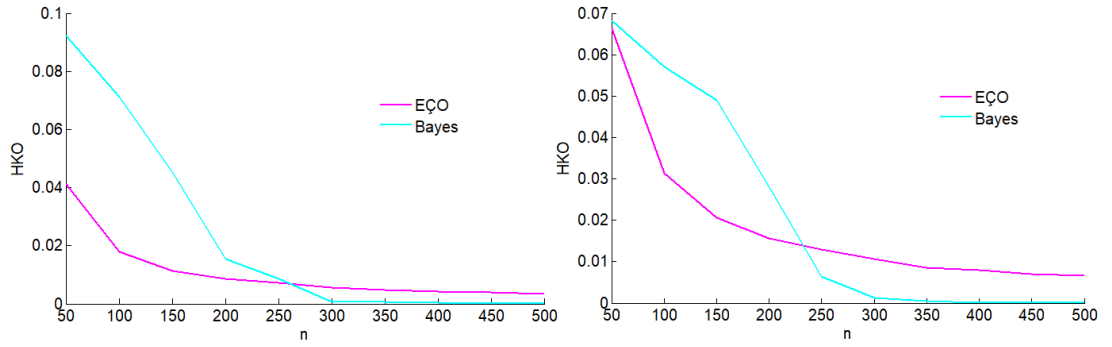
Şekil 5.22. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



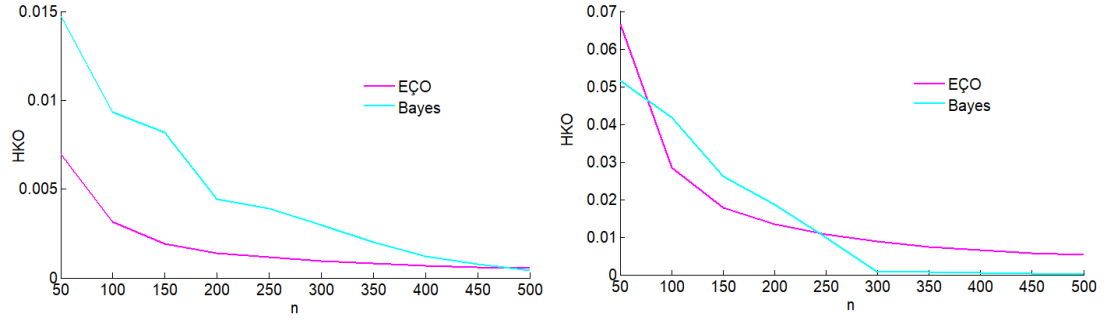
Şekil 5.23. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.4. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

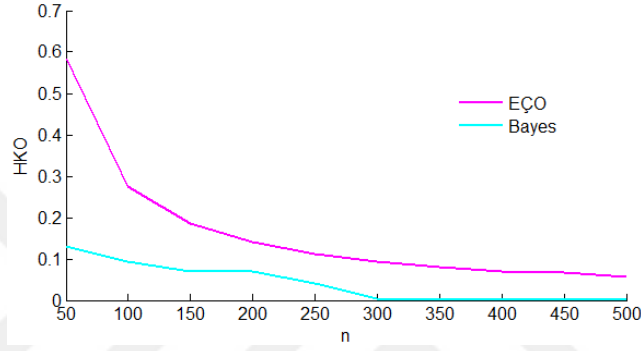
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0411	0.0661	0.0069	0.0665	0.5826	0.0923	0.0681	0.0147	0.0516	0.1312
100	0.0178	0.0313	0.0031	0.0284	0.2740	0.0511	0.0571	0.0093	0.0417	0.0936
150	0.0113	0.0205	0.0019	0.0177	0.1858	0.0453	0.0490	0.0081	0.0261	0.0694
200	0.0085	0.0156	0.0014	0.0133	0.1416	0.0153	0.0281	0.0044	0.0187	0.0689
250	0.0072	0.0128	0.0011	0.0107	0.1119	0.0117	0.0063	0.0039	0.0168	0.0415
300	0.0057	0.0105	0.0009	0.0089	0.0931	0.0006	0.0013	0.0038	0.0007	0.0026
350	0.0047	0.0086	0.0008	0.0074	0.0803	0.0005	0.0011	0.0029	0.0006	0.0013
400	0.0042	0.0080	0.0006	0.0065	0.0709	0.0004	0.0007	0.0012	0.0005	0.0002
450	0.0039	0.0070	0.0006	0.0056	0.0669	0.0004	0.0005	0.0007	0.0002	0.0002
500	0.0035	0.0065	0.0005	0.0053	0.0569	0.0002	0.0001	0.0004	0.0001	0.0001



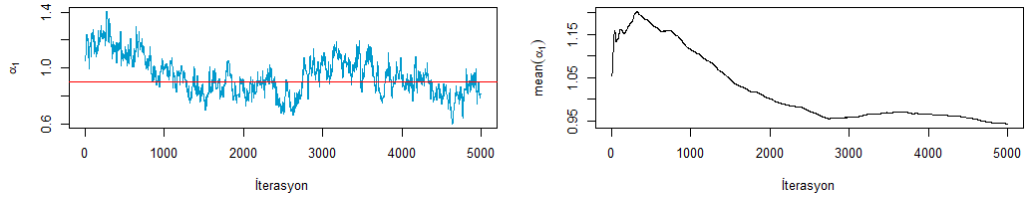
Şekil 5.24. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



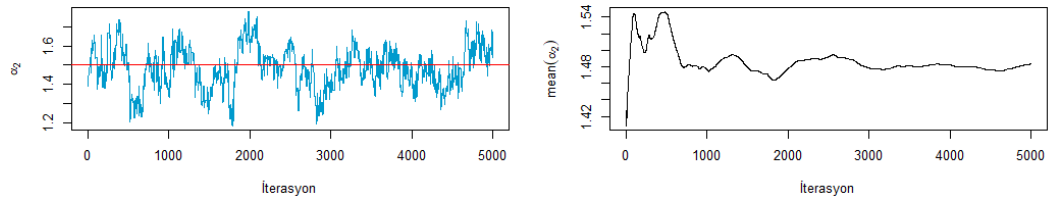
Şekil 5.25. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



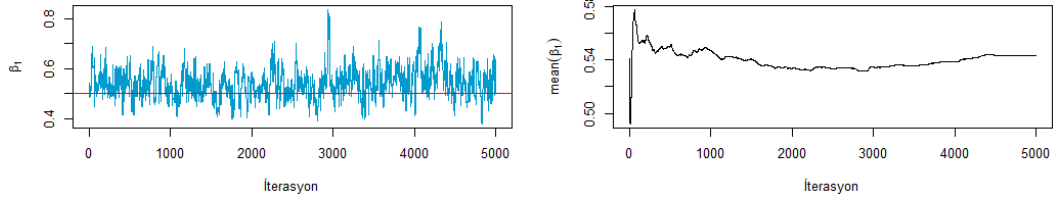
Şekil 5.26. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için HKO



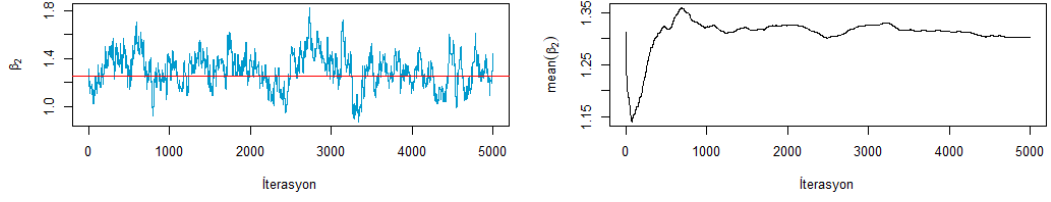
Şekil 5.27. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



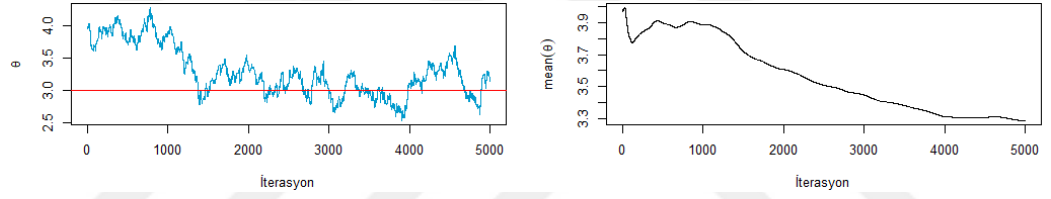
Şekil 5.28. ($\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.29. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



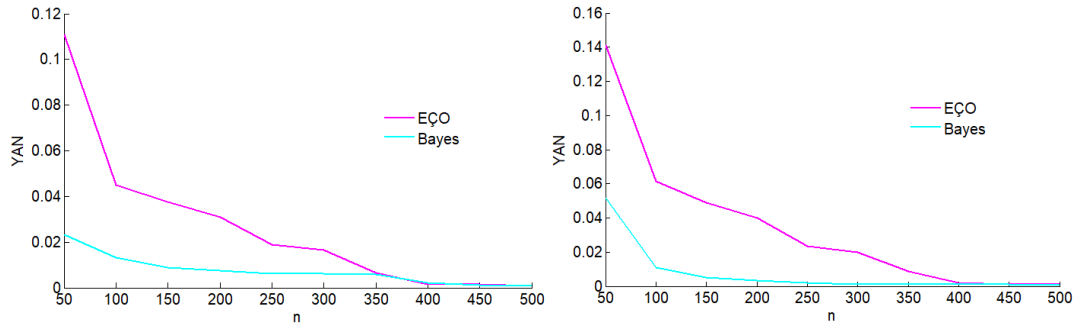
Şekil 5.30. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



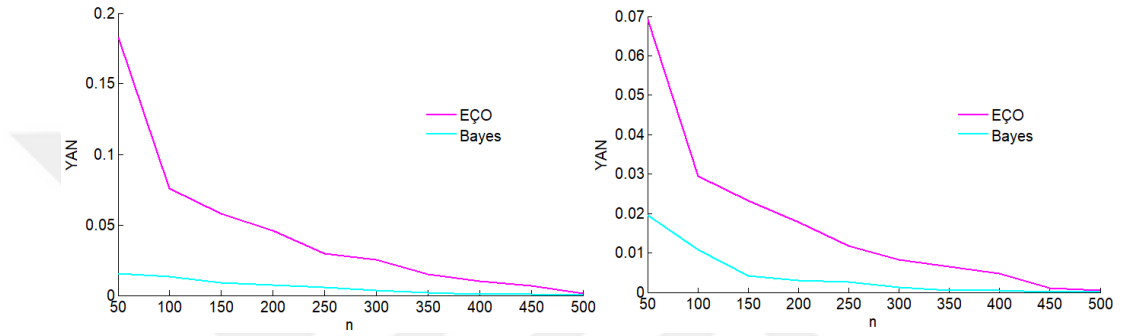
Şekil 5.31. $(\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.25, \theta = 3)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.5. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes Tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

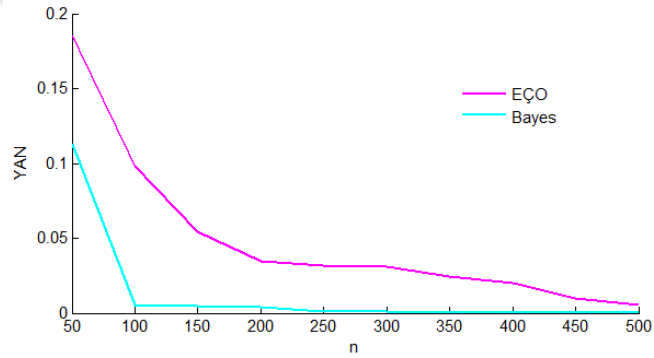
	EÇÖ					Bayes				
n	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.1109	0.1408	0.1829	0.0691	0.1850	0.0231	0.0516	0.0155	0.0196	0.1126
100	0.0448	0.0614	0.0760	0.0295	0.0983	0.0132	0.0110	0.0133	0.0107	0.0054
150	0.0375	0.0489	0.0580	0.0231	0.0545	0.0087	0.0050	0.0092	0.0041	0.0043
200	0.0309	0.0399	0.0460	0.0177	0.0345	0.0074	0.0034	0.0074	0.0031	0.0040
250	0.0190	0.0234	0.0297	0.0118	0.0317	0.0062	0.0018	0.0059	0.0025	0.0009
300	0.0164	0.0200	0.0254	0.0082	0.0306	0.0060	0.0011	0.0034	0.0012	0.0007
350	0.0065	0.0086	0.0150	0.0065	0.0242	0.0057	0.0011	0.0017	0.0005	0.0005
400	0.0014	0.0020	0.0102	0.0047	0.0199	0.0023	0.0009	0.0010	0.0004	0.0003
450	0.0015	0.0011	0.0068	0.0010	0.0098	0.0010	0.0009	0.0009	0.0002	0.0003
500	0.0007	0.0010	0.0013	0.0005	0.0056	0.0009	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001



Şekil 5.32. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



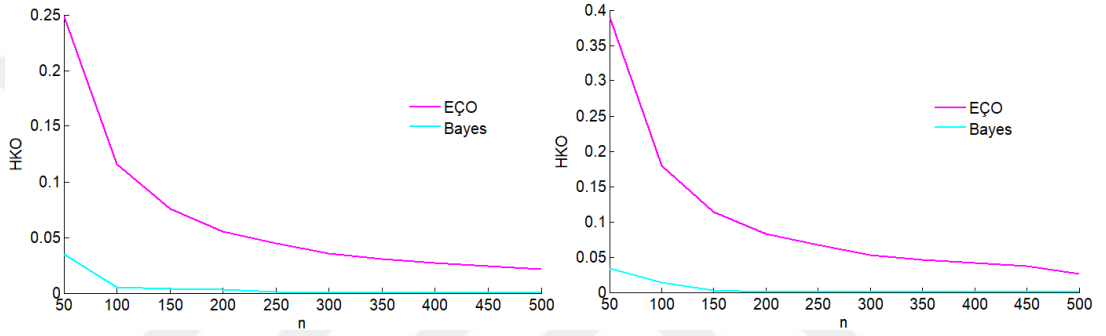
Şekil 5.33. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



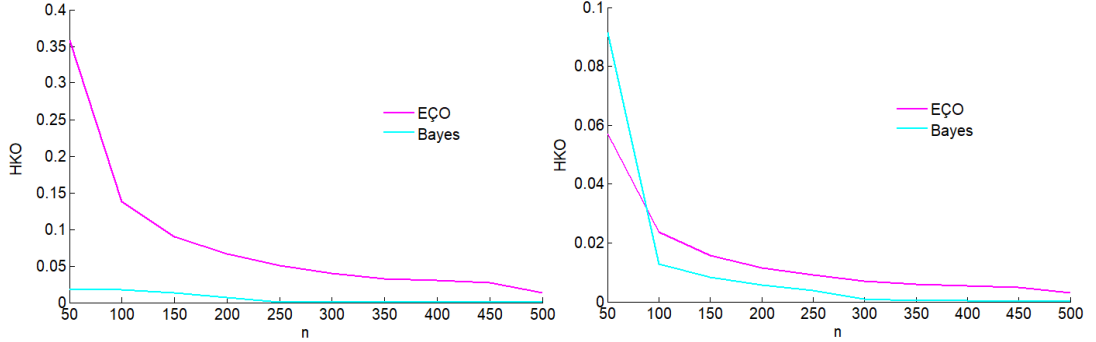
Şekil 5.34. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.6. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda EÇO ve Bayes Tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

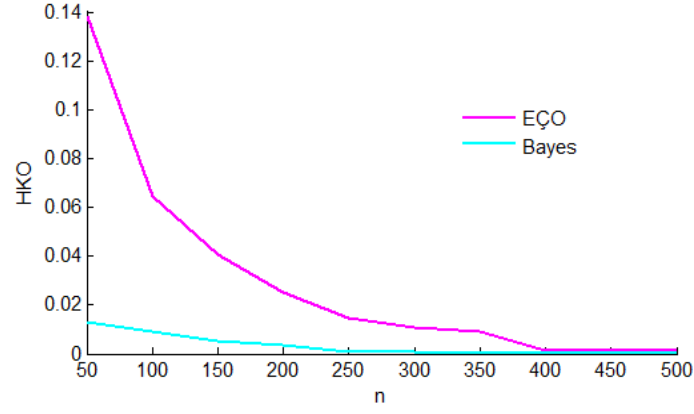
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.2481	0.3894	0.3580	0.0569	0.1380	0.0345	0.0342	0.0189	0.0914	0.0130
100	0.1157	0.1791	0.1374	0.0237	0.0643	0.0050	0.0138	0.0171	0.0129	0.0091
150	0.0756	0.1141	0.0900	0.0157	0.0409	0.0041	0.0131	0.0127	0.0083	0.0050
200	0.0549	0.0829	0.0662	0.0114	0.0249	0.0034	0.0010	0.0067	0.0056	0.0035
250	0.0444	0.0672	0.0503	0.0090	0.0144	0.0008	0.0009	0.0010	0.0037	0.0010
300	0.0353	0.0532	0.0395	0.0069	0.0108	0.0005	0.0007	0.0009	0.0008	0.0008
350	0.0304	0.0456	0.0323	0.0059	0.0091	0.0004	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
400	0.0273	0.0420	0.0300	0.0053	0.0014	0.0003	0.0004	0.0001	0.0004	0.0002
450	0.0244	0.0374	0.0270	0.0048	0.0013	0.0001	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001
500	0.0213	0.0260	0.0130	0.0030	0.0011	0.0001	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001



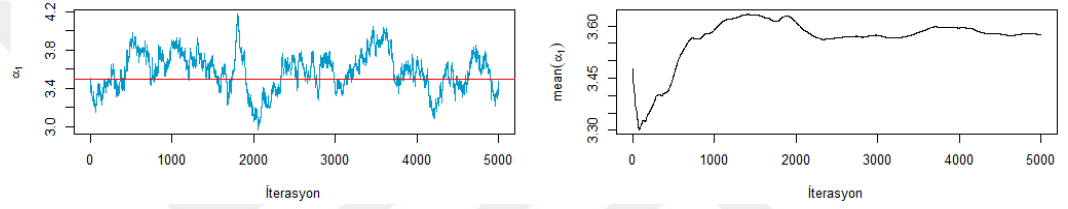
Şekil 5.35. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



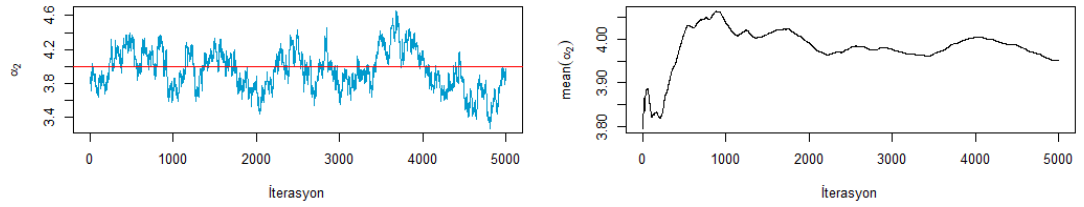
Şekil 5.36. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



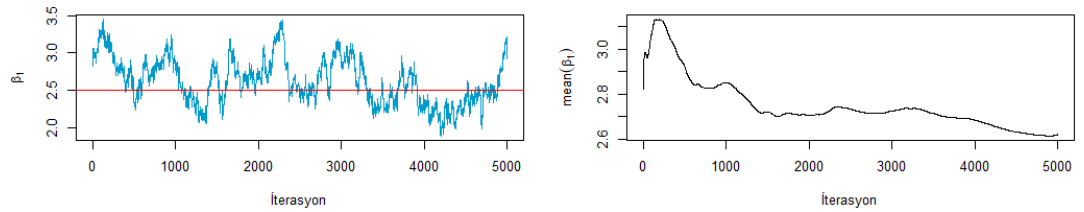
Şekil 5.37. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



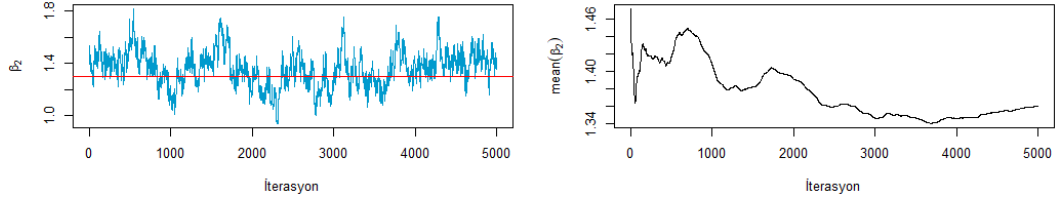
Şekil 5.38. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



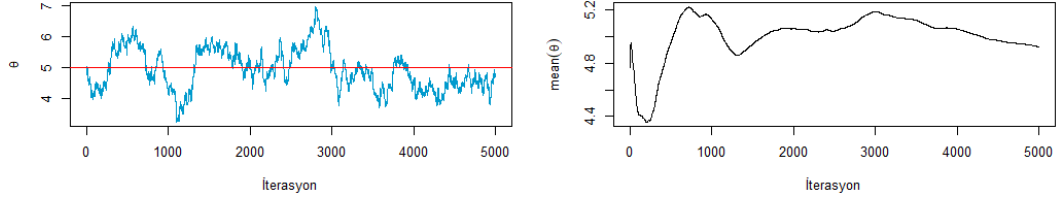
Şekil 5.39. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.40. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.41. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.42. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.3, \theta = 5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları Clayton-MUÜ dağılımına ait $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametrelerinin simülasyon yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarı tablo ve şekillerde görüldüğü gibi Clayton-MUÜ dağılımının tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin ortalama HKO ve yan değerlerinin birbirine çok yakın ve küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Clayton-MUÜ dağılımının parametre tahminleri için EÇO ve Bayes tahmin edicileri kullanılabilir.

5.2. İki Değişkenli Gumbel Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı

Denklem (5.1) ve (5.2) ile denklem (3.15)'deki Gumbel kapulasına dayalı iki değişkenli Gumbel modifiyeli unit üstel (Gumbel-MUÜ) dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu;

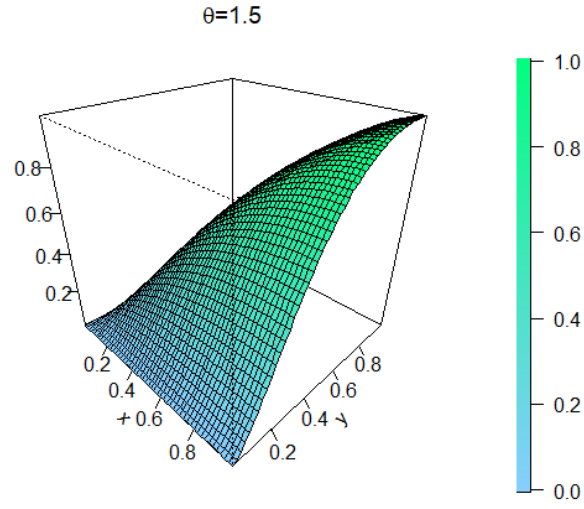
$$F_G(x, y) = \exp \left\{ - \left[\left(-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) \right)^\theta + \left(-\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.16)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (5.17)'de verilmiştir.

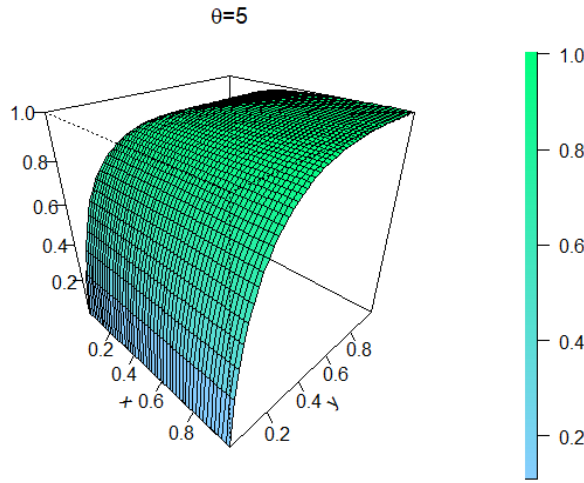
$$\begin{aligned} f_G(x, y) = & \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x^{(\alpha_1-1)} y^{(\alpha_2-1)} (1-A)(1-B) \left[(-\log(A))^\theta + (-\log(B))^\theta \right]^{\frac{1-2\theta}{\theta}} \\ & \times (-\log(A))^\theta (-\log(B))^\theta \exp \left(- \left[(-\log(A))^\theta + (-\log(B))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \\ & \times \left(1 - \theta + \left[(-\log(A))^\theta + (-\log(B))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \times \\ & \left(1 / \left[\frac{AB \log(A) \log(B) \sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}}}{\sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}}} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Burada $A = (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})))$ ve $B = (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))$ şeklindedir.

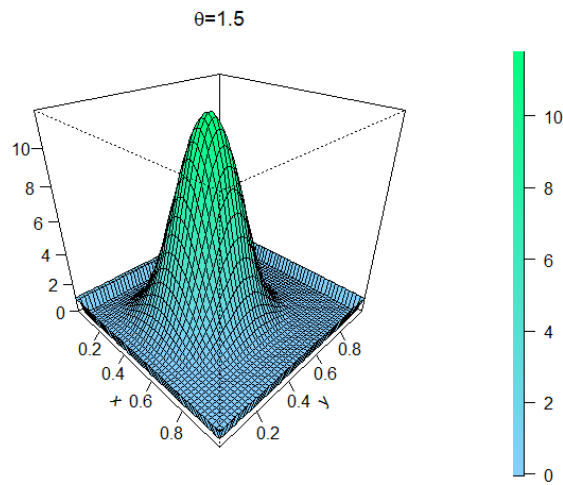
Elde edilen yeni dağılıma ilişkin denklem (5.16)'da verilen dağılım fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.43 ve 5.44'de ve denklem (5.17)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.45, 5.46 ve 5.47'de verilmiştir.



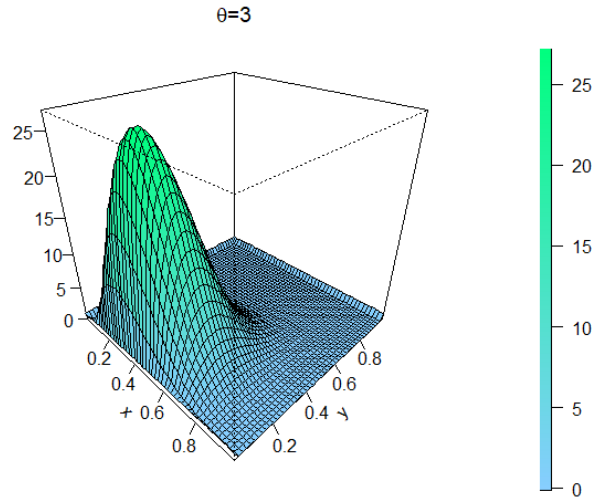
Şekil 5.43. $\beta_1=1.5$, $\beta_2=3$, $\alpha_1=2$ ve $\alpha_2=3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının df'si



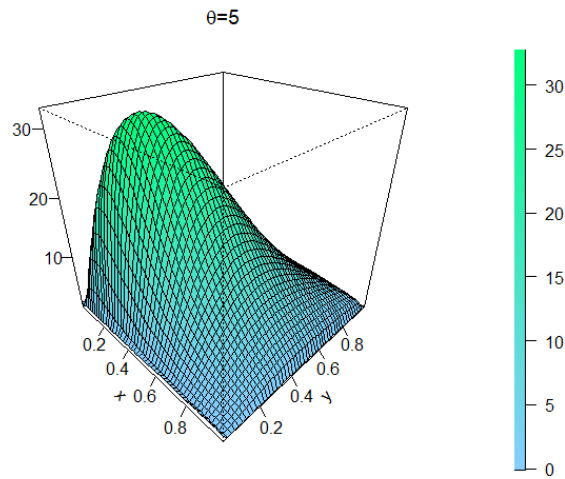
Şekil 5.44. $\beta_1=3.5$, $\beta_2=2.5$, $\alpha_1=0.5$ ve $\alpha_2=1.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.45. $\beta_1=8$, $\beta_2=7$, $\alpha_1=10$ ve $\alpha_2=9$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.46. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının oyf'si



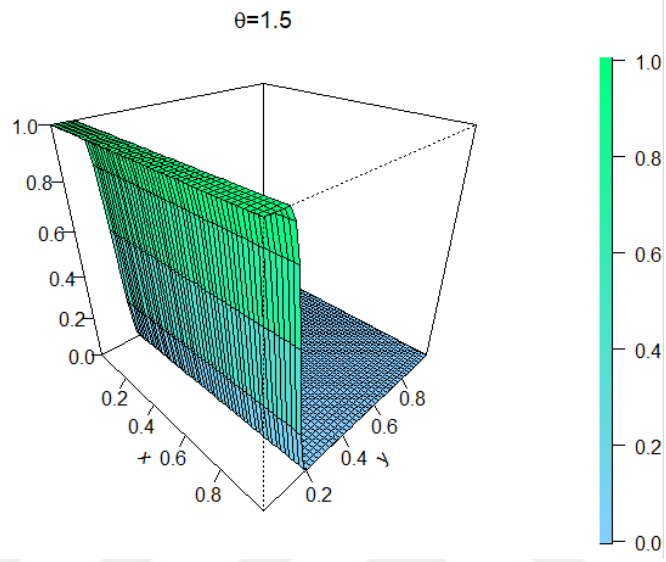
Şekil 5.47. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının oyf'si

Gumbel-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırası ile;

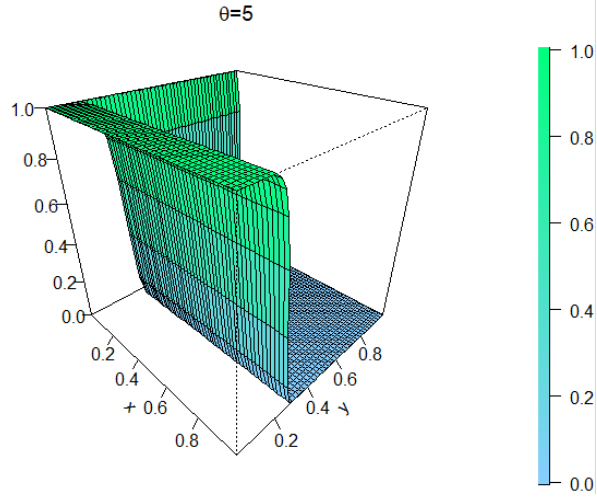
$$S_G(x, y) = 1 - \exp \left\{ - \left[\left(-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) \right)^\theta + \left(-\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.18)$$

$$h_G(x, y) = \frac{f_G(x, y)}{1 - \exp \left\{ - \left[\left(-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) \right)^\theta + \left(-\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}} \quad (5.19)$$

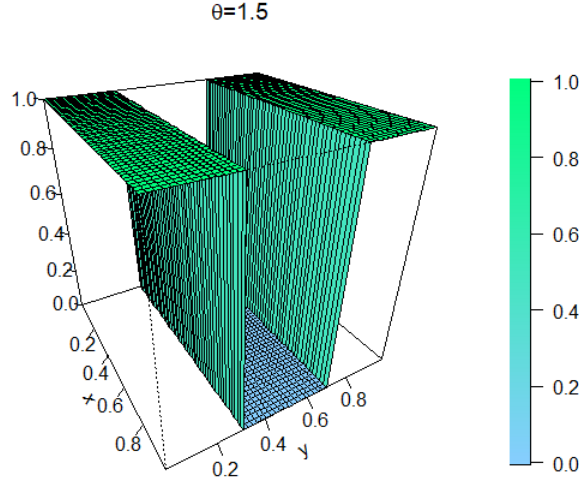
Yeni dağılıma ilişkin denklem (5.18)'de verilen yaşam fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.48 ve 5.49'da ve denklem (5.19)'da verilen hazard fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.50 ve 5.51'de verilmiştir.



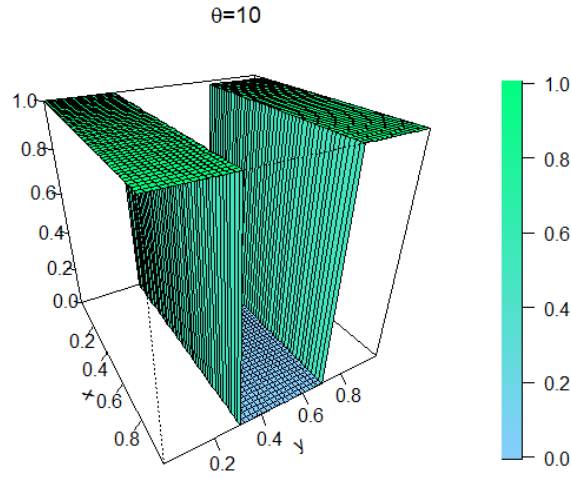
Şekil 5.48. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.49. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.50. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu



Şekil 5.51. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Gumbel-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 5.43-5.51'e göre Gumbel-MUÜ dağılımı, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olmakla birlikte, özellikle küvet tehlike oranına sahip uygulamalarda kullanılmaya uygun olabileceği düşünülmektedir.

5.2.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde Gumbel-MUÜ dağılımının bilinmeyen $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametrelerini tahmin etmek için iki farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; En çok olabilirlik yöntemi ve Bayes çıkarımıdır.

5.2.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Gumbel-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, örnekleme ait $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametreleri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
 L(\Theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x_i^{(\alpha_1-1)} y_i^{(\alpha_2-1)} \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \times \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \times \right. \\
 &\quad \left[(-\log(1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))))^\theta (-\log(1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))))^\theta \right]^{\frac{1-2\theta}{\theta}} \times \\
 &\quad (-\log(1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))))^\theta (-\log(1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))))^\theta \times \\
 &\quad \left(1 - \theta + \left[\frac{(-\log(1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))))^\theta \times}{(-\log(1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))))^\theta} \right]^{1/\theta} \right) \times \\
 &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{2-3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}} \sqrt{2-3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}}} - \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \right) - \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \right) \right) \Bigg\} \\
 &= \beta_1^n \alpha_1^n \beta_2^n \alpha_2^n \exp \left\{ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\beta_1 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ \left(\frac{1-2\theta}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(-\log[1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))])^\theta \times}{(-\log[1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))])^\theta} \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log(1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))) \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log(1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))) \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ \log(1-\theta) + \left(\frac{1}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(-\log(1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))))^\theta \times}{(-\log(1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))))^\theta} \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2-3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2-3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ n \sum_{i=1}^n \log [1-\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))] \right\} \exp \left\{ n \sum_{i=1}^n \log [1-\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))] \right\}
 \end{aligned}$$

(5.20)

$$\begin{aligned}
\ell(\Theta) = & n \log(\beta_1) + n \log(\alpha_1) + n \log(\beta_2) + n \log(\alpha_2) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\
& (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \sum_{i=1}^n (\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) - \sum_{i=1}^n (\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\
& + \left(\frac{1-2\theta}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta - \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right] \\
& + \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right] + \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \\
& + n - n \log(\theta) + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \log \left[\left(-\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta \right) \times \right. \\
& \left. \left(-\log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \\
& + n \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) + n \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 5.22-5.26’da verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_1} = & \frac{n}{\beta_1} - \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{(1-2\theta) \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\theta \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\theta \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_2} &= \frac{n}{\beta_2} - \sum_{i=1}^n (\text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{(1 - 2\theta) \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \log(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\theta \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \log(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{\theta (1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \log(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{n \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \log(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_1} = & \frac{n}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}}} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \\ & \sum_{i=1}^n \left((1 - 2\theta) \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \times \right. \\ & \left. \left(\left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 1 / \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left[-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta - \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \right] \right] \right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \times \right. \\ & \left. \left(\left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \times \right. \\ & \left. \left(\left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_1} \log(x_i) - 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2x_i^{2\alpha_1}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3x_i^{\alpha_1} \log(x_i) + 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i)}{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \\ & - \frac{n\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_2} = & \frac{n}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}}} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \\
& \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1 - 2\theta) \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{\left(\frac{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right)} \right. \\
& \left. \frac{1 / \left[-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta - \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \right]}{\left(\frac{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right)} \right] \right] \\
& + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\theta \beta_2 x_i^{\alpha_1} \log(y_i) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{\left(\frac{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right)} \right] \\
& + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{\left(\frac{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))} \right)} \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha_2} \log(y_i) - 2 y_i^{2\alpha_2} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2 y_i^{2\alpha_2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) + 2 y_i^{2\alpha_1} \log(y_i)}{2 - 3 y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \\
& - \frac{n \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}
\end{aligned}$$

(5.25)

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \theta} = & - \frac{2 \sum_{i=1}^n \log \left\{ -\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta - \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right\}}{\theta} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - 2\theta) \log \left\{ -\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta - \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right\}}{\theta^2} \\
& + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1 - 2\theta) \log \left\{ \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) - \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right\} \times \right. \\
& \left. \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right]^\theta \log \left\{ \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right\} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 / \left[\theta \left\{ -\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta - \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right\} \right] \right) \right] \right] \\
& + \sum_{i=1}^n \log \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right] + \sum_{i=1}^n \log \left[-\log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \\
& - \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\log \left\{ -\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)^\theta \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)^\theta \right\} + \right. \\
& \left. \left[\theta \log \left[\log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right] + \theta \log \left[\log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right] \right] \theta^{-2}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözülemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.2.1.2. Bayes Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Gumbel-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, Gumbel-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall \alpha_2 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_2 \in (0, \infty)$ ve $\forall \theta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta_1 \sim \text{Gamma}(c, d)$, $\alpha_2 \sim \text{Gamma}(e, s)$, $\beta_2 \sim \text{Gamma}(g, h)$, $\theta \sim \text{Pareto}(1, k)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\Theta) = \alpha_1^{a-1} \exp(-b\alpha_1) \beta_1^{c-1} \exp(-d\beta_1) \alpha_2^{e-1} \exp(-s\alpha_2) \beta_2^{g-1} \exp(-h\beta_2) \theta^{-k-1} \tag{5.27}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.27)'de verilen Önsel dağılım ve denklem (5.20)'de verilen örneklem olabirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | x, y) = \frac{\beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{-k-1} T}{\int_{\beta_1=0}^{\infty} \int_{\alpha_1=0}^{\infty} \int_{\beta_2=0}^{\infty} \int_{\alpha_2=0}^{\infty} \int_{\theta=1}^{\infty} \beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{-k-1} T d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2 d\theta} \tag{5.28}$$

Burada

$$\begin{aligned}
T = & \exp \left\{ \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - s \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \\
& \exp \left\{ -\beta_1 \left[d + \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \right] \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \left[h + \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \right] \right\} \times \\
& \exp \left\{ \left(\frac{1-2\theta}{\theta} \right) \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\left(-\log \left[1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right] \right)^\theta}{\left(-\log \left[1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right] \right)^\theta} \right] \right\} \times \\
& \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right\} \times \\
& \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log \left[-\log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right] \right\} \times \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\}
\end{aligned}$$

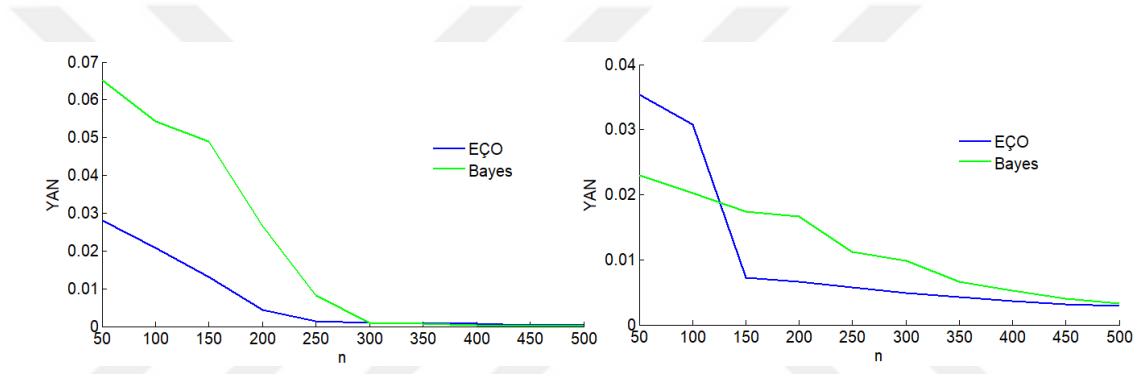
şeklinde. Denklem (4.28)'deki sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülemediği için R programında Metropolis-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.2.2. Simülasyon Çalışması

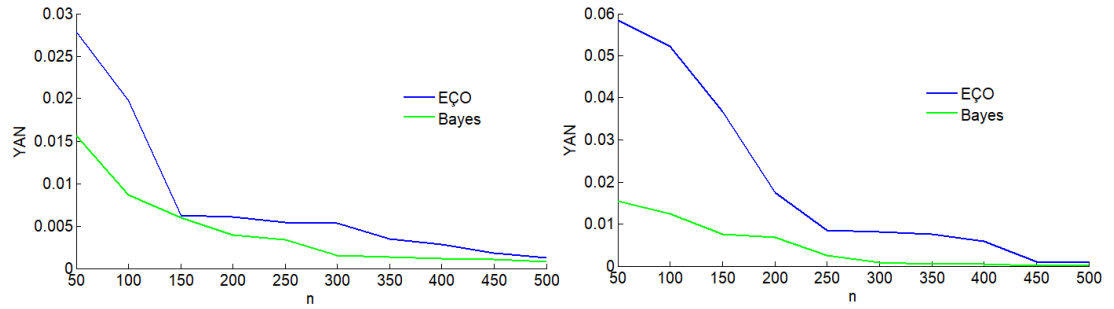
Bu bölümde, Gumbel-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin HKO ve yan kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemleri R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$ ve θ parametreleri için Tablo 5.7-5.12’de verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.7. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

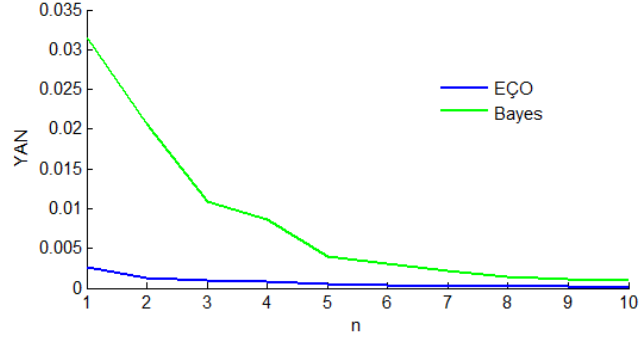
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0280	0.0353	0.0277	0.0584	0.0025	0.0651	0.0230	0.0155	0.0155	0.0314
100	0.0207	0.0307	0.0197	0.0522	0.0013	0.0542	0.0202	0.0086	0.0124	0.0205
150	0.0130	0.0072	0.0062	0.0367	0.0009	0.0489	0.0173	0.0059	0.0076	0.0109
200	0.0044	0.0065	0.0060	0.0175	0.0008	0.0265	0.0166	0.0039	0.0069	0.0086
250	0.0014	0.0058	0.0054	0.0085	0.0004	0.0081	0.0111	0.0033	0.0025	0.0040
300	0.0010	0.0049	0.0053	0.0081	0.0003	0.0009	0.0098	0.0015	0.0008	0.0030
350	0.0008	0.0042	0.0034	0.0075	0.0002	0.0007	0.0065	0.0013	0.0005	0.0022
400	0.0007	0.0036	0.0028	0.0058	0.0002	0.0002	0.0052	0.0011	0.0004	0.0014
450	0.0003	0.0031	0.0018	0.0009	0.0001	0.0001	0.0040	0.0010	0.0001	0.0011
500	0.0002	0.0029	0.0012	0.0008	0.0001	0.0001	0.0033	0.0008	0.0001	0.0009



Şekil 5.52. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



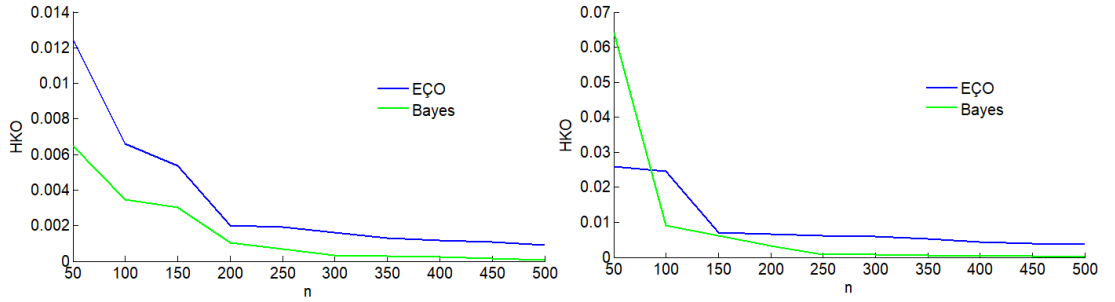
Şekil 5.53. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



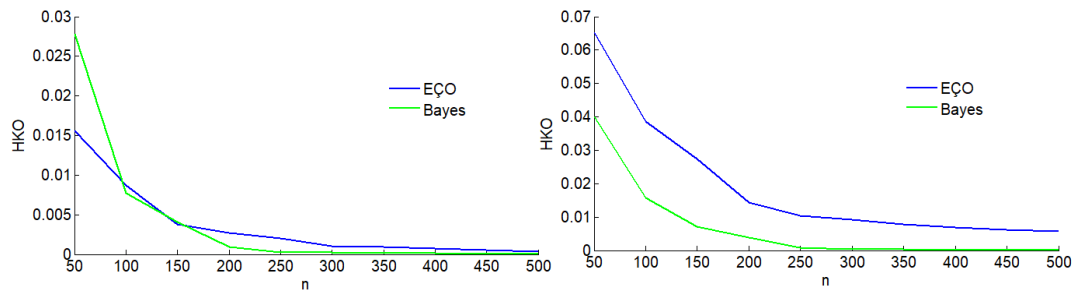
Şekil 5.54. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.8. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

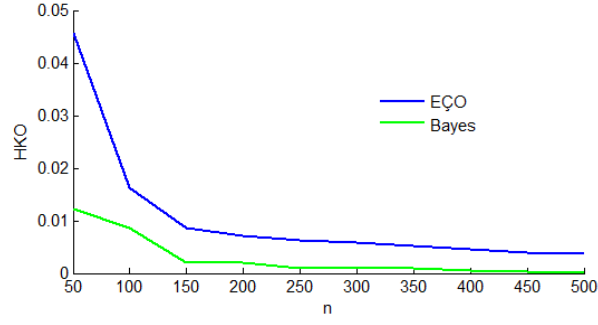
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0124	0.0259	0.0156	0.0653	0.0456	0.0064	0.0640	0.0277	0.0400	0.0123
100	0.0066	0.0246	0.0087	0.0385	0.0162	0.0034	0.0090	0.0077	0.0157	0.0086
150	0.0053	0.0069	0.0038	0.0273	0.0086	0.0030	0.0061	0.0041	0.0070	0.0021
200	0.0020	0.0066	0.0026	0.0144	0.0070	0.0010	0.0033	0.0009	0.0037	0.0020
250	0.0019	0.0062	0.0019	0.0104	0.0062	0.0006	0.0008	0.0007	0.0008	0.0010
300	0.0016	0.0060	0.0010	0.0091	0.0059	0.0003	0.0008	0.0005	0.0004	0.0009
350	0.0013	0.0053	0.0009	0.0079	0.0051	0.0002	0.0006	0.0004	0.0002	0.0009
400	0.0011	0.0043	0.0007	0.0068	0.0045	0.0002	0.0004	0.0004	0.0002	0.0004
450	0.0010	0.0040	0.0005	0.0061	0.0039	0.0001	0.0003	0.0002	0.0001	0.0004
500	0.0009	0.0036	0.0003	0.0057	0.0036	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001



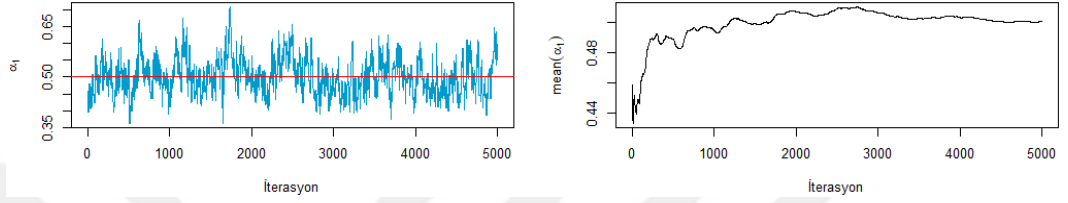
Şekil 5.55. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



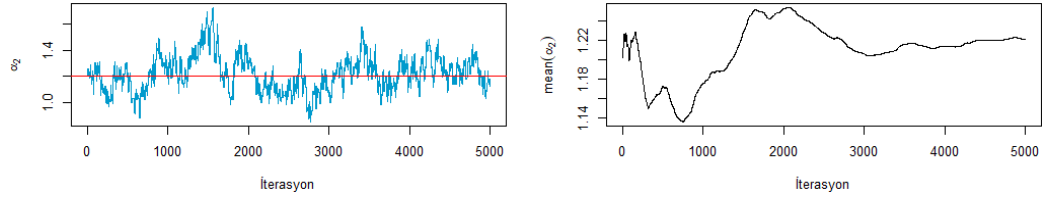
Şekil 5.56. ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



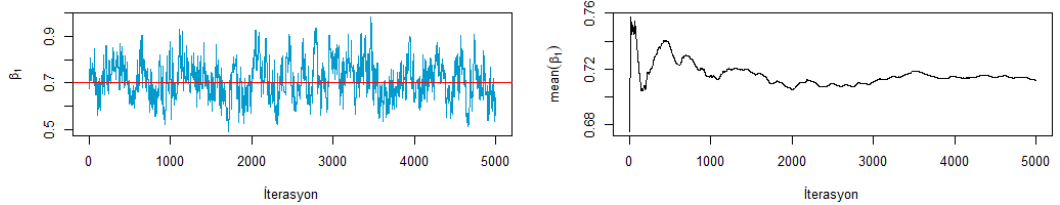
Şekil 5.57. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



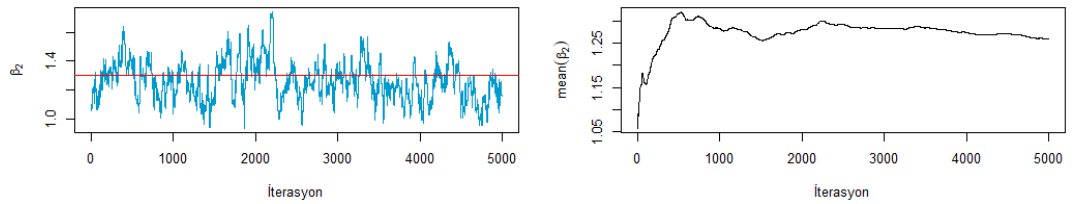
Şekil 5.58. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



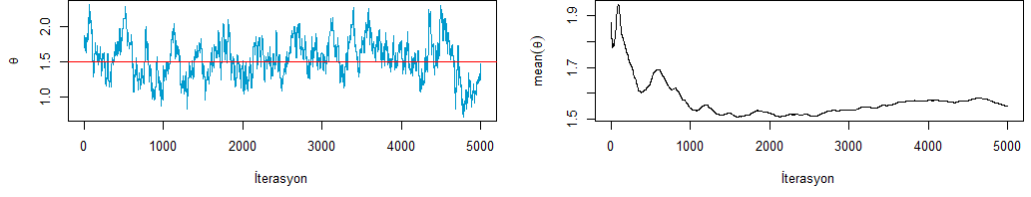
Şekil 5.59. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.60. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



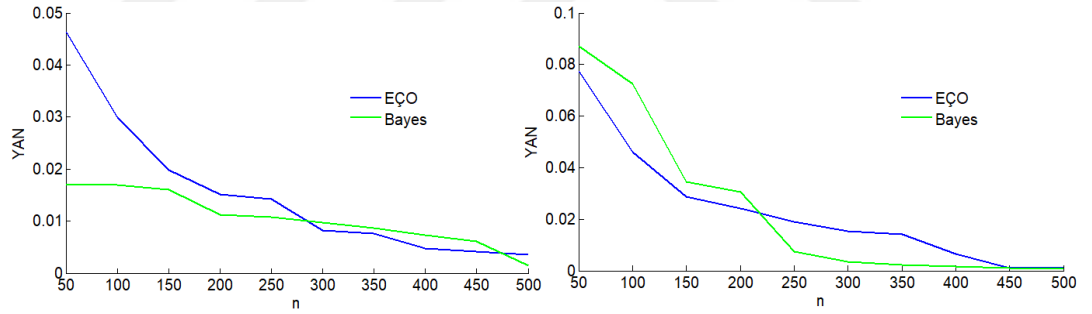
Şekil 5.61. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



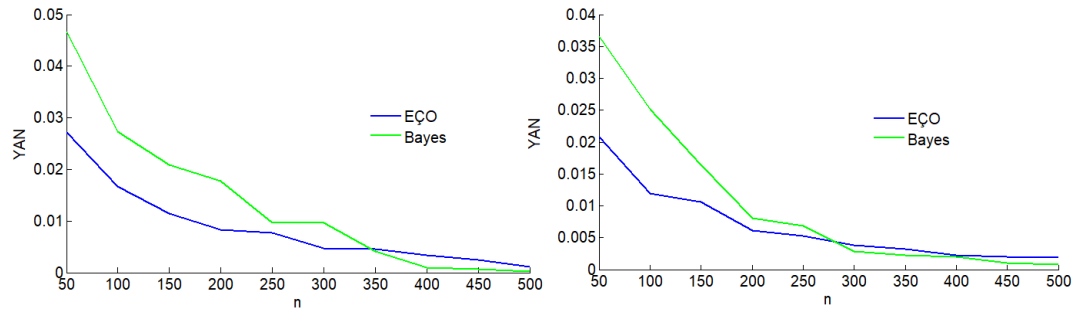
Şekil 5.62. $(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.2, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 1.3, \theta = 1.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.9. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

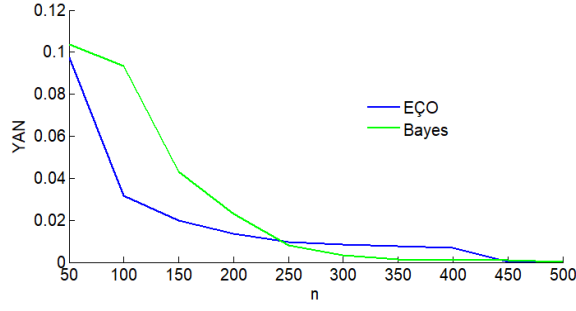
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0462	0.0773	0.0271	0.0207	0.0973	0.0170	0.0869	0.0466	0.0665	0.1036
100	0.0299	0.0461	0.0166	0.0118	0.0317	0.0168	0.0724	0.0272	0.0651	0.0933
150	0.0198	0.0286	0.0114	0.0106	0.0199	0.0160	0.0344	0.0208	0.0464	0.0429
200	0.0151	0.0241	0.0083	0.0061	0.0135	0.0111	0.0305	0.0177	0.0306	0.0229
250	0.0142	0.0191	0.0076	0.0052	0.0095	0.0107	0.0074	0.0096	0.0294	0.0078
300	0.0082	0.0152	0.0047	0.0038	0.0086	0.0097	0.0034	0.0096	0.0282	0.0033
350	0.0076	0.0141	0.0045	0.0032	0.0077	0.0086	0.0023	0.0041	0.0230	0.0014
400	0.0047	0.0065	0.0034	0.0021	0.0070	0.0072	0.0016	0.0009	0.0195	0.0010
450	0.0041	0.0012	0.0024	0.0020	0.0002	0.0060	0.0010	0.0006	0.0103	0.0008
500	0.0036	0.0011	0.0011	0.0018	0.0001	0.0013	0.0007	0.0001	0.0087	0.0002



Şekil 5.63. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



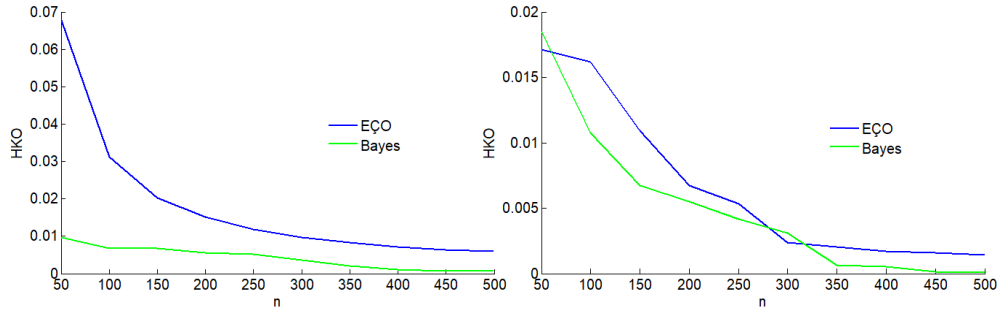
Şekil 5.64. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



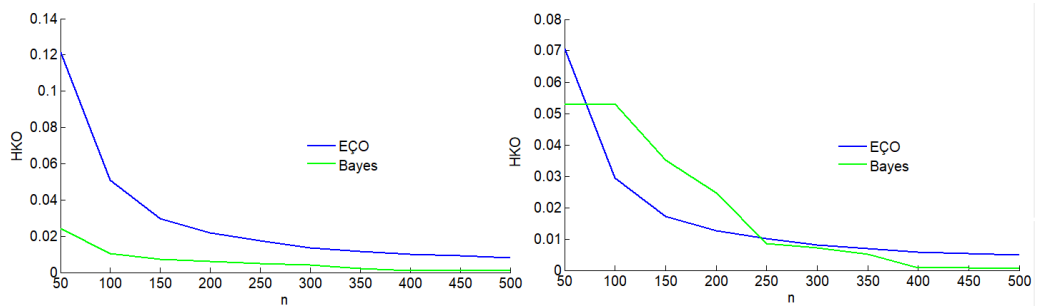
Şekil 5.65. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.10. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

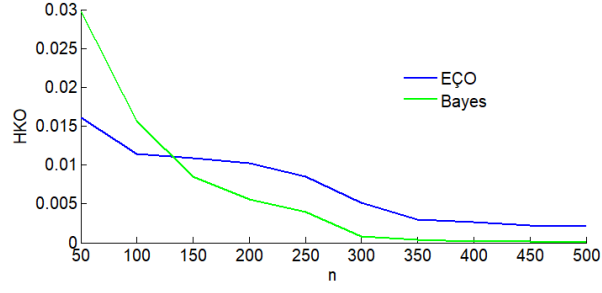
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0677	0.0171	0.1212	0.0706	0.0161	0.0097	0.0184	0.0243	0.0528	0.0297
100	0.0311	0.0161	0.0511	0.0293	0.0113	0.0067	0.0107	0.0105	0.0530	0.0156
150	0.0202	0.0109	0.0298	0.0172	0.0108	0.0066	0.0067	0.0071	0.0350	0.0085
200	0.0151	0.0067	0.0219	0.0125	0.0102	0.0056	0.0054	0.0061	0.0246	0.0055
250	0.0117	0.0053	0.0176	0.0102	0.0085	0.0052	0.0041	0.0049	0.0085	0.0039
300	0.0096	0.0023	0.0137	0.0080	0.0051	0.0035	0.0030	0.0041	0.0071	0.0008
350	0.0083	0.0020	0.0116	0.0068	0.0030	0.0021	0.0006	0.0020	0.0052	0.0003
400	0.0072	0.0017	0.0101	0.0058	0.0026	0.0009	0.0005	0.0009	0.0008	0.0001
450	0.0064	0.0016	0.0090	0.0054	0.0022	0.0007	0.0001	0.0008	0.0007	0.0001
500	0.0059	0.0014	0.0082	0.0047	0.0020	0.0005	0.0001	0.0008	0.0004	0.0001



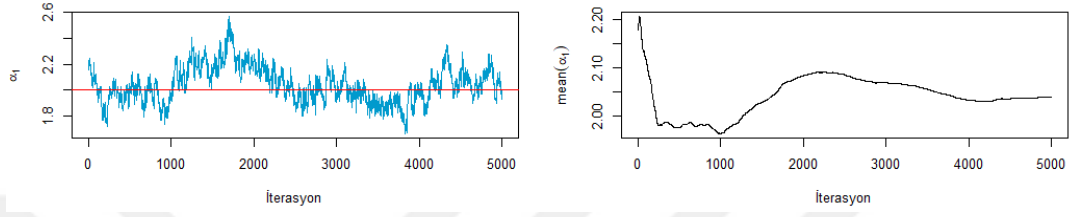
Şekil 5.66. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



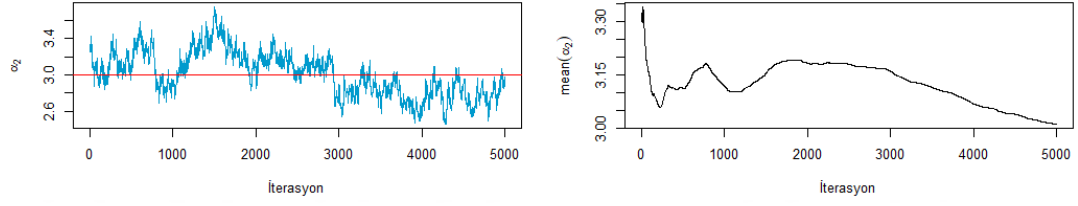
Şekil 5.67. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



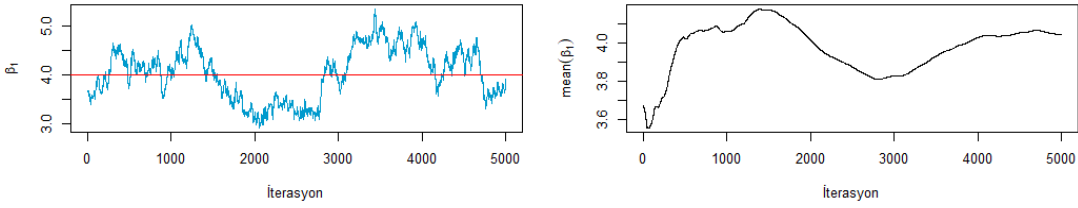
Şekil 5.68. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için HKO



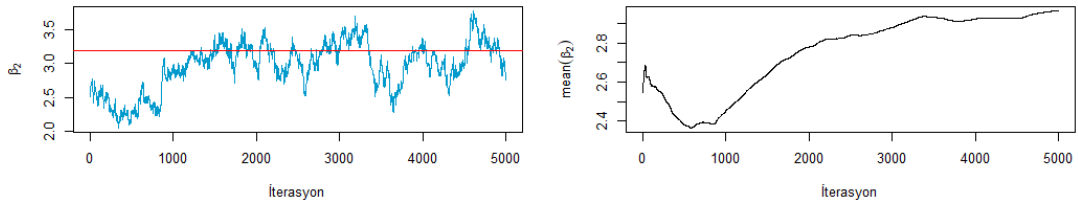
Şekil 5.69. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3.2, \theta = 3)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



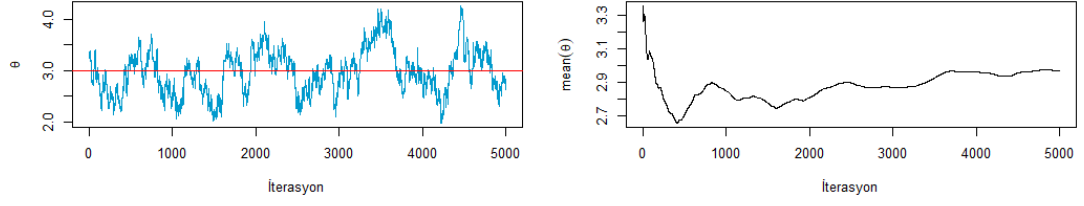
Şekil 5.70. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.71. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



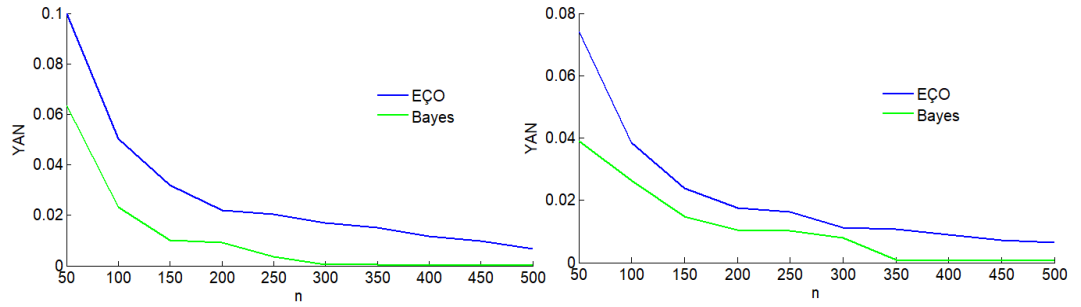
Şekil 5.72. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



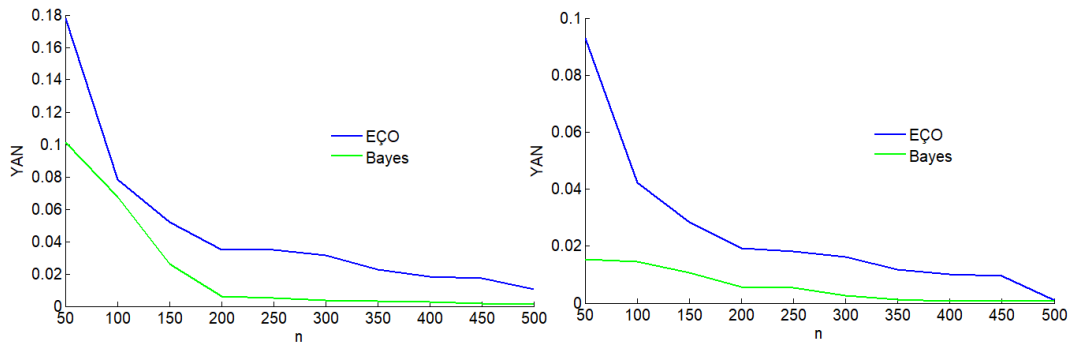
Şekil 5.73. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.11. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

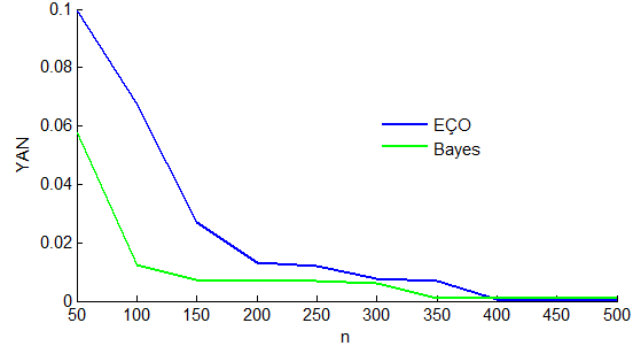
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0998	0.0740	0.1779	0.0928	0.0994	0.0634	0.0389	0.1012	0.0153	0.0576
100	0.0502	0.0385	0.0784	0.0422	0.0673	0.0232	0.0262	0.0675	0.0144	0.0124
150	0.0319	0.0238	0.0519	0.0283	0.0270	0.0100	0.0148	0.0258	0.0106	0.0072
200	0.0218	0.0174	0.0351	0.0191	0.0133	0.0091	0.0103	0.0062	0.0057	0.0068
250	0.0203	0.0162	0.0350	0.0180	0.0120	0.0035	0.0101	0.0053	0.0055	0.0067
300	0.0170	0.0113	0.0312	0.0162	0.0075	0.0005	0.0079	0.0037	0.0026	0.0060
350	0.0150	0.0106	0.0228	0.0117	0.0069	0.0004	0.0008	0.0030	0.0013	0.0010
400	0.0117	0.0090	0.0183	0.0100	0.0004	0.0002	0.0007	0.0026	0.0008	0.0010
450	0.0097	0.0073	0.0172	0.0096	0.0003	0.0001	0.0006	0.0016	0.0007	0.0009
500	0.0067	0.0063	0.0104	0.0019	0.0002	0.0001	0.0005	0.0014	0.0006	0.0008



Şekil 5.74. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



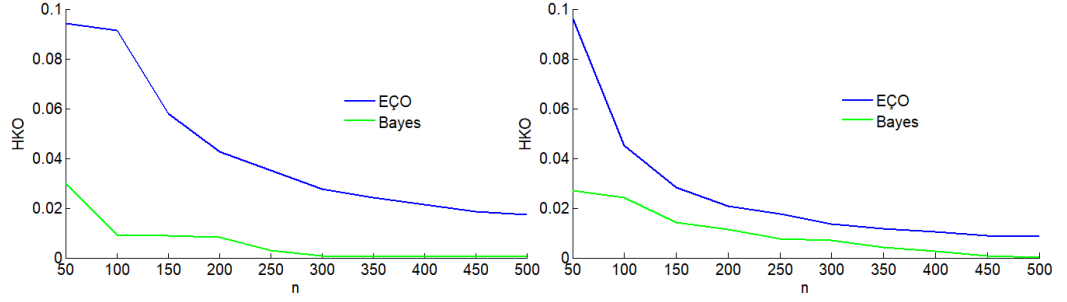
Şekil 5.75. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



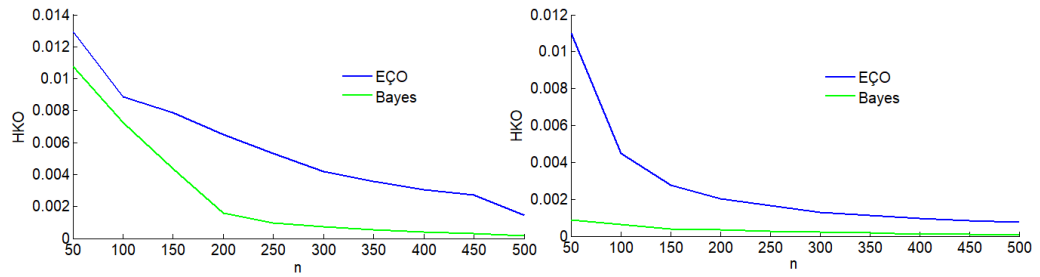
Şekil 5.76. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.12. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

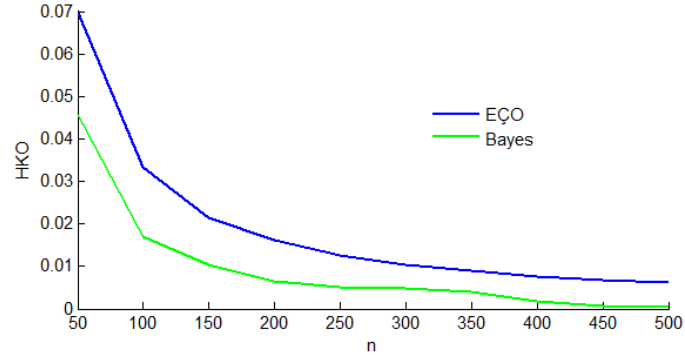
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0943	0.0960	0.0129	0.0110	0.0696	0.0297	0.0269	0.0107	0.0008	0.0454
100	0.0913	0.0452	0.0088	0.0044	0.0332	0.0092	0.0243	0.0072	0.0006	0.0169
150	0.0580	0.0282	0.0078	0.0027	0.0213	0.0089	0.0141	0.0043	0.0003	0.0103
200	0.0426	0.0209	0.0065	0.0020	0.0161	0.0082	0.0113	0.0016	0.0003	0.0066
250	0.0350	0.0175	0.0053	0.0016	0.0126	0.0029	0.0077	0.0009	0.0002	0.0051
300	0.0276	0.0135	0.0041	0.0013	0.0103	0.0006	0.0071	0.0007	0.0002	0.0049
350	0.0241	0.0117	0.0035	0.0011	0.0090	0.0005	0.0043	0.0005	0.0001	0.0039
400	0.0212	0.0103	0.0030	0.0009	0.0076	0.0005	0.0028	0.0004	0.0001	0.0017
450	0.0185	0.0090	0.0027	0.0008	0.0068	0.0004	0.0008	0.0003	0.0001	0.0007
500	0.0172	0.0085	0.0014	0.0007	0.0061	0.0004	0.0007	0.0001	0.0001	0.0005



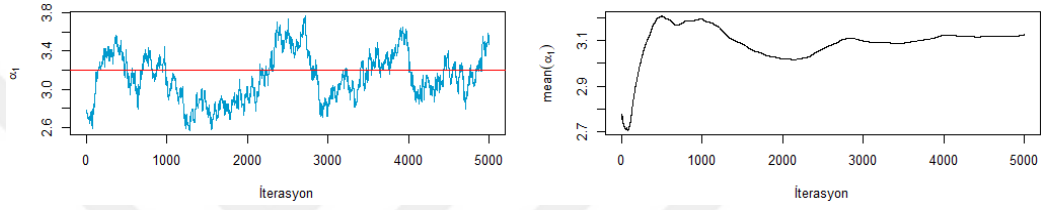
Şekil 5.77. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



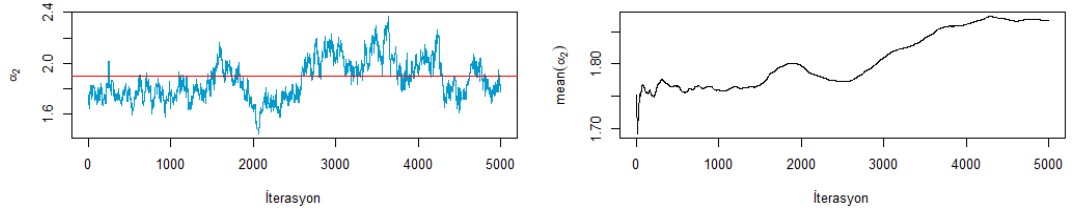
Şekil 5.78. ($\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



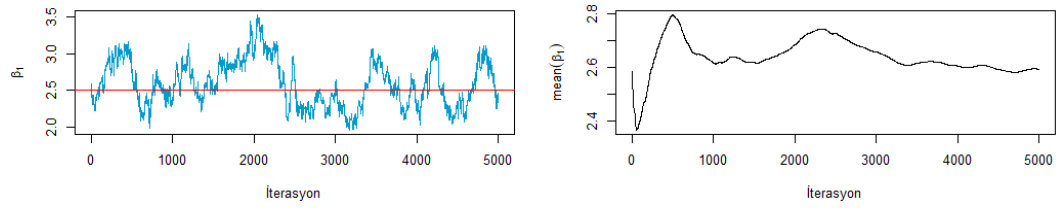
Şekil 5.79. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



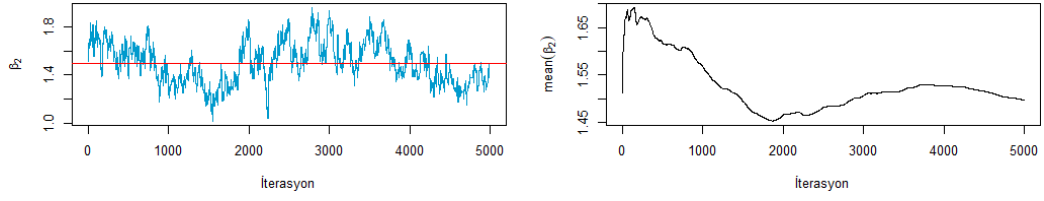
Şekil 5.80. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



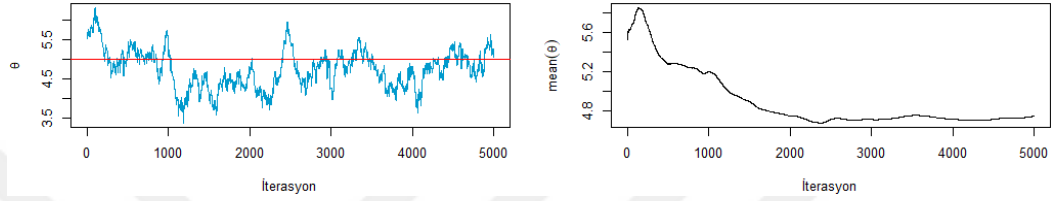
Şekil 5.81. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.82. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.83. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.84. $(\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 1.9, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5, \theta = 5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları Gumbel-MUÜ dağılımına ait $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametrelerinin simülasyon yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarıdaki tablo ve şekillerde görüldüğü gibi Gumbel-MUÜ dağılımının tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin ortalama HKO ve yan değerlerinin birbirine çok yakın ve küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Gumbel-MUÜ dağılımının parametre tahminleri için EÇO ve Bayes tahmin edicileri kullanılabilir.

5.3. İki Değişkenli Frank Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı

Denklem (5.1) ve denklem (5.2) ile denklem (3.17)'deki Frank kapulasına dayalı iki değişkenli Frank modifiyeli unit üstel (Frank-MUÜ) dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu;

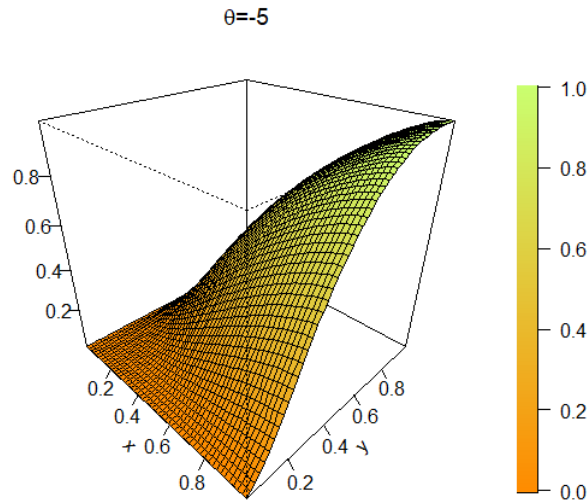
$$F_F(x, y) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\left(\exp \left(-\theta \left\{ 1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right\} \right) - 1 \right) \left(\exp \left(-\theta \left\{ 1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right\} \right) - 1 \right)}{\exp(-\theta) - 1} \right] \quad (5.29)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (5.30)'da verilmiştir.

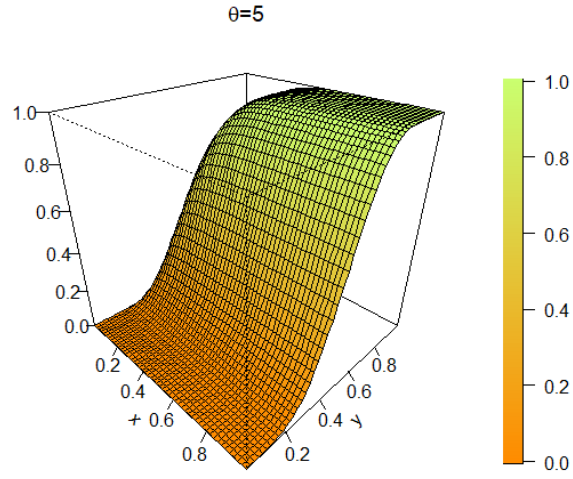
$$f_F(x, y) = \frac{\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x^{(\alpha_1-1)} y^{(\alpha_2-1)} \theta (1-A)(1-B) \exp(-\theta[A+B]) (\exp(-\theta) - 1)}{\sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}} \sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}} \left[\frac{\exp(-\theta) + \exp(-\theta[A+B])}{-\exp(-\theta A) - \exp(-\theta B)} \right]^2} \quad (5.30)$$

Burada $A = (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})))$ ve $B = (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))$

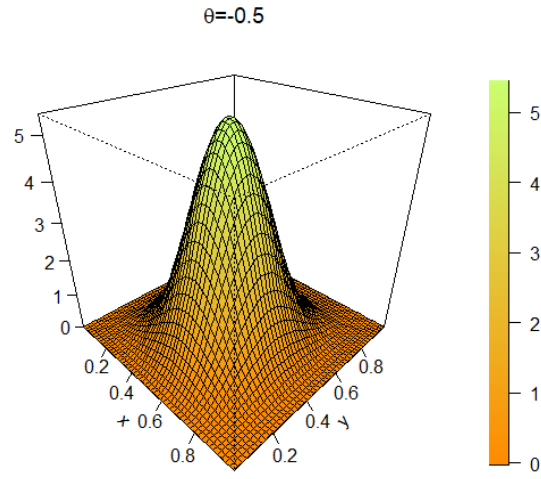
şeklinde dir. Elde edilen yeni dağılıma ilişkin denklem (5.29)'da verilen dağılım fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.85 ve 5.86'da ve denklem (5.30)'da verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.87, 5.88 ve 5.89'da verilmiştir.



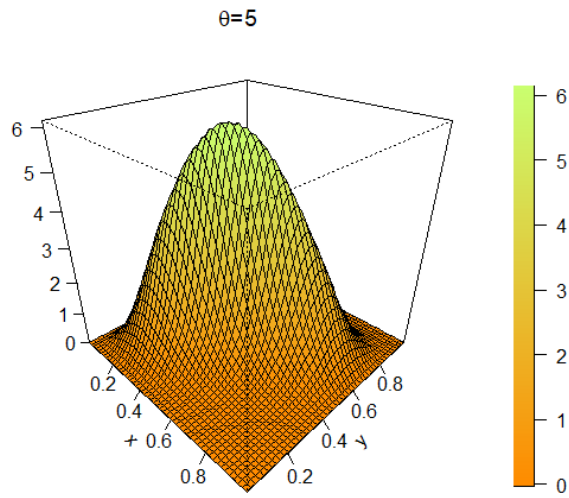
Şekil 5.85. $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının df'si



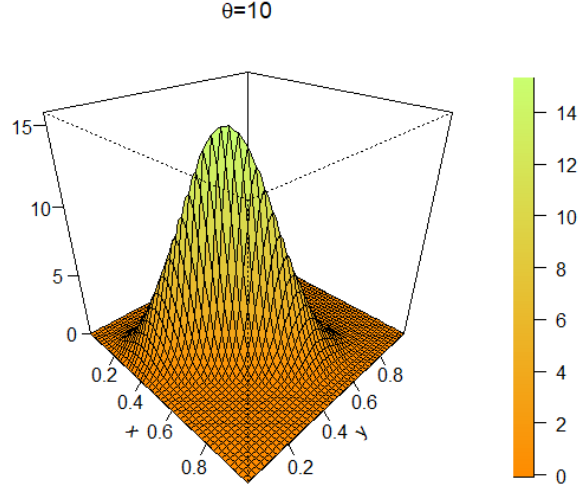
Şekil 5.86. $\beta_1 = 3.5$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Frank-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.87. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 7$ ve $\alpha_2 = 6$ iken Frank-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.88. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Frank MUÜ dağılımının df'si



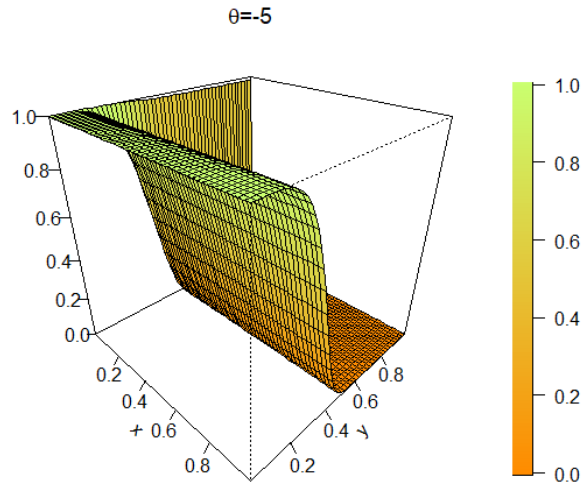
Şekil 5.89. $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 8$ ve $\alpha_2 = 5$ iken Frank MUÜ dağılımının oyf'si

Frank-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırası ile;

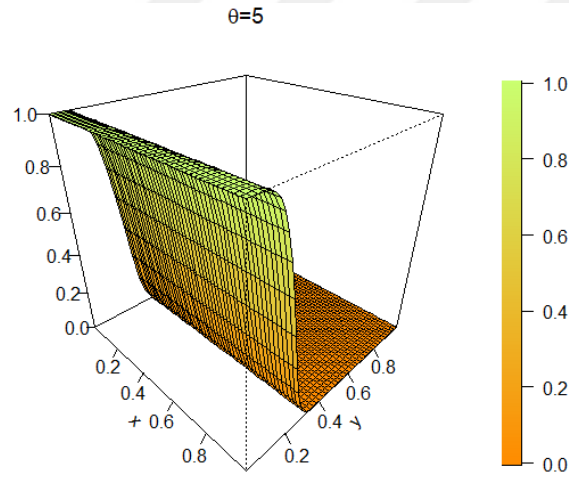
$$S_F(x, y) = 1 - \left(-\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\left(\exp \left(-\theta \{ 1 - \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \} \right) - 1 \right) \times \left(\exp \left(-\theta \{ 1 - \exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \} \right) - 1 \right)}{1 / [\exp(-\theta) - 1]} \right] \right) \quad (5.31)$$

$$H_F(x, y) = \frac{f_F(x, y)}{1 - \left(-\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\left(\exp \left(-\theta \{ 1 - \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \} \right) - 1 \right) \times \left(\exp \left(-\theta \{ 1 - \exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \} \right) - 1 \right)}{1 / [\exp(-\theta) - 1]} \right] \right)} \quad (5.32)$$

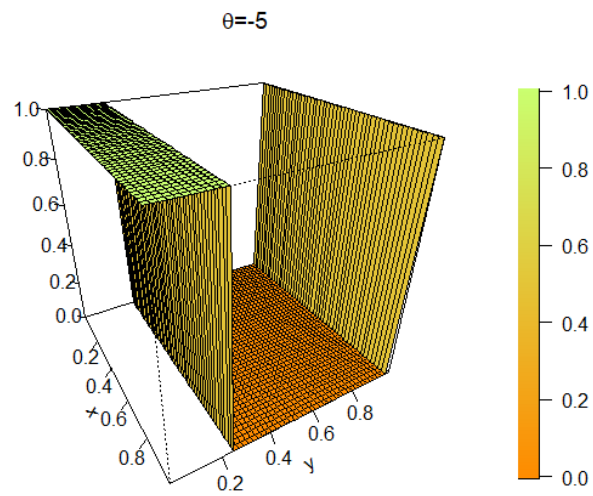
Yeni dağılıma ilişkin denklem (5.31)'de verilen yaşam fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.90 ve 5.91'de ve denklem (5.32)'de verilen hazard fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.92 ve 5.93'de verilmiştir.



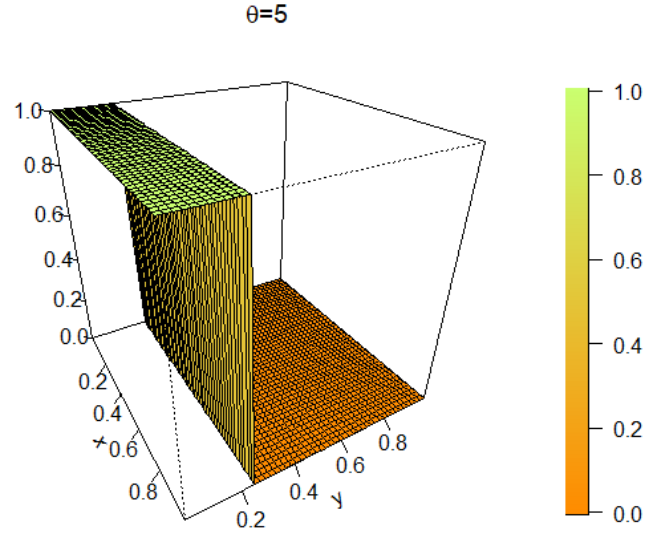
Şekil 5.90. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.91. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 15$ iken Frank-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.92. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Frank-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu



Şekil 5.93. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Frank-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 5.85-5.93'e göre Frank-MUÜ dağılımı, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olmakla birlikte, özellikle artan ve kuvvet tehlike oranlarına sahip uygulamalarda kullanılmaya uygun olabileceği düşünülmektedir.

5.3.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde Frank-MUÜ dağılımının bilinmeyen $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametrelerini tahmin etmek için iki farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; En çok olabilirlik yöntemi ve Bayes çıkarımıdır.

5.3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Frank-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, örnekleme ait $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametreleri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
L(\Theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \left(\exp(-\theta) - 1 \right) \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x_i^{(\alpha_1-1)} y_i^{(\alpha_2-1)} \theta \times \right. \\
&\quad \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times \\
&\quad \left. \exp \left(-\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right) \right\} \times \\
&\quad \left[\frac{1}{\left(\left[\sqrt{x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \exp(-\theta) + \exp \left(-\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right) \right]^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right) \right) \right] \right] \right\} \\
&= \beta_1^n \alpha_1^n \beta_2^n \alpha_2^n \theta^n \exp \left\{ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} (\exp(-\theta) - 1) \times \\
&\quad \exp \left\{ -\beta_1 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \right\} \times \\
&\quad \exp \left\{ -\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right\} \times \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\
&\quad \exp \left[-2 \sum_{i=1}^n \log \left\{ \begin{aligned} &\exp(-\theta) + \exp \left(-\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. \begin{aligned} &- \exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right) \\ &- \exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right) \end{aligned} \right\} \right]
\end{aligned}$$

(5.33)

$$\begin{aligned}
\ell(\Theta) = & n \log(\beta_1) + n \log(\alpha_1) + n \log(\beta_2) + n \log(\alpha_2) + n \log(\theta) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\
& (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) + n \log(\exp(-\theta) - 1) - \sum_{i=1}^n (\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) - \sum_{i=1}^n (\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\
& - \theta \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \\
& - 2 \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{\exp(-\theta) + \exp \left(-\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \right)}{-\exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \right) - \exp \left(-\theta \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right)} \right\}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 5.35-5.39’da verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_1} = & \frac{n}{\beta_1} - \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\theta \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{2\theta \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{2\theta \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))}{\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right)}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_2} = & \frac{n}{\beta_2} - \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\theta \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{2\theta \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{2\theta \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))}{\left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \log \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}}} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \\
&\sum_{i=1}^n \left[\frac{\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_1} \log(x_i) - 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2x_i^{2\alpha_1}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3x_i^{\alpha_1} \log(x_i) + 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i)}{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{2\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{2\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \log(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \times \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. (1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \right] \right]
\end{aligned}
\tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_2} &= \frac{n}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}}} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \\
&\sum_{i=1}^n \left[\frac{\theta \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times \right.} \right.} \\
&\left. \left. (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right] \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha_2} \log(y_i) - 2 y_i^{2\alpha_2} \log(x_i^{\alpha_1})}{y_i^{\alpha_2} - 2 y_i^{2\alpha_2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) + 2 y_i^{2\alpha_1} \log(y_i)}{2 - 3 y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{2 \theta \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times \right.} \right.} \\
&\left. \left. (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right] \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{2 \theta \beta_1 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \log(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times}{1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \times \right.} \right.} \\
&\left. \left. (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \right] \right]
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \frac{n \exp(-\theta)}{\exp(-\theta) - 1} - 2 \\
&- \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \\
&+ 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) + \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) \right] \\
&- 2 \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) - 2 \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözülemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.3.1.2. Bayes Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Frank-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, Frank-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall \alpha_2 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_2 \in (0, \infty)$ ve $\forall \theta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta_1 \sim \text{Gamma}(c, d)$, $\alpha_2 \sim \text{Gamma}(e, s)$, $\beta_2 \sim \text{Gamma}(g, h)$, $\theta \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\Theta) = \alpha_1^{a-1} \exp(-b\alpha_1) \beta_1^{c-1} \exp(-d\beta_1) \alpha_2^{e-1} \exp(-s\alpha_2) \beta_2^{g-1} \exp(-h\beta_2) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta - \mu)\right\} \quad (5.40)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.40)'de verilen Önsel dağılım ve denklem (5.33)'de verilen örneklem olabirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | x, y) = \frac{\beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^n T}{\int_{\beta_1=0}^{\infty} \int_{\alpha_1=0}^{\infty} \int_{\beta_2=0}^{\infty} \int_{\alpha_2=0}^{\infty} \int_{\theta=-\infty}^{\infty} \beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^n T d\beta_1 d\beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta} \quad (5.41)$$

Burada

$$\begin{aligned} T = & (\exp(-\theta) - 1) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta - \mu)\right\} \times \\ & \exp\left\{\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) - b\right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)\right\} \exp\left\{\alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - s\right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i)\right\} \times \\ & \exp\left\{-\beta_1 \left[\sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1}) + d\right]\right\} \exp\left\{-\beta_2 \left[\sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}) + h\right]\right\} \times \\ & \exp\left\{-\theta \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1}))\right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \sum_{i=1}^n \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))\right)\right]\right\} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1})\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1})\right\} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2})\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2})\right\} \\ & \exp\left\{-2 \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\exp(-\theta) + \exp\left\{-\theta \left[\frac{(1 - \exp(-\beta_1 \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1})))}{(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2})))}\right]\right\}}{\exp(-\theta(1 - \exp(-\beta_1 \text{arc sech}(1 - x_i^{\alpha_1})))) - \exp(-\theta(1 - \exp(-\beta_2 \text{arc sech}(1 - y_i^{\alpha_2}))))} \right] \right\} \end{aligned}$$

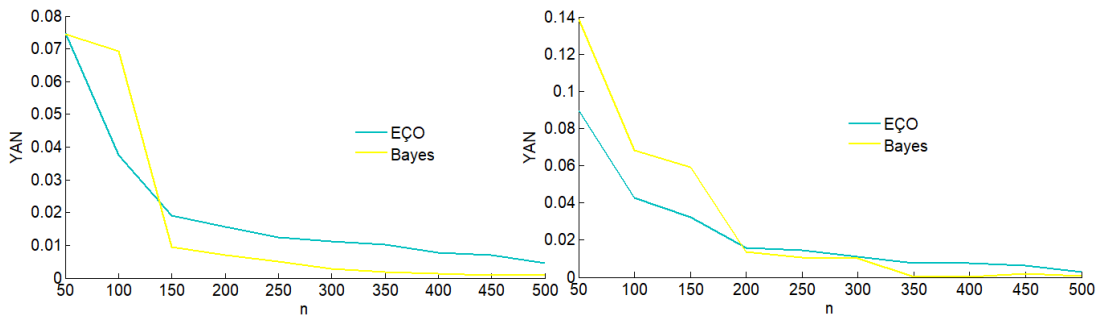
Şeklinde. Denklem (5.41)'deki sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülmediği için R programında Metropol-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.3.2. Simülasyon Çalışması

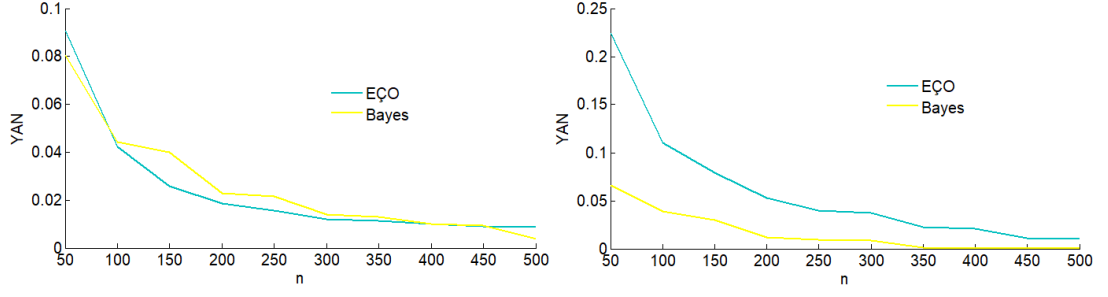
Bu bölümde, Frank-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin HKO ve yan kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemleri R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı β_1 , α_1 , β_2 , α_2 ve θ parametreleri için Tablo 5.13-5.18’de verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.13. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

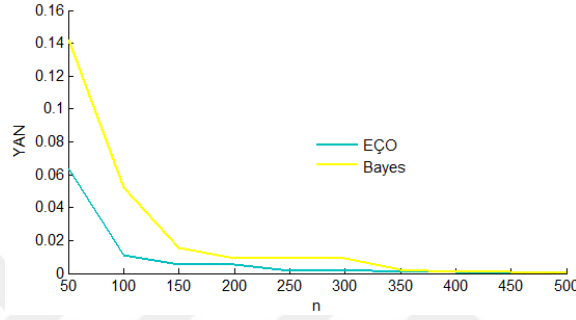
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0747	0.0893	0.0906	0.2243	0.0637	0.0744	0.1384	0.0805	0.0663	0.1422
100	0.0376	0.0427	0.0424	0.1098	0.0113	0.0693	0.0682	0.0443	0.0385	0.0523
150	0.0190	0.0324	0.0257	0.0790	0.0053	0.0094	0.0593	0.0399	0.0296	0.0155
200	0.0157	0.0156	0.0184	0.0527	0.0050	0.0070	0.0134	0.0228	0.0122	0.0091
250	0.0123	0.0144	0.0156	0.0394	0.0017	0.0050	0.0107	0.0216	0.0093	0.0091
300	0.0112	0.0109	0.0119	0.0375	0.0020	0.0028	0.0100	0.0141	0.0089	0.0089
350	0.0103	0.0075	0.0114	0.0223	0.0011	0.0017	0.0002	0.0130	0.0009	0.0022
400	0.0076	0.0073	0.0099	0.0209	0.0010	0.0012	0.0001	0.0101	0.0006	0.0010
450	0.0069	0.0063	0.0089	0.0113	0.0005	0.0009	0.0017	0.0093	0.0005	0.0008
500	0.0045	0.0028	0.0086	0.0102	0.0005	0.0008	0.0008	0.0037	0.0003	0.0002



Şekil 5.94. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



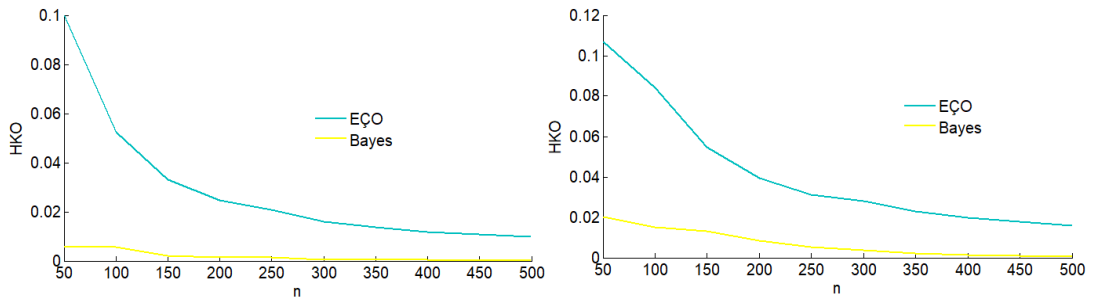
Şekil 5.95. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



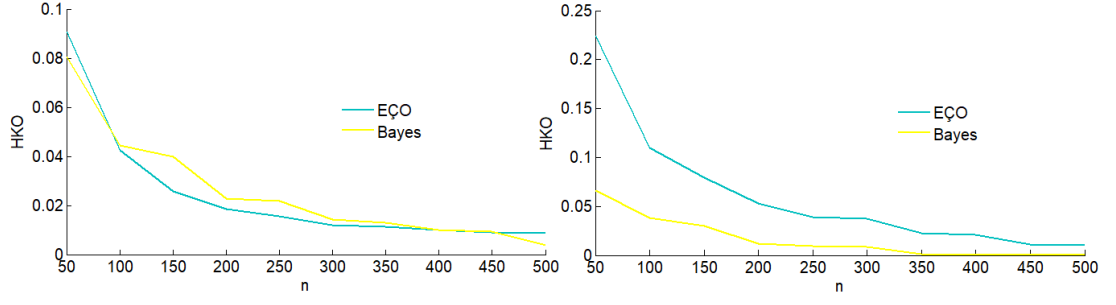
Şekil 5.96. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.14. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

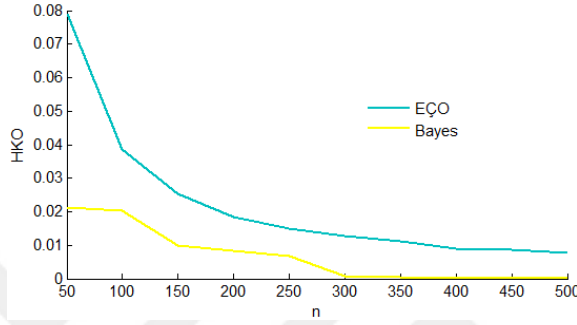
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.1121	0.1767	0.1375	0.0645	0.0790	0.0057	0.0284	0.0071	0.0049	0.0211
100	0.0525	0.0842	0.0488	0.0267	0.0384	0.0055	0.0054	0.0021	0.0016	0.0202
150	0.0329	0.0545	0.0310	0.0166	0.0253	0.0027	0.0030	0.0017	0.0011	0.0100
200	0.0247	0.0393	0.0228	0.0119	0.0183	0.0015	0.0028	0.0014	0.0010	0.0083
250	0.0209	0.0312	0.0180	0.0092	0.0148	0.0014	0.0013	0.0011	0.0010	0.0067
300	0.0160	0.0279	0.0141	0.0079	0.0127	0.0006	0.0008	0.0008	0.0007	0.0006
350	0.0137	0.0227	0.0120	0.0065	0.0113	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0003
400	0.0117	0.0198	0.0108	0.0057	0.0090	0.0003	0.0003	0.0002	0.0003	0.0002
450	0.0108	0.0179	0.0009	0.0050	0.0086	0.0002	0.0001	0.0003	0.0002	0.0002
500	0.0099	0.0159	0.0008	0.0045	0.0077	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001



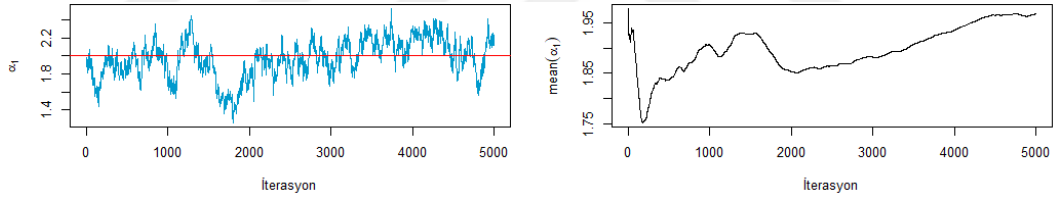
Şekil 5.97. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



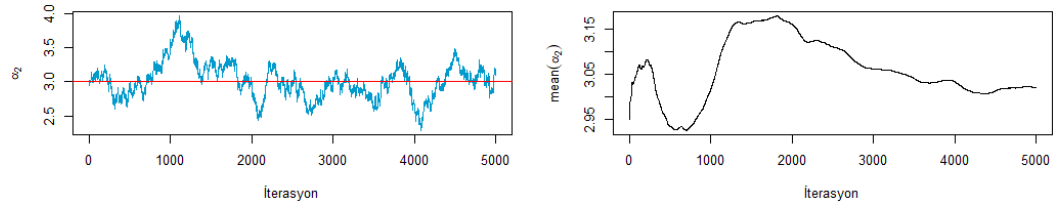
Şekil 5.98. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



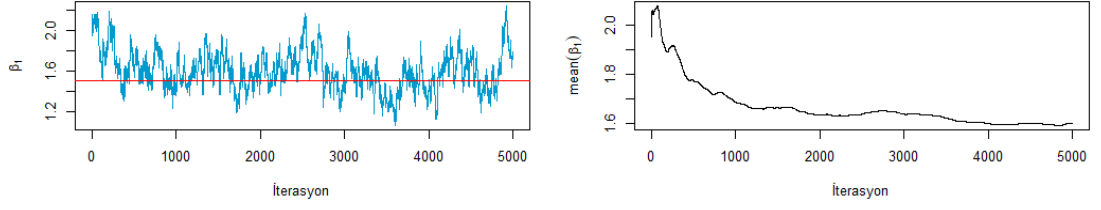
Şekil 5.99. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



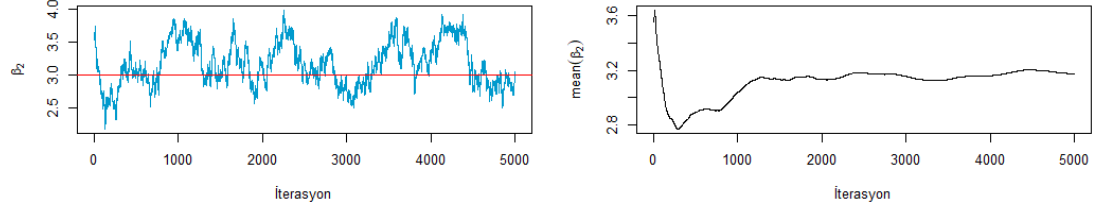
Şekil 5.100. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



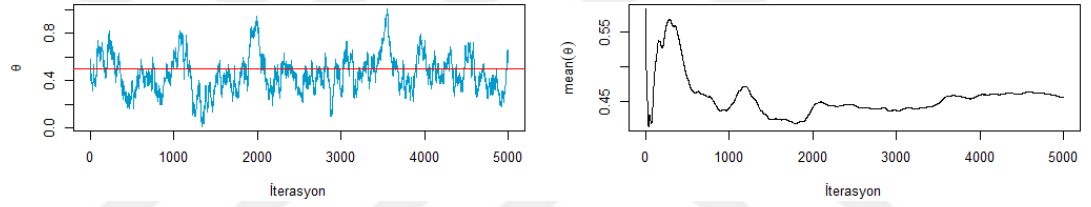
Şekil 5.101. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.102. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



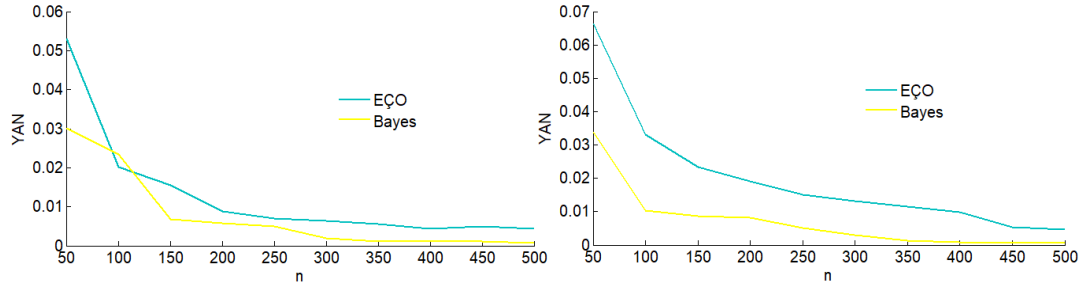
Şekil 5.103. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



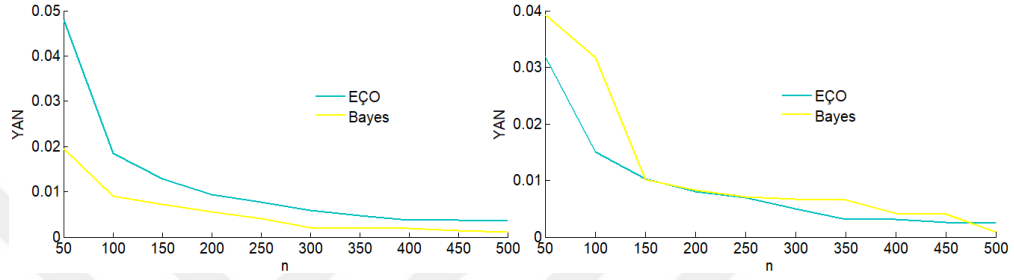
Şekil 5.104. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = -0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.15. $(\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

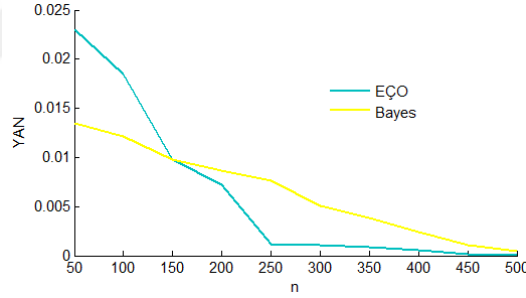
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0530	0.0663	0.0479	0.0318	0.0229	0.0300	0.0338	0.0194	0.0392	0.0135
100	0.0202	0.0331	0.0184	0.0149	0.0184	0.0233	0.0102	0.0090	0.0317	0.0121
150	0.0155	0.0233	0.0128	0.0115	0.0097	0.0067	0.0087	0.0072	0.0109	0.0098
200	0.0088	0.0192	0.0094	0.0080	0.0071	0.0057	0.0081	0.0055	0.0083	0.0086
250	0.0070	0.0151	0.0077	0.0069	0.0012	0.0048	0.0055	0.0040	0.0071	0.0086
300	0.0063	0.0133	0.0058	0.0049	0.0010	0.0019	0.0029	0.0021	0.0067	0.0050
350	0.0055	0.0116	0.0047	0.0031	0.0008	0.0012	0.0013	0.0019	0.0065	0.0038
400	0.0044	0.0098	0.0038	0.0030	0.0006	0.0011	0.0008	0.0019	0.0041	0.0024
450	0.0049	0.0052	0.0036	0.0026	0.0001	0.0010	0.0006	0.0014	0.0040	0.0010
500	0.0044	0.0046	0.0035	0.0024	0.0001	0.0007	0.0006	0.0010	0.0009	0.0004



Şekil 5.105. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



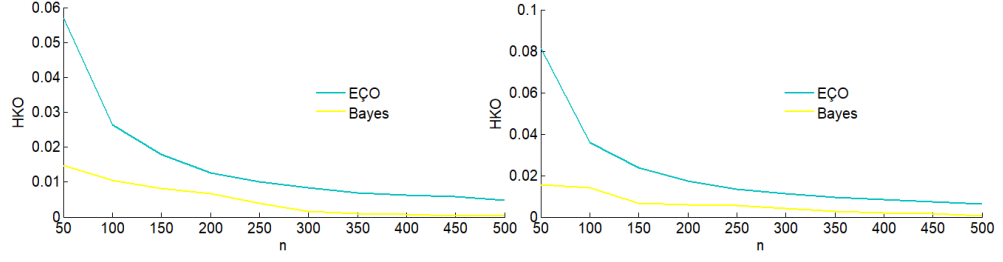
Şekil 5.106. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



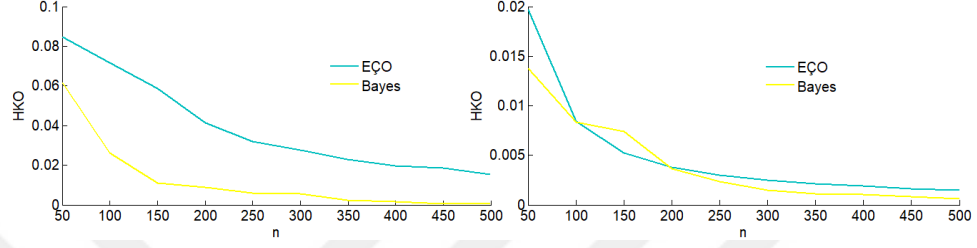
Şekil 5.107. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.16. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

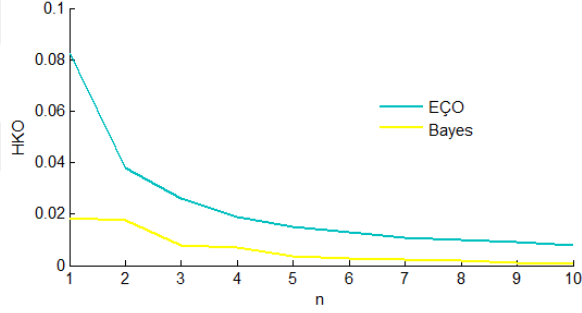
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0568	0.0811	0.0846	0.0196	0.0825	0.0147	0.0154	0.0615	0.0137	0.0183
100	0.0263	0.0357	0.0717	0.0084	0.0378	0.0105	0.0142	0.0260	0.0083	0.0177
150	0.0179	0.0238	0.0586	0.0052	0.0259	0.0081	0.0066	0.0109	0.0073	0.0080
200	0.0127	0.0171	0.0413	0.0038	0.0190	0.0067	0.0060	0.0089	0.0036	0.0071
250	0.0099	0.0132	0.0320	0.0029	0.0150	0.0039	0.0054	0.0061	0.0023	0.0037
300	0.0083	0.0114	0.0276	0.0025	0.0129	0.0015	0.0040	0.0054	0.0014	0.0029
350	0.0069	0.0093	0.0229	0.0021	0.0109	0.0009	0.0026	0.0022	0.0011	0.0024
400	0.0062	0.0084	0.0197	0.0019	0.0097	0.0006	0.0020	0.0015	0.0010	0.0019
450	0.0058	0.0074	0.0187	0.0016	0.0089	0.0004	0.0015	0.0006	0.0008	0.0011
500	0.0048	0.0063	0.0152	0.0014	0.0078	0.0003	0.0007	0.0004	0.0005	0.0007



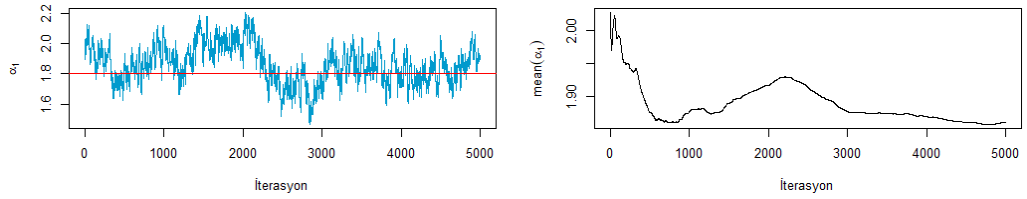
Şekil 5.108. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



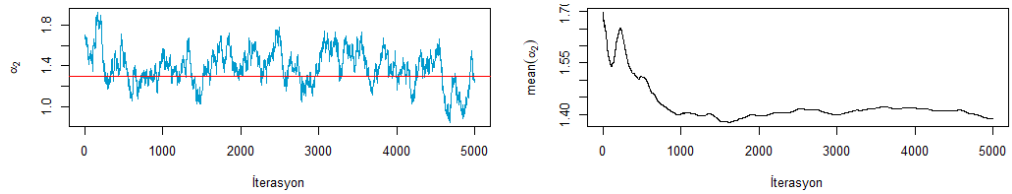
Şekil 5.109. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



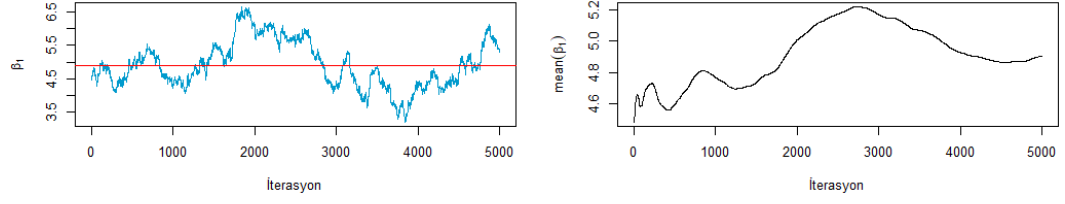
Şekil 5.110. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) Durumunda θ parametresi için HKO



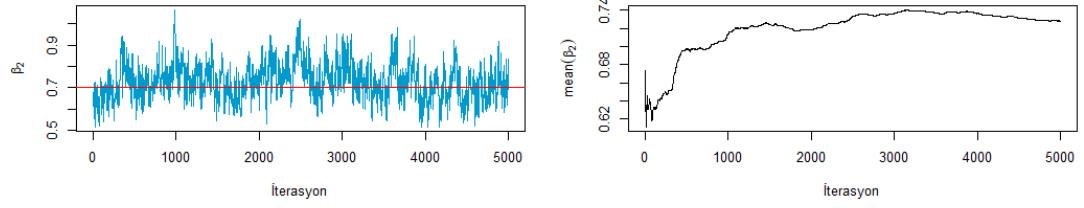
Şekil 5.111. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



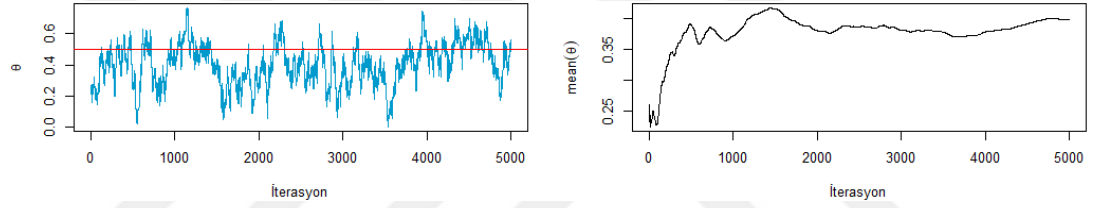
Şekil 5.112. ($\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.113. $(\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



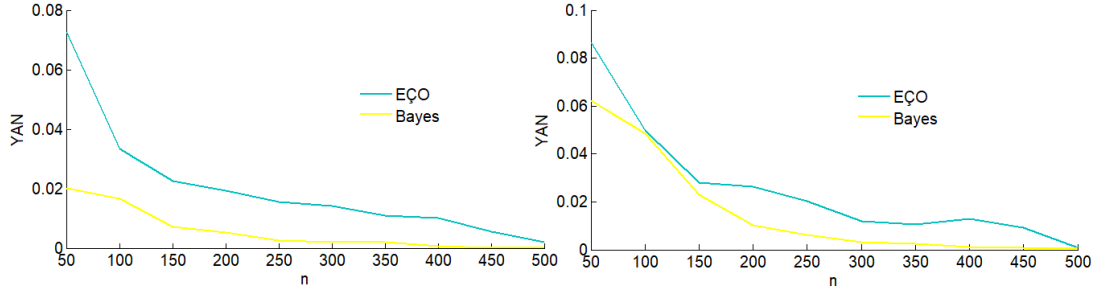
Şekil 5.114. $(\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



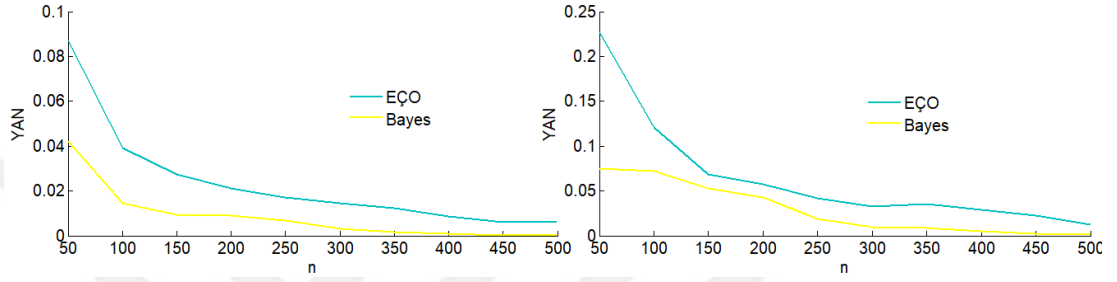
Şekil 5.115. $(\alpha_1 = 1.8, \alpha_2 = 1.3, \beta_1 = 4.9, \beta_2 = 0.7, \theta = 0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.17. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

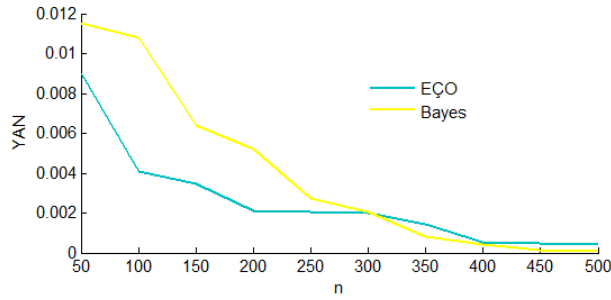
	EÇÖ					Bayes				
n	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0725	0.0864	0.0868	0.2262	0.0090	0.0247	0.0623	0.0422	0.0750	0.0115
100	0.0333	0.0499	0.0391	0.1211	0.0041	0.0166	0.0484	0.0146	0.0725	0.0107
150	0.0224	0.0281	0.0272	0.0684	0.0034	0.0071	0.0229	0.0095	0.0531	0.0063
200	0.0192	0.0262	0.0212	0.0578	0.0021	0.0053	0.0102	0.0090	0.0426	0.0052
250	0.0154	0.0204	0.0170	0.0417	0.0020	0.0024	0.0060	0.0067	0.0186	0.0027
300	0.0141	0.0119	0.0143	0.0327	0.0020	0.0020	0.0031	0.0031	0.0093	0.0020
350	0.0108	0.0104	0.0125	0.0353	0.0014	0.0020	0.0026	0.0016	0.0085	0.0008
400	0.0100	0.0130	0.0087	0.0290	0.0005	0.0006	0.0013	0.0007	0.0053	0.0004
450	0.0054	0.0090	0.0060	0.0228	0.0005	0.0002	0.0007	0.0003	0.0020	0.0001
500	0.0021	0.0010	0.0059	0.0123	0.0004	0.0001	0.0005	0.0001	0.0012	0.0001



Şekil 5.116. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



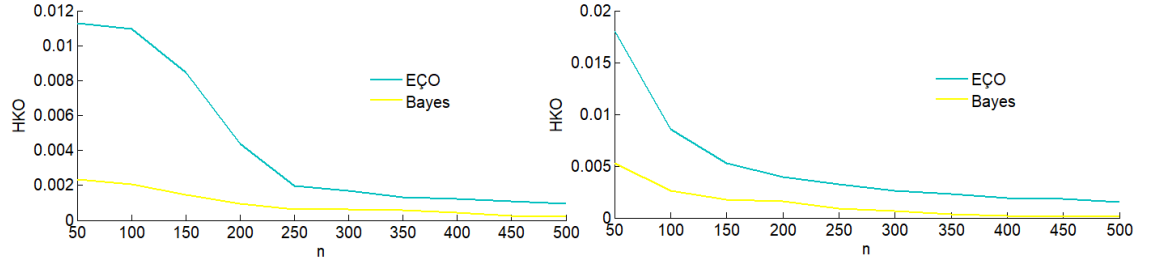
Şekil 5.117. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



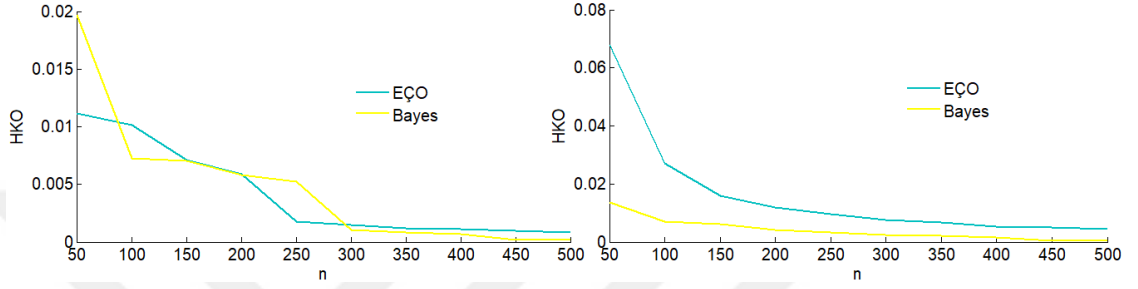
Şekil 5.118. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.18. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

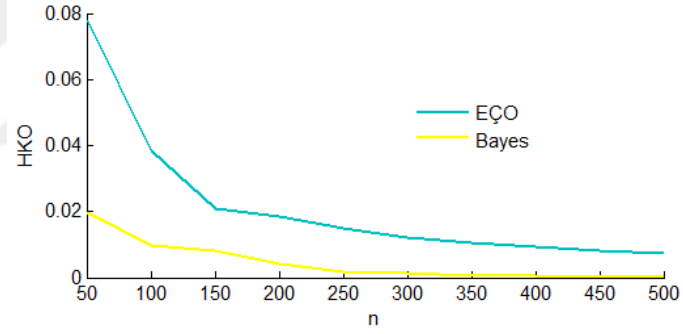
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0112	0.0180	0.0112	0.0679	0.0777	0.0023	0.0052	0.0196	0.0135	0.0198
100	0.0109	0.0086	0.0101	0.0272	0.0384	0.0020	0.0026	0.0072	0.0069	0.0098
150	0.0084	0.0053	0.0071	0.0158	0.0210	0.0014	0.0017	0.0071	0.0062	0.0082
200	0.0043	0.0039	0.0059	0.0119	0.0185	0.0009	0.0016	0.0058	0.0041	0.0041
250	0.0019	0.0033	0.0017	0.0094	0.0148	0.0006	0.0008	0.0052	0.0034	0.0018
300	0.0016	0.0026	0.0014	0.0075	0.0122	0.0006	0.0006	0.0011	0.0024	0.0012
350	0.0013	0.0023	0.0012	0.0066	0.0105	0.0005	0.0003	0.0008	0.0020	0.0007
400	0.0012	0.0019	0.0011	0.0054	0.0094	0.0004	0.0002	0.0006	0.0017	0.0004
450	0.0011	0.0018	0.0009	0.0050	0.0080	0.0002	0.0001	0.0001	0.0005	0.0003
500	0.0009	0.0015	0.0008	0.0044	0.0073	0.0002	0.0001	0.0001	0.0003	0.0002



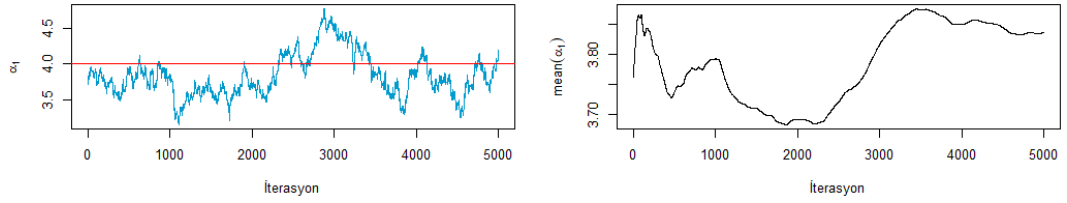
Şekil 5.119. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



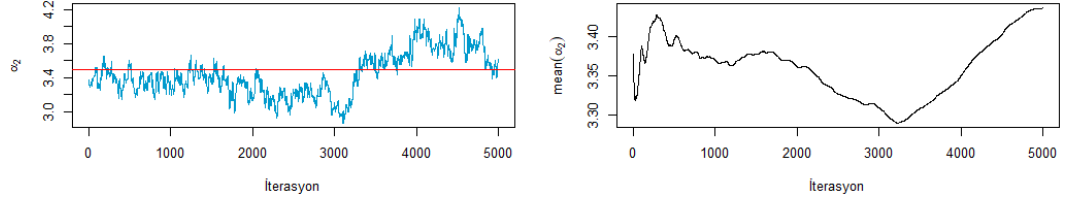
Şekil 5.120. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



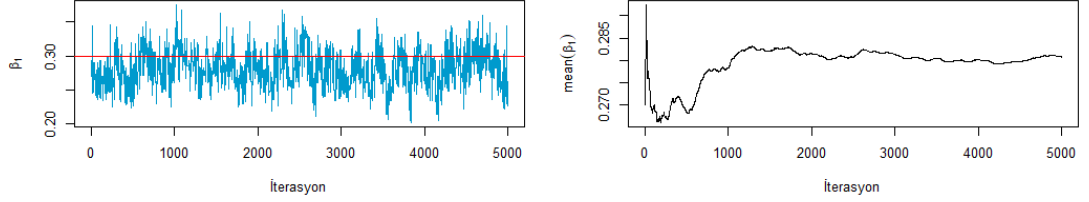
Şekil 5.121. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için HKO



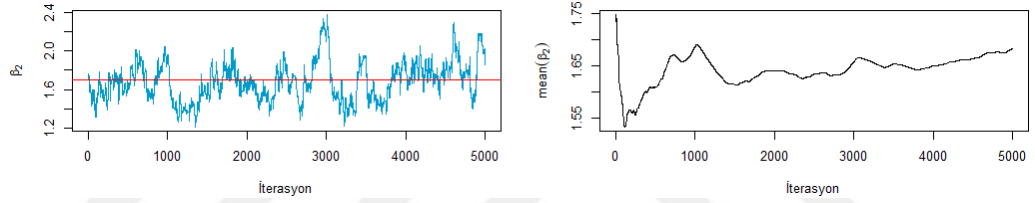
Şekil 5.122. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyonu çizimi



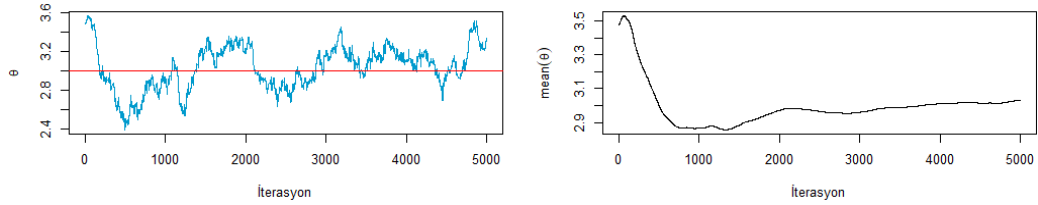
Şekil 5.123. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.124. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.125. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.126. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3.5, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.7, \theta = 3)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları Frank-MUÜ dağılımına ait $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametrelerinin simülasyon yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarı tablo ve şekillerde görüldüğü gibi tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde parametreler için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin ortalama HKO ve yan değerlerinin birbirine çok yakın ve küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Frank-MUÜ dağılımının parametre tahminleri için EÇO ve Bayes tahmin edicileri kullanılabilir.

5.4. İki Değişkenli Ali-Mikhail Haq Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı

Denklem (5.1) ve denklem (5.2) ile denklem (3.20)'deki Ali-Mikhail Haq kapulasına dayalı iki değişkenli Ali-Mikhail Haq modifiyeli unit üstel (AMH-MUÜ) dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu;

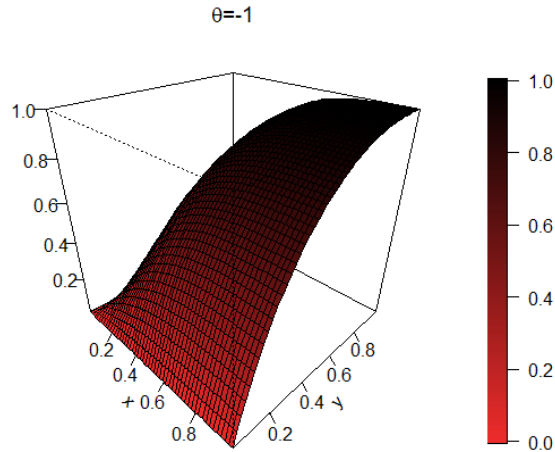
$$F_A(x, y) = \frac{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))}{1 - \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))} \quad (5.42)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (5.43)'de verilmiştir.

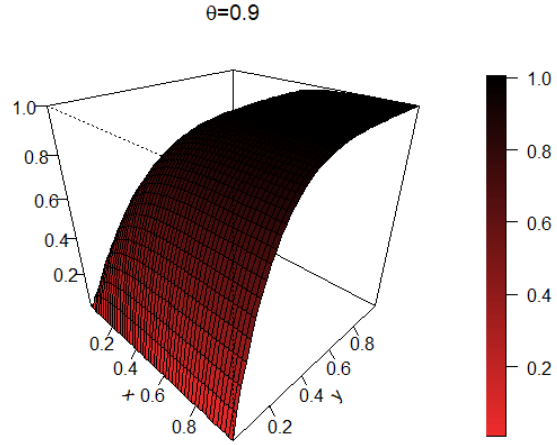
$$f_A(x, y) = \frac{\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x^{(\alpha_1-1)} y^{(\alpha_2-1)} AB [1 + \theta AB - 2\theta A - 2\theta B + \theta^2 AB + \theta]}{\sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}} \sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}} [AB - \theta - 1]^3} \quad (5.43)$$

Burada $A = \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))$ ve $B = \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))$ şeklindedir.

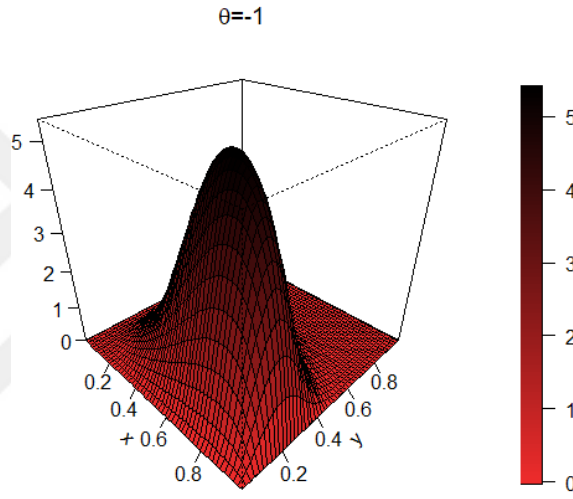
Elde edilen yeni dağılıma ilişkin denklem (5.42)'de verilen dağılım fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.127 ve 5.128'de ve denklem (5.43)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.129, 5.130 ve 5.131'de verilmiştir.



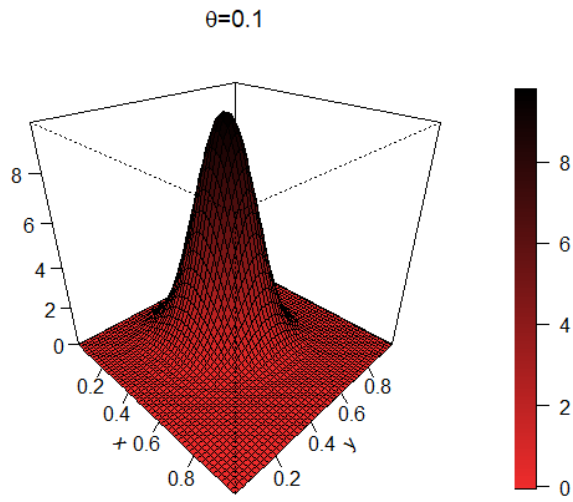
Şekil 5.127. $\beta_1 = 3.5$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının df'si



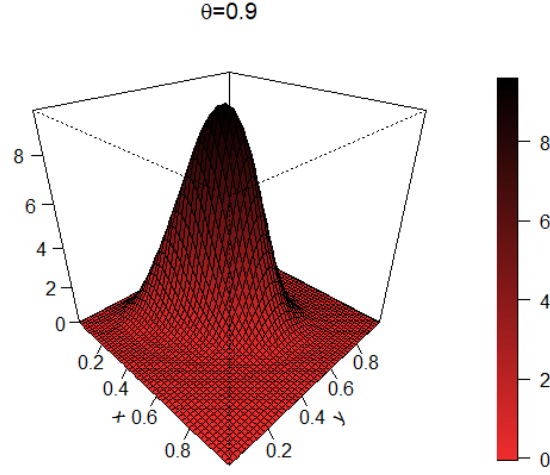
Şekil 5.128. $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.129. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 9$ iken AMH-MUÜ dağılımının oyf'si



Şekil 5.130. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının oyf'si



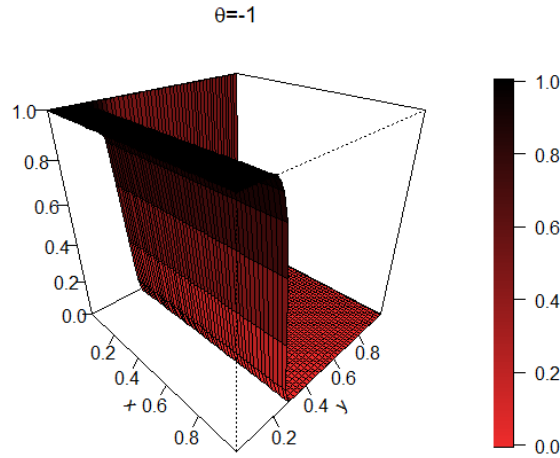
Şekil 5.131. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının yoğunluğu

AMH-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırası ile;

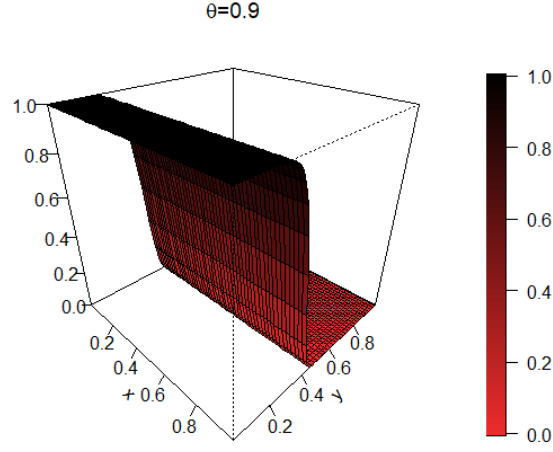
$$S_A(x, y) = 1 - \left[\frac{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))}{1 - \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))} \right] \quad (5.44)$$

$$h_A(x, y) = \frac{f_{AMH}(x, y)}{1 - \left[\frac{(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))) (1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})))}{1 - \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))} \right]} \quad (5.45)$$

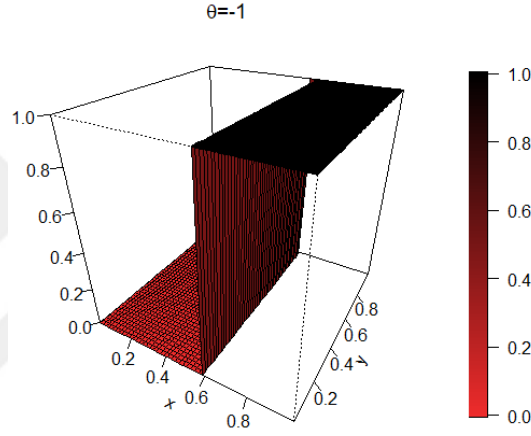
Yeni dağılıma ilişkin denklem (5.44)'de verilen yaşam fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.132 ve 5.133'de ve denklem (5.45)'de verilen hazard fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.134 ve 5.135'da verilmiştir.



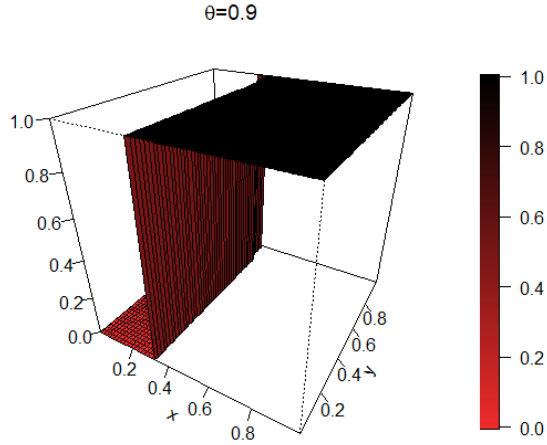
Şekil 5.132. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.133. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken AMH-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.134. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken AMH-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu



Şekil 5.135. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken AMH-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 5.127-5.135'e göre AMH-MUÜ dağılımı, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olmakla birlikte, özellikle artan tehlike oranına sahip uygulamalarda kullanılmaya uygun olabileceği düşünülmektedir.

5.4.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde AMH-MUÜ dağılımının bilinmeyen $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametrelerini tahmin etmek için iki farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; En çok olabilirlik yöntemi ve Bayes çıkarımıdır.

5.4.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ AMH-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, örneklemeye ait $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametreleri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
 L(\Theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x_i^{(\alpha_1-1)} y_i^{(\alpha_2-1)} \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \right. \\
 &\quad \times \left[\begin{aligned} &1 + \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ &- 2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) - 2\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ &+ \theta^2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) + \theta \end{aligned} \right] \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\left[\sqrt{x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \right]} \right) \\
 &\quad \times \left. \left[(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))) (\exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))) - \theta \right]^3 \right\} \\
 &= \beta_1^n \alpha_1^n \beta_2^n \alpha_2^n \exp \left\{ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \exp \left\{ -\beta_1 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\beta_2 \sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ \log \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} &1 + \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ &- 2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \\ &- 2\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ &+ \theta^2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) + \theta \end{aligned} \right] \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ -3 \log \sum_{i=1}^n [(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}))) (\exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2}))) - \theta] \right\}
 \end{aligned}$$

(5.46)

$$\begin{aligned}
\ell(\Theta) &= n \log(\beta_1) + n \log(\alpha_1) + n \log(\beta_2) + n \log(\alpha_2) + n \log(\theta) \\
&+ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \\
&- \sum_{i=1}^n \beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) - \sum_{i=1}^n \beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \\
&+ \sum_{i=1}^n \log \left[\begin{aligned} &1 + \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ &- 2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) - 2\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ &+ \theta^2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) + \theta \end{aligned} \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \\
&- 3 \sum_{i=1}^n \log \left[\left(1 - \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \right) \left(1 - \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \right) - \theta \right] \quad (5.47)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 5.48-5.52’de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_1} &= \frac{n}{\beta_1} - \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\
&+ \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\theta \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \left[2 \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) - 1 - \theta \right] \right) \times \right. \\
&\left. \left(1 / \left[\begin{aligned} &-\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) - \theta \\ &+ 2\theta \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) + 2\theta \exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ &- \theta^2 - \theta \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \end{aligned} \right] \right) \right\} \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_2} &= \frac{n}{\beta_2} - \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\
&+ \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\theta \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \left[2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) - 1 - \theta \right] \right) \times \right. \\
&\left. \left(1 / \left[\begin{aligned} &-\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) - \theta \\ &+ 2\theta \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) + 2\theta \exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ &- \theta^2 - \theta \exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \end{aligned} \right] \right) \right\} \quad (5.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}}} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \\
&\sum_{i=1}^n \left[\left(\left[\frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (2 \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) - 1 - \theta}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 \times \begin{pmatrix} 2 \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \\ + 2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \\ (-\theta - 1)(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\ + \beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ -\theta - \theta^2 \end{pmatrix} \right) \right] \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_1} \log(x_i) - 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2x_i^{2\alpha_1}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3x_i^{\alpha_1} \log(x_i) + 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i)}{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \\
&- 3 \sum_{i=1}^n \left[\left(\left[\frac{\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 \times \right. \right. \\
&\left. \left. \left[\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) - \theta \right] \right] \right) \right] \quad (5.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_2} &= \frac{n}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}}} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \\
&\sum_{i=1}^n \left[\left(\left[\frac{\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) - 1 - \theta}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 \times \begin{pmatrix} 2 \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) \\ + 2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) \\ (-\theta - 1)(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\ + \beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ -\theta - \theta^2 \end{pmatrix} \right) \right] \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha_2} \log(y_i) - 2y_i^{2\alpha_2} \log(y_i^{\alpha_2})}{y_i^{\alpha_2} - 2y_i^{2\alpha_2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3y_i^{\alpha_2} \log(y_i) + 2y_i^{2\alpha_2} \log(y_i)}{2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \\
&- 3 \sum_{i=1}^n \left[\left(\left[\frac{\beta_1 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \times}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 \times \right. \right. \\
&\left. \left. \left[\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) - \theta \right] \right] \right) \right] \quad (5.51)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{l} \left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \right. \\ \left. -2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) - 2 \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \right) \times \\ \left. +2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) + 1 \right) \\ \left(\begin{array}{l} 1 + \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ 1 / -2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) - 2\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \\ +\theta^2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) + \theta \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (5.52)$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözilemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.4.1.2. Bayes Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ AMH-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, AMH-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall \alpha_2 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_2 \in (0, \infty)$ ve $\forall \theta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta_1 \sim \text{Gamma}(c, d)$, $\alpha_2 \sim \text{Gamma}(e, s)$, $\beta_2 \sim \text{Gamma}(g, h)$, $\theta \sim \text{Uniform}(-1, 1)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\Theta) = \alpha_1^{a-1} \exp(-b\alpha_1) \beta_1^{c-1} \exp(-d\beta_1) \alpha_2^{e-1} \exp(-s\alpha_2) \beta_2^{g-1} \exp(-h\beta_2) \quad (5.53)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.53)'de verilen Önsel dağılım ve denklem (5.46)'da verilen örneklem olabilirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | x, y) = \frac{\beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} T}{\int_{\beta_1=0}^{\infty} \int_{\alpha_1=0}^{\infty} \int_{\beta_2=0}^{\infty} \int_{\alpha_2=0}^{\infty} \int_{\theta=-1}^1 \beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} T d\beta_1 d\beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta} \quad (5.54)$$

Burada

$$\begin{aligned}
T = & \exp \left\{ \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - s \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \\
& \exp \left\{ -\beta_1 \left[\sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) + d \right] \right\} \exp \left\{ -\beta_2 \left[\sum_{i=1}^n \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) + h \right] \right\} \times \\
& \exp \left\{ \log \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} & 1 + \theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ & - 2\theta \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) - 2\theta \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\ & + \theta^2 \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) + \theta \end{aligned} \right] \right\} \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\
& \exp \left\{ -3 \log \sum_{i=1}^n [(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))) (\exp(\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}))) - \theta] \right\}
\end{aligned}$$

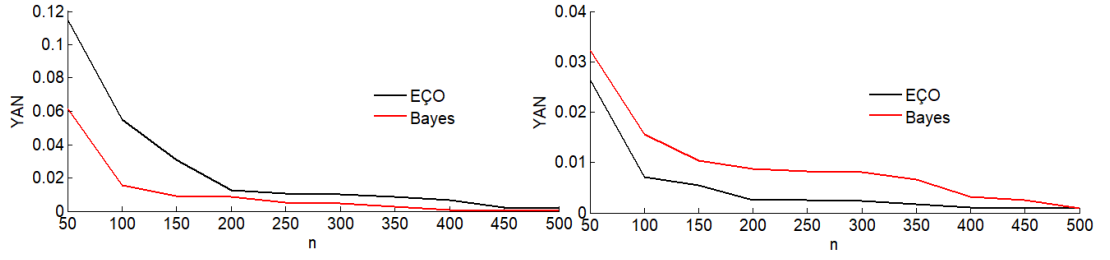
şeklinde. Denklem (5.54)'deki sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülemediği için R programında Metropol-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.4.2. Simülasyon Çalışması

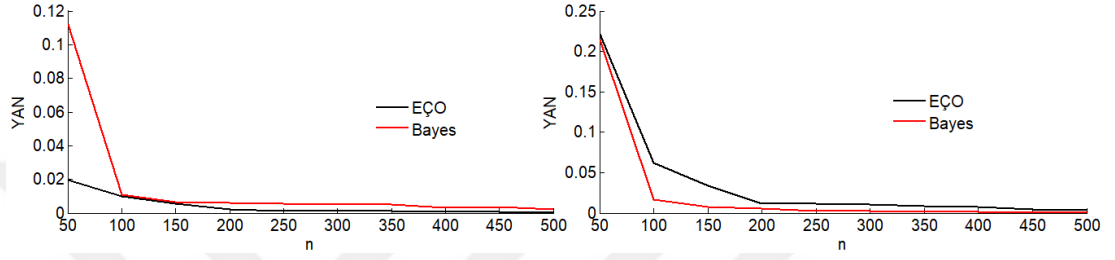
Bu bölümde, AMH-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin HKO ve yan kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemleri R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$ ve θ parametreleri için Tablo 5.19-5.24’de verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.19. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

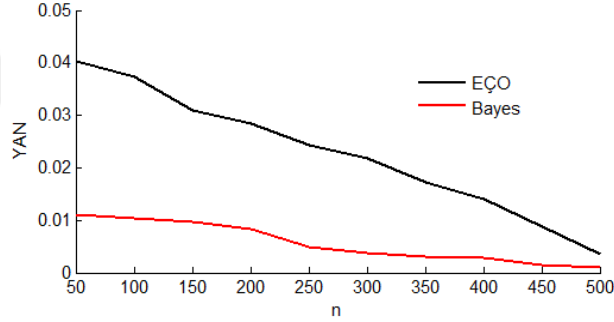
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.1145	0.0263	0.0194	0.2211	0.0403	0.0616	0.0322	0.1122	0.2137	0.0111
100	0.0553	0.0071	0.0097	0.0624	0.0372	0.0154	0.0156	0.0109	0.0161	0.0103
150	0.0311	0.0059	0.0056	0.0333	0.0308	0.0091	0.0103	0.0067	0.0072	0.0098
200	0.0125	0.0026	0.0020	0.0120	0.0284	0.0087	0.0087	0.0062	0.0060	0.0082
250	0.0107	0.0025	0.0012	0.0112	0.0243	0.0053	0.0081	0.0053	0.0025	0.0049
300	0.0101	0.0023	0.0010	0.0110	0.0218	0.0046	0.0081	0.0052	0.0023	0.0038
350	0.0087	0.0017	0.0009	0.0087	0.0171	0.0028	0.0066	0.0051	0.0017	0.0030
400	0.0065	0.0009	0.0006	0.0077	0.0139	0.0008	0.0032	0.0031	0.0015	0.0027
450	0.0023	0.0009	0.0005	0.0042	0.0087	0.0004	0.0024	0.0038	0.0009	0.0015
500	0.0017	0.0008	0.0004	0.0038	0.0036	0.0003	0.0009	0.0022	0.0008	0.0010



Şekil 5.136. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



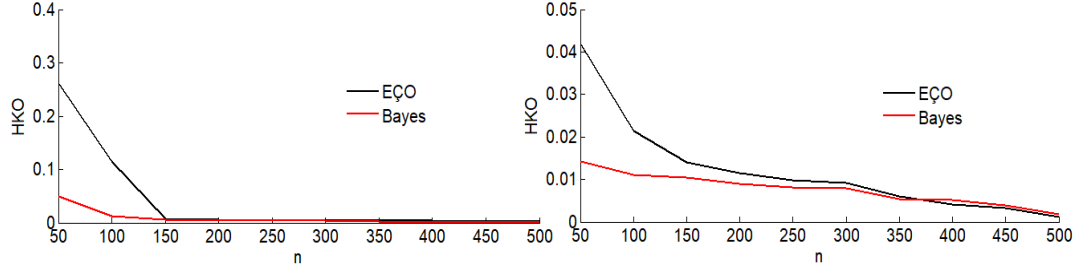
Şekil 5.137. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



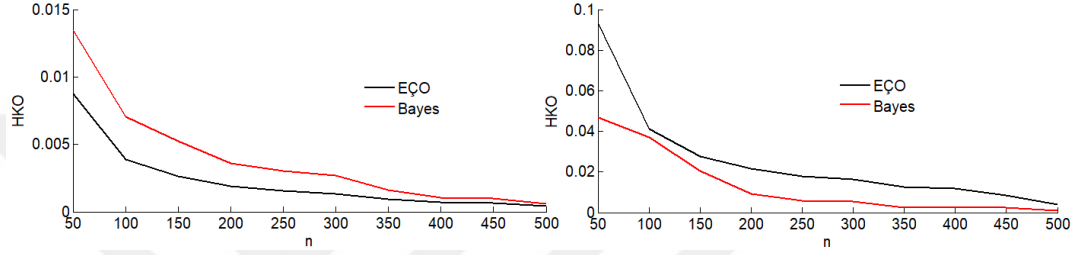
Şekil 5.138. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.20. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

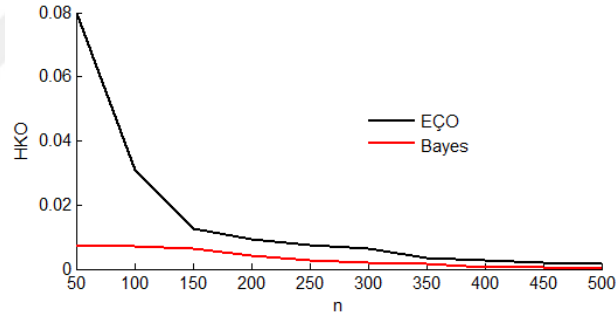
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.2611	0.0419	0.0087	0.0930	0.0797	0.0488	0.0141	0.0134	0.0468	0.0075
100	0.1151	0.0213	0.0038	0.0413	0.0308	0.0122	0.0111	0.0070	0.0369	0.0070
150	0.0054	0.0141	0.0026	0.0275	0.0124	0.0067	0.0104	0.0052	0.0205	0.0063
200	0.0057	0.0115	0.0018	0.0217	0.0093	0.0045	0.0089	0.0036	0.0092	0.0041
250	0.0049	0.0098	0.0015	0.0173	0.0073	0.0045	0.0081	0.0030	0.0059	0.0027
300	0.0041	0.0092	0.0013	0.0165	0.0062	0.0034	0.0079	0.0026	0.0055	0.0020
350	0.0040	0.0059	0.0009	0.0127	0.0036	0.0020	0.0053	0.0016	0.0023	0.0016
400	0.0035	0.0040	0.0007	0.0118	0.0028	0.0008	0.0051	0.0012	0.0023	0.0006
450	0.0026	0.0032	0.0006	0.0083	0.0021	0.0007	0.0039	0.0010	0.0017	0.0005
500	0.0026	0.0012	0.0004	0.0039	0.0019	0.0006	0.0018	0.0006	0.0007	0.0001



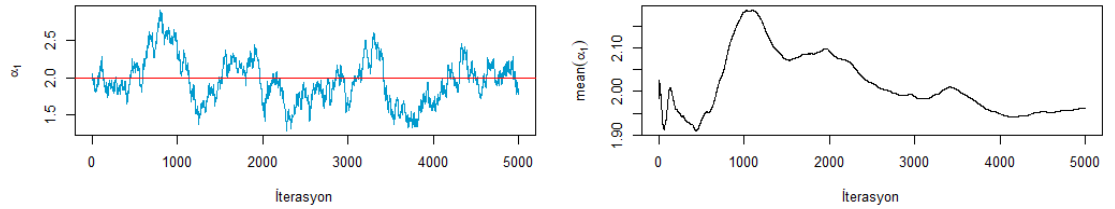
Şekil 5.139. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



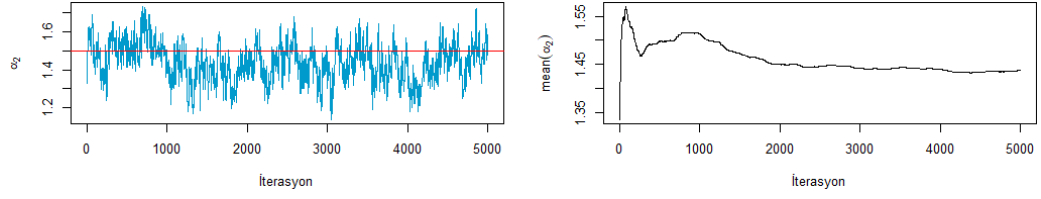
Şekil 5.140. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



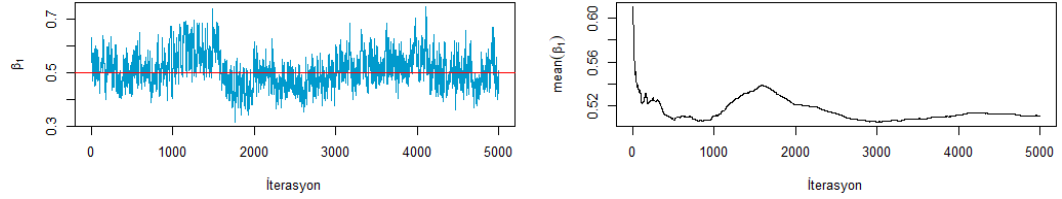
Şekil 5.141. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



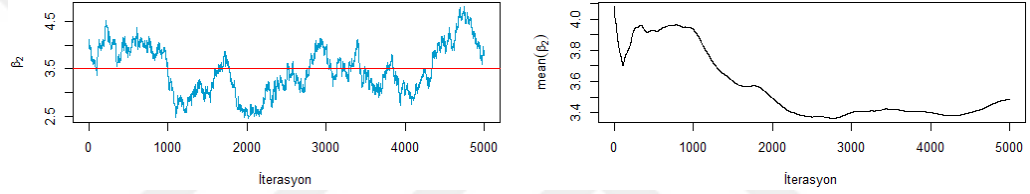
Şekil 5.142. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyonu çizimi



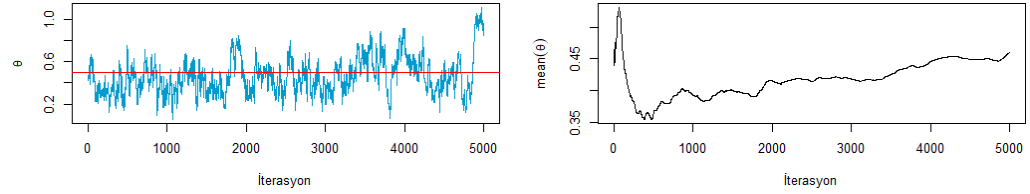
Şekil 5.143. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.144. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



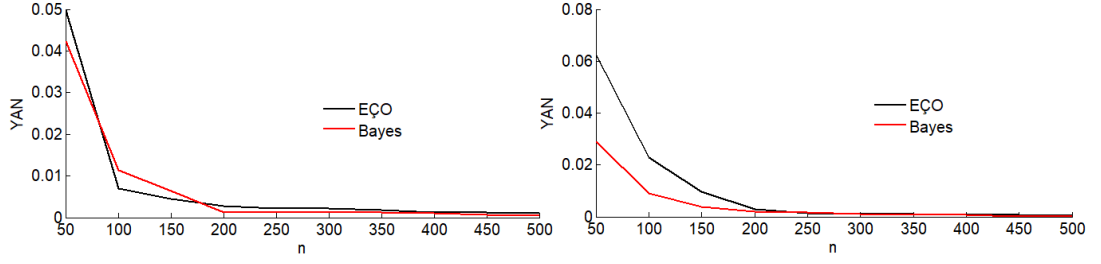
Şekil 5.145. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



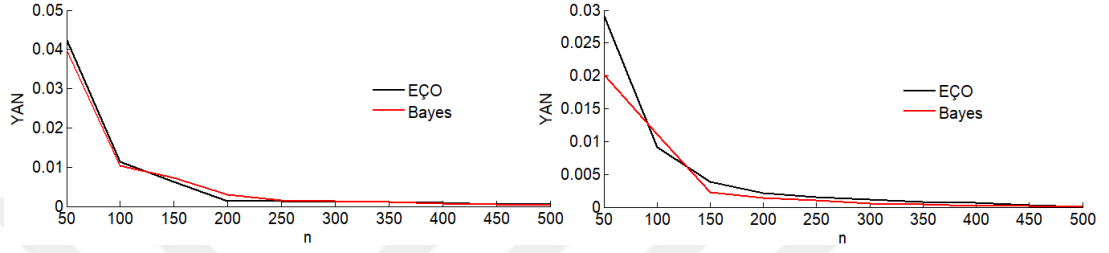
Şekil 5.146. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3.5, \theta = -0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.21. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

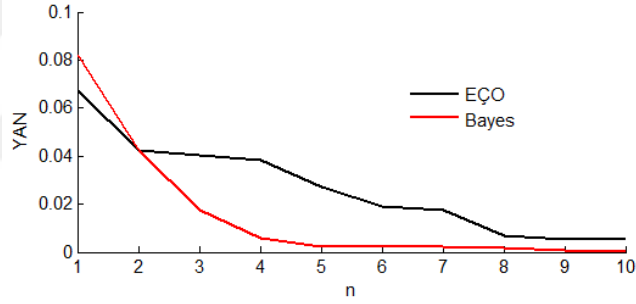
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0497	0.0624	0.0423	0.0297	0.0671	0.1012	0.0605	0.0396	0.0201	0.0815
100	0.0069	0.0229	0.0113	0.0091	0.0423	0.0064	0.0294	0.0103	0.0111	0.0425
150	0.0045	0.0097	0.0063	0.0038	0.0402	0.0035	0.0090	0.0073	0.0022	0.0175
200	0.0027	0.0030	0.0013	0.0021	0.0383	0.0030	0.0051	0.0029	0.0014	0.0058
250	0.0021	0.0013	0.0012	0.0015	0.0269	0.0026	0.0015	0.0015	0.0011	0.0025
300	0.0021	0.0011	0.0011	0.0011	0.0190	0.0019	0.0012	0.0013	0.0006	0.0024
350	0.0017	0.0010	0.0011	0.0008	0.0173	0.0014	0.0009	0.0011	0.0004	0.0023
400	0.0013	0.0008	0.0010	0.0006	0.0068	0.0013	0.0008	0.0007	0.0002	0.0017
450	0.0011	0.0007	0.0006	0.0002	0.0052	0.0010	0.0001	0.0004	0.0001	0.0005
500	0.0010	0.0005	0.0004	0.0001	0.0051	0.0006	0.0001	0.0002	0.0001	0.0004



Şekil 5.147. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



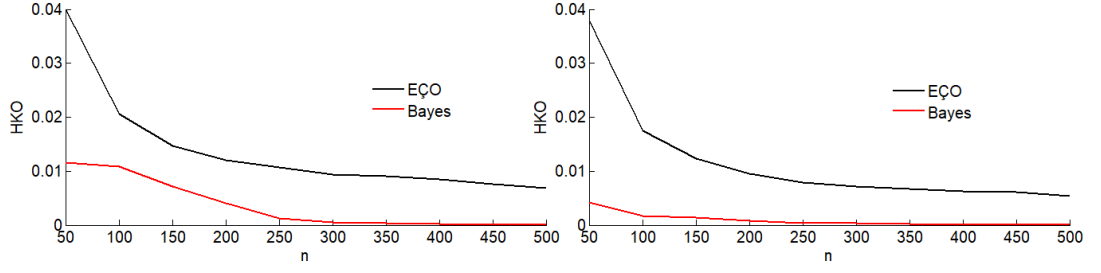
Şekil 5.148. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



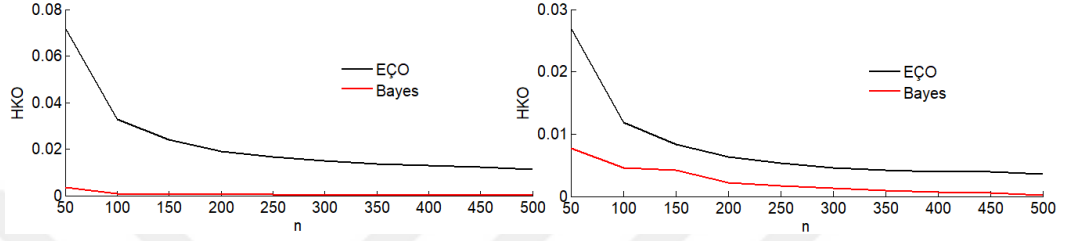
Şekil 5.149. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.22. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

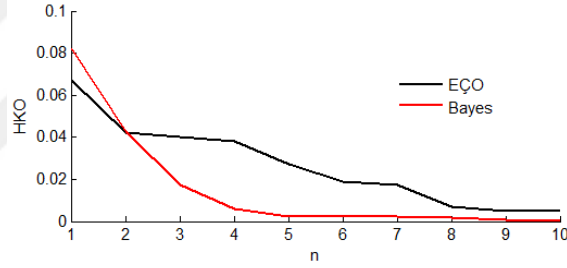
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0399	0.0377	0.0718	0.0269	0.0338	0.0115	0.0041	0.0035	0.0077	0.0233
100	0.0206	0.0175	0.0329	0.0118	0.0123	0.0108	0.0016	0.0008	0.0045	0.0209
150	0.0147	0.0124	0.0238	0.0083	0.0101	0.0071	0.0014	0.0004	0.0042	0.0132
200	0.0120	0.0095	0.0189	0.0063	0.0078	0.0040	0.0007	0.0004	0.0021	0.0062
250	0.0106	0.0079	0.0167	0.0053	0.0064	0.0012	0.0003	0.0003	0.0017	0.0032
300	0.0094	0.0071	0.0151	0.0045	0.0063	0.0005	0.0003	0.0001	0.0013	0.0017
350	0.0091	0.0067	0.0136	0.0042	0.0060	0.0003	0.0002	0.0001	0.0009	0.0015
400	0.0084	0.0062	0.0130	0.0039	0.0050	0.0002	0.0001	0.0001	0.0007	0.0013
450	0.0076	0.0061	0.0123	0.0039	0.0022	0.0001	0.0001	0.0001	0.0006	0.0011
500	0.0069	0.0054	0.0113	0.0035	0.0019	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002



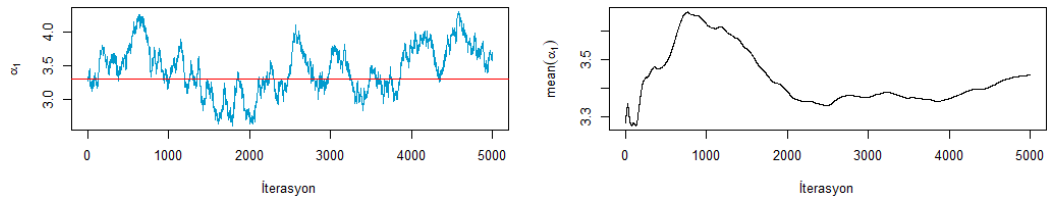
Şekil 5.150. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



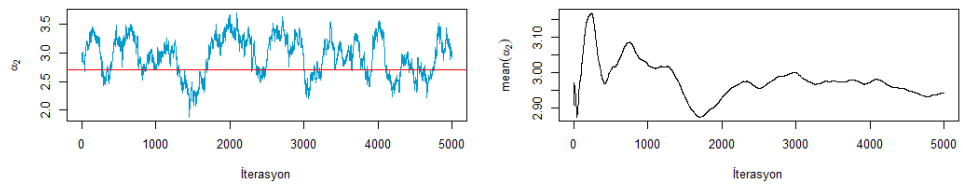
Şekil 5.151. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



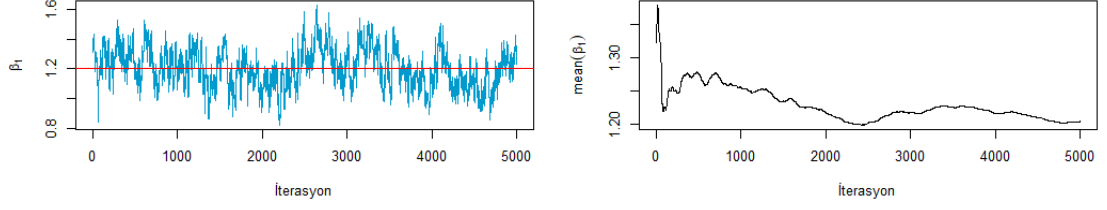
Şekil 5.152. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ Durumunda θ parametresi için HKO



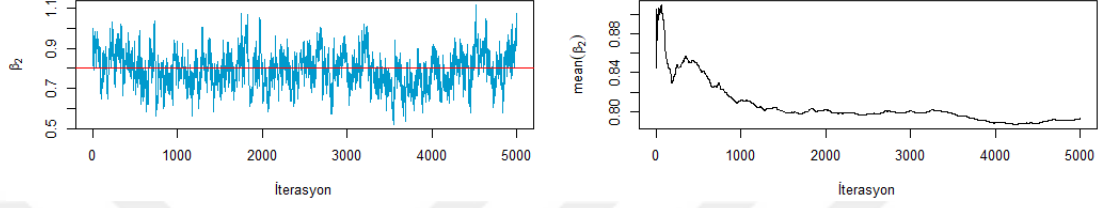
Şekil 5.153. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



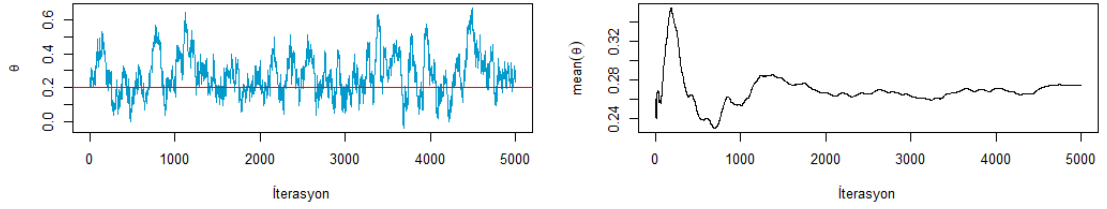
Şekil 5.154. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.155. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



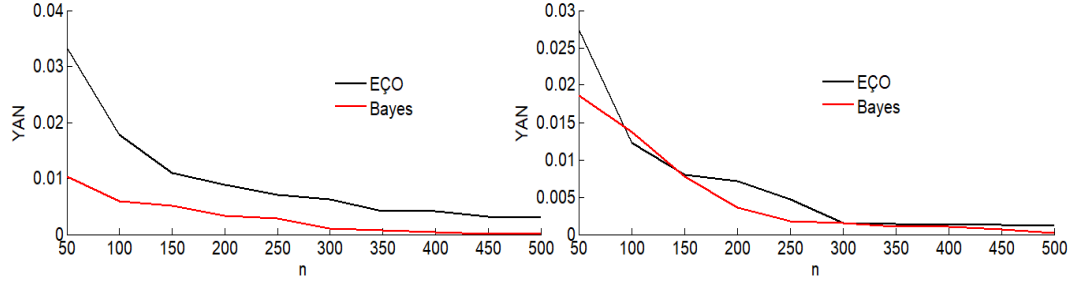
Şekil 5.156. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



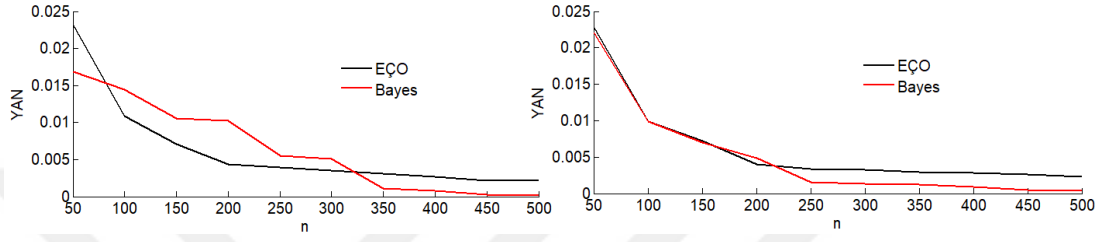
Şekil 5.157. $(\alpha_1 = 3.3, \alpha_2 = 2.7, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 0.8, \theta = 0.2)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.23. $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

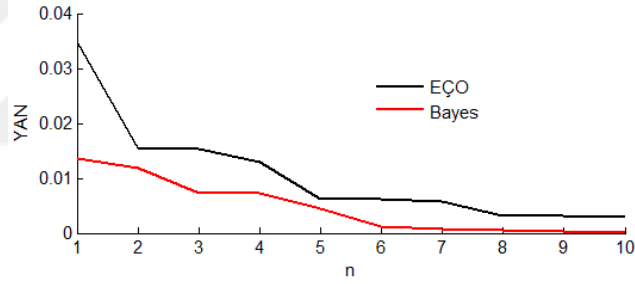
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0333	0.0274	0.0231	0.0227	0.0347	0.0103	0.0185	0.0168	0.0221	0.0135
100	0.0177	0.0122	0.0108	0.0099	0.0154	0.0059	0.0137	0.0144	0.0099	0.0118
150	0.0109	0.0079	0.0071	0.0071	0.0155	0.0051	0.0077	0.0105	0.0070	0.0073
200	0.0089	0.0071	0.0043	0.0041	0.0133	0.0033	0.0036	0.0102	0.0049	0.0072
250	0.0070	0.0046	0.0038	0.0034	0.0063	0.0028	0.0017	0.0055	0.0015	0.0045
300	0.0063	0.0015	0.0034	0.0032	0.0062	0.0017	0.0014	0.0050	0.0016	0.0013
350	0.0042	0.0013	0.0031	0.0029	0.0057	0.0006	0.0010	0.0011	0.0011	0.0007
400	0.0041	0.0013	0.0026	0.0028	0.0031	0.0003	0.0010	0.0008	0.0009	0.0005
450	0.0031	0.0012	0.0021	0.0026	0.0030	0.0001	0.0006	0.0002	0.0005	0.0003
500	0.0030	0.0012	0.0022	0.0023	0.0030	0.0001	0.0002	0.0001	0.0003	0.0001



Şekil 5.158. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



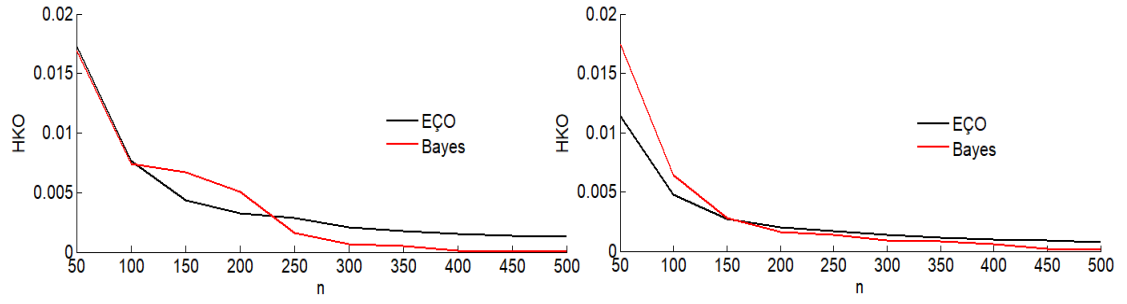
Şekil 5.159. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



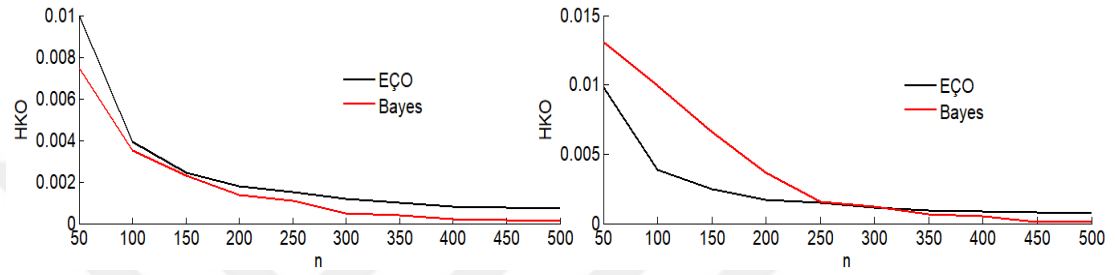
Şekil 5.160. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.24. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

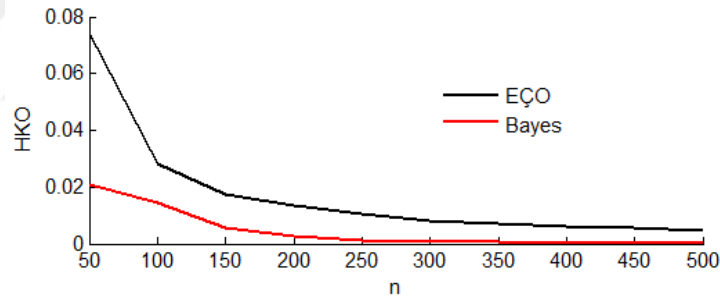
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0173	0.0114	0.0099	0.0098	0.0739	0.0169	0.0174	0.0074	0.0130	0.0210
100	0.0076	0.0047	0.0039	0.0038	0.0281	0.0074	0.0064	0.0035	0.0099	0.0144
150	0.0044	0.0027	0.0024	0.0024	0.0176	0.0066	0.0027	0.0023	0.0065	0.0058
200	0.0032	0.0020	0.0017	0.0017	0.0134	0.0050	0.0016	0.0013	0.0036	0.0028
250	0.0028	0.0017	0.0015	0.0015	0.0104	0.0015	0.0013	0.0011	0.0015	0.0012
300	0.0021	0.0014	0.0012	0.0011	0.0080	0.0006	0.0008	0.0005	0.0012	0.0009
350	0.0017	0.0011	0.0010	0.0009	0.0072	0.0005	0.0008	0.0003	0.0006	0.0006
400	0.0015	0.0010	0.0008	0.0008	0.0059	0.0002	0.0005	0.0002	0.0005	0.0002
450	0.0013	0.0008	0.0007	0.0007	0.0054	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
500	0.0012	0.0007	0.0007	0.0007	0.0046	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001



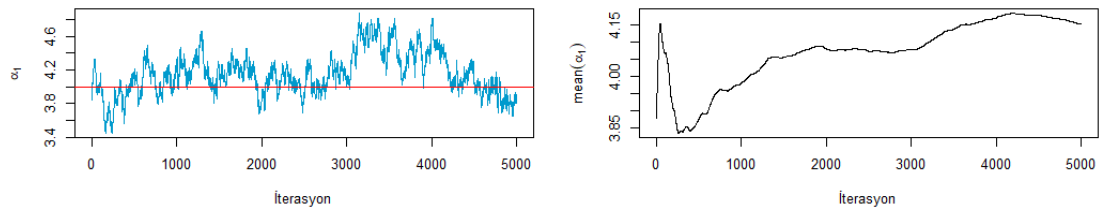
Şekil 5.161. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



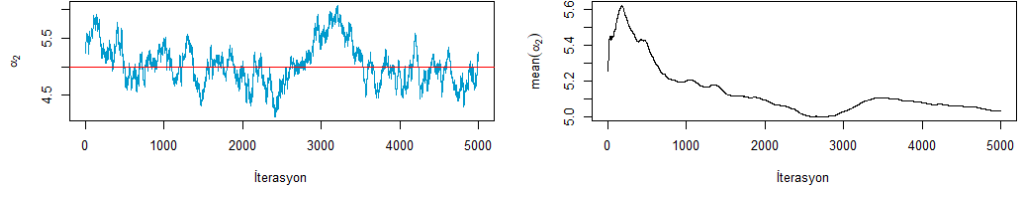
Şekil 5.162. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



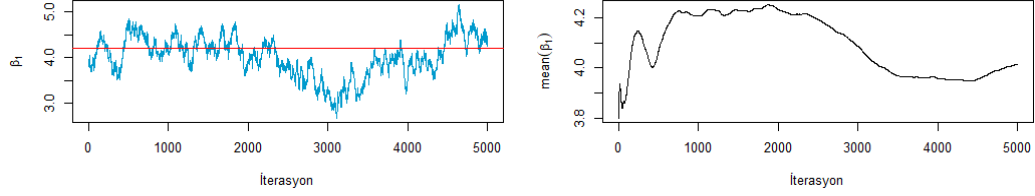
Şekil 5.163. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) Durumunda θ parametresi için HKO



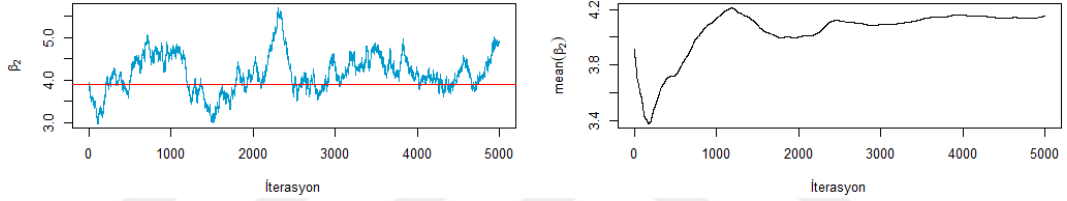
Şekil 5.164. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



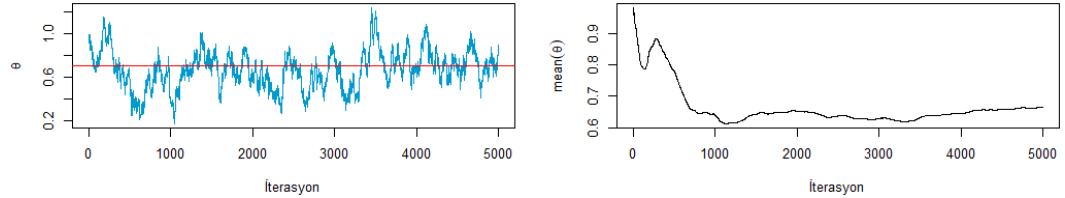
Şekil 5.165. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.166. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.167. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.168. ($\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 4.2, \beta_2 = 3.9, \theta = 0.7$) durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları AMH-MUÜ dağılımına ait $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametrelerinin simülasyon yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarı tablo ve şekillerde görüldüğü tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin ortalama HKO ve yan değerlerinin birbirine çok yakın ve küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla AMH-MUÜ dağılımının parametre tahminleri için EÇO ve Bayes tahmin edicileri kullanılabilir.

5.5. İki Değişkenli Joe Modifiyeli Unit Üstel Dağılımı

Denklem (5.1) ve denklem (5.2) ile denklem (3.23)'deki Joe kapulasına dayalı iki değişkenli Joe modifiyeli unit üstel (Joe-MUÜ) dağılımının birleşik dağılım fonksiyonu;

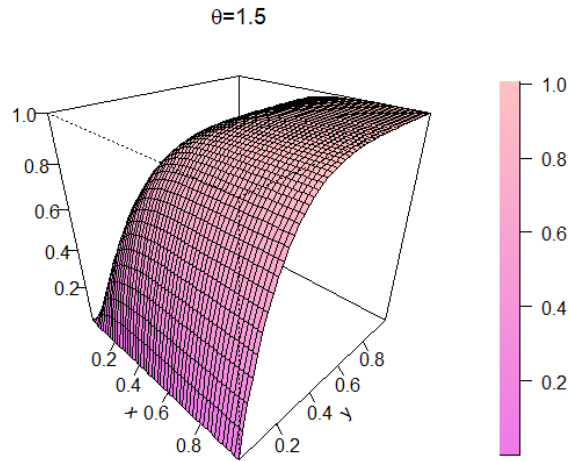
$$F_J(x, y) = 1 - \left[\left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^\theta + \left(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} - \left[\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right]^\theta \left[\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right]^\theta \quad (5.55)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise denklem (5.56)'de verilmiştir.

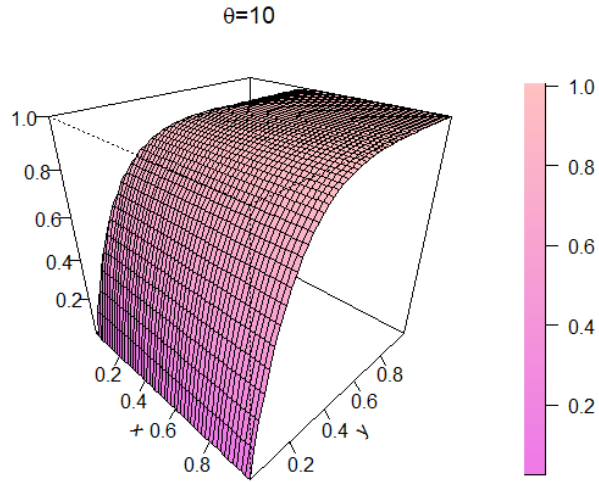
$$f_J(x, y) = \frac{\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x^{(\alpha_1-1)} y^{(\alpha_2-1)} \left[A^\theta (1 - B^\theta) + B^\theta \right]^{1/\theta} A^\theta B^\theta \left[1 - B^\theta - A^\theta (1 - B^\theta) - \theta \right]}{\sqrt{x^{\alpha_1} - x^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1}} \sqrt{y^{\alpha_2} - y^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y^{\alpha_2} + y^{2\alpha_2}} \left[A^\theta + B^\theta - A^\theta B^\theta \right]} \quad (5.56)$$

Burada $A = \exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1}))$ ve $B = \exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2}))$ şeklindedir.

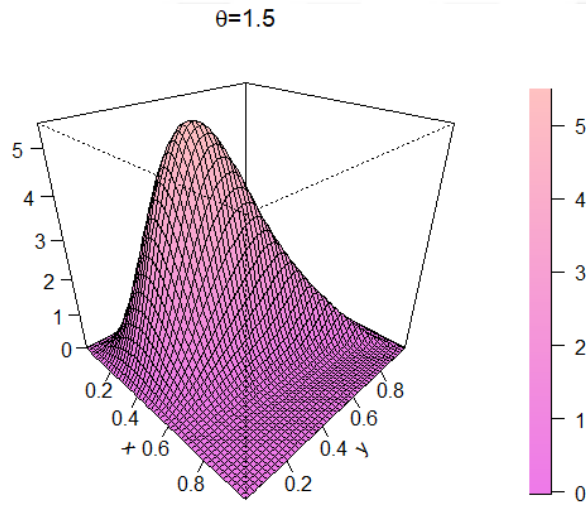
Elde edilen yeni dağılıma ilişkin denklem (5.55)'de verilen dağılım fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.169 ve 5.170'de ve denklem (5.56)'da verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun bazı parametreleri için grafikleri Şekil 5.171, 5.172 ve 5.173'de verilmiştir.



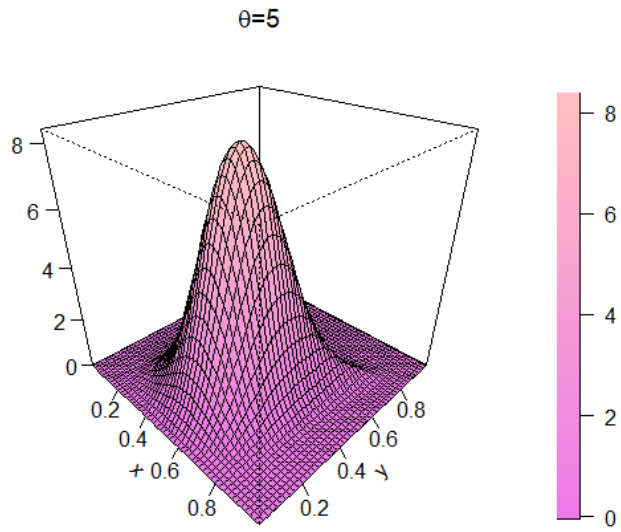
Şekil 5.169. $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının df'si



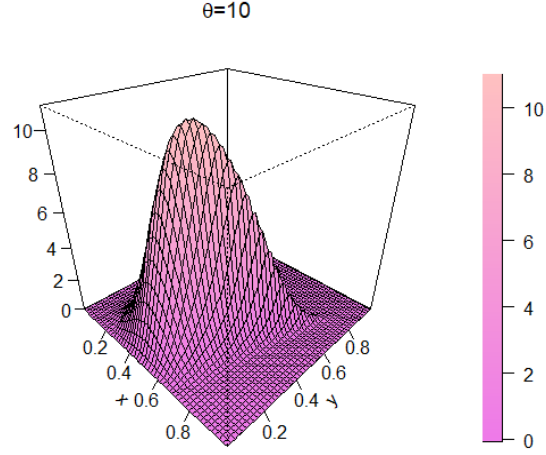
Şekil 5.170. $\beta_1 = 3.5$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 1.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının df 'si



Şekil 5.171. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Joe-MUÜ dağılımının oyf 'si



Şekil 5.172. $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 2.5$, $\alpha_1 = 2.5$ ve $\alpha_2 = 3.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının oyf 'si



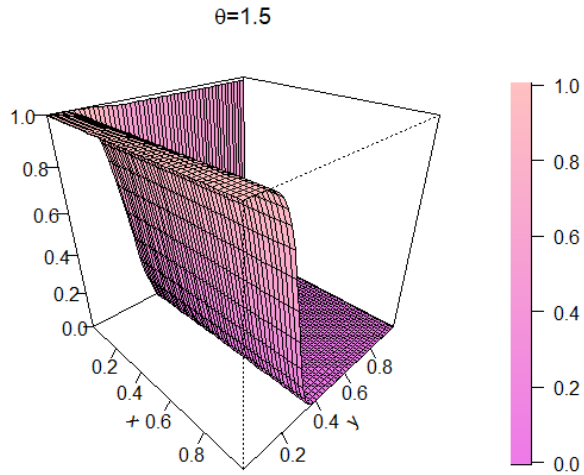
Şekil 5.173. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının yoğunluğu

Joe-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırası ile;

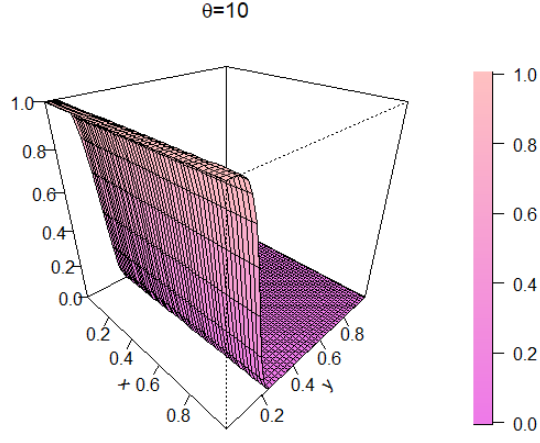
$$S_J(x, y) = \left[\left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^\theta + \left(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} - \left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^\theta \left(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^\theta \quad (5.57)$$

$$h_J(x, y) = \frac{f_J(x, y)}{\left[\left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^\theta + \left(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} - \left(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x^{\alpha_1})) \right)^\theta \left(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y^{\alpha_2})) \right)^\theta} \quad (5.58)$$

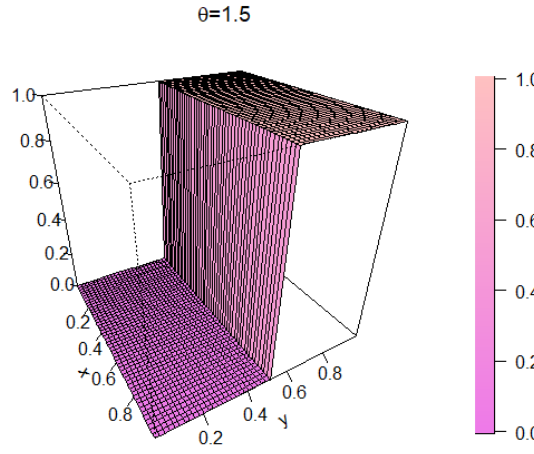
Yeni dağılıma ilişkin denklem (5.57)'de verilen yaşam fonksiyonunun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.174 ve 5.175'de ve denklem (5.58)'de verilen hazard fonksiyonun bazı parametreleri için 3 boyutlu grafikleri Şekil 5.176 ve 5.177'da verilmiştir.



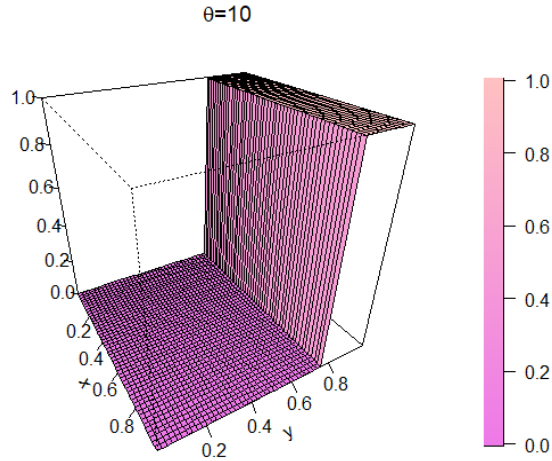
Şekil 5.174. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.175. $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 6$, $\alpha_1 = 5$ ve $\alpha_2 = 0.5$ iken Joe-MUÜ dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 5.176. $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\alpha_1 = 10$ ve $\alpha_2 = 9$ iken Joe-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu



Şekil 5.177. $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ iken Joe-MUÜ dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 5.169-5.177'e göre Joe-MUÜ dağılımı, yaşam testinde birçok uygulamaya sahip olmakla birlikte, özellikle artan tehlike oranına sahip uygulamalarda kullanılmaya uygun olabileceği düşünülmektedir.

5.5.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde Joe-MUÜ dağılımının bilinmeyen $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametrelerini tahmin etmek için iki farklı tahmin edici kullanacağız. Bu tahmin edici yöntemleri; En çok olabilirlik yöntemi ve Bayes çıkarımıdır

5.5.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Joe-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, örneklemeye ait $\Theta = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta)$ parametreleri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$\begin{aligned}
 L(\Theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 x_i^{(\alpha_1-1)} y_i^{(\alpha_2-1)} \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right]^{1/\theta} \times \right. \\
 &\quad \left. (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta \times \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{\theta} \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{\left[\frac{\sqrt{x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \sqrt{y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}} \sqrt{2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \times \{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{-(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right]} \right) \right\} \\
 &= \beta_1^n \alpha_1^n \beta_2^n \alpha_2^n \exp \left\{ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{\theta} \right] \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right\} \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell(\Theta) &= n \log(\beta_1) + n \log(\alpha_1) + n \log(\beta_2) + n \log(\alpha_2) + n \log(\theta) \\
&+ (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i) \\
&+ \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \\
&- \theta \sum_{i=1}^n \beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) - \theta \sum_{i=1}^n \beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \\
&+ n \log \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} - \theta}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} - \theta} \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \\
&- n \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right]
\end{aligned} \tag{5.60}$$

şeklinde elde edilmiştir. Log-olabilirlik denklemlerinin parametrelere göre türevleri ise denklem 5.61-5.65’de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_1} &= \frac{n}{\beta_1} - \theta \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})) \\
&- \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) (\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{1 / \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right]} \right] \\
&+ n \theta \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{1 / \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - \theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}} \right]} \right] \\
&- n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}) \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta} \right]}{1 / \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right]} \right]
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \beta_2} &= \frac{n}{\beta_2} - \theta \sum_{i=1}^n (\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})) \\
&- \sum_{i=1}^n \left[\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right) \right] \\
&+ n\theta \sum_{i=1}^n \left[\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \left[\frac{(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}} \right] \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - \theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}} \right] \right) \right] \\
&- n \sum_{i=1}^n \left[\operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2}) \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (1 - x_i^{\alpha_1})^{-2}}{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}}} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \\
&\sum_{i=1}^n \left[\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} \times \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 \times \left(\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right)} \right] \right) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[n\theta \beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} \times \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 \times \left(\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} - \theta} \right)} \right] \right) \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_1} \log(x_i) - 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i^{\alpha_1})}{x_i^{\alpha_1} - 2x_i^{2\alpha_1}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3x_i^{\alpha_1} \log(x_i) + 2x_i^{2\alpha_1} \log(x_i)}{2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}} \\
&- \sum_{i=1}^n \left[\beta_1 x_i^{\alpha_1} \log(x_i) \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta} \right] \right. \\
&\quad \left. \left(1 / \left[\frac{\sqrt{\frac{x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} \sqrt{\frac{2 - x_i^{\alpha_1}}{1 - x_i^{\alpha_1}}} (x_i^{\alpha_1} - 1)^2 \times \left(\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right)} \right] \right) \right]
\end{aligned}$$

(5.63)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \alpha_2} = & \frac{n}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (1 - y_i^{\alpha_2})^{-2}}{\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}}} + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \\
& \sum_{i=1}^n \left[\beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} \times \right. \\
& \left. 1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 \times \left(\begin{aligned} & (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times \\ & \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} + \\ & (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \end{aligned} \right) \right] \right] \\
& + \sum_{i=1}^n \left[\left(\begin{aligned} & n \theta \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} \times \\ & 1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 \times \left(\begin{aligned} & 1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \\ & (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times \\ & \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} - \theta \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha_2} \log(y_i) - 2 y_i^{2\alpha_2} \log(x_i^{\alpha_1})}{y_i^{\alpha_2} - 2 y_i^{2\alpha_2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{-3 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) + 2 y_i^{2\alpha_1} \log(y_i)}{2 - 3 y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}} \\
& - \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} & n \beta_2 y_i^{\alpha_2} \log(y_i) \left[\begin{aligned} & (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \\ & - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \end{aligned} \right] \\ & 1 / \left[\sqrt{\frac{y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{2 - y_i^{\alpha_2}}{1 - y_i^{\alpha_2}}} (y_i^{\alpha_2} - 1)^2 \times \left(\begin{aligned} & (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta + \\ & (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - \\ & (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1}))^\theta \times \\ & (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \right]
\end{aligned}
\tag{5.64}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\Theta)}{\partial \theta} = & -\frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{-\theta \beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1}) \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \\
& + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \times \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta\} + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta (-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \times [1 - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta] \times \left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right)}{\left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right)} \right] \\
& - n \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta (-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \times \{(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta [(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta - 1]\} \times (-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \times \left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right) - \theta}{\left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right)} \right] \\
& - n \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta (-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})) \times [1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta] + [1 - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta] \times (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})))^\theta (-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1-y_i^{\alpha_2})) \times \left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta} \right)}{\left(\frac{1}{1 - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1-x_i^{\alpha_1})))^\theta} \right)} \right]
\end{aligned}
\tag{5.65}$$

Lineer denklem sistemi sayısal olarak çözülemediği için iteratif yöntemler yardımıyla çözülecektir. R programında Newton Raphson yöntemi kullanılarak en çok olabilirlik ve parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.5.1.2. Bayes Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ ve $Y_1, \dots, Y_n$ Joe-MUÜ dağılımından alınmış rasgele örneklemeler olmak üzere, Frank-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için $\forall \alpha_1 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall \alpha_2 \in (0, \infty)$, $\forall \beta_2 \in (0, \infty)$ ve $\forall \theta \in (0, \infty)$ parametreleri arasında bağımsız varsayıldığında ve $\alpha_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\beta_1 \sim \text{Gamma}(c, d)$, $\alpha_2 \sim \text{Gamma}(e, s)$, $\beta_2 \sim \text{Gamma}(g, h)$, $\theta \sim \text{Pareto}(1, k)$ olduğunda parametrelerin ortak önsel dağılımı;

$$\pi(\Theta) = \alpha_1^{a-1} \exp(-b\alpha_1) \beta_1^{c-1} \exp(-d\beta_1) \alpha_2^{e-1} \exp(-s\alpha_2) \beta_2^{g-1} \exp(-h\beta_2) \theta^{-k-1} \quad (5.66)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.66)'da verilen Önsel dağılım ve denklem (5.59)'da verilen örneklem olabilirlik fonksiyonu ve Bayes teoremi kullanılarak parametrelerin sonsal dağılımı aşağıdaki şekildedir;

$$g(\Theta | x, y) = \frac{\beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{-k-1} T}{\int_{\beta_1=0}^{\infty} \int_{\alpha_1=0}^{\infty} \int_{\beta_2=0}^{\infty} \int_{\alpha_2=0}^{\infty} \int_{\theta=1}^{\infty} \beta_1^{n+c-1} \alpha_1^{n+a-1} \beta_2^{n+g-1} \alpha_2^{n+e-1} \theta^{-k-1} T d\beta_1 d\beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta} \quad (5.67)$$

Burada

$$\begin{aligned} T = & \exp \left\{ \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) - b \right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right\} \exp \left\{ \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \log(y_i) - s \right) - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \\ & \exp \left\{ \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta \{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\}}{+(\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right\} \times \\ & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta - (\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta}{\{1 - (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta\} - \theta} \right] \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_1} - x_i^{2\alpha_1}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3x_i^{\alpha_1} + x_i^{2\alpha_1}) \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (y_i^{\alpha_2} - y_i^{2\alpha_2}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sum_{i=1}^n (2 - 3y_i^{\alpha_2} + y_i^{2\alpha_2}) \right\} \\ & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta + (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta}{-(\exp(-\beta_1 \operatorname{arcsech}(1 - x_i^{\alpha_1})))^\theta (\exp(-\beta_2 \operatorname{arcsech}(1 - y_i^{\alpha_2})))^\theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

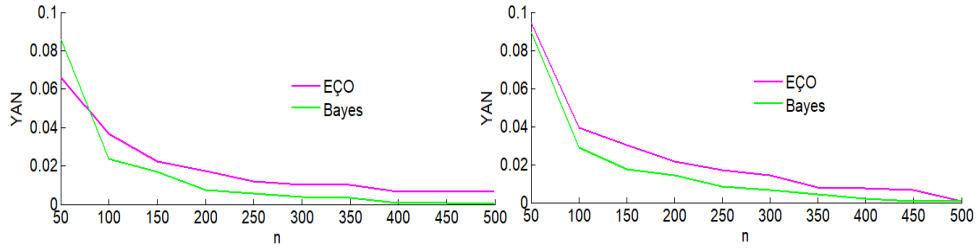
Şeklinde. Denklem (5.67)'deki sonsal dağılımın paydası sayısal olarak çözülemediği için R programında Metropolis-Hastings algoritması ile parametrelerin tahminleri elde edilecektir.

5.5.2. Simülasyon Çalışması

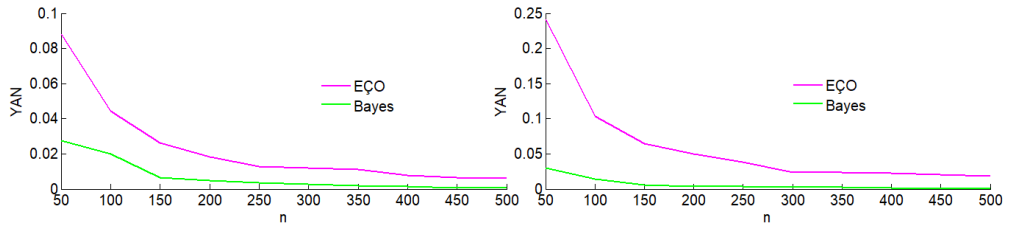
Bu bölümde, Joe-MUÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO Bayes tahmin edicilerinin HKO ve yan kriterlerine göre performansları Monte Carlo ve MZMC simülasyon yöntemi ve R paket programında optim() kodu ile “BFGS” yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar farklı $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$ ve θ parametreleri için Tablo 5.25-5.30’da verilmiştir. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar kullanılmış ve örneklem hacmi $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.25. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

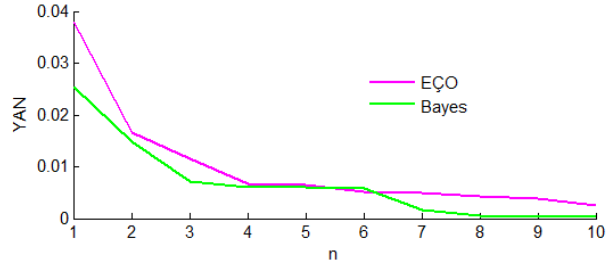
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0657	0.0942	0.0881	0.2406	0.0379	0.0858	0.0897	0.0275	0.0298	0.0253
100	0.0365	0.0392	0.0443	0.1037	0.0166	0.0236	0.0290	0.0198	0.0138	0.0147
150	0.0224	0.0301	0.0262	0.0642	0.0116	0.0168	0.0172	0.0063	0.0056	0.0070
200	0.0173	0.0217	0.0182	0.0502	0.0066	0.0072	0.0143	0.0050	0.0041	0.0061
250	0.0119	0.0177	0.0127	0.0383	0.0065	0.0057	0.0083	0.0037	0.0037	0.0060
300	0.0101	0.0142	0.0118	0.0247	0.0052	0.0040	0.0065	0.0026	0.0029	0.0057
350	0.0100	0.0079	0.0112	0.0234	0.0048	0.0032	0.0042	0.0018	0.0023	0.0017
400	0.0066	0.0072	0.0079	0.0224	0.0043	0.0008	0.0018	0.0016	0.0020	0.0005
450	0.0065	0.0068	0.0064	0.0201	0.0039	0.0006	0.0005	0.0007	0.0007	0.0004
500	0.0064	0.0009	0.0061	0.0180	0.0024	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0003



Şekil 5.178. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



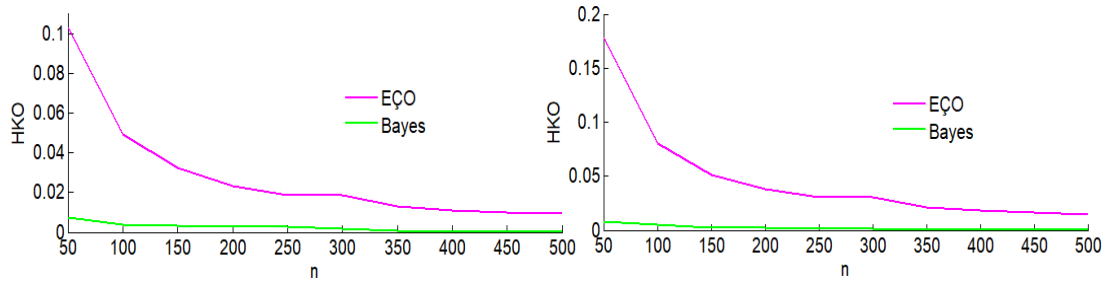
Şekil 5.179. ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



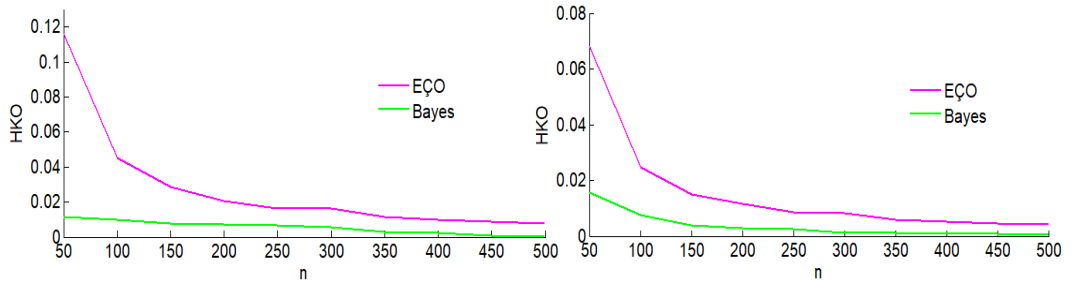
Şekil 5.180. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.26. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

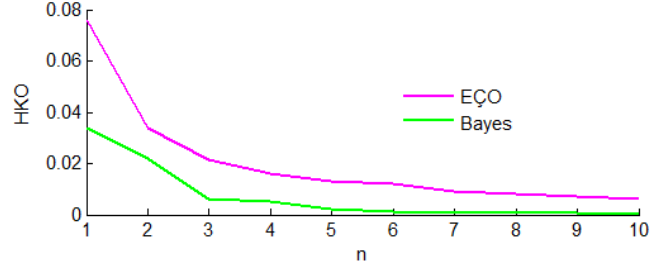
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.1031	0.1778	0.1160	0.0680	0.0758	0.0075	0.0080	0.0116	0.0156	0.0336
100	0.0493	0.0798	0.0450	0.0245	0.0340	0.0038	0.0051	0.0100	0.0074	0.0219
150	0.0322	0.0511	0.0287	0.0150	0.0214	0.0031	0.0026	0.0077	0.0037	0.0061
200	0.0234	0.0384	0.0206	0.0114	0.0162	0.0030	0.0021	0.0070	0.0027	0.0052
250	0.0185	0.0305	0.0164	0.0085	0.0131	0.0029	0.0018	0.0067	0.0023	0.0021
300	0.0184	0.0300	0.0161	0.0083	0.0122	0.0019	0.0012	0.0058	0.0011	0.0011
350	0.0133	0.0212	0.0116	0.0059	0.0093	0.0006	0.0007	0.0031	0.0010	0.0006
400	0.0111	0.0184	0.0097	0.0050	0.0081	0.0003	0.0004	0.0026	0.0009	0.0005
450	0.0102	0.0168	0.0090	0.0046	0.0071	0.0002	0.0003	0.0006	0.0008	0.0005
500	0.0093	0.0143	0.0077	0.0040	0.0062	0.0001	0.0002	0.0004	0.0004	0.0004



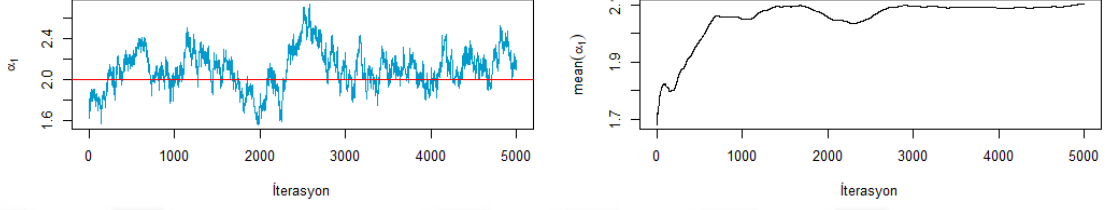
Şekil 5.181. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



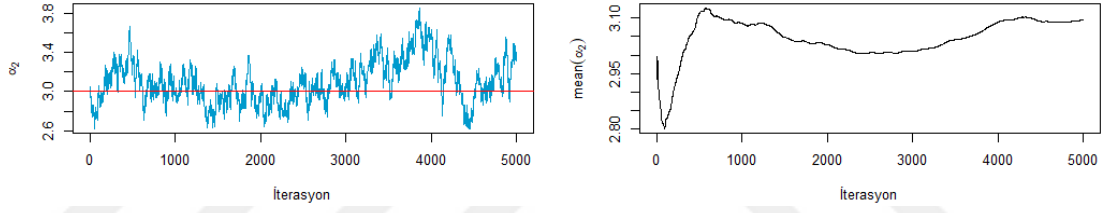
Şekil 5.182. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



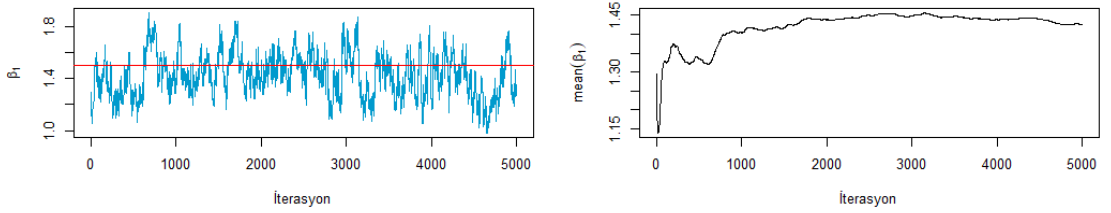
Şekil 5.183. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ Durumunda θ parametresi için HKO



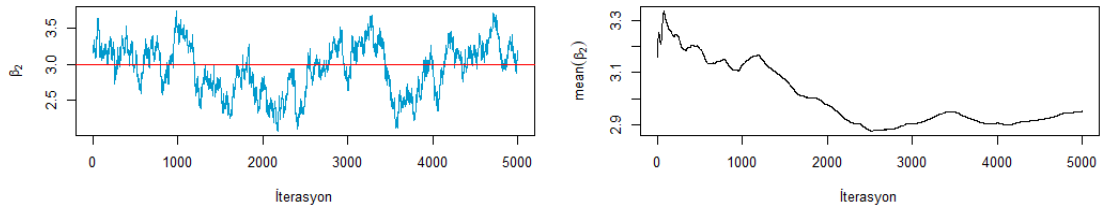
Şekil 5.184. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



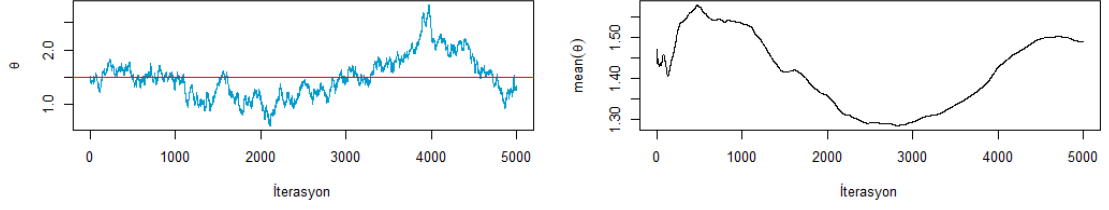
Şekil 5.185. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.186. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



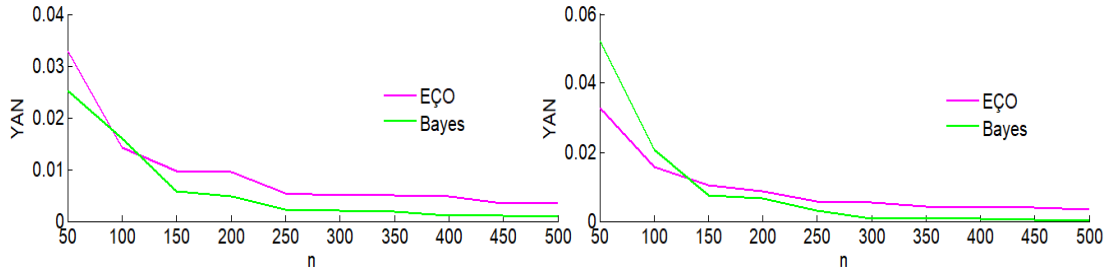
Şekil 5.187. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



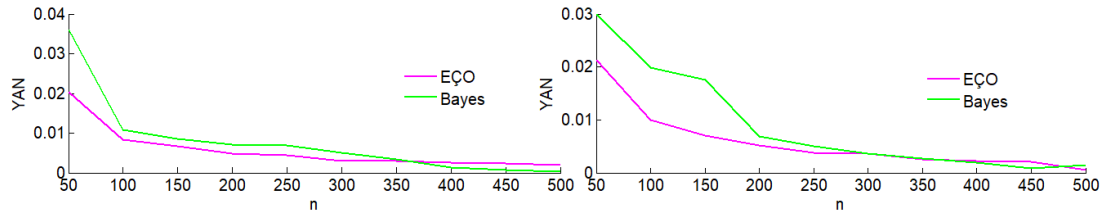
Şekil 5.188. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3, \theta = 1.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.27. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

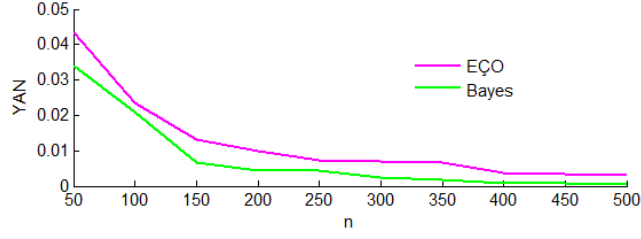
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0327	0.0329	0.0209	0.0212	0.0432	0.0252	0.0521	0.0359	0.0296	0.0340
100	0.0142	0.0157	0.0083	0.0100	0.0236	0.0160	0.0206	0.0108	0.0199	0.0208
150	0.0096	0.0103	0.0066	0.0071	0.0130	0.0057	0.0075	0.0086	0.0174	0.0065
200	0.0094	0.0085	0.0049	0.0052	0.0099	0.0048	0.0067	0.0070	0.0069	0.0044
250	0.0054	0.0058	0.0044	0.0037	0.0071	0.0022	0.0029	0.0069	0.0049	0.0042
300	0.0050	0.0053	0.0030	0.0036	0.0068	0.0021	0.0008	0.0049	0.0039	0.0024
350	0.0050	0.0042	0.0030	0.0025	0.0067	0.0018	0.0008	0.0034	0.0027	0.0019
400	0.0048	0.0039	0.0025	0.0022	0.0037	0.0011	0.0006	0.0014	0.0019	0.0009
450	0.0034	0.0038	0.0023	0.0020	0.0035	0.0010	0.0004	0.0006	0.0008	0.0007
500	0.0033	0.0034	0.0020	0.0015	0.0034	0.0009	0.0001	0.0003	0.0005	0.0005



Şekil 5.189. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



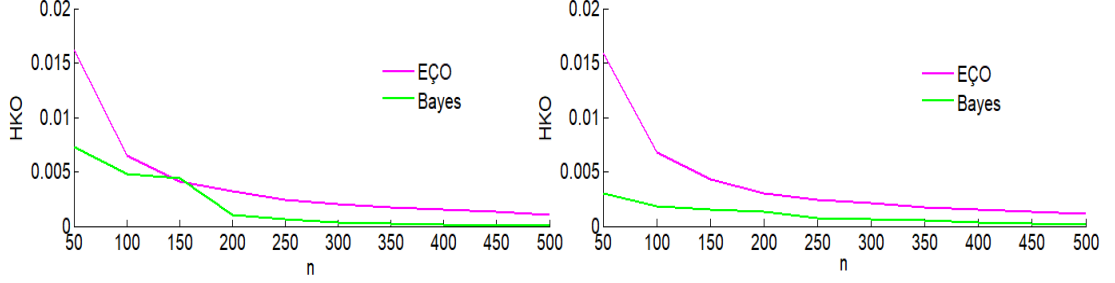
Şekil 5.190. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



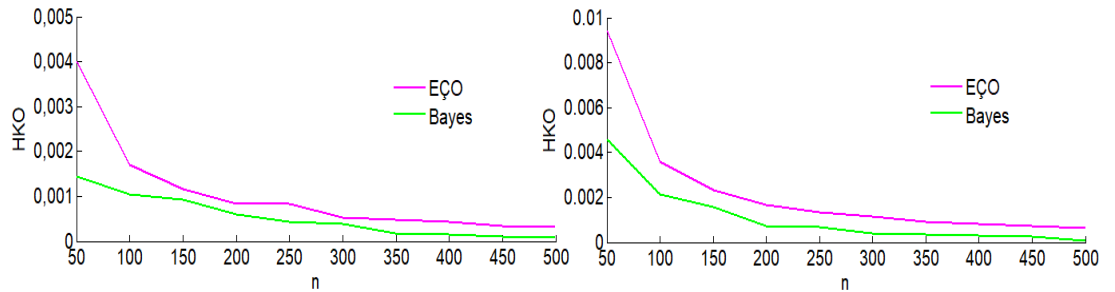
Şekil 5.191. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.28. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

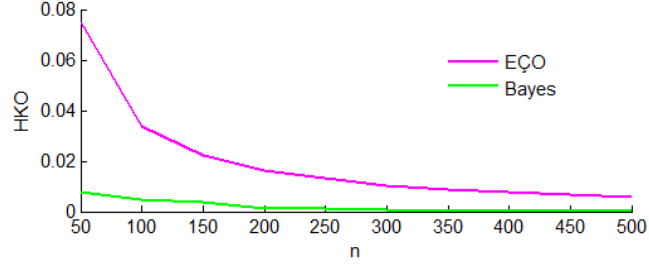
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0161	0.0158	0.0080	0.0094	0.0750	0.0072	0.0030	0.0028	0.0045	0.0076
100	0.0065	0.0067	0.0034	0.0035	0.0338	0.0047	0.0018	0.0020	0.0021	0.0047
150	0.0041	0.0043	0.0023	0.0023	0.0228	0.0043	0.0015	0.0018	0.0015	0.0039
200	0.0032	0.0030	0.0016	0.0016	0.0164	0.0010	0.0013	0.0011	0.0007	0.0011
250	0.0024	0.0024	0.0016	0.0013	0.0130	0.0006	0.0007	0.0008	0.0006	0.0011
300	0.0020	0.0021	0.0010	0.0011	0.0104	0.0003	0.0006	0.0007	0.0004	0.0007
350	0.0017	0.0017	0.0009	0.0009	0.0089	0.0002	0.0005	0.0003	0.0003	0.0003
400	0.0015	0.0014	0.0008	0.0008	0.0079	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
450	0.0013	0.0013	0.0006	0.0007	0.0069	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
500	0.0010	0.0011	0.0006	0.0006	0.0059	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001



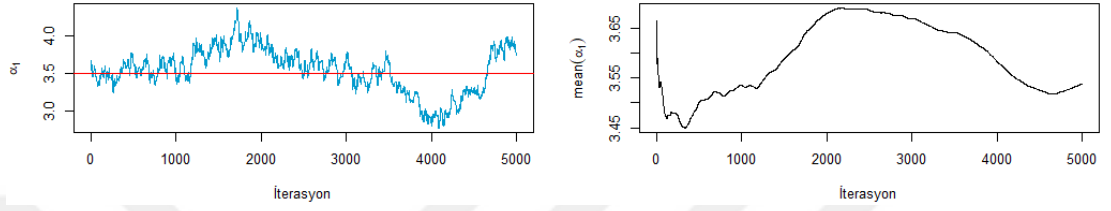
Şekil 5.192. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



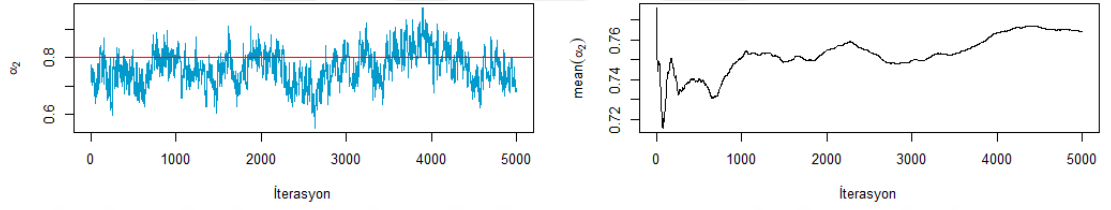
Şekil 5.193. ($\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3$) Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



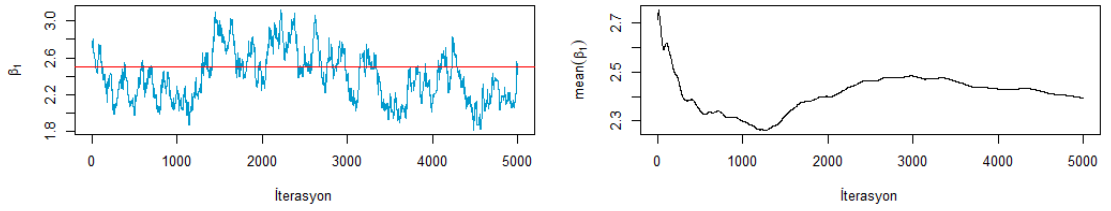
Şekil 5.194. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ Durumunda θ parametresi için HKO



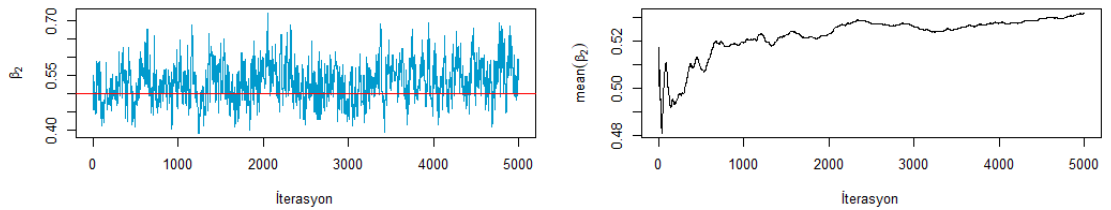
Şekil 5.195. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



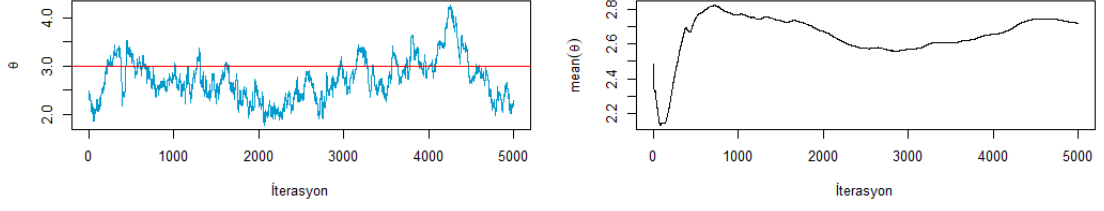
Şekil 5.196. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.197. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



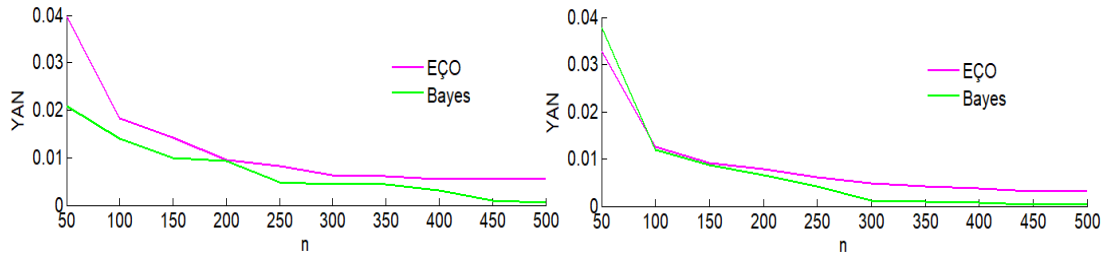
Şekil 5.198. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



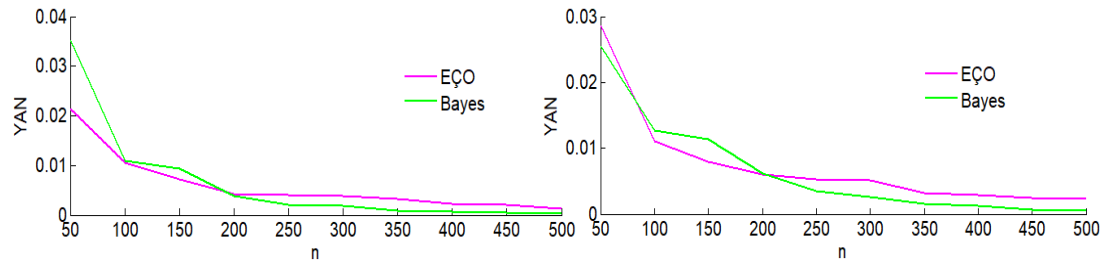
Şekil 5.199. $(\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 0.5, \theta = 3)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

Tablo 5.29. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda EÇÖ ve Bayes tahminleri için parametrelerin yan tahminleri

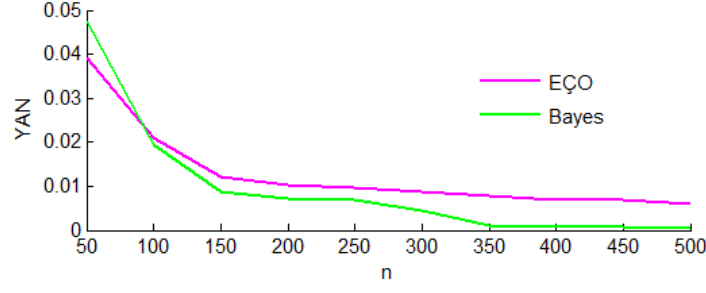
n	EÇÖ					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0397	0.0322	0.0214	0.0285	0.0390	0.0209	0.0378	0.0351	0.0255	0.0475
100	0.0182	0.0125	0.0104	0.0110	0.0209	0.0139	0.0118	0.0108	0.0127	0.0197
150	0.0141	0.0092	0.0072	0.0079	0.0122	0.0099	0.0086	0.0093	0.0113	0.0088
200	0.0094	0.0078	0.0042	0.0060	0.0102	0.0092	0.0065	0.0039	0.0061	0.0073
250	0.0083	0.0060	0.0040	0.0052	0.0097	0.0048	0.0041	0.0021	0.0035	0.0068
300	0.0062	0.0048	0.0039	0.0051	0.0087	0.0044	0.0011	0.0018	0.0025	0.0045
350	0.0060	0.0042	0.0033	0.0031	0.0076	0.0043	0.0010	0.0009	0.0015	0.0010
400	0.0055	0.0037	0.0023	0.0029	0.0069	0.0031	0.0008	0.0006	0.0012	0.0009
450	0.0055	0.0032	0.0020	0.0024	0.0069	0.0008	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
500	0.0054	0.0030	0.0013	0.0023	0.0058	0.0006	0.0003	0.0002	0.0005	0.0006



Şekil 5.200. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için yanlar



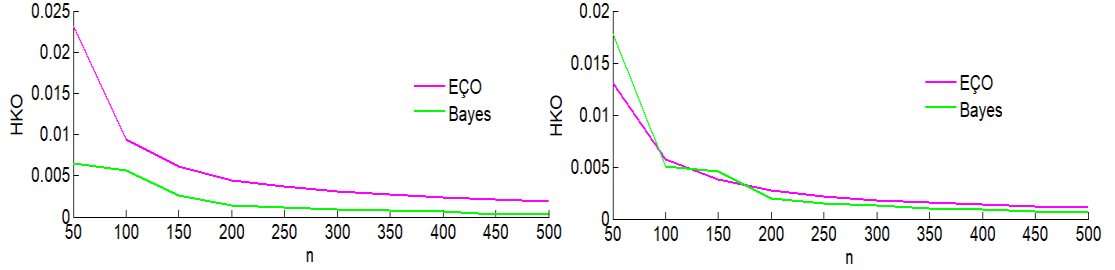
Şekil 5.201. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için yanlar



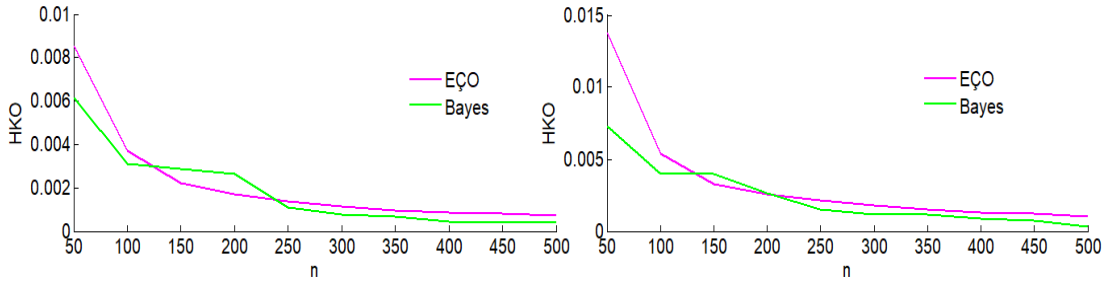
Şekil 5.202. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda θ parametresi için yan

Tablo 5.30. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda EÇO ve Bayes tahminleri için parametrelerin HKO tahminleri

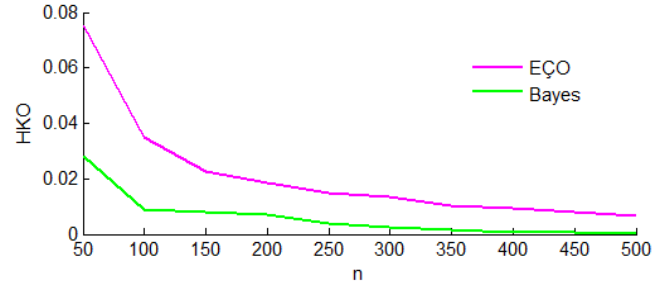
n	EÇO					Bayes				
	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
50	0.0230	0.0130	0.0085	0.0137	0.0751	0.0065	0.0177	0.0061	0.0073	0.0280
100	0.0094	0.0057	0.0037	0.0054	0.0350	0.0057	0.0050	0.0031	0.0040	0.0087
150	0.0061	0.0037	0.0022	0.0032	0.0226	0.0021	0.0045	0.0028	0.0039	0.0081
200	0.0044	0.0027	0.0017	0.0026	0.0182	0.0013	0.0020	0.0026	0.0026	0.0071
250	0.0037	0.0021	0.0014	0.0021	0.0147	0.0011	0.0014	0.0011	0.0014	0.0039
300	0.0030	0.0018	0.0011	0.0017	0.0136	0.0009	0.0013	0.0007	0.0011	0.0026
350	0.0026	0.0015	0.0009	0.0015	0.0101	0.0008	0.0010	0.0006	0.0011	0.0016
400	0.0023	0.0013	0.0008	0.0013	0.0093	0.0006	0.0008	0.0004	0.0009	0.0008
450	0.0021	0.0011	0.0008	0.0012	0.0081	0.0003	0.0007	0.0004	0.0007	0.0006
500	0.0019	0.0010	0.0007	0.0010	0.0067	0.0002	0.0005	0.0004	0.0003	0.0004



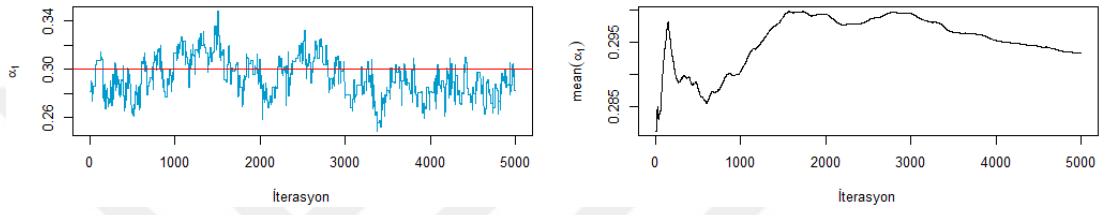
Şekil 5.203. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla α_1 ve α_2 parametreleri için HKO'lar



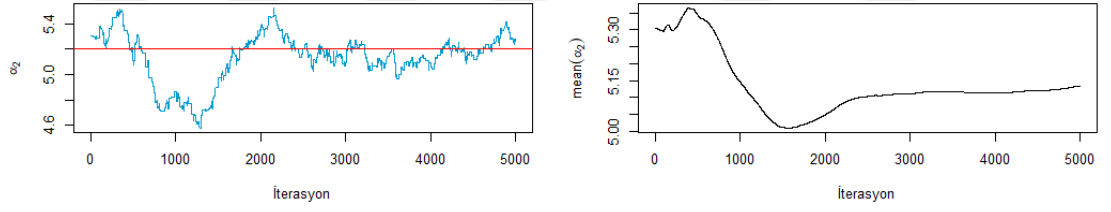
Şekil 5.204. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ Durumunda sırasıyla β_1 ve β_2 parametreleri için HKO'lar



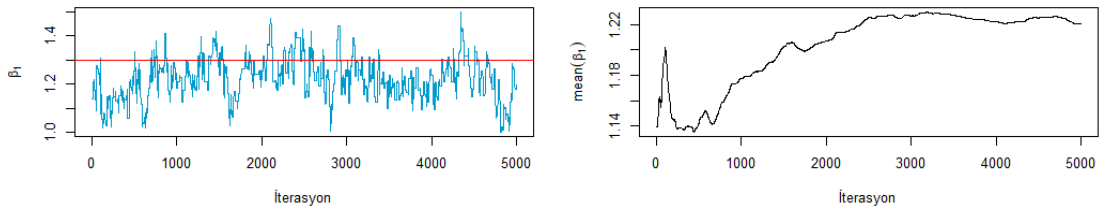
Şekil 5.205. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) Durumunda θ parametresi için HKO



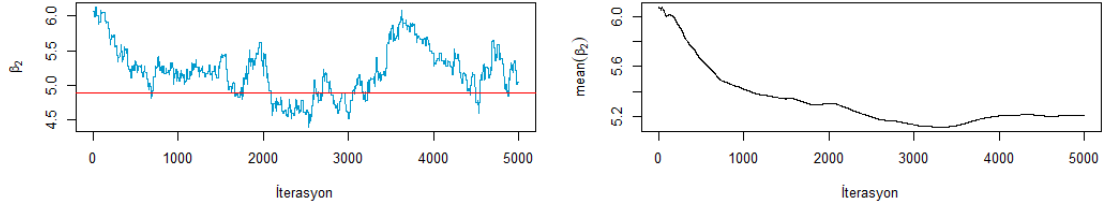
Şekil 5.206. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda α_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



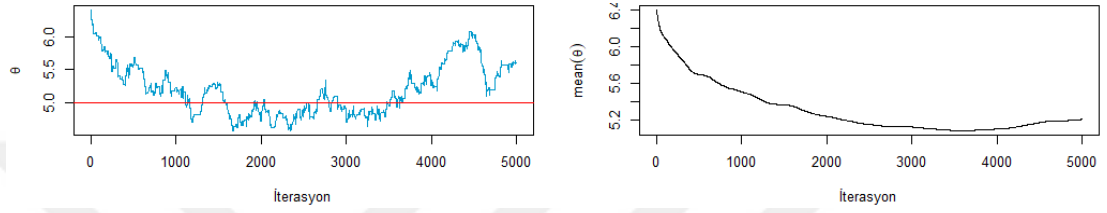
Şekil 5.207. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda α_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.208. ($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5$) durumunda β_1 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.209. $(\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 5.2, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 4.9, \theta = 5)$ durumunda β_2 parametresi için MCMC iterasyon çizimi



Şekil 5.210. $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2, \theta = 0.5)$ durumunda θ parametresi için MCMC iterasyon çizimi

En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin, HKO ve yan kriterlerine göre performans sonuçları Joe-MUÜ dağılımına ait $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametrelerinin simülasyon yardımıyla tam örneklem durumunda gösterilmiştir. Yukarı tablo ve şekillerde görüldüğü gibi Joe-MUÜ dağılımının tüm farklı parametre değerleri için HKO ve yan kriter değerleri azalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \theta$ parametreleri için EÇO ve Bayes tahmin edicilerinin ortalama HKO ve yan değerlerinin birbirine çok yakın ve küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Joe-MUÜ dağılımının parametre tahminleri için EÇO ve Bayes tahmin edicileri kullanılabilir.

5.6. Gerçek Veri Uygulaması

Bu bölümde önerdiğimiz modifiyeli unit üstel dağılımı ve Arşimedyen kapulaları kullanılarak yeni iki değişkenli dağılımların potansiyelini göstermek için gerçek veri uygulaması yapılacaktır. Gerçek veri uygulamasında uyum iyiliği test istatistiği değerleri için R paket programında gofCopula paketi kullanılmıştır.

5.6.1. Birinci Gerçek Veri

Kullanacağımız gerçek veri setlerinden ilki, Kumar ve Shoukri (2007) tarafından çalışılan Aort yetmezliği hakkında hastalardan alınan ameliyat öncesi ejeksiyon fraksiyonu (kalp yetmezliği) ve ameliyattan sonra ejeksiyon fraksiyonu verilerden oluşturmaktadır. X = Ameliyat öncesi ejeksiyon fraksiyonu, Y = Ameliyat sonrası ejeksiyon fraksiyonu.

Tablo 5.31. Veri Seti 1

Veri Seti 1
X=0.54, 0.64, 0.50, 0.41, 0.53, 0.56, 0.81, 0.67, 0.57, 0.58, 0.62, 0.36, 0.64, 0.60, 0.56, 0.60, 0.55, 0.56, 0.39, 0.29
Y=0.38, 0.58, 0.27, 0.17, 0.47, 0.50, 0.56, 0.59, 0.33, 0.32, 0.47, 0.24, 0.63, 0.33, 0.34, 0.30, 0.62, 0.29, 0.26, 0.26

Gerçek veri seti 1 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri Tablo 5.32’de verilmiştir.

Tablo 5.32. Veri Seti 1 için parametre tahminleri

Model	EÇO				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\theta}$
Clayton-MUÜ	10.3391	9.7239	6.3422	9.1415	1.4822
Gumbel-MUÜ	9.9900	9.1327	5.6909	6.6691	1.7894
Frank-MUÜ	11.0806	12.5638	5.5945	7.2520	5.9847
AMH-MUÜ	10.8569	10.8261	6.5351	9.4021	0.9973
Joe-MUÜ	9.6740	8.9611	5.7391	7.0072	1.8540
Model	BAYES				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\theta}$
Clayton-MUÜ	10.7326	9.2911	6.1439	8.4861	1.4754
Gumbel-MUÜ	10.7358	9.4735	6.1420	7.4510	1.6779
Frank-MUÜ	11.1274	11.9874	5.4787	7.6285	6.0180
AMH-MUÜ	10.7492	11.1559	6.1320	8.4924	0.9953
Joe-MUÜ	10.7406	8.9416	5.4616	7.4966	1.6518

Gerçek veri seti 1 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri Tablo 5.33’de verilmiştir.

Tablo 5.33. Veri Seti 1 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri

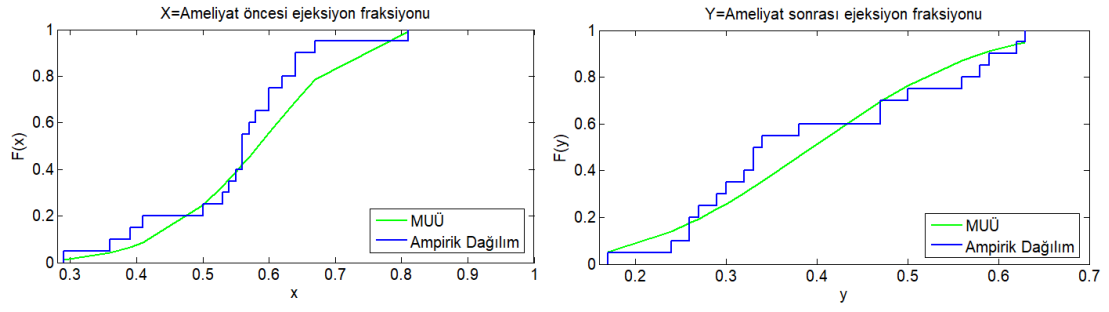
Model	$\hat{\ell}$	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>CAIC</i>	<i>HQIC</i>
Clayton-MUÜ	32.1552	-54.3105	-49.3319	-44.3319	-53.3386
Gumbel-MUÜ	30.5472	-51.0945	-46.1158	-41.1158	-50.1226
Frank-MUÜ	33.0066	-56.0132	-51.0346	-46.0346	-55.0414
AMH-MUÜ	31.7947	-53.5894	-48.6107	-43.6107	-52.6175
Joe-MUÜ	28.9345	-47.8691	-42.8904	-37.8904	-46.8972

Gerçek veri seti 1 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri Tablo 5.34’de verilmiştir.

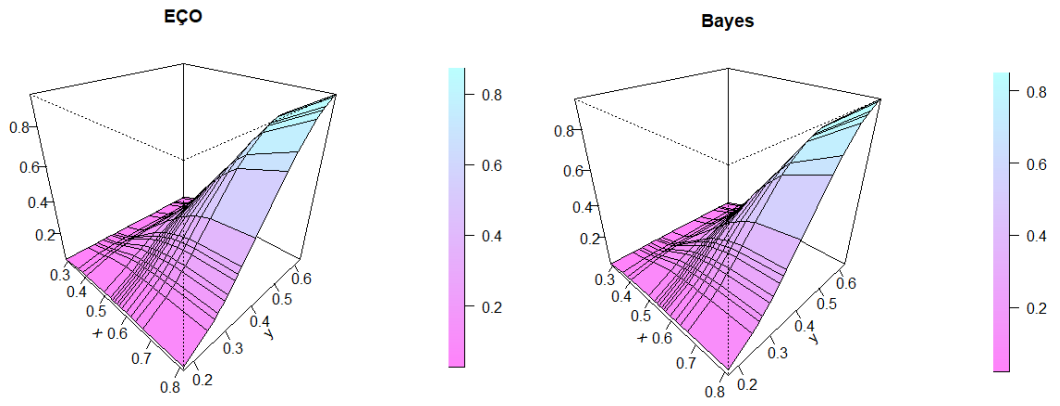
Tablo 5.34. Veri Seti 1 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	EÇO		Bayes	
	<i>KS</i> (<i>p</i>)	<i>CVM</i> (<i>p</i>)	<i>KS</i> (<i>p</i>)	<i>CVM</i> (<i>p</i>)
Clayton-MUÜ	0.5597 (0.7630)	0.0579 (0.8500)	0.5597 (0.7870)	0.0579 (0.8560)
Gumbel-MUÜ	0.5280 (0.8230)	0.0466 (0.9260)	0.5280 (0.8270)	0.0466 (0.9140)
Frank-MUÜ	0.4742 (0.8690)	0.0508 (0.8960)	0.4742 (0.8920)	0.0508 (0.9060)
AMH-MUÜ	0.3751 (0.8362)	0.0173 (0.9287)	0.3751 (0.8491)	0.0173 (0.9332)
Joe-MUÜ	0.6709 (0.5770)	0.0664 (0.7860)	0.6709 (0.5840)	0.0664 (0.7810)

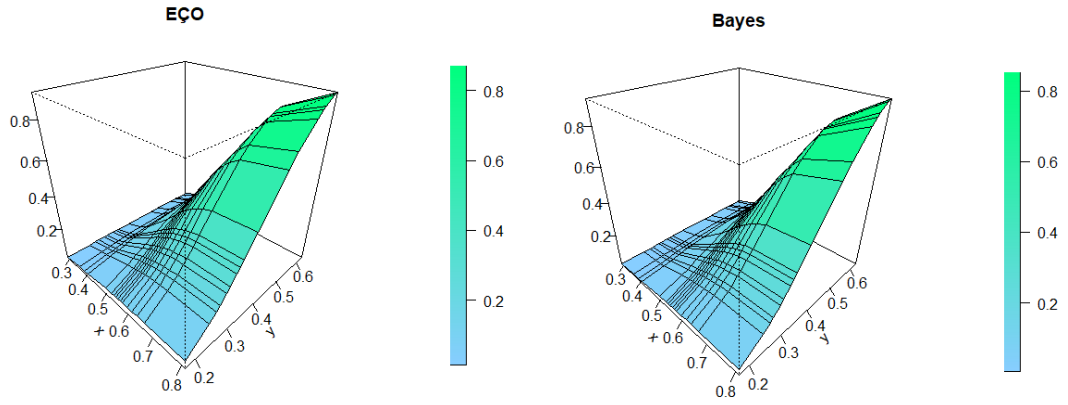
Tablo 5.32 ve 5.33’de görüldüğü üzere EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri, EÇO ve Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri göz önünde bulundurulduğunda iki değişkenli Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ dağılımları veri seti 1 için uygun modellerdir. X = Ameliyat öncesi ejeksiyon fraksiyonu, Y = Ameliyat sonrası ejeksiyon fraksiyonu verileri için marjinal ampirik dağılım fonksiyon grafikleri Şekil 5.211, EÇO ve bayes yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre sırasıyla Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ dağılımların dağılım fonksiyonları, Şekil 5.212-5.216’da verilmiştir



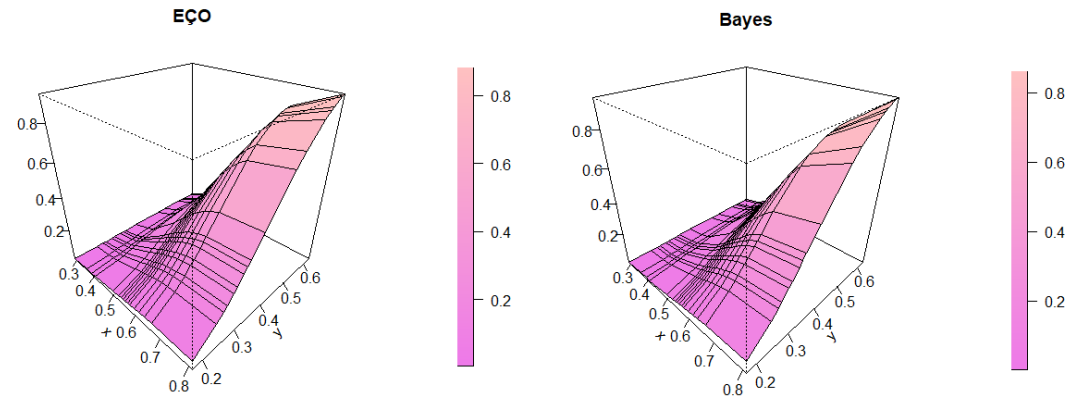
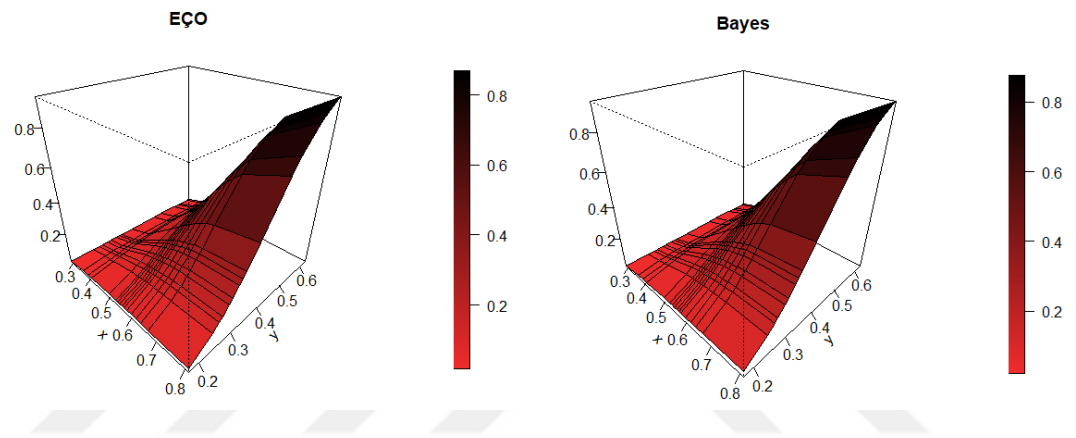
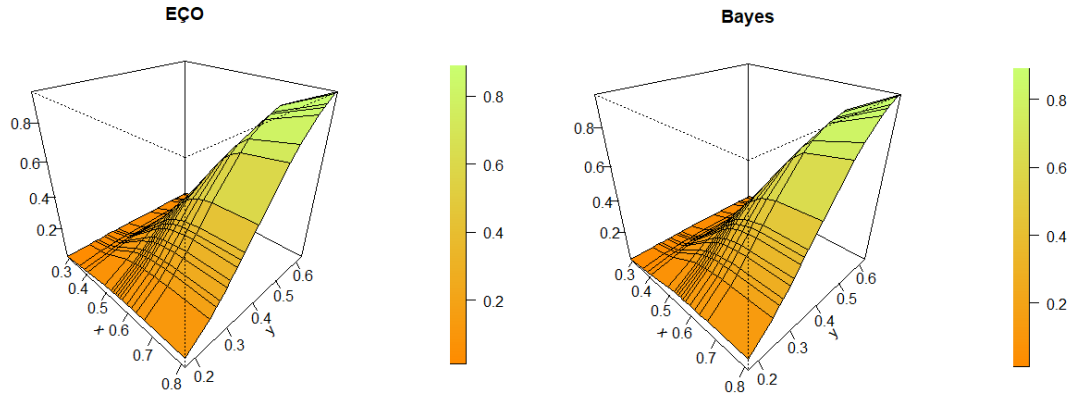
Şekil 5.211. Sırasıyla X ve Y ampirik dağılımları ve MUÜ df'si



Şekil 5.212. Veri 1 için Clayton-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.213. Veri 1 için Gumbel-MUÜ dağılımının df'si



5.6.2. İkinci Gerçek Veri Seti

Kullanacağımız gerçek veri setlerinden ikincisi, 20 kadına ait meme kanseri verileridir. Bir meme kitlesinin ince iğne aspirasyonunun sayısallaştırılmış görüntüsünden kitlenin kompaktlık ortalaması ve konkavlık ortalaması hesaplanmıştır. X = Kompaktlık ortalaması, Y = Konkavlık ortalaması. Bu veri seti (<https://www.kaggle.com>) sitesinden alınmıştır.

Tablo 5.35. Veri Seti 2

Veri Seti 2
X= 0.2776, 0.07864, 0.1599, 0.2839, 0.1328, 0.17, 0.109, 0.1645, 0.1932, 0.2396, 0.06669, 0.1292, 0.2458, 0.1002, 0.2293, 0.1595, 0.072, 0.2022, 0.1027, 0.08129
Y= 0.3001, 0.0869, 0.1974, 0.2414, 0.198, 0.1578, 0.1127, 0.09366, 0.1859, 0.2273, 0.03299, 0.09954, 0.2065, 0.09938, 0.2128, 0.1639, 0.07395, 0.1722, 0.1479, 0.06664

Gerçek veri seti 2 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri Tablo 5.36’da verilmiştir.

Tablo 5.36. Veri seti 2 için parametre tahminleri

Model	EÇO				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\theta}$
Clayton-MUÜ	5.5501	77.4495	4.8330	43.6276	2.6164
Gumbel-MUÜ	4.9148	46.0245	4.6785	42.3091	3.2538
Frank-MUÜ	5.0095	48.8394	5.0883	56.8183	10.8372
AMH-MUÜ	5.0153	49.2980	4.9595	62.9232	0.9960
Joe-MUÜ	4.6078	36.8711	4.4103	35.0007	4.1630
Model	BAYES				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\theta}$
Clayton-MUÜ	5.1888	69.1808	4.9414	43.7538	2.6744
Gumbel-MUÜ	5.0158	45.5983	4.8574	43.0152	2.9974
Frank-MUÜ	5.1058	45.8746	4.9057	55.4684	10.6555
AMH-MUÜ	5.1708	49.1810	4.9581	60.7497	0.9522
Joe-MUÜ	5.1845	39.1776	4.9484	33.7368	3.6599

Gerçek veri seti 2 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri Tablo 5.37’de verilmiştir.

Tablo 5.37. Veri seti 2 için EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

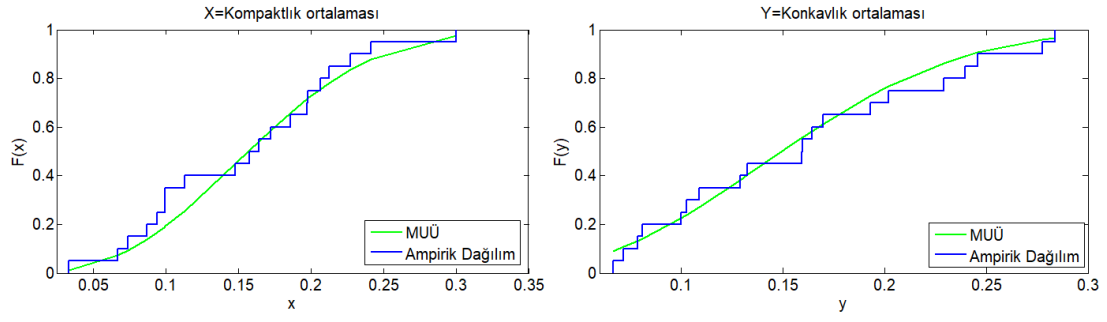
Model	$\hat{\ell}$	AIC	BIC	CAIC	HQIC
Clayton-MUÜ	64.6082	-119.2166	-114.2379	-109.2379	-118.2447
Gumbel-MUÜ	67.4179	-124.8358	-119.8572	-114.8572	-123.8639
Frank-MUÜ	66.2344	-122.469	-117.4903	-112.4903	-121.4971
AMH-MUÜ	151.9653	-293.9306	-288.9519	-283.9519	-292.9587
Joe-MUÜ	65.5893	-121.1787	-116.2001	-111.2001	-120.2069

Gerçek veri seti 2 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri Tablo 5.38’de verilmiştir.

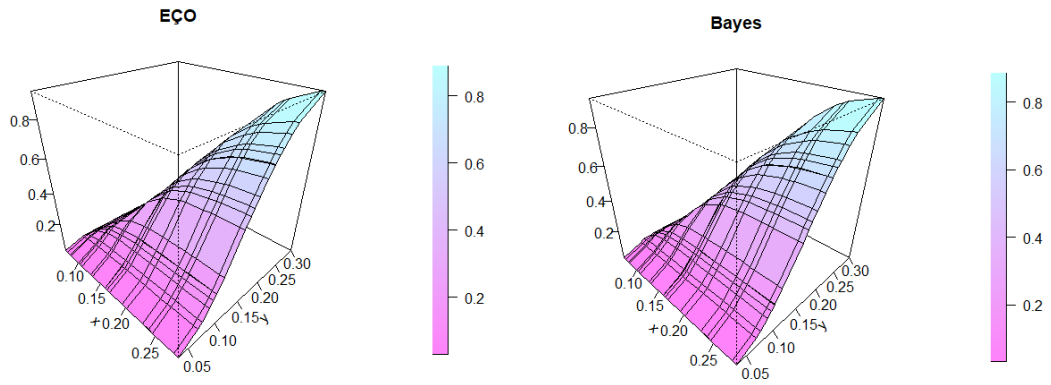
Tablo 5.38. Veri Seti 2 için EÇO ve Bayes yöntemleriyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri

Model	EÇO		Bayes	
	KS (p)	CVM (p)	KS (p)	CVM (p)
Clayton-MUÜ	0.4502 (0.9000)	0.0484 (0.8980)	0.4502 (0.9070)	0.0484 (0.9130)
Gumbel-MUÜ	0.2555 (0.9970)	0.0249 (0.9860)	0.2555 (0.9980)	0.0249 (0.9900)
Frank-MUÜ	0.3096 (0.9940)	0.0302 (0.9700)	0.3096 (0.9920)	0.0302 (0.9830)
AMH-MUÜ	0.2771 (0.9480)	0.0388 (0.9850)	0.2771 (0.9850)	0.0388 (0.9790)
Joe-MUÜ	0.3931 (0.9480)	0.0453 (0.9040)	0.3931 (0.9350)	0.0453 (0.9040)

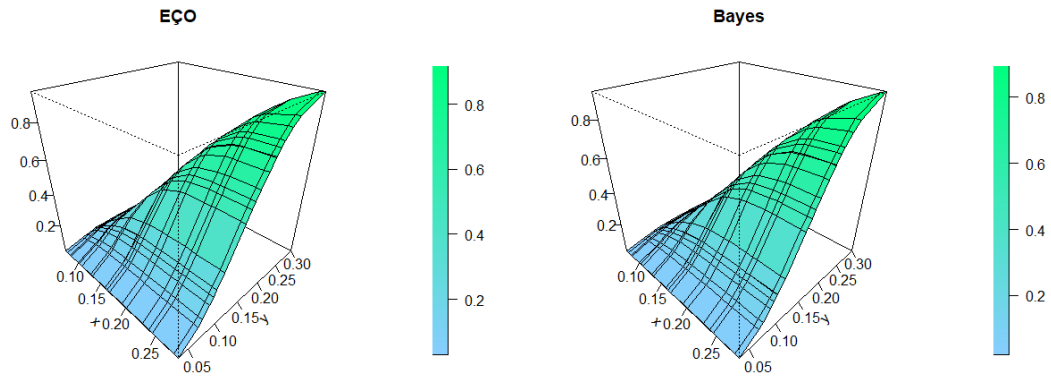
Tablo 5.37 ve 5.38’de görüldüğü üzere EÇO yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği kriterleri, EÇO ve Bayes yöntemiyle elde edilen uyum iyiliği istatistikleri göz önünde bulundurulduğunda iki değişkenli Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ dağılımları veri seti 2 için uygun modellerdir. X = Kompaktlık ortalaması, Y = Konkavlık ortalaması verileri için marjinal ampirik dağılım fonksiyon grafikleri Şekil 5.217, EÇO ve bayes yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre sırasıyla Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ dağılımların dağılım fonksiyonları, Şekil 5.218-5.222’de verilmiştir



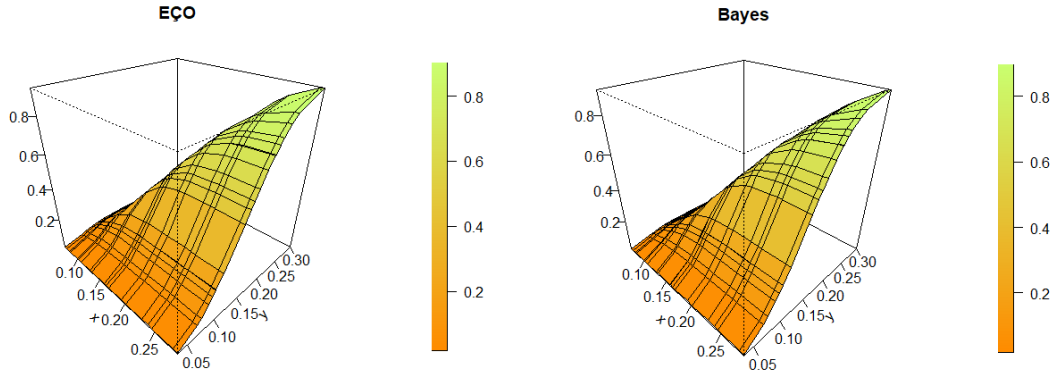
Şekil 5.217. Sırasıyla X ve Y ampirik dağılımları ve MUÜ df'si



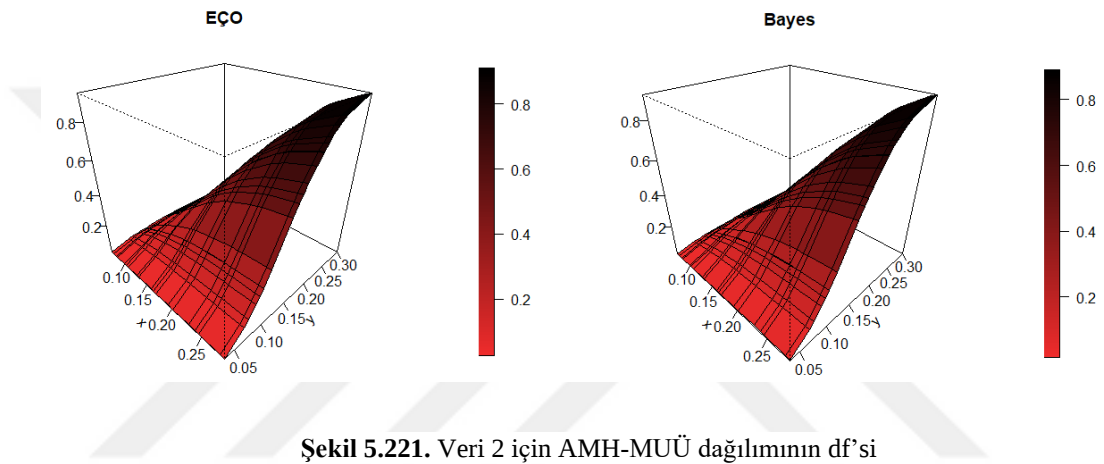
Şekil 5.218. Veri 2 için Clayton-MUÜ dağılımının df'si



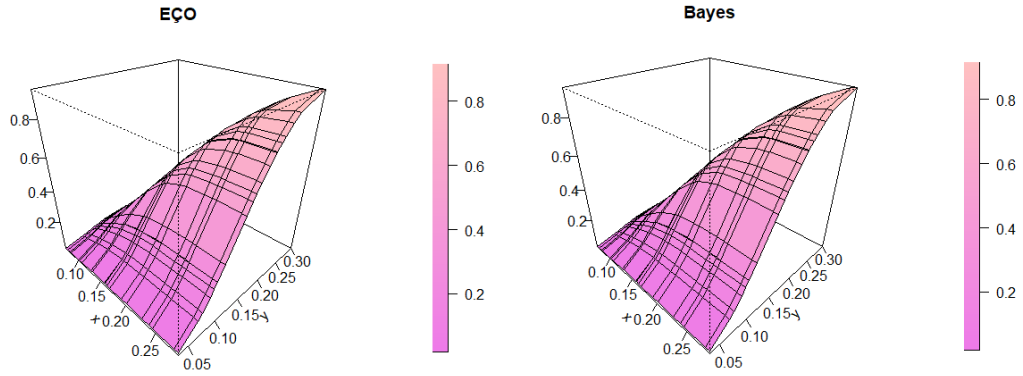
Şekil 5.219. Veri 2 için Gumbel-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.220. Veri 2 için Frank-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.221. Veri 2 için AMH-MUÜ dağılımının df'si



Şekil 5.222. Veri 2 için Joe-MUÜ dağılımının df'si

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, 3. Bölümde kapulalar ve özelliklerinden bahsedildikten sonra 4. Bölümde birim dağılımlara alternatif olabilecek yeni iki parametrelili modifiyeli unit üstel dağılımı önerilmiştir. Yeni dağılıma ilişkin istatistiksel özellikler incelenmiştir. Model parametrelerinin tahmini için, en çok olabilirlik, bayes, en küçük kareler yöntemi, ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi, Anderson-Darling ve Cramer-von Mises tahmin yöntemlerine dayalı 6 farklı tahmin edici sunulmuş ve performanslarını göstermek için Monte Carlo ve MZMC simülasyon çalışması yapılmıştır. Tüm tahmin edicilerin yan ve HKO değerleri birbirine çok yakın ve örneklem hacmi arttıkça tahmin edildiği gibi 0'a yaklaşmıştır. Gerçek veri setleri ile 3 uygulama yapılmış ve yeni modifiyeli unit üstel dağılımının, beta, Kumaraswamy, Topp Leone, unit Weibull, unit Lindley dağılımlarına kıyasla performanslarını göstermek için yukarıdaki tahmin edicilerin uyum iyiliği istatistiği değerleri karşılaştırılarak sunulmuştur. Yapılan analizler sonucunda önerdiğimiz dağılımın ilk iki veri seti için diğer dağılımlarla yakın sonuç verdiği ancak üçüncü veri seti için diğer dağılımlara kıyasla daha iyi bir model olduğu tespit edilmiştir. Önerdiğimiz yeni modelin farklı alanlarda, özellikle artan tehlike oranına sahip dağılımlara dayalı veri setlerini içeren durumlarda faydalı olması beklenmektedir. 5. bölümde ise önerdiğimiz modifiyeli unit üstel dağılımı ve Arşimedyen kapulaları kullanılarak yeni iki değişkenli ve üç parametrelili Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ dağılımları önerilmiştir. Yeni dağılımlara ilişkin istatistiksel özellikler incelenmiştir. Model parametrelerinin tahmini için, en çok olabilirlik ve bayes tahmin yöntemlerine dayalı 2 farklı tahmin edici sunulmuş ve performanslarını göstermek için Monte Carlo ve MZMC simülasyon çalışması yapılmıştır. en çok olabilirlik ve bayes tahmin edicilerinin yan ve HKO değerleri oldukça birbirine yakın ve örneklem hacmi arttıkça tahmin edildiği gibi 0'a yaklaşmıştır. Gerçek veri setleri ile 2 uygulama yapılmış ve modellerin performanslarını göstermek için tahmin edicilerin uyum iyiliği istatistik değerleri sunulmuştur. Yapılan analizler sonucunda dağılımların gerçek veri setleri için uygun olduğu tespit edilmiştir. Önerdiğimiz yeni modellerin farklı alanlara, özellikle artan tehlike oranına sahip dağılımlara dayalı veri setlerini içeren durumlarda faydalı olması beklenmektedir.

6.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında elde edilen yeni MUÜ, Clayton-MUÜ, Gumbel-MUÜ, Frank-MUÜ, AMH-MUÜ ve Joe-MUÜ isimli dağılımlar birçok farklı alandaki gerçek verilerin modellemesinde kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- Akdi, Y., 2005, Matematiksel istatistiğe giriş, Bıçaklar Kitabevi, p.
- Alhadlaq, W. ve Alzaid, A., 2020, Distribution function, probability generating function and archimedean generator, *Symmetry*, 12 (12), 2108.
- Ali, M. M., Mikhail, N. ve Haq, M. S., 1978, A class of bivariate distributions including the bivariate logistic, *Journal of multivariate analysis*, 8 (3), 405-412.
- Amblard, C. ve Girard, S., 2002, Symmetry and dependence properties within a semiparametric family of bivariate copulas, *Journal of Nonparametric Statistics*, 14 (6), 715-727.
- Anderson, T. W. ve Darling, D. A., 1952, Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes, *The annals of mathematical statistics*, 193-212.
- Anderson, T. W., 1962, On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion, *The annals of mathematical statistics*, 1148-1159.
- Arslan, S., Çelebioğlu, S. ve Öztürk, F., 2012, İKİ BOYUTLU ARŞİMEDYEN KAPULALARDA İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI VE BİR UYGULAMA, *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 14 (2), 1-18.
- Casella, G. ve Berger, R. L., 2021, Statistical inference, Cengage Learning, p.
- Chang, B., 2019, Vine copulas: dependence structure learning, diagnostics, and applications to regression analysis, *University of British Columbia*.
- Chen, G. ve Balakrishnan, N., 1995, A general purpose approximate goodness-of-fit test, *Journal of Quality Technology*, 27 (2), 154-161.
- Clayton, D. G., 1978, A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, 65 (1), 141-151.
- Consul, P. C. ve Jain, G. C., 1971, On the log-gamma distribution and its properties, *Statistische Hefte*, 12 (2), 100-106.
- Cook, R. D. ve Johnson, M. E., 1981, A family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 43 (2), 210-218.
- Cramer, H., 1928, On the composition of elementary errors: First paper: Mathematical deductions, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1928 (1), 13-74.

- Çelebioğlu, S., 2003, Arşimedyen kapulalar ve bir uygulama, *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 1 (22), 43-52.
- El-Sherpieny, E. ve Almetwally, E. M., 2019, Bivariate generalized rayleigh distribution based on Clayton Copula, *Proceedings of the annual conference on statistics (54rd), computer science and operation research, faculty of graduate studies for statistical research, Cairo University*, 1-19.
- Farlie, D. J., 1960, The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution, *Biometrika*, 47 (3/4), 307-323.
- Fermanian, J.-D., 2013, An overview of the goodness-of-fit test problem for copulas, *Copulae in Mathematical and Quantitative Finance: Proceedings of the Workshop Held in Cracow, 10-11 July 2012*, 61-89.
- Fischer, M. ve Klein, I., 2007, Constructing generalized FGM copulas by means of certain univariate distributions, *Metrika*, 65 (2), 243-260.
- Frank, M. J., 1979, On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes mathematicae*, 19, 194-226.
- Geman, S. ve Geman, D., 1984, Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* (6), 721-741.
- Genest, C. ve MacKay, J., 1986, The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals, *The American Statistician*, 40 (4), 280-283.
- Genest, C. ve Rivest, L.-P., 1993, Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *Journal of the American Statistical Association*, 88 (423), 1034-1043.
- Guloksuz, C. T. ve Kumar, P., 2019, On a new bivariate one parameter Archimedean copula function and its application to modeling dependence in climate and life sciences, *Stat. Appl*, 17 (2), 23-36.
- Gumbel, E. J., 1960, Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 55 (292), 698-707.
- Gündüz, S. ve Korkmaz, M. Ç., 2020, A new unit distribution based on the unbounded Johnson distribution rule: The unit Johnson SU distribution.
- Hasan, B. ve Najjari, V., 2013, Archimedean copulas family via hyperbolic generator, *Gazi university journal of science*, 26 (2), 195-200.
- Hastings, W. K., 1970, Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications.

- Hering, C. ve Hofert, M., 2015, Goodness-of-fit tests for archimedean copulas in high dimensions, *Innovations in Quantitative Risk Management: TU München, September 2013*, 357-373.
- Joe, H., 1997, Multivariate models and multivariate dependence concepts, CRC press, p.
- Johnson, N., 1955, Systems of frequency curves derived from the first law of Laplace, *Trabajos de estadística*, 5 (3), 283-291.
- Karakas, A. M., Karakas, M. ve Dogan, M., 2017, Archimedean Copula Estimation Parameter with Kendall Distribution Function, *Cumhuriyet Science Journal*, 38 (4), 619-625.
- Karakaş, A. M., 2018, With Copula Method Modeling of daily maximum and minimum temperature changes in Bitlis province, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7 (2), 268-275.
- Karakaya, K., Korkmaz, M., Chesneau, C. ve Hamedani, G., 2022, A new alternative unit-Lindley distribution with increasing failure rate, *Scientia Iranica*.
- Kpanzou, T. A., 2007, Copulas in statistics, *African Institute for Mathematical Sciences (AIMS)*, 180-188.
- Kumar, P. ve Shoukri, M. M., 2007, Copula based prediction models: an application to an aortic regurgitation study, *BMC medical research methodology*, 7 (1), 1-9.
- Kumaraswamy, P., 1980, A generalized probability density function for double-bounded random processes, *Journal of hydrology*, 46 (1-2), 79-88.
- Lai, C. D., Balakrishnan, N., Balakrishna, N. ve Lai, C. D., 2009, Distributions expressed as copulas, *Continuous Bivariate Distributions: Second Edition*, 67-103.
- Lehmann, E. L. ve Casella, G., 2006, Theory of point estimation, Springer Science & Business Media, p.
- Martinez, W. ve Martinez, A., 2002, Monte Carlo methods for inferential statistics, *Computational Statistics Handbook with MATLAB. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC*, 191-228.
- Mazucheli, J., Menezes, A. ve Ghitany, M., 2018, The unit-Weibull distribution and associated inference, *J. Appl. Probab. Stat*, 13 (2), 1-22.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. ve Dey, S., 2019a, Unit-Gompertz distribution with applications, *Statistica*, 79 (1), 25-43.

- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B. ve Chakraborty, S., 2019b, On the one parameter unit-Lindley distribution and its associated regression model for proportion data, *Journal of Applied Statistics*, 46 (4), 700-714.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. ve Teller, E., 1953, Equation of state calculations by fast computing machines, *The journal of chemical physics*, 21 (6), 1087-1092.
- Mittelhammer, R. C. ve Mittelhammer, R. C., 2013, Mathematical statistics for economics and business, Springer, p.
- Moore, D. F. ve Moore, D. F., 2016, Multiple Survival Outcomes and Competing Risks, *Applied Survival Analysis Using R*, 113-135.
- Morgenstern, D., 1956, Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen, *Mitt, Math, Statist.*, 8, 234-235.
- Muhammed, H. Z., El-Sherpieny, E.-S. A. ve Almetwally, E. M., 2021, Dependency measures for new bivariate models based on copula function, *Inf. Sci. Lett*, 10, 511-526.
- Najjari, V., 2018, On Generators in Archimedean Copulas, *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 12 (1), 155-166.
- Nelsen, R., 2006, An Introduction to Copulas, Oregon (US): Springer Science and Business Media, Inc.
- Nelsen, R. B., 1997, Dependence and order in families of Archimedean copulas, *Journal of multivariate analysis*, 60 (1), 111-122.
- Norris, J. R., 1998, Markov chains, 2, Cambridge university press, p.
- Olive, D. J., 2014, Statistical theory and inference, Springer, p.
- Öztürk, F., 2015, Parametre tahmini ve hipotez testi, Bıçaklar Kitabevi, p.
- Quesenberry, C. P. ve Hales, C., 1980, Concentration bands for uniformity plots, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 11 (1), 41-53.
- Rohatgi, V. K. ve Saleh, A. M. E., 2001, An introduction to probability and statistics, John Wiley & Sons, p.
- Rosenblatt, M., 1952, Remarks on a multivariate transformation, *The annals of mathematical statistics*, 23 (3), 470-472.
- Sklar, M., 1959, Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges, *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.
- Spiegel, M. R., 1965, Laplace transforms, McGraw-Hill New York, p.

- Susam, S. O., 2020, A new family of archimedean copula via trigonometric generator function, *Gazi university journal of science*, 1-1.
- Swain, J. J., Venkatraman, S. ve Wilson, J. R., 1988, Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29 (4), 271-297.
- Tadikamalla, P. R. ve Johnson, N. L., 1982, Systems of frequency curves generated by transformations of logistic variables, *Biometrika*, 69 (2), 461-465.
- Taniş, C. ve Karakaya, K., 2021, A comparison of estimation methods for one parameter inverse Gompertz distribution, *Journal of Science and Arts*, 21 (3), 659-668.
- Topp, C. W. ve Leone, F. C., 1955, A family of J-shaped frequency functions, *Journal of the American Statistical Association*, 50 (269), 209-219.
- Von Mises, R., 1928, Statistik und wahrheit, *Julius Springer*, 20.