T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN TERS OPERATÖR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Teimoor Younus SALAHUDDIN

Danışman

Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Teimoor Younus SALAHUDDIN tarafından, **Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK** danışmanlığında hazırlanan **"LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN TERS OPERATÖR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 08.05.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**Sonuç**
Başkan	Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☒Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma HIRA Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☒Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğrt. Üyesi Hatice MUTİ Samsun Üniversitesi Havacılık Yönetimi Ana Bilim Dalı	☒Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

08/05/2023
Teimoor Younus SALAHUDDIN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN TERS OPERATÖR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05/05/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 25

Tek kaynak oranı : % 4 çıkmıştır.

05 /05/2023
Doç .Dr. Nihat ALTINIŞIK

ÖZET

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN TERS OPERATÖR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Teimoor Younus SALAHUDDIN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Mayıs/ 2023
Danışman: Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

Δ ileri fark olmak üzere verilen $\Delta f(x) = g(x)$ ifadesinden $f(x) = \Delta^{-1}g(x)$ şeklinde $f(x)$ fonksiyonu belirlenebilir. Aynı şekilde $y(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere $\Delta y(x) = p(x)$ denklemi için de $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonu $y(x) = \Delta^{-1}p(x)$ şeklinde belirlenebilir.

Bu çalışmada Δ^{-1} operatöründen faydalanarak bazı lineer veya lineer olmayan fark denklemlerinin genel çözümlerinin nasıl olduğu teorem olarak ifade edilmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Bu çalışma yardımıyla daha birçok lineer veya lineer olmayan denklemler için de genel çözümler elde edilebilir.

Tezin birinci bölümünde, fark denklemleri hakkında geçmişten bugüne kadar bilim insanlarının ne kadar ilerlediğinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, Ayrık noktalar kümesi ve parçalanış fonksiyonlara yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde fark denklemlerinin çözümünde yardımcı olan operatörler ve özellikleri, fark denklemlerinin çözümü ve sınıflandırılması üzerinde durulmuştur. Bu operatörlerin nasıl çalıştığı örneklerle açıklanmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, fark denklemlerinin sınıflandırılması, temel kavramlar, tanım, mertebe, n. mertebeden fark denklemi, genel ve özel çözüm, lineerlik çözümleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, ters fark operatörü yardımıyla bazı lineer(homojen ve homojen olmayan) ve lineer olmayan denklemlerin genel çözümleri için teoremlerle ispatlanmıştır ve örneklerle açıklanmıştır.

Tezin son bölümünde diğer sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fark operatörü, Ters fark operatörü, Fark denklemi, Lineer fark denklemi, Lineer olmayan fark denklemi.

ABSTRACT

SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS
WITH THE INVERSE OPERATOR

Teimoor Younus SALAHUDDIN
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, May/2023
Supervisor:Assoc. Prof. Dr. Nihat ALTINIŞIK

From the expression $\Delta f(x) = g(x)$ where Δ is the forward difference, the $f(x)$ function can be determined as $f(x) = \Delta^{-1} g(x)$ Likewise, fort he equaiton $\Delta y(x) = p(x)$, where $\mathrm{y}(x)$ is an unknown function, the unknown function $y(x)$ can be determined as $y(x) = \Delta^{-1} p(x)$.

In this study, using the Δ^{-1} operator, the general solutions of some linear or non-linear difference equations are expressed as theorems and explained with examples. With the help of this study, general solutions can be obtained for many more linear or non-linear difference equations.

In the first part of the thesis, it is stated how far sicentists have progressed from the past to the present about the difference equations.

The second part includes the discrete points set and fragmentation functions. In iddition, operators that help in solving difference equations and their features, solution and classification of difference equations are emphasized. It is explained how these operators work with examples.

In the third part of the thesis, the classification of difference equations, basic concepts, the definition, the order, the difference equations from the n. order, general and specific solution, linearity solutions are emphasized.

In the fourth part, some difference equations is proven by theorems that are linear (homogeneous and non-homogeneous) and non-lineer with the help of the inverse difference operator and explained with examples.

And finally, other conclusions and recommendations are mentioned in the lost part of the thesis.

Keywords: Difference operator, Inverse operator, Difference equation, Linear difference equation, Non-linear difference equation.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, gerekli imkânları hazırlayarak bana yardımcı olan sayın hocam Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Teimoor Younus SALAHUDDIN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
Γ	: Gama Fonksiyonu
I	: Birim (Özdeşlik) Operatör
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\mathrm{w}(x)$	: Casoratyan
$\prod$	: Çarpım Sembolü
Δ	: İleri Fark Operatörü
Δ^{-1}	: Ters Fark Operatörü
E	: Kaydırma (Öteleme) Operatörü
$\forall$	: Her, Bütün
$\exists$	: Vardır, En az bir
$\emptyset$	: Boş Küme
Ψ	: psi

TABLOLAR DİZİNİ

1.GİRİŞ

Fark denklemleri cebirsel bir bağıntı olup, bağımsız değişken ile bir veya birden fazla değişkenli fonksiyonun sonlu farkı arasındaki bir bağıntıdır. Fark denklemleri teorisi ile diferansiyel denklemler teorisi birçok yönden birbirine benzemektedir. Diferansiyel denklemler 200 ve daha fazla yıl boyunca incelenmiş teorilerden biridir. Fark denklemleri ise 100 senedir daha sistemli hale getirilmiştir.

Son 50 yıldır birçok bilim insanı bu teoriyle ilgilenmiştir ve literatürde bilgi açısından çeşitlilik sağlanmıştır. Bunlara (Miller 1968; Gordon, 1971; Goldberg, 1986; Peterson, 1987; Elaydi ve Peterson, 1988; Mickens, 1990; Kelley ve Peterson, 1991; Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 1999; Agarwal, 2000). Makaleleri örnek olarak verilebilir.

Fark denklemleri diferansiyel denklemlerin çözümü dışında, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte olduğu kadar savunma, ekonomi, demografi gibi alanlarda da karşılaşılan matematiksel modellerde doğrudan veya dolaylı olarak incelenebilir. Son yıllarda meydana gelen bazı gelişmeler ile birlikte, tüm tabiat olaylarında süreklilik ifadesi dışında başka ifadelere gereksinim duyulduğu görülmüştür. Diferansiyel denklemlerde süreksizlik durumları, farklı zamanlarda ortaya çıkan olayları bu denklemlere benzer olan fark denklemleri ile çözümlemiştir.

Fark denklemlerinde matematik modellerle, yalnızca kesikli değerler kümesinde değişiklik gösteren bazı değişkenli problemler ifade edilir. Örnek verecek olursak, ekonomide bahsettiğimiz bu değişken zamandır. Süreksiz (kesikli) vakit aralıkları üzerinde verilen periyodik analiz ile adlandırılan milli kazanç hareketi ile birlikte mevcut başka ekonomik değişkenler ele alınır. Fark denklemleri ile ekonomi alanında örümcek ağı modeli ve Samuelson’un çoğaltan, hızlandıran modellerinin çözümü yapılır.

İkinci olarak, sesli şekilde sözcük öğrenme örneği incelenebilir. Bu örnekte, bir sözcük listesi hazırlanır, model uygulanacak kişiye bu sözcük listesi sesli şekilde okunur, sonraki adımda kişi aklında kalan sözcükleri bir kâğıda listeleyerek aktarır.

Tekrar, sözcüklerin yerleri değiştirilerek kişiye bu sözcükler sesli okunur ve kişi yine aynı şekilde hatırladığı kelimeleri yazar. Her defasında hatırlanmış olan sözcüklerin oranı hesaplanarak yeterli kararlılıkta bir sayıya erişene kadar bu işlem tekrarlanır.

Psikoloji bilimi alanındaki bu tür uygulamalarda fark denklemleri, hesaplanan bu ardışık sayıların özelliklerinde kullanılır. Uygulanan bu işlemde kesikli değişken, kaç kez deneme yapıldığıdır.

Fark denklemleri çözümlerinden yararlanılarak matematiksel analizler yapılan bu tür örnekler arttırılabilir. Doğada yaşamakta olan bir canlı türünün ileri zamanlardaki durumu ile (popülasyon sayısı, neslinin devamlılığı ve ya tükenmesi gibi) ilgili tahmin ve istatistikler yapılırken; fark denklemleri çözümleri ile, bu türün sayısının değişiminden önceki mevcudu ve bu değişimlerin nedeni olan beslenme, üreme, ölüm ve benzeri durumlar ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde fark denklemlerinin çözümlerinde yardımcı olan operatörler ve özelliklerine yer verilmiştir ve fark denklemlerinin çözümü ve sınıflandırılması üzerinde çalışılmıştır.

2.1. Parçalanış

$[a, b]$ Kapalı aralığını verilsin.

$$w = \{x_i |\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye, $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı veya ayrık noktalar kümesi denir. Burada x_i ayrık noktalarına parçalanışın düğüm noktaları denir. Eğer x_i ayrık noktaları eşit aralıklı ise bu durumda

$$w_h = \left\{x_i \middle|\ x_i = a + ih, i = 0,1,2, \dots, n\ h = \frac{b-a}{n}\right\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı denir. Burada h düzgün parçalanış adımıdır. w_h üzerinde tanımlanan f fonksiyonuna parçalanış fonksiyonu denir. Burada

$$x_i \in w_h \text{ İçin } f(x_i) \coloneqq f_i$$

gösterimi kullanılır.

$$x_{i+1} - x_i = h, \qquad i = 0,1,2, \dots, n-1$$

olduğu açıktır. Buradan

$$x_{i+n} = a + (i+n)h = a + ih + nh = x_i + nh$$

ve

$$x_{i+1} = x_i + h,\ x_{i+2} = x_i + 2h, \dots$$

yazılabilir (Amirali ve Duru, 2002).

2.2 Operatörler ve Özellikleri

Bu kısımda, fark denklemlerinin çözümünde kullanılan operatörler ve özellikleri (Agarwal, 2000; Akyol, 2011; Bayar, 2012; Elaydi,1999; Kelly ve Peterson, 1991; Levy ve Lessman, 1961; Yıldız, 2018) kaynaklarındaki bilgilerden yararlanılarak açıklanmıştır.

2.3. Δ Operatörü

Tanım 2.1. f kompleks veya reel değerli fonksiyonu, Δ fark operatörü

$$\Delta f(x) = \ f(x+h) - f(x) \qquad \mathbf{(2.1)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada x bağımız bir değişken, h ise herhangi bir sabittir.

Δ^2 İkinci dereceden fark operatörü

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta\, f(x)\,] \\ &= \Delta\,[f(x+h) - f(x)\,] \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \qquad \mathbf{(2.2)} \end{aligned}$$

Δ^3 Üçüncü dereceden fark operatörü

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta\,[\Delta^2\, f(x)] \\ &= \Delta[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] \\ &= f(x+3h) - f(x+2h) + 3(x+h) - f(x) \qquad \mathbf{(2.3)} \end{aligned}$$

Bu fark işlemlerine devam edildiğinde genel olarak f ′ in $(n-1)$. farkının farkına f ′ in n. farkı denir ve

$$\Delta^n\, f(x) = \ \Delta\ [\,\Delta^{n\ -1}\ f(x)\,] \qquad \mathbf{(2.4)}$$

olarak yazılır (Amirali ve Duru, 2002).

Sonuç 2.2. $f(x)$ fonksiyonunun r. mertebeden ileri farkı $(a-b)^r$’nin Binom açılımına benzer biçimde

$$\Delta^r\ f(x) = \ \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x + (r-k)h) \qquad \mathbf{(2.5)}$$

şeklindedir. (Bereketoğlu ve Kutay, 2011)

Örnek 2.3. $f(x)=x^3$ fonksiyonunun bir, iki ve üçüncü farkı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta x^3 \ = (x+h)^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[3x^2h + 3xh^2 + h^3] \\ &= [3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3] - [3x^2h + 3xh^2 + h^3] \\ &= [3(x^2 + 2xh + h^2)h + (3x+3h)h^2 + h^3] - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 \\ &= 6xh^2 + 6h^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta[\Delta^2 f(x)] = \Delta[6xh^2 + 6h^3] \\ &= [6(x+h)h^2 + 6h^3] - [6xh^2 + 6h^3] \end{aligned}$$

$$= (6x + 6h)h^2 + 6h^3 - 6xh^2 - 6x^3$$
$$= 6h^3$$
$$\Delta^4 f(x) = \Delta[\Delta^3 f(x)]$$
$$= \Delta[6h^3] \; = 0$$

Sonuç 2.4. Δ operatörü herhangi bir polinoma uygulandığında bu polinomun derecesi bir eksilir. n. dereceden olan bir polinomun n. farkı sabit bir değere, $(\mathrm{n}+1)$. farkı ile bundan yüksek farkları özdeş şekilde sıfır olur.

Açıkça belirtilirse, mesela

$$f(x) \; = c_0 \; + c_1\, x + c_2 x^2 \; + \cdots + c_n x^n$$

n. dereceden bir polinom olsun. Burada $c_0\,, c_1\,, c_2\,, \cdots, c_n$ sabitler ve $c_n \neq 0$ dır.

Bu durumda $f(x)$in n. ileri farkı bir sabit fonksiyondur yani

$$\Delta^n f(x) = n\,!\, c_n$$

eşitliği yazılır. Eğer p$>$ n ise Δ^pf(x)=0 olur.

Elde edilen sonuç Tablo 2.1 ile daha açık bir şekilde anlatılabilir.

Tablo 2.1. Polinomların dereceleri ile farkları arasındaki ilişki(Demircioğlu, 2007)

$\boldsymbol{f(x)}$	$\Delta\, \boldsymbol{f(x)}$	$\Delta^2 \boldsymbol{f(x)}$	$\Delta^3 \boldsymbol{f(x)}$	$\Delta^4 \boldsymbol{f(x)}$
1	0	0	0	0
x	h	0	0	0
x^2	$2xh$+h^2	$2h^2$	0	0
x^3	$3x^2h$+$3xh^2$+h^3	$6xh^2 + 6h^3$	$6h^3$	0

Teorem 2.5. $f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Bilineerlik: $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$
2. Homojenlik: k bir sabit olmak üzere

$$\Delta[kf(x)]=k\Delta f(x)$$

Yani Lineerlik: $c_1$ve c_2 sabitler olmak üzere

$$\Delta\,[c_1\,f\,(x)+\;c_2\,g(x)]\;=c_1\,\Delta\,[f\,(x)]+c_2\,\Delta\,[g\,(x)].$$

3. İki fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\Delta[f(x)g(x)]=\Delta[f(x)]g(x+h)+f(x)\Delta[g(x)]$$

veya

$$\Delta[f(x)g(x)]=\Delta[g(x)f(x)]=\Delta[g(x)]f(x+h)+g(x)\Delta[f(x)]$$

4. İki fonksiyonun bölümünün farkı:

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\Delta\;[f(x)]\,g(x)-f(x)\,\Delta[g(x)]}{g\,(x+h)\,g\,(x)}$$

5. k. ve l. dereceden farkların çarpımı:

$$\Delta^k(\Delta^l f(x))=\Delta^{k+l}f(x)\;\;k,l\in\mathbb{N}$$

6. $a\neq 0$ bir sabit ve h= 1 olmak üzere:
   i. $\Delta\,a^{f(x)}=a^{f(x)}\,(a^{\Delta f(x)}$ - 1)

Özel olarak $f(x)=x$ ise

$$\Delta\,a^x=(a-1)a^x$$

   ii. $\Delta\sin ax\;=2\sin\frac{a}{2}\cos a(\,x+\,\frac{1}{2}\,)$

   iii. $\Delta\;\cos ax=-2\sin\frac{a}{2}\sin a\;(\,x\;\;+\;\frac{1}{2}\;)$

   iv. $\Delta\;\log ax\,=\,\log(1\;+\;\frac{1}{x}\;)$

Örnek 2.6. $f(x)=9x^2\;-5sin2x\;+3lnx+2^x$ ise $\Delta f(x)$ =?

Çözüm.

$$\Delta f(x)=\Delta(9x^2\;-5sin2x\;+3lnx+2^x)$$
$$=9\Delta\,x^2-5\,\Delta\,sin2x+\;3\Delta\,lnx+\Delta 2^x$$
$$=9(2x+1)-10\,sin\frac{2}{2}cos\,2(\,x+\frac{1}{2})+3\ln(1+\,\frac{1}{x})+(2-1)2^x$$
$$=18x+9-10\sin1\cos2(\;x+\frac{1}{2})+3\ln(1\;+\;\frac{1}{x})+\;2^x$$

Örnek 2.7. $\Delta\;\sec\pi\,x$ değerini bulunuz.

Çözüm. $\quad \Delta \; \sec \pi\, x \;=\; \sec \pi\,(x+1) \;-\; \sec \pi\, x$

$$= \frac{1}{\cos \pi\,(x+1)} - \frac{1}{\cos \pi\, x}$$

$$= \frac{1}{\cos \pi x \; \cos \pi - \sin \pi x \; \sin \pi} - \frac{1}{\cos \pi x}$$

$$= \frac{1}{-\cos \pi\, x} - \frac{1}{\cos \pi x}$$

$$= -2 \; \sec \pi\, x$$

Örnek 2.8. $\quad \Delta\,(x \cos 2x) = ?$

Çözüm. Burada iki fonksiyonun çarpımının farkı özelliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta\,(x \cos 2x) &= \Delta(x)\cos 2(x+1) + x\Delta(\cos 2x)\\ &= (x+1-x)(\cos(2x+2)) + x\left(-2\sin\frac{2}{2}\sin 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \cos(2x+2) - 2x\, sin\, 1\, sin(2x+1)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.9. $\quad \Delta\left(\frac{\cos 3x}{x}\right) = ?$

Çözüm. Burada da

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\Delta[f(x)]\; g(x) - f(x)\Delta[g(x)]}{g(x+1)g(x)}$$

özelliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\cos 3x}{x}\right) &= \frac{\Delta(\cos 3x)(x) - \cos 3x\; \Delta(x)}{(x+1)x}\\ &= \frac{\left(-2\sin\frac{3}{2}\sin 3\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)(x) - \cos 3x\;(x+1-x)}{x^2+x}\\ &= \frac{\left(-2\sin\frac{3}{2}\sin\left(3x+\frac{3}{2}\right)\right)x - (\cos 3x\,)}{x^2+x}\end{aligned}$$

şeklinde olur.

2.4. Δ^{-1} Ters Fark Operatörü

$$\Delta F(x) = f(x)$$

olsun. Bu durumda

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x) + c(x)$$

ile ifade edilen Δ^{-1} operatörüne Δ operatörünün (antidifference operator) ters fark operatörü denir ve $f(x)$ fonksiyonunun ters farkı ile adlandırılır.

Özel olarak

$$\Delta^{-1}(0) = c(x)$$

dir. Burada $c(x)$ bir keyfi birim periyodik fonksiyondur.

Δ ve Δ^{-1} operatörleri arasında , I birim fonksiyonu olmak üzere

$$\Delta\Delta^{-1} = I \text{ iken } \Delta^{-1}\Delta \neq I$$

ilişkisi vardır. Yani $f(x)$ için

$$\Delta^{-1}\Delta f(x) = f(x) + c(x)$$

$$\Delta\Delta^{-1} f(x) = f(x)$$

dir. (Bereketoğlu ve Kutay, 2011)

Teorem 2.10. Ters fark operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının ters farkları var olsun. Bu durumda

a. İki fonksiyon çarpımının ters fark özelliği;

$$\Delta^{-1}\big(f(x)g(x)\big) = f(x-1)\Delta^{-1}g(x) - \Delta^{-1}(\Delta f(x-1)\Delta^{-1}g(x))$$

b. Lineer özelliği; a, b $\in \mathbb{R}$

$$\Delta^{-1}(af(x) + bg(x)) = a\Delta^{-1}f(x) + b\Delta^{-1}g(x)$$

2. $\Delta^{-m}(0) = c_1(x)\, x^{m-1} + c_2(x)x^{m-2} + \cdots + c_m(x)$

3. $\Delta^{-m}(1) = \frac{x^m}{m!} + c_1(x)\, x^{m-1} + c_2(x)x^{m-2} + \cdots + c_m(x)$

4. Tablo 2.2. Bazı fonksiyon ters farkları bulunmaktadır.

$f(x)$	$\Delta^{-1} f(x)$
$\sin ax$	$\dfrac{-\cos a\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + c(x)$, $a \neq 2k\pi$
$\cos ax$	$\dfrac{\sin a\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + c(x)$, $x > 0$
$\log x$	$\log\Gamma(x) + c(x)$, $x > 0$
a^x	$\dfrac{a^x}{a-1} + c(x)$, $a \neq 1$
$\ln x$	$\ln 10\ \log\Gamma(x) + c(x)$

Örnek 2.11.

a. $\Delta^{-1}(2x+5)=?$

b. $\Delta^{-1}(3x^2)=?$

c. $\Delta^{-1}(xa^x)=?$

d. $\Delta^{-1}\big((2x+1)\cos 2x\big)=?$

Çözüm. a.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(2x+5) &= \Delta^{-1}(2[x]+5)\\ &= [x]^2+5x+c(x)\\ &= x(x-1)+5x+c(x)\\ &= x^2-x+5x+c(x)\\ &= x^2+4x+c(x)\end{aligned}$$

Çözüm. b.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(3x^2) &= \Delta^{-1}(3x^2-3x+3x)\\ &= \Delta^{-1}(3(x^2-x)+3x)\\ &= \Delta^{-1}(3x(x-1)+3x)\\ &= \Delta^{-1}(3[x]^2+3[x])\\ &= [x]^3+\frac{3[x]^2}{2}+c(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm. c.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(xa^x) &= (x-1)\Delta^{-1}a^x-\Delta^{-1}(\Delta(x-1)\Delta^{-1}a^x)\\ &= (x-1)\Delta^{-1}a^x-\Delta^{-1}(\Delta^{-1}a^x)\\ &= (x-1)\frac{a^x}{a-1}-\Delta^{-1}\left(\frac{a^x}{a-1}\right)+c(x)\\ &= (x-1)\frac{a^x}{a-1}-\frac{a^x}{(a-1)^2}+c(x)\\ &= \frac{a^x}{a-1}\left(x-1-\frac{1}{a-1}\right)+c(x)\end{aligned}$$

bulunur.

Çözüm. d.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\big((2x+1)\cos 2x\big) &= (2(x-1)+1)\Delta^{-1}\cos 2x-\\ &\quad \Delta^{-1}(\Delta(2(x-1)+1)\Delta^{-1}\cos 2x)\\ &= (2x-1)\Delta^{-1}\cos 2x-2\Delta^{-1}(\Delta^{-1}\cos 2x)\\ &= (2x-1)\Delta^{-1}\cos 2x-2\Delta^{-1}\left(\frac{\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin 1}\right)+c(x)\\ &= (2x-1)\Delta^{-1}\cos 2x-\frac{1}{\sin 1}\Delta^{-1}(\sin(2x-1))+c(x)\end{aligned}$$

$$= (2x-1)\Delta^{-1} cos\, 2x - \frac{1}{\sin 1}\Delta^{-1}(\sin 2x\, cos1 -$$
$$cos2xsin1) + c(x)$$
$$= (2x-1)\Delta^{-1} cos\, 2x - \frac{\cos 1}{\sin 1}\Delta^{-1}\,(sin\, 2x) +$$
$$\Delta^{-1}(cos\, 2x) + c(x)$$
$$= 2x\Delta^{-1} cos\, 2x - \frac{\cos 1}{\sin 1}\Delta^{-1}\, sin\, 2x + c(x)$$
$$= 2x\left(\frac{\sin(2x-1)}{2\sin 1}\right) + \frac{\cos 1}{\sin 1}\left(\frac{\cos(2x-1)}{2\sin 1}\right) + c(x)$$

2.5.Polinom Faktöriyel

Tanım 2.12. Fark analizinde en önemli fonksiyonlardan biri faktöriyel kuvvet olup $[x]^r$ ile gösterilir.

r. dereceden bir faktöriyel

$$[x]^r = x\,(x-h)\,(x-2h)\,...\,(x-(r-1)h) \qquad (\mathbf{2.6})$$

şeklinde tanımlanır.

Burada h= 1 alınırsa

i. r $\in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $[x]^r = x\,(x-1)\,(x-2)\,...\,(x-r+1)$ olur ki bu polinomun faktöriyelidir.

ii. r = 0,1,2,…,n için

$$[x]^0 = 1$$
$$[x]^1 = x$$
$$[x]^2 = x(x-1)$$
$$[x]^3 = x(x-1)(x-2)$$
$$[x]^4 = x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$[x]^5 = x(x-1)(x-2)\,(x-3)(x-4)$$
$$\vdots$$
$$[x]^n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

olur.

Sonuç olarak

$$\Delta[x]^n = n\,[x]^{n-1}$$
$$\Delta^2[x]^n = n(n-1)[\,x\,]^{n-2}$$
$$\Delta^3[x]^n = n(n-1)(n-2)[\,x\,]^{n-3}$$
$$\Delta^4[x]^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\,[x]^{n-4}$$
$$\vdots$$

$$\Delta^n[\,x\,]^n \;= n(n-1)(n-2)\,\cdots 3\;\cdot 2\;\cdot 1 = n!$$
$$\Delta^{n+1}[x]^n = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\Delta[x]^{n+1} = (n+1)[x]^n$$

olduğundan her iki taraf Δ^{-1} ile işleme tabi tutulursa

$$\Delta^{-1}[x]^n = \frac{[x]^{n+1}}{n+1} + c(x)$$

olur.

Örnek 2.13. $\mathrm{p}(x) = 3x^2 - 4x + 1$ şeklinde verilen p(x) polinomun faktöriyel gösterimini yazınız.

Çözüm.
$$\begin{aligned}\mathrm{p}(x) &= 3x^2 - 3x - x + 1\\ &= 3x\,(x-1) - x + 1\\ &= 3[x]^2 - [x] + 1\end{aligned}$$

Örnek 2.14. $\mathrm{p}(x) = 3x^2 - 4x + 1$ için $\Delta^{-1}\,\mathrm{p}(x) =$?

Çözüm.
$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\mathrm{p}(x) &= \Delta^{-1}(3x^2 - 4x + 1)\\ &= \Delta^{-1}(3[x]^2 - [x] + 1)\\ &= [x]^3 - \tfrac{[x]^2}{2} + x + c(x)\\ &= x(x-1)(x-2) - \tfrac{1}{2}\,\big(x(x-1)\big) + x + c(x)\\ &= x(x^2 - 3x + 2) - \tfrac{1}{2}\,(x^2 - x) + x + c(x)\\ &= x^3 - 3x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + x + c(x)\\ &= x^3 - \tfrac{7}{2}\,x^2 + \tfrac{7}{2}\,x + c(x)\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek2.15. $\Delta^{-1}\big((2x+1)[x]^2\big) =$?

Çözüm.
$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\big((2x+1)[x]^2\big) &= \Delta^{-1}\big((2[x]+1)[x]^2\big)\\ &= \Delta^{-1}(2[x]^3 + [x]^2)\\ &= \tfrac{1}{2}[x]^4 + \tfrac{1}{3}[x]^3 + c(x)\\ &= [x]^3(\tfrac{1}{2}[x] \;+ \tfrac{1}{3}) + c(x)\\ &= x(x-1)(x-2)\left(\tfrac{1}{2}x \;+ \tfrac{1}{3}\right) + c(x)\end{aligned}$$

iii. $r \in \mathbb{Z}^-$ olduğunda $\quad [x]^r = \frac{1}{(x+1)\,(x+2)\ldots(x-r)}$

iv. $r \notin \mathbb{Z}$ için $[x]^r = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-r+1)}$ (Γ :Gama Fonksiyonu)

2.6. Belirsiz Toplam

Tanım 2.16. $f(x)$ fonksyonunun belirsiz toplamı

$$\sum f(x)$$

olarak ifade edilir. f' nin tanım kümesinde alınan tüm x'ler için

$$\Delta\left(\sum f(x)\right) = f(x)$$

şeklindedir.Verilen fark denklemlerinin daha kolay çözümü için Δ^{-1} operatörü yardımıyla

$$\Delta^{-1} f(x) = \sum f(x) + C(x)$$

yazılır. Burada $C(x)$, $\Delta C(x) = 0$ olan keyfi birim periyodik fonksiyondur (Elaydi, 1999; Levy ve Lessman, 1961).

Burada belirsiz toplam diferansiyel denklemlerin çözümlerdeki belirsiz integralle benzer işleve sahiptir. Yani

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x).$$

Belirsiz integral çözümlerindeki sabitten kaynaklı çözümler tek değildir. Örneğin

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

dir. Burada c keyfi sabittir.

Belirsiz toplam özellikleri

Tanım 2.17. k sabit sayı olmak üzere

1. $\sum (f(x) + g(x)) = \sum f(x) + \sum g(x)$
2. $\sum kf(x) = k \sum f(x)$
3. $\sum \left(f(x)\Delta g(x)\right) = f(x)g(x) - \sum Eg(x)\,\Delta f(x)$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek 2.18. 9^x in belirsiz toplamını bulunuz.

Çözüm. $\Delta\, 9^x = 8.9^x$

olduğundan,

$$\Delta \left(9^x/_8\right) = 9^x$$

yazılır. Bu $\left(9^x/_8\right)$ ifadesi 9^x ′ in bir belirsiz toplamıdır, Diğer taraftan

$c(x), \Delta\, c\,(x) = 0$ şartını sağlayan birim periyotlu keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\Delta \left(\frac{9^x}{8} + c(x)\right) = \Delta\left(\frac{9^x}{8}\right) = 9^x$$

bulunur. Yani 9^x in belirsiz toplamı

$$\sum 9^x = \frac{9^x}{8} + c(x)$$

biçiminde olur.

3. FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde (Akyol, 2011; Amirali ve Duru, 2002; Bayar, 2012; Bereketoğlu ve Kutay, 2011; Elaydi, 1999; Kelley ve Peterson, 1991). kaynaklarından yararlanılarak fark denklemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

3.1. Fark Denklemi

Tanım 3.1. Burada x sürekli değişken olmak üzere fark denklemi genel olarak

$$\mathrm{F}(x\,,\Delta\ f(x)\,,\Delta^2 f(x),\ldots,\Delta^n\ f(x)\ )=0 \qquad (\mathbf{3.1})$$

şeklinde veya k =1,2,3, …,n için $\Delta^k\ f(x)'$ in eşitleri (3.1) de yerlerine yazılırsa

$$\mathrm{G}\left(x\,,\ f(x+1)\,,f(x+2),\ldots,f(x+n)\right)=0 \qquad (\mathbf{3.2})$$

şeklinde gösterilir. (3.1)᾿e veya (3.2) ye fonksiyonel fark denklemi denir.

3.2. Mertebe

Tanım 3.2. Fark denkleminin mertebesi, bilinmeyen fonksiyonun var olan en büyük ve en küçük indislerinin farkına denir.

Örnek 3.3. $\Delta^2 f(x)+\Delta f(x)=0$ denklemi verilsin

Bu denklem, $\Delta^2 f(x)$ ve $\Delta f(x)$ in eşitleri yerlerine yazılırsa

$$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)+f(x+1)-f(x)=0$$

$$f(x+2)-f(x+1)=0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin en büyük indisi $x+2$ en küçük indisi $x+1$ ve

$$x+2-(x+1)=1$$

olduğundan denklemin mertebesi 1 dir.

Örnek 3.4. $f(x+4)-f(x)f(x+2)=0$ denklemi için $x+4-x=4$ olduğundan mertebesi 4 tür.

3.3. n. Mertebeden Lineer Fark Denklemi

Tanım 3.5. Burada x sürekli değişken k= $0,1,2,\ldots,n$ için $a_k(x)$ ve $\mathrm{B}(x)$ bu sürekli değişkende tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $a_0(x)\neq 0$, $a_n(x)\neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)\,f(x\ +n)\ +a_1(x)f(x+n-1)\ +\cdots+a_n(x)\,f(x)=B(x) \qquad (\mathbf{3.3})$$

denklemine n. mertebeden lineer fonksiyonel fark denklemi denir.

Benzer şekilde x_i , w_1 ayrık noktalar kümesinde ve $a_0(i)\neq 0$, $a_n(i)\neq 0$ olmak üzere

$$a_0(i)\,f_{i+n}\ +a_1(i)\,f_{i+n-1}\ +\cdots+a_n(i)f_i=B(i) \qquad (\mathbf{3.4})$$

denklemine n. mertebede lineer skaler fark denklemi denir. Burada $f(x_i + k) := f_{i+k}$ gösterimi kullanılmıştır.

Eğer (3.3) ve (3.4) denklemlerinde B(x)= 0 ve B(i)= 0 ise bu denklemlere homojen , B(x)≠ 0 ve B(i)≠ 0 ise homojen olmayan fark denklemleri denir. Şayet $a_k(x)$ ve $a_k(i)$ fonksiyonları sabit fonksiyonlar ise (3.3) ve (3.4) denklemlerine n. mertebeden sabit katsayılı fark denklemi aksi halde değişken katsayılı fark denklemi denir.

3.4. Fark Denkleminin Çözümü

Tanım 3.6. Bir küme üzerinde tanımlanmış fark denklemini yine bu küme üzerindeki her noktada özdeş olacak şekilde sağlayan fonksiyonlar fark denklemlerinin çözümü olarak adlandırılır.

3.5. Genel ve Özel Çözüm

Tanım 3.7. n. mertebeden (3.3) ve (3.4) fark denklemlerinin genel çözümleri sırasıyla,

$$f(x,\ c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)) = 0 \quad , \quad f(i, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

şeklinde gösterilir. Burada $c_1(x)$, $c_2(x)$, ... , $c_n(x)$ n tane birim periyodik keyfi fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ n tane keyfi sabitlerdir. Bu genel çözümde $c_n(x)$ ve c_n'e özel değerler vererek elde edilen çözümlere özel çözüm denir. $c_n(x)$ ve c_n'e özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere ise aykırı çözüm denir.

3.6. Lineer Bağımlı ve Bağımsızlık

Tanım 3.8. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları x sürekli değişkende tanımlı olsunlar. Her $x \geq x_0$ sürekli değişkeni için

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0 \qquad \mathbf{(3.5)}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sabitleri bulunuyorsa ,

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \qquad \mathbf{(3.6)}$$

fonksiyonlarına $x \geq x_0$ için lineer bağımlı aksi halde yani (3.5) eşitliği ancak ve ancak

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \qquad \mathbf{(3.7)}$$

olduğunda sağlanıyorsa lineer bağımsızdır denir.

Benzer şekilde x_i ayrık noktalarında tanımlı $f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i)$ fonksiyonları,

$i \geq i_0$ için

$$b_1 f_1(i) + b_2 f_2(i) + \cdots + b_n f_n(i) = 0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

eşitliği hepsi birden sıfır olmayan $b_1, b_2, \dots, b_n$ sabitleri için sağlanıyorsa $f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i)$ fonksiyonlarına $i \geq i_0$ için lineer bağımlı aksi halde lineer bağımsızdır denir.

3.7. Temel Çözüm Kümesi

Tanım 3.9. n. mertebeden (3.3) ve (3.4) homojen lineer denklemin n- tane yani mertebesi kadar lineer bağımsız çözümleri bu homojen denklemler için temel çözüm kümesi olarak tanımlanır.

Teorem 3.10. Sürekli değişken x olmak üzere eğer $x \geq x_0$ için $a_0(x) \neq 0$, $a_n(x) \neq 0$ ise (3.3) n. mertebeden homojen lineer fonksiyonel fark denklemi temel çözüm kümesine sahiptir.

Eğer (3.3) homojen lineer denklemin n- tane lineer bağımsız çözümü

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

ise (3.3) n. mertebe homojen lineer fark denkleminin genel çözümü $c_1(x), c_{2(x)}, \dots, c_n(x)$ n- tane keyfi birim periyodik fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) + \cdots + c_n(x) f_n(x)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.11. Homojen olmayan (3.3) n. mertebe lineer fark denkleminin genel çözümü; homojen kısmının genel çözümü ile homojen olmayan kısmının bir özel çözümünün toplamdır.

Buna göre eğer homojen denklemin genel çözümü $u(x)$ ile homojen olmayan denklemin bir özel çözümü $v(x)$ ile gösterilirse (3.3) homojen olmayan n. mertebeden fark denkleminin genel çözümü

$$f(x) = u(x) + v(x) \qquad \textbf{(3.9)}$$

toplamı şeklinde yazılır.

Tanım 3.12. Verilen m tane $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ fonksiyonları için

$$\mathcal{W}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_m(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \dots & f_m(x+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & \dots & f_m(x+m-1) \end{bmatrix}$$

matrisine casorati matrisi denir.

Teorem 3.13. Eğer her $x \geq x_0$ için

$\mathrm{W}(x) = \det \mathcal{W}(x) \neq 0$ ise $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Veya her $x \geq x_0$ için

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı ise $\mathrm{W}(x) = \det \mathcal{W}(x) = 0$ dır,

4. TERS FARK OPERATÖRÜ YARDIMIYLA BAZI FARK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Δ ileri fark operatörü ve $\boldsymbol{\Delta^{-1}}$ ters fark operatörü tanımından ve özelliğinden yararlanarak, bazı lineer (homojen ve homojen olmayan) ve lineer olmayan fark denklemlerinin genel çözümünün nasıl olacağı incelenmiştir

4.1. Yöntem

İleri fark operatörü Δ olmak üzere

$$\Delta\, y(x) = g(x) \qquad \mathbf{(4.1)}$$

şeklinde homojen olmayan fark denklemi verilsin.

Denklem(4.1) in genel çözümü;

$$\Delta y = 0$$

homojen denklemin genel çözümü olan

$$\mathrm{u}(x) = c(x)$$

ve

$$\Delta\, y(x) = g(x)$$

homojen olmayan denklemin bir özel çözümü $v(x)$ olmak üzere

$$\mathrm{y}(x) = u(x) + v(x)$$

dir. Yani

$$\mathrm{y}(x) = v(x) + c(x)$$

dir. Veya (1) denkleminin ters fark operatörü yardımıyla genel çözümü

$$\int \Delta y(x) = \int g(x)\, \Delta x$$

$$y(x) = \int g(x)\, \Delta x + c(x) \qquad \mathbf{(4.2)}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla homojen olmayan denklemin özel çözümü

$$v(x) = \int g(x)\, \Delta x$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\int$, Δ ileri fark operatörünün tersi anlamında yani Δ^{-1} ya da $\sum$ sonsuz toplamı olarak gösterilmiştir. O halde (4.2) ifadesinin Δ farkı alınırsa

$$\Delta y(x) = \Delta\left(\int g(x)\, \Delta x + c(x)\right) = \Delta\left(\int g(x)\, \Delta x\right) + \Delta c(x) = g(x)$$

olur. Burada $c(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyondur.

4.2. Bulgular

Ters fark operatörü yardımıyla bazı fark denklemleri için genel çözümler elde edilmiş ve genel çözümü elde edilen denklemler için bir yazım formu çıkarılmıştır. Ve bu durumlar teoremler olarak ifade edilmiştir.

Teorem 4.1. $\Delta f(x) = g(x)$ ise

$$\Delta y = a^{f(x)}\left(a^{g(x)} - 1\right)$$

denkleminin genel çözümü

$$\mathrm{y}(x) = a^{f(x)} + c(x)$$

dir. Burada $c(x)$keyfi birim periyodik fonksiyondur.

İspat. Fark denklemi

$$\frac{\Delta y}{a^{f(x)}} = a^{\Delta f(x)} - 1$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde

$$\mathrm{y}= a^{f(x)} + c(x)$$

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{a^{f(x)}} &= \frac{\Delta\left(a^{f(x)} + c(x)\right)}{a^{f(x)}}\\ &= \frac{a^{f(x+1)} - a^{f(x)}}{a^{f(x)}}\\ &= \frac{a^{f(x)}(a^{f(x+1)-f(x)} - 1)}{a^{f(x)}}\\ &= a^{\Delta f(x)} - 1\end{aligned}$$

olur.

Not: $\Delta f(x) = g(x)$ olmak üzere

$$\Delta y = ba^{f(x)}\left(a^{g(x)} - 1\right)$$

denkleminin genel çözümü

$$y = ba^{f(x)} + \ c(x)$$

dir.

Örnek 4.1. $\Delta y = 3a^{x^2}(a^{2x+1} - 1)$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemde

$$f(x) = x^2\ , g(x) = 2x + 1$$

olduğundan

$$\Delta x^2 = 2x + 1$$

olur. Yani

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanır. Buna göre denklemin genel çözümü

$$\mathrm{y}(x) = a^{f(x)} + c(x) \Rightarrow \mathrm{y} = 3a^{x^2} + c(x)$$

dir.

Örnek 4.2. $\Delta y = a^{\frac{b}{2}x^2}\left(a^{bx+d} - a^{d-\frac{b}{2}}\right)$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemin sağ tarafı düzenlenirse,

$$a^{\frac{b}{2}x^2}\left(a^{bx+d} - a^{d-\frac{b}{2}}\right) = a^{\frac{b}{2}x^2}\, a^{d-\frac{b}{2}}\left(a^{-d+\frac{b}{2}}\, a^{bx+d} - 1\right)$$

$$= a^{\frac{b}{2}x^2+d-\frac{b}{2}}\left(a^{bx+\frac{b}{2}} - 1\right)$$

olur. Burada

$$\Delta\left(\frac{b}{2}x^2 + d - \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2}(2x+1) = bx + \frac{b}{2}$$

olduğu için denklemin genel çözümü;

$$\mathrm{y}(x) = a^{\frac{b}{2}x^2+d-\frac{b}{2}} + c(x)$$

dir.

Örnek 4.3. $\Delta y = a^{\frac{1}{2}x^2}\left(a^{x+1} - a^{\frac{1}{2}}\right)$ denklemi verilsin. Genel çözümünü bulalım.

Çözüm: b= 1 ¸d= 1 olduğundan denklemin genel çözümü;

$$\mathrm{y} = a^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + c(x)$$

dir. Gerçekten denklemin sağ tarafı düzenlenirse.

$$a^{\frac{1}{2}x^2}\left(a^{x+1} - a^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{2}x^2}\, a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{2}}\, a^{x+1} - 1\right)$$

$$= a^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\left(a^{x+\frac{1}{2}} - 1\right)$$

olur. Burada

$$\Delta\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2x+1)$$

$$= x + \frac{1}{2}$$

olduğu için

$$\Delta y = a^{\frac{1}{2}x^2}\left(a^{x+1} - a^{\frac{1}{2}}\right)$$

veya

$$\Delta y = a^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\left(a^{x+\frac{1}{2}} - 1\right)$$

denkleminin genel çözümü

$$y= a^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + c(x)$$

dir.

Örnek 4.4. $\Delta y = a^{bx^2+dx}\left(a^{2bx} - a^{-(b+d)}\right)$ denklemi verilsin. Genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denklemin sağ tarafı düzenlenirse

$$\begin{aligned} a^{bx^2+dx}\left(a^{2bx} - a^{-(b+d)}\right) &= a^{bx^2+dx}a^{-(b+d)}(a^{2bx+b+d} - 1) \\ &= a^{bx^2+dx-b-d}(a^{2bx+b+d} - 1) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$f(x) = bx^2 + dx - b - d \quad , \; g(x) = 2bx + b + d$$

olduğundan

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanır. Buna göre denklemin genel çözümü

$$y(x) = a^{bx^2+dx-b-d} + c(x)$$

olur.

Örnek 4.5. $\Delta y = a^{x^2+x}(a^{2x} - a^{-2})$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} \Delta y &= a^{x^2+x}(a^{2x} - a^{-2}) \\ &= a^{x^2+x}a^{-2}(a^2a^{2x} - 1) \\ &= a^{x^2+x-2}(a^{2x+2} - 1) \end{aligned}$$

olur,

$$\begin{aligned} \Delta(x^2 + x - 2) &= \Delta x^2 + \Delta x - \Delta 2 \\ &= 2x + 1 + 1 \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

olduğu için genel çözümü

$$y= a^{x^2+x-2} + c(x)$$

dir.

Örnek 4.6. $\Delta y = a^{-\sin(\pi x)} - a^{\sin(\pi x)}$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}\Delta y &= a^{-\sin(\pi x)} - a^{\sin(\pi x)} \\ &= a^{\sin(\pi x)}\left(a^{-2\sin(\pi x)} - 1\right)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$f(x) = \sin(\pi x)\ ,\ g(x) = -2\sin(\pi x)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\Delta\, sin\,\pi x &= 2\ sin\frac{\pi}{2}\ cos\,\pi\ (\ x\ \ +\frac{1}{2}\ ) \\ &= -\ 2\ sin\,\pi x = g(x)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla denklemin genel çözümü

$$y(x) = a^{\sin(\pi x)} + c(x)$$

dir.

Örnek 4.7. $\Delta y = a^{\cos\pi x}(a^{-2\cos\pi x} - 1)$ denklemi verilsin, genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Verilen denklemde

$$f(x) = \cos\pi x\ ,\ g(x) = -2\cos\pi x$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\Delta\, cos\,\pi x &= -\ 2\ sin\frac{\pi}{2}\ sin\,\pi\ (\ x\ \ +\frac{1}{2}\ ) \\ &= -\ 2\ cos\,\pi x = g(x)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanmış olur, Buna göre genel çözümü

$$\mathrm{y}(x) = a^{\cos\pi x} + c(x)$$

dir.

Teorem 4.2. $\Delta g(x) = f(x)$ olmak üzere

$$\Delta y + \left(1 - a^{f(x)}\right)y = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$\mathrm{y} = c(x)\ a^{g(x)}\ ,$$

dir. $c(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyondur,

İspat. $$\left(1-a^{f(x)}\right)y=\left(1-a^{\Delta g(x)}\right)\left(c(x)\,a^{g(x)}\right)$$
$$=c(x)\left(\,a^{g(x)}-a^{\Delta g(x)+\,g(x)}\right)$$
$$=c(x)\left(a^{g(x)}-a^{g(x+1)}\right)$$
$$=-\,c(x)\,\Delta a^{g(\,x\,)}$$

olur. Diğer taraftan

$$\Delta y=\Delta c(x)a^{g(x)}$$
$$=c(x+1)\Delta a^{g(x)}+a^{g(x)}\Delta c(x)$$
$$=c(x)\Delta a^{g(x)}$$

olduğundan

$$\Delta y+\left(1-a^{f(x)}\right)y=c(x)\Delta a^{g(x)}\;-\mathrm{c(x)}\Delta a^{g(x)}\;=0$$

olur.

Not: $\Delta g(x)=f(x)\Rightarrow\Delta(g(x)+c_1(x))=f(x)$

olduğundan

$$g(x)+c_1(x)=\Delta^{-1}f(x)$$

olur. Buna göre genel çözüm

$$y=c(x)a^{\Delta^{-1}f(x)}=c(x)a^{g(x)+c_1(x)}=c(x)a^{c_1(x)}a^{g(x)}=c_2(x)\,a^{g(x)}$$

olur. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyonlardır.

Örnek 4.8. $\Delta y+(1-a^{2x+1})y=0$ denklemi verilsin. Fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemde

$$f(x)=2x+1 \text{ dir. } \Delta x^2=2x+1$$

olduğundan

$$g(x)=x^2$$

olur.

O halde genel çözüm

$$\mathrm{y}=c(x)\,a^{g(x)}\;,\quad\Rightarrow\quad y=c(x)a^{x^2}$$

olur.

Örnek 4.9. $\Delta y+(1-a^{2x})y=0$ fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $2x=\Delta(x^2-x)$ olduğundan genel çözüm

$$\mathrm{y}=c(x)a^{x^2-x}$$

olur.

Örnek 4.10. $\Delta y + (1 - a^x)y = 0$ denklemi verilsin. Fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $2x = \Delta(x^2 - x)$ dir. Buradan

$$x = \Delta \frac{x^2 - x}{2}$$

olduğundan genel çözüm

$$y = c(x)a^{\frac{1}{2}(x^2 - x)}$$

olur.

Örnek 4.11. $\Delta y + (1 - a^{1-x})y = 0$ denklemi verilsin.

Çözüm. $1 - x = \Delta g(x)$, eşitliğini sağlayan $g(x)$ in bulunması gerekir.

$$\Delta x = 1\,,\ \ \Delta \frac{x^2 - x}{2} = x$$

olduğundan

$$\Delta x - \Delta \frac{x^2 - x}{2} = \Delta\, g(x)$$

$$\Delta \left(x - \frac{x^2 - x}{2} \right) = \Delta g(x)$$

$$\Delta \left(\frac{3x - x^2}{2} \right) = \Delta g(x)$$

olur. Burada

$$g(x) = \frac{3x - x^2}{2}$$

alınabilir. O halde genel çözüm

$$\mathrm{y} = c(x)a^{\frac{3x - x^2}{2}}$$

olur. Bu genel çözüm ters fark operatörüne bağlı olarak

$$\mathrm{y}(x) = c(x)a^{\Delta^{-1}(1-x)}$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 4.3. $\Delta u(x) = P(x)$ denkleminin bir özel çözümü $u_p(x)$ ve

$$\Delta\big(g(x) - f(x)\big) = f(x)$$

ise

$$\Delta y + \big(1 - a^{f(x)}\big)y = a^{g(x)}p(x)$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x) = a^{g(x) - f(x)}\big(u_p(x) + c(x)\big)$$

dir.

Not: $\Delta\big(g(x)-f(x)\big)= f(x) \Rightarrow g(x)-f(x)= \Delta^{-1}f(x)$ şeklinde yazılacağından genel çözüm

$$y(x)=a^{\Delta^{-1}f(x)}\big(u_p(x)+c(x)\big)$$

şeklinde de yazılabilir.

İspat. Verilenlere göre

$$g(x+1)-f(x+1)=\Delta\big(g(x)-f(x)\big)+g(x)-f(x)=g(x)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \Delta\left(a^{g(x)-f(x)}\big(u_p(x)+c(x)\big)\right)\\
&= a^{g(x+1)-f(x+1)}\Delta\big(u_p(x)+c(x)\big)+\big(u_p(x)+c(x)\big)\Delta a^{g(x)-f(x)}\\
&= a^{\Delta(g(x)-f(x))+g(x)-f(x)}\Delta u_p(x)+\big(u_p(x)+c(x)\big)\\
&\quad \big(a^{\Delta(g(x)-f(x))+g(x)-f(x)}-a^{g(x)-f(x)}\big)\\
&= a^{g(x)}\Delta u_p(x)+\big(u_p(x)+c(x)\big)a^{g(x)-f(x)}\big(a^{\Delta(\,g(x)-\,f(x))}-1\big)\\
&= a^{g(x)}p(x)+\big(u_p(x)+c(x)\big)a^{g(x)-f(x)}\big(a^{f(x)}-1\big)\\
&= a^{g(x)}p(x)-\big(1-a^{f(x)}\big)y
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Delta y+\big(1-a^{f(x)}\big)y=a^{g(x)}\,p(x)$$

denklemi elde edilmiş olur.

Örnek 4.12. $\Delta y+(1-a^{2x+1})y=xa^{(x+1)^2}$ denklemin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $f(x)=2x+1$ ve $p(x)=x$,dir. Buna göre $g(x)=(x+1)^2$ olur. Bu durumda

$$\Delta\big(g(x)-f(x)\big)=f(x)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta\big(g(x)-f(x)\big) &= \Delta\big((x+1)^2-(2x+1)\big)\\
&= \Delta(x^2+2x+1-2x-1)\\
&= \Delta\, x^2\\
&= 2x+1\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

olduğundan $\Delta\big(g(x)-f(x)\big)=f(x)$ eşitliği sağlanmış olur.

Diğer taraftan $\Delta u(x) = p(x)$ den $\Delta u(x) = x$ olur. Buradan bu denklemin bir özel çözümü

$$u_p(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

alınabilir. O halde

$$\Delta y + (1 - a^{2x+1})y = a^{(x+1)^2}x$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x) = a^{g(x)-f(x)}\left(u_p(x) + c(x)\right)$$

ifadesinden

$$\mathrm{y}(x) = a^{x^2}\left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right)$$

olur. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \Delta\left(a^{x^2}\left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right)\right) \\
&= a^{(x+1)^2}\Delta\left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right) + \left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right)\Delta a^{x^2} \\
&= a^{(x+1)^2}\Delta\left(\frac{1}{2}(x^2 - x)\right) + \left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right)\left(a^{(x+1)^2} - a^{x^2}\right) \\
&= a^{(x+1)^2}\frac{1}{2}(2x + 1 - 1) + \left(\frac{1}{2}(x^2 - x) + c(x)\right)a^{x^2}(a^{2x+1} - 1) \\
&= a^{(x+1)^2}x - (1 - a^{2x+1})y
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Delta y + (1 - a^{2x+1})y = a^{(x+1)^2}x$$

denklemi elde edilmiş olur.

Örnek 4.13. $\Delta y + \left(1 - a^{x^2-x}\right)y = (x - 1)\ a^{\frac{1}{3}x(x-1)(x+1)}$ denklemi verilsin. Bu denklemin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $f(x) = x^2 - x,$ ve $g(x) = \frac{1}{3}x(x - 1)(x + 1)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
g(x) - f(x) &= \frac{1}{3}x(x - 1)(x + 1) - x(x - 1) \\
&= x(x - 1)\left(\frac{x+1}{3} - 1\right) \\
&= x(x - 1)\frac{1}{3}(x + 1 - 3) \\
&= \frac{1}{3}x(x - 1)(x - 2) \\
&= \frac{1}{3}[x]^3
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\Delta\big(g(x)-f(x)\big)=\Delta\frac{1}{3}[x]^3 \;=[x]^2=x(x-1)=f(x)$$

olur. Diğer taraftan $\Delta u(x)=x-1$ denkleminin bir özel çözümü

$$u_p(x)=\tfrac{1}{2}(x^2-3x)$$

şeklinde alınabilir.

O halde fark denklemin genel çözümü;

$$\mathrm{y}(x)=a^{\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)}\left(\tfrac{1}{2}(x^2-3x)+c(x)\right)$$

şeklinde yazılır.

Örnek 4.14. $\Delta y+\left(1-a^{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right)\mathrm{y}=a^{\frac{-cosx}{2\,sin\frac{1}{2}}}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **(4.3)**

denkleminden genel çözümü

$$y(x)=a^{\frac{-\cos x}{2\,sin\frac{1}{2}}-sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{cos\,x}{-2sin\frac{1}{2}}cos\,1-\frac{sin\,x}{2sin\frac{1}{2}}sin\,1+c(x)\right) \qquad \mathbf{(4.4)}$$

dir.

Çözüm. Burada

$$f(x)=\sin\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\text{ ve } g(x)=\frac{-cosx}{2\,\sin\frac{1}{2}}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\Delta\big(g(x)-f(x)\big)&=\Delta\left(\frac{-\cos x}{2\,sin\frac{1}{2}}-sin\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right)\\
&=\Delta\left(\frac{-cos\,x}{2\,sin\frac{1}{2}}-\;2\,sin\tfrac{1}{2}\;\Delta^{-1}(cosx)\right)\\
&=-\frac{\Delta\,cos\,x}{2\,sin\frac{1}{2}}-\;2\,sin\tfrac{1}{2}\;\Delta\Delta^{-1}(cosx)\\
&=\sin\left(x+\tfrac{1}{2}\right)-\;2\,sin\tfrac{1}{2}\cos x\\
&=sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
&=f(x)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\Delta\big(g(x)-f(x)\big)=f(x)$$

eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan $p(x)=sin\left(x-\frac{1}{2}\right)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
p(x) &= sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
&= sin\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\\
&= sin\left(x+\frac{1}{2}-1\right)\\
&= sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 1 - \ cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin 1\\
&= \frac{\Delta \cos x}{-2sin\frac{1}{2}}\cos 1 - \frac{\Delta \, sin\, x}{2sin\frac{1}{2}}\sin 1\\
&= \Delta\left(\frac{cos\, x}{-2sin\frac{1}{2}}cos\, 1 - \frac{sin\, x}{2sin\frac{1}{2}}sin\, 1\right)
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre

$$\Delta u_p(x) = p(x)$$

eşitliğinden $u_p(x)$ özel çözümü

$$u_p(x) = \frac{cos\, x}{-2sin\frac{1}{2}}cos\, 1 - \frac{sin\, x}{2sin\frac{1}{2}}sin\, 1$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla teorem (4.3) gereği (4.4) ifadesi (4.3) fark denklemin genel çözümüdür.

Örnek 4.15. $\Delta y + \left(1 - a^{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right)y = a^{g(x)}\sin x$ denklemi verilsin. $g(x)$ fonksiyonu ve denklemin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $f(x) = cos\left(x-\frac{1}{2}\right)$ olduğundan

$$\Delta\big(g(x) - f(x)\big) = f(x)$$

bağıntısından

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(g(x) - \cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right) &= \cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\\
\Delta g(x) - \Delta cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right) &= \cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\\
\Delta g(x) &= \cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \Delta cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\\
\Delta g(x) &= \cos\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\\
g(x) &= \Delta^{-1}\cos\left(x+\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}\ \Delta^{-1}\ \cos\ \left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

olduğundan

$$\Delta^{-1}\cos\ \left(x+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}$$

alınabilir. Böylece

$$g(x) = \ \Delta^{-1}\cos\ \left(x+\frac{1}{2}\right)$$

olduğundan

$$g(x) = \frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}$$

bulunur. O halde

$$g(x) - f(x) = \frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}} - \cos\left(x-\tfrac{1}{2}\right)$$

olur. Diğer taraftan $p(x) = \sin x$ dir. $\Delta u(x) = p(x) = \sin x$ olacağından bir özel çözümü

$$u_p(x) = \Delta^{-1}\sin x$$

$$u_p(x) = -\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$$

alınabilir. O halde genel çözüm;

$$y = a^{g(x)-f(x)}\left(u_p(x)+c\right)$$

$$y(x) = a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}} - \cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \mathrm{c}(x)\ \right)$$

dir. Şimdi de bu genel çözümün denklemi sağladığını gösterelim.

Öncelikle

$$\Delta y + \left(1-a^{f(x)}\right)y = a^{g(x)}p(x)$$

fark denkleminin sol tarafı ele alınır , $f(x)$ ve genel çözüm yerlerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\Delta y + \left(1-a^{f(x)}\right)y = \Delta\left(a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}} - \cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \mathrm{c}(x)\ \right)\right) +$$

$$\left(1-a^{cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right)\left(a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)\right)$$

$$=\left(a^{\frac{\sin\ x+1}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)\right)-$$

$$\left(a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)\right)+$$

$$\left(a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)\right)+$$

$$\left(a^{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\mathrm{c}(x)\right)\right)$$

$$=\left(a^{\frac{\sin\ x+1}{2\sin\frac{1}{2}}-\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)\right)+\ a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\mathrm{c}(x)\right)$$

$$=\ a^{\frac{\sin(x+1)-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)+\ a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\ \mathrm{c}(x)\right)$$

$$=\ a^{\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)+\ a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\ \mathrm{c}(x)\right)$$

$$=a^{\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{2}+\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{2}-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)+$$

$$a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\ \mathrm{c}(x)\right)$$

$$=\ a^{\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)+\ a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\mathrm{c}(x)\right)$$

$$=a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}+\mathrm{c}(x)\right)+a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\mathrm{c}(x)\right)$$

$$=a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right]$$

$$=a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left(\sin x\sin\frac{1}{2}+\sin x\sin\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= a^{\frac{\sin x}{2\sin\frac{1}{2}}} \sin x$$

$$= a^{g(x)} p(x)$$

olur. Böylece denklem sağlanmış olur.

Teorem 4.4. $g(x) = \Delta f(x)$ ve $p(x) = \Delta q(x)$ olacak şekilde $f(x)$ ve $q(x)$ varsa

$$\big(p(x)y + f(x)\big)\Delta y - g(x)y + p(x)y^2 = 0 \qquad \mathbf{(4.5)}$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \frac{f(x)}{q(x)+c(x)} \qquad \mathbf{(4.6)}$$

dir.

Özel olarak $f(x) = a, a \neq 0$ sabit fonksiyon ise $g(x) = 0$ olacağından denklem

$$(p(x)y + a)\Delta y + p(x)y^2 = 0$$

şeklinde olur. Genel çözüm ise

$$y(x) = \frac{a}{q(x)+c(x)} \text{ dir.}$$

Eğer $p(x) = a$ ise denklem

$$\big(ay + f(x)\big)\Delta y - g(x)y + ay^2 = 0$$

şeklinde olur ve genel çözümü

$$y(x) = \frac{f(x)}{ax+c(x)}$$

dir. Burada özel olarak a= 0 ise denklem

$$f(x)\Delta y - g(x)y = 0$$

şekline dönüşür ve genel çözümü

$$y(x) = c(x)f(x)$$

dir.

İspat. Denklemin genel çözümü olan

$$\mathrm{y}(x) = \frac{f(x)}{q(x)+c(x)}$$

ifadesi

$$q(x) + c(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{y}(x)}$$

şeklinde yazılır. Ve her iki taraf Δ ile işleme tabi tutulursa

$$\Delta(q(x) + c(x)) = \Delta\left(\frac{f(x)}{\mathrm{y}(x)}\right)$$

$$\Delta q(x) = \frac{y\Delta f(x) - f(x)\Delta y}{y(x+1)y}$$

olur. Burada

$$\Delta q(x) = p(x)$$

ve

$$\Delta f(x) = g(x) \text{ ve } y(x+1) = \Delta y + y$$

olduğu kullanılırsa (4.5) fark denklemi elde edilir. Böylece (4.6) ifadesinin (4.5) denklemini sağladığı gösterilmiş olur.

Örnek 4.16. $(2y + 3x)\Delta y - 3y + 2y^2 = 0$ denklemi verilsin. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm . $f(x) = 3x$ olmak üzere

$$g(x) = \Delta f(x)$$

bağıntısından

$$\Delta 3x = 3 \Rightarrow g(x) = 3$$

olur. $p(x) = 2$ olduğundan

$$p(x) = \Delta q(x)$$

eşitliğinden

$$2 = \Delta 2x \Rightarrow q(x) = 2x$$

olur.

Böylece genel çözüm;

$$y(x) = \frac{f(x)}{q(x) + c(x)}$$

ifadesinden

$$y(x) = \frac{3x}{2x + c(x)}$$

şeklinde olur.

Gerçekten

$$y(x) = \frac{3x}{2x + c(x)}$$

genel çözüm ifadesi

$$2x + c(x) = \frac{3x}{y(x)}$$

şeklinde yazılır ve Δ farkı alınır ve de düzenlenirse fark denklemi elde edilir. Veya genel çözüm fark denkleminde yerine yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

Not :Eğer

$$p(x) = g(x) = \Delta f(x)$$

ise

$$\big(p(x)y + f(x)\big)\Delta y - p(x)y + p(x)y^2 = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \frac{f(x)}{f(x)+c(x)}$$

veya

$$y(x) = 1 - \frac{c(x)}{f(x)+c(x)}$$

dir.

Örnek 4.17. $\big((2x+1)y + x^2\big)\Delta y - (2x+1)y + (2x+1)y^2 = 0$ şeklinde verilen fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denklemde

$$p(x) = 2x+1, \; g(x) = 2x+1, \; f(x) = x^2$$

olmak üzere

$$p(x) = \Delta q(x)$$

ifadesinden

$$2x + 1 = \Delta x^2$$

olduğundan

$$q(x) = x^2$$

bulunur.

$$g(x) = \Delta f(x)$$

ifadesinden ve benzer şekilde

$$2x + 1 = \Delta x^2 \;\Rightarrow\; f(x) = x^2$$

bulunur. O halde genel çözüm;

$$y(x) = \frac{f(x)}{f(x)+c(x)} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{x^2}{x^2+c(x)}$$

olur.

Teorem 4.5. $\Delta f(x) = g(x)$ ve $\Delta R(x) = B(x)$ olacak şekilde $f(x)$ ve $R(x)$ varsa

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{g(x)}{f(x)}y^2 = \big(g(x) + f(x)\big)B(x) \qquad \mathbf{(4.7)}$$

denkleminin genel çözümü

$$y^2 = f(x)(R(x) + c(x)) \tag{4.8}$$

dir.

İspat. Denklemin genel çözümü olan

$$y^2 = f(x)(R(x) + c(x))$$

ifadesinin her iki yanının Δ farkı alınırsa

$$\Delta y^2 = (R(x+1) + c(x))\Delta f(x) + f(x)\Delta(R(x) + c(x))$$

olur. Burada

$$R(x+1) = \Delta R(x) + R(x) \text{ ve } \Delta f(x) = g(x)$$

olduğu kullanılırsa

$$\Delta y^2 = (\Delta R(x) + R(x) + c)g(x) + f(x)\Delta R(x)$$

olur. Burada ise

$$\Delta R(x) = B(x)$$

ve

$$R(x) + c(x) = \frac{y^2}{f(x)}$$

ve de

$$\Delta y^2 = (\Delta y)^2 + 2y\Delta y$$

ifadeleri yerlerine yazılır ve düzenlenirse (4.7) fark denklemi elde edilir.

Örnek 4.18 : $(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2x+1}{x^2} y^2 = 3(x+1)^2$

fark denklemi verilsin, bu denklemin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Burada

$$g(x) = 2x + 1 \, , f(x) = x^2$$

dir

$$. \, \Delta x^2 = 2x + 1$$

olduğundan

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan

$$\Delta R(x) = B(x) \text{ ve } B(x) = 3$$

olduğundan

$$\Delta R(x) = 3 \Rightarrow R(x) = 3x$$

alınabilir. O halde genel çözüm

$$y^2 = x^2(3x + c(x))$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.19 : $(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2}{x}y^2 = (x^2 + 3x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

fark denklemi verilsin. Bu denklemin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Öncelikle denklem

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2(x+1)}{x(x+1)}y^2 = (x^2 + 3x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2x+2}{x^2+x}y^2 = (x^2 + 3x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

biçiminde yazılır. Buna göre denklemde

$$f(x) = x^2 + x \text{ ve } g(x) = 2x + 2$$

dir,

$$\Delta f(x) = \Delta(x^2 + x) = \Delta x^2 + \Delta x = 2x + 1 + 1 = 2x + 2 = g(x)$$

olduğundan

$$\Delta f(x) = g(x)$$

eşitliği sağlanır. Yani

$$x^2 + 3x + 2 = f(x) + g(x)$$

dir

$$. B(x) = x + \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\Delta R(x) = B(x) \Rightarrow \Delta R(x) = x + \frac{1}{2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} R(x) &= \Delta^{-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{2}x^2$$

bulunduğundan genel çözüm

$$y^2 = (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 + c(x)\right)$$

biçiminde yazılır. Bu genel çözümün

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2x+2}{x^2+x}y^2 = (x^2+3x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

denklemini sağladığını gösterelim. Burada bilindiği üzere

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$$
$$\big(\Delta y(x)\big)^2 = y^2(x+1) - 2y(x)y(x+1) + y^2(x)$$

eşitliklerinden yararlanarak fark denklemi

$$\begin{aligned}(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2x+2}{x^2+x}y^2 &= y^2(x+1) - 2y(x)y(x+1) + y^2(x) + \\ &\quad 2y(x)\big(y(x+1)-y(x)\big) - \frac{2x+2}{x^2+x}(x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right) \\ &= y^2(x+1) - y^2(x) - (2x+2)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right) \quad (\mathbf{4.9})\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada

$$y^2(x) = (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)$$
$$y^2(x+1) = \big((x+1)^2 + (x+1)\big)\left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + c\right)$$

ifadeleri denklem (4.9) da yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}&y^2(x+1) - y^2(x) - (2x+2)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right) \\ &= ((x+1)^2 + x + 1)\left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + c(x)\right) - \\ &\quad (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right) - (2x+2)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right) \\ &= (x+1)\left[(x+2)\left(\frac{1}{2}(x+1)^2+c(x)\right) - (x+2)\left(\frac{1}{2}x^2+c(x)\right)\right] \\ &= (x+1)(x+2)\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + c(x) - \frac{1}{2}x^2 - c(x)\right] \\ &= (x^2+3x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - \frac{2x+2}{x^2+x}y^2 = (x^2+3x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

denklemi elde edilmiş olur.

Teorem 4.6. Eğer

$$\Delta(q(x) - p(x)) = p(x) \text{ ve } \Delta B(x) = U(x)$$

ise

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{p(x)}{q(x)}y^2 = \frac{U(x)}{q(x)}$$

denkleminin genel çözümü

$$y^2(x) = \frac{B(x) + c}{q(x) - p(x)}$$

dir. Burada $q(x) - p(x) \neq 0$

İspat. Öncelikle fark denkleminin sol tarafı ele alınır. Bunun için

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$$

$$\left(\Delta y(x)\right)^2 = y^2(x+1) - 2y(x)y(x+1) + y^2(x)$$

ifadeleri

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{p(x)}{q(x)}y^2$$

ifadesinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}(\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{p(x)}{q(x)}y^2 &= y^2(x+1) - 2y(x)y(x+1) + y^2(x) + \\ &\quad 2y(x)(y(x+1) - y(x)) + \tfrac{p(x)}{q(x)}y^2 \\ &= y^2(x+1) - 2y(x)y(x+1) + y^2(x) + \\ &\quad 2y(x)\, y(x+1) - 2y^2(x) + \tfrac{p(x)}{q(x)}y^2 \\ &= y^2(x+1) - y^2(x) + \tfrac{p(x)}{q(x)}y^2 \qquad \mathbf{(4.10)}\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan genel çözüm ifadesinden

$$y^2(x) = \tfrac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}$$

$$y^2(x+1) = \tfrac{B(x+1)+c(x+1)}{q(x+1)-p(x+1)}$$

olur. Bu ifadeler (4.10) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}y^2(x+1) - y^2(x) + \tfrac{p(x)}{q(x)}\left(\tfrac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right) &= \tfrac{B(x+1)+c(x+1)}{q(x+1)-p(x+1)} - \tfrac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)} \\ &\quad + \tfrac{p(x)}{q(x)}\left(\tfrac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right) \qquad \mathbf{(4.11)}\end{aligned}$$

olur. Teoremde

$$\Delta(q(x) - p(x)) = p(x)$$

olduğu verildiğinden,

$$q(x+1)-p(x+1)=q(x) \qquad \mathbf{(4.12)}$$

ifadesi edilir. Aynı şekilde $\Delta B(x)=U(x)$ den

$$B(x+1)=B(x)+U(x) \qquad \mathbf{(4.13)}$$

şeklinde olur.

Burada $\mathbf{(4.12)}$ ve $\mathbf{(4.13)}$ ifadeleri $\mathbf{(4.11)}$ ifadesinde yerlerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$\frac{B(x+1)+c(x+1)}{q(x+1)-p(x+1)}-\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}\left(\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right)=$$

$$=\frac{B(x)+U(x)+c(x)}{q(x)}-\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\left(\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right)$$

$$=\frac{U(x)}{q(x)}+\frac{B(x)+c(x)}{q(x)}+\left(-1+\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right)$$

$$=\frac{U(x)}{q(x)}+\frac{B(x)+c(x)}{q(x)}+\left(\frac{p(x)-q(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{B(x)+c(x)}{q(x)-p(x)}\right)$$

$$=\frac{U(x)}{q(x)}+\frac{B(x)+c(x)}{q(x)}-\frac{B(x)+c(x)}{q(x)}$$

$$=\frac{U(x)}{q(x)}$$

olur. Yani fark denkleminin sağ tarafına eşit olduğu görülür.

Örnek 4.20. $\mathrm{p}(x)=4x$, $\mathrm{U}(x)=2x-1$ verilsin. Fark denklemini ve genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Öncelikle $\Delta f(x)=p(x)$ eşitliğinden faydalanılarak $f(x)$ elde edilir. Burada $p(x)=4x$ verilmiştir ve $p(x)$ *'e* ters fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}p(x)&=\Delta^{-1}(4x)\\&=4\cdot\frac{[x]^2}{2}\\&=2\big(x(x-1)\big)\\&=2x^2-2x\end{aligned}$$

olur. O halde $f(x)=2x^2-2x$ şeklinde bulunur. Ve burada $\Delta f(x)=p(x)$ sağlanır. Diğer taraftan.

$$\begin{aligned}\mathrm{q}(x)-p(x)&=f(x)\\ \mathrm{q}(x)-4x&=2x^2-2x\\ \mathrm{q}(x)&=2x^2+2x\end{aligned}$$

olur. O zaman fark denklemi

$$(\Delta y)^2+2y\Delta y+\frac{4x}{2x^2+2x}y^2=\frac{2x-1}{2x^2+2x}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $\Delta B(x) = U(x)$ olduğundan ve $\mathrm{U}(x) = 2x - 1$ olmak üzere $\mathrm{U}(x)$ *'e* ters fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}U(x) &= \Delta^{-1}(2x-1)\\ &= \Delta^{-1}(2[x]-1)\\ &= 2\cdot\frac{[x]^2}{2} - x\\ &= x(x-1) - x\\ &= x^2 - 2x\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece $B(x) = x^2 - 2x$ olur. Bu durumda genel çözüm

$$y^2(x) = \frac{x^2 - 2x + c(x)}{2x^2 - 2x}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.21. $\mathrm{p}(x) = 3x^2 - 15x + 1$, $U(x) = 1 - \frac{2}{3}x$ olmak üzere lineer olmayan fark denklemini yazınız ve genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Burada $p(x) = 3x^2 - 15x + 1$ verilmiştir ve $p(x)$ *'e* ters fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}p(x) &= \Delta^{-1}(3x^2 - 15x + 1)\\ \Delta^{-1}p(x) &= \Delta^{-1}(3[x]^2 - 12[x] + 1)\\ &= [x]^3 - 6[x]^2 + x\\ &= x^3 - 9x^2 + 9x\end{aligned}$$

olur. O halde $f(x) = x^3 - 9x^2 + 9x$ biçiminde olur. Ve burada $\Delta f(x) = p(x)$ sağlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\mathrm{q}(x) - p(x) &= f(x)\\ \mathrm{q}(x) - (3x^2 - 15x + 1) &= x^3 - 9x^2 + 9x\\ \mathrm{q}(x) &= x^3 - 6x^2 - 6x + 1\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde fark denklemi

$$(\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{3x^2 - 15x + 1}{x^3 - 6x^2 - 6x + 1}y^2 = \frac{1 - \frac{2}{3}x}{x^3 - 6x^2 - 6x + 1}$$

olur. Burada $\Delta B(x) = U(x)$ olduğundan ve $\mathrm{U}(x) = 1 - \frac{2}{3}x$ olmak üzere $\mathrm{U}(x)$'e ters fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}U(x) &= \Delta^{-1}\left(1 - \frac{2}{3}x\right)\\ &= x - \frac{2}{3}\cdot\frac{[x]^2}{2}\end{aligned}$$

$$= x - \frac{x(x-1)}{3}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2$$

$$= \frac{4x - x^2}{3}$$

şeklinde yazılır. Böylece $B(x) = \frac{4x - x^2}{3}$ olur. Bu durumda genel çözüm

$$y^2(x) = \frac{\frac{4x - x^2}{3} + c(x)}{x^3 - 9x^2 + 9x}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.22. $(\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{12x+3}{6x^2+9x+3}y^2 = \frac{3x^2-11x+8}{6x^2+9x+3}$

lineer olmayan fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Denklemde

$$\mathrm{q}(x) = 6x^2 + 9x + 3$$

ve

$$\mathrm{p}(x) = 12x + 3$$

dir. Burada

$$\mathrm{q}(x) - \mathrm{p}(x) = f(x)$$

eşitliğinden yararlanılarak

$$6x^2 + 9x + 3 - (12x + 3) = f(x)$$

$$f(x) = 6x^2 - 3x$$

elde edilir. Şimdi $\mathrm{p}(x)$ *'e* ters fark operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{-1}p(x) = \Delta^{-1}(12x + 3)$$

$$= 6x(x-1) + 3x$$

$$= 6x^2 - 3x$$

olur. Ve

$$f(x) = 6x^2 - 3x$$

olduğundan dolayı

$$\Delta f(x) = p(x)$$

eşitliği sağlanır.

Burada

$$\Delta B(x) = U(x)$$

eşitliğinden ve

$$\mathrm{U}(x) = \ 3x^2 - 11x + 8$$

olmak üzere

$$\Delta^{-1}\mathrm{U}(x) = B(x)$$

olduğundan ,

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\mathrm{U}(x) &= \Delta^{-1}(3x^2 - 11x + 8\ )\\ &= \Delta^{-1}(3[x]^3 - 8[x] + 8)\\ &= [x]^3 - 4[x]^2 + 8x\\ &= x(x^2 - 3x + 2) - 4(x^2 - x) + 8x\\ &= x^3 - 7x^2 + 14x\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$B(x) = x^3 - 7x^2 + 14x$$

olur. Sonuç olarak genel çözüm

$$y^2(x) = \ \frac{x^3-7x^2+14x+c(x)}{6x^2-3x}$$

şeklindedir.

Örnek 4.23. $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\ )(\Delta y)^2 + (\ x^2 + x\ )y\Delta y + xy^2 = 3x + \frac{3}{2}$

lineer olmayan fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Öncelikle denklem uygun işlemler yapılarak

$$.\ (\Delta y)^2 + 2y\Delta y + \frac{x}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x}\,y^2 = \frac{3x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x}$$

şeklinde uygun formda yazılır. Burada

$$\mathrm{p}(x) = x$$

olmak üzere

$$\Delta^{-1}p(x) = f(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}p(x) &= \Delta^{-1}(x)\\ &= \frac{[x]^2}{2}\\ &= \ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

olur. Ve

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

bulunur ve de

$$\Delta\, f(x) = p(x)$$

eşitliği sağlanır.

Burada

$$\mathrm{q}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

ve

$$\mathrm{p}(x) = x$$

dir. Buna göre

$$\mathrm{q}(x) - \mathrm{p}(x) = f(x)$$

eşitliğinden

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \;\; - (x) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

elde edilir.

Burada

$$\mathrm{U}(x) = 3x + \frac{3}{2}$$

dir.

$$\Delta B(x) = U(x)$$

olduğundan ve

$$\Delta^{-1}\mathrm{U}(x) = B(x)$$

olmak üzere

$$\Delta^{-1}\mathrm{U}(x) = \Delta^{-1}\left(3x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\Delta^{-1}\mathrm{U}(x) = 3\frac{x^2-x}{2} + \frac{3}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x^2$$

elde edilir. Böylece $B(x) = \frac{3}{2}x^2$ olur. O halde genel çözüm

$$y^2(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2 + c(x)}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$$

şeklinde bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Diferansiyel denklemler ile fark denklemleri arasındaki benzerlikler çoktur. Bu esasa göre kolaylıkla birçok fark denklemi, diferansiyel denklemler yardımıyla açıklanmış ve çözülmüştür. Bu tez çalışmasına genel bir şekilde bakarsak; ters fark operatöründen yararlanarak bazı fark denklemleri lineer veya lineer olmayanın genel çözümü incelenmiştir.

Sabit katsayılı veya uygun değişken katsayılı fark denklemleri için genel bir çözüm yöntemi verilebilir (Bayar, E.). Ancak lineer olmayan veya (Bayar, E.) de bahsedilen değişken katsayılı denklemlerin dışındaki denklemler için genel bir çözüm yöntemi geliştirmek zor veya imkânsızdır.

Ancak bazı özelliğe sahip denklemler için genel olarak çözüm yöntemi çıkarılabileceği bu çalışmamızda ortaya konulmuştur ve örneklerle desteklenmiştir. Hatta örnek 4.2. de verildiği gibi bazı denklemlerin uygun işlemlerle bizim verdiğimiz denklemlere dönüştürülerek genel çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmamızdan hareketle daha farklı özelliklere sahip denklemler için de genel çözüm yöntemlerinin geliştirilebileceği bunun dışında bazı denklemler, uygun dönüşümlerle bizim verdiğimiz denklemlere dönüştürülebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Amirali, G. ve H. Duru. (2002). *Nümerik Analiz*. Ankara: Pegem A Yayınları, 12-25.

Akın,Ö.ve H. Bulgak. (1998). *Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi*. Konya: Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, 180.

Agarwal, R.P. (2000). *Difference equations and inequalities*. New York : Marcel Dekker, 970.

Akyol, S. (2011). *Lineer fark denklemleri ve onların çözüm metodları üzerine*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Bozok Üniversitesi.

Bayar, E. (2012). *Değişken katsayılı lineer fark denklemleri için çözüm yöntemleri*.Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi.

Bereketoğlu, H. ve V. Kutay, (2011). *Fark denklemleri*. Ankara: Gazi Kitapevi.

Demircioğlu, N. (2007). *Fark denklemleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniversitesi.

Elaydi, S. (1999). *An introduction to difference equations* . New York: Springer-Verlag, 428.

Elaydi, S. and Peterson, A. (1988). Stability of difference equations . *Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Differential Equations*, Edited by Aftabizadeh R. ; 417-422

Levy, H. ve Lessman, F. (1961). *Finite difference equations*. New York: The Macmillan Company.

Goldberg, S. (1986). *Introduction to difference equations with illustrative examples from economics*. Psychology and Sociology . New York: Dover, 260.

Gordon, S. (1971) , *Stability and summability of solutions of difference equations* . Math. Syst. Theory , 5 ;56-75.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. (1991). *Difference equations an introduction with applications*. New York : Academic , 403.

Mickens, R.E. (1990). *Difference equations*, Chapter 4, New York: Van Nostrand Reinhold, Yan, X. X. vd. (2002). *Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation*, Applied mathematics E-notes, 2, 51-58.

Miller, K. S. (1968) . *Linear difference equations* . New York: W. A Benjamin

Peterson, A. (1987). *Existence and uniqueness theorems for nonlinear difference equations*. J. Math. Anal. Appl. , 125 ; 185-191.

Yıldız, F. (2018). *İkinci mertebeden fark denklemleri ve onların çözüm yöntemleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi.

ÖZ GEÇMİŞ

Teimoor Younus SALAHUDDIN, Kerkük Atabeyler Lisesi'ni bitirdikten sonra 2016 yılında Kerkük Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2019 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına kayıt yaptırıldı. Orta derecede İngilizce bilmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : *0000-0003-2766-4731*

Yayınlar:

1. Salahuddın T. , N. Altınışık (2022, Ekim) Solution of nonlinear difference equations with the inverse operator. /9^{th} International Congress of Academic Research /October 27^{th} to 29^{th} , 2022 October