

**KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMLÜ UZAYLARIN BİLİNEER
ÇARPANLARI**

Hüseyin ÇAKIR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Öznur KULAK

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Hüseyin ÇAKIR tarafından hazırlanan “Kesirli Dalgacık Dönüşümlü Uzayların Bilineer Çarpanları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman): Prof. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Cihan ÜNAL

Matematik Anabilim Dalı, Sinop Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 12/05/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hüseyin ÇAKIR

12.05.2023

KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMLÜ UZAYLARIN BİLİNEER ÇARPANLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin ÇAKIR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2023

ÖZET

Literatürde O. Blasco ve F.Villaroya, Lebesgue uzayları için bilineer çarpanları tanımlamışlardır. Ayrıca tanımladıkları bilineer çarpanların bir takım özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada, O. Blasco ve F.Villaroya'nın bilineer çarpan teorisinde kullandıkları yöntemlerle, kesirli dalgacık dönüşümü ile elde edilen fonksiyon uzayı için bilineer çarpan tanımı yapıp bu uzay için bilineer çarpanlar uzayı araştırılmıştır. Daha sonra bu uzayların bir takım özellikleri incelenmiştir.

Sayfa Adedi : 33
Anahtar Kelimeler : Bilineer çarpan, Kesirli dalgacık dönüşümü, Ağırlıklı Lebesgue uzayları
Danışman : Prof. Dr. Öznur KULAK

BILINEAR MULTIPLIERS OF SPACES WITH FRACTIONAL WAVELET
TRANSFORM
(M. Sc. Thesis)

Hüseyin ÇAKIR

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
May 2023

ABSTRACT

In the literature, O.Blasco and F.Villaroya defined bilinear multipliers of Lebesgue spaces. They also examined some properties of the bilinear multipliers. In this study, by using the methods used in the bilinear multiplier theory by O.Blasco and F.Villaroya, the bilinear multiplier definition for the function space obtained by the fractional wavelet transform is made and the bilinear fractional multiplier space for this space is investigated. Then, some properties of these spaces are examined.

Number of pages : 33
Keywords : Bilinear multipliers, Fractional wavelet transform, Weighted Lebesgue spaces
Supervisor : Prof. Dr. Öznur KULAK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin ve öğrettiği her bilginin hayatıma kattığı önemi asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Prof. Dr. Öznur KULAK'a, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen sevgili eşim Tuğba ÇAKIR'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli annem ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	2
3. BULGULAR	9
3.1.BM[FW($p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i$)] Bilineer Çarpanlar Uzayı.....	9
4.SONUÇ VE ÖNERİLER	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$L^p(\mathbb{R})$	Lebesgue uzayı
$L^p_\omega(\mathbb{R})$	ağırlıklı Lebesgue uzayı
$\text{supp } f$	f fonksiyonunun desteği
$\hat{f}$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$T_x f$	f fonksiyonunun ötelemesi
$M_x f$	f fonksiyonunun karakter operatörü
$W_g f$	f fonksiyonunun dalgacık (wavelet) dönüşümü
ψ	dalga fonksiyonu
$W^\theta_\psi f$	f fonksiyonunun kesirli dalgacık dönüşümü
$S(\mathbb{R})$	Schwartz uzayı
$C_c(\mathbb{R})$	tıkız destekli sürekli fonksiyonların vektör uzayı

1. GİRİŞ

Bilineer çarpan uzayları konusunda çalışmalar incelendiğinde Coifman ve Meyer (1978) tarafından ilk çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra Thiele (1997) ve Lacey (1998) yaptıkları çalışmalar ile bilineer çarpan teorisi alanında önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Blasco (2005) ve Villarroya (2008) $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$, $0 < p_3 \leq \infty$ olmak üzere Lebesgue uzaylarını kullanarak (p_1, p_2, p_3) tipindeki bilineer çarpanlar uzayını ve özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Lorentz uzaylarını kullanarak oluşturdukları bilineer çarpanlar uzayının özelliklerini incelemişlerdir. Kulak (2014) yaptığı çalışmada Wiener Amalgam uzayları, Ağırlıklı Lorentz uzayları ve Değişken üslü Lorentz uzayları için bilineer çarpanlar uzayını tanımlamış ve bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Bilineer çarpan teorisinin uygulama alanlarına bakıldığında harmonik analiz, zaman-frekans analizi, elektrik mühendisliği ve fizik gibi alanlarda çalışmalar yapıldığı görülmektedir.

Duman ve Kulak (2019) yaptığı çalışmada $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere bir $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayını $1 \leq p, q < \infty$ ve $\psi \in S(\mathbb{R})$ için;

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) | W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlamışlardır. $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı normlu uzaydır. Ayrıca bu uzayın Banach uzayı olduğunu, karakter ve öteleme operatörü altında değişmez olduğunu göstermişlerdir.

Bu çalışmada kesirli dalgacık dönüşümü ile elde edilen $(FW_{\omega, v}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayları için bilineer çarpan tanımı verilecektir. Daha sonra $BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ bilineer çarpan uzayının bir takım özellikleri incelenecektir. Elde edilen sonuçlar bilineer çarpanlar konusunda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının vektör uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre $L^p(\mathbb{R})$ uzayı Banach uzayıdır (Rudin, 1966).

2.2. Tanım $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere, $M = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve $\text{supp } f$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli, sürekli, tıkHz destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, tıkHz destekli, sürekli ve her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların vektör uzayını $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Rudin, 1966).

2.3. Tanım f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde Borel ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi $f * g$ simgesi ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

biçiminde tanımlanır (Rudin, 1966).

2.4. Tanım $\omega, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) \geq 1$,

ii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\omega(x + y) \leq \omega(x)\omega(y)$,

iii) ω yerel sınırlı

şartlarını sağlıyorsa ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Reiter, 1968).

2.5. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$L_{\omega}^p(\mathbb{R}) = \{f \mid f\omega \in L^p(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlansın. $L_{\omega}^p(\mathbb{R})$ uzayına ağırlıklı Lebesgue uzayı denir (Reiter, 1968).

2.6. Tanım Sınırlı, düzgün ve karmaşık değerli Borel ölçümlerinin uzayı $M(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. $\omega, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu ve $|\mu|, \mu$ ölçümünün total varyasyonu olmak üzere bir $M(\omega)$ uzayı

$$M(\omega) = \left\{ \mu \in M(\mathbb{R}^n) : \|\mu\|_{\omega} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega d|\mu| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır (Rudin, 1962).

2.7. Tanım Herhangi bir $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ ölçümünün Fourier-Stieltjes dönüşümü

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} d\mu(t)$$

biçiminde tanımlanır (Rudin, 1962).

2.8. Teorem $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p(\mathbb{R})$ ve $g \in L^q(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1(\mathbb{R})$ olup

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği vardır ve bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Rudin, 1966).

2.9. Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir (Bracewell, 1965:381).

2.10. Tanım Her $x \in \mathbb{R}$ için $s \geq 0$ olmak üzere;

$$v_s(x) = (1 + |x|)^s$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna polinom tipli ağırlık fonksiyon denir (Reiter, 1968).

2.11. Tanım $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 < p, t < \infty$ olmak üzere

$$T_x f(y) = f(y - x),$$

$$M_x f(y) = e^{2\pi i x y} f(y),$$

$$D_t^p f(y) = t^{\frac{-n}{p}} f\left(\frac{y}{t}\right),$$

şeklinde tanımlanan operatörlere sırasıyla öteleme karakter (modülasyon) ve açılma operatörü denir (Gröchenig, 2001:359).

2.12. Tanım $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f},$$

$$(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f},$$

ifadeleri sırasıyla T_x ve M_ω operatörlerinin Fourier dönüşümleridir (Gröchenig, 2001:359).

2.13. Tanım Herhangi $(t, \omega) \in \mathbb{R}^2$ için $C^\theta = \sqrt{\frac{1-icot\theta}{2\pi}}$ olmak üzere;

$$K^\theta(t, \omega) = \begin{cases} C^\theta e^{i(t^2+\omega^2)\frac{cot\theta}{2}-it\omega csc\theta}, & \theta \neq n\pi \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it\omega}, & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \delta(t - \omega), & \theta = 2\pi \\ \delta(t + \omega), & \theta = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona çekirdek fonksiyonu denir ve

- i) $K^\theta(t, \omega) = K^\theta(\omega, t)$ (Simetri),
- ii) $K^{-\theta}(t, \omega) = \overline{K^\theta(t, \omega)}$ (Kompleks Eşlenik),
- iii) $K^\theta(-t, \omega) = K^\theta(t, -\omega)$,
- iv) $\int_{\mathbb{R}} K^a(t, \omega) K^b(\omega, x) d\omega = K^{a+b}(t, x)$ (Toplanabilirlik),
- v) $\int_{\mathbb{R}} K^a(t, \omega) \overline{K^a(t, u)} dt = \delta(u - \omega)$

özelliklerini sağlar (Bultheel ve Martinez, 2002).

2.14. Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü

$$F^\theta f(t) = \hat{f}^\theta(t) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(t, \omega) f(\omega) d\omega$$

şeklinde tanımlanır (Bultheel ve Martinez, 2002).

2.15. Teorem $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, F^α ve F^θ sırasıyla $f(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarının kesirli Fourier dönüşümleri olmak üzere;

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} F^\alpha f(\omega) F^\theta \psi(\omega) d\omega,$$

$$\int_{\mathbb{R}} F^\alpha f(t) \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} F^\theta \psi(\omega) f(\omega) d\omega$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |F^\alpha f(\omega)|^2 d\omega$$

eşitlikleri vardır (Pathak, Prasad ve Kumar, 2012:239-254).

2.16. Tanım $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonuna bağlı dalgacık (wavelet) dönüşümü;

$$W_g f(x, s) = |s|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(s^{-1}(t - x)) dt \quad (x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} - \{0\})$$

biçiminde tanımlanır (Gröchenig, 2001:203).

2.17. Teorem $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$i) W_g f(x, s) = \langle \hat{f}, M_{-x} D_{1/s} \hat{g} \rangle$$

$$ii) W_g f(x, s) = \langle f, T_x D_s g \rangle$$

$$iii) W_g f(x, s) = (f * D_s g^*)(x)$$

eşitlikleri vardır (Gröchenig, 2001:203).

2.18. Tanım $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonunun kesirli dalga fonksiyonu

$$\psi_{b,a,\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-\frac{i}{2}(t^2-b^2)} \cot\theta, \quad (a > 0, \quad b \in \mathbb{R})$$

biçimindedir (Parasad, 2015:201-210).

2.19. Teorem $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olsun.

$$\hat{\psi}_{b,a,\theta}^\theta(\omega) = \sqrt{a} e^{\frac{i}{2}(b^2+\omega^2)\cot\theta - ib\omega \csc\theta} \frac{i}{2} a^2 \omega^2 \cot\theta \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot\theta} \psi_1 \right)(a\omega)$$

ifadesi $\psi_{b,a,\theta}$ fonksiyonunun kesirli fourier dönüşümüdür (Parasad, 2015:201-210).

2.20. Tanım (Kesirli dalgacık dönüşümü) $a \in \mathbb{R}^+$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli dalgacık (fractional wavelet dönüşümü);

$$\begin{aligned}
W_{\psi}^{\theta} f(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2)\cot\theta} dt
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Parasad, 2015:201-210).

2.21. Tanım $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ Uzayı) $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bir $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ kümesini $1 \leq p, q < \infty$ ve $\psi \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) | W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlansın (Duman, 2019).

2.22. Teorem $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ kümesi K cismi üzerinde ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) bir vektör uzayıdır (Duman, 2019).

2.23. Teorem $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ vektör uzayında tanımlı

$$\|f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2}$$

fonksiyonu bir normdur (Duman, 2019).

2.24. Teorem $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\left((FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a}\right)$ normlu uzayı Banach uzayıdır (Duman, 2019).

2.25. Teorem $\psi \in S(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere her $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve $u \in \mathbb{R}$ için

$$W_{\psi}^{\theta} T_u f = T_u W_{\psi}^{\theta} f$$

eşitliği vardır (Duman, 2019).

2.26. Teorem $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmezdir (Duman, 2019).

2.27. Tanım $0 \leq p_1, p_2, p_3 < \infty$ ve $m(\xi, \eta)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de sınırlı, ölçülebilir fonksiyon olsun. Her $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ için B_m operatörünü

$$B_m(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) m(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlansın (Blasco, 2009; Villarroya, 2008). Eğer her $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|B_m(f, g)\|_{p_3} \leq C \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı var ise bu m fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde (p_1, p_2, p_3) tipinde bilineer çarpan (veya kısaca bilinear çarpan) denir. Diğer bir ifade ile B_m operatörü $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{p_3}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olarak genişletilebiliyorsa m fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde (p_1, p_2, p_3) tipinde bilineer çarpan denir. Bu m bilineer çarpanların vektör uzayı da $BM_{(p_1, p_2, p_3)}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir (Blasco, 2009; Villarroya, 2008).

3. BULGULAR

3.1. BM[FW($p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i$)] Bilineer Çarpanlar Uzayı

Bu bölümde kesirli dalgacık dönüşümü ile elde edilen $(FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayları için bilineer çarpan tanımı verilecektir. Daha sonra BM[FW($p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i$)] bilineer çarpan uzayının bir takım özellikleri incelenecektir.

3.1.1. Yardımcı Teorem ω, v polinom tipli ağırlık fonksiyonlar olsun. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ uzayı $(FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat Eğer $\overline{C_c(\mathbb{R})} = (FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ eşitliği ve $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset C_c(\mathbb{R})$

kapsaması kullanılırsa $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ yazılır.

Şimdi $C_c^\infty(\mathbb{R})$ uzayının $(FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğun olduğunu gösterelim.

Herhangi $f \in (FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ alalım. O halde $f \in L_\omega^p(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f \in L_v^q(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} = L_\omega^p(\mathbb{R})$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|f - g_n\|_{p,\omega} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

olacak biçimde $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ dizisi vardır. Yine $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} = L_v^q(\mathbb{R})$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|W_\psi^\theta f - h_n\|_{q,v} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

olacak biçimde $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ dizisi vardır. Öte yandan $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{q,v}$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|W_\psi^\theta f - h_n\|_q \rightarrow 0$$

yazılır. Böylece $W_\psi^\theta f$ fonksiyonuna hemen her yerde yakınsak $(h_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}} \subset (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alt dizisi bulunur. O halde (3.2) den $n \rightarrow \infty$ için

$$\|W_\psi^\theta f - h_{n_k}\|_{q,v} \rightarrow 0$$

yazılır.

Ayrıca (Duman ve Kulak, 2021) çalışmasındaki Teorem 2.4 den $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere her $b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |h_{n_k}(b) - W_\psi^\theta g_n(b, a)| &\leq |h_{n_k}(b) - W_\psi^\theta f(b, a)| + |W_\psi^\theta f(b, a) - W_\psi^\theta g_n(b, a)| \\ &\leq |W_\psi^\theta f(b, a) - h_{n_k}(b)| + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} |(f - g_n)(t)| |T_a \psi_a(t)| dt \\ &\leq |W_\psi^\theta f(b, a) - h_{n_k}(b)| + \frac{1}{\sqrt{a}} \|g_n - f\|_p \|T_a \psi_a(t)\|_{p'} \\ &\leq |W_\psi^\theta f(b, a) - h_{n_k}(b)| + \|g_n - f\|_p a^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}} \|\psi\|_{p'} \end{aligned}$$

olup hemen hemen her yerde $h_{n_k}(b) = W_\psi^\theta g_n(b, a)$ bulunur. Buradan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|W_\psi^\theta f - W_\psi^\theta g_n\|_{q,v} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

bulunur. Böylece (3.1) ve (3.3) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|f - g_n\|_{(FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a} &= \|f - g_n\|_{p,\omega} + \|W_\psi^\theta(f - g_n)\|_{q,v} \\ &= \|f - g_n\|_{p,\omega} + \|W_\psi^\theta f - W_\psi^\theta g_n\|_{q,v} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} = (FW_{\omega,v}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ elde ederiz.

3.1.2. Tanım $1 \leq p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 < \infty$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\omega_1, v_1, \omega_2, v_2, \omega_3, v_3$ de $\mathbb{R}$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. Yine $\omega_1, v_1, \omega_2, v_2$ polinom tipi ağırlık fonksiyonları

ve $m(\xi, \eta)$ de $\mathbb{R}^2$ üzerinde sınırlı, ölçülebilir fonksiyon olsun. Her $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ için B_m operatörünü

$$B_m(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) m(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta$$

biçiminde tanımlayalım. Eğer her $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ için

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı var ise bu m fonksiyonuna $\mathbb{R}$ üzerinde $FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, \omega_3, v_3, a_3, \theta_3)$ (veya kısaca $FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)$) tipinde bilineer çarpan denir.

B_m operatörü $(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R}) \times (FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ uzayından $(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}(\mathbb{R})$

uzayına sürekli olarak genişletilebilir. m bilineer çarpanlar kümesini

$BM[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, \omega_3, v_3, a_3, \theta_3)]$ veya kısaca

$BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ şeklinde göstereceğiz.

3.1.3. Teorem $((FW_{\omega, v}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı için Hölder Tipi Eşitsizliği)

Eğer $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ olmak üzere $f \in (FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})$ ve $g \in (FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ ise

$$\|fg\|_{(FW_{\omega, \omega}^{\theta_3, p, p})_{a_3}} \leq C \|f\|_{(FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Diğer bir deyişle

$$(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega, \omega}^{\theta_3, p, p})_{a_3}(\mathbb{R})$$

olur.

İspat Herhangi $f \in (FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})$ ve $g \in (FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ alalım. Öte yandan

$$W_{\psi}^{\theta_3}(fg)(b, a) = e^{\frac{-i}{2}b^2 \cot \theta_3} \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_3}(fg) * \overline{\Psi_a^*} \right)(b) .$$

eşitliği biliniyor (Duman, 2019). Son eşitlikten ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|fg\|_{(FW_{\omega, \omega}^{\theta_3 p, p})_{a_3}} &= \|fg\|_{p, \omega} + \|W_{\psi}^{\theta_3}(fg)\|_{p, \omega} \\ &\leq \|f\|_{p_1, \omega} \|g\|_{p_2, \omega} + \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_3}(fg) * \overline{\Psi_a^*} \right\|_{p, \omega} \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılır. Öte yandan $L_{\omega}^p(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega}^1(\mathbb{R})$, uzayı üzerinden Banach modülü olması ve (3.4) eşitsizliği kullanılır ise

$$\begin{aligned} \|fg\|_{(FW_{\omega, \omega}^{\theta_3 p, p})_{a_3}} &\leq \|f\|_{p_1, \omega} \|g\|_{p_2, \omega} + \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_3}(f, g) \right\|_{p, \omega} \|\Psi_a^*\|_{1, \omega} \\ &= \|f\|_{p_1, \omega} \|g\|_{p_2, \omega} + \|fg\|_{p, \omega} \|\overline{\Psi_a^*}\|_{1, \omega} \\ &= (1 + \|\Psi_a^*\|_{1, \omega}) \|f\|_{p_1, \omega} \|g\|_{p_2, \omega} \\ &\leq (1 + \|\Psi_a^*\|_{1, \omega}) \left(\|f\|_{p_1, \omega} + \|W_{\psi_1}^{\theta_1} f\|_{q_1, v_1} \right) \left(\|g\|_{p_2, \omega} + \|W_{\psi_2}^{\theta_2} g\|_{q_2, v_2} \right) \\ &= C \|f\|_{(FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.4. Örnek $m(\xi, \eta) = a$ ve $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ olsun. $m(\xi, \eta) = a$ sabit fonksiyonu için

$m \in BM[FW(p_1, q_1, \omega, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega, v_2, a_2, \theta_2; p, p, \omega, \omega, a_3, \theta_3)]$ olur.

Gerçekten her $f, g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ için

$$B_m(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) a e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= a \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\eta) e^{2\pi i x \eta} d\eta \right) \\
&= af(x)g(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Hölder tipi eşitsizlik kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega, \omega}^{\theta, p, p})_{a_3}} &= |a| \|fg\|_{(FW_{\omega, \omega}^{\theta, p, p})_{a_3}} \\
&\leq |a| C \|f\|_{(FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $m \in BM[FW(p_1, q_1, \omega, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega, v_2, a_2, \theta_2; p, p, \omega, \omega, a_3, \theta_3)]$ bulunur.

3.1.5. Teorem $BM[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, \omega_3, v_3, a_3, \theta_3)]$ kümesi, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat Herhangi $m, k \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ verilsin. Eğer $f \in (FW_{\omega, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})$ ve $g \in (FW_{\omega, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ ise,

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C_1 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.5)$$

ve

$$\|B_k(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C_2 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.6)$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sayıları vardır. Ayrıca

$$B_{m+k}(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) (m+k)(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) m(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) k(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta$$

$$= B_m(f, g)(x) + B_k(f, g)(x) = (B_m(f, g) + B_k(f, g))(x)$$

olup $B_{m+k}(f, g)(x) = B_m(f, g) + B_k(f, g)$ yazılır. Öte yandan

$(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}(\mathbb{R})$ normlu uzay olduğundan,

$$\|B_{m+k}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} = \|B_m(f, g) + B_k(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}$$

$$\leq \|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} + \|B_k(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}$$

olup $C_3 = C_1 + C_2$ denirse ve (3.5), (3.6) ifadeleri kullanılır ise

$$\|B_{m+k}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq \|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} + \|B_k(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}$$

$$\leq C_1 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} + C_2 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

$$= (C_1 + C_2) \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

$$= C_3 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

bulunur. Buradan $m + k \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olur.

Şimdi $\lambda \in K$ ve $m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ alalım.

O halde $f \in (FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})$ ve $g \in (FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.7)$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
 B_{\lambda m}(f, g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) (\lambda m)(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) m(\xi, \eta) e^{2\pi i \langle \xi + \eta, x \rangle} d\xi d\eta \\
 &= \lambda B_m(f, g)(x)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\|B_{\lambda m}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} = \|\lambda B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} = |\lambda| \|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}$$

olup $C_4 = \lambda C$ denir ve (3.7) ifadesi kullanılır ise

$$\begin{aligned}
 \|B_{\lambda m}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &= |\lambda| \|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \\
 &\leq |\lambda| \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \\
 &= C_4 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\lambda m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olur. Vektör uzayının diğer özellikleri kolayca gösterilebilir.

Şimdi de $BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ uzayı üzerine $m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ için

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\|$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}}{\|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}}; \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq 1, \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq 1 \right\}$$

normunu koyalım.

Aşağıda vereceğimiz teorem bir bilineer çarpan örneği ifade eder.

3.1.6. Teorem ω_3 polinom tipi ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve

$\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_3, v_1\}$, $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_3, v_2\}$ olsun. Eğer $K \in L^1_\omega(\mathbb{R})$ ve $m(\xi, \eta) = \widehat{K}(\xi - \eta)$ ise

$$m \in BM[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3)]$$

ve

$$\|m\|_{FW} \leq C \|K\|_{1, \omega}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır

İspat Herhangi $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ için (Kulak, 2014) çalışmasındaki Teorem 3.1.5'den

$$B_m(f, g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - y)g(t + y)K(y)dy \quad (3.8)$$

eşitliği yazılır. Ayrıca $T_y f \in (FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}(\mathbb{R})$, $T_{-y} g \in (FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}(\mathbb{R})$ olup

(Duman, 2019) çalışmasındaki Teorem 4.1.7 den

$$\|T_y f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq \widetilde{\omega}_1(y) \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \quad (3.9)$$

$$\|T_{-y} g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq \widetilde{\omega}_2(-y) \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.10)$$

eşitsizlikleri vardır.

Eğer (3.8), (3.9), (3.10) ve Teorem 3.1.3 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} f(t-y)g(t+y)K(y)dy \right\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f(t-y)g(t+y)K(y)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |K(y)| \|f(t-y)g(t+y)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |K(y)| \|T_y f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|T_{-y} g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |K(y)| \widetilde{\omega}_1(y) \widetilde{\omega}_2(-y) \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} dy \\
&= C \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \int_{\mathbb{R}} |K(y)| \widetilde{\omega}_1(y) \widetilde{\omega}_2(-y) dy \\
&= C \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \|K\|_{1, \omega} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $C=C\|K\|_{1, \omega}$ denirse

$$\|B_m(f, g)\|_{FW_{(\omega_3, v_3)}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$m \in BM[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, \omega_3, v_3, a_3, \theta_3)]$$

bulunur. Ayrıca (3.11) ifadesinden

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\|$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}}{\|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}} ; \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq 1, \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq 1 \right\}$$

$$\leq C \|K\|_{1, \omega}$$

elde edilir.

3.1.7. Tanım $1 \leq p_i, q_i < \infty, a_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, 3)$ olsun. $\omega_i, v_i (i = 1, 2, 3)$ $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları ve $\omega_i, v_i (i = 1, 2)$ de polinom tipinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere;

$\tilde{M}[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3)]$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, ölçülebilir

$$m(\xi, \eta) = M(\xi - \eta) \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$$

şartını sağlayan M fonksiyonların kümesi olsun.

$\tilde{M}[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3)]$ kümesi K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayıdır. Ayrıca bu uzay üzerine her

$M \in \tilde{M}[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3)]$ olmak üzere $\|M\|_{FW} = \|B_M\|$ operator normunu koyalım.

3.1.8. Teorem ω_3 polinom tipi ağırlık fonksiyonu olsun. $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_3, v_1\}$, $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_3, v_2\}$ ve $v(y) = (1 + |y|)^{2s}$, $s \geq 0$ olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\mu \in M(v)$ ve $m(\xi, \eta) = \hat{\mu}(\alpha\xi + \beta\eta)$ ise

$m \in [FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3)]$ olur. Ayrıca

$$\|m\|_{FW} \leq C \|\mu\|_v$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır.

İspat Herhangi $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ için (Kulak ve Gürkanlı, 2013) çalışmasındaki Teorem 2.3 kullanılır ise,

$$B_m(f, g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \alpha y) g(t - \beta y) d\mu(y) \quad (3.12)$$

olup bundan başka

$$\|T_{\alpha y} f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \quad (3.13)$$

ve

$$\|T_{\beta y} g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq \widetilde{\omega}_2(\beta y) \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.14)$$

eşitsizlikleri biliniyor (Kulak ve Gürkanlı, 2013).

Eğer (3.12), (3.13), (3.14) eşitsizlikleri ve Teorem 3.1.3 kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f(t - y\alpha) g(t - \beta y)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} d|\mu|(y) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \|f(t - \alpha y)\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g(t - \beta y)\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} d|\mu|(y) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} d|\mu|(y) \\ &= C \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) d|\mu|(y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir.

$|\alpha| \leq 1$ ve $|\beta| \leq 1$ olsun. Öte yandan ω_3, v_1, v_2 polinom tipli ağırlık fonksiyonları olduğundan $s_i (i = 1, 2, 3) \in \mathbb{R}^+$ için

$$\omega_3(y) = (1 + |y|)^{s_3},$$

$$v_1(y) = (1 + |y|)^{s_1},$$

ve

$$v_2(y) = (1 + |y|)^{s_2}$$

eşitlikleri vardır.

Eğer $\max\{s_1, s_2, s_3\} = s$ alınırsa,

$$\widetilde{\omega}_1(y) \leq (1 + |y|)^s \quad (3.16)$$

ve

$$\widetilde{\omega}_2(y) \leq (1 + |y|)^s \quad (3.17)$$

elde edilir. Bundan başka (3.16) ve (3.17) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) d|\mu|(y) &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\alpha y|)^s (1 + |\beta y|)^s d|\mu|(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)^s (1 + |y|)^s d|\mu|(y) \end{aligned}$$

sağlanır.

Ayrıca $v(y) = (1 + |y|)^{2s}$ denirse bu son ifadeden

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) d|\mu|(y) = \int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)^{2s} d|\mu|(y) = \|\mu\|_v \quad (3.18)$$

elde edilir.

Bundan başka (3.15) ve (3.18) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, \omega_3}^{\theta_3, p_3, p_3})_{a_3}} \leq C \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \|\mu\|_v \quad (3.19)$$

bulunur. Buradan

$$m \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3) \right]$$

elde edilir.

Son olarak (3.19) eşitsizliğinden

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\| \leq C\|\mu\|_v$$

elde edilir.

Şimdi $|\alpha| > 1$ ve $|\beta| > 1$ alalım.

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) d|\mu|(y) < \int_{\mathbb{R}} (|\alpha| + |\alpha||y|)^s (|\beta| + |\beta||y|)^s d|\mu|(y)$$

Bu son integralde $v(y) = (1 + |y|)^{2s}$ yerine yazılırsa,

$$\int_{\mathbb{R}} v(y) d|\mu|(y) = |\alpha\beta|^s \|\mu\|_v \quad (3.20)$$

elde edilir.

Ayrıca (3.15) ve (3.20) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\|B_m(f, g)\|_{\left(FW_{\omega_3, \omega_3}^{\theta_3, p_3, p_3}\right)_{a_3}} < C|\alpha\beta|^s \|f\|_{\left(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1}\right)_{a_1}} \|g\|_{\left(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2}\right)_{a_2}} \|\mu\|_v \quad (3.21)$$

elde edilir. Böylece

$m \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3) \right]$ olup ve (3.21) eşitsizliği kullanılır ise,

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\| < C|\alpha\beta|^s \|\mu\|_v$$

bulunur.

Kabul edelim ki $|\alpha| > 1$, $|\beta| \leq 1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}_1(\alpha y) \widetilde{\omega}_2(\beta y) d|\mu|(y) &< \int_{\mathbb{R}} (|\alpha| + |\alpha||y|)^s (|1| + |y|)^s d|\mu|(y) \\
&= |\alpha|^s \int_{\mathbb{R}} v(y) d|\mu|(y) = |\alpha|^s \|\mu\|_v
\end{aligned} \tag{3.22}$$

bulunur. Buradan (3.15) ve (3.22) eşitlikleri kullanılır ise

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, \omega_3}^{\theta_3, p_3, p_3})_{a_3}} < C |\alpha|^s \|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \|\mu\|_v \tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece

$$m \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3) \right]$$

bulunur. Ayrıca (3.23) eşitsizliğinden

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\| < C |\alpha|^s \|\mu\|_v$$

elde edilir.

Son olarak $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| > 1$ kabul edelim. Benzer şekilde

$$m \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega_3, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_3, v_2, a_2, \theta_2; p_3, p_3, \omega_3, \omega_3, a_3, \theta_3) \right]$$

ve

$$\|m\|_{FW} = \|B_m\| < C |\beta|^s \|\mu\|_v$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.1.9. Teorem $m \in BM \left[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i) \right]$ olsun. $\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_1, v_1\}$ ve $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_2, v_2\}$ olmak üzere her $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$ için $M_{(\xi_0, \eta_0)} m \in BM \left[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i) \right]$ olup

$$\|M_{(\xi_0, \eta_0)} m\|_{FW} \leq \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|m\|_{FW}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verilsin. (Kulak, 2014) çalışmasındaki Teorem 3.1.9 kullanılırsa

$$B_{M_{(\xi_0, \eta_0)}} m(f, g)(x) = B_m(T_{-\xi_0} f, T_{-\eta_0} g)(x) \quad (3.24)$$

eşitsizliği yazılır. Diğer taraftan $\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_1, v_1\}$ ve $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_2, v_2\}$ olmak üzere (Kulak, 2014) çalışmadan

$$\|T_{-\xi_0} f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \quad (3.25)$$

ve

$$\|T_{-\eta_0} g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.26)$$

eşitsizlikleri biliniyor. Eğer $m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olması ve (3.24), (3.25), (3.26) eşitsizlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|B_{M_{(\xi_0, \eta_0)}} m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &= \|B_m(T_{-\xi_0} f, T_{-\eta_0} g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \\ &\leq \|B_m\| \|T_{-\xi_0} f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|T_{-\eta_0} g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \\ &\leq \|B_m\| \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \\ &= \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|B_m\| \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir.

Böylece $M_{(\xi_0, \eta_0)} m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ bulunur.

Son olarak (3.27) eşitsizliği kullanılır ise ;

$$\begin{aligned}
& \|M_{(\xi_0, \eta_0)} m\|_{FW} \\
& = \sup_{\|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq 1, \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq 1} \frac{\|B_{M_{(\xi_0, \eta_0)} m}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}}}{\|f\|_{(FW_{\omega_3, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_3, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}} \\
& \leq \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|B_m\| \\
& = \widetilde{\omega}_1(-\xi_0) \widetilde{\omega}_2(-\eta_0) \|m\|_{FW}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.10. Teorem $m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olsun. O halde her $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$ için $T_{(\xi_0, \eta_0)} m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olur ve

$$\|T_{(\xi_0, \eta_0)} m\|_{FW} = \|m\|_{FW}$$

eşitliği vardır.

İspat Herhangi iki $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}
\|M_{-\xi_0} f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} &= \|e^{2\pi i(-\xi_0)(\cdot)} f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \\
&= \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\|M_{-\xi_0} g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} &= \|e^{2\pi i(-\eta_0)(\cdot)} g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \\
&= \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. Ayrıca (Kulak ve Gürkanlı, 2013) çalışmasından

$$B_{T_{(\xi_0, \eta_0)}} m(f, g) = B_m(M_{-\xi_0} f, M_{-\eta_0} g) \quad (3.30)$$

yazılır. Burada (3.28), (3.29), (3.30) eşitsizlikleri ve $m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ kabulü kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|B_{T_{(\xi_0, \eta_0)}} m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &= \|B_m(M_{-\xi_0} f, M_{-\eta_0} g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \\ &\leq \|B_m\| \|M_{-\xi_0} f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|M_{-\eta_0} g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \\ &= \|B_m\| \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $T_{(\xi_0, \eta_0)} m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olur. Buradan da

$$\|T_{(\xi_0, \eta_0)} m\|_{FW} = \|m\|_{FW}$$

elde edilir.

Çalışmamızda bundan sonra vereceğimiz teoremler bilineer çarpan örneklerini zenginleştirmemize olanak sağlayacaktır.

3.1.11. Teorem $m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olmak üzere $\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_1, v_1\}$, $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_2, v_2\}$ ve $\omega(u, v) = \widetilde{\omega}_1(u) \widetilde{\omega}_2(v)$ olsun. Eğer $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^2)$ ise

$$\widehat{\Phi} m \in BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$$

olur ve

$$\|\widehat{\Phi} m\|_{FW} \leq \|\Phi\|_{1, \omega} \|m\|_{FW}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Kabul edelim ki $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^2)$ olsun. Herhangi iki $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verilsin. (Blasco, 2009) çalışması Önerme 2.5 den

$$B_{\hat{\Phi}m}(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, v) B_{M(-u, -v)m}(f, g)(x) du dv$$

yazılır.

Eğer $m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ kabulü ve Teorem 3.1.9 kullanılır ise

$$M_{(-u, -v)}m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$$

ve

$$\|M_{(-u, -v)}m\|_{FW} \leq \widetilde{\omega}_1(u) \widetilde{\omega}_2(v) \|m\|_{FW} \quad (3.31)$$

bulunur. Yine (3.31) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|B_{\hat{\Phi}m}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\Phi(u, v) B_{M(-u, -v)m}(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} du dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(u, v)| \|M(-u, -v)m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} du dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(u, v)| \widetilde{\omega}_1(u) \widetilde{\omega}_2(v) \|m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} du dv \\ &= \|m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(u, v)| \widetilde{\omega}_1(u) \widetilde{\omega}_2(v) du dv \\ &= \|m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \|\Phi\|_{1, \omega} \quad (3.32) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\hat{\Phi}m \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ olup (3.32) eşitsizliğinden

$$\|\hat{\Phi}m\|_{FW} \leq \|\Phi\|_{1, \omega} \|m\|_{FW}$$

elde edilir.

3.1.12. *Sonuç* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ olmak üzere $\widetilde{\omega}_1 = \max\{\omega_1, v_1\}$ $\widetilde{\omega}_2 = \max\{\omega_2, v_2\}$ ve $\omega(u, v) = \widetilde{\omega}_1(u)\widetilde{\omega}_2(v)$ olsun. Eğer $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^2)$ ise

$$\widehat{\Phi} \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega, v_2, a_2, \theta_2; p, p, \omega, \omega, a_3, \theta_3) \right]$$

elde edilir.

İspat Eğer $m(\xi, \eta) = 1$ alınırsa Örnek 3.1.4 den

$m \in BM \left[FW(p_1, q_1, \omega, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega, v_2, a_2, \theta_2; p, p, \omega, \omega, a_3, \theta_3) \right]$ olur.

Yine Teorem 3.1.11 de $\widehat{\Phi}m = \widehat{\Phi} \in BM \left[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i) \right]$ elde edilir.

3.1.13. *Teorem* $m \in BM \left[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i) \right]$ olsun. Eğer $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}$ sınırlı alt kümeler ise

$$h(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu(Q_1 \times Q_2)} \iint_{Q_1 \times Q_2} m(\xi + u, \eta + v) du dv$$

olmak üzere $h \in BM \left[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i) \right]$ olur.

İspat Herhangi iki $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verilsin. Eğer (Kulak ve Gürkanlı, 2013) çalışması Teorem 2.9 kullanılır ise,

$$B_h(f, g)(x) = \frac{1}{\mu(Q_1 \times Q_2)} \int \int_{Q_1 \times Q_2} B_{T(-u, -v)} m(f, g)(x) du dv$$

eşitliği yazılır. Burada Teorem 3.1.10 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \|B_h(f, g)\|_{\left(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3} \right)_{a_3}} &= \left\| \frac{1}{\mu(Q_1 \times Q_2)} \int \int_{Q_1 \times Q_2} B_{T(-u, -v)} m(f, g)(x) du dv \right\|_{\left(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3} \right)_{a_3}} \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q_1 \times Q_2)} \int \int_{Q_1 \times Q_2} \|B_{T(-u, -v)} m(f, g)\|_{\left(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3} \right)_{a_3}} du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mu(Q_1 \times Q_2)} \int_{Q_1 \times Q_2} \|T_{(-u,-v)} m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} dudv \\
&= \|m\|_{FW} \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $h \in BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ elde edilir.

3.1.14. Teorem: Eğer $\omega_i < u_i, v_i < m_i$ ($i = 1, 2$) ve $u_3 < \omega_3, m_3 < v_3$ ise

$$BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)] \subset BM [FW(p_i, q_i, u_i, m_i, a_i, \theta_i)]$$

olur.

İspat Herhangi $m \in$

$BM[FW(p_1, q_1, \omega_1, v_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, \omega_2, v_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, \omega_3, v_3, a_3, \theta_3)]$ verilsin. O halde

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C_1 \|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.33)$$

olacak biçimde $C_1 > 0$ sayısı vardır.

Ayrıca $\omega_i < u_i, v_i < m_i$ ($i = 1, 2$) ve $u_3 < \omega_3, m_3 < v_3$ kabulleri kullanılır ise,

$$(FW_{u_i, m_i}^{\theta_i, p_i, q_i})_{a_i}(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_i, v_i}^{\theta_i, p_i, q_i})_{a_i}(\mathbb{R}), (i = 1, 2)$$

ve

$$(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}(\mathbb{R}) \subset (FW_{u_3, m_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}(\mathbb{R})$$

kapsamaları (Duman ve Kulak, 2021) çalışması Teorem 2.16 dan yazılır.

O halde

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{\omega_3, v_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C_2 \|B_m(f, g)\|_{(FW_{u_3, m_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \quad (3.34)$$

$$\|f\|_{(FW_{\omega_1, v_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \leq C_3 \|f\|_{(FW_{u_1, m_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \quad (3.35)$$

ve

$$\|g\|_{(FW_{\omega_2, v_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \leq C_4 \|g\|_{(FW_{u_2, m_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}} \quad (3.36)$$

olacak biçimde $C_i (i = 2, 3, 4)$ sayıları vardır. Son olarak (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri kullanılır ve $C_0 = C_1 C_2 C_3 C_4$ denirse

$$\|B_m(f, g)\|_{(FW_{u_3, m_3}^{\theta_3, p_3, q_3})_{a_3}} \leq C_0 \|f\|_{(FW_{u_1, m_1}^{\theta_1, p_1, q_1})_{a_1}} \|g\|_{(FW_{u_2, m_2}^{\theta_2, p_2, q_2})_{a_2}}$$

bulunur. Böylece

$$m \in BM [FW(p_1, q_1, u_1, m_1, a_1, \theta_1; p_2, q_2, u_2, m_2, a_2, \theta_2; p_3, q_3, u_3, m_3, a_3, \theta_3)]$$

olup

$$BM [FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)] \subset BM [FW(p_i, q_i, u_i, m_i, a_i, \theta_i)]$$

elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bilineer çarpan uzayları konusunda çalışmalar incelendiğinde Coifman ve Meyer (1978) tarafından ilk çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra Thiele (1997) ve Lacey (1998) yaptıkları çalışmalar ile bilineer çarpan teorisi alanında önemli çalışmalar elde etmişlerdir. Blasco (2005) ve Villarroya (2008) $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$, $0 < p_3 \leq \infty$ olmak üzere Lebesgue uzaylarını kullanarak (p_1, p_2, p_3) tipindeki bilineer çarpanlar uzayını ve özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Lorentz uzaylarında kullanarak oluşturdukları bilineer çarpanlar uzayının özelliklerini incelemişlerdir. Kulak (2014) yaptığı çalışmada Wiener amalgam uzayları, ağırlıklı Lorentz uzayları ve değişken üslü Lorentz uzayları için bilineer çarpanlar uzayını tanımlamış ve bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Bu çalışmada ise kesirli dalgacık dönüşümü ile elde edilen $(FW_{\omega, v}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayları için bilineer çarpan tanımı verilmiştir. Daha sonra $BM[FW(p_i, q_i, \omega_i, v_i, a_i, \theta_i)]$ bilineer çarpan uzayının bir takım özellikleri incelenmiştir. Bu çalışma zaman-frekans analizi alanında önemli yere sahip olan bilineer çarpan teorisi konusunda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacaktır.

KAYNAKÇA

- Blasco, O. (2005). Bilinear multipliers and transference, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, (4), 545-554.
- Blasco, O. (2009). Notes on the spaces of bilinear multipliers. *Revista de la Union Matematica Argentina*, 50(2), 23–37.
- Bultheel, A. and Martinez, H. (2002). A shattered survey of the Fractional Fourier Transform, Department of Computer Science, K.U.Leuven, Report TW337.
- Coifman, R. R. and Meyer, Y. (1978). Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, *Annales de l'institut Fourier Grenoble*, 28 (3), 177-202.
- Daubechies.I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF, SIAM, Philadelphia.
- Duman, M. (2019). *Kesirli Dalgacık Dönüşümü ve Bazı Özellikleri*. Yüksek Lisans Tezi, Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun.
- Duman, M. ve Kulak, Ö. (2021). On function spaces with fractional wavelet transform. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3 (3), 122–134.
- Gasquet, C. and Witomski, P. (1999). *Fourier analysis and applications*. Springer, New York.
- Gröchenig, K. (2001). *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhauser: Boston.
- Gürkanlı, A.T. ve Kulak, Ö. (2013). Bilinear multipliers of weighted Lebesgue spaces and variable exponent Lebesgue spaces. *Journal of Inequalities Applications*, Article ID: 259
- Gürkanlı, A.T. , Kulak, Ö. ve Sandıkçı, A. (2016). The spaces of bilinear multipliers of weighted Lorentz type modulation spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 23 (3), 351–362.
- Gürkanlı, A.T. ve Kulak, Ö. (2017). Bilinear Multipliers of weighted Lorentz spaces and variable exponent Lorentz spaces. *Mathematics and Statistics*, 5 (1), 5–18.
- Gürkanlı, A.T. ve Kulak, Ö. (2021). Bilinear multipliers of small Lebesgue spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 45 (5), 1959–1984.
- Kulak, Ö. ve Gürkanlı, A.T. (2014). Bilinear multipliers of weighted Wiener amalgam spaces and variable exponent Wiener amalgam spaces, *Journal of Inequalities Applications*, Article ID: 476.

- Kulak, Ö. (2014). *Bazı Fonksiyon Uzaylarının Bilineer Çarpanları ve Değişken Üslü Wiener Amalgam Uzayları*, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Kulak, Ö. (2017). Bilinear multipliers of function spaces with wavelet transform in $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 20 (1), 81–94.
- Lacey, M. T. (1998). On the bilinear Hilbert transform, *Documenta Mathematica Extra Volume ICM II*, 647-656
- Prasad, A., Manna, S., Mahato, A. and Singh, V.K. (2014). The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259, 660–671.
- Prasad, A. and Kumar, P. (2015). Fractional wavelet transform in terms of fractional convolution. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, (3) , 201–210.
- Reiter, H. (1968). *Classical harmonic analysis and locally compact group*, Oxford University at the Clarendon Press, 200.
- Rudin, W. (1962). *Fourier analysis on groups*. Interscience: New York.
- Rudin, W. (1966). *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill: New York, 65.
- Sandıkçı, A. ve Toksoy, E. (2021). Some compact and non-compact embedding theorems for the function spaces defined by fractional Fourier transform. *Hacettepe Journal Mathematics and Statistics*, 50 (6), 1620–1635.
- Sandıkçı, A. ve Toksoy, E. (2022). On an abstract Segal algebra under fractional convolution. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (1), 1–22.
- Toksoy, E. ve Sandıkçı, A. (2015). On function spaces with fractional Fourier transform in weighted Lebesgue spaces. *Journal of Inequalities Applications*, 2015;Article ID: 87.
- Villarroja, F. (2008). Bilinear multipliers on Lorentz spaces, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 58(133), 1045-1057.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Hüseyin ÇAKIR

Lisans: Gazi Üniversitesi, Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1-) Çakır, H. ve Kulak, Ö. (2023). Bilinear multipliers theory on some function spaces. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(3), 95–104.
- 2-) Çakır, H. (2022, 27-30 Ekim). *Bilinear multipliers of the spaces with fractional wavelet transform*. The 5th Mediterranean International Conference of Pure & Applied and Mathematics and Related Areas, Antalya.