

T.C.
KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UZAY EĞRİSİ BOYUNCA $\wedge$ -FRENET ÇATISI

AYKUT TOPLAMA

DANIŞMAN: PROF. DR. MUSTAFA DEDE

KİLİS
2023

ÖZET

UZAY EĞRİSİ BOYUNCA $\wedge$ -FRENET ÇATISI

Aykut TOPLAMA

Matematik Ana Bilim Dalı
Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Danışman : Prof. Dr. Mustafa DEDE

Sayfa: 91 Yıl: 2023

Bu çalışmada öncelikle kesirli türev ve integrallerden bahsedilmektedir. Daha sonra Frenet çatısı ve formüllerine yer verilmektedir. Frenet çatısı üzerinde $\wedge$ -kesirli türevin ne ifade ettiği incelenerek $\wedge$ -kesirli Darboux vektörü inşa edilmiştir. $\wedge$ -kesirli Darboux vektörü ile standart Frenet çatısı ve Bishop çatısı karşılaştırılmıştır. Bunların yanı sıra Konformal kesirli türevi yardımıyla α -Frenet çatısı ve formülleri elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: $\wedge$ -kesirli türevi, $\wedge$ -kesirli Frenet çatısı, $\wedge$ -kesirli Darboux vektörü, α -Frenet çatısı, α -Frenet formülleri.

ABSTRACT

THE $\wedge$ -FRENET FRAME ALONG THE SPACE CURVE

Aykut TOPLAMA

Department of Mathematics
Kilis 7 Aralık University Graduate Education Institute

Supervisor : PROF. DR. MUSTAFA DEDE

Page: 91 Year: 2023

In this study, firstly fractional derivative and integral are mentioned. Then, Frenet frame and formulas are given. The $\wedge$ -fractional Darboux vector is constructed by examining what the $\wedge$ -fractional derivative means on the Frenet frame. The $\wedge$ -fractional Darboux vector is compared with the standard Frenet frame and the Bishop frame. In addition, the α -Frenet frame and formulas are obtained with the help of the conformal fractional derivative.

Keywords: $\wedge$ -Fractional Derivative, $\wedge$ -Fractional Frenet Frame, $\wedge$ -Darboux Vector, α -Frenet frame, α -Frenet formulas.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, kıymetli zamanını ve fikirlerini paylaşma konusunda cömert davranan Sn. Prof. Dr. Mustafa DEDE'ye, çalışmanın tamamlanmasında ve düzeltmelerinde emeği geçen diğer tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, kullanmış olduğum tüm bilgiler ve yorumlar için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili bu beyanıma aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

İmza

Aykut TOPLAMA

Not: Bu tezde yer alan şekiller Matlab ve Maple programı yardımıyla çizilmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Amacı	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Kesirli Türev ve İntegrallerin Temel Kavramları	3
2.1.1 Gamma fonksiyonu	3
2.1.2 Beta fonksiyonu	11
2.2 Kesirli Türev ve İntegraller	16
2.2.1 Kesirli türev ve integral tanımları	17
2.2.2 Kesirli türev ve integralin özellikleri	23
2.2.3 Bazı temel fonksiyonların kesirli türev ve integralleri	28
2.3 Diferansiyel Geometrinin Temel Kavramları	35
2.3.1 Afın uzay	35
2.3.2 Öklid uzayı	37
2.3.3 Eğriler teorisi	41
2.3.4 Darboux vektörü ve RMF çatılar	51
3. BİR EĞRİ BOYUNCA $\wedge$-KESİRLİ DARBOUX VEKTÖRÜ	61
3.1 $\wedge$ -Kesirli Türevi ve $\wedge$ -Kesirli Frenet Formülleri	61
3.2 $\wedge$ -Kesirli Darboux Vektörü	71
4. BİR EĞRİ BOYUNCA α-FRENET ÇATISI VE FORMÜLLERİ	78
4.1 α -Frenet Çatısı	78
4.2 α -Frenet ve Frenet Arasındaki İlişki	83
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	87

KAYNAKLAR

88

ÖZGEÇMİŞ

91



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.1. : $\wedge$ -Frenet Çatısı

Şekil 3.1.2. : $\wedge$ -Kesirli Eğriliği

Şekil 3.1.3. : $\wedge$ -Kesirli Burulması

Şekil 3.2.1. : $\wedge$ -Kesirli Darboux Vektörünün Normu

Şekil 4.2.1. : α -Kesirli ve $\wedge$ -Kesirli Hız Vektörünün Normu



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

T	Teğet Vektör
N	Aslinormal Vektör
B	Binormal Vektör
κ	Eğrinin Eğriligi
τ	Eğrinin Burulması
κ_α	α .Mertebeden Eğrilik
τ_α	α .Mertebeden Burulma
T_α	α .Mertebeden Kesirli Konformal Türevi
${}_aD_x^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}_aI_x^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
E_1	α .Mertebeden Teğet Vektör
E_2	α .Mertebeden Aslinormal Vektör
E_3	α .Mertebeden Binormal Vektör
${}^\wedge_aD_v^\gamma$	$\wedge$ Kesirli Türevi
$T_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Teğet Vektör
$N_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Aslinormal Vektör
$B_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Binormal Vektör
$\kappa_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Eğrinin Eğriligi
$\tau_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Eğrinin Burulması
$\mathbb{W}_\wedge$	$\wedge$ Kesirli Eğrinin Darboux Vektörü

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Kesirli türev ve integraller hakkında genel bir bakış ifade edilerek literatür amacından bahsedilmiştir.

1.1 Literatür Amacı

Kesirli Analizin ortaya çıkış sürecindeki en önemli soru 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital'in Leibniz'e gönderdiği mektupta, d^m/dx^m tamsayı mertebesindeki bir türevin anlamı, $m = 1/2$ gibi bir kesir olduğunda anlam kazanacak şekilde genişletilebilir mi? diye sormasıdır. Yani soru kısaca herhangi bir n sayısı kesirli, irrasyonel veya karmaşık olabilir mi? Günümüzde Kesirli Analiz adı yanlış bir isimlendirme haline gelmekte ve keyfi mertebeden türev ve integral olarak adlandırılmasının daha uygun olacağı düşünülmektedir (Miller ve Ross, 1993). Leibniz (1695) bu soruya " $d^{1/2}\overline{xy}$ veya $d^{1:2}\overline{xy}$ " gibi bir notasyona sahip olan nicelik sonsuz bir seri ile ifade edilebilir. Sonsuz seriler ve geometri ile uzak ilişkiler olmasına rağmen, sonsuz seriler sadece pozitif ve negatif tam sayılar olan üslerin kullanımını kabul eder ve henüz kesirli üslerin kullanımını bilmez" şeklinde cevap vermiştir. Daha sonra, Leibniz aynı mektupta "Bu bir gün kullanışlı sonuçların çıkarılacağı açık bir paradokstur" diye ifade etmiştir (Leibniz, 1695). Bu yazışmalar kesirli türev integrallerin ortaya çıkış sebebi olmuştur (Miller ve Ross, 1993).

Kesirli Türev ve İntegraller 17. yüzyıldan beri ilgi çekici bir alan olmuştur ve Riemann, Bernoulli, Leibniz, Euler ve diğerleri gibi büyük matematikçiler tarafından çalışılmıştır (Baleanu ve Fernandez, 2019; Miller ve Ross, 1993; Samko vd., 1993). Tam mertebeden Türev ve İntegraller basitleştirilmiş uygulamalı problemleri çözmek için gerekli fiziksel ve geometrik yorumlara sahiptir. Ancak kesirli mertebeden Türev ve İntegraller hem teoride hemde gerçek hayat problemlerine uygulamalarda hızla gelişen bir alanı gösterse de henüz yeterli seviyede değildir. Son zamanlarda bu alan gerçek hayat problemlerini açıklayan en iyi metotlardan biri haline gelmiştir. Kesirli Türev bilinen tam mertebeden türevden çok daha geniş fiziksel ve geometrik özelliklere sahip olduğu varsayılmaktadır. Beklentilere yanıt vermek amacıyla birçok fiziksel makale

yayınlandı (Yajima ve Nagahama, 2018; El-Nabulsi, 2020a, 2020b; Baş ve Özarslan, 2018; Bagley ve Torvik, 1983; 1986; Baleanu ve Trujillo, 2010).

Bilim insanları kesirli mertebeden türev ve integralin geometrik yorumunu merak etmişlerdir. Bu yüzden çeşitli yaklaşımlar ortaya atılmıştır. Bu yaklaşımlara (Lazopoulos K. A. ve Lazopoulos A. K., 2016;2017;2021; Aydın vd., 2021; Yajima vd., 2018; Gözütok vd., 2019; Herrmann, 2014; Baleanu, 2011)’den ulaşılabilir. Bu yaklaşımlarda Kesirli türevin farklılıkları önemli bir faktör olmasına rağmen kesirli türevin tanımlarının çoğu Leibniz kuralı gibi diferansiyel topolojinin bazı gereksinimlerini karşılamakta başarısızdır. Ancak $\wedge$ - Kesirli uzayına karşılık gelen $\wedge$ - Kesirli türev operatörü diferansiyel topolojinin gereksinimlerini karşılamaktadır (Lazopoulos K. A. ve Lazopoulos A. K., 2021). Bu yüzden birçok uygulama için kullanışlıdır. Ayrıca $\wedge$ -Kesirli Adi ve Kısmi diferansiyel denklemleri Lazopoulos (2022)’de tartışılmaktadır.

Bu tezin birinci bölümünde kesirli türev ve integralin ortaya çıkış sürecinden bahsedilerek literatür amacına değinilmiştir. İkinci bölümünde kesirli türev ve integrallerin yanı sıra diferansiyel geometrinin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Tezin orjinal kısmı olan üçüncü ve dördüncü bölümde ise sırasıyla Lazopoulos K. A. ve Lazopoulos A. K. (2021) makalesinde ifade edilen $\wedge$ -Kesirli türevine karşılık gelen Frenet çatısı yardımıyla $\wedge$ -kesirli Darboux vektörü inşa edilmiştir. Aynı zamanda $\wedge$ -kesirli Darboux vektörünün geometrik yorumu yapılmıştır. Bunlara ilaveten $\wedge$ -kesirli Darboux vektörünün normu ile standart Frenet çatısının ve Bishop çatısının Darboux vektörünün normu ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca $\wedge$ -kesirli Frenet çatısı ile standart Frenet çatısının normal düzlem vektörleri karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümde Gözütok (2019) makalesi incelenerek Gözütok (2019) makalesinde yer alan Konformal hız vektörünün aksine $V_\alpha = \|T_\alpha \beta\| = t^{1-\alpha} v$ hız fonksiyonu alınarak Konformal kesirli türevi yardımıyla Frenet çatısı yeniden inşa edilmiş ve ismi α -Frenet çatısı olarak adlandırılmıştır. Son olarak da α -Frenet formülleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kesirli türev ve kesirli integral tanımlarından bahsedilmeden önce gerekli bazı tanım ve özellikler ifade edilecektir ve Diferansiyel Geometrinin temel tanım ve teoremlerinden bahsedilecektir.

2.1 Kesirli Türev ve İntegrallerin Temel Kavramları

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Bu alt bölümde, Gamma fonksiyonu tanıtıldıktan sonra kullanacağımız bazı temel özelliklere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} x^{w-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlı genelleştirilmiş integrale Gamma fonksiyonu denir. (2.1) ile ifade edilen fonksiyon;

1. $0 < w < \infty$ için yakınsak
2. $w < 0$ için ıraksak

bir fonksiyondur (Samko vd., 1993).

Önerme 2.1.1. $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, Gamma fonksiyonu için,

$$F(w) = \int_0^m \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m t^{w-1} dt, \Re(w) > 0 \quad (2.2)$$

tanımlaması yapılır ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m = e^{-t}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(w, m) = F(w, \infty) = \int_0^{\infty} t^{w-1} e^{-t} dt$$

bulunur. (2.2) ifadesinde $\frac{t}{m} = u$ dönüşümü yapılırsa,

$$F(w, m) = m^w \int_0^1 (1-u)^m u^{w-1} du \quad (2.3)$$

olur. (2.3) eşitliğinde kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{F(w, m)}{m^w} &= (1-u)^m \frac{u^w}{w} \Big|_0^1 + \frac{m}{w} \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^w du \\ &= \frac{m}{w} \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^w du \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu son eşitlik kısmi integrasyon metodu yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{F(w, m)}{m^w} &= \frac{m(m-1)\dots 1}{w(w+1)\dots(w+m-1)} \int_0^1 u^{w+m-1} du \\ &= \frac{1.2.3\dots m}{w(w+1)\dots(w+m)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$F(w, m) = \frac{1.2.3\dots m}{w(w+1)\dots(w+m)} m^w$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} F(w, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1.2.3...m}{w(w+1)...(w+m)} m^w \\
 &= \int_0^{\infty} t^{w-1} e^{-t} dt \\
 &= \Gamma(w)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinde özel olarak $w = 1$ alınırsa,

$$\Gamma(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1.2.3...m}{1.2.3...(m+1)} m = 1$$

olur. Aynı şekilde (2.4) eşitliğinde w yerine $w + 1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(w+1) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1.2.3...m}{(w+1)(w+2)...(w+m+1)} m^{w+1} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{wm}{(w+m+1)} \frac{1.2.3...m}{w(w+1)(w+2)...(w+m)} m^w \\
 &= w\Gamma(w)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

olur. (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden yardımıyla,

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$

...

$$\Gamma(w) = 1.2.3...(w-1) = (w-1)!$$

olduğu basitçe görülür (Podlubny, 1999).

Önerme 2.1.2. $w > 0$ için Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w) \quad (2.6)$$

özellikliğini sağlar (Podlubny, 1999).

İspat . Gamma fonksiyonu tanımından,

$$\Gamma(w+1) = \int_0^{\infty} x^w e^{-x} dx$$

eşitliğinin sağ tarafında $u = x^w$ ve $dv = e^{-x} dx$ seçilerek kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(w+1) &= -x^w e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} w x^{w-1} e^{-x} dx \\ &= 0 + w \int_0^{\infty} x^{w-1} e^{-x} dx \\ &= w\Gamma(w) \end{aligned}$$

olduğu görülür (Podlubny, 1999).

Önerme 2.1.3. Her $w > 0$ ve her $m \in N$ için

$$\Gamma(w+m) = (w+m-1)(w+m-2)\dots(w+1)w\Gamma(w) \quad (2.7)$$

dir (Samko vd., 1993; Podlubny, 1999).

İspat . Gamma fonksiyonuna ait özellik (2.6)'den dolayı,

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$$

yazılır. Yine benzer şekilde aynı özellik dikkate alınırsa,

$$\Gamma(w+2) = (w+1)\Gamma(w+1) = (w+1)w\Gamma(w)$$

$$\Gamma(w+3) = (w+2)\Gamma(w+2) = (w+2)(w+1)w\Gamma(w)$$

$\vdots$

$$\Gamma(w+m) = (w+m-1)\Gamma(w+m-1) = (w+m-1)(w+m-2)\dots(w+1)w\Gamma(w)$$

eşitlikleri yazılır. Burada $w = 1$ seçildiğinde $\Gamma(w+1) = m!\Gamma(1)$ olduğu görülür. Burada $\Gamma(1)$ 'in eşitini elde edelim. O halde

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} x^{w-1} e^{-x} dx$$

olup

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{\infty} \\ &= -e^{-\infty} + e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (2.7) eşitliğinden $w = 1$ için

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2)\dots 2.1 = m! \quad (2.8)$$

elde edilir. Şimdi ise (2.8) eşitliğinden oldukça önemli iki sonucu $m = 0$ ve $m = 1$ için yazalım.

$$m = 0 \Rightarrow 0! = \Gamma(1) = 1$$

$$m = 1 \Rightarrow 1! = \Gamma(2) = (2 - 1)! = 1! = 1$$

Burada elde edilen eşitlikler yardımıyla,

$$\Gamma(m) = (m - 1)! = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx, \quad m \in N$$

$$\Gamma(m + 1) = (m)! = \int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx, \quad m \in N \cup 0$$

eşitliklerini yazabiliriz (Samko vd., 1993; Podlubny, 1999).

Örnek 2.1.1. $\Gamma(\frac{1}{2})$ 'nin değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonu tanımından $w = \frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx &= \int_0^{\infty} (t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2} 2t dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son integral için,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

tanımlamasını yapalım. Bu tanımlama yardımıyla,

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy$$

olup

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafında

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

ve

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta dr & -r \sin \theta d\theta \\ \sin \theta dr & r \cos \theta d\theta \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \theta dr d\theta + r \sin^2 \theta dr d\theta$$

$$= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr d\theta$$

$$= r dr d\theta$$

şeklindeki kutupsal koordinatları göz önüne alacak olursak,

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} dr d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada aşağıdaki değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 u &= r^2 \Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow \frac{du}{2} = r dr \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty e^{-u} du \\
 &= \frac{\pi}{4} (-e^{-\infty} + e^0) \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olup

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

bulunur. (3.1) eşitliği ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ yardımıyla,

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.1.2 Beta fonksiyonu

Bu alt bölümde, Beta Fonksiyonu tanıtıldıktan sonra kullanacağımız bazı temel özelliklere yer verilecektir.

Tanım 2.1.2.

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (2.9)$$

integrali ile tanımlanan $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow R$ fonksiyonuna Beta Fonksiyonu denir.

Beta Fonksiyonu,

i. $p > 0$ ve $q > 0$ için yakınsak

ii. $p \leq 0$ ve $q \leq 0$ için ıraksak

bir fonksiyondur (Podlubny, 1999).

Önerme 2.1.4. Beta Fonksiyonu

$$B(p, q) = B(q, p)$$

yer değiştirme özelliğini sağlar (Podlubny, 1999).

İspat .

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

integralinde $x = 1 - t$ ve $dx = -dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= - \int_1^0 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \\ &= B(q, p) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur (Podlubny, 1999).

Önerme 2.1.5. Beta Fonksiyonu,

$$p > 1 \text{ için, } B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \quad (2.10)$$

ve

$$q > 1 \text{ için, } B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \quad (2.11)$$

eşitliklerini sağlar (Andrews vd., 1999).

İspat .

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

integralinde $u = x^{p-1}$ ise $du = (p-1)x^{p-2}dx$ ve $(1-x)^{q-1}dx = dv$ ise $v = -\frac{(1-x)^q}{q}$ olmak üzere kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= -x^{p-1} \frac{(1-x)^q}{q} \Big|_0^1 + \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} (1-x)^q dx \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} (1-x)^{q-1} (1-x) dx \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} ((1-x)^{q-1} - x(1-x)^{q-1}) dx \\ &= \frac{p-1}{q} \underbrace{\int_0^1 x^{p-2} (1-x)^{q-1} dx}_{B(p-1, q)} - \frac{p-1}{q} \underbrace{\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}_{B(p, q)} \end{aligned}$$

olup

$$B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q) - \frac{p-1}{q} B(p, q)$$

$$(1 + \frac{p-1}{q}) B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q)$$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik ve $B(p, q) = B(q, p)$ şeklindeki yer değiştirme özelliği göz önüne alındığında $q > 1$ için

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

eşitliği de kolayca gösterilebilir (Andrews vd., 1999).

Önerme 2.1.6. Beta Fonksiyonu için

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$$

eşitliği vardır (Andrews vd., 1999).

İspat . Beta fonksiyonunda $1-x = \frac{1}{1-t} \Rightarrow t = \frac{x}{1-x}$ ve $dx = \frac{1}{(1+t)^2} dt$ dönüşümleri yardımı ile

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \end{aligned}$$

olacaktır. Elde edilen bu son eşitlikte $0 < p < 1$ olmak üzere q yerine $1 - p$ yazılırsa,

$$B(p, 1 - p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$$

integral formülü de elde edilir (Andrews vd., 1999).

Önerme 2.1.7. Gamma ve Beta Fonksiyonları arasında

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

eşitliği vardır (Podlubny, 1999; Andrews vd., 1999).

İspat .

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

İntegralinde $x = zt$ dönüşümü yapıldığında $dx = t dz$ olup

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (zt)^{p-1} e^{-zt} t dz \\ &= \int_0^{\infty} z^{p-1} t^p e^{-zt} dz \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte $p \rightarrow p+q$ ve $t \rightarrow t+1$ olarakta seçilirse,

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{\infty} z^{p+q-1} (t+1)^{p+q} e^{-z(t+1)} dz$$

olup

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-zt} e^{-z} dz$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki yanını t^{p-1} ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığı üzerinde integrali alınırsa,

$$\Gamma(p+q) \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^{\infty} t^{p-1} \left(\int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-zt} e^{-z} dz \right) dt$$

olur. Burada eşitliğin sol tarafında

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = B(p, q)$$

olup eşitlikte yazılırsa,

$$\Gamma(p+q)B(p, q) = \int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-z} \left(\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-zt} dt \right) dz$$

elde edilir.

$$\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-zt} dt$$

İntegralinde $u = zt \Rightarrow du = zdt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(p+q)B(p, q) &= \int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-z} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{u}{z}\right)^{p-1} e^{-u} \frac{du}{z} \right) dz \\ &= \int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-z} z^{1-p-1} \left(\int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} du \right) dz \\ &= \Gamma(p) \int_0^{\infty} z^{q-1} e^{-z} dz \\ &= \Gamma(p)\Gamma(q) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999; Andrews vd., 1999).

2.2 Kesirli Türev ve İntegraller

S.F. Lacroix bir metninde kesirli türev ve integraller konusuna değinmiştir (Lacroix, 1819). Tam sayı mertebesindeki bir durumdan genelleştirerek saf bir matematiksel kural geliştirmiştir. Lacroix n pozitif bir tam sayı olmak üzere $f(x) = x^n$ polinom fonksiyonun m .mertebeden türevi,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= n \cdot x^{n-1} \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^n) &= n \cdot (n-1) x^{n-2} \\ \frac{d^3}{dx^3}(x^n) &= n \cdot (n-1)(n-2) x^{n-3} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1}{(n-3)(n-2) \dots 2 \cdot 1} x^{n-3} \\ &= \frac{n!}{(n-3)!} x^{n-3} \\ &\dots \\ \frac{d^m}{dx^m}(x^n) &= \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \text{ ve } m > n\end{aligned}$$

şeklinde olur. Legendre'nin genelleştirilmiş Gamma fonksiyonunun $\Gamma(n+1) = n!$ özelliği gereğince yukarıdaki eşitlik,

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)} x^{n-m}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Gamma fonksiyonunun bütün reel sayılarda tanımlı olması durumu göz önüne alındığında yukarıdaki son eşitlik, $\alpha > n$ için

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha}, \quad \alpha, n \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

biçiminde yazılarak x^n şeklindeki bir fonksiyonun keyfi mertebeden türevi ifade edilmiştir. Örneğin; $f(x) = x$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için (2.1) ifadesinden

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.2)$$

eşitliği elde edilir. Lacroix'nın yöntemi, keyfi mertebeden türev tanımı günümüz kesirli türev olan Riemann Liouville tanımıyla örtüşmesi şaşırtıcı bir şekilde ilginçtir (Miller ve Ross, 1993).

2.2.1 Kesirli türev ve integral tanımları

Tanım 2.2.1. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)

$n \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \alpha < n$ olmak üzere f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $x > a$ için α . mertebeden Riemann-Liouville Kesirli türevi ve α katlı kesirli integrali sırasıyla,

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - \xi)^{n - \alpha - 1} f(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \xi)^{\alpha - 1} f(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999; Samko vd., 1993).

Genel bir kanıyla biliyoruz ki türevin ham tanımı Limit kavramından gelmektedir. Kesirli Analizi limit formuyla elde etmek iyi bir fikir olabilir. Yukarıdaki tanımı elde etmek için türevli ve sürekli $y = f(x)$ fonksiyonun klasik türevinin limit tanımı göz önüne alarak

ardışık türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\
f'' &= \frac{df^2}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \\
f''' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3} \\
&\vdots \\
f^{(n)} &= \frac{df^n}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(x-rh)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (2.5)$$

dir. Herhangi bir keyfi $\alpha \in \mathbb{Z}$ için

$$f_h^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(x-rh) \quad (2.6)$$

alındığında $\alpha \leq n$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \quad (2.7)$$

şeklinde olur. Çünkü $\binom{\alpha}{r}$ katsayısından sonra gelen bütün katsayılar sıfır olacaktır. Şimdi de α 'nın negatif olma durumları göz önüne alınırsa, (2.5) eşitliğinde $n = -\alpha$ için

$$\begin{aligned}
\binom{-\alpha}{r} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-r+1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+r-1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{(\alpha-1)!(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+r-1)}{(\alpha-1)! r!} \\
&= (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha) r!}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir. Bunların yanısıra (2.6)'de α yerine $-\alpha$ alınır ve (2.8) negatif binom açılımı kullanılırsa,

$$f_h^{(-\alpha)}(x) = \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha) r!} f(x-rh) \tag{2.9}$$

eşitliği $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ için elde edilmiş olur. (2.7)'de ifade edilenlere benzer olarak sabit n değerleri için $h \rightarrow 0$ giderken limit alınır ve sonuç sıfır olacaktır. Burada $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $h = \frac{x-a}{n}$ alınır ve $h \rightarrow 0$ için $n \rightarrow \infty$ olması gerekir. Bu durumda $f_h^{(-\alpha)}(x)$ sonlu ya da sonsuz olabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_h^{(-\alpha)}(x) = {}_a D_x^{-\alpha} f(x)$$

biçiminde gösterilir.

(2.9) eşitliğinde $\alpha = 1$ özel durumu için

$$\begin{aligned}
f_h^{(-1)}(x) &= \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1) r!} f(x-rh) \\
&= \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^n f(x-rh)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

olup (2.10) de $x - nh = a$ ve $f(x)$ sürekli alındığında,

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{-1}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_h^{(-1)}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n f(x - rh)h \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin sağ tarafı Riemann toplamıdır. Dolayısıyla son eşitlik

$$\Delta x = h = \frac{(x - a) - (0)}{n}$$

Riemann parçalanışı olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{-1}f(x) &= \int_0^{x-a} f(x-z)dz \\ x-z &= \xi \Rightarrow -dz = d\xi \\ &= \int_x^a f(\xi)(-d\xi) = \int_a^x f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

olur. (2.9) eşitliğinde $\alpha = 2$ için

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{-2}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_h^{(-2)}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h^{-2}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(2+r)}{\Gamma(2)r!} f(x - rh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 \sum_{r=0}^n (r+1)f(x - rh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 \sum_{r=1}^{n+1} (r)f(x - rh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)f(x - rh)h \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Riemann toplamı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-2}f(x) &= \int_0^{x-a} z f(x-z) dz \\
x-z &= \xi \Rightarrow -dz = d\xi \\
&= \int_x^a (x-\xi) f(\xi) (-d\xi) = \int_a^x (x-\xi) f(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha = 3$ için (2.9) eşitliği ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-3}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_h^{(-3)}(x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h^{-3}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(3+r)}{\Gamma(3) r!} f(x-rh) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} h^3 \sum_{r=0}^n \frac{(r+2)(r+1)}{1.2} f(x-rh) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n+1} h^2 (r+1)(r) f(x-rh) h \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(x-rh) h + \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(x-rh) h}_0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Riemann toplamı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-3}f(x) &= \frac{1}{2!} \int_0^{x-a} z^2 f(x-z) dz \\
x-z &= \xi \Rightarrow -dz = d\xi \\
&= \frac{1}{2!} \int_x^a (x-\xi)^2 f(\xi) (-d\xi) = \frac{1}{2!} \int_a^x (x-\xi)^2 f(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu şekilde devam edildiğinde,

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) = {}_a I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

genel olarak bir gösterim elde edilir (Podlubny, 1999; Samko vd., 1993).

Riemann ve Liouville bu son eşitlikte Gamma fonksiyonundan faydalanarak tüm keyfi α rasyonel değerleri için

$${}_a I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

kesirli integralini ifade etmiştir. (2.11) eşitliği kullanılarak

$${}_a D_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} {}_a D_x^{-(n-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

kesirli türevi elde edilir (podlubny, 1999). Eğer son eşitlikte alt limit sıfır alınırsa ($a = 0$),

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

eşitliği elde edilmiş olur (Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993).

Tanım 2.2.2. (Grünwald-Letkinov Kesirli Türevi)

f sürekli bir fonksiyon ve $\{f^{(m)}(x) : m = 1, 2, 3, \dots, n+1\}$ türev fonksiyonları da $[a, x]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$, $n < \alpha < n+1$ için f fonksiyonunun α . mertebeden Grünwald-Letkinov kesirli türevi,

$${}_a D_x^{\alpha} f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)(x-a)^{-\alpha+r}}{\Gamma(-\alpha+r+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)} \int_a^x f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-\alpha} d\xi$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.2.3. (Caputo Kesirli Türevi)

$n \in \mathbb{N}$ ve $n-1 < \alpha < n$ için f fonksiyonu n defa diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak

üzere, f fonksiyonunun α . mertebeden Caputo Kesirli türevi,

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.2.4. (Conformal Kesirli Türevi)

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f 'nin her $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ için α . mertebeden konformal kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{\alpha-1}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır ve $T_\alpha f$ ile gösterilir (Khalil vd., 2014).

2.2.2 Kesirli türev ve integralin özellikleri

1. Riemann Liouville lineerlik özelliği:

$${}_a D_x^\alpha (mf(x) + ng(x)) = m {}_a D_x^\alpha f(x) + n {}_a D_x^\alpha g(x)$$

(Podlubny, 1999)

2. Riemann Liouville kesirli integrallerin birleşme özelliği:

$${}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^\beta f(x)) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x)$$

dir (Samko vd., 1993).

İspat .

$$\begin{aligned} {}_aI_x^\alpha ({}_aI_x^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} ({}_aI_x^\beta f(t)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-z)^{\beta-1} f(z) dz \right) \end{aligned}$$

eşitliğin sağ tarafında integrasyon sırası

$$a < z < t \text{ ve } a < t < x \Rightarrow a < z < t < x$$

sınır değişimine bağlı olarak değiştirilirse,

$${}_aI_x^\alpha ({}_aI_x^\beta f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \left(\int_z^x (x-t)^{\alpha-1} (t-z)^{\beta-1} dt \right) dz$$

eşitliği yazılır. Şimdi bu eşitliğin sağ tarafındaki iç integral

$$t = z + (x-z)u \Rightarrow u = \frac{t-z}{x-z} \Rightarrow du = \frac{dt}{x-z}$$

dönüşümü altında hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \int_z^x (x-t)^{\alpha-1} (t-z)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 (x-z - (x-z)u)^{\alpha-1} (z + (x-z)u - z)^{\beta-1} (x-z) du \\ &= (x-z)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ &= (x-z)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-z)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

olduğu görülür bu eşitlik yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha({}_aI_x^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-z)^{\alpha+\beta-1} f(z) dz \\
&= {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

şeklindeki birleşme özelliği elde edilir (Samko vd., 1993).

3. Riemann Liouville yer değiştirme özelliği:

Birleşme özelliğinden,

$${}_aI_x^\alpha({}_aI_x^\beta f(x)) = {}_aI_x^\beta({}_aI_x^\alpha f(x))$$

olduğu açıkça gösterilebilir (Samko vd., 1993).

4. Riemann Liouville kesirli integrali için,

$${}_aI_x^0 f(x) = f(x)$$

dir (Samko vd., 1993; Kilbas vd., 2006).

İspat . İspatı yapmak için

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

kesirli integral tanımına bir kez kısmi intagrasyon uygulamak yeterli olacaktır.

Burada $u = f(t)$ ve $dv = (x - t)^{\alpha-1} dt$ seçelim; böylece

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[f(t) \frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_a^x - \int_a^x \frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha} f'(t) dt \right] \\ &= \frac{f(a)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_a I_x^0 f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

elde edilir (Samko vd., 1993; Kilbas vd., 2006).

5. Riemann Liouville kesirli türevi için Leibniz kuralı:

$${}_a D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_a D_x^k f(x) {}_a D_x^{\alpha-k} g(x) \quad (2.13)$$

(Miller ve Ross, 1993; Bologna, 2005).

6. Konformal(conformable) kesirli türevi aşağıdaki özellikleri sağlar, $t > 0, \alpha \in (0, 1]$ ve f, g, α -türevlenebilir olsun o halde

$$(a) \quad T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \text{ her } a, b \in R$$

(b) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, her $p \in R$ için

(c) $T_\alpha(\lambda) = 0$, $f(t) = \lambda$ bütün sabit fonksiyonlar için

(d) $T_\alpha(fg)(t) = f(t)T_\alpha(g)(t) + g(t)T_\alpha(f)(t)$

(e) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

(f) $T_\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$

dir (Khalil vd., 2014).

İspat . (d) (2.12) tanımı göz önünde bulundurularak fg fonksiyonun konformal kesirli türevi,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
 &= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha(g)(t) \\
 &= f(t)T_\alpha(g)(t) + g(t)T_\alpha(f)(t)
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Khalil vd., 2014).

İspat . (f) eşitliğinin ispatı için (2.12)'de verilen konformal tanımı gereğince

$$T_\alpha(f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

$\varepsilon = t^{1-\alpha}h$ dönüşümü altında eşitlik,

$$\begin{aligned} T_\alpha(f(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= t^{1-\alpha} f'(t) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Khalil vd., 2014).

2.2.3 Bazı temel fonksiyonların kesirli türev ve integralleri

1. $f(x) = x^\beta, \beta > 0$ fonksiyonunun (2.1) tanımı gereğince kesirli türevi

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$$

dir (Miller ve Ross, 1993). Burada özel olarak $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\beta = 2$ alınırsa,

$$D_x^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

bulunur. Son bulunan ifadenin tekrar $1/2$. mertebeden kesirli türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} D_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} D_x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{1!} x \\ &= 2x \end{aligned}$$

olduğu görülür. Verilen $f(x)$ fonksiyonun $(0,x)$ aralığı üzerinde R-L kesirli integrali (2.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^\alpha(x^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt \\
t = ux &\Rightarrow dt = xdu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-ux)^{\alpha-1} (ux)^\beta xdu \\
&= \frac{x^{\alpha-1+\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\
&= \frac{\beta(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

şeklindedir (Samko vd., 1993; Miller ve Ross, 1993).

2. $f(x) = c$ fonksiyonunun (2.1) eşitliğinde verilen tanım yardımıyla kesirli türevi Lineerlik özelliğinden,

$$\begin{aligned}
D^\alpha c &= cD^\alpha 1 \\
&= cD^\alpha 1.x^0 \\
&= c \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\
&= \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

3. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun Riemann Liouville kesirli integrali:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ eşitliği ve (2.4) kesirli integral tanımından,}$$

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha(e^x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^t dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt \end{aligned}$$

yazılır. Şayet burada $|t| < 1$ ise, o zaman

$${}_0I_x^\alpha(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^n dt$$

yazılır. Bulunan bu son integralde $t = ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha(e^x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} (ux)^n x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{n!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{n!} \beta(\alpha, n+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{n!} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\Gamma(n+1) = n!$ olduğu düşünülürse,

$${}_0I_x^\alpha(e^x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

elde edilir (Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993).

4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun Riemann Liouville kesirli integrali:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ eşitliği ve (2.4) kesirli integral tanımından,}$$

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^n dt \end{aligned}$$

yazılır. Bulunan bu son integralde $t = ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} (ux)^n x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha+n} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha+n} \beta(\alpha, n+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha+n} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\ &= x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} x^n \end{aligned}$$

bulunur (Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993).

5. $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann Liouville kesirli integrali:

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Taylor seri açılımı ve (2.4)'de verilen kesirli integral tanımından,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha(\sin(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (\sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{2n+1} dt \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu son integralde $t = ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^\alpha(\sin(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 (x-ux)^{\alpha-1} (ux)^{2n+1} x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{2n+1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+2n+1}}{(2n+1)!} \beta(\alpha, 2n+2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+2n+1}}{\Gamma(2n+2)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2n+2)}{\Gamma(\alpha+2n+2)} \\ &= x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{\Gamma(\alpha+2n+2)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993). Burada özel olarak $\alpha = -1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^{-1}(\sin(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\Gamma(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

olur. Aynı eşitlikte $\alpha = 1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^1(\sin(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{\Gamma(2n+3)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \\ &= 1 - \cos(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere,

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

integralinde ki c sabitinin 1 olduğu görülür ve bu şekilde daha iyi bir integral hesabı yapılmış olur.

6. $f(t) = t^n$ fonksiyonunun Konformal kesirli türevi (2.12) tanımı gereğince

$$\begin{aligned}
T_\alpha(f(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} (\varepsilon t^{1-\alpha})^k - t^n}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} t^n + \binom{n}{1} t^{n-1} \varepsilon t^{1-\alpha} + \dots + \binom{n}{n} (\varepsilon t^{1-\alpha})^n - t^n}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} t^n + \binom{n}{1} t^{n-1} t^{1-\alpha} + \dots + \binom{n}{n} \varepsilon^{n-1} (t^{1-\alpha})^n - t^n}{\varepsilon} \\
&= \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{t^{n-1}}{t^{\alpha-1}} \\
&= n t^{n-\alpha}
\end{aligned}$$

dir (Khalil vd., 2014).

7. $f(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun Konformal kesirli türevi

$$\begin{aligned}
T_\alpha(f(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c - c}{\varepsilon} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir (Khalil vd., 2014).

8. $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonunun Konformal kesirli türevi

$$T_\alpha(f(x)) = x^{1-\alpha} \cos(x)$$

dir (Khalil vd., 2014).

9. $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun Konformal kesirli türevi

$$T_\alpha(f(x)) = x^{1-\alpha} \sin(x)$$

dir (Khalil vd., 2014).

10. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun Konformal kesirli türevi

$$T_\alpha(f(x)) = x^{1-\alpha} e^x$$

şeklinde hesaplanır (Khalil vd., 2014).

2.3 Diferansiyel Geometrinin Temel Kavramları

2.3.1 Afin uzay

Tanım 2.3.1. (Afin uzay)

$A \neq \emptyset$ bir küme ve V, K cismi üzerine tanımlı n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$(N, M) \rightarrow F(N, M) = \overrightarrow{NM}$$

fonksiyonu,

$$1. \forall N, M, K \in A \text{ için } f(N, M) + f(M, K) = f(N, K)$$

$$2. \forall N \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(N, M) = \alpha \text{ biçiminde bir tek } M \in A \text{ noktasına sahiptir.}$$

özelliklerini sağlıyorsa A kümesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir **Afin Uzay** denir.

Ayrıca bu özelliklere **afin aksiyomları** adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.2. (Afin çatı)

A , V Vektör uzayıyla bağdaştırılan bir Afin uzay olmak üzere, $q_0, q_1, \dots, q_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}\}$ vektörlerinin sistemi V vektör uzayının bir bazı ise

$$\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$$

$n + 1$ elemanlı kümeye A Afin uzayında bir **Afin çatı** olarak tanımlanır. Burada q_0 noktasına çatının başlangıç noktası, $q_1, q_2, \dots, q_n$ noktalarına da bu çatının uç noktaları denir (Hacısalıhoğlu, 2000; Yüce, 2022).

Tanım 2.3.3. (Germe aksiyomu):

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ bir V vektör uzayında vektörlerin bir cümlesi ise V 'deki her bir vektör S 'deki vektörlerin lineer birleşimlerinden oluşuyorsa, S cümlesi V 'yi geriliyor ya da V uzayı S ile geriliyor denir ve

$$\text{span}\{S\} \text{ veya } Sp\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

şeklinde gösterilir (Hill ve Kolman, 2002).

Tanım 2.3.4. (Lineer bağımlılık, Lineer bağımsızlık):

Bir V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörleri için

$$\sum_{i=1}^k a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$$

şeklinde verilen eşitliğin tamamı sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_k$ sabitleri varsa bu vektörlere **lineer bağımlıdır** denir. Bu durumda; $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörleri için

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

şartını sağlıyorsa bu vektörlere **lineer bağımsızdır** denir (Hill ve Kolman, 2002).

Tanım 2.3.5. (İç çarpım)

V , A ile birleşen herhangi bir afin uzay olsun, V üzerinde bir iç çarpım V 'deki u, v vektörlerinin sıralı herbir çiftleri için (u, v) reel sayısına karşılık getiren

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları gerçekleştiriyorsa bu fonksiyona **iç çarpım** fonksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 2013). $\forall u, v, w \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

1. Bilineerlik aksiyomu;

$$\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

2. Simetri aksiyomu;

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

3. Pozitif tanımlılık aksiyomu;

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \text{ dir. Ayrıca } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}_v$$

eşitliklerini sağlar (Hacısalıhoğlu, 2013).

2.3.2 Öklid uzayı

Tanım 2.3.6. $A = \mathbb{R}^n$ bir reel Afin uzay ve $\mathbb{R}^n$ ile birleşen vektör uzayı $V = \mathbb{R}^n$ olsun.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için V vektör uzayında iç çarpım

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^n$ Afin uzayında n -boyutlu **Öklid uzayı** olarak adlandırılır. Böylelikle bir Geometri için temel kavramlar olan $\mathbb{R}^n$ 'de uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Örnek 2.3.1. (2-Boyutlu standart öklid uzayı)

Yukarıda verilen (2.3.6) tanımında özel olarak $n = 2$ seçilirse 2-boyutlu öklid düzlemi dediğimiz reel düzlemi elde ederiz. $\vec{X} = (x_1, x_2)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı da,

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

biçiminde tanımlanır ve $\mathbb{E}^2$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.7. (Metrik uzay)

$A \neq \emptyset$ bir küme olsun.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir (Yüce, 2022).

Tanım 2.3.8. (Uzaklık)

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^n$ Öklid uzayında iki nokta olsun. O halde

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlı d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x, y)$ reel sayısına da iki nokta arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.9. (Öklid metriği)

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^n$ Öklid uzayında iki vektör olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\|$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de **Öklid Metriği** denir. $\vec{x}$ ile $\vec{y}$ vektörleri arasındaki açı ϕ ise

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

şeklinde yazılabilmektedir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.10. (Öklid çatısı)

n boyutlu reel iç çarpım uzayı W olmak üzere, W ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında sıralı bir $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ noktası için eğer

$$\{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}\}$$

vektör sistemi W 'nin bir ortonormal bazı ise $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ dik çatısına **Öklid çatısı** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.11. (Standart öklid çatısı)

$\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$\xi_0 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\xi_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\xi_n = (0, 0, \dots, 1)$$

şeklinde tanımlı çatıya özel olarak **standart Öklid çatısı** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Örnek 2.3.2. $\mathbb{E}^2$, 2-boyutlu Öklid uzayında,

$$p_0 = (a_1, a_2), p_1 = (a_1 + \cos(\theta), a_2 + \sin(\theta)), p_2 = (a_1 - \sin(\theta), a_2 + \cos(\theta))$$

noktaları, $\forall a_1, a_2, \theta \in \mathbb{R}$ için bir dik çatı meydana getirirler çünkü

$$\overrightarrow{p_0 p_1} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\overrightarrow{p_0 p_2} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$$\langle \overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j} \rangle = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

olur ve dolayısıyla $\{\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı için bir ortonormal bazdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.3.12. (Öklid koordinat sistemi):

$\mathbb{E}^n$ 'de bir x noktasının $\mathbb{E}^n$ 'de ki standart Öklid çatısına göre karşılığı

$$\overrightarrow{E_0 x} = \sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{E_0 E_i}$$

dir. Buradaki

$$x_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonlarına x noktasının **Öklid koordinat fonksiyonları** ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de $\mathbb{E}^n$ 'in **Öklid koordinat sistemi** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.3.3 Eğriler teorisi

Tanım 2.3.13. (Eğri):

$I \subseteq \mathbb{R}$ ve $I = (a, b)$ açık bir alt aralığı olsun,

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir diferansiyellenebilir **eğri** adı verilir (Yüce, 2022).

Tanım 2.3.14. (Hız vektörü):

$\mathbb{E}^n$ uzayında (I, α) koordinat komşuluğuna karşılık gelen bir M eğrisi verilsin. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin koordinat bileşenleri $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde yazılabilir. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** $\alpha'(t)$ ile gösterilir ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \Big|_t = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$$

şeklinde ifade edilir (Yüce, 2022).

Tanım 2.3.15. (Yay uzunluğu):

$\mathbb{E}^n$ uzayında (I, α) koordinat komşuluğuna karşılık gelen bir M eğrisi verilsin. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin **yay uzunluğu fonksiyonu** ϑ olmak üzere,

$$\vartheta(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

dir. $\vartheta(t) = 1$ ise α' 'ya birim hızlı eğri denir ve s parametresi ile gösterilir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.3.16. (Frenet çatısı):

(I, α) koordinat komşuluğu ile verilen, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında tanımlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlı $T(s)$ vektörüne ise $\alpha(s)$ eğrisinin birim **Teğet vektörü** denir (Hacısalıhoğlu, 2000). Buna göre T, α eğrisi boyunca vektör alanıdır. Bir eğrinin **asli normal vektörü**,

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 2000).

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (2.3)$$

Şeklinde tanımlı $B(s)$ vektörüne ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Binormal vektörü** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Bu tanımlara göre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisi boyunca $T(s), N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerine eğrinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki **Frenet Vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ sistemine de α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki **Frenet Çatısı** olarak adlandırılır. T, N ve B baz vektörleri olduğundan

$$T' = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B \quad (2.4)$$

$$N' = a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B \quad (2.5)$$

$$B' = a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B \quad (2.6)$$

ifadeleri yukarıdaki gibi yazılabilir. Burada $(a_{ij} : i, j = 1, 2, 3), s'$ 'ye bağlı fonksiyonlardır. (2.4), (2.5) ve (2.6) ifadeleri aşağıdaki matris formatında yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Bu matrisin elemanlarını bulmak için (2.4) eşitliğinde eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', T \rangle = a_{11} \langle T, T \rangle + a_{12} \langle N, T \rangle + a_{13} \langle B, T \rangle$$

eşitliği elde edilir. T' ile T dik olduğundan,

$$a_{11} = \langle T', T \rangle = 0$$

dır. (2.4) eşitliğinde eşitliğin her iki tarafı N ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', N \rangle = a_{11} \langle T, N \rangle + a_{12} \langle N, N \rangle + a_{13} \langle B, N \rangle$$

eşitliği elde edilir. Buradan (2.1) ve (2.2) yardımıyla,

$$\langle \alpha'', \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \rangle = a_{12} \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{\|\alpha''\|} \langle \alpha'', \alpha'' \rangle = \frac{1}{\|\alpha''\|} \|\alpha''\|^2 = \|\alpha''\|$$

olur. Özel olarak

$$a_{12} = \kappa = \|\alpha''\| \quad (2.7)$$

olarak ifade edilebilir. (2.4) eşitliğinde eşitliğin her iki tarafı B ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', B \rangle = a_{11} \langle T, B \rangle + a_{12} \langle N, B \rangle + a_{13} \langle B, B \rangle$$

bulunur. Buradan (2.1) ve (2.3) yardımıyla,

$$\langle T', B \rangle = a_{13} \Rightarrow a_{13} = \langle \alpha'', T \wedge N \rangle = \langle \alpha'', \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \rangle = 0$$

katsayısı elde edilir. Şimdi aynı şekilde N' ifadesine bakalım ve bunun için (2.5) ifadesinde eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarpılırsa

$$\langle N', T \rangle = a_{21} \langle T, T \rangle + a_{22} \langle N, T \rangle + a_{23} \langle B, T \rangle = a_{21}$$

olur. $\langle N, T \rangle = 0$ 'ın her iki tarafının türevi alınıp (2.7) eşitliği göz önünde bulundurulur ise

$$\begin{aligned} \langle N, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\|\alpha''\| = -\kappa \end{aligned}$$

dir ve $a_{21} = -\kappa$ olduğu gösterilmiş olur. (2.5) ifadesinin her iki tarafı N ile iç çarpılırsa $\langle N', N \rangle = a_{22} = 0$ bulunur. Aynı eşitlik B ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle N', B \rangle = a_{23} &\Rightarrow a_{23} = \left\langle \left(\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \right)', \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\alpha'''}{\|\alpha''\|}, \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu son eşitlikte özel olarak

$$a_{23} = \tau \tag{2.8}$$

diyelim. Matris sisteminin son olarak 3. satırını bulmak için (2.6) ifadesinde eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarpılırsa, $\langle B', T \rangle = a_{31}$ bulunur. $\langle B, T \rangle = 0$ olduğundan her iki tarafının türevi alınır,

$$\begin{aligned} a_{31} &= \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -a_{13} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Aynı eşitlik N ile iç çarpılırsa $\langle B', N \rangle = a_{32}$ ifadesi aynı çözüm yöntemi ve (2.8) eşitliği yardımıyla

$$\langle B', N \rangle = a_{32} = -a_{23} = -\tau$$

olduğu görülür. (2.6) eşitliğinin her iki tarafı B ile iç çarpılırsa

$$\langle B', B \rangle = a_{33} = 0$$

şeklinde bulunur. O halde bizim elde etmek istediğimiz Frenet matrisi $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, 3\}$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla bu matris sisteminden aşağıdaki sonuç verilebilir (Oprea, 1997; Yüce, 2022).

Sonuç 2.3.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi κ eğrilikli ve τ burulmalı bir eğri olsun. $\|\alpha'\| = 1$ olduğuna göre Frenet denklemleri,

$$T'(s) = \kappa N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa T(s) + \tau B(s)$$

$$B'(s) = -\tau N(s)$$

dir (Oprea, 1997; Yüce, 2022).

Tanım 2.3.17. $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

şeklinde α eğrisinin κ **eğrilik fonksiyonu** tanımlanır ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ sayısına $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoglu, 2016).

Tanım 2.3.18. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için,

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tau(s) = - \langle B'(s), N(s) \rangle = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2}$$

şeklinde tanımlı τ fonksiyonuna α eğrisinin **burulma fonksiyonu** olarak adlandırılır. $\tau(s) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir (Sabuncuoglu, 2016).

Teorem 2.3.1. (Keyfi hızda eğriler için Frenet çatısı ve formülleri)

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet Vektör alanları T, N ve B ile eğrilik ve burulması κ ve τ ile gösterildiğine göre,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ B &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ N &= B \wedge T \\ \kappa &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

dir (Oprea, 1997).

İspat . T, N ve B baz vektörleri olduğundan

$$T' = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B \quad (2.9)$$

$$N' = a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B \quad (2.10)$$

$$B' = a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B \quad (2.11)$$

ifadeleri yukarıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

(2.9),(2.10) ve (2.11) ifadeleri yukarıdaki matris formatında yazılabilir.

(2.9) eşitliğinde, eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', T \rangle = a_{11} \langle T, T \rangle + a_{12} \langle N, T \rangle + a_{13} \langle B, T \rangle$$

eşitliği elde edilir. T' ile T dik olduğundan,

$$a_{11} = \langle T', T \rangle = 0$$

ifadesi bulunabilir. (2.9) eşitliğinde, eşitliğin her iki tarafı N ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', N \rangle = a_{11} \langle T, N \rangle + a_{12} \langle N, N \rangle + a_{13} \langle B, N \rangle$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\langle T', N \rangle = a_{12}$ olur ve

$$\begin{aligned} T' &= \left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \right)' \\ &= \frac{\alpha'' \|\alpha'\| - \alpha' \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|}}{\|\alpha'\|^2} \\ &= \frac{\alpha'' \|\alpha'\|^2 - \alpha' \langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^3} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a_{12} &= \left\langle \frac{\alpha'' \|\alpha'\|^2 - \alpha' \langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^3}, \left(\frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \right) \wedge \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|^4 \cdot \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \left\langle \alpha'' \|\alpha'\|^2 - \alpha' \langle \alpha', \alpha'' \rangle, (\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha' \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|^4 \cdot \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \left[\|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', (\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha' \rangle - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \underbrace{\langle \alpha', (\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha' \rangle}_0 \right] \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|^2 \cdot \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \langle \alpha'', (\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha' \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

kuralı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \langle \alpha'', -\alpha' \langle \alpha', \alpha'' \rangle + \alpha'' \langle \alpha', \alpha' \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge \alpha''\|} (\langle \alpha', \alpha' \rangle \langle \alpha'', \alpha'' \rangle - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \langle \alpha', \alpha'' \rangle) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte,

$$\begin{aligned}\|A \wedge B\|^2 &= \langle A \wedge B, A \wedge B \rangle \\ &= \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle - \langle A, B \rangle \langle A, B \rangle\end{aligned}$$

Lagrange Özdeşliğinden faydalanacak olursak,

$$\begin{aligned}a_{12} &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^2}\end{aligned}$$

bulunur. (2.9) eşitliğinin her iki tarafı B ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}a_{13} &= \langle T', B \rangle = \left\langle \frac{\alpha'' \|\alpha'\|^2 - \alpha' \langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^3}, \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \left(\|\alpha'\|^2 \cdot \underbrace{\langle \alpha'', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}_0 - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \underbrace{\langle \alpha', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}_0 \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur, (2.10) eşitliğinin her iki tarafı T ile çarpılırsa,

$$\langle N', T \rangle = a_{21} = \langle B' \wedge T + B \wedge T', T \rangle$$

eşitliği yazılır. Buna ek olarak

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle = - \langle N, T' \rangle = -a_{12}$$

olur. (2.10) eşitliğinin her iki tarafı N ile çarpılırsa, $\langle N', N \rangle = a_{22} = 0$ bulunur. Aynı şekilde (2.10) eşitliğinin her iki tarafı B ile çarpılırsa, $\langle N', B \rangle = a_{23}$ olur düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \langle B' \wedge T + B \wedge T', B \rangle = \langle B' \wedge T, B \rangle + \underbrace{\langle B \wedge T, B \rangle}_0 = \langle B' \wedge T, B \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{(\alpha'' \wedge \alpha'' + \alpha' \wedge \alpha''') \|\alpha' \wedge \alpha''\| - \|\alpha' \wedge \alpha''\|' (\alpha' \wedge \alpha'')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \right) \wedge \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\alpha'\| \|\alpha' \wedge \alpha''\|^3} \left\langle \|\alpha' \wedge \alpha''\| \left((\alpha' \wedge \alpha''') \wedge \alpha' \right) - \|\alpha' \wedge \alpha''\|' \left((\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha' \right), \alpha' \wedge \alpha'' \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\alpha'\| \|\alpha' \wedge \alpha''\|^3} \left[\|\alpha' \wedge \alpha''\| \|\alpha'\|^2 \langle \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle \right] \\
&= \frac{\|\alpha'\|}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \det(\alpha', \alpha'', \alpha''')
\end{aligned}$$

bulunur. (2.11) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla T, N ve B ile çarpılırsa,

$$a_{31} = -a_{13} = 0$$

$$a_{32} = -a_{23}$$

$$a_{33} = \langle B', B \rangle = 0$$

oldukları açıkça gösterilebilir. Dolayısıyla kurgulamış olduğumuz Frenet formülleri $v = \|\alpha'\|$ olduğu düşünülerek ,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} & 0 \\ -\frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} & 0 & \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \\ 0 & -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bulunur. Basitçe

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buna bağlı olarak aşağıdaki sonuç verilebilir (Yüce, 2022; Oprea, 1997).

Sonuç 2.3.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi κ eğrilikli ve τ burulmalı bir eğri olsun. $\|\alpha'\| = v$ olduğuna göre Frenet denklemleri,

$$T'(s) = v\kappa N(s)$$

$$N'(s) = -v\kappa T(s) + v\tau B(s)$$

$$B'(s) = -v\tau N(s)$$

şeklindedir (Oprea, 1997; Yüce, 2022).

2.3.4 Darboux vektörü ve RMF çatılar

Katı bir cismin hareketi mevcut konumda cismin içerisinde sabit olan T , N ve B birim vektörlerinin bir hareketi olduğu düşünülür (Stoker, 1989). Katı bir cismin kinematikini anlamak için cismin içerisine gömülü $\vec{p}(s)$ vektörünü ele alalım. $\vec{p}(s)$ vektörü T , N ve B ortonormal sisteminin uzayında yattığı için $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\vec{p}(s) = a_1 T + a_2 N + a_3 B \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.12) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\vec{p}'(s) = a_1 T' + a_2 N' + a_3 B' \quad (2.13)$$

biçiminde bulunur. Biz biliyoruz ki Frenet denklemlerinde

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= x_1 T + x_2 N + x_3 B \\ &= \langle T', T \rangle T + \langle T', N \rangle N + \langle T', B \rangle B\end{aligned}\tag{2.14}$$

dir. İfade edilen (2.14) eşitliğinde

$$\langle T, T \rangle = 1 \Rightarrow \langle T', T \rangle = 0, \quad \langle T, B \rangle = 0 \Leftarrow \langle T', B \rangle = -\langle T, B' \rangle$$

olduğundan,

$$\vec{T}' = \langle T', N \rangle N - \langle T, B' \rangle B$$

bulunur. Burada $N = B \wedge T$ ve $B = -N \wedge T$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \langle T', N \rangle B \wedge T + \langle T, B' \rangle N \wedge T \\ &= (\langle T', N \rangle B + \langle T, B' \rangle N) \wedge T\end{aligned}\tag{2.15}$$

olur. (2.15) eşitliğinin sağ tarafına $(\langle N', B \rangle T) \wedge T = 0$ eklenirse,

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= (\langle T', N \rangle B + \langle T, B' \rangle N) \wedge T + (\langle N', B \rangle T) \wedge T \\ &= (\langle T', N \rangle B + \langle T, B' \rangle N + \langle N', B \rangle T) \wedge T\end{aligned}\tag{2.16}$$

eşitliği elde edilir. Burada özel olarak

$$\mathbb{D} = \langle T', N \rangle B + \langle T, B' \rangle N + \langle N', B \rangle T\tag{2.17}$$

denirse,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &= \langle T', N \rangle B + \langle T, B' \rangle N + \langle N', B \rangle T \\
&= \langle \kappa N, N \rangle B + \langle T, -\tau N \rangle N + \langle -\kappa T + \tau B, B \rangle T \\
&= \tau T + \kappa B
\end{aligned} \tag{2.18}$$

bulunur. Özetlenecek olursa,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} \wedge T &= (\tau T + \kappa B) \wedge T = \kappa N = T' \\
\mathbb{D} \wedge N &= (\tau T + \kappa B) \wedge N = \tau B - \kappa T = N' \\
\mathbb{D} \wedge B &= (\tau T + \kappa B) \wedge B = -\tau N = B'
\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür. Son olarak bulunan bu ifadeler (2.13) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}(s)}{ds} &= a_1 \mathbb{D} \wedge T + a_2 \mathbb{D} \wedge N + a_3 \mathbb{D} \wedge B \\
&= \mathbb{D} \wedge (a_1 T + a_2 N + a_3 B) \\
&= \mathbb{D} \wedge \vec{p}(s)
\end{aligned}$$

olur (Stoker, 1989). Bu eşitlikler göz önüne alındığında aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.3.19. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri için

$$\mathbb{D}(v) = \tau(v)T(v) + \kappa(v)B(v)$$

vektörüne **Darboux Vektörü** denir (Hacisalihoğlu, 2000).

$$\mathbf{D}(v) = \frac{\mathbb{D}(v)}{\|\mathbb{D}(v)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(v) + \tau^2(v)}} \left(\tau(v)T(v) + \kappa(v)B(v) \right)$$

vektörü ile tanımlı α eğrisine ise **Darboux Göstergesi** denir. Bu vektör aslında $\{T, N, B\}$ Frenet çatısının her v anında bir vida hareketi yaptığı eksendir (Hacisalihoğlu 2000).

$$\mathbb{D}(v) \times T(v) = T'(v)$$

$$\mathbb{D}(v) \times N(v) = N'(v)$$

$$\mathbb{D}(v) \times B(v) = B'(v)$$

Yukarıdaki ifadeden anlaşılacağı üzere T, N ve B vektörlerinin ani değişimi kendisine ve $\mathbb{D}$ vektörüne ortogonal olduğunu gösterir. Bu davranış $\mathbb{D}$ tarafından tanımlanan eksen civarında Frenet çatısının ani bir hareketini karakterize eder. Ortak bir eksen olarak $\mathbb{D}$ civarında ani bir şekilde süpürülen konik yüzeyler olarak T, N ve B dikkate alınabilir. Bir φ açısı tarafından $\mathbb{D}$ civarındaki bu vektörlerin herhangi bir yönelimi tanımlanabilirse, $\frac{d\varphi}{dv}$ ani dönme oranına karşılık gelen Darboux vektörünün büyüklüğü,

$$\|\mathbb{D}(v)\| = \sqrt{\kappa^2(v) + \tau^2(v)}$$

şekliyle verilir. Bu $\mathbb{D}$ vektörü genellikle bir uzay eğrisinin "toplam eğriliği" olarak adlandırılır. Tabiki de $\mathbb{D}$ genel bir uzay eğrisi boyunca hem büyüklüğü hemde yönü değişir ve bu Frenet çatısının anlık dönme oranını tanımlamamızın nedenidir (Farouki, 2008).

Tanım 2.3.20. (RMF çatı)

(f_1, f_2, f_3) bir ortonormal çatı olsun. w Darboux vektörü $\langle w, f_i \rangle \equiv 0$ oluyor ise f_i 'e göre en az dönmeye sahiptir veya f_j ve f_k 'nın türevleri f_i 'e paraleldir denir. Bir uzay eğrisi boyunca (T, N, B) Frenet çatısı N normal vektörüne göre en az dönmeye sahiptir. Yani, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f_j' = af_i$ ve $f_k' = af_i$ ise f_i 'ye göre rotasyon minimize edilir. Bu durum Frenet çatısı için

$$T' = \kappa N, \quad B' = -\tau N$$

T' ve B' , N' 'ye paralel olduğundan

$$w = \tau T + \kappa B \Rightarrow \langle w, N \rangle = 0$$

dir. O halde (T, N, B) Frenet çatısı N' 'ye göre **rotasyon-minimizedir** (Farouki, 2014; Farouki, 2008).

Katı bir cismin genel bir uzamsal hareketi zamanın fonksiyonu olarak konum ve yönü tanımlanarak belirlenir. Cismin(kütle merkezi) pozisyonunu tanımlamak için belirli bir noktası seçilir. Yönünü tanımlamak için cismin içerisine gömülü (e_1, e_2, e_3) ortonormal bir çatının değişimi seçilebilir. Genelde konum ve yönü ani bir şekilde değişir ancak belirli hareket problemlerine yol açarlar. Frenet çatısı teğet T , asli normal N ve binormal B vektörleri göstermek üzere bir uzay eğrisi üzerindeki en tanınmış ortonormal çatıdır (Farouki, 2014). Frenet çatısı bir cismi bir yol boyunca yönlendirmek için kullanıldığında açısal hız w olmak üzere $\langle w, N \rangle = 0$ dır. Yani asli normal yönde bileşene sahip değildir. Bu noktadan noktaya bir yol boyunca N asli normal vektörü etrafında ani bir dönmenin var olmadığı anlamına gelir. Aerodinamikte gömülen bir çatı bir uçağın davranışındaki çeşitlilikleri karakterize etmek için kullanılır (cook,1997). Bu kullanım kütle merkezi boyunca yalpalanma (roll), eğim (pitch) ve sapma (yaw) açısından yalpalanma eksenini ile hizalıdır. Yatay eksen, uçağın gövdesi ve kanatlarının uçak içerisindeki çatıya ortogonaldır ve sapma(yatay) eksenini bu uçağa diktir. Eğim ve sapma uçak burnunun yukarı-aşağı ve sola-sağa doğru hareketlerine karşılık gelir ki bu durumda yalpalanma (roll) uçağın gövdesi etrafında bir dönmeye sahip olduğu anlamına gelir. Belirli bir uzamsal yol üzerinde Frenet çatısıyla uyumlu katı bir cisim aralıksız bir harekete sahiptir. Asli normal N etrafında ani dönmeye sahip değildir. Verilen bir yol boyunca ayrıca teğet T ve binormal B etrafında ani dönme olmaksızın karakterize edilen eğimsiz ve sapmasız katı cisim hareketlerini inşa etmek için mümkündür (Farouki, 2014).

Manevrasız hareket $\langle w, T \rangle = 0$ karşılık gelen açısal hız vektörüyle önemi dikkate değer durumdadır. Bu durumda cisim yol boyunca noktadan noktaya T etrafında ani dönmeye sahip değildir. (Bishop, 1975) ilk çalışması N, B 'nin yerine T etrafında ani dönmesi

olmayan teğet T ve normal düzlem vektörleri u, v 'yi içeren (T, u, v) ortonormal çatısını uyarladı. (Klok, 1986) diferansiyel denklemlerin çözümü olarak u, v vektörlerini tanımladı ve (Guggenheimer, 1989) daha sonra yay uzunluğuna göre torsiyonun negatif integraline eşit bir açı boyunca N, B 'nin normal düzlem dönüşü etrafında u, v 'yi tanımlayan miktarı gösterdi.

Frenet çatısı T vektörüne göre rotasyon-minimize olmamasına rağmen ondan böyle bir rotasyon-minimize bir çatı kolayca türetilir. Keyfi hızda bir eğrinin hızı $\sigma = \|\alpha'\|$ ve φ dönme açısı olmak üzere T etrafında N, B 'nin φ kadar döndürülmesiyle yeni u, v vektörleri,

$$\begin{aligned} u &= \cos \varphi N + \sin \varphi B \\ v &= -\sin \varphi N + \cos \varphi B \end{aligned} \tag{2.19}$$

biçiminde elde edilir. (2.19) ifadesinde u eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} u' &= -\sin \varphi \varphi' N + \cos \varphi N' + \cos \varphi \varphi' B + \sin \varphi B' \\ &= -\sin \varphi \varphi' N + \cos \varphi \sigma (-\kappa T + \tau B) + \cos \varphi \varphi' B + \sin \varphi (-\sigma \tau N) \\ &= -\sigma \kappa \cos \varphi T + (-\sin \varphi \varphi' - \sigma \tau \sin \varphi) N + (\cos \varphi \varphi' + \sigma \tau \cos \varphi) B \\ &= -\sigma \kappa \cos \varphi T - \sin \varphi (\varphi' + \sigma \tau) N + \cos \varphi (\varphi' + \sigma \tau) B \\ &= -\sigma \kappa \cos \varphi T + (\varphi' + \sigma \tau) (-\sin \varphi N + \cos \varphi B) \\ &= -\sigma \kappa \cos \varphi T + (\varphi' + \sigma \tau) v \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada u' ifadesinin RMF olması şartından dolayı

$$u' = aT = -\sigma \kappa \cos \varphi T + (\varphi' + \sigma \tau) v \Rightarrow a = -\sigma \kappa \cos \varphi, \varphi' + \sigma \tau = 0$$

$$\varphi' + \sigma\tau = 0 \Rightarrow \varphi' = -\sigma\tau \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 - \int \sigma\tau dt$$

açının dönme oranı elde edilir. Sabit bir integrasyon sabiti olan φ_0 için yukarıdaki eşitlikte integralin eksi işaretli olduğuna dikkat edilmelidir (Guggenheimer, 1989). (2.19) eşitliği tekrar göz önüne alınıp v eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} v' &= -\cos \varphi \varphi' N - \sin \varphi N' - \sin \varphi \varphi' B + \cos \varphi B' \\ &= -\cos \varphi \varphi' N - \sin \varphi \sigma(-\kappa T + \tau B) - \sin \varphi \varphi' B + \cos \varphi(-\sigma\tau N) \\ &= \sigma\kappa \sin \varphi T + (-\cos \varphi \varphi' - \sigma\tau \cos \varphi)N + (-\sin \varphi \varphi' - \sigma\tau \sin \varphi)B \\ &= \sigma\kappa \sin \varphi T - \cos \varphi(\varphi' + \sigma\tau)N - \sin \varphi(\varphi' + \sigma\tau)B \\ &= \sigma\kappa \sin \varphi T + (\varphi' + \sigma\tau)(-\cos \varphi N - \sin \varphi B) \\ &= \sigma\kappa \sin \varphi T - (\varphi' + \sigma\tau)u \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada v' ifadesinin RMF olması şartından dolayı

$$v' = bT = \sigma\kappa \sin \varphi T - (\varphi' + \sigma\tau)u \Rightarrow b = \sigma\kappa \sin \varphi, \varphi' + \sigma\tau = 0$$

$$\varphi' + \sigma\tau = 0 \Rightarrow \varphi' = -\sigma\tau \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 - \int \sigma\tau dt$$

olur. Son olarak

$$T' = \sigma\kappa N = \sigma\kappa(\cos \varphi u - \sin \varphi v) = au - bv$$

dir. O halde T etrafında döndürülmüş çatının denklem matrisi,

$$\begin{bmatrix} T' \\ u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bulunan (T, u, v) çatısının Darboux vektörü T, u, v baz ve $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$w = c_1 T + c_2 u + c_3 v \quad (2.20)$$

yazılabilir. (2.20) ifadesinin her iki tarafı T ile vektörel çarpılırsa,

$$w \times T = -c_2 v + c_3 u \Rightarrow T' = -c_2 v + c_3 u = au - bv$$

$$\Rightarrow c_2 = b, c_3 = a$$

elde edilir. Yine benzer olarak (2.20) eşitliğinin her iki tarafı u vektörü ile vektörel çarpılırsa,

$$w \times u = c_1 v - c_3 T \Rightarrow u' = c_1 v - c_3 T = -aT$$

$$\Rightarrow c_3 = a, c_1 = 0$$

olur. (2.20) eşitliği düzenlenir ve a, b değerleri yerine yazılırsa, (T, u, v) çatısı $\langle w, T \rangle = 0$ ile verilen

$$w = bu + av = \sigma \kappa \sin \varphi u - \sigma \kappa \cos \varphi v$$

açısal hız vektörü elde edilir. Bulunan bu vektör $\langle w, T \rangle = 0$ olduğundan T etrafında rotasyon-minimizedir. T teğet vektörünü içeren bir çatı bir uyarlanmış(adapted) çatıdır ve T 'ye göre rotasyon-minimize olduğunda rotasyon-minimize uyarlanmış(adapted) çatı (RMAF) olarak adlandırılır. Böyle çatılar katı bir cismin doğal uzamsal hareketlerini tanımlar ki diğer ana eksenler anlık bir dönmeye sahip değilken bir ana eksen yolun tanjantı ile sabit tutulur. Bu hareketler bilgisayar animasyonunda, süpürme işleminde kullanılan geometrik tasarımda, robot yol planlanmasında, döner eksenli CNC makinelerinin programlanmasında ve ilgili uygulamalarda kullanışlıdır (Farouki, 2014).

Frenet çatısının modifikasyonu ile binormal B 'ye göre rotasyon-minimize eden (f, g) yeni oskülatör düzlem vektörleri olmak üzere aşağıdaki şekilde belirtilir. Keyfi hızda

bir eğrinin hızı $\sigma = \|\alpha'\|$ ve φ dönme açısı olmak üzere B etrafında T, N 'nin φ kadar döndürülmesiyle yeni f, g vektörleri,

$$\begin{aligned} f &= \cos \varphi T + \sin \varphi N \\ g &= -\sin \varphi T + \cos \varphi N \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. (2.21) eşitliğinde f vektörünün her iki tarafının türevi alınırsa,

$$f' = \sigma \tau \sin \varphi B + (\varphi' + \sigma \kappa) g$$

eşitliği elde edilir. Burada f' ifadesinin RMF olması şartından dolayı

$$f' = mB = \sigma \tau \sin \varphi B + (\varphi' + \sigma \kappa) g \Rightarrow m = \sigma \tau \sin \varphi, \varphi' + \sigma \kappa = 0$$

$$\varphi' + \sigma \kappa = 0 \Rightarrow \varphi' = -\sigma \kappa \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 - \int \sigma \kappa dt$$

dir. (2.21) eşitliğinde benzer şekilde g ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$g' = \sigma \tau \cos \varphi B + (\varphi' + \sigma \kappa) f$$

bulunur. g' ifadesinin RMF olması şartından dolayı da

$$g' = nB = \sigma \tau \cos \varphi B + (\varphi' + \sigma \kappa) f \Rightarrow n = \sigma \tau \cos \varphi, \varphi' + \sigma \kappa = 0$$

$$\varphi' + \sigma \kappa = 0 \Rightarrow \varphi' = -\sigma \kappa \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 - \int \sigma \kappa dt$$

olur. Son olarak

$$B' = -\sigma \tau N = -\sigma \tau \sin \varphi f - \sigma \tau \cos \varphi g = -mf - ng$$

elde edilir. O halde (f, g, B) çatısının denklem matrisi,

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & n \\ -m & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ B \end{bmatrix}$$

şekliyle verilir. (f, g, B) çatısının Darboux vektörü ise (2.20) ifadesindeki aynı çözüm yöntemi izlenirse,

$$w = nf - mg = \sigma\tau \cos \varphi f - \sigma\tau \sin \varphi g \quad (2.22)$$

elde edilir. Burada anlaşılacağı üzere $\langle w, B \rangle = 0$ olduğundan B etrafında rotasyon-minimizedir. f, g vektörleri oskülatör düzlemi kapsadığı için $\alpha(t)$ eğrisi boyunca bu düzleme normal B etrafında anlık dönmeye sahip olmadığı için söyleyebiliriz ki (f, g, B) bir rotasyon minimize oskülatör çatıdır. Yani RMOF'dir (Farouki, 2014).

3. BİR EĞRİ BOYUNCA $\wedge$ -KESİRLİ DARBOUX VEKTÖRÜ

Bu bölümde $\wedge$ -Kesirli türevi verildikten sonra $\wedge$ -Kesirli türevi yardımıyla inşa edilen $\wedge$ -Kesirli Frenet çatısından bahsedilecektir. Daha sonra $\wedge$ -Kesirli Darboux vektörü ifade edilecektir.

3.1 $\wedge$ -Kesirli Türevi ve $\wedge$ -Kesirli Frenet Formülleri

Tanım 3.1.1. Verilen bir $f(v)$ fonksiyonu için $\wedge$ -kesirli türevi ($\wedge$ -FD),

$${}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(v) = \frac{{}^{RL}D_v^{\gamma}f(v)}{{}^{RL}D_v^{\gamma}(v)} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu eşitlikte Riemann-Liouville kesirli türev (2.3) ve kesirli integral (2.4) tanımı göz önüne alındığında $\wedge$ -FD,

$${}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(v) = \frac{\frac{d_a I_v^{1-\gamma}f(v)}{dv}}{\frac{d_a I_v^{1-\gamma}(v)}{dv}} = \frac{d_a I_v^{1-\gamma}f(v)}{d_a I_v^{1-\gamma}(v)} \quad (3.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3.2) ifadesinde $\xi = {}_a I_v^{1-\gamma}(v)$ ve $F(\xi) = {}_a I_v^{1-\gamma}f(v)$ olarak alınırsa $\wedge$ -FD, $(\xi, F(\xi))$ kesirli uzayında geleneksel bir türev olarak ifade edilir ve

$${}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(v) = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. (3.3) türevi ile $(\xi, F(\xi))$ -kesirli uzayında geleneksel bir diferansiyel geometri olarak tanımlanır (Lazopoulos, K. A. ve Lazopoulos, A. K., 2021).

Tanım 3.1.2. $\wedge$ -kesirli türevi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır (Lazopoulos, K. A. ve Lazopoulos, A. K., 2021).

1. Lineerlik: ${}^{\wedge}D_v^{\gamma}(mf + ng)(v) = m {}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(v) + n {}^{\wedge}D_v^{\gamma}g(v)$

2. Bileşke(zincir) kuralı: ${}^{\wedge}D_v^{\gamma}(f(g))(v) = {}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(g(v)) {}^{\wedge}D_v^{\gamma}g(v)$

3. Leibniz(çarpım) kuralı: ${}^{\wedge}D_v^{\gamma}(f.g)(v) = {}^{\wedge}D_v^{\gamma}f(v).g(v) + f(v).{}^{\wedge}D_v^{\gamma}g(v)$

Tanım 3.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\wedge$ -kesirli $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T_{\wedge}(\xi) = \frac{\tilde{\alpha}'(\xi)}{\|\tilde{\alpha}'(\xi)\|} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlı $T_{\wedge}(\xi)$ vektörüne ise $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin birim $\wedge$ -**Kesirli Teğet vektörü** denir. Buna göre $T_{\wedge}, \tilde{\alpha}$ eğrisi boyunca vektör alanıdır. Bir $\wedge$ -kesirli eğrinin $\wedge$ -**Kesirli binormal vektörü**,

$$B_{\wedge}(\xi) = \frac{\tilde{\alpha}'(\xi) \wedge \tilde{\alpha}''(\xi)}{\|\tilde{\alpha}'(\xi) \wedge \tilde{\alpha}''(\xi)\|} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır.

$$N_{\wedge}(\xi) = B_{\wedge}(\xi) \wedge T_{\wedge}(\xi) \quad (3.6)$$

ile verilen $N_{\wedge}(\xi)$ vektörüne ise $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\tilde{\alpha}(\xi)$ noktasındaki $\wedge$ -**Kesirli asli normal vektörü** denir (Lazopoulos, K. A. ve Lazopoulos, A. K., 2021).

Tanım 3.1.4. $\wedge$ -kesirli $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa_{\wedge} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ \kappa_{\wedge}(\xi) &= \frac{\|\tilde{\alpha}'(\xi) \wedge \tilde{\alpha}''(\xi)\|}{\|\tilde{\alpha}'(\xi)\|^3} \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitliğine $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\wedge$ -**kesirli eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa_{\wedge}(\xi)$ sayısına eğrinin $\tilde{\alpha}(\xi)$ noktasındaki $\wedge$ -**kesirli eğriliği** denir (Lazopoulos, K. A. ve Lazopoulos, A. K., 2021).

Tanım 3.1.5. $\wedge$ -kesirli $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau_{\wedge} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tau_{\wedge}(\xi) &= \frac{\langle \tilde{\alpha}'(\xi), \tilde{\alpha}''(\xi) \wedge \tilde{\alpha}'''(\xi) \rangle}{\|\tilde{\alpha}'(\xi) \wedge \tilde{\alpha}''(\xi)\|^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitliğine $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\wedge$ -**kesirli burulma fonksiyonu** denir. $\tau_{\wedge}(\xi)$ sayısına eğrinin $\tilde{\alpha}(\xi)$ noktasındaki $\wedge$ -**kesirli burulması** denir (Lazopoulos, K. A. ve Lazopoulos, A. K., 2021).

Örnek 3.1.1. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$

$$v \rightarrow \alpha(v) = (v, v^2, v^3)$$

eğrisinin Frenet çatısı ve eğrilikleri:

$$T(v) = \frac{\alpha'(v)}{\|\alpha'(v)\|}, \quad B(v) = \frac{\alpha'(v) \wedge \alpha''(v)}{\|\alpha'(v) \wedge \alpha''(v)\|}, \quad N(v) = B(v) \wedge T(v)$$

$$\kappa(v) = \frac{\|\alpha'(v) \wedge \alpha''(v)\|}{\|\alpha'(v)\|^3}, \quad \tau(v) = \frac{\det(\alpha'(v), \alpha''(v), \alpha'''(v))}{\|\alpha'(v) \wedge \alpha''(v)\|^2}$$

olmak üzere,

$$T(v) = \frac{1}{\sqrt{9v^4 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1, 2v, 3v^2 \end{pmatrix}$$

$$B(v) = \frac{1}{\sqrt{36v^4 + 36v^2 + 4}} \begin{pmatrix} 6v^2, -6v, 2 \end{pmatrix}$$

$$N(v) = \frac{-1}{\sqrt{(36v^4 + 36v^2 + 4) \cdot (9v^4 + 4v^2 + 1)}} \begin{pmatrix} 18v^3 + 4v, 18v^4 - 2, -12v^3 - 6v \end{pmatrix}$$

olur. $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ eğrilikleri,

$$\kappa(v) = \frac{\sqrt{36v^4 + 36v^2 + 4}}{(9v^4 + 4v^2 + 1)\sqrt{9v^4 + 4v^2 + 1}}$$

$$\tau(v) = \frac{3}{9v^4 + 9v^2 + 1}$$

şeklinde elde edilir. $\wedge$ -kesirli $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisi,

$$\tilde{\alpha}(v) = {}_0I_v^{1-\gamma} v \varepsilon_1 + {}_0I_v^{1-\gamma} v^2 \varepsilon_2 + {}_0I_v^{1-\gamma} v^3 \varepsilon_3$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli integralin tanımı,

$${}_0I_v^\eta v^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\eta+k+1)} v^{\eta+k}$$

gereğince $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisinin bileşenleri,

$$\begin{aligned} {}_0I_v^{1-\gamma}v &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\gamma)}v^{2-\gamma} \\ {}_0I_v^{1-\gamma}v^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)}v^{3-\gamma} \\ {}_0I_v^{1-\gamma}v^3 &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5-\gamma)}v^{4-\gamma} \end{aligned}$$

olmak üzere $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisi,

$$\tilde{\alpha}(v) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\gamma)}v^{2-\gamma}\varepsilon_1 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)}v^{3-\gamma}\varepsilon_2 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5-\gamma)}v^{4-\gamma}\varepsilon_3 \quad (3.9)$$

bulunur. Bu son eşitlikte,

$$\xi = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\gamma)}v^{2-\gamma} \Rightarrow v = \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(2)}\xi \right)^{\frac{1}{2-\gamma}} \quad (3.10)$$

değişken değişimi yapılır ve (3.10) ifadesi (3.9) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)} \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(2)}\xi \right)^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}} = \frac{2}{(3-\gamma)}\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}}\xi^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}} \\ G(\xi) &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5-\gamma)} \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(2)}\xi \right)^{\frac{4-\gamma}{2-\gamma}} = \frac{6}{(4-\gamma)(3-\gamma)}\Gamma(3-\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}}\xi^{\frac{4-\gamma}{2-\gamma}} \end{aligned}$$

gösterimine bağlı olarak $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisinin $(\xi, F(\xi), G(\xi))$ topolojik uzayındaki karşılığı,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\xi) &= (\xi, F(\xi), G(\xi)) \\ &= \left(\xi, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}}\xi^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{6\Gamma(3-\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}}\xi^{\frac{4-\gamma}{2-\gamma}}}{(4-\gamma)(3-\gamma)} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu $(\xi, F(\xi), G(\xi))$ uzayındaki Frenet çatısını hesaplamak için yukarıda ifade edilmiş olan $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin ξ parametresine göre 1.mertebeden türevi,

$$\tilde{\alpha}'(\xi) = \varepsilon_1 + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \varepsilon_2 + \frac{dG(\xi)}{d\xi} \varepsilon_3$$

olur ve bu eşitliği düzenleyecek olursak,

$$\begin{aligned} \frac{dF(\xi)}{d\xi} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)} \frac{3-\gamma}{2-\gamma} \Gamma(3-\gamma)^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}} = \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{2-\gamma} \\ \frac{dG(\xi)}{d\xi} &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5-\gamma)} \frac{4-\gamma}{2-\gamma} \Gamma(3-\gamma)^{\frac{4-\gamma}{2-\gamma}} \xi^{\frac{2}{2-\gamma}} = \frac{6\Gamma(3-\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}} \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)(2-\gamma)} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\tilde{\alpha}'(\xi) = \left(1, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{2-\gamma}, \frac{6\Gamma(3-\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}} \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)(2-\gamma)} \right)$$

bulunur. Burada işlemlerin daha kolay olması için $\psi = \frac{\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}}}{2-\gamma}$ olsun. O halde,

$$\tilde{\alpha}'(\xi) = \left(1, 2\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, \frac{6(2-\gamma)\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{3-\gamma} \right) \quad (3.11)$$

eşitliği elde edilir. Verilen $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin 2. ve 3. mertebeden türevi sırasıyla aynı çözüm yöntemi ile

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}''(\xi) &= \left(0, \frac{2\psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)}, \frac{12\psi^2 \xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right) \\ \tilde{\alpha}'''(\xi) &= \left(0, \frac{2(\gamma-1)\psi \xi^{\frac{2\gamma-3}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)^2}, \frac{12\gamma\psi^2 \xi^{\frac{2\gamma-2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)(2-\gamma)} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde bulunur. Bu türev eşitlikleri göz önünde bulundurulur ve (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri ele alınırsa, kesirli mertebeden Teğet vektörü ve Binormal vektörü

$$T_{\wedge}(\xi) = \frac{\left(1, 2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, \frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)}{\sqrt{1 + \left(2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2}} \quad (3.13)$$

ve

$$B_{\wedge}(\xi) = \frac{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)}\right)^2}} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Ek olarak kesirli Normal vektörü ise

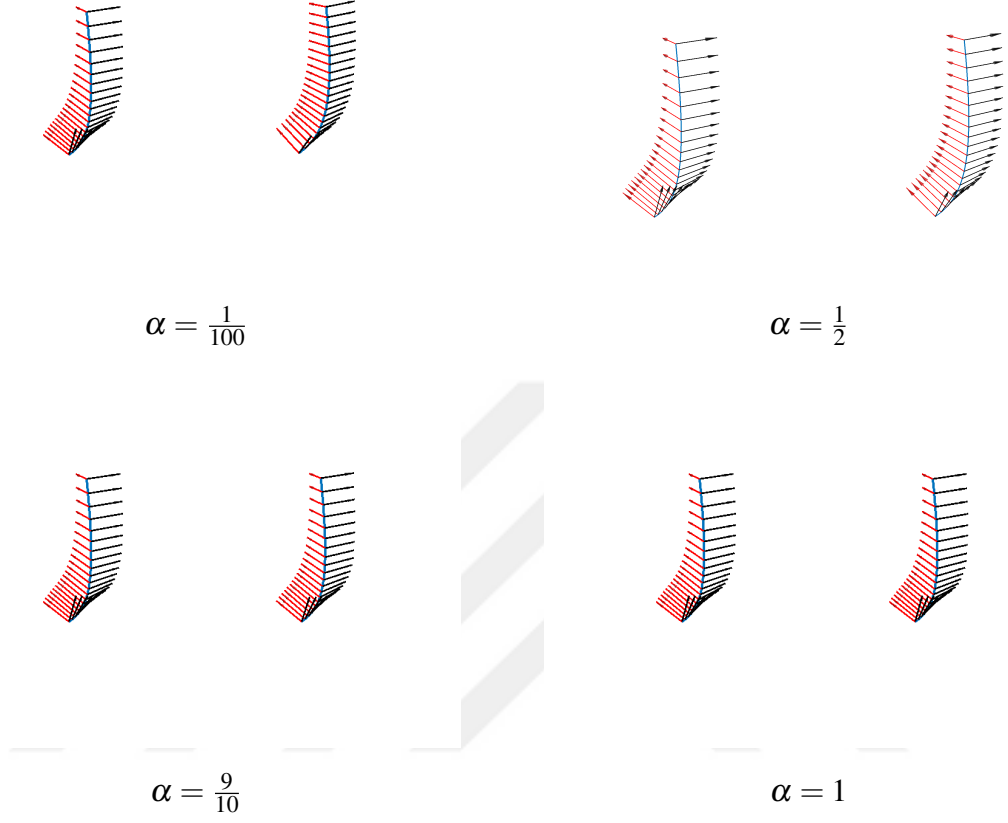
$$N_{\wedge}(\xi) = \frac{(N_{\wedge 1}(\xi), N_{\wedge 2}(\xi), N_{\wedge 3}(\xi))}{\sqrt{M(\xi)N(\xi)}} \quad (3.15)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned} N_{\wedge 1}(\xi) &= \frac{36(2-\gamma)^2\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} + 2\gamma - 6 \\ N_{\wedge 2}(\xi) &= 2(3-\gamma)\psi^{-1}\xi^{\frac{-1}{2-\gamma}} - \frac{36(2-\gamma)^2\psi^3\xi^{\frac{3}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \\ N_{\wedge 3}(\xi) &= \frac{36(2-\gamma)^2\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} + 2\gamma - 6 \\ M(\xi) &= 36(2-\gamma)^2\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}} + 4(2-\gamma)^2 + (3-\gamma)^2\psi^{-2}\xi^{\frac{-2}{2-\gamma}} \\ N(\xi) &= 1 + (2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}})^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

dir. 3.1.1.'de elde edilen $\wedge$ -Frenet çatısının $\wedge$ -normal düzlem vektörleri olan $N_{\wedge}, B_{\wedge}$ ile Frenet çatısının N, B normal düzlem vektörleri, α 'nın $(0, 1)$ aralığındaki değerleri için karşılaştırılmıştır.





Şekil 3.1.1. Standart Frenet çatısı (sol), Λ -Frenet çatısı (sağ)

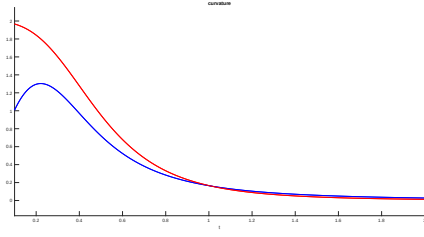
Bu çatıya göre verilen $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin (3.7) ve (3.8) eşitlikleri yarımıyla kesirli mertebeden eğrilik ve burulması sırasıyla,

$$\kappa_{\Lambda}(\xi) = \frac{\sqrt{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)}\right)^2}}{\left(\sqrt{1 + \left(2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2}\right)^3} \quad (3.17)$$

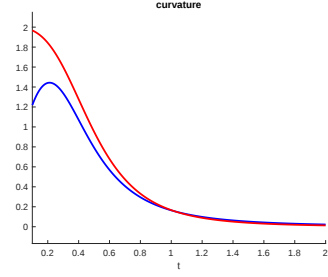
$$\tau_{\wedge}(\xi) = \frac{\frac{24\psi\xi^{\frac{3\gamma-3}{2-\gamma}}(1-\gamma+\gamma(2-\gamma)^2\psi^2)}{(3-\gamma)(2-\gamma)^4}}{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)}\right)^2} \quad (3.18)$$

$\wedge$ -kesirli türevine göre eğrilik ve burulması hesaplanmış olur. Aşağıda verilen (3.1.2.) grafiği ile $\wedge$ -kesirli eğriliği ve standart eğrilik arasında ilişki gösterilmiştir.

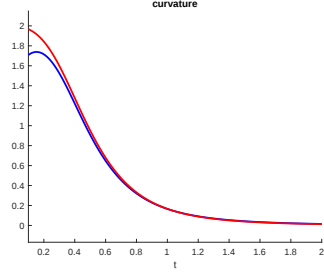




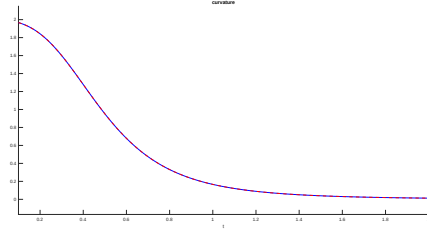
$$\alpha = \frac{1}{100}$$



$$\alpha = \frac{1}{2}$$



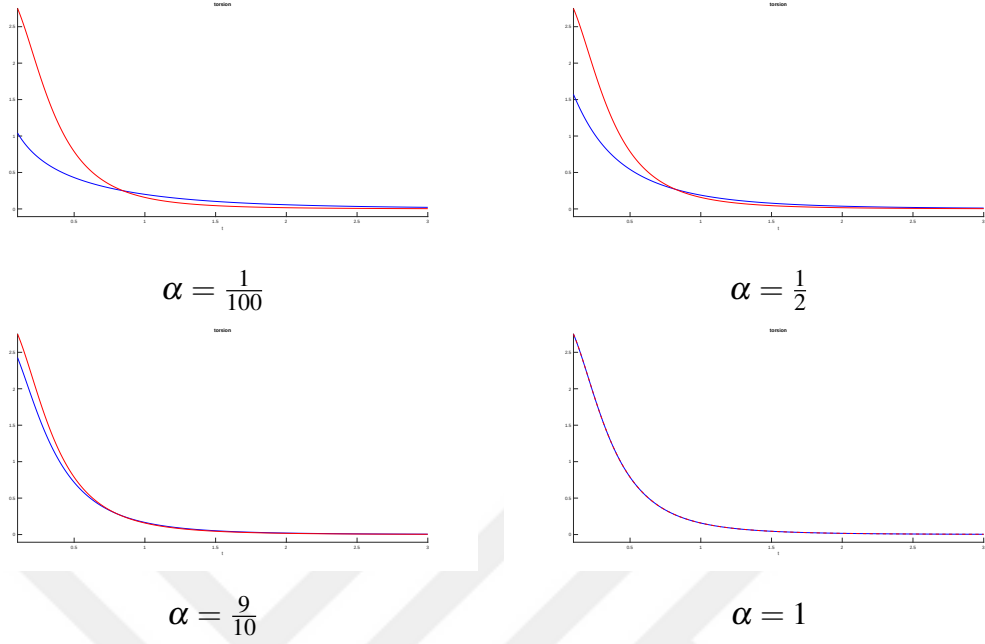
$$\alpha = \frac{9}{10}$$



$$\alpha = 1$$

Şekil 3.1.2. $\kappa_{\wedge}$ kesirli eğrilik (Mavi), κ standart eğrilik (Kırmızı).

(3.1.2.) grafiğinde görüldüğü üzere α değeri bire yaklaştıkça kesirli eğrilik, normal eğriliğe olabildiğince yaklaşır ve α değeri sıfıra yaklaştıkça belirli bir aralıkta $\wedge$ -kesirli eğrilik normal eğrilikten daha küçük kalır. Benzer bir şekilde aşağıda verilen grafikte $\wedge$ -kesirli burulması ile standart burulma arasındaki ilişki yer almaktadır.



Şekil 3.1.3. $\tau_{\wedge}$ kesirli burulma (Mavi), τ standart burulma (Kırmızı).

(3.1.3.) grafiğinde görüldüğü üzere α değeri bire yaklaştığında $\wedge$ -kesirli burulması standart burulmaya oldukça yaklaşıır. α değeri sıfıra yaklaştıkça belirli bir aralıkta $\wedge$ -kesirli burulma standart burulmadan çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

3.2 $\wedge$ -Kesirli Darboux Vektörü

Tanım 3.2.1. $(\xi, F(\xi), G(\xi))$ uzayına karşılık $\wedge$ -kesirli Darboux vektörü, $\{T_{\wedge}(\xi), N_{\wedge}(\xi), B_{\wedge}(\xi)\}$ $\wedge$ -Frenet çatısı ve $V_{\wedge}(\xi) = \|\tilde{\alpha}(\xi)\|$ $\wedge$ -kesirli hız vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{W}_{\wedge}(\xi) \times T_{\wedge}(\xi) &= T'_{\wedge}(\xi) \\
 \mathbb{W}_{\wedge}(\xi) \times N_{\wedge}(\xi) &= N'_{\wedge}(\xi) \\
 \mathbb{W}_{\wedge}(\xi) \times B_{\wedge}(\xi) &= B'_{\wedge}(\xi)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. $\mathbb{W}_\wedge(\xi)$ vektörü $\{T_\wedge(\xi), N_\wedge(\xi), B_\wedge(\xi)\}$ baz olduğundan

$$\mathbb{W}_\wedge(\xi) = w_1 T_\wedge(\xi) + w_2 N_\wedge(\xi) + w_3 B_\wedge(\xi) \quad (3.2)$$

yazılabilir. (3.2) eşitliğinin her iki tarafı $T_\wedge(\xi)$ ile vektörel çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\wedge(\xi) \times T_\wedge(\xi) &= -w_2 B_\wedge(\xi) + w_3 N_\wedge(\xi) \\ \Rightarrow -w_2 B_\wedge(\xi) + w_3 N_\wedge(\xi) &= T'_\wedge(\xi) = V_\wedge(\xi) \kappa_\wedge(\xi) N_\wedge(\xi) \\ \Rightarrow w_2 &= 0, w_3 = V_\wedge(\xi) \kappa_\wedge(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $N_\wedge(\xi)$ ve $B_\wedge(\xi)$ ile vektörel çarpılırsa,

$$w_1 = V_\wedge(\xi) \tau_\wedge(\xi), w_2 = 0, w_3 = V_\wedge(\xi) \kappa_\wedge(\xi)$$

bulunur. w_1, w_2 ve w_3 değerleri (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\mathbb{W}_\wedge(\xi) = V_\wedge(\xi) \tau_\wedge(\xi) T_\wedge(\xi) + V_\wedge(\xi) \kappa_\wedge(\xi) B_\wedge(\xi) \quad (3.3)$$

$\wedge$ -kesirli Darboux vektörü elde edilir.

Tanım 3.2.2. $(\xi, F(\xi), G(\xi))$ uzayına karşılık $\tilde{\alpha}(\xi)$ kesirli eğrisi için $\{T_\wedge(\xi), N_\wedge(\xi), B_\wedge(\xi)\}$ $\wedge$ -Frenet çatısı ve $V_\wedge(\xi) = \|\tilde{\alpha}(\xi)\|$ $\wedge$ -kesirli hız vektörü olmak üzere, $\wedge$ -kesirli Darboux vektörünün büyüklüğü,

$$\|\mathbb{W}_\wedge(\xi)\| = V_\wedge(\xi) \sqrt{\tau_\wedge^2(\xi) + \kappa_\wedge^2(\xi)}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.2.1. $\wedge$ -kesirli türevine göre $\wedge$ -Frenet çatısı ve bunlara bağlı eğrilik ve burulma $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisine göre örnek 3.1.1'de hesaplanmıştır. $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin $\{T_\wedge, N_\wedge, B_\wedge\}$ çatısına

göre $\wedge$ -Darboux vektörü aşağıdaki şekilde hesaplanır.

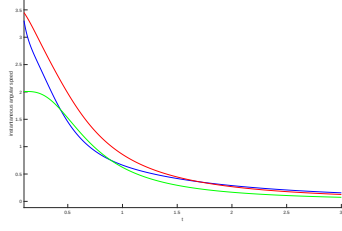
$$\mathbb{W}_\wedge(\xi) = V_\wedge(\xi) \left(\tau_\wedge(\xi) T_\wedge(\xi) + \kappa_\wedge(\xi) B_\wedge(\xi) \right)$$

formülü göz önünde bulundurulursa, $\alpha(v) = (v, v^2, v^3)$ denklemiyle verilen eğrinin $\wedge$ -Darboux vektörü,

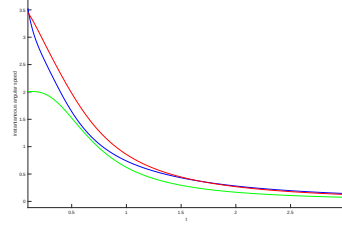
$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\wedge(\xi) = & \frac{\frac{6(3-\gamma)\psi^{-1}\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}(1-\gamma+\gamma(2-\gamma)^2\psi^2)}{(2-\gamma)^2} \left(1, 2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, \frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)}{\left[\left(6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}} \right)^2 + \left(-6\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}} \right)^2 + (3-\gamma)^2 \right]} + \\ & \frac{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \right)}{\left[1 + \left(2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde hesaplanır. $\wedge$ -Darboux vektörünün büyüklüğü,

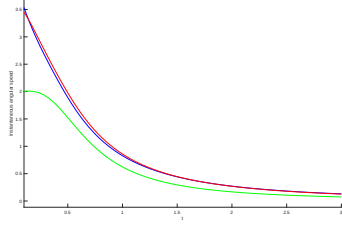
$$\begin{aligned} \|\mathbb{W}_\wedge(\xi)\| = & \frac{\sqrt{1 + \left(2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)^2} \left(\frac{6(3-\gamma)\psi^{-1}\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}(1-\gamma+\gamma(2-\gamma)^2\psi^2)}{(2-\gamma)^2} \right)^2}{\left(\left(6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}} \right)^2 + \left(-6\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}} \right)^2 + (3-\gamma)^2 \right)^2} + \\ & \frac{\left(\frac{12\psi^3\xi^{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)^2 + \left(\frac{-12\psi^2\xi^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)^2 + \left(\frac{2\psi\xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \left(2\psi\xi^{\frac{1}{2-\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{6(2-\gamma)\psi^2\xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right)^2} \right)^5} \end{aligned} \quad (3.5)$$



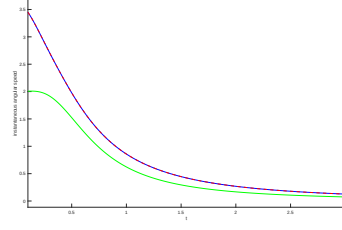
$$\alpha = \frac{1}{100}$$



$$\alpha = \frac{1}{2}$$



$$\alpha = \frac{9}{10}$$



$$\alpha = 1$$

Şekil 3.2.1. $\wedge$ -Darboux Normu (Mavi), Frenet Darboux Normu (Kırmızı), Bishop Darboux Normu (Yeşil).

şeklinde bulunur.

(3.2.1.) grafiğinde $\wedge$ -Darboux vektörünün normu ile Frenet ve Bishop çatısının Darboux vektörünün normu karşılaştırılmaktadır. Görüldüğü üzere α değeri sıfıra yaklaştığında $\wedge$ -Darboux büyüklüğü belirli bir aralıkta diğer iki çatıdan çok daha iyi sonuçlar vermektedir. α değeri bire yaklaştıkça $\wedge$ -Darboux vektörünün uzunluğu, Frenet çatısı Darboux vektörünün uzunluğuna yakınsamaktadır.

Örnek 3.2.2. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$

$$v \rightarrow \alpha(v) = (v, v^2, v^2)$$

şeklinde parametre edilen düzlem eğrisinin,

$$\tilde{\alpha}(v) = {}_0I_v^{1-\gamma} v \varepsilon_1 + {}_0I_v^{1-\gamma} v^2 \varepsilon_2 + {}_0I_v^{1-\gamma} v^2 \varepsilon_3$$

olmak üzere $\wedge$ -kesirli $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(v) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\gamma)} v^{2-\gamma} \epsilon_1 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)} v^{3-\gamma} \epsilon_2 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)} v^{3-\gamma} \epsilon_3$$

şeklindedir. Bu eğride,

$$\xi = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\gamma)} v^{2-\gamma} \Rightarrow v = \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(2)} \xi \right)^{\frac{1}{2-\gamma}}$$

denirse,

$$F(\xi) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4-\gamma)} \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(2)} \xi \right)^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}} = \frac{2}{(3-\gamma)} \Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}}$$

eşitliği elde edilir. $\tilde{\alpha}(v)$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\xi) &= (\xi, F(\xi), F(\xi)) \\ &= \left(\xi, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)}, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{3-\gamma}{2-\gamma}}}{(3-\gamma)} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eğrinin ξ 'a göre bir tam mertebe türevi,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(\xi) &= \epsilon_1 + \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \epsilon_2 + \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \epsilon_3 \\ &= \left(1, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \epsilon_3, \frac{2\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}}{(2-\gamma)} \epsilon_3 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada işlemlerin daha kolay olması için $\psi = \frac{\Gamma(3-\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}}}{2-\gamma}$ denirse,

$$\tilde{\alpha}'(\xi) = (1, 2\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, 2\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}) \quad (3.6)$$

olur. İfade edilen $\tilde{\alpha}(\xi)$ eğrisinin ikinci ve üçüncü mertebeden tam türevi sırasıyla aynı çözüm yöntemi ile

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}''(\xi) &= \left(0, \frac{2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}, \frac{2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}\right) \\ \tilde{\alpha}'''(\xi) &= \left(0, \frac{2(\gamma-1)}{(2-\gamma)^2} \psi \xi^{\frac{2\gamma-3}{2-\gamma}}, \frac{2(\gamma-1)}{(2-\gamma)^2} \psi \xi^{\frac{2\gamma-3}{2-\gamma}}\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu türev eşitlikleri göz önünde bulundurularak,

$$(\tilde{\alpha}' \wedge \tilde{\alpha}'')(\xi) = \left(0, \frac{-2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}, \frac{2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}\right)$$

hesaplanır. Bu sonuçlara göre (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned}T_{\wedge}(\xi) &= \frac{(1, 2\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, 2\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}})}{\sqrt{1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}} \\ B_{\wedge}(\xi) &= \frac{\left(0, \frac{-2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}, \frac{2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

ve

$$N_{\wedge}(\xi) = \frac{\left(-2\sqrt{2}\psi \xi^{\frac{1}{2-\gamma}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}}$$

elde edilir. Verilen eğrinin kesirli eğriliği ve burulması,

$$\begin{aligned}\kappa_{\wedge}(\xi) &= \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}) \sqrt{1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}} \\ \tau_{\wedge}(\xi) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\tau_{\wedge}(\xi) = 0$ 'nın geometrik yorumu Frenet çatısının burulmasının sıfır olması ile aynı şekilde yorumlanabilir. Bu durum verilen eğrinin düzlem eğrisi olduğunu

göstermektedir. Bu eğrinin kesirli Darboux vektörü ise

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{\wedge}(\xi) &= V_{\wedge}(\xi) \left(\tau_{\wedge}(\xi) T_{\wedge}(\xi) + \kappa_{\wedge}(\xi) B_{\wedge}(\xi) \right) \\
&= \frac{\sqrt{1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}} \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}) \sqrt{1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}}}} \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{\frac{2}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}})} \left(0, -1, 1 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu eşitliklere bağlı olarak $\wedge$ -Kesirli Darboux büyüklüğü ise

$$\|\mathbb{W}_{\wedge}(\xi)\| = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2-\gamma} \psi \xi^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}}{(1 + 8\psi^2 \xi^{\frac{2}{2-\gamma}})}$$

şeklinde bulunur.

4. BİR EĞRİ BOYUNCA α -FRENET ÇATISI VE FORMÜLLERİ

Bu bölümde, Gözütok vd. (2019) makalesine düzeltme olarak $v = \frac{\|T_\alpha \beta(t)\|}{t^{1-\alpha}}$ hız fonksiyonunun aksine $v_\alpha = \|T_\alpha \beta\|$ fonksiyonu alınarak Frenet formülleri yeniden inşa edilmiştir.

4.1 α -Frenet Çatısı

Tanım 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında keyfi hızda $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için α -Frenet vektör alanları E_1, E_2 ve E_3 olmak üzere,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} \\ E_2 &= E_3 \times E_1 \\ E_3 &= \frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

E_1, E_2 ve E_3 Frenet baz vektörleri olduğundan,

$$T_\alpha E_1 = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{13}E_3 \tag{4.2}$$

$$T_\alpha E_2 = a_{21}E_1 + a_{22}E_2 + a_{23}E_3 \tag{4.3}$$

$$T_\alpha E_3 = a_{31}E_1 + a_{32}E_2 + a_{33}E_3 \tag{4.4}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.2) eşitliğinin her iki tarafı E_1 ile skaler çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \langle T_\alpha E_1, E_1 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{T_\alpha^2 \beta \cdot \|T_\alpha \beta\| - T_\alpha(\|T_\alpha \beta\|) T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|^2}, \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} \right\rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde (4.2) eşitliğinin her iki tarafı E_2 ile skaler çarpılırsa, $\langle T_\alpha E_1, E_2 \rangle = a_{12}$ olur. Bu ifade

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \langle T_\alpha E_1, E_3 \times E_1 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{T_\alpha^2 \beta \cdot \|T_\alpha \beta\| - \|T_\alpha \beta\|' T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|^2}, \left(\frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \right) \times \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta\|}, \left(\frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \right) \times \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\|T_\alpha \beta\|^2 \cdot \|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \langle T_\alpha^2 \beta, (T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta) \times T_\alpha \beta \rangle \\
 &= \frac{1}{\|T_\alpha \beta\|^2 \cdot \|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \langle T_\alpha^2 \beta, -T_\alpha \beta \langle T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta \rangle + T_\alpha^2 \beta \langle T_\alpha \beta, T_\alpha \beta \rangle \rangle \\
 &= \frac{1}{\|T_\alpha \beta\|^2 \cdot \|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \left[\langle T_\alpha \beta, T_\alpha \beta \rangle \langle T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^2 \beta \rangle - \langle T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta \rangle \langle T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta \rangle \right]
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu son eşitlikte Lagrange Özdeşliği kullanılırsa,

$$a_{12} = \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2}{\|T_\alpha \beta\| \|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} = \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^2}$$

olur. (4.2) eşitliğinin her iki tarafını E_3 ile skaler çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= \langle T_\alpha E_1, E_3 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{T_\alpha^2 \beta \cdot \|T_\alpha \beta\| - T_\alpha(\|T_\alpha \beta\|) T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|^2}, \frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} \right\rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) eşitliğinin her iki tarafı E_1 ile skaler çarpılırsa,

$$\langle T_\alpha E_2, E_1 \rangle = a_{21}$$

olur. Biz biliyoruz ki $\langle E_1, E_2 \rangle = 0$ eşitliğinin her iki tarafının α . mertebeden konformal türevi alınır,

$$\langle E_1, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle T_\alpha E_1, E_2 \rangle = - \langle T_\alpha E_2, E_1 \rangle$$

olur. O halde

$$a_{21} = -a_{12} = - \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^2}$$

bulunur. (4.3) eşitliğinin E_2 ile skaler çarpılırsa,

$$\langle T_\alpha E_2, E_2 \rangle = a_{22} = 0$$

dir. Aynı şekilde (4.3) eşitliğinin her iki tarafı E_3 ile skaler çarpımı ise

$$\langle T_\alpha E_2, E_3 \rangle = a_{23}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik,

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \left\langle T_{\alpha}E_2, E_3 \right\rangle \\
&= \left\langle T_{\alpha}E_3 \times E_1 + E_3 \times T_{\alpha}E_1, E_3 \right\rangle \\
&= \left\langle T_{\alpha}E_3 \times E_1, E_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{T_{\alpha}^2\beta \times T_{\alpha}^2\beta + T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^3\beta}{\|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|} \right) \times \frac{T_{\alpha}\beta}{\|T_{\alpha}\beta\|}, \frac{T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta}{\|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|T_{\alpha}\beta\| \cdot \|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|^2} \left\langle \left(T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^3\beta \right) \times T_{\alpha}\beta, T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|T_{\alpha}\beta\| \cdot \|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|^2} \left\langle -T_{\alpha}\beta \langle T_{\alpha}\beta, T_{\alpha}^3\beta \rangle + T_{\alpha}^3\beta \langle T_{\alpha}\beta, T_{\alpha}\beta \rangle, T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta \right\rangle \\
&= \frac{\|T_{\alpha}\beta\|^2}{\|T_{\alpha}\beta\| \cdot \|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|^2} \left\langle T_{\alpha}^3\beta, T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta \right\rangle \\
&= \frac{\|T_{\alpha}\beta\|}{\|T_{\alpha}\beta \times T_{\alpha}^2\beta\|^2} \det(T_{\alpha}\beta, T_{\alpha}^2\beta, T_{\alpha}^3\beta)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.4) eşitliğinin her iki tarafı E_1 ile skaler çarpılırsa,

$$\langle T_{\alpha}E_3, E_1 \rangle = a_{31}$$

olur. Bu eşitlikte

$$\langle E_3, E_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle T_{\alpha}E_1, E_3 \rangle + \langle T_{\alpha}E_3, E_1 \rangle = 0$$

olduğundan $a_{31} = -a_{13} = 0$ 'dir. Aynı şekilde her iki tarafı E_2 ile skaler çarpılırsa,

$$\langle T_{\alpha}E_3, E_2 \rangle = a_{32}, \langle E_3, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle T_{\alpha}E_2, E_3 \rangle + \langle T_{\alpha}E_3, E_2 \rangle = 0$$

olduğundan,

$$a_{32} = -\frac{\|T_\alpha \beta\|}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2} \det(T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^3 \beta)$$

bulunur. (4.4) eşitliğinin her iki tarafı E_3 ile skaler çarpılırsa,

$$\langle T_\alpha E_3, E_3 \rangle = a_{33} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla Frenet matrisi,

$$\begin{bmatrix} T_\alpha E_1 \\ T_\alpha E_2 \\ T_\alpha E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^2} & 0 \\ -\frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^2} & 0 & \frac{\|T_\alpha \beta\| \det(T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^3 \beta)}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2} \\ 0 & -\frac{\|T_\alpha \beta\| \det(T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^3 \beta)}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^3} \\ \tau_\alpha &= \frac{\det(T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^3 \beta)}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2} \\ \nu_\alpha &= \|T_\alpha \beta\| \end{aligned} \quad (4.5)$$

konformal eğrilik, burulma ve hız fonksiyonu tanımlamaları yapılırsa, yukarıdaki matris daha sade şekilde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} T_\alpha E_1 \\ T_\alpha E_2 \\ T_\alpha E_3 \end{bmatrix} = \nu_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Sonuç 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında keyfi hızda $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin α -Frenet çatısı $\{E_1, E_2, E_3\}$ ve bu eğrinin konformal α -eğrilik ve α -burulması $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$ olmak üzere, $v_\alpha = \|T_\alpha \beta\|$ için α -Frenet formülleri,

$$T_\alpha E_1(t) = v_\alpha \kappa_\alpha E_2$$

$$T_\alpha E_2(t) = -v_\alpha \kappa_\alpha E_1 + v_\alpha \tau_\alpha E_3$$

$$T_\alpha E_3(t) = -v_\alpha \tau_\alpha E_2$$

şeklinde elde edilir.

4.2 α -Frenet ve Frenet Arasındaki İlişki

Teorem 4.2.1. α bir eğri olsun α -Frenet çatısı $\{E_1, E_2, E_3\}$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve bu çatıların eğrilikleri sırasıyla $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$ ve κ, τ olmak üzere,

$$E_1 = T, \quad \kappa_\alpha = \kappa$$

$$E_2 = N, \quad \tau_\alpha = \tau$$

$$E_3 = B, \quad v_\alpha = t^{1-\alpha} v$$

şeklinde ifade edilir. Burada v Frenet hız fonksiyonu ve v_α ise α -Frenet hız fonksiyonudur.

İspat . (4.1) ve (4.5) tanımını göz önüne alınırsa,

$$E_1 = \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} = \frac{t^{1-\alpha} \beta'}{\|t^{1-\alpha} \beta'\|} = \frac{t^{1-\alpha} \beta'}{t^{1-\alpha} \|\beta'\|} = T$$

$$E_3 = \frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} = \frac{t^{1-\alpha} \beta' \times ((1-\alpha)t^{1-2\alpha} \beta' + t^{2-2\alpha} \beta'')}{\|t^{1-\alpha} \beta' \times ((1-\alpha)t^{1-2\alpha} \beta' + t^{2-2\alpha} \beta'')\|} = \frac{t^{3-3\alpha} \beta' \times \beta''}{t^{3-3\alpha} \|\beta' \times \beta''\|} = B$$

$$E_2 = E_3 \times E_1 = B \times T = N$$

$$\kappa_\alpha = \frac{\|t^{1-\alpha} \beta' \times ((1-\alpha)t^{1-2\alpha} \beta' + t^{2-2\alpha} \beta'')\|}{\|t^{1-\alpha} \beta'\|^3} = \frac{t^{3-3\alpha} \|\beta' \times \beta''\|}{t^{3-3\alpha} \|\beta'\|^3} = \kappa$$

$$\tau_\alpha = \frac{\langle T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta \wedge T_\alpha^3 \beta \rangle}{\|T_\alpha \beta \wedge T_\alpha^2 \beta\|} = \frac{t^{6-6\alpha} \det(\beta', \beta'', \beta''')}{t^{6-6\alpha} \|\beta' \times \beta''\|} = \tau$$

$$\nu_\alpha = \|T_\alpha \beta\| = \|t^{1-\alpha} \beta'\| = t^{1-\alpha} \|\beta'\| = t^{1-\alpha} \nu$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\beta(t) = (t, t^2, t^3)$ olmak üzere, β eğrisinin α -Frenet vektör alanları, α -eğrilik ve α -burulmasını hesaplayalım. $\beta(t)$ eğrisinin Konformal türevleri,

$$T_\alpha \beta = \left(t^{1-\alpha}, 2t^{2-\alpha}, 3t^{3-\alpha} \right)$$

$$T_\alpha^2 \beta = \left((1-\alpha)t^{1-2\alpha}, 2(2-\alpha)t^{2-2\alpha}, 3(3-\alpha)t^{3-2\alpha} \right)$$

$$T_\alpha^3 \beta = \left((1-\alpha)(2-\alpha)t^{1-3\alpha}, 2(2-\alpha)(2-2\alpha)t^{2-3\alpha}, 3(3-\alpha)(3-2\alpha)t^{3-3\alpha} \right)$$

olmak üzere,

$$T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta = \left(6t^{5-3\alpha}, -6t^{4-3\alpha}, 2t^{3-3\alpha} \right)$$

$$\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\| = 2t^{3-3\alpha} \sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

$$\|T_\alpha \beta\| = t^{1-\alpha} \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

dir. Buradan da tanım (4.1) ve (4.5) kullanılarak

$$E_1 = \frac{T_\alpha \beta}{\|T_\alpha \beta\|} = \frac{(1, 2t, 3t^2)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}$$

$$E_2 = E_3 \times E_1$$

$$E_3 = \frac{T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|} = \frac{(3t^2, -3t, 1)}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}$$

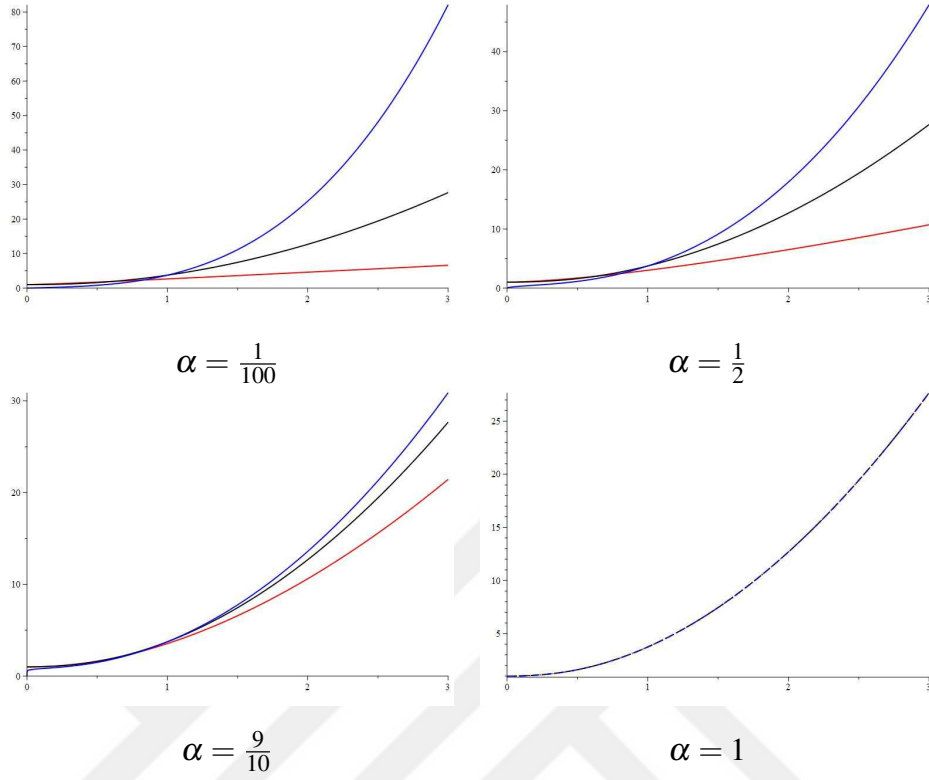
$$\kappa_\alpha = \frac{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|}{\|T_\alpha \beta\|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1})^3}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\det(T_\alpha \beta, T_\alpha^2 \beta, T_\alpha^3 \beta)}{\|T_\alpha \beta \times T_\alpha^2 \beta\|^2} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde açıkça görülüyor ki α -Frenet çatısı ve α -eğrilikleri ile standart Frenet çatısı ve eğrilikleri aynıdır. Yani $T = E_1, N = E_2, B = E_3, \kappa = \kappa_\alpha$ ve $\tau = \tau_\alpha$ 'dir. Son olarak Konformal türev yardımıyla elde edilen çatı da sadece hız vektörü değiştiği için

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$$

eğrisinin $\wedge$ -Frenet hız vektörünün normu, α -Frenet hız vektörünün Normu ve Frenet hız vektörünün normu aşağıdaki grafikte karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2.1. $\wedge$ -Frenet hız vektörünün normu (Kırmızı), Frenet hız vektörünün normu (Siyah), α -Frenet hız vektörünün normu (Mavi).

Açıkcı görülmektedir ki α -Frenet hız vektörünün normu, Frenet hız vektörünün normuna $\wedge$ -Frenet hız vektörünün normundan çok daha hızlı yaklaşmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\wedge$ -kesirli türevi yardımıyla elde edilen $\wedge$ -kesirli Darboux vektörünün normu, belirli bir aralıkta standart Frenet ve Bishop çatısından elde edilen Darboux vektörünün normundan daha iyi sonuçlar verirken, bazı aralıkta Frenet çatısından elde edilen Darboux büyüklüğü daha az eğrilige, Bishop çatısından elde edilen Darboux büyüklüğünden ise daha fazla eğrilige sahip olduğu saptanmıştır. Bununla birlikte standart Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması ile konformal kesirli türev yardımı ile elde edilen Frenet vektör alanlarının eğrilik ve burulması arasında herhangi bir değişiklik olmamıştır. Değişken kısım $V_\alpha = \|T_\alpha \beta\| = t^{1-\alpha} v$ hız fonksiyonu ve buna bağlı olarak Frenet formülleridir.

KAYNAKLAR

- Andrews, G.E., Askey, R., & Roy, R., (1999) . *Special functions, Encyclopedia of mathematics and its Applications*, 71, Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>
- Aydın, M. E., Bektaş, M., Öğreşi, A., & Yokuş, A., (2021) . *Differential Geometry of Curves in Euclidean 3- Space with Fractional Order*, International Electronic Journal of Geometry, 14(1), 132-144.
- Bagley, R. L., & Torvik, P. J., (1983) . *A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity*, Journal of Rheology, 27, 201.
- Bagley, R., & Torvik, P. J., (1986) . *On the fractional calculus model of viscoelastic behavior*, J. Rheol., 30, 133-155.
- Baleanu, D., & Trujillo, J. J., (2010) . *A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations within Caputo fractional derivatives*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15(5), 1111-1115.
- Baleanu, D., (2011) . *Fractional almost Khler-Lagrange Geometry*, Nonlinear Dynamics, 64(4), 365-373.
- Baleanu, D., & Fernandez, A., (2019) . *On fractional operators and their classifications*, Mathematics, 7(9), 830-840.
- Baş, E., & Özarslan, R., (2018) . *Real world applications of fractional models by Atangana-Baleanu fractional derivative*, Chaos Solit. Fractals, 116, 121-125.
- Bishop, R. L., (1975) . *There is more than one way to frame a curve*, The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.
- Bologna, M., (2005) . *Short introduction to fractional calculus*, Lecture Notes, 41-54.
- Cook, M. V., (1997) . *Flight Dynamics Principles*, Arnold, London.
- El-Nabulsi, R. A., (2020a) . *On a new fractional uncertainty relation and its implications in quantum mechanics and molecular physics*, Proc. R. Soc. A, 476:20190729
- El-Nabulsi, R. A., (2020b) . *Fractional Nonlocal Newton's Law of Motion and Emergence of Bagley-Torvik Equation*, Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling, 2, 50-58.
- Farouki, R. T., (2008) . *Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable*, Geometry and Computing.
- Farouki, R. T., Giannelli, C., Sampoli, M. L., & Sestini, A., (2014) . *Rotation-minimizing osculating frames*, Computer Aided Geometric Design, 31(1), 27-42. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2013.11.003>
- Gözütok, U., Çoban, H.A., & Sağiroğlu, Y. (2019) . *Frenet Frame With Respect to Conformable Derivative*. Filomat, 33(6), 1541-1550.
<https://doi.org/10.2298/FIL1906541G>
- Guggenheimer, H., (1989) . *Computing frames along a trajectory*, Computer Aided Geometric Design, 6(1), 77-78.

- Hacısalihoglu, H. H. (2000) . *Diferensiyel Geometri*, Cilt 1-2, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalihoglu, H. H., (2013) . *İki ve üç boyutlu uzaylarda analitik geometri*, Ertem Basım/Ankara.
- Herrmann, R., (2014) . *Towards a Geometric Interpretation of Generalized Fractional Integrals-Erdelyi-Kober Type Integrals on $\mathbb{R}^n$ as an Example*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 17(2), 361-370.
- Hill, D. R., & Kolman, B., (2002) . *Uygulamalı Lineer Cebir*, Çeviri Editörü Akın Ö., Palme Yayıncılık.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef A.,& Sababheh, M., (2014) . *A new definition of fractional derivative*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- Kilbas A. A., Srivastava H. M.,& Trujillo J.J., (2006) . *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Vol. 204), Jan van Mill Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands.
- Klok, F., (1986) . *Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory*, Computer Aided Geometric Design, 3(3), 217-229.
- Lacroix, S. F., (1819) . *Traité du calcul différentiel et du calcul integral*, 2nd ed., Courcier, Paris, pp. 409-410.
- Lazopoulos, K. A., & Lazopoulos, A. K., (2016) . *Fractional Differential Geometry of Curves & Surfaces*, Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2(3), 169-186.
- Lazopoulos, K. A., & Lazopoulos, A. K., (2017) . *Fractional vector calculus and fluid mechanics*, Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 26, 43-54.
- Lazopoulos, K. A., & Lazopoulos, A. K. (2021) . *On fractional geometry of curves*. Fractal and Fractional, 5(4), 161. <https://doi.org/10.3390/fractalfract5040161>
- Lazopoulos, K. A., (2022) . *On Λ -Fractional Differential Equations*, Foundations, 2, 726-745.
- Leibniz, G. W., (1695) . Letter from Hanover, Germany, to G. F. A. L'Hopital, September 30, 1695, in Mathematische Schriften, 1849, reprinted 1962, Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 2, 301-302.
- Miller, K. S., & Ross, B. (1993) . *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*: John Wiley and sons inc. New York, NY.
- O'Neill, B., (2006) . *Elementary Differential Geometry*, Elsevier, Academic Press, New York.
- Oprea, J., (1997) . *Differential geometry and its applications*, MAA. Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Podlubny, I., (1999) . *Fractional Differential Equations*, Academic Pres. San Diego, Boston, 6.
- Sabuncuoglu, A., (2016) . *Diferensiyel Geometri*, Nobel Akademik Yayıncılık, 6.

- Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993) . *Fractional integrals and derivatives* (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.
- Stoker, J. J., (1989) . *Differential Geometry*. John Wiley & Sons.
- Yajima, T., & Nagahama, H., (2018) . *Geometric Structures of Fractional Dynamical Systems in Non-Riemannian Space: Applications to Mechanical and Electromechanical Systems.*, Ann.Phys., Berlin, 530(5)
- Yajima, T., Oiwa, S., & Yamasaki, K., (2018) . *Geometry of Curves with Fractional-Order Tangent Vector and Frenet-Serret Formulas*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 21(6), 1493-1505.
- Yüce, S., (2022) . *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, (7.Baskı), Pegem Yayıncılık, Akademik Baskı.



ÖZGEÇMİŞ

1. KİŞİSEL BİLGİLER			
Adı Soyadı	: Aykut TOPLAMA		
Ünvanı	: Araştırma Görevlisi		
Orcid	: 0000-0002-2797-9234		
Doğum Tarihi	:		
Doğum Yeri	:		
İletişim Bilgileri	Adres:		
	Telefon:		
	Email:		
2. ÖĞRENİM BİLGİLERİ			
Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi	2015-2019
Yüksek Lisans	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	Gazi Üniversitesi	2020-2021
Yüksek Lisans	Geometri	Kilis 7 Aralık Üniversitesi	2021-2023
3. YABANCI DİL BİLGİSİ			
1-) İngilizce			
4. MESLEKİ DENEYİM VE ÜYELİKLER			
1-) Araştırma Görevlisi (2021- ...)			