

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI**

TEZ ADI

ESNEK SİMPLEKSLER YAPILAR

Seda ŞAHİN

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**



MANİSA-2023

TEZ ONAYI

Seda ŞAHİN tarafından hazırlanan “**Esnek Simpleksler Yapılar**” adlı tez çalışması 15 /06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Ali MUTLU
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Seda ŞAHİN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Esnek Küme Teorisi	3
2.2 Simpleks Yapılar.....	7
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	11
3.1. Esnek Simpleksler Yapılar	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	13
5. UYGULAMA	23
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Φ	Boş Esnek Küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\prec$	Esnek Anlamda Önce Gelme
(F, A)	Esnek Küme
$\subseteq$	Esnek Alt Küme
$\tilde{X}$	Mutlak Esnek Kümesi
$\tilde{\cup}$	Esnek Kümelerde Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerde Kesişim
(x_a, A)	Esnek Nokta
(a, r)	Esnek Parametrik Skaler
(X, τ, E)	Esnek Topolojik Uzay
$\tilde{\pi}$	Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$(F, A)^c$	(F, A) nın relatif tümleyeni
$\succ$	Esnek Anlamda Sonra Gelme

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1	Esnek Simpleksler Kompleks	12
Şekil 2	Bazı Esnek Simpleksler Kompleksler ve Üçgenlenebilen Uzak Modellemeleri	12
Şekil 3	Klein Şişe Gövde Kesitinin Oluşum Aşamaları	23
Şekil 4	Klein Şişe Gövde Kesti	24
Şekil 5	Klein Şişesinin Gövdesi.....	24
Şekil 6	Klein Şişesinin Borusunun Oluşum Başlangıcı.....	25
Şekil 7	Oluşan Yay ile Gövde Arası	26
Şekil 8	Gövde ile Boru Arası	27
Şekil 9	Klein Şişesinin 2D görüntüsü	28
Şekil 10	Klein Şişesinin Yüzeyi Budanmadan Önceki Görüntüsü	29
Şekil 11	Yüzeyi Budanmış Klein Şişesi	30
Şekil 12	Yarıçapı 5mm Belirlenen Klein Şişesi	31
Şekil 13	Et Kalınlığı arttırılan Klein Şişesi.....	32
Şekil 14	Radyus Komutu sonucu boru etrafının gövde ile uyumu	33
Şekil 15	Mesh atanmış gövde	34
Şekil 16	Şeklin son görüntüsü	35
Şekil 17	Gövde Üzerinde Oluşturulan Esnek Simpleksler Kompleksler.....	36

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca benden ilgisini ve bilgisini hiç esirgemeyen, her konuda samimiyetle yardımcı olan, lisans zamanlarımdan bu yana bana topolojiyi sevdiren, kişiliği ve çalışma prensipleriyle örnek bir duruş sergileyen, kendisini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum Sayın Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ’a ve lisans eğitimimde olduğu gibi lisansüstü eğitimimde de bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU’ya teşekkürü borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca yoğun çalışmalarım sırasında sabırla bana katlanan, ihtiyaç duyduğum her an yanımda olan ve daima motivasyon sağlayarak beni yüreklendiren kıymetlim Ahmet ATEŞ’e ve tüm destekleri için aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Seda ŞAHİN
Manisa, 2023

Yüksek Lisans Tezi

Esnek Simpleks Yapılar

Seda ŞAHİN

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek noktaların göz önüne alınmasıyla esnek simpleksler ve esnek simpleksler kompleksler tanımlanmıştır. Esnek simpleksler kompleksler için esnek dejenere ve esnek yüz dönüşümlerinin ifade edilmesiyle esnek simplisel homotopi incelenmiştir ve Klein şişesinin esnek noktalarla birlikte çizim aşaması uygulamaya sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Simpleksler, Esnek Simpleksler Kompleksi

2023, 49 Sayfa

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

Seda ŞAHİN

Soft Simplicial Structure
Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis, soft simplices and soft simplicial complexes are defined by considering soft points together with a parameter set. Soft simplicial homotopy by expressing soft degenerate and soft face mappings for soft simplicial complexes has been investigated and the drawing phase of Klein Bottle with soft points put into as an application.

Key Words: Soft Set, Soft Simplex, Soft Simplicial Complexes.

2023, 49 Pages

1. GİRİŞ

Esnek (soft) küme kavramından ilk olarak Rus matematikçi Dmitri Molodtsov [1] 1999 yılında ‘Soft Set Theory-First Result’ adlı çalışmasında bahsetmiştir. Molodtsov’un bu çalışması esnek küme teorisi alanında çalışanlar için temel özellikleri barındıran bir çalışma olmasından dolayı önem taşımaktadır. Esnek küme teorisi belirsizliklerle ve açık olarak tanımlanmamış nesnelerle ilgili olan yeni bir genel matematiksel araç olarak literatürde yerini almıştır. Esnek küme kavramının tanımlanmasından bu yana bilgisayar bilimleri, mühendislik bilimleri, fen ve ekonomi gibi pek çok alanlarda teoremin uygulamaları sunulmuştur.

Esnek küme teorisinin cebirsel ve topolojik özellikleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Maji, Biswas ve Roy [2], [3] esnek kümeler üzerinde cebirsel işlemler üzerinde çalışmışlardır. Esnek topolojik uzaylar ilk olarak 2011 yılında Shabir ve Naz [4] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca esnek topolojik uzayların bazı özellikleri Aygünoğlu ve Aygün [5], Çağman, Karataş, Enginoğlu [6], Georgiou, Megaritis, Petropoulos [7] ve Zorlutuna, Akdağ, Min [8] tarafından incelenmiştir. Ayrıca Esnek Hausdorff uzayların özellikleri Varol ve Aygün [9] tarafından ‘On Soft Hausdorff Spaces’ başlıklı çalışmada incelenmiştir. Esnek kümelerin, esnek dönüşümlerin ve esnek sürekli dönüşümlerin özellikleri ise Aras, Poşul [10], Aras, Sönmez Çakallı [11], Zorlutuna, Çakır [12] ve Majumdar, Samanta [13] tarafından çalışılmıştır.

Diğer taraftan simplisel yapı olarak simplisel küme, simplisel grup, simplisel cebir, modül, kros modül, 2-kros modül, vs gibi kavramlar matematikte topolojik ve cebirsel açıdan oldukça önemli yere sahip bir çalışma alanıdır. Literatürde yer alan çalışmalar araştırmacılara ışık tutmaktadır [14-17].

Simplisel kümeler 1950 yılında Samuel Eilenberg ve Joseph A. Zilber [14] tarafından ortaya atılmıştır. Her simplisel küme “geometrik realizasyon” olarak bilinen bir topolojik uzayı verir. Literatürde simplisel kümelerin kategorik tanımıyla ve geometrik simplekslere dejenere ve yüz dönüşümlerinin uygulanmasıyla ifade edilmiş çeşitli tanımlamalarıyla karşılaşılmaktadır. Bununla birlikte simplisel yapılardan simplisel kümelerle ilgili çalışmalar çeşitli matematikçiler tarafından literatürde kazandırılmış olup, bu çalışmalar günümüzde dijital görüntüler gibi farklı uzaylarda da yürütülerek bu alanda gelişme sağlanmıştır [18-22].

Birden fazla simpleksin belli koşullar altında bir araya gelmesiyle oluşan simpleksler komplekslerdir. Simpleksler komplekslerden 1967 yılında J. Peter May “Simplicial objects in Algebraic Topology” [23] adlı kitabında bahsetmiştir. May’ın bu kitabı simplisel yapılarla ilgili temelleri içermesi açısından önem taşımaktadır. Ayrıca Massey’ in ‘Algebraic Topology: An Introduction’ [24] adlı kitabı ve Munkres’in ‘Topology A First Course’ [25] adlı kitabı simplisel yapıların topolojik ve cebirsel özelliklerinin incelenmesinde araştırmacılara ışık tutacak temel kaynaklar arasındadır.

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek kümeler göz önüne alınarak esnek simplekslerden esnek simplisel küme, esnek simpleksler kompleksler incelenmiş, dejenere ve yüz dönüşümlerinden faydalanarak esnek simplisel homotopi ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Esnek simplisel yapıların incelenmesinde [22], [26] çalışmalarından yararlanılmıştır. Ayrıca esnek noktalar kullanılarak Klein şişesinin çizim aşamaları uygulama olarak sunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde esnek küme teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Esnek Küme Teorisi

Bu alt bölümde esnek kümeler ve esnek topolojilerle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilir.

$\mathcal{X}$ nesnelerin evrensel kümesi ve E , $\mathcal{X}$ 'deki nesnelerle ilgili parametrelerin kümesi olsun. $P(\mathcal{X})$, $\mathcal{X}$ 'in kuvvet kümesini göstere ve $A, B \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. [1] $\mathcal{X}$ evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(\mathcal{X})$, $\mathcal{X}$ 'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olmak üzere;

$$F : A \rightarrow P(\mathcal{X})$$

ise (F, A) çifti $\mathcal{X}$ üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Herhangi bir (F, A) esnek kümesi, her $e \in A$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e \in E \setminus A$ için $F(e) = \emptyset$ olmak üzere (F, E) şeklinde bir esnek kümeye genişletilebilir.

Tanım 2.1.2. [2] (F, A) ve (G, B) , $\mathcal{X}$ üzerinde iki esnek küme olsun.

- i) $A \subseteq B$, ve
- ii) Her $a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$ ise

(F, A) 'ya (G, B) 'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \subseteq (G, B)$ ile gösterilir. (F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesi ise (G, B) 'ye (F, A) 'nın esnek üst kümesi denir ve $(G, B) \supseteq (F, A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [2] $\mathcal{X}$ üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin kesişimi (H, C) esnek kümesidir. $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ olmak üzere $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir. Bu kesişim $(F, A) \cap (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [2] $\mathcal{X}$ üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir. $C = A \cup B$ ve $\forall \varepsilon \in C$ için,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı $(F, A) \dot{\cup} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [2] (F, A) , $\mathcal{X}$ üzerinde bir esnek küme olsun. (F, A) 'nın relatif tümleyeni $(F, A)^c$ olarak gösterilir ve $F^c : A \rightarrow P(\mathcal{X})$, her $a \in A$ için $F^c(a) = \mathcal{X} - F(a)$ ile verilen bir dönüşüm olmak üzere $(F, A)^c = (F^c, A)$ ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.6. [2] (F, A) ve (G, B) , $\mathcal{X}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde $(F, A) - (G, B) = \{(x, F(x)) : F(x) \notin G(B), x \notin B\}$ esnek kümesidir.

Tanım 2.1.7. [2] $\mathcal{X}$ üzerindeki bir (F, A) esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. [2] $\mathcal{X}$ üzerindeki $\tilde{\mathcal{X}}$ mutlak esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = \mathcal{X}$ olacak şekilde tanımlı bir (F, X) esnek kümesidir.

Tanım 2.1.9. [11] (F, A) $\mathcal{X}$ üzerinde bir esnek küme olsun. (F, A) esnek kümesi, bir $a \in A$ için, $F(a) = \{x\}$ ve tüm $a' \in A - \{a\}$ için $F(a') = \emptyset$ ise bir esnek nokta olarak adlandırılır, (x_a, A) ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. [27] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. (a, r) sıralı ikilisi, $r \in R$ ve $a \in A$ ise esnek parametrik skaler olarak adlandırılır. (a, r) parametrik skaleri $r \geq 0$ ise negatif olmayan olarak adlandırılır. (a, r) ve (b, r') iki esnek parametrik skaler olsun. $r \geq r'$ ise (a, r) 'nin (b, r') az olmadığı söylenir ve $(a, r) \succsim (b, r')$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.11. [27] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. (a, r) ve (b, r') iki esnek parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek parametrik skalerler arasındaki

toplama ve esnek parametrik skalerler üzerindeki skalerle çarpma aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a, r) + (b, r') = (\{a, b\}, r + r'), \text{ ve } \forall \lambda \in R \text{ için } \lambda(a, r) = (a, \lambda r).$$

Tanım 2.1.12. [4] $\tilde{\tau}$, $\mathcal{A}$ üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu ve E parametre kümesi olsun. Bu takdirde $\tilde{\tau}$ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi, \mathcal{A} = (F, \mathcal{A}) \in \tilde{\tau}$,

ii) $\tilde{\tau}$ daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

iii) $\tilde{\tau}$ daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine $\tilde{\tau}$ ya aittir.

$(\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.13. [4] $(\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E)$ $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde τ nun elemanlarına $\mathcal{A}$ de esnek (soft) açık kümeler denir

Tanım 2.1.14. [4] $(\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E)$ $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. (F, A) $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek küme, $(F, A)^c$ esnek tümleyen kümesi τ ya ait ise $\mathcal{A}$ üzerindeki (F, A) esnek kümesi esnek kapalı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.15. [28] $(\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E)$ $\mathcal{A}$ üzerinde esnek topolojik uzay, (F, E) , $\mathcal{A}$ üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde $x \in (G, E) \subseteq (F, E)$ olacak şekilde (G, E) esnek kümesi varsa (F, E) esnek kümesine $x \in \mathcal{A}$ noktasının esnek komşuluğu denir.

Tanım 2.1.16. [11] $(\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E)$ ve $(\mathcal{Y}, \tilde{\tau}', E)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $f : (\mathcal{A}, \tilde{\tau}, E) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{\tau}', E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e), E)$ nin her bir (H, E) esnek komşuluğu için $f((F, E)) \subset (H, E)$ olacak şekilde (x_e, E) nin bir (F, E) esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde f dönüşümüne (x_e, E) de esnek sürekli dönüşüm denir.

Lemma 2.1.17. [11] $(\mathcal{X}, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzay olsun. $1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

İspat: $\mathcal{X} = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\emptyset, \tilde{\mathcal{X}}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ve $\tilde{\tau}' = \{\emptyset, \tilde{\mathcal{X}}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$, $\mathcal{X}$ üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)$, $\mathcal{X}$ üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere,

$$F_1(e_1) = \{h_2\}, F_1(e_2) = \{h_1\}, F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, F_2(e_2) = \{h_1\}, F_3(e_1) = \{h_3\},$$

$$F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_4(e_1) = \emptyset, F_4(e_2) = \{h_1\};$$

ve

$$G_1(e_1) = \{h_2\}, G_1(e_2) = \{h_1\}, G_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, G_2(e_2) = \{h_1, h_2\}, G_3(e_1) = \{h_1, h_2\},$$

$$G_3(e_2) = \mathcal{X}, G_4(e_1) = \{h_2\}, G_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

olarak tanımlansın.

$$f^{-1}((G_3, E)) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \mathcal{X})\} \notin (\mathcal{X}, \tilde{\tau}, E) \text{ ve}$$

$$f^{-1}((G_4, E)) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_2\})\} \notin (\mathcal{X}, \tilde{\tau}, E) \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümü esnek sürekli değildir.

Tanım 2.2.18. [4, 9] $(\mathcal{X}, \tilde{\tau})$ bir esnek (soft) topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{X}$ olsun. $x \in F_A$, $y \in G_B$ ve $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$ olacak şekilde F_A ve G_B esnek açık kümeleri mevcutsa $(\mathcal{X}, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı esnek (soft) Hausdorff uzayı veya esnek (soft) T_2 uzayı olarak adlandırılır.

2.2. Simpleksler Yapılar

Bu alt bölümde afin küme, simpleksler ve simpleksler komplekslerle ilgili temel kavramlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1. [23, 25] A bir küme olmak üzere $\forall x, y \in A, t \in [0, 1]$ için $(1-t)x + ty \in A$ oluyorsa A ya konveks küme denir.

Tanım 2.2.2. [23, 25] A Euclid uzayının bir alt kümesi olsun. Her farklı $x, y \in A$ elemanları için x ve y tarafından oluşturulan doğru A 'da bulunuyorsa A 'ya affine alt küme denir.

Tanım 2.2.3. [23, 25] $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ de noktalar olsun. $a_0, a_1, \dots, a_m$, noktalarının afin kombinasyonu

$$x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_m a_m; \sum_{i=0}^m t_i = 1 \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

$a_0, a_1, \dots, a_m$ noktalarının konveks kombinasyonu afin kombinasyondur öyleki $t_i \geq 0, i = 0, \dots, m$ dir. Yani

$$x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_m a_m; \sum_{i=0}^m t_i = 1 \text{ ve } t_i \geq 0 \text{ } i = 0, \dots, m$$

Tanım 2.2.4. [23, 25] $\mathbb{R}^n$ de $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ noktalarının sıralı kümesini ele alalım.

$\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının lineer bağımsız alt uzayı ise

$\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ sıralı kümesine afin bağımsızdır denir.

Tanım 2.2.5. [23, 25] $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}, \mathbb{R}^n$ de afin bağımsız alt küme olsun. Bu alt küme tarafından gerilen konveks kümeye m -simpleks denir. $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ ile gösterilir. (a_i ler köşeler olarak adlandırılır.)

Tanım 2.2.6. [23, 25] Sonlu simpleksler kompleksi K aşağıdaki özelliklerini sağlayan sonlu simpleksler koleksiyonudur.

i. $p \in K$ ise p nin yüzü de K ya aittir.

ii. $p, r \in K$ ise bu iki simpleksin ara kesiti ya boştur ya da bu iki simpleksin ortak yüzüdür.

Tanım 2.2.7. [23, 25] Bir simpleksler kompleksi K boş küme ise K nın boyutu -1 dir. Bir simpleksler kompleksi K da m – simpleks var olacak şekilde m en büyük tam sayı ise K nın boyutu m dir.

Tanım 2.2.8. [23, 25] Simpleksler kompleksi K ya ait köşeler kümesi üzerinde bir sıralama var ise K ya yönlü simpleksler kompleksi denir.

Tanım 2.2.9. [23, 25] K bir simpleksler kompleksinin geometrik realizasyonu $|K|$ tüm simplekslerin birleşimi olarak tanımlanır. Yani

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s$$

Tanım 2.2.10. [23, 25] K ve L simpleksler kompleksi olmak üzere, $F: K \rightarrow L$ simplisel dönüşümü, K nın $\{v_i\}$ noktalarının teşkil ettiği köşelerini $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$ K nın k – simpleksi ise, bu takdirde $\{f(v_{i_0}), \dots, f(v_{i_k})\}$ L de ki k_1 – simpleks in (birim olması gerekmeyen) bütün köşeleri olacak şekilde L nin $\{f(v_i)\}$ noktalarının teşkil ettiği köşelerine götürerek belirlenir.

Böyle bir $F: K^0 \rightarrow L^0$ fonksiyonunun verildiği düşünülürse, $F: K \rightarrow L$ her bir k – simpleksi üzerindeki lineer interpolasyonla belirlenir. ($x \in K, v_{i_j}$ ile gerilen

k – simpleks in barisentrık koordinatlarında $t_j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \sum_{j=1}^m t_j v_{i_j}$ ile

belirlenebiliyorsa, bu takdirde $f(x) = \sum_{j=1}^m t_j f(v_{i_j})$). Böylece elde edilen $F: K \rightarrow L$

fonksiyonu süreklidir.

Tanım 2.2.11. [23] Bir n – simpleksi verilsin, bu n – simpleksin $(n-1)$ – boyutlu yüzleri elde edilmek istenirse, bu ancak yüz dönüşümleri ile bulunur. Bu durumda standart n – simpleksi üzerinde $\wedge$ göz ardı edilen terimi göstermek üzere $d_j[0, \dots, n] = [0, \dots, \hat{j}, \dots, n]$ olacak şekilde tanımlı $n+1$ tane $d_0, \dots, d_n$ yüz dönüşümü vardır. O halde d_j nin $[0, \dots, n]$ e uygulanmasıyla j köşesi kaybedilerek $(n-1)$ – yüz bulunmuş olur. Her bir d_j nin n – simpleksi onun yüzlerinden birine götürdüğüne dikkat etmek önemlidir; nokta küme topolojisi veya simplisel dönüşüm anlamında altı çizilen bir şey yoktur.

Tanım 2.2.12. [23] Dejenere dönüşümler bir anlamda yüz dönüşümlerinin kavramsal olarak tersi şeklindedir. d_j yüz dönüşümü n – simpleksin $(n-1)$ – boyutlu yüzlerini elde etmemizi sağlar. s_j dejenere dönüşümü ise n – simpleksten $n+1$ – simpleks elde etmemizi sağlar. Herhangi bir n – simpleks verilsin.

$s_j[v_0, v_1, \dots, v_n] = [v_0, v_1, \dots, v_j, v_j, \dots, v_n]$ ile tanımlı $n+1-$ tane $s_0, s_1, \dots, s_n$ dejenere dönüşüm vardır. Diğer bir ifadeyle s_j noktasını temsil eden j . köşenin tekrarlanmasıyla n - simpleksten $n+1-$ simpleksi verir.

Dejenere dönüşümler, $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ simplisel bağıntısını sağlar. Gerçekten,

$$s_i s_j[v_0, v_1, \dots, v_n] = [v_0, v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_j, v_j, \dots, v_n] = s_{j+1} s_i[(v_0), (v_1), \dots, (v_n)] \quad .$$

Bununla birlikte yüz ve dejenere operatörler arasında bazı bağıntılar vardır.

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad i < j$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad i > j+1$$

Tanım 2.2.13. [23] $A, X_0, X_1, \dots$ dizilerinden oluşan bir simpleks küme, her bir i ve $n \geq 0$, ve $0 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i, \quad i < j$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i, \quad i < j$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1}, \quad i > j+1$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i \leq j$$

olacak şekilde her bir i için $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ve $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ fonksiyonlarından oluşur.

Tanım 2.2.14. [23] Her bir $0 \leq i \leq p$ için

$$d_0 h_0 = f$$

$$d_{p+1} h_p = g \quad (1)$$

$$d_i h_j = h_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$$

$$d_i h_j = h_j d_{i-1} \quad i > j+1 \quad (2)$$

$$s_i h_j = h_{j+1} s_i \quad i \leq j$$

$$s_i h_j = h_j s_{i-1} \quad i > j+1 \quad (3)$$

olacak şekilde $h_i = h_i^p : K_p \rightarrow L_{p+1}$ fonksiyonları mevcutsa $f, g : K \rightarrow L$ simplisel dönüşümleri homotopiktir.



3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1 Esnek Simpleks Yapılar

Bu bölümde esnek (soft) simpleksler yapıların oluşturulması verilmiştir.

Tanım 3.1.1. E bir parametre kümesi ve U evrensel küme, $A \subset E$ ve $F : A \rightarrow P(U)$ olmak üzere, $(F, A) = \{(x, F(x)) \mid x \in A, F(x) \in P(U)\}$ bir esnek küme olsun. $P \subset \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $(F, P) = \{(p_0, F(p_0)), (p_1, F(p_1)), \dots, (p_m, F(p_m))\} \subseteq (\mathbb{Z}^n, F(\mathbb{Z}^n))$ aşağıdaki özelliği sağlıyorsa, yani

$(p_0, F(p_0)), (p_1, F(p_1)), \dots, (p_m, F(p_m))$ farklı esnek noktalar $a_i \in A$ ve $t_i \in \mathbb{Z}$ için, (a_i, t_i) parametrik skalerler olmak üzere

$$\sum_{t=1}^n (a_i, t_i)(p_i, F(p_i)) = (a_i, 0), \sum_{t=1}^n (a_i, t_i) = (a_i, 0)$$

iken

$$(a_0, t_0) = (a_1, t_1) = \dots = (a_m, t_m) = (a_i, 0)$$

oluyorsa (F, P) ye esnek simpleks denir.

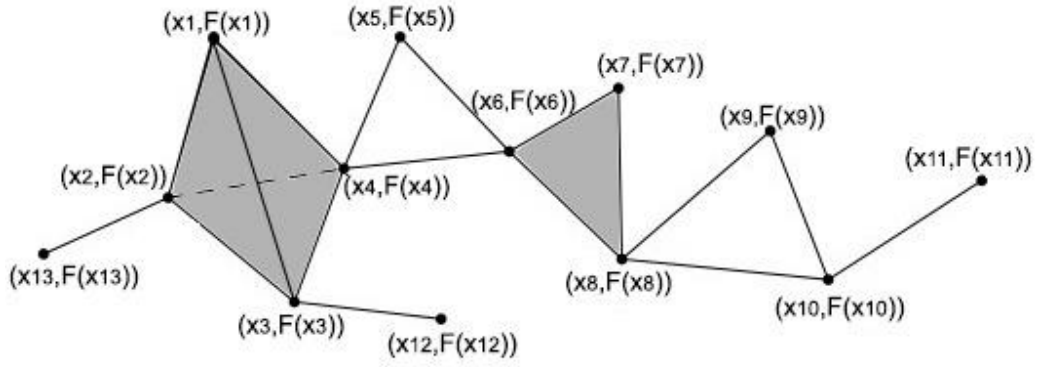
$$(F, P) = \langle (p_0, F(p_0)), (p_1, F(p_1)), \dots, (p_m, F(p_m)) \rangle$$

ile gösterilir, burada m , esnek simpleksin boyutu olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2. E bir parametre kümesi ve X evrensel küme, $A \subset E$ ve $F : A \rightarrow P(X)$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $(F, P) = \{(p_0, F(p_0)), (p_1, F(p_1)), \dots, (p_m, F(p_m))\} \subseteq (\mathbb{Z}^n, F(\mathbb{Z}^n))$ esnek m -simpleksinin sonlu koleksiyonu olan (F, K) ya esnek simpleksler kompleks denir.

- i) $(F, S) \in (F, K)$ ise (F, S) nin yüzü de bu esnek simpleksler kompleksine aittir.
- ii) (F, S) ve $(G, T) \in (F, K)$ iken $S \cap T = M$ ve $\forall m \in M$ için $H(m) = F(m) \cap G(m)$ olmak üzere (H, M) esnek boş kümedir ya da (F, S) ve (G, T) nin ortak bir esnek simpleksi vardır.

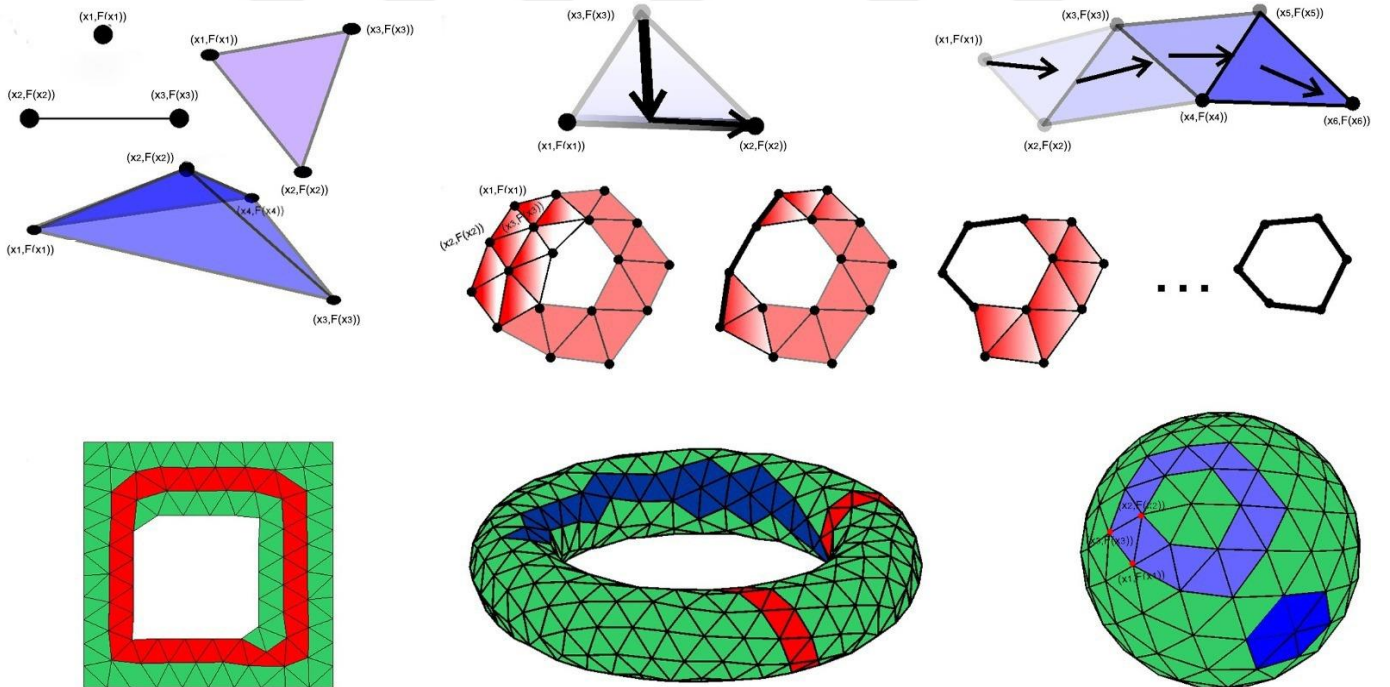
Bir (F, K) esnek simpleksin boyutu, içerdiği en büyük boyutlu esnek simpleksin boyutuna eşittir.



$$\dim(F, K) = 3$$

Şekil 1 Esnek Simpleksler Kompleksler

Aşağıda bazı Esnek Simpleksler Kompleks örnekleri ve üçgenlenebilen uzay modellemeleri verilmiştir.



Şekil 2 Bazı Esnek Simpleksler Kompleksler ve Üçgenlenebilen Uzay Modellemeleri

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde birim dönüşümün esnek sürekli olmamasından dolayı simplisel dönüşümlerde tanım ve görüntü kümelerinde ayın esnek topolojinin mevcut olduğu varsayılmıştır.

Tanım 4.1.1. $(x, F(x))$, $|(F, K)|$ çok yüzlüsünün bir noktası ise, bu takdirde açık olarak $(x, F(x))$, köşeleri $(\alpha_0, F(\alpha_0)), \dots, (\alpha_n, F(\alpha_n))$ olan (F, K) nin bir esnek simpleksinin içindedir. Bu takdirde her bir i için $a_i, t_i \succ (a_i, 0)$ ve $\sum (a_i, t_i) = (a_i, 1)$ olmak üzere

$$(x, F(x)) = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i)(\alpha_i, F(\alpha_i)) .$$

Eğer $(v, F(v))$ (F, K) nin keyfi bir köşesi ise, $(x, F(x))$ in $(v, F(v))$ ye göre $t(v, F(v))$, $(x, F(x))$ barisentrik koordinatını (ağırlık merkezi) eğer $(v, F(v))$ nin bir köşesi ise $t_{(v, F(v))}(x, F(x)) = (a_i, 0)$ olarak tanımlanan, ve $(v, F(v)) = (\alpha_i, F(\alpha_i))$ ise $t_{(v, F(v))}(x, F(x)) = (a_i, t_i)$ dir.

Lemma 4.1.2. $|(F, K)|$ esnek Hausdorff uzayıdır.

İspat 4.1.3. $|(F, K)|$ da $(x_0, F(x_0)) \neq (x_1, F(x_1))$ olmak üzere iki esnek noktayı göz önüne alalım. Bu takdirde $t_v((x_0, F(x_0))) \neq t_v((x_1, F(x_1)))$ olacak şekilde bir v köşesi vardır. Bu iki esnek nokta arasında kalacak şekilde $a \in K$, $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, r) parametrik skalerini seçelim.

Bu takdirde,

$\{(x, F(x)) | t_v((x, F(x))) \prec (a, r)\}$ ve $\{(x, F(x)) | t_v((x, F(x))) \succ (a, r)\}$ kümeleri sırasıyla $(x_0, F(x_0))$ ve $(x_1, F(x_1))$ i içeren esnek açık kümelerdir. Üstelik bu iki esnek açık küme ayrıktır. Böylece (F, K) esnek çok yüzlüsünün geometrik relizasyonu olan $|(F, K)|$ bir esnek Hausdorff uzayıdır.

Tanım 4.1.4. K ve L parametre kümeleri $F : K \rightarrow P(K)$ ve $G : L \rightarrow P(L)$ olmak üzere (F, K) ve (G, L) geometrik esnek simpleksler kompleksi ise,

$f : (F, K) \rightarrow (G, L)$ esnek simpleksler dönüşümü (F, K) nin $\{(v_i, F(v_i))\}$ esnek noktalarının teşkil ettiği köşelerini $[(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, (v_{i_m}, F(v_{i_m}))]$ (F, K) nin esnek m -simpleksi ise, bu takdirde $f((v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, (v_{i_m}, F(v_{i_m})))$ (G, L) de ki esnek m -simpleksin bütün köşeleri olacak şekilde (G, L) nin $\{f(v_i, F(v_i))\}$ esnek noktalarının teşkil ettiği köşelerine götürerek belirlenir.

Önerme 4.1.5. $f : K \rightarrow P(K)$ $G : L \rightarrow P(L)$ olmak üzere (F, K) ve (G, L) esnek simpleksler kompleksler, $f : (F, K) \rightarrow (G, L)$ esnek simpleksler dönüşümü, (F, K) nin $(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, (v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ şeklindeki esnek noktalarının köşelerini (G, L) de ki, $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ esnek m -simpleksinin bütün köşelerine götürsün.

Bu takdirde f dönüşümü $x = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i)(v_i F(v_i))$ ise

$g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i) f(v_i, F(v_i))$ olacak şekilde $g : |(F, K)| \rightarrow |(G, L)|$ esnek sürekli dönüşümüne genişletilebilir.

İspat 4.1.6. (G, L) nin $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ köşelerinin farklı olmamasına rağmen (G, L) nin bir τ simpleksi gerdiğini hipotezden not edelim.

$g(x)$ ifadesinde terimleri topladığımızda kat sayıları non-negatif ve toplamı $(a_i, 1)$ olacaktır. Dolayısıyla $g(x)$, τ nun $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ tarafından gerilen n -simpleksi olan σ simpleksini sürekli olarak $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ köşesine götürür. g dönüşümü σ dan τ içine esnek sürekli bir dönüşümdür. Bu takdirde $g : |(F, K)| \rightarrow |(G, L)|$ dönüşümü olan esnek sürekli bir dönüşümdür.

Lemma 4.1.7. Esnek simpleksler dönüşümlerin bileşkeleri de esnek simpleksler dönüşümdür.

İspat 4.1.8 $g:|(F,K)| \rightarrow |(G,L)|$ ve $h:|(G,L)| \rightarrow |(H,M)|$ esnek simpleksler dönüşüm olsun. Tanımdan, $x = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i)(v_i, F(v_i)) : (F,K)$ nın esnek köşeleri,

$$g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i) f(v_i, F(v_i)).$$

Şimdi aynı formül (F,K) nın bir esnek simpleksinin köşelerinin kümesi $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$ olduğu sürece $f(v_{i_0}, F(v_{i_0})), \dots, f(v_{i_n}, F(v_{i_n}))$

ler farklı olmasa bile geçerlidir. $\forall i$ için $x = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i)(v_i, F(v_i))$ ve $(a_i, t_i) > 0$ için

$\sum (a_i, t_i) = 1$; $(v_0, F(v_0)) = (v_1, F(v_1))$ olduğunu ve $(v_1, F(v_1)) = (v_n, F(v_n))$ köşelerinin farklı olduğunu kabul edelim.

$$x = (\{a_0, a_1\}, t_0 + t_1)(v_0, F(v_0)) + (a_2, t_2)(v_2, F(v_2)) + \dots + (a_n, t_n)(v_n, F(v_n));$$

tanımından

$$\begin{aligned} g(x) &= ((a_0, t_0) + (a_1, t_1))g(v_0, F(v_0)) + (a_2, t_2)g(v_2, F(v_2)) + \dots + (a_n, t_n)g(v_n, F(v_n)) \\ &= (\{a_0, a_1\}, t_0 + t_1)g(v_0, F(v_0)) + (a_2, t_2)g(v_2, F(v_2)) + \dots + (a_n, t_n)g(v_n, F(v_n)) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i, t_i)g(v_i, F(v_i)). \end{aligned}$$

Buradan her iki tarafa h uygulayarak

$$h(g(x)) = h(\sum (a_i, t_i)g(v_i, F(v_i))) = (\sum (a_i, t_i)h(g(v_i, F(v_i))))$$

elde edilir. Böylece $h \circ g$ dönüşümünün bir esnek simpleksler dönüşüm olduğu sonucuna varılır.

Lemma 4.1.9. " (F,K) nın $(v_0, F(v_0)), \dots, (v_n, F(v_n))$ köşeleri (F,K) nın bir esnek simpleksini gerer ancak ve ancak $f(v_0, F(v_0)), \dots, f(v_n, F(v_n))$ (G,L) nin bir esnek simpleksini gerer." ifadesi sağlanacak şekilde $f: (F,K) \rightarrow (G,L)$ biyektif bir esnek dönüşüm olsun. Bu taktirde $g:|(F,K)| \rightarrow |(G,L)|$ doğrulan esnek simpleksler dönüşümü bir esnek homeomorfizm veya esnek izomorfizmdir.

İspat 4.1.10. (F, K) nın her bir σ esnek simpleksi, σ ile aynı boyutta (G, L) nin τ esnek simpleksine dönüştürülür. f^{-1} köşe eşlemesiyle doğrulan $h: \tau \rightarrow \sigma$ lineer dönüşümün $g: \sigma \rightarrow \tau$ dönüşümünün tersi olduğunu göstermek yeterlidir.

$$x = \sum (a_i, t_i)(v_i, F(v_i)) \text{ ise bu takdirde } g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i, t_i) f(v_i, F(v_i)) .$$

Tanımdan,

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= h(\sum (a_i, t_i) f(v_i, F(v_i))) \\ &= \sum (a_i, t_i) f^{-1}(f(v_i, F(v_i))) \\ &= \sum (a_i, t_i)(v_i, F(v_i)) = x \end{aligned}$$

Tanım 4.1.11. Esnek $n - \text{simpleks}$ verildiğinde bu esnek $n - \text{simpleks}$ $(n-1)$ boyutlu yüzlerini elde etmek esnek yüz dönüşümleri ile sağlanır. Bu durumda $\wedge$ gözardı edilen terimi göstermek üzere,

$$d_j [(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n))] = [((v_0, F(v_0)), \dots, (v_j, F(v_j)), \dots, ((v_n, F(v_n)))]$$

olacak şekilde tanımlı $n + 1$ tane $d_0, d_1, \dots, d_n$ esnek yüz dönüşümü vardır.

Yani $[(v_0, F(v_0)), \dots, (v_n, F(v_n))]$ esnek simpleksine d_j nin uygulanmasıyla $(v_j, F(v_j))$ esnek noktasının teşkil ettiği köşe silinerek $(n - 1) - \text{yüz}$ bulunmuş olur.

Esnek yüz dönüşümlerinin sağladığı bazı bağlantılar vardır. $i < j$ olmak üzere

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i .$$

Gerçekten,

$$d_i d_j [(v_0, F(v_0)), \dots, (v_n, F(v_n))] = [(v_0, F(v_0)), \dots, (v_i, F(v_i)), \dots, (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

$$[(v_0, F(v_0)), \dots, (v_n, F(v_n))] = d_{j-1} d_i [(v_0, F(v_0)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

Tanım 4.12. Esnek dejenere dönüşümler kavramsal olarak esnek yüz dönüşümlerinin tersi şeklindedir. $d_j - \text{esnek yüz dönüşümü}$ esnek $n - \text{simpleksin}$ $(n-1) - \text{boyutlu}$ yüzlerini elde etmemizi sağlar. s_j esnek dejenere dönüşümü ise esnek $n -$

simpleksten esnek $n+1$ –simpleks elde etmemizi sağlar. Herhangi bir esnek n –simpleks verilsin.

$$s_j [(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

$$=[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_j, F(v_j)), (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

ile tanımlı $(n+1)$ tane $s_0, s_1, \dots, s_n$ esnek dejenere dönüşüm vardır. Diğer bir ifadeyle s_j esnek noktayı temsil eden j . köşenin tekrarlanmasıyla esnek n –simpleksten esnek $n+1$ –simpleksi verir. Esnek dejenere dönüşümler,

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i$$

simpleksler bağıntısını sağlar.

Gerçekten,

$$s_i s_j [(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

$$=[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_i, F(v_i)), (v_i, F(v_i)), \dots, (v_j, F(v_j)), (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

$$= s_{j+1} s_i [(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n))]$$

Bununla birlikte esnek yüz ve esnek dejenere operatörler arasında bazı bağıntılar vardır.

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i, \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1}, \quad i > j+1 \text{ ise}$$

$$d_i s_j \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_i, F(v_i)), \dots, (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right]$$

$$= s_{j-1} d_i \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right]$$

$$d_i s_j \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_i, F(v_i)), \dots, (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right]$$

$$= d_{j+1} s_j \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right]$$

$$\begin{aligned}
& d_i s_j \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_i, F(v_i)), \dots, (v_j, F(v_j)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right] \\
& = s_j d_{i-1} \left[(v_0, F(v_0)), (v_1, F(v_1)), \dots, (v_n, F(v_n)) \right]
\end{aligned}$$

Tanım 4.1.13. E bir parametre kümesi $X_0, X_1, \dots$ kümeler ve $A_0, A_1, \dots \subset E$

$$F_0 : A_0 \rightarrow P(X_0)$$

$$F_1 : A_1 \rightarrow P(X_1)$$

·
·
·

olsun.

Esnek simplisel küme, her bir i ve $n \geq 0$ için $0 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id \quad i = d \text{ veya } i = j + 1$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad i > j + 1 \text{ ise}$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1}, \quad i > j$$

olacak şekilde her bir i için

$d_i : (F_n, A_n) \rightarrow (F_{n-1}, A_{n-1})$ ve $s_i : (F_n, A_n) \rightarrow (F_{n+1}, A_{n+1})$ esnek dönüşümlerinden oluşur.

Tanım 4.1.14. (F_i, A) ve (G_i, B) sırasıyla K ve L üzerinde iki esnek küme olsun.

f ve g , bir K esnek simpleksler kompleksinden bir L esnek simpleksler kompleksine esnek simpleksler dönüşüm olmak üzere, eğer $h_i : K_q \rightarrow L_{q+1} \quad 0 \leq i \leq q$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa f dönüşümü g dönüşümüne esnek simpleksler homotopiktir:

$$d_0 h_0 = f((F_i, A))$$

$$d_{p+1} h_p = g((F_i, A))$$

$$d_i h_j = h_{j-1} d_i, i < j$$

$$d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$$

$$d_i h_j = h_j d_{i-1}, i < j+1$$

$$s_i h_j = h_{j+1} s_i, i \leq j$$

$$s_i h_j = h_j s_{i-1}, i > j+1$$

Bu takdirde h , f den g ye esnek simpleksler homotopidir.

Lemma 4.1.15. f ve $f': K \rightarrow L$ ve g ve $g': L \rightarrow M$ simpleksler dönüşümler olmak üzere,

i) $f \simeq_s f$,

ii) $f \simeq_s f'$ ise $g \circ h: g \circ f \simeq_s g \circ f'$,

iii) $g \simeq_s g'$ ise $h \circ f: g \circ f \simeq_s g' \circ f$.

İspat. 4.1.16 i) $0 \leq i \leq q$ olmak üzere, $h_i(x) = s_i f(x)$ ile verilen $h_i: K_q \rightarrow L_{q+1}$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$(x, F(x))$ bir esnek nokta olmak üzere,

$$\text{i) } d_0 h_0(x, F(x)) = d_0 s_0 f(x, F(x)) = f((x, F(x)) = x((x, f(x)))$$

id

$$d_{q+1} h_q(x, F(x)) = \underbrace{d_{q+1} s_q}_{id} f(x, F(x)) = f((x, F(x)) = f((x, f(x)))$$

$$(*) \quad d_i h_j(x, F(x)) = d_i s_j f((x, F(x))); \quad i < j$$

$$= s_{j-1} d_i f((x, F(x)))$$

$$= h_{j-1} d_i((x, F(x)))$$

$$\begin{aligned} d_{j+1} h_{j+1} &= d_{j+1} s_{j+1} f((x, F(x))) \\ &= s_j d_{j+1} f((x, F(x))) \\ &= s_j f((x, F(x))) d_{j+1} \\ &= d_{j+1} h_j((x, F(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i h_j &= d_i s_j f((x, F(x))); i > j+1 \\ &= s_j d_{i-1} f((x, F(x))) \\ &= h_j d_{i-1}((x, F(x))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) \quad s_i h_j(x, F(x)) &= s_i s_j f((x, F(x))) \\ &= s_{j+1} s_i f((x, F(x))) \\ &= h_{j+1} s_i(x, F(x)); i \leq j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i h_j(x, F(x)) &= s_i s_j f((x, F(x))) \\ &= s_{j-1} s_i(x, F(x)) \end{aligned}$$

ii) $h_i : K_q \rightarrow L_{q+1} \quad g, g' : (G, L) \rightarrow (H, M) \quad f, f' : (F, K) \rightarrow (G, L)$ ve

$(x, F(x))$ olmak üzere $f \simeq_s f'$ ise

$$d_0 h_0(x, F(x)) = f((x, F(x))) \quad (*)$$

$$d_{q+1} h_q(x, F(x)) = f'((x, F(x))),$$

$$d_i h_j(x, F(x)) = h_{j-1} d_i(x, F(x)); i < j$$

$$d_{j+1} h_{j+1}(x, F(x)) = d_{j+1} h_j(x, F(x)) \quad (**)$$

$$d_i h_j(x, F(x)) = h_j d_{i-1}(x, F(x)); i > j+1,$$

$$s_i h_j(x, F(x)) = h_{j+1} s_i(x, F(x)); i \leq j$$

$$s_i h_j(x, F(x)) = h_j s_{i-1}(x, F(x)); i > j \quad (***)$$

Her iki tarafın g ile bileşkesi alındığında ,

$$(*) \quad g \circ d_0 h_0(x, F(x)) = g \circ f((x, F(x)))$$

$$g \circ d_{q+1} h_q(x, F(x)) = g \circ f'((x, F(x))),$$

$$(**) \quad g \circ d_i h_j(x, F(x)) = g \circ h_{j-1} d_i(x, F(x)); i < j$$

$$g \circ d_{j+1} h_{j+1}(x, F(x)) = g \circ d_{j+1} h_j(x, F(x))$$

$$g \circ d_i h_j(x, F(x)) = g \circ h_j d_{i-1}(x, F(x)); i > j+1$$

$$(***) \quad g \circ s_i h_j(x, F(x)) = g \circ h_{j+1} s_i(x, F(x)); i \leq j$$

$$g \circ s_i h_j(x, F(x)) = g \circ h_j s_{i-1}(x, F(x)); i > j,$$

şartları sağlandığından $g \circ f \simeq_s g \circ f'$ elde edilir.

iii) $h_i : K_q \rightarrow L_{q+1}$, $g, g' : (G, L) \rightarrow (H, M)$ ve $f, f' : (F, K) \rightarrow (G, L)$ olsun.
 $(x, F(x)) \in (F, K)$ olmak üzere $g \simeq_s g'$ ise

$$d_0 h_0(x, F(x)) = g((x, F(x)))$$

$$d_{q+1} h_q(x, F(x)) = g'((x, F(x))) \quad (*)$$

$$d_i h_j(x, F(x)) = h_{j-1} d_i(x, F(x)); i < j$$

$$d_{j+1} h_{j+1}(x, F(x)) = d_{j+1} h_j(x, F(x))$$

$$d_i h_j(x, F(x)) = h_j d_{i-1}(x, F(x)); i > j+1 \quad (**)$$

$$s_i h_j(x, F(x)) = h_{j+1} s_i(x, F(x)); \quad i \leq j$$

$$s_i h_j(x, F(x)) = h_j s_{i-1}(x, F(x)); \quad i > j \quad (***)$$

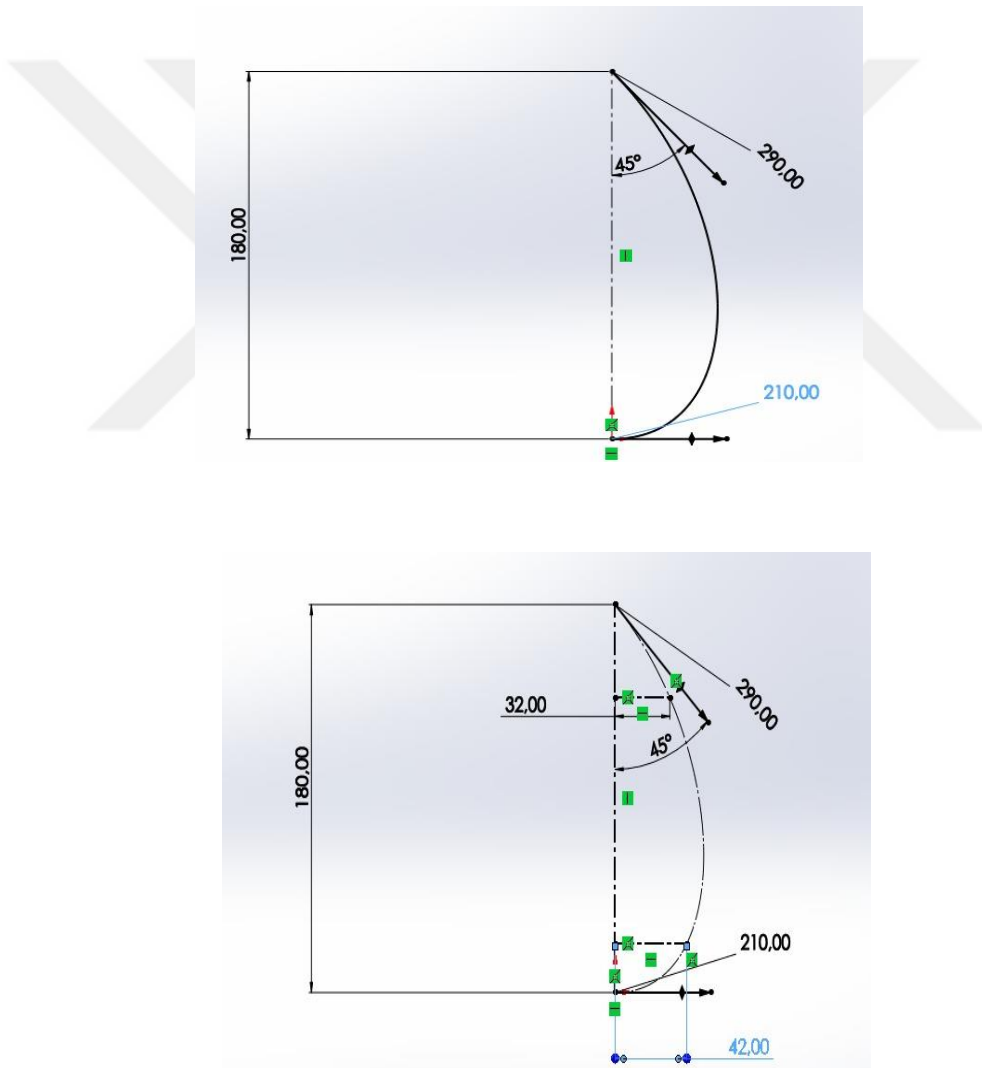
olup $h \circ f, g \circ f$ ile $g' \circ f$ arasında bir esnek simplisel homotopi olarak elde edilir. Sonuç olarak $g \circ f \simeq_s g' \circ f$.



5.UYGULAMA

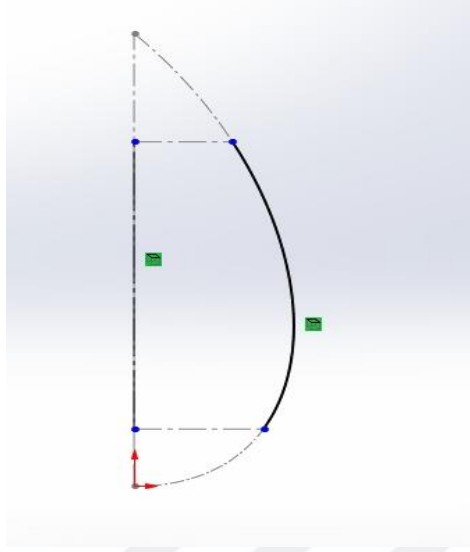
Bu bölümde, 3 boyutlu katı modelleme oluşturan bilgisayar destekli dizayn (CAD) programı SolidWorks kullanılarak Klein şişesinin üçgenlemesi tasarlandı. Tasarlanan model üzerinde, esnek noktalar belirlenip esnek simpleksler kompleksler oluşturuldu.

- 1.) İlk olarak tasarlamaya Klein şişesinin alt gövdesinden başlandı. Alt gövdenin kesitini çizerken resimdeki ölçülendirmeler kullanıldı.



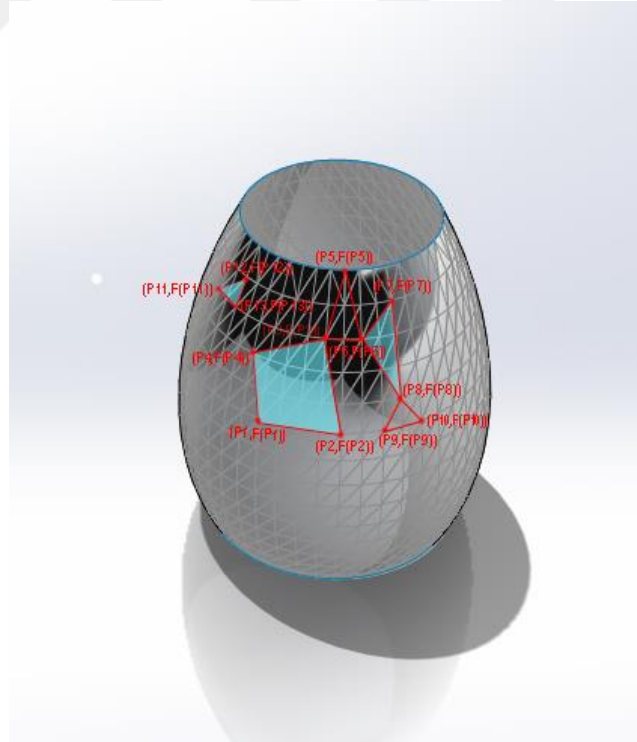
Şekil 3 Klein Şise Gövde Kesitinin Oluşum Aşamaları

- 2.) Döndürme eylemi için, budama işlemi yapılarak yalnızca şekildeki eğri bırakıldı.



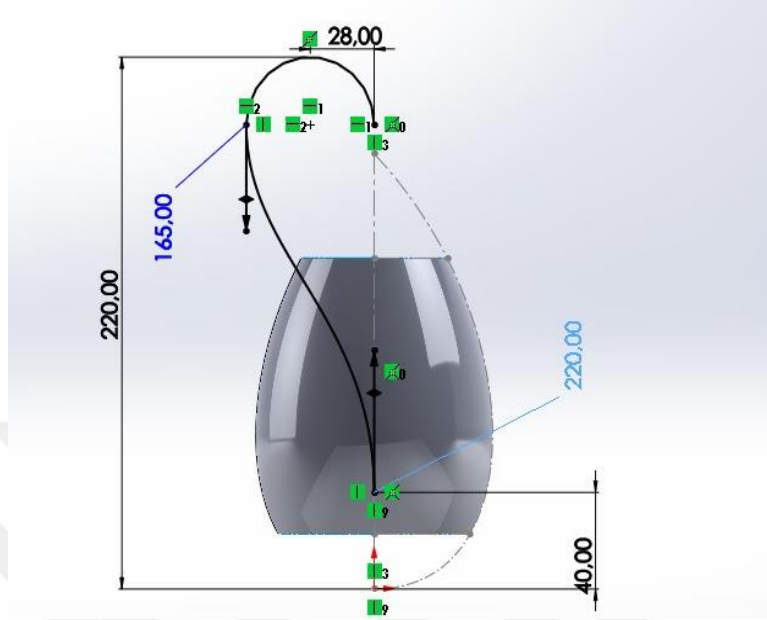
Şekil 4 Klein Şişe Gövde Kesiti

- 3.) Geriye kalan eğri 360 derece döndürülerek, şeklin 3-boyutlu aşağıdaki görüntüsü elde edildi.



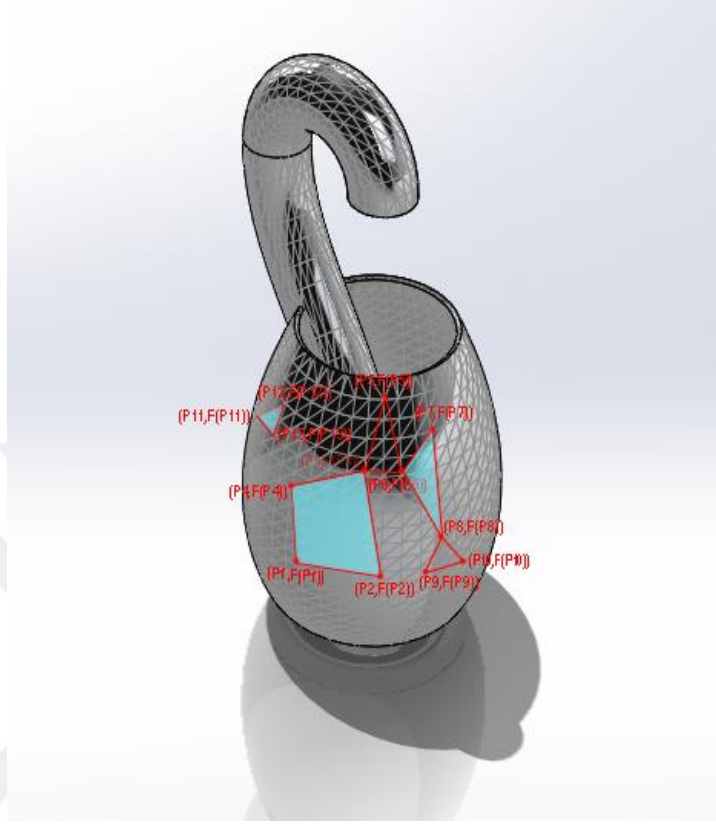
Şekil 5 Klein Şişesinin Gövdesi

- 4.) Klein şişesinin boru kısmını çizmek için şekildeki ölçülendirmeler ile yay oluşturuldu.



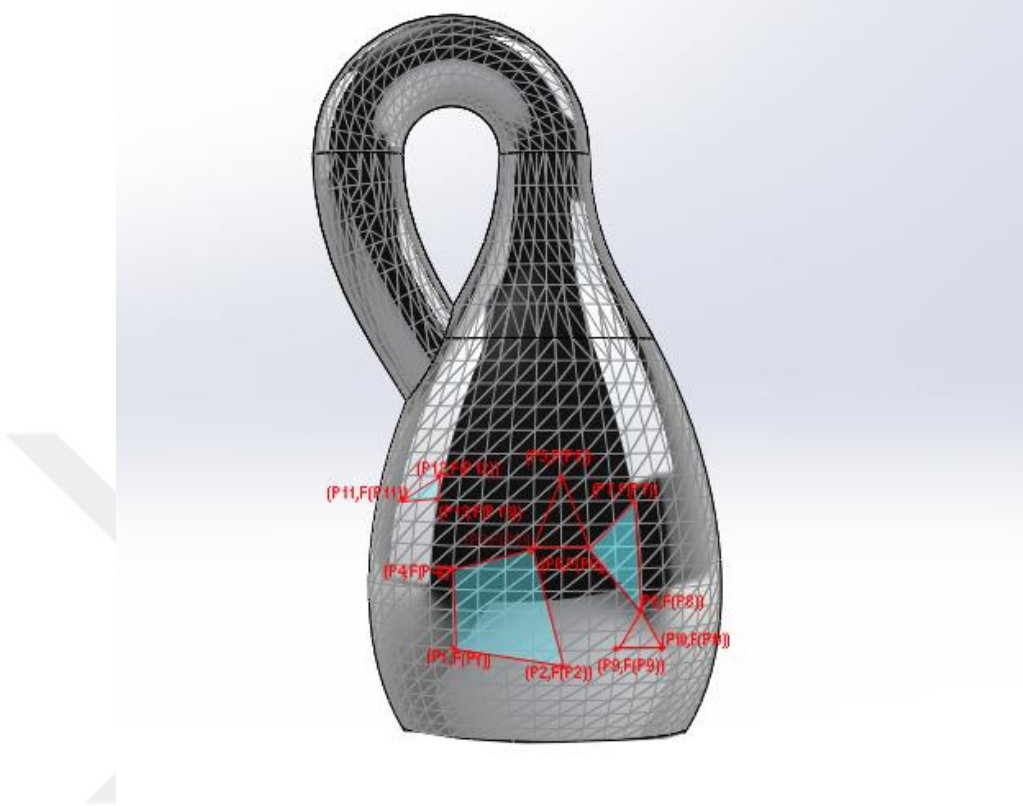
Şekil 6 Klein Şişesinin Borusunun Oluşum Başlangıcı

5.) SolidWorks te yer alan "Sürüklenmiş Yüzey" komutunu, oluşturulan yay ile gövde arasında kullanarak aşağıdaki şekil elde edildi.



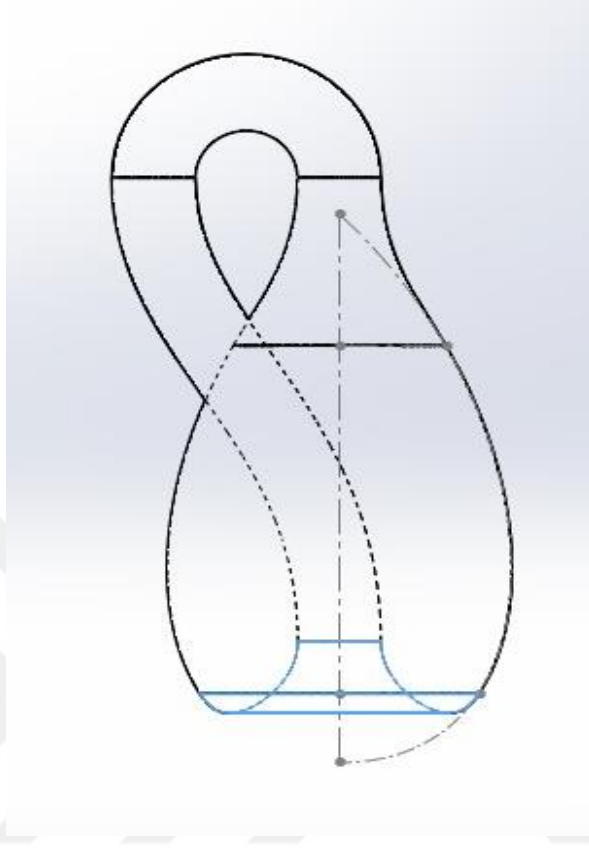
Şekil 7 Oluşan Yay ile Gövde Arası

6.) "Loftlanmış Yüzey" komutu ile gövde ve boru arası oluşturuldu



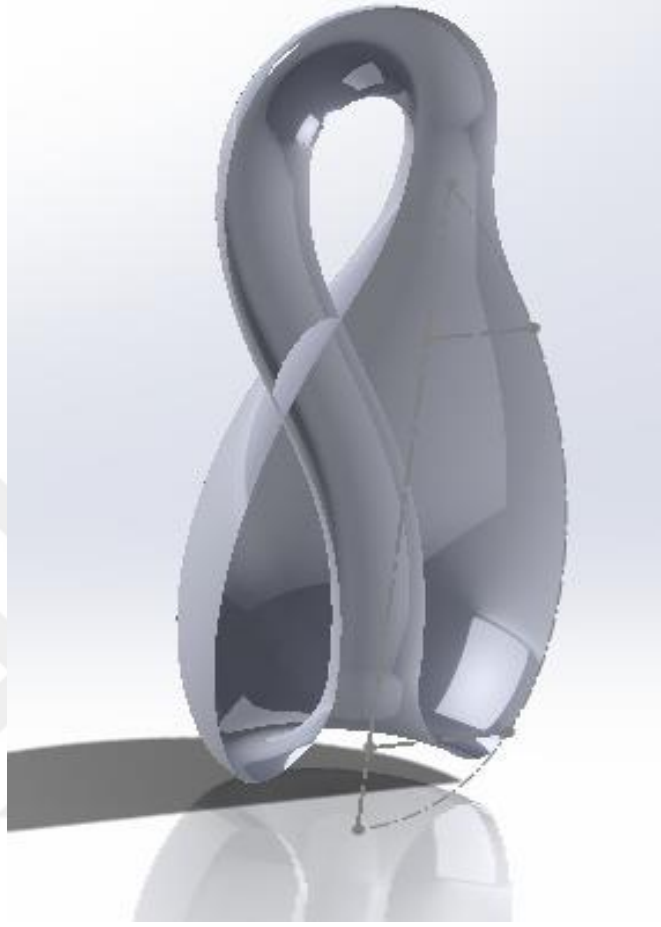
Şekil 8 Gövde ile Boru Arası

7.) Şeklin zemini için, yine "Loftlanmış Yüzey" komutu kullanılarak aşağıdaki görüntü elde edildi.



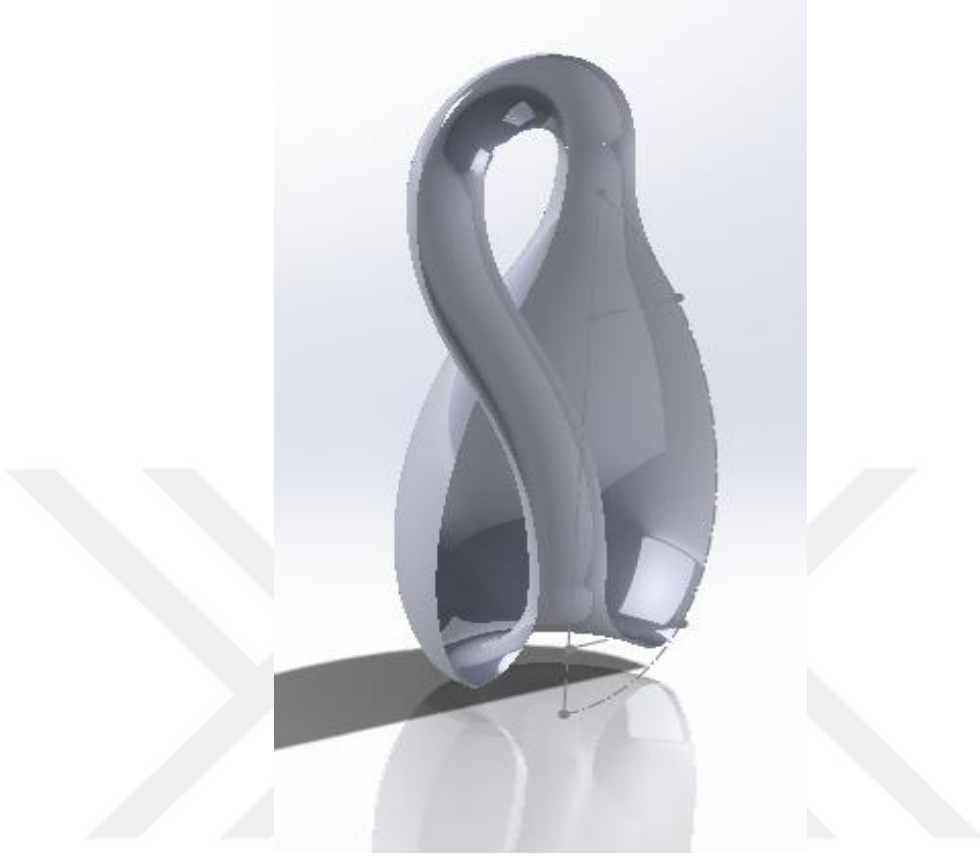
Şekil 9 Klein Şişesinin 2D görüntüsü

- 8.) Şekildeki kesitte boru içerisindeki geçişlerde bir kapalılık oluştuğunu görebiliyoruz, bu görüntü "Yüzeyi Buda" komutuyla halledildi.



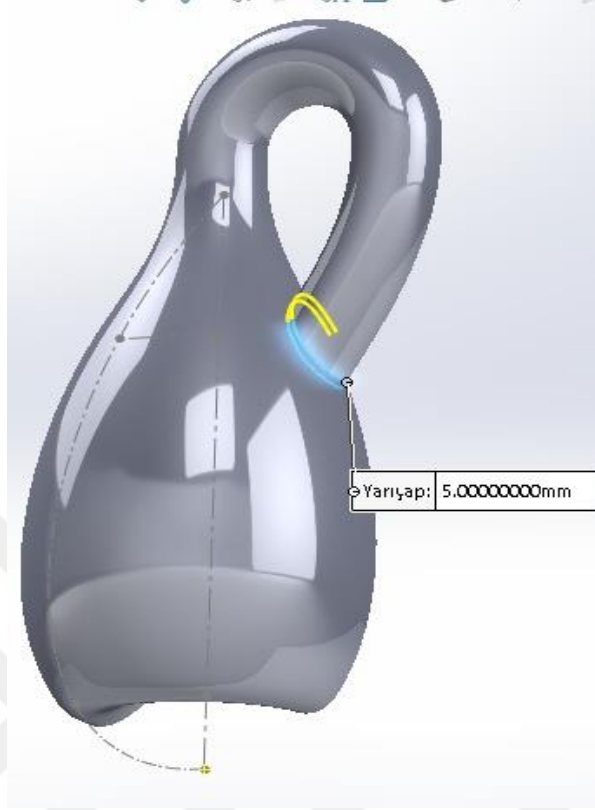
Şekil 10 Klein Şişesinin Yüzeyi Budanmadan Önceki Görüntüsü

9.) "Yüzeyi Buda" komutu kullanıldıktan sonra aşağıdaki şekil elde edildi.



Şekil 11 Yüzeyi Budanmış Klein Şişesi

- 10.) Borunun gövdeye eklendiği kısmın yüzeylerinin kenarlarına 5 mm "Radyus" komutu girildi.



Şekil 12 Yarıçapı 5mm Belirlenen Klein Şisesi

11.) Daha sonra, "Yüzeye Kalınlık Ver" komutuyla şişenin et kalınlığı 1 mm olarak kalınlaştırıldı.



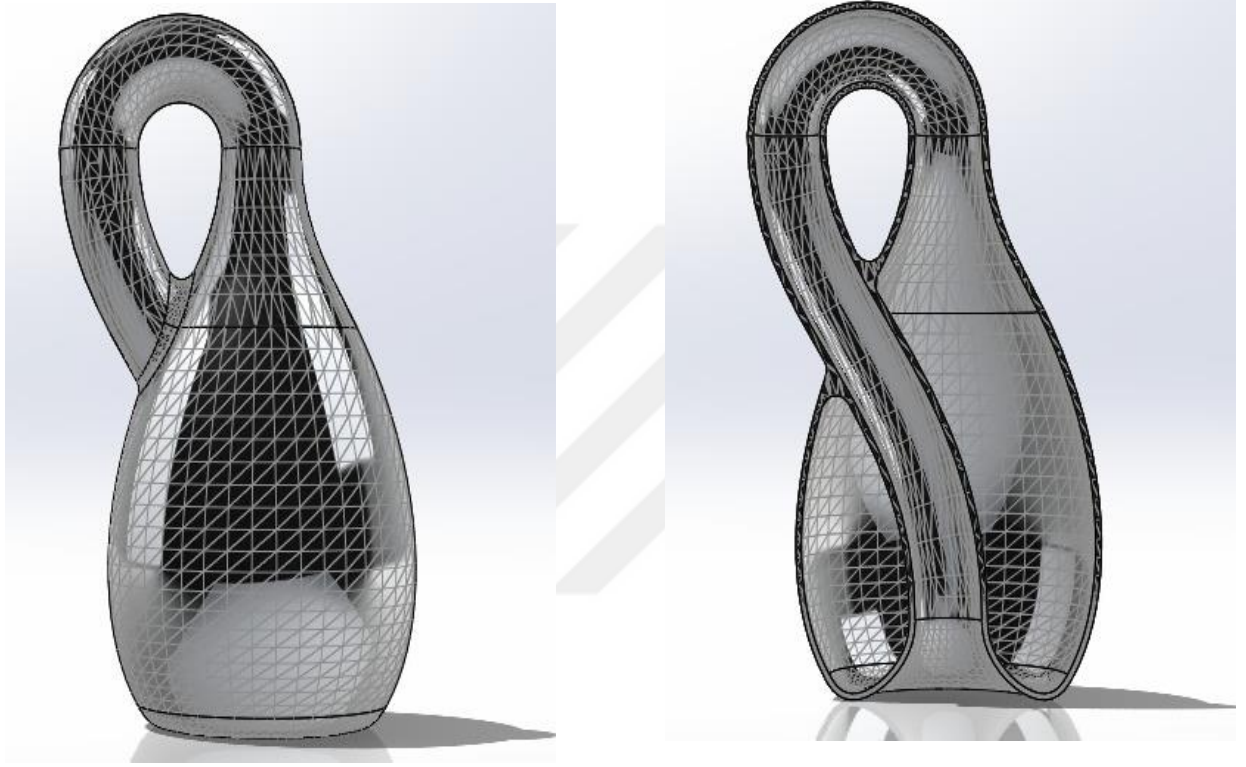
Şekil 13 Et Kalınlığı arttırılan Klein Şisesi

12.) "Radyus" ve "Yüzeye Kalınlık Ver" komutlarından sonra aşağıdaki görüntü elde edildi.



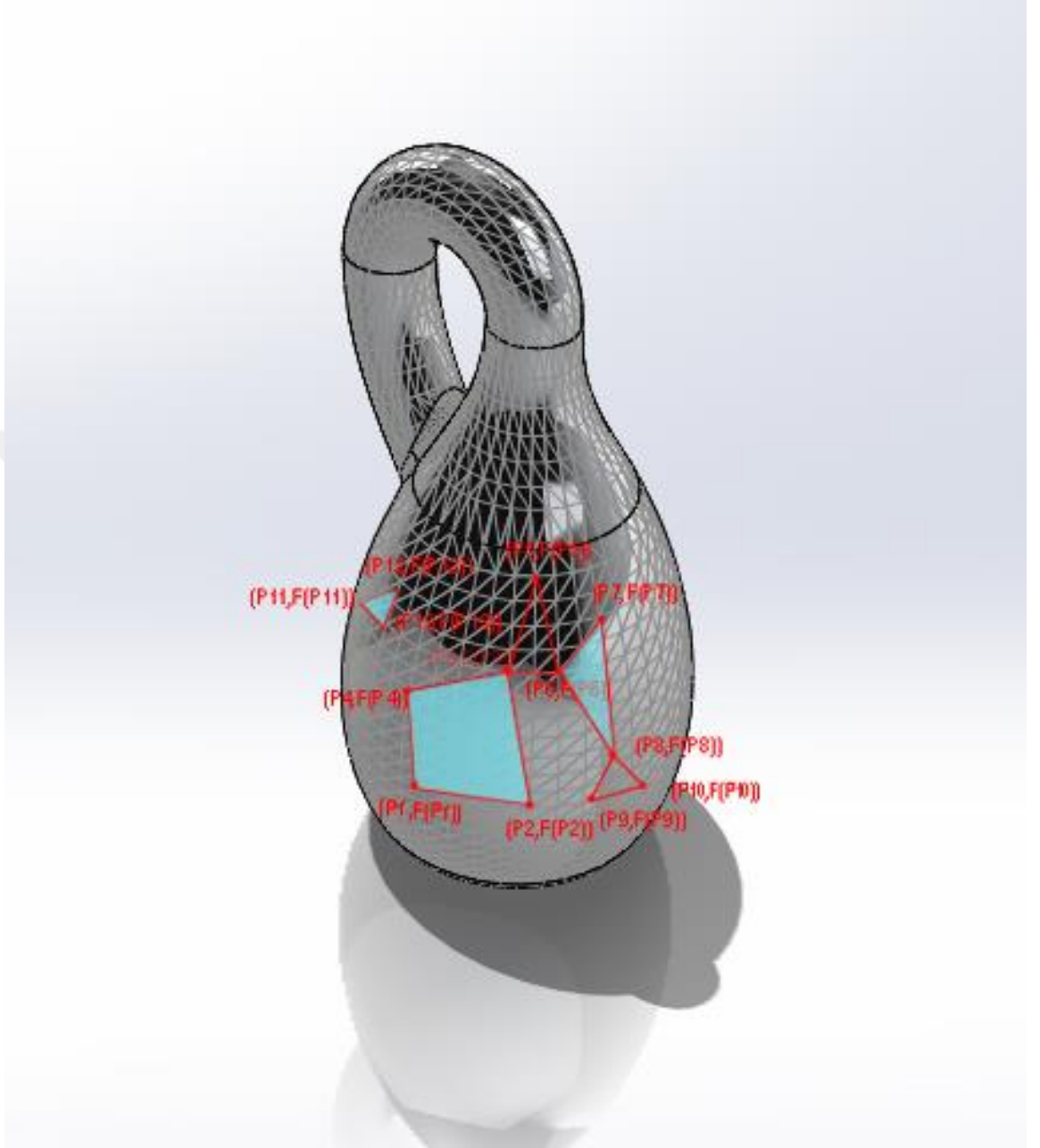
Şekil 14 Radyus Komutu sonucu boru etrafının gövde ile uyumu

13.) Artık şeklin 3-boyutlu görüntüsü tamamlanmış olup "Mesh Gövdesine Dönüştür" komutuyla şeklin yüzeyi programa taratılarak aşağıdaki görüntüler elde edilir.



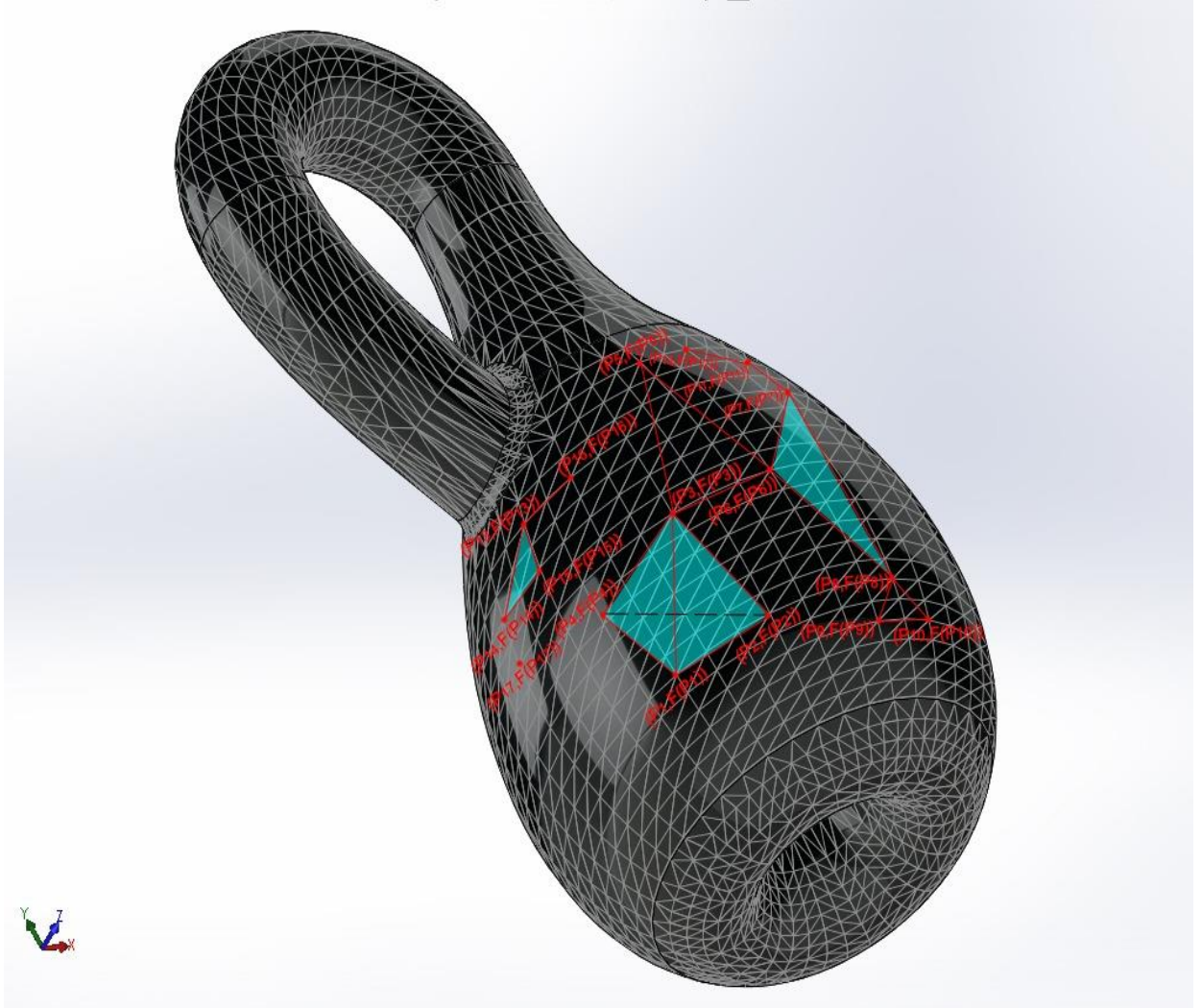
Şekil 15 Mesh atanmış gövde

- 14.) Son olarak meshlenen görüntü üzerinde esnek simpleksler kompleksi oluřturmaya geçildi.



Şekil 16 Şeklin son görüntüsü

15.) Esnek Simpleksler Kompleksler oluşturuldu.



şekil 17 Gövde zerinde Oluşturulan Esnek Simpleksler Kompleksler

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek (soft) küme yapısı ve simpleksler kullanılarak esnek (soft) simpleksler tanımlanmıştır. Esnek (soft) simplekslerin tanımlanmasıyla, esnek (soft) simpleksler küme, esnek (soft) simpleksler kompleksler, üçgenlenebilen esnek (soft) simpleksler kompleksler incelenmiş, tüm esnek (soft) simplekslerin birleşimi olarak tanımlan $|K|$ nın, esnek (soft) noktalar ve parametrik skalerlerle birlikte esnek (soft) anlamda büyüklük küçüklük ilişkileri kullanılarak esnek (soft) Hausdorff olduğu ispatlanmıştır. Bununla birlikte esnek (soft) simpleksler dönüşümün esnek sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Dejenere ve yüz dönüşümlerinden, esnek (soft) dejenere ve esnek (soft) yüz dönüşümleri tanımlanmış ve bu dönüşümler kullanılarak esnek simplisel homotopi ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Bu tez çalışmasının devamı olarak simplisel gruplar, simplisel cebirler, kross modüller, 2- kross modüller esnek kümeler ve esnek noktalar kullanılarak tanımlanabilir, simplisel dönüşümler arasındaki bağıntılar bu yapılarda verilebilir ve bu yapıların homotopik ve homolojik özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Molodtsov, D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.
- [2] Maji, P. K., Biswas R., Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.
- [3] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.
- [4] Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.
- [5] Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.
- [6] Çagman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S. Soft topology. Computers and Mathematics with Applications, 2011, (62) 351-358.
- [7] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C. and Petropoulos, V. I. On soft topological spaces. Appl. Math. Inf. Sci. 2013, 7(5), 1889-1901.
- [8] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.
- [9] Varol, B.P., Aygün, H. On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform. 2013, 5(1), 15-24.
- [10] Aras, Ç. G., Poşul, H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.
- [11] Aras, Ç. G., Sönmez, A., Çakallı, H. An approach to soft functions. J. Math Anal. 2017, 8(2), 129-138.
- [12] Zorlutuna, İ., Çakır, H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematic sand Information Science. 2015, 9(1), 403-409.
- [13] Majumdar, P., Samanta, S. K. On soft mappings, Comput. Math. Appl. 2010, 60, 2666–2672.
- [14] Eilenberg, S., Zilber J.A., Semi- Simplicial Complexes and Singular Homology, Annals of Mathematics, 1950, 51(3), 499-513.
- [15] Freidman G., An Elemantary Illustrated Introduction to Simplicial Set, 2011

- [16] Mutlu A., Peiffer Pairings in The Moore Complex of a Simplicial Group, PhD Thesis, University of Walles, Bangor, 1997.
- [17] Mutlu A., Porter T., Application of Peiffer Pairings in the Moore Complex of a Simplicial Group, *Theory and Applications of Categories*, 1998, 4(7), pp:148-173.
- [18] Karaca I., Arslan H., and Oztel A., Homology groups of n-dimensional images, *Proceeding of XXI. Turkish National Symposium*, 2008, B1-13.
- [19] Karaca I., Boxer L. and Öztel A., Topological Invariants in dijital images, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 11(2011) No 2, 109-140
- [20] Öztunç S., Soft Simplicial Homotopy for Digital Images, *International Conference on Mathematics and Engineering*, 10-12 May 2017, İstanbul/Turkey.
- [21] Öztunç S., Kan Fibrations in Digital Images, *International Conference on Mathematics and Engineering*, 10-12 May 2017, İstanbul/Turkey.
- [22] Öztunç S., Soft Simplicial Relations for Some Soft Simplicial Structures in Digital Images, 3rd. *International Conference on Computational Mathematics and Engineering Science (CMES 2018)*, 04-06 May 2018, Girne-Cyprus.
- [23] May J.P., *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, Math. Studies, 11, 1967.
- [24] Massey W.S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace, and World: New York, 1967.
- [25] Munkres J.R., *Topology A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [26] Öztunç S., On Products in the Soft Categories, *International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2017)*, 22-25 July 2017, Prague/Czech Republic.
- [27] Hosseinzadeh, H. Fixed point theorems on soft metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2017, 19(2), 1625-1647
- [28] Bayramov S, Aras Ç.G. Soft locally compact and soft paracompact spaces, *Journal of Mathematics and System Science*, 2013, 3, 122-130.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seda ŞAHİN

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Özel Cenap Düzgün Temel Lisesi, 2016

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2020

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü