



ESNEK FUZZY METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Merve İNCE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2023

ESNEK FUZZY METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve İNCE

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında 4 kısım bulunmaktadır. Birinci kısımda giriş bölümü verilmiştir. İkinci kısım esnek metrik uzay ve esnek fuzzy metrik uzay ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü kısımda esnek fuzzy metrik uzaylarda bazı büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri sunulmuş, sabit noktanın varlığı, tekliği incelenmiştir. Dördüncü kısım ise sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, fuzzy metrik, esnek fuzzy metrik
Sayfa Adedi : 41
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ferhan ŞOLA ERDURAN

FIXED POINT THEOREMS IN SOFT FUZZY METRIC SPACES

(M. Sc. Thesis)

Merve İNCE

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2023

ABSTRACT

There are 4 parts in this thesis. The introduction part is the first part. The second part is devoted to some basic definitions and theorems about soft set, soft metric space and soft fuzzy metric spaces. In the third part, fixed point theorems for some contraction mappings are presented in soft fuzzy metric spaces and the uniqueness of the fixed point are examined. The fourth part is devoted to the conclusion.

Science Code : 20405
Keywords : Fixed point, fuzzy metric, soft fuzzy metric
Number of pages : 41
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Ferhan ŞOLA ERDURAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamın her aşamasında tüm bilgi birikimiyle bana yardımcı olan saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ferhan ŞOLA ERDURAN 'a bana ayırdığı değerli zamanı için teşekkürü bir borç bilirim. Eğitim hayatım boyunca karşılaştığım her türlü zor durumda maddi, manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili ailem ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER	5
2.1. Esnek Metrik Uzaylar	5
2.2. Esnek Fuzzy Metrik Uzaylar	10
3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ	19
3.1. Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri	19
3.2. Lineer Olmayan Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri	28
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

E	Parametre kümesi
P(U)	U'in kuvvet kümesi
S(U, E)	Esnek kümeler ailesi
U	Evrensel küme
($\tilde{U}, d$)	Esnek metrik uzay
($\tilde{U}, S, \tilde{*}$)	Esnek fuzzy metrik uzay
$\tilde{u}_e$	Esnek nokta
$\tilde{*}$	Üçgen esnek norm

Kısaltmalar

Açıklamalar

ef	Esnek fuzzy
-----------	-------------

1. GİRİŞ

Belirsizlik problemlerinin çözümünde geleneksel yöntemleri kullanmak her zaman başarılı sonuçlar vermeyebilir. Sezgisel fuzzy kümeler teorisi [1], aralık matematiği teorisi [2], olasılık teorisi [3] ve fuzzy kümeler teorisi [4] bu tür sorunları çözmek için kullanılmıştır. Bilginin özellikle belirsiz veya net olmadığı durumlarda fuzzy mantık oldukça başarılı bir yöntemidir. Fuzzy mantık, Zadeh'in [4] 1965 yılında yayınlanan "Fuzzy Sets" başlıklı çalışması ile literatüre girmiştir. Fuzzy küme kavramı, eleman olmanın bir üyelik fonksiyonu yardımıyla derecelendirilmesi mantığına dayandığından klasik küme kavramının bir genelleştirmesidir. Bunun neticesi olarak, matematik ve matematiğin uygulama alanları için fuzzy küme, yeni bir çalışma sahası sunmuştur.

Bu yeni küme teorisi ile birlikte klasik metrik kavramının fuzzy versiyonunu tanımlamak ilgi alanı haline gelmiştir. İlk olarak Kramosil ve Michalek [5] tarafından sürekli t-normlar aracılığıyla fuzzy metrik uzay tanımı verilmiştir. Grabiec [6] ise bu tanımı yeniden formüle ederek kullanmıştır. Daha sonra, klasik metrik kavramını fuzzy bağlama daha yakın bir hale getirmek amacıyla, George ve Veeramani [7], Grabiec tarafından oluşturulanların bazı aksiyomlarını değiştirerek yeni bir fuzzy metrik kavramı ortaya koymuşlardır. Bu yeni tanıma göre fuzzy metrikten elde edilen fuzzy topoloji, Hausdorffluk ve birinci sayılabilirlik özelliklerini vermişlerdir. O zamandan beri pek çok çalışma, fuzzy metrik kavramlarının incelenmesine ayrılmıştır [8-17].

1999 yılında Molodtsov [18], fuzzy mantığın belirsizliklerle başa çıkma konusunda bazı eksiklikleri olduğunu işaret etmiştir. Bunun nedeni, her durum için üyelik fonksiyonunu elde etmenin zor olması ve sadece parametreleri tanımlamanın yeterli olmamasıdır. Sonuç olarak, Molodtsov [18] belirsiz durumlar için zor olmayan bir matematiksel araç olarak esnek küme teorisini önermiştir. Esnek küme, evrensel kümenin parametreleştirilmiş alt kümelerinin ailesinden oluşur. Parametre kümesi herhangi bir şey olabilir.

Daha sonra, Maji ve arkadaşları [19, 20] esnek küme teorisi araştırmalarını ilerletmişlerdir. Teorik çalışmanın yanı sıra belirsizlik ve kararsızlık modellerinin çözümü için esnek kümeyi sunmuşlardır. Çok sayıda araştırmacı esnek küme teorisini ve diğer alanlardaki

uygulamalarını geliştirmiştir [21-25]. Ayrıca Das ve Samanta [26-28] esnek kümelerin esnek noktalarına dayanan esnek metrik uzay kavramını önererek bu alana katkıda bulunmuşlardır. Daha sonra Erduran ve arkadaşları [29, 30], esnek t-norm yardımıyla esnek noktalar cinsinden esnek fuzzy (ef) metrik uzayları tanımlamış ve topolojik yapısını incelemişlerdir.

Uygulamalı matematik, matematiksel analiz, oyun teorisi, ekonomi problemlerinin çözümü gibi farklı alanlarda uygulamaları olan sabit nokta teorisinin metrik uzaylardaki çalışmaları Banach [31] ile başlamıştır. Banach sabit nokta ilkesinin çeşitli genellemeleri üzerinde bir çok çalışma yürütölmüştür. 1968’de Kannan [32], Banach’tan farklı bir büzüleme koşulu kullanarak bir sabit nokta teoremi kanıtlamıştır. Kannan’ın sabit nokta teoremi, metrik tamlığı karakterize etmesi açısından oldukça önemlidir. Yani, her Kannan büzüleme dönüşümünün bir tek sabit noktasının olması için gerek ve yeter şart çalışılan metrik uzayın tam olmasıdır. 1972’de ise Chatterjea [33], bir tam metrik uzay üzerinde tanımladığı ve daha sonra kendi adıyla anılacak olan büzülmenin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu kanıtlamıştır. Diğer birçok benzer sonuçla birlikte Banach’ın, Kannan’ın ve Chatterjea’nın sabit nokta teoremlerini genişleten çok ilginç bir teorem, 1972’de Zamfirescu [34] tarafından elde edilmiştir. Bu şekilde elde edilen en genel büzüleme koşullarından biri, 1974’te Ciric [35, 36] tarafından farklı büzüleme şartı dikkate alınarak verilmiştir. Lineer olmayan dönüşümlerin tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahip olduğu da Matkowski [37] tarafından 1975’te gösterilmiştir.

Bir çok araştırmanın katkılarıyla günümüze kadar çok hızlı bir gelişme göstererek ilerleyen sabit nokta teorisi ve uygulamaları hala popülerliğini korumakta ve gözde çalışma alanlarından biri olmaya devam etmektedir. Konu ile ilgili daha detaylı bilgi kaynaklarından bulunabilir [38-48].

Bu tez, dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısım olan giriş bölümü tez içindeki ana başlıkları ifade etmek amacıyla hazırlanmıştır.

İkinci kısım tezde sıklıkla karşılaşılabacak olan esnek küme, esnek metrik uzay, $\tilde{*}$ esnek t-norm kavramlarının yardımı ile ef metrik uzay tanımlarına ve bu tanımların özelliklerine ayrılmıştır. Ef metrik uzayın topolojik yapısı incelenmiştir. Esnek açık yuvar, esnek açık küme, Hausdorff uzay tanımları ve dizi tanımları verilmiş olup konuyla ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

Üçüncü kısımda ise, ilk olarak esnek t-norm yardımıyla üçgensellik özelliği tanımı verilmiş ve bir örnekle açıklanmıştır. Ef metrik uzaylarda, yukarıda bahsedilen büzülme tipleri göz önüne alınarak bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Dördüncü kısım olan sonuç bölümünde ise çalışma özetlenmiş ve yeni çalışmalar için öneriler verilmiştir.



2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu tez çalışması boyunca, U evrensel kümeyi, E , U 'da ki nesnelerin nitelikleri, karakteristikleri veya özellikleri olan tüm olası parametreler kümesini ve $P(U)$ 'da U 'nun tüm alt kümelerinin ailesini göstermektedir.

2.1. Esnek Metrik Uzaylar

2.1.1. Tanım

$U \neq \emptyset$ bir küme, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi, E parametre kümesi ve $A \subset E$ olsun.

- Eğer $\mathcal{F} : A \rightarrow P(U)$ fonksiyonu varsa, $\mathcal{F}$ fonksiyonuna (U, A) 'da bir esnek küme denir ve $(\mathcal{F}, A)$ çifti (veya F_A) ile gösterilir. $S(U, A)$, (U, A) 'da ki tüm esnek kümelerin ailesini gösterir.
- Eğer $\mathcal{F} : E \rightarrow P(U)$ fonksiyonu varsa, $\mathcal{F}$ fonksiyonuna (U, E) 'de bir esnek küme denir ve $(\mathcal{F}, E)$ çifti (veya F_E) ile gösterilir. $S(U, E)$, (U, E) 'de ki tüm esnek kümelerin ailesini gösterir [18].

Burada $(\mathcal{F}, E)$ esnek kümesi, parametrelendirilmesiyle oluşturulmuş U kümesinin ailesidir.

2.1.2. Örnek

$U = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7\}$ evlerin kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi olmak üzere: e_1 :pahalı, e_2 :güzel, e_3 :ahşap, e_4 :ucuz, e_5 :bahçeli olsun. Kabul edelim ki,

$$\mathcal{F}(e_1) = \{l_1, l_3\}, \mathcal{F}(e_2) = \{l_2, l_4\}, \mathcal{F}(e_3) = \{l_1, l_5, l_6\}, \mathcal{F}(e_4) = \{l_2, l_4, l_6\}, \mathcal{F}(e_5) = \{l_2\}$$

olsun. Buradan $(\mathcal{F}, E)$ esnek kümesi,

$$(\mathcal{F}, E) = \{(e_1, \{l_1, l_3\}), (e_2, \{l_2, l_4\}), (e_3, \{l_1, l_5, l_6\}), (e_4, \{l_2, l_4, l_6\}), (e_5, \{l_2\})\}$$

şeklinde yazılır [18].

2.1.3. Tanım

U evrensel küme, E parametre kümesi ve $A_1, A_2 \subset E$ olsun. $(\mathcal{F}, A_1)$ ve $(\mathcal{G}, A_2)$ iki esnek küme olmak üzere, eğer $A_1 \subset A_2$ ve $\forall e \in A_1$ için $\mathcal{F}(e) \subset \mathcal{G}(e)$ ise, $(\mathcal{F}, A_1)$ esnek kümesine $(\mathcal{G}, A_2)$ esnek kümesinin, esnek alt kümesi denir ve $(\mathcal{F}, A_1) \tilde{\subset} (\mathcal{G}, A_2)$ ile gösterilir [20].

2.1.4. Tanım

$(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesinin tümleyeni, $(\mathcal{F}, A)^c = (\mathcal{F}^c, A)$ ile gösterilmek üzere, $\mathcal{F}^c : A \rightarrow P(U)$ dönüşümü, $\forall e \in A$ için $\mathcal{F}^c(e) = U - \mathcal{F}(e)$ şeklinde tanımlanır [21].

2.1.5. Tanım

U üzerinde bir $(\mathcal{F}, E)$ esnek kümesi, her $e \in E$ için, $\mathcal{F}(e) = U$ oluyorsa bu kümeye mutlak esnek küme denir ve $\tilde{U}$ ile gösterilir [20].

2.1.6. Tanım

U üzerinde bir $(\mathcal{F}, E)$ esnek kümesi, her $e \in E$ için $\mathcal{F}(e) = \emptyset$ oluyorsa bu kümeye boş esnek küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir [20].

2.1.7. Tanım

U evrensel küme, E parametre kümesi, $A \subset E$ ve $(\mathcal{F}, E)$, (U, E) 'de bir esnek küme olsun. Eğer bir $e \in A$ ve bazı $u \in U$ 'ler için $\mathcal{F}(e) = u$ ve $\forall e' \in A/\{e\}$ için $\mathcal{F}(e') = \emptyset$ ise, $(\mathcal{F}, A)$ 'ya bir esnek nokta denir ve $\tilde{u}_e$ ile gösterilir [26].

2.1.8. Tanım

Eğer $e \in A \subset E$ için $\mathcal{F}(e) = \{u\} \subset \mathcal{G}(e)$ ise $\tilde{u}_e$ esnek noktası $(\mathcal{G}, A)$ esnek kümesine aittir denir ve $\tilde{u}_e \tilde{\in} (\mathcal{G}, A)$ biçiminde gösterilir [26].

2.1.9. Tanım

$e_1 = e_2$ ve $u = v$ ise $\tilde{u}_{e_1}$ ve $\tilde{v}_{e_2}$ esnek noktalarına eşittir denir. Yani,

$\tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2} \Leftrightarrow e_1 = e_2$ ve $u = v$ veya buna denk olarak $\tilde{u}_{e_1} \neq \tilde{v}_{e_2} \Leftrightarrow e_1 \neq e_2$ veya $u \neq v$ olur [26].

2.1.10. Önerme

Herhangi bir esnek nokta koleksiyonunun birleşimi bir esnek kümedir ve her esnek küme, kendisine ait tüm esnek noktaların birleşimi olarak ifade yazılabilir. Yani,

$$(\mathcal{F}, A) = \bigcup_{\tilde{u}_e \in (\mathcal{F}, A)} \tilde{u}_e \text{ [26].}$$

2.1.11. Tanım

U boş olmayan bir küme ve E 'de boştan farklı bir parametre kümesi olsun. $\varepsilon : E \rightarrow U$ fonksiyonuna U 'nun esnek elementi denir. $\forall e \in E$ için, $\varepsilon(e) \in A(e)$ ise U 'nun bir ε esnek elementi, U 'nun bir A esnek kümesine aittir denir ve $\varepsilon \in A$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla U 'da bir esnek A kümesi tanımlanırken E parametre kümesine göre $A(e) = \{\varepsilon(e), \varepsilon \in A\}$, $e \in E$ şeklinde tanımlanır [3].

2.1.12. Tanım

E parametre kümesi, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ 'nin tüm boştan farklı sınırlı alt kümelerin koleksiyonu $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ olsun. $\mathcal{F} : E \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dönüşümüne esnek gerçel küme denir. $\mathbb{R}(E)$ esnek gerçel sayıların kümesini ve $\mathbb{R}(E)^*$ da bütün negatif olmayan esnek gerçel sayıların kümesini gösterebilir. (Her $\delta \in E$ için $\mathcal{F}(\delta)$ negatif olmayan gerçel sayıların bir alt kümesi oluyorsa, $(\mathcal{F}, E)$ 'ye negatif olmayan esnek gerçel küme denir.) Özellikle, $(\mathcal{F}, E)$ tek elemanlı esnek küme ise o halde $(\mathcal{F}, E)$ 'ye karşılık gelen bir esnek element ile tanımlanırsa buna esnek gerçel sayı denir [3].

2.1.13. Not

$\mathbb{R}(E)$ bütün esnek gerçel sayıların kümesini göstermek üzere; $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\omega}$ notasyonları esnek gerçel sayıları tanımlamak için kullanılacaktır [3].

2.1.14. Not

$\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\omega}$ belirli tipte esnek gerçel sayı belirtir, yani her $\delta \in E$ için $\tilde{\mu}(\delta) = \mu$ 'dir. Örneğin $\tilde{0}$ esnek gerçel sayısı, her $\delta \in E$ için $\tilde{0}(\delta) = 0$ 'dır [3].

2.1.15. Tanım

İki esnek gerçel sayı $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathbb{R}(E)$ için sıralama bağıntıları şu şekilde tanımlanır:

1. Her $\delta \in E$ için, $\tilde{\mu}(\delta) \leq \tilde{\nu}(\delta)$ ise $\tilde{\mu} \preceq \tilde{\nu}$,
2. Her $\delta \in E$ için, $\tilde{\mu}(\delta) \geq \tilde{\nu}(\delta)$ ise $\tilde{\mu} \succeq \tilde{\nu}$,
3. Her $\delta \in E$ için, $\tilde{\mu}(\delta) < \tilde{\nu}(\delta)$ ise $\tilde{\mu} \prec \tilde{\nu}$,
4. Her $\delta \in E$ için, $\tilde{\mu}(\delta) > \tilde{\nu}(\delta)$ ise $\tilde{\mu} \succ \tilde{\nu}$ 'dir [28].

2.1.16. Tanım

Herhangi iki esnek gerçel sayı $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathbb{R}(E)$ için,

1. $\oplus, \ominus, \odot$ işlemleri şu şekilde tanımlanır:

$$(\tilde{\mu} \oplus \tilde{\nu})(e) = \{\{\tilde{\mu}(e) + \tilde{\nu}(e)\}, e \in E\}, (\tilde{\mu} \ominus \tilde{\nu})(e) = \{\{\tilde{\mu}(e) - \tilde{\nu}(e)\}, e \in E\}, (\tilde{\mu} \odot \tilde{\nu})(e) = \{\{\mu(e) \cdot \nu(e)\}, e \in E\}.$$

2. Bir esnek gerçel $\tilde{\mu}$ sayısının toplamsal tersi $(-\tilde{\mu})(e) = \{\{-\tilde{\mu}(e)\}, e \in E\}$ şeklindedir ve $-\tilde{\mu}$ ile gösterilir.
3. $\tilde{0}$ 'dan farklı bir esnek gerçel sayının çarpımsal tersi $\tilde{\mu}^{-1}(e) = \frac{1}{\tilde{\mu}(e)} = \{\{\frac{1}{\tilde{\mu}(e)}\}, e \in E\}$ şeklindedir ve $\tilde{\mu}^{-1}$ ile gösterilir [25].

2.1.17. Örnek

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ kümesini göz önüne alalım ve $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\omega}$ esnek gerçel sayıları aşağıdaki şekilde düşünelim,

$$\tilde{\mu} = \{(e_1, 0), (e_2, -4), (e_3, -\frac{3}{4}), (e_4, 4), (e_5, 1), (e_6, 3)\},$$

$$\tilde{\nu} = \{(e_1, \frac{1}{2}), (e_2, 3), (e_3, -3), (e_4, -4), (e_5, 5), (e_6, \frac{1}{3})\},$$

$$\tilde{\omega} = \{(e_1, 6), (e_2, -2), (e_3, \frac{3}{6}), (e_4, 1), (e_5, 2), (e_6, 7)\}.$$

Buna göre, $(\tilde{\mu} \odot \tilde{\nu})(e_6) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ ve $(\tilde{\mu} \ominus \tilde{\omega})(e_3) = -\frac{3}{4} - \frac{3}{6} = -\frac{5}{4}$ vb. şeklinde hesaplanır.

2.1.18. Not

$\mathfrak{B}$ bir esnek nokta koleksiyonu ise, o zaman $\mathfrak{B}$ 'nin tüm esnek noktaları alınarak oluşturulan esnek küme $SS(\mathfrak{B})$ ile gösterilirken $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesine ait esnek noktaların koleksiyonu $SP(\mathcal{F}, A)$ ile ifade edilmektedir [26].

2.1.19. Önerme

$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ esnek noktaların koleksiyonu, $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, A)$ iki esnek küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır,

1. $(\mathcal{F}, A) = SS(SP(\mathcal{F}, A)), \mathfrak{B} = SP(SS(\mathfrak{B}))$
2. $SP(\mathcal{G}, A) \cap SP(\mathcal{F}, A) = SP((\mathcal{G}, A) \tilde{\cap} (\mathcal{F}, A))$
ve $SP(\mathcal{G}, A) \cup SP(\mathcal{F}, A) = SP((\mathcal{G}, A) \tilde{\cup} (\mathcal{F}, A))$
3. $SS(\mathfrak{B}_1) \tilde{\cap} SS(\mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2)$ ve $SS(\mathfrak{B}_1) \tilde{\cup} SS(\mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)$ [26].

2.1.20. Tanım

$\tilde{U}$ mutlak esnek küme olsun. $d : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü, her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3} \in \tilde{U}$ için,

$$\begin{aligned}
(EM-1) \quad & d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \succeq \bar{0}, \\
(EM-2) \quad & d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2}, \\
(EM-3) \quad & d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{u}_{e_1}), \\
(EM-4) \quad & d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}) \preceq d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) + d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})
\end{aligned}$$

şartlarını sağlarsa, $\tilde{U}$ 'da bir esnek metrik denir. $(\tilde{U}, d, E)$ üçlüsüne de bir esnek metrik uzay denir [26].

2.1.21. Örnek

$U \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $E \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir parametre kümesi olsun. $\tilde{U}$ mutlak esnek küme ve $\forall e \in E$ için $\bar{u}(e) = u$ olsun. $d : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\forall \tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ için $d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = |\bar{u} - \bar{v}| + |e_1 - e_2|$ olarak tanımlansın. $(\tilde{U}, d, E)$ bir esnek metrik uzaydır [26].

2.2. Esnek Fuzzy Metrik Uzaylar

U boş olmayan bir küme ve E boş olmayan parametre kümesi olsun. $\tilde{U}$ mutlak esnek küme, $\tilde{U}$ 'nın tüm esnek noktaların koleksiyonu $SP(\tilde{U})$ ve $\mathbb{R}(E)^*$ tüm negatif olmayan gerçel esnek sayıların kümesi olmak üzere; $[0, 1](E)$, $[0, 1]$ aralığındaki esnek gerçel sayıları ve $(0, \infty)(E)$, $(0, \infty)$ aralığındaki esnek gerçel sayıları gösterebiliriz.

2.2.1. Tanım

$\tilde{*} : [0, 1](E) \times [0, 1](E) \rightarrow [0, 1](E)$ işlemi aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa; $\tilde{*}$ sürekli esnek t -norm olarak adlandırılır:

- i. $\tilde{*}$ birleşmeli,
- ii. $\tilde{*}$ değişmeli,
- iii. $\tilde{*}$ sürekli,
- iv. Her $\tilde{k} \in [0, 1](E)$ için $\tilde{k} \tilde{*} \bar{1} = \tilde{k}$,
- v. $\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n} \in [0, 1](E)$ için $\tilde{k} \preceq \tilde{m}$ ve $\tilde{l} \preceq \tilde{n}$ iken $\tilde{k} \tilde{*} \tilde{l} \preceq \tilde{m} \tilde{*} \tilde{n}$ [29].

2.2.2. Örnek

E herhangi bir parametre kümesi ve $(\tilde{k}\tilde{l})(e) = \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}(e)$ (kısaca $(\tilde{k}\tilde{l}) = \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}$) olmak üzere $\tilde{*}$ 'ın sürekli esnek t-norm olduğunu gösterelim.

i) $\tilde{*}$ birleşmeli,

$$\begin{aligned}\tilde{k}\tilde{*}(\tilde{l}\tilde{*}\tilde{m}) &= \min\{\tilde{k}, (\tilde{l}\tilde{*}\tilde{m})\} = \min\{\tilde{k}, \min\{\tilde{l}, \tilde{m}\}\} = \min\{\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m}\} \\ &= \min\{\min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}, \tilde{m}\} = \min\{(\tilde{k}\tilde{l}), \tilde{m}\} = (\tilde{k}\tilde{l})\tilde{*}\tilde{m},\end{aligned}$$

ii) $\tilde{*}$ değişmeli,

$$\tilde{k}\tilde{*}\tilde{l} = \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\} = \min\{\tilde{l}, \tilde{k}\} = \tilde{l}\tilde{*}\tilde{k}.$$

iii) Açıktır.

iv) Her $\tilde{k} \in [0, 1](E)$ için $\tilde{k}\tilde{*}\bar{1} = \min\{\tilde{k}, \bar{1}\} = \tilde{k}$.

v) $\tilde{k} \leq \tilde{m}$ ve $\tilde{l} \leq \tilde{n}$ olsun dolayısıyla $\tilde{k}\tilde{*}\tilde{l} = \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\} \leq \min\{\tilde{m}, \tilde{n}\} = \tilde{m}\tilde{*}\tilde{n}$ olur.

Örneğin, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $\tilde{k} = \{(e_1, \frac{1}{2}), (e_2, \frac{3}{4}), (e_3, 1)\}$ ve $\tilde{l} = \{(e_1, \frac{1}{5}), (e_2, \frac{3}{5}), (e_3, 0)\}$ olarak alalım. Her $e \in E$ için $(\tilde{k}\tilde{l})(e) = \min\{(\tilde{k}, \tilde{l})\}(e)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}(e_1) &= \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}(e_1) = \frac{1}{5} \\ \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}(e_2) &= \min\{\frac{3}{4}, \frac{3}{5}\}(e_2) = \frac{3}{5} \\ \min\{\tilde{k}, \tilde{l}\}(e_3) &= \min\{1, 0\}(e_3) = 0\end{aligned}$$

$$\tilde{k}\tilde{l} = \left\{ \left(e_1, \frac{1}{5}\right), \left(e_2, \frac{3}{5}\right), (e_3, 0) \right\}$$

şeklindedir.

2.2.3. Not

$\tilde{*}$ aşağıdaki koşulları sağlar,

i. Herhangi $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in (0, 1)(E)$ için $\tilde{\mu}_1 \succ \tilde{\mu}_2$ iken, $\tilde{\mu}_3 \in (0, 1)(E)$ vardır öyle ki $\tilde{\mu}_1 \tilde{*} \tilde{\mu}_3 \succeq \tilde{\mu}_2$ 'dir.

ii. Herhangi $\tilde{\mu}_4 \in (0, 1)(E)$ için $\tilde{\mu}_5 \in (0, 1)(E)$ vardır öyle ki, $\tilde{\mu}_4 \tilde{*} \tilde{\mu}_4 \tilde{\geq} \tilde{\mu}_5$ 'dir [29].

2.2.4. Tanım

$S : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \times (0, \infty)(E) \rightarrow [0, 1](E)$ dönüşümü her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3} \in SP(\tilde{U})$ ve $\tilde{\omega}, \tilde{v} \succ \tilde{0}$ için,

$$(EFM-1) \quad S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) \succ \tilde{0},$$

$$(EFM-2) \quad S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \tilde{1} \Leftrightarrow \tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2} \text{ ise,}$$

$$(EFM-3) \quad S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{u}_{e_1}, \tilde{\omega}),$$

$$(EFM-4) \quad S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) \tilde{\geq} S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) \tilde{*} S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}),$$

$$(EFM-5) \quad S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \cdot) : (0, \infty)(E) \rightarrow [0, 1](E) \text{ sürekli,}$$

şartlarını sağlıyorsa S 'ye $\tilde{U}$ üzerinde ef metrik, $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ üçlüsüne de ef metrik uzay denir [29].

2.2.5. Örnek

$U \subset \mathbb{R}$ boş olmayan küme ve $E \subset \mathbb{R}$ boş olmayan parametre kümesi olsun. $\tilde{U}$ mutlak esnek küme ve $\tilde{u}$, her $e \in E$ için $\tilde{u}(e) = u$ olacak şekilde esnek gerçel sayıları gösterebilir. $d : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ fonksiyonu her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ için,

$$d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = \begin{cases} \tilde{0}, & \tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2} \\ \tilde{1}, & \tilde{u}_{e_1} \neq \tilde{v}_{e_2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $d, \tilde{U}$ üzerinde esnek metriktir. $\tilde{k}, \tilde{l} \in [0, 1](E)$ için $\tilde{k} \tilde{*} \tilde{l} = \min \{ \tilde{k}, \tilde{l} \}$ ve her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$, $\tilde{\omega} \succ \tilde{0}$ için $S : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \times (0, \infty)(E) \rightarrow [0, 1](E)$ dönüşümü,

$$S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $S, \tilde{U}$ üzerinde ef metriktir. Gerçekten,

(SFM-1) Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ için, $d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \succeq \bar{0}$ olduğundan,

$$S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} \succeq \bar{0}$$

dır.

(SFM-2) Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) &= \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} \Rightarrow \tilde{\omega} = \bar{1} \odot (\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})) \\ &= \tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \\ &\Rightarrow d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = \bar{0} \Rightarrow \tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2} \end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{e_1} = \tilde{v}_{e_2} &\Rightarrow d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = \bar{0} \\ &\Rightarrow d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \oplus \tilde{\omega} = \bar{0} \oplus \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \\ &\Rightarrow \frac{\bar{1}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = \frac{\bar{1}}{\tilde{\omega}} \\ &\Rightarrow \frac{\bar{1} \odot \tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = \frac{\bar{1} \odot \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = \bar{1} \\ &\Rightarrow S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \bar{1}. \end{aligned}$$

(SFM-3) Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için $\tilde{U}$ üzerinde bir d esnek metriği $d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{u}_{e_1})$ şeklindedir.

$$S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{u}_{e_1})} = S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{u}_{e_1}, \tilde{\omega}).$$

(SFM-4) Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) = \frac{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})},$$

$$\begin{aligned}
S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) * S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}) &= \min\{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}), S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{v})\} \\
&= \min\left\{\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}, \frac{\tilde{v}}{\tilde{v} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})}\right\}.
\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğinden her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ için, $d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}) \leq d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})$,

$$\begin{aligned}
S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) &= \frac{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3})} \geq \frac{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})} \\
\Rightarrow \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v})} &= \frac{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3})}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}} \leq \frac{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}} \\
\Rightarrow \frac{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}} \oplus \frac{\tilde{v} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})}{\tilde{\omega} \oplus \tilde{v}} &\leq \frac{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}{\tilde{\omega}} \oplus \frac{\tilde{v} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})}{\tilde{v}} \\
\Rightarrow \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v})} &\leq \frac{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}{\tilde{\omega}} \oplus \frac{\tilde{v} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})}{\tilde{v}} \\
\Rightarrow S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) &\geq \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} \oplus \frac{\tilde{v}}{\tilde{v} \oplus d(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3})} \\
\Rightarrow S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) &\geq \min\{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}), S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{v})\} \\
\Rightarrow S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega} \oplus \tilde{v}) &\geq S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) * S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}).
\end{aligned}$$

(SFM-5) Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}_0} S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}_0} \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = \frac{\tilde{\omega}_0}{\tilde{\omega}_0 \oplus d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})} = S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}_0).$$

2.2.6. Tanım

$(\tilde{U}, S, *)$ bir ef metrik uzay, $\tilde{u}_{e_1} \in \tilde{U}$, $\tilde{r} \in (0, 1)(E)$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ olsun. $\tilde{r}$ yarıçaplı, $\tilde{u}_{e_1}$ merkezli açık yuvar

$$B_s(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}) = \{\tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U} : S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) \succ \bar{1} \ominus \tilde{r}\} \subset SP(\tilde{U})$$

biçiminde tanımlanır. $\tilde{U}$ 'nun esnek noktalarının ailesi olan $SS(B_s(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}))$ ise, $\tilde{r}$ yarıçaplı ve $\tilde{u}_{e_1}$ merkezli esnek açık yuvardır. Ayrıca $SS(B_s(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}))$, $\tilde{U}$ 'da bir esnek kümedir [29].

2.2.7. Tanım

$(\tilde{U}, S, *)$ bir ef metrik uzay $\tilde{u}_{e_1} \in \tilde{U}$, $\tilde{r} \in (0, 1)(E)$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ olsun. $\tilde{r}$ yarıçaplı, $\tilde{u}_{e_1}$ merkezli

kapalı yuvar

$$B_s[\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}] = \{\tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U} : S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) \succ \bar{1} \ominus \tilde{r}\} \subset SP(\tilde{U})$$

biçiminde tanımlanır. $\tilde{U}$ 'nun esnek noktalarının ailesi olan $SS(B_s[\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}])$ ise, $\tilde{r}$ yarıçaplı ve $\tilde{u}_{e_1}$ merkezli esnek kapalı yuvardır. Ayrıca $SS(B_s[\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}])$, $\tilde{U}$ ' da bir esnek kümedir [29].

2.2.8. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay ve $\tilde{U}$ 'nun boş olmayan bir alt kümesi (Y, A) olsun.

$$\tilde{u}_{e_1} \in B(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}) \subset SP(Y, A)$$

olacak şekilde en az bir pozitif esnek gerçel $\tilde{r}$ sayısı varsa, $\tilde{u}_{e_1}$ esnek noktasına (Y, A) 'nın bir iç noktası denir [29].

2.2.9. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay ve $\tilde{U}$ 'nun boş olmayan bir alt kümesi (Y, A) olmak üzere; (Y, A) 'nın tüm esnek noktaları aynı zamanda iç noktaları oluyor ise (Y, A) , $\tilde{U}$ üzerinde esnek açıktır denir [29].

2.2.10. Teorem

Esnek fuzzy metrik uzayda, her esnek açık yuvar esnek açık kümedir [29].

2.2.11. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay olsun. $\tau_S = \{(Y, A) \subset \tilde{U} : \forall \tilde{u}_{e_1} \in (Y, A) \text{ için } B_s(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}) \subset SP(Y, A) \text{ olacak biçimde } \tilde{r} \in (0, 1)(E) \text{ ve } \tilde{\omega} \succ \bar{0} \text{ vardır}\}$, şeklinde tanımlanan τ_S , $\tilde{U}$ de bir topolojidir [29].

2.2.12. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ esnek metrik bir uzay ve $(Y, A) \tilde{\subset} \tilde{U}$ olmak üzere, $(Y, A)^c = (Y^c, A)$ esnek açık olduğunda (Y, A) 'ya esnek kapalı küme denir [29].

2.2.13. Teorem

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay olsun.

- i) $\tilde{U}$ esnek kapalıdır.
- ii) $\tilde{\Phi}$ esnek kapalıdır.
- iii) Esnek kapalı kümelerin başka kesişimleri de esnek kapalıdır.
- iv) Esnek kapalı kümelerin sonlu sayıda birleşimleri esnek kapalıdır [29].

2.2.14. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay ve $\tilde{u}_{e_1} \neq \tilde{v}_{e_2}$ olacak şekilde en az iki farklı nokta olsun. $\tilde{r} \in (0, 1)(E)$ ve $\tilde{\omega} \succ \tilde{0}$ için $\tilde{u}_{e_1}$ merkezli $SS(B_S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega}))$ ve $\tilde{v}_{e_2}$ merkezli $SS(B_S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{r}, \tilde{\omega}))$ iki esnek açık yuvar var öyle ki $SS(B_S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{r}, \tilde{\omega})) \cap SS(B_S(\tilde{v}_{e_2}, \tilde{r}, \tilde{\omega})) = \tilde{\Phi}$ ise $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzayı Hausdorff uzaydır [29].

2.2.15. Teorem

Her ef metrik uzay bir Hausdorff uzaydır [29].

2.2.16. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzay, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, J bir indis kümesi ve $e_j \in E$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n = \tilde{u}_{e_j}^n$ olmak üzere $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ biçimindeki her fonksiyona $\tilde{U}$ 'da bir dizi denir, $\{\tilde{u}_{e_j}^n\}$ ile gösterilir [30].

2.2.17. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzay ve bu uzaydaki esnek noktaların bir dizisi $\{\tilde{u}_{e_j}^n\}$ olmak üzere $\bar{0} \prec \tilde{\epsilon} \prec \bar{1}$ ve $\forall \tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ iken $\{\tilde{u}_{e_j}^n\}$ dizisi $\tilde{u}_{e_j}^0 \in \tilde{U}$ esnek noktasına yakınsıyor denir ve $\tilde{u}_{e_j}^n \rightarrow \tilde{u}_{e_j}^0$ ile gösterilir. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^n, \tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{\omega}) = \bar{1}$$

dir [30].

2.2.18. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzay ve bu uzaydaki esnek noktaların bir dizisi $\{\tilde{u}_{e_j}^n\}$ olmak üzere $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzayında, her $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ ve $\bar{0} \prec \tilde{\epsilon} \prec \bar{1}$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $S(\tilde{u}_{e_j}^n, \tilde{u}_{e_j}^m, \tilde{\omega}) \succ \bar{1} \ominus \tilde{\epsilon}$ ise, $\{\tilde{u}_{e_j}^n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [30].

2.2.19. Teorem

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzayında yakınsak her dizi Cauchy dizisidir [30].

2.2.20. Tanım

Bir $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ ef metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise, $(U, S, \tilde{*})$ ef metrik uzayı tamdır [30].



3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Tezin orjinal kısmını oluşturan bu bölümde, ef metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri verilmiştir. Buradan itibaren kolaylık açısından $\oplus$ yerine $+$, $\ominus$ yerine $-$ yazılmıştır.

3.0.1. Tanım

$\tilde{U}$ boş kümeden farklı bir esnek küme, E parametre kümesi ve $T : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $T_{\tilde{u}_{e_1}} = \tilde{u}_{e_1}$ olacak şekilde $\tilde{u}_{e_1} \in \tilde{U}$ varsa, bu $\tilde{u}_{e_1}$ noktasına T ' nin sabit noktası denir. T ' nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(\tilde{U})$ ile gösterilir. Yani, $F(\tilde{U}) = \{\tilde{u}_{e_1} \in \tilde{U} : T_{\tilde{u}_{e_1}} = \tilde{u}_{e_1}\}$ şeklindedir.

3.1. Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

3.1.1. Tanım

$(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ bir ef metrik uzay olmak üzere, her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{y}_{e_3} \in SP(\tilde{U})$ ve $\tilde{\omega} \succ \tilde{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa S 'ye üçgenseldir denir.

3.1.2. Örnek

$U \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $E \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir parametre kümesi olsun. $\tilde{U}$ mutlak esnek küme ve $\bar{u}$, her $e \in E$ için $\bar{u}(e) = u$ olacak şekilde esnek gerçel sayıları gösterebilir. $d : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ fonksiyonu her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in \tilde{U}$ için $d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}) = |\bar{u} - \bar{v}| + |e_1 - e_2|$ şeklinde tanımlansın. O zaman d , $\tilde{U}$ üzerinde esnek metriktir [4].

$S : SP(\tilde{U}) \times SP(\tilde{U}) \times (0, \infty)(E) \rightarrow [0, 1](E)$ ef metriği şu şekilde tanımlansın:

$$S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + d(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2})}$$

Buradan, her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in SP(\tilde{U})$ ve $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{|\tilde{u} - \tilde{v}| + |e_1 - e_2|}{\tilde{\omega}} \\ &= \frac{|\tilde{u} - \tilde{y} + \tilde{y} - \tilde{v}| + |e_1 - e_3 + e_3 - e_2|}{\tilde{\omega}} \\ &\leq \frac{|\tilde{u} - \tilde{y}| + |e_1 - e_3|}{\tilde{\omega}} + \frac{|\tilde{y} - \tilde{v}| + |e_3 - e_2|}{\tilde{\omega}} \\ &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \end{aligned}$$

olup,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{y}_{e_3}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{y}_{e_3}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da S 'nin üçgensel olduğunu gösterir.

3.1.3. Teorem

S üçgensel olmak üzere $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ tam ef metrik uzay ve $F : SP(\tilde{U}) \rightarrow SP(\tilde{U})$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in SP(\tilde{U}), \forall \tilde{\omega} \succ \bar{0}$ ve $\tilde{\alpha} \in [0, 1)(E)$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \tilde{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa F 'in bir tek sabit noktası vardır.

İspat

$\tilde{u}_{e_j}^0 \in SP(\tilde{U})$ olsun, her $i \neq \bar{0}$ için $\tilde{u}_{e_j}^{i+1} = F\tilde{u}_{e_j}^i$ olmak üzere $\{\tilde{u}_{e_j}\}$ dizisini tanımlayalım. 3.1'den $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \tilde{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.2)$$

Yani,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.3)$$

Benzer şekilde $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.4)$$

bulunur. 3.3 ve 3.4'den $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \leq \bar{\alpha}^2 \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha}^i \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.6)$$

bulunur. $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega}) = \bar{1} \quad (3.7)$$

elde edilir. Buradan $\forall i, k \in \mathbb{N}$ ve $k > i$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{u}_{e_j}^{i+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\quad + \dots + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{k-1}, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq (\bar{\alpha}^i + \bar{\alpha}^{i+1} + \dots + \bar{\alpha}^{k-1}) \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &\leq \left(\frac{\bar{\alpha}^i}{\bar{1} - \bar{\alpha}} \right) \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Böylece $\{\tilde{u}_{e_j}^i\}$ Cauchy dizisidir. $\tilde{U}$ tam olduğundan $\tilde{k} \in SP(\tilde{U})$ vardır, öyle ki $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega}) = \bar{1}. \quad (3.9)$$

$F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu göstermeliyiz. S 'in üçgensellik özelliğinden,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \quad (3.10)$$

3.1, 3.7 ve 3.9 kullanılarak;

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.11)$$

elde edilir. $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega}) = \bar{1} \quad (3.12)$$

bulunur. Bu da $F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu gösterir.

Şimdi de sabit noktanın tekliğini gösterelim. $\tilde{k} \neq \tilde{k}^*$ olmak üzere $F\tilde{k}^* = \tilde{k}^*$ olacak şekilde $\tilde{k}^* \in SP(\tilde{U})$ var olsun. $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için 3.1'den,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{k}, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\alpha}^2 \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq \dots \leq \bar{\alpha}^i \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olup $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Öyleyse F , $SP(\tilde{U})$ 'da bir tek sabit noktaya sahiptir

3.1.4. Teorem

S üçgensel olmak üzere $(\tilde{U}, S, \bar{*})$ tam ef metrik uzay ve $F : SP(\tilde{U}) \rightarrow SP(\tilde{U})$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in SP(\tilde{U}), \forall \tilde{\omega} \succ \bar{0}$ ve $\bar{\beta} \in [0, \frac{1}{2})(E)$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{u}_{e_1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{v}_{e_2}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanırsa F 'in bir tek sabit noktası vardır.

İspat

$\tilde{u}_{e_j}^0 \in SP(\tilde{U})$ olsun. Her $i \neq \bar{0}$ için $\tilde{u}_{e_j}^{i+1} = F\tilde{u}_{e_j}^i$ olmak üzere $\{\tilde{u}_{e_j}\}$ dizisini tanımlayalım.

3.14'den, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &= \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &= \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) + \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olup buradan,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{\beta}}{\bar{1} - \bar{\beta}} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.16)$$

elde edilir. $\bar{b} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{1} - \bar{\beta}}$, $\bar{0} \leq \bar{b} < \frac{\bar{1}}{2}$ olduğundan $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{b} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right). \quad (3.17)$$

Benzer şekilde $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{b} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.18)$$

bulunur. 3.17 ve 3.18'den $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{b} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \leq \bar{b}^2 \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{b}^i \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.20)$$

bulunur. $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega}) = \bar{1} \quad (3.21)$$

elde edilir. Buradan $\forall i, k \in \mathbb{N}$ ve $k > i$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{u}_{e_j}^{i+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\quad + \dots + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{k-1}, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq (\bar{b}^i + \bar{b}^{i+1} + \dots + \bar{b}^{k-1}) \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq \left(\frac{\bar{b}^i}{\bar{1} - \bar{b}} \right) \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Böylece $\{\tilde{u}_{e_j}^i\}$ Cauchy dizisidir. $\tilde{U}$ tam olduğundan $\tilde{k} \in SP(\tilde{U})$ vardır öyle ki $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega}) = \bar{1}. \quad (3.23)$$

Şimdi $F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu gösterelim. S 'in üçgensellik özelliğinden,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \quad (3.24)$$

3.14, 3.21 ve 3.23 kullanılarak;

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &= \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Buradan $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right), \quad (3.26)$$

3.26 denklemi 3.23 ve 3.24 ile birlikte ele alınırsa, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.27)$$

bulunur. $\bar{\beta} \lesssim \frac{1}{2}$ olduğundan, $S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega}) = \bar{1}$ sağlanacak şekilde $F\tilde{k} = \tilde{k}$ vardır.

Şimdi de sabit noktanın tekliğini gösterelim. $\tilde{k} \neq \tilde{k}^*$ olmak üzere $F\tilde{k}^* = \tilde{k}^*$ olacak şekilde $\tilde{k}^* \in SP(\tilde{U})$ var olsun. $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için 3.14'den,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{k}, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\beta} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}^*, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.28)$$

olup, $i \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega}) = \bar{1}$ bulunur, buradan $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ 'dır. Bu ise kabulümüzle çelişir. Öyleyse F , $SP(\tilde{U})$ 'da bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.1.5. Teorem

S üçgensel olmak üzere $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ tam ef metrik uzay ve $F : SP(\tilde{U}) \rightarrow SP(\tilde{U})$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in SP(\tilde{U}), \forall \tilde{\omega} \succ \bar{0}$ ve $\tilde{\gamma} \in [0, \frac{1}{2})(E)$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \tilde{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{v}_{e_2}, F\tilde{u}_{e_1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.29)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa F 'in bir tek sabit noktası vardır.

İspat

$\tilde{u}_{e_j}^0 \in SP(\tilde{U})$ olsun. Her $i \neq \bar{0}$ için $\tilde{u}_{e_j}^{i+1} = F\tilde{u}_{e_j}^i$ olmak üzere $\{\tilde{u}_{e_j}\}$ dizisini tanımlayalım. 3.29'den, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \tilde{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &= \tilde{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) + \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.30)$$

olup buradan,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{\gamma}}{\bar{1} - \bar{\gamma}} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.31)$$

elde edilir. $\bar{c} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{1} - \bar{\gamma}}, \bar{0} \leq \bar{c} \leq \frac{\bar{1}}{2}$ olduğundan, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{c} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right). \quad (3.32)$$

Benzer şekilde $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{c} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right), \quad (3.33)$$

bulunur. 3.32 ve 3.33'den $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{c} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \leq \bar{c}^2 \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{c}^i \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.35)$$

bulunur. $i \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega}) = \bar{1} \quad (3.36)$$

elde edilir. Buradan $\forall i, k \in \mathbb{N}$ ve $k > i$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{u}_{e_j}^{i+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\quad + \dots + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{k-1}, \tilde{u}_{e_j}^k, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq (\bar{c}^i + \bar{c}^{i+1} + \dots + \bar{c}^{k-1}) \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \left(\frac{\bar{c}^i}{\bar{1} - \bar{c}} \right) \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Böylece $\{\tilde{u}_{e_j}^i\}$ Cauchy dizisidir. $\tilde{U}$ tam olduğundan $\tilde{k} \in SP(\tilde{U})$ vardır öyle ki $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega}) = \bar{1} \tag{3.38}$$

Şimdi $F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu göstermeliyiz. S'in üçgensellik özelliğinden,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \tag{3.39}$$

3.29, 3.36 ve 3.38 kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\
&= \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir. Buradan $i \rightarrow \infty$ iken limit alınır,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \tag{3.41}$$

3.41 denklemi 3.38 ve 3.39 ile birlikte ele alınır $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \tag{3.42}$$

bulunur. Bu da $F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu gösterir.

Şimdi de sabit noktanın tekliğini gösterelim. $\tilde{k} \neq \tilde{k}^*$ olmak üzere $F\tilde{k}^* = \tilde{k}^*$ olacak şekilde $\tilde{k}^* \in SP(\tilde{U})$ var olsun, 3.29'den, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{k}, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}^*, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.43)$$

olup, $i \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Öyleyse F , $SP(\tilde{U})$ 'da bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2. Lineer Olmayan Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

3.2.1. Tanım

φ , negatif olmayan bütün gerçel sayıların kümesi $\mathbb{R}(E)^+$ 'dan $\mathbb{R}(E)^+$ 'ya bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar göz önüne alınsın.

- $\varphi_1)$ φ azalmayandır yani $\tilde{\omega}_1 \preceq \tilde{\omega}_2$ için $\varphi(\tilde{\omega}_1) \preceq \varphi(\tilde{\omega}_2)$,
- $\varphi_2)$ Her $\tilde{\omega} \neq \bar{0}$ için $\varphi(\tilde{\omega}) \prec \tilde{\omega}$,
- $\varphi_3)$ $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$,
- $\varphi_4)$ φ sürekli,
- $\varphi_5)$ Her $\tilde{\omega} \neq \bar{0}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(\tilde{\omega}) = \bar{0}$.

Bu koşullar altında;

* Eğer φ fonksiyonu, φ_1 ve φ_2 koşulunu sağlıyorsa, φ_3 koşulu da sağlanır.

Gerçekten, $\varphi(\bar{0}) \neq \bar{0}$ olsun. O halde $\varphi(\bar{0}) = \tilde{\omega}_1 \succ \bar{0}$. φ azalmayan olduğundan $\varphi(\bar{0}) \preceq \varphi(\tilde{\omega}_1)$. (φ_2)'den, $\bar{0} \prec \tilde{\omega}_1 = \varphi(\bar{0}) \preceq \varphi(\tilde{\omega}_1) \prec \tilde{\omega}_1$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$ 'dır.

** Eğer φ fonksiyonunu, φ_1 ve φ_5 koşullarını sağlıyorsa, φ_2 koşulu da sağlanır.

Gerçekten, $\exists \tilde{\omega}_0 \succ \bar{0}$ için $\varphi(\tilde{\omega}_0) \neq \tilde{\omega}_0$ olsun. φ_1 'den,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &\preceq \varphi(\tilde{\omega}_0) \preceq \varphi(\varphi(\tilde{\omega}_0)) = \varphi^2(\tilde{\omega}_0) \\ &\preceq \varphi^3(\tilde{\omega}_0) \\ &\preceq \dots \\ &\preceq \varphi^n(\tilde{\omega}_0) \end{aligned}$$

Buradan $\tilde{\omega}_0 \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(\tilde{\omega}_0) = \bar{0}$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla her $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için $\varphi(\tilde{\omega}) \prec \tilde{\omega}$.

3.2.2. Tanım

$\varphi : \mathbb{R}(E)^+ \rightarrow \mathbb{R}(E)^+$ fonksiyonu (φ_1) ve (φ_5) koşullarını sağlarsa, esnek kıyaslama fonksiyonu adını alır.

3.2.3. Tanım

$(\tilde{U}, S, \ast)$ ef metrik uzay, $F : SP(\tilde{U}) \rightarrow SP(\tilde{U})$ bir dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}(E)^+ \rightarrow \mathbb{R}(E)^+$ esnek kıyaslama fonksiyonu olmak üzere, herhangi $\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2} \in SP(\tilde{U})$, $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_1}, F\tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_1}, \tilde{v}_{e_2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.44)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa F 'ye esnek φ – büzülme denir.

3.2.4. Örnek

$\varphi : \mathbb{R}^+(E) \rightarrow \mathbb{R}^+(E)$, $\varphi(\tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir esnek kıyaslama fonksiyonudur.

(φ_1) $\tilde{v}, \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^+(E)$ ve $\tilde{v} \prec \tilde{\omega}$ olsun. Öyleyse $\forall e \in E$ için $\tilde{v}(e) \prec \tilde{\omega}(e)$ sağlanır. $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(e) &\leq \tilde{\omega}(e) \rightarrow \tilde{v}(e) + (\tilde{v} \cdot \tilde{\omega})(e) \leq \tilde{\omega}(e) + (\tilde{v} \cdot \tilde{\omega})(e) \\
\tilde{v}(e) + \tilde{v}(e) \cdot \tilde{\omega}(e) &\leq \tilde{\omega}(e) + \tilde{v}(e) \cdot \tilde{\omega}(e) \\
\tilde{v}(e)[\bar{1} + \tilde{\omega}(e)] &\leq \tilde{\omega}(e)[\bar{1} + \tilde{v}(e)] \\
\frac{\tilde{v}(e)}{\bar{1} + \tilde{v}(e)} &\leq \frac{\tilde{\omega}(e)}{\bar{1} + \tilde{\omega}(e)}
\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse φ azalmayıdır.

(φ_5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(\tilde{\omega}) = \bar{0}$ olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned}
\varphi(\tilde{\omega}) &= \frac{\tilde{\omega}}{\bar{1} + \tilde{\omega}} \\
\varphi^2(\tilde{\omega}) &= \frac{\tilde{\omega}}{\bar{1} + \bar{2}\tilde{\omega}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

$$\varphi^n(\tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}}{\bar{1} + \bar{n}\tilde{\omega}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(\tilde{\omega}) = \bar{0}$ olarak bulunur.

3.2.5. Teorem

S üçgensel olmak üzere, $(\tilde{U}, S, \tilde{*})$ tam ef metrik uzay ve $F : SP(\tilde{U}) \rightarrow SP(\tilde{U})$ esnek φ -büzülme olsun. F bir tek $\tilde{k} \in \tilde{U}$ sabit noktasına sahiptir ve her $\tilde{u}_{e_j}^0 \in SP\tilde{U}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F^i \tilde{u}_{e_j}^0 = \tilde{k}$$

sağlanır.

İspat

$\tilde{u}_{e_j}^0 \in \tilde{U}$ olsun. Her $i \neq \bar{0}, \tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için $\tilde{u}_{e_j}^i = F^i \tilde{u}_{e_j}^0 = F \tilde{u}_{e_j}^{i-1}$ olmak üzere $\{\tilde{u}_{e_j}\}$ dizisini

tanımlayalım. F , esnek φ –büzülme olduğundan,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.45)$$

Benzer şekilde $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, F\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.46)$$

3.45 ve 3.46'den $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \leq \varphi^2 \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i-2}, \tilde{u}_{e_j}^{i-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &\leq \dots \leq \varphi^i \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^0, \tilde{u}_{e_j}^1, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Buradan $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega}) = \bar{1} \quad (3.48)$$

elde edilir. 3.46'den her $\tilde{\xi} \succ \bar{0}$ için $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} < \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) \quad (3.49)$$

S üçgensel ve F , esnek φ –büzülme olduğundan olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{u}_{e_j}^{N+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^N, F\tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\ &\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi})) \\ &\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi}) \\ &= \tilde{\xi} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+3}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{u}_{e_j}^{N+3}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^N, F\tilde{u}_{e_j}^{N+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi\left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+2}, \tilde{\omega})} - \bar{1}\right) \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi})) \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi}) \\
&= \tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

3.50 ve 3.51'den,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+K}, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{N+1}, \tilde{u}_{e_j}^{N+K}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^N, F\tilde{u}_{e_j}^{N+K-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi\left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^{N+K-1}, \tilde{\omega})} - \bar{1}\right) \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi})) \\
&\leq \tilde{\xi} - \varphi(\tilde{\xi}) + \varphi(\tilde{\xi}) \\
&= \tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. $m, n \neq N$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^n, \tilde{u}_{e_j}^m, \tilde{\omega})} - \bar{1} &\leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^n, \tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^N, \tilde{u}_{e_j}^m, \tilde{\omega})} - \bar{1} \\
&\leq \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \\
&= 2\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Böylece $\{\tilde{u}_{e_j}^i\}$ Cauchy dizisidir, $\tilde{U}$ tam olduğundan $\tilde{k} \in SP(\tilde{U})$ vardır öyle ki $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{\omega}) = \bar{1}. \tag{3.54}$$

$F\tilde{k} = \tilde{k}$ olduğunu göstermeliyiz, S 'in üçgensellik özelliğinden $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{u}_{e_j}^{i+1}, \tilde{\omega})} - \bar{1} + \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \quad (3.55)$$

F , esnek φ -büzülme olduğundan,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} = \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{u}_{e_j}^i, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.56)$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^{i+1}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{u}_{e_j}^i, \tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.57)$$

3.57 eşitsizliği 3.54 ve 3.55 ile birlikte şunu verir,

$$\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \quad (3.58)$$

(φ_2) özelliğinden, $S(\tilde{k}, F\tilde{k}, \tilde{\omega}) = \bar{1}$ sağlayacak şekilde $F\tilde{k} = \tilde{k}$ vardır.

Şimdi de sabit noktanın tekliğini gösterelim. $\tilde{k} \neq \tilde{k}^*$ olmak üzere $F\tilde{k}^* = \tilde{k}^*$ olacak şekilde $\tilde{k}^* \in SP(\tilde{U})$ var olsun. $\tilde{\omega} \succ \bar{0}$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} &= \frac{\bar{1}}{S(F\tilde{k}, F\tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \leq \varphi \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &\leq \varphi^2 \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \\ &\leq \dots \\ &\leq \varphi^i \left(\frac{\bar{1}}{S(\tilde{k}, \tilde{k}^*, \tilde{\omega})} - \bar{1} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

olup, $i \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Öyleyse F , $SP(\tilde{U})$ 'te bir tek sabit noktası vardır.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek fuzzy metrik uzaylarda farklı büzülme tipleri için sabit noktanın varlığı ve tekliği incelenmiş, verilen örneklerle sonuçlar desteklenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu alanda yapılabilecek pek çok sabit nokta teori çalışmaları için kullanılabilir.





KAYNAKLAR

1. Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 20(1), 87-96.
2. Atanassov, K. T. (1994). Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 64(2), 159-174.
3. Schweizer, B., Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(1), 313-334.
4. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
5. Kramosil, I., Michálek, J. (1975). Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11(5), 336-344.
6. Grabiec, M. (1989). Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Systems*, 27, 385-389.
7. George, A., Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3), 395-399.
8. George, A., Veeramani, P. (1995). Some theorems in fuzzy metric spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3, 933-940.
9. George, A., Veeramani, P. (1995). On some results of analysis in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(3), 365-368.
10. Gregori, V., Miñana, J. J., Morillas, S. (2015). On completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 267, 133-139.
11. Gregori, V., Miñana, J. J., Morillas, S., Sapena, A. (2017). Cauchyness and convergence in fuzzy metric spaces. *RACSAM*, 111, 25-37.
12. Gregori, V., Romaguera, S. (2000). Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 485-489.
13. Gregori, V., Romaguera, S. (2002). On completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 130(3), 399-404.
14. Gregori, V., Romaguera, S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(3), 411-420.
15. Gregori, V., Miñana, J. J., Roig, B., Sapena, A. (2020). A characterization of strong completeness in fuzzy metric spaces. *Mathematics*, 8(6), 861.
16. Hamidi, M., Jahanpanah, S., Radfar, A. (2020) Extended graphs based on KM-fuzzy metric spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 17(5), 81-95.

17. Xiao, J. Z., Zhu, X. H., Zhou, H. (2020). On the topological structure of K M-fuzzy metric spaces and normed spaces. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(8), 1575–1584.
18. Molodtsov, D. (1999). Soft set theory—first results. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
19. Maji, P. K., Roy, A., Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
20. Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. (2003). Soft set theory. *Computers & Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.
21. Aygünoğlu, A. (2011). *Esnek Topolojik Uzaylar*, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 2011, 22-41.
22. Güler, A. C., Yıldırım, E. D., Özbakır, O. B. (2016). A fixed point theorem on soft G-metric spaces. *Journal of Nonlinear Science Applications*, 9(3), 885-894.
23. Kharal, A., Ahmad, B. (2011). Mappings on soft classes. *New Mathematics and Natural Computation*, 7(03), 471-481.
24. Shabir, M., Naz, M. (2011). On soft topological spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(7), 1786-1799.
25. Tantawy, O. A., Hassan R. M. (2016). Soft real analysis. *Journal of Prograssive in Mathematics*, 8(1), 1207-1219.
26. Das, S., Samanta, S. K. (2013). Soft metric. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1), 77-94.
27. Das, S., Samanta, S. K. (2012). Soft real sets, soft real numbers and their properties. *Journal Fuzzy Mathematics*, 20(3), 551-576.
28. Das S., Samanta S.K. (2013). On soft metric spaces. *Journal Fuzzy Mathematics*, 21(3), 707-734.
29. Erduran, F. Ş., Yiğit, E., Alar, R., Gezici, A. (2017). Soft fuzzy metric spaces. *General Letters in Mathematics*, 3(2), 91-101.
30. Erduran, F. Ş., Yiğit, E., Alar, R., Gezici, A. (2018). On soft fuzzy metric spaces and topological structure. *Journal of Advanced Studies in Topology*, 9(1), 61-70.
31. Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, 3(1), 133-181.
32. Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.

33. Chatterjea S. K. (1972). Fixed point theorems. *Comptes Rendus de l 'Academie Bulgare des Sciences*, 25(6), 727-730.
34. Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23, 292-298.
35. Ćirić, L. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2), 267-273.
36. Ćirić, L. B. (2003). *Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle* (1st Edition). Belgrade: University of Belgrade Faculty of Mechanical Engineering Press, 66-72.
37. Matkowski, J. (1977). Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 62(2), 344-348.
38. Abbas, M., Altun, İ., Gopal, D. (2009). Common fixed point Theorems for non compatible mappings in fuzzy metric spaces. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications [electronic only]*, 1(2), 47-56.
39. Altun, İ., Türkoğlu, D. (2007). A Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying a General Contractive Condition of Operator Type. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 9(1), 9-14.
40. Browder, F. E. (1983). Fixed point theory and nonlinear problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 9(1), 1-39.
41. Granas, A., Dugundji, J. (2003). *Fixed point theory* (1st Edition). New York: Springer, 1-84.
42. Khamsi, M. A., Kirk, W. A. (2011). *An introduction to metric spaces and fixed point theory* (1st Edition). New York: Wiley, 197-241.
43. Kirk, W. A., Sims, B. (2001). *Handbook of Metric Fixed Point Theory* (1st Edition). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-47.
44. Reich, S. (1983). Some problems and results in fixed point theory. *Contemporary Mathematics*, 21, 179-187.
45. Sedghi, S., Altun, İ., Shobe, N. (2010). Coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3-4), 1298-1304.
46. Singh, S., Watson, B., Srivastava, P. (1997). *Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-map Principle* (1st Edition). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-71.
47. Subrahmanyam, P. V. (1975). Completeness and fixed-points. *Monatshefte für Mathematik*, 80, 325-330

48. Türkoğlu, D., Binbaşıoğlu, D. (2011). Some fixed-point theorems for multivalued monotone mappings in ordered uniform space. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011, 1-12.





Gazili olmak ayrıcalıktır