



T.C.
NECMETTİN ERBAKANÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE
HOMOMORFİK ÇARPIM GRAFI**

Begüm YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Begüm YILMAZ

21/06/2023

ÖZET**YÜKSEK LİSANSTEZİ TEZİ****MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE HOMOMORFİKÇARPIM GRAFI****Begüm YILMAZ****Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı****Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ****2023, 40 Sayfa****Jüri****Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Nurten URLU ÖZALAN**

Graf teorisi, karışık görünen problemlerin çözümünü basitleştiren geniş bir uygulama alanına sahiptir. Her bilim dalında kullanılan ve modellenmeyi kolaylaştıran bu teori sürekli olarak yenilenmektedir ve her zaman gerekliliklere cevap vermesini sağlamak için gerekli gelişmeleri takip etmektedir. Örnek olarak, sosyal medya ağlarındaki ilişki yapılarını inceleyebiliriz; cebirsel yapıları şekillere dönüştürürken anlamlandırmaya yardımcı oluruz.

Bu çalışma 5 ana kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda graf teorisi ve graf parametrelerine ait bilgiler bulunmaktadır.

İkinci kısımda graf teorisi üzerindeki uygulamalarve monojenik yarı gruplar ile graf ilişkisi hakkında kaynak araştırmaları yer almaktadır.

Üçüncü kısımda graf çarpımlarına yer verildi, bu çarpımlara ait örnekler verilerek parametreleri bulundu.

Dördüncü kısımda, homomorfik çarpımda monojenik yarı gruplara ait özelliklerden bahsedilerek monojenik yarı grupların elemanları kullanılarak homomorfik çarpım grafları elde edildi. Elde ettiğimiz grafların bazı parametreleri bulundu.

Beşinci kısımda, tartışma ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel graflar, Graf, Graf çarpımları, Graf parametreleri, Homomorfik çarpım grafi, Monojenik yarı grup,

ABSTRACT**MS THESIS****THE HOMOMORPHIC PRODUCT GRAPH OVER MONOGENIC SEMIGROUPS****Begüm YILMAZ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MECHANICAL ENGINEERING**

Advisor: Doç.Dr. Nihat AKGÜNEŞ**2023,40Pages****Jury****Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER****Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ****Dr. Öğr. Üyesi Nurten URLU ÖZALAN**

Graph theory has a wide field of use and is a structure that simplifies the solution of problems that seem complicated to solve. This theory is in a constant renewal and is always up to date, with the ease of being used and modeled in every discipline. If we give an example of this theory, we can talk about social media networks. We will proceed by looking at the relationship of this theory with algebraic structures. Together with graph theory, we will deal with the work of making sense of algebraic structures by pouring them into shape.

This study consists of five main parts.

The first part contains information about graph theory and graph details.

The second part includes applications on graph theory and reference studies on the graph relationship with monogenic semigroups.

Third part graphics product are included, details are found to navigate the sections of these products.

The fourth part, all the properties of monogenic semigroups that we will need in the product we will use are mentioned, then homomorphic product graphs are obtained by using the elements of monogenic semigroups. Some parameters of the graphs we obtained were found.

The fifth part included discussion and suggestions.

Keywords: Algebraic graphs, Graphs, Graph parameters, Graph products, Homomorphic product, Monogenic semigroups.

ÖNSÖZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Öğretim Üyesi, Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde Homomorfik Çarpım Grafi Monojenik Yarıgruplar Üzerinde tanımlanmış ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Tezimde bana gerek tecrübesiyle gerek bilgisiyle hep yanımda duran ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e ve tüm öğretmenlerime teşekkürü borç bilirim. Buradaki başarımın en büyük destekçileri yapabileceğime hep inandıran bana her zaman empati kurup güçlü olmayı öğreten koca yürekli annem Arzu YILMAZ'a, babam Kamil YILMAZ'a,ablam Saliha,abim Fatih'e teşekkürü bir borç bilirim.İyi ki benim ailemsiniz.

Begüm YILMAZ
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

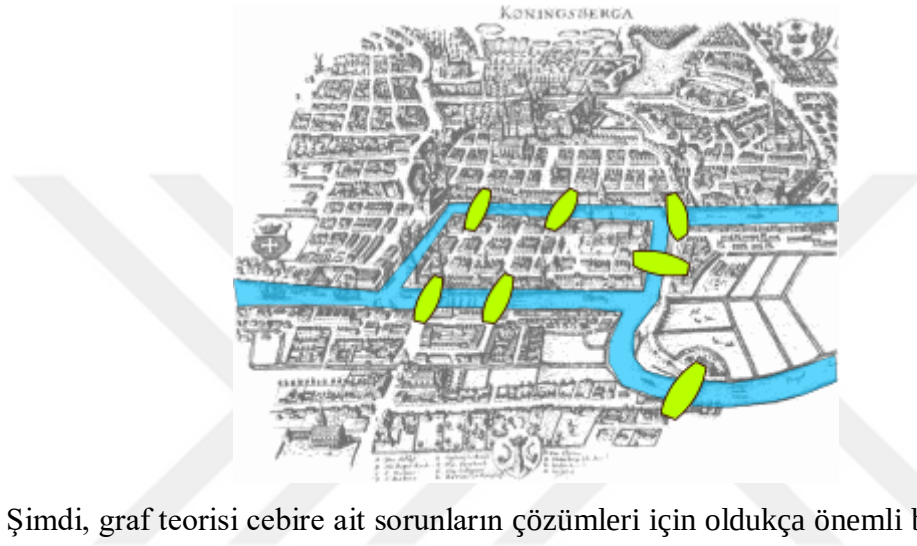
ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SEMBOLLER VE TANIMLANMALARI.....	v
1.GİRİŞ	1
1.1.Graf Tanımları	2
1.2.Dereceler ile Uzaklıklar	3
1.3.Altgraf	5
1.4.Yürüyüş Yol	5
1.5.Uzaklık Tanımı	6
1.6.Graf Çeşitleri	6
1.7.Graflara Ait Bazı Parametreler	9
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	12
3.GRAF ÇARPIMLARI.....	14
3.1.Graflarda Tanımlı Çarpımlar.....	14
4.MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE HOMORFİK ÇARPIM GRAFI	19
4.1.Giriş Kısmı ve Başlıca Tanımlar	19
4.2.Monojenik Yarıgrup Üzerinde Homomorfik Çarpım Grafi.....	20
5.SONUÇ VE ÖNERİ KISMI.....	29
6.KAYNAKÇA	30
ÖZGEÇMİŞ.....	30

SEMBOLLER İLE TANIMLARI

Semboller	Tanımları
$G(V, E)$	Grafın gösterimi
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
$d(u, v)$	u ile v Köşelerinin arasındaki uzaklık
$e(v)$	v Köşesine ait eksantrik
$rad(G)$	G Grafının yarıçapı
$diam(G)$	G Grafının uzaklığı
$\chi(G)$	Renklendirme kümesinin eleman sayısı
$\Delta(G)$	G Grafının en büyük derecesi
$\sigma(G)$	G Grafının en küçük derecesi
$\omega(G)$	G Grafının klik kümesinin eleman sayısı
$\alpha(G)$	G Grafının örtü kümesinin eleman sayısı
$girth(G)$	G Grafına ait girth
C_n	Çevre graf
P_n	Yol graf
K_n	Tam graf
S_m	Monojenik yarı grup
$G_1 \square G_2$	Kartezyen çarpım
$G_1 [G_2]$	Lexicographical çarpım
$G_1 \times G_2$	Tensör çarpım
$G_1 \bowtie G_2$	Homomorfik çarpım
$G_1 \blacksquare G_2$	Strong çarpım

1.GİRİŞ

Königsberg kentinde şehri dört bölüme ayıran bir nehirin üzerinde bulunan yedi köprü üzerinden sadece bir kez geçerek ve bütün köşelere uğrayarak başlangıç köşesine varabilir miyiz? sorusuna cevap aranırken teoremin temelleri atılmıştır. Euler 1736 tarihinde kaleme aldığı Königsberg'in Yedi Köprüsünü anlattığı köprünün adı başlığı olan çalışmasıyla graf teori kavramının literatüre geçmiştir. 1736'da Euler' in incelemeleri böyle bir gezme yapılamayacağını göstermiştir. (Gross ve Yellen, 2004; Doğansoy, 1993).



Şimdi, graf teorisi cebire ait sorunların çözümleri için oldukça önemli bir rol oynamakla birlikte, pek çok alanda da kullanılmaktadır. Ulaşım ağlarındaki yol ve bilgi ulaşmaları başta olmak üzere elektrik devreleri ve molekül diyagramlar gibi graflar gittikçe artan sayıda kullanma alanları bulmuştur. Temel bilim dallarında fizik, muhasebe uygulamalarında, tıbbi durum modellenmesinde ve programlamada akış problemlerine dayalı olan genel programlamada teoriye dayanan çözümlere rastlanabilir.

Graf Teoriyle cebirsel yapıların birlikte yapıldığı çalışmalarda bu konuyu inceleyenler için büyük ilgi görmüştür. I.Beck graflar ile ilgili ilk çalışmasında halka teorisiyle birlikte ifade etmiş.Beck değişmeli halkaların graflarına ait renklendirmeyi ifade etmiştir (Beck, 1988). Anderson değişmeli olan halkaların sıfır bölen graflarıyla çalışmıştı (Anderson 1999). Sıfır bölen kümesinden oluşan graflarla değişmeli yarı gruplarla ilgilenmiştir Çalışmalarında özel bir graf çarpımı olan homomorfik çarpım üzerinde durulmuştur (Sahoo ve Pal ,2017). Yol graflar üzerinde homomorfik çarpım ve parametrelerini bulma ile ilgili çalışmalarda bulunulmuştur (Kumar A.,Pradhan P.,2020).

Graf teoreminin doğuşu ve kullanım alanları üzerinde duruldu. Buradan şunu anlıyoruz ki graf teori hemen hemen hayatımızın her alanında mevcut. Kullanılma alanlarına bakılırsa bizlerin işini kolaylaştıracak bir teori olduğunu görmekteyiz.

Buradan yola çıkarak graf teori belli kurallar doğrultusunda birleştirilmiş çizgiler kümesi olarak görmekteyiz. Bundan sonraki bölümlerde graf matematiksel tanımından, graf örneklerinden, graf çeşitlerinden ve graf çarpımlarından bahsederek ilerleyeceğiz. Kullanılacak başlıca ifadeler Handbook of Graph Theory'den kullanılmıştır.

1.1.Graf Tanımları

Tanım 1.1.1. Noktaların birbirleriyle bağlanmasıyla oluşan matematiksel yapılara **graf** denir.

Tanım 1.1.2. Bir grafa ait bağlantılarda yön bulunmuyorsa **yönsüz graf** şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.3. Herhangi H grafının $H = (S, M)$; S ve M olmak üzere iki kümeden oluşmaktadır. S ye ait elemanlar **köşe(vertex)** M 'ye ait elemanlar **kenar(edge)** kümelerini oluşturmaktadır. Böyle gösterime sahip $H = (S, M)$; ikililer **graf (graph)** olarak ifade edilir.

Tanım 1.1.4. Grafa ait vertex ile bir veya iki köşe arasında bağlantı kurulur. Bu vertexler **bitiş noktaları(endpoints)** diye isimlendirilir.

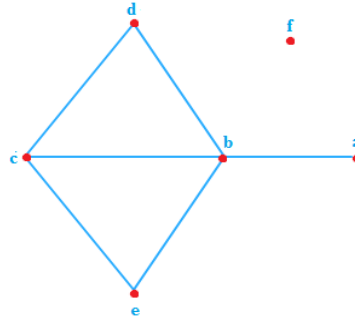
Tanım 1.1.5. Vertex elemanlarına ait kümelerle edge elemanlarına ait kümelerin eleman sayıları sonlu sayıda ise graf **sonlu graf**dır. Grafa ait vertex kümesinin elemanları ile ifade edilen sayıya grafa ait **mertebe (order)**; kenar kümesinin elemanları ile ifade edilen sayıya da grafa ait **boyut (size)** denmektedir.

Tanım 1.1.6. e ve p vertex bir tane edge ile birbirlerine bağlı ise e vertexi ile p vertexi **komşu vertexler** olur.

Tanım 1.1.7. İki kenarında bitim noktaları aynıysa bu kenarlar **komşu kenarlar** olarak ifade edilir.

Tanım 1.1.8. İki vertex arasında bir edge bağlantısı bulunuyorsa buna **basit komşuluk** denmektedir.

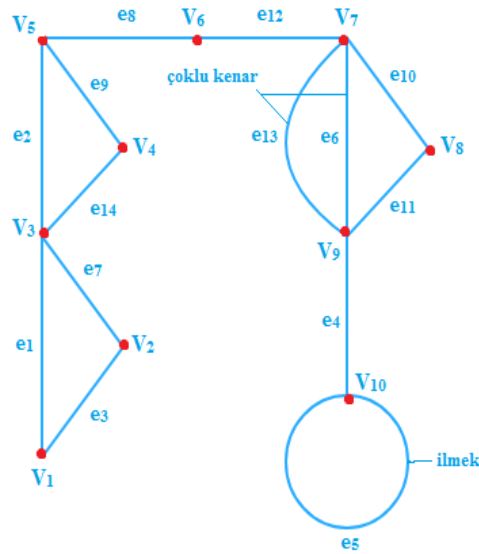
Tanım 1.1.9. Bitiş noktası bir adet olan ve tekrar kendine bağlayan kenar ise bu kenara **ilmek (loop)** adı verilir.



Şekil 1.1.10 Basit Graf Örneği

Tanım 1.1.10. Herhangi bir $H = (S, M)$ grafına ait S köşelere ait kümenin ve M kenarlara ait kümesiyken bu kümeler elemana sahip olmayan kümelerse grafta **boş graf** olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.11 Köşe ait küme elemanları $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ ve kenar ait küme elemanları $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{13}\}$ olmasından dolayı derece sayısı $|V| = 10$ ve boyut sayısı $|E| = 13$ olup $G = (V, E)$ çoklu graf gösterimi de alt taraftaki görseldeki gibi olmaktadır.



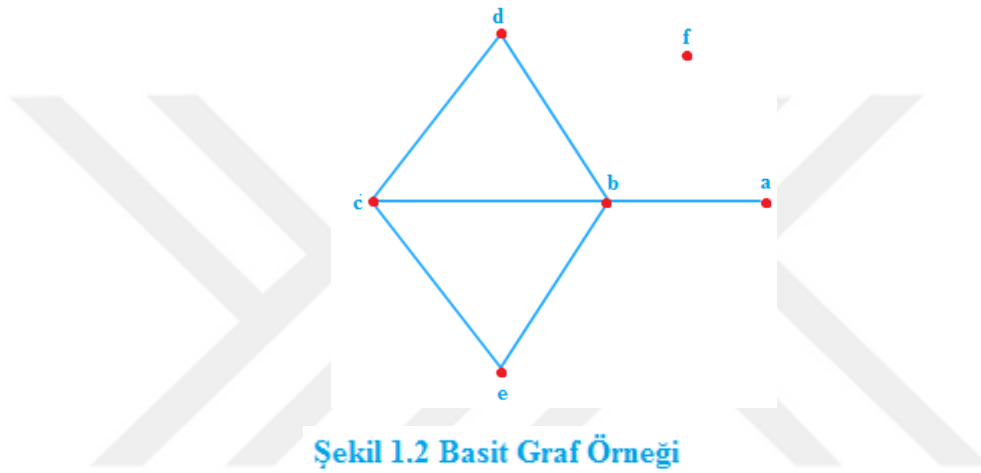
Şekil 1.1.12 Çoklu Graf Örneği

1.2.Dereceler ve Uzaklıklar

Graf teorisinin en çok üzerinde durulan temel iki gözde kavramı vardır. Birinci kavram olarak köşe derecesi ve ikinci kavram olarak da iki köşenin birbiriyle olan mesafesi kavramlarıdır.

Tanım 1.2.1. Grafın belirlediğimiz herhangi bir vertexe komşuluk yapan köşeler kümesinin eleman sayısı belirlediğimiz **köşenin derecesi** oluyor ve $d_G(v_i)$ ile gösterilmektedir. Grafın seçilen herhangi bir vertex komşusu olan vertexe 1 derece ekler. İlmek ise şekil itibarıyla kendine geri döndüğü yani kendiyile de komşuluk ilişkisi olduğu için vertexe 2 derece ekler. Grafın seçilen köşelerden $der(G) = 1$ olarak ifade ettiğimiz vertexe **uç (pendant)** vertex, $der(G) = 0$ olan vertexe de **izole (isolated)** vertex şeklinde adlandırılır.

Örnek 1.2.2. Basit graflara ait bir örnek üzerinden bakarsak f izole köşe, a uç köşe ve kendi seçtiğim b köşesinin derecesi $der_G(b) = 4$ dür.



Tanım 1.2.3. Bir grafta köşelerin içinden en az dereceye sahip olan köşeye **minimum dereceli** köşe denmekte ve $\sigma(G)$ ile gösterilmektedir. En fazla dereceye sahip köşeye **maksimum dereceli** köşe denmekte ve bu köşeye ait dereceler $\Delta(G)$ gösterilmektedir.

Örnek 1.2.4. Yukarıda gördüğümüz grafta $\sigma(G) = 0$ ve $\Delta(G) = 4$ dür.

Teorem 1.2.5. G sonlu graf olmak üzere grafın köşelerine ait kümenin $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ elemanlarıyla, kenarlarına ait kümenin $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ elemanlarının oluşturduğu formül vardır.

$$\sum d_G(v_i) = 2m$$

Şöyle açıklarsak grafa ait köşelerin derece toplamı kenar sayılarının iki katına eşit olmaktadır.

İspat. n mertebesi ve m boyutu olan G grafı ve bu grafa ait her edge, iki vertexe komşudur. Dolayısıyla vertexlerin derece sayılarının toplam ifadesiyle her bir vertex iki

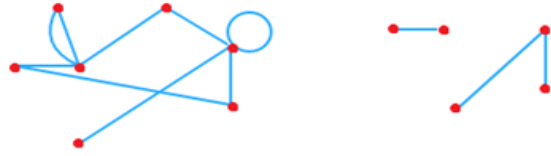
edgeyi gösterir. Bununla beraber G grafına ait köşe kümesinin elemanlarının derece toplamı, edge adetinin iki katıdır. ■

Sonuç 1.2.6. G grafına ait vertexlerin derece toplamı çift sayıdır.

1.3.Altgraf

Tanım 1.3.1. $H = (S_1, M_1)$ elemanlarından oluşan $D = (S_2, M_2)$ elemanlarından oluşan graftır. $S_2 \subseteq S_1$ ve $S_2 \subseteq S_1$ şartlarını da yerine getiriyorsa, D grafına H nin altgrafıdır denmektedir.

Tanım 1.3.2. $H = (S_1, M_1)$ elemanlarından oluşan $D = (S_2, M_2)$ elemanlarından oluşan graftır. $S_2 \subseteq S_1$ ve $S_2 \subseteq S_1$ şartıyla birlikte M grafının bütün vertexleri diğer vertexlerle komşuluk oluşturuyor ise M grafi G nin tam altgrafı olarak adlandırılır.



Şekil 1.3 Bir graf, alt graf

1.4.Yürüyüş Yol

Tanım 1.4.1. Köşelere ile kenarlara ait elemanlar $k = 1, \dots, m$ ve v_{k-1} ile v_k vertexleri e_k ya ait bitiş noktası olmakla birlikte $W = v_0, e_1, v_1, e_1, \dots, e_m, v_m$ olan sıralı elemanlara G grafına ait **yürüyüş** denmektedir.

Başlangıç olarak ifade edilen köşe v_0 , Bitiş olarak ifade edilen köşe v_m olur. **İç köşe** ne başladığı yer belli ne de bittiği belli olmayan vertexdir. Başlangıca ait vertex ve bitiş ait vertex birse kapalı yürüyüş başlığıyla isimlendirilmektedir.

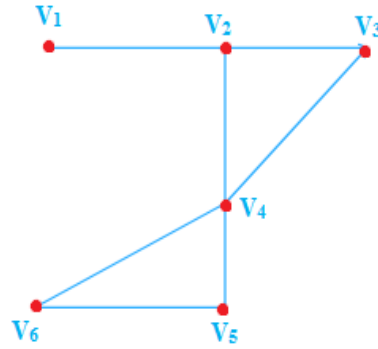
Tanım 1.4.2. Grafın **izi** birden çok aynı kenardan geçilmediği yürüyüştür.

Tanım 1.4.3. Grafın **euler izi** o grafa ait tüm kenarlarından sadece bir defa geçtiğinde yürüyüş olur.

Tanım 1.4.4. Grafın **yol** o grafa ait içeride bulunan noktaların tekrarının olmadığı iz denmektedir.

Tanım 1.4.5. Başlangıca ait noktayla bitişe ait noktaların dışında bütün vertexleri ve bütün edgeleri aynı olmayan kapalı şekildeki yürüme ifadesine **devir** denmektedir.

Örnek 1.4.6 Aşağıda bulunan şekil 1.4 grafi için $v_1v_2v_4v_5v_6v_4v_3$ 6 uzunlukta yürüyüş olarak ifade edilir ancak izi ifade edilmez. $v_1v_2v_3v_4v_6v_5v_4$ iz olarak ifade edilir ancak yol olarak ifade edilmez. Grafa ait $v_1v_2v_4v_3$ yol olarak adlandırılır. $v_4v_5v_6v_4$ de bir devir olarak adlandırılır.



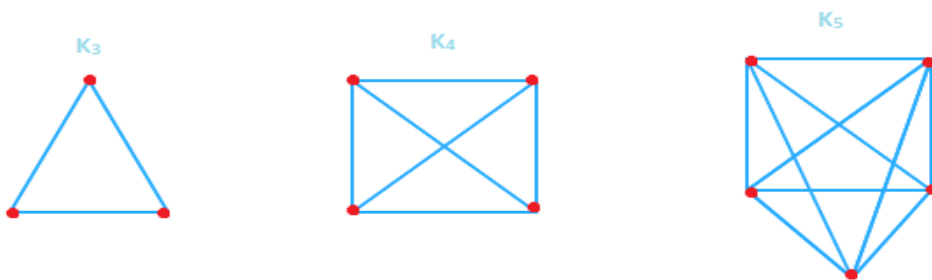
Şekil 1.4 G grafi

1.5.Uzaklıklar

Tanım 1.5.1 Grafa ait seçtiğimiz iki tane vertex olan x ile y nin birbiri arasındaki mesafeye **uzaklık** aldığımız iki köşenin birbirine olan en küçük yürümenin uzunluğu olup $d(x,y)$ gösterimi yapılır.

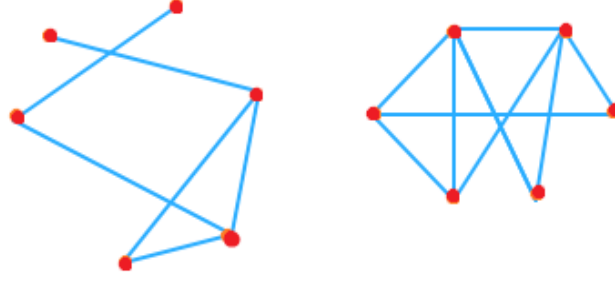
1.6.Graf Çeşitleri

Tanım 1.6.1 Grafa ait köşe kümesinin iki köşesi komşuysa G ye **tam graf** denmektedir. n mertebesi olan graf K_n ile ifade edilmektedir.



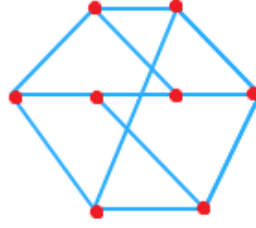
Şekil 1.6.1 $n=3,4,5$ için tam graflar

Tanım 1.6.2 Grafa ait vertex kümeleriyle benzer vertex kümesine sahip olan, kenara ait küme G de bulunmayan edgelerden oluyorsa ve bu sebepten komşuluk bulundurmayan vertexlerin birbirleri arasında komşuluk olmasını sağlayan graf da G **grafına ait tamamlayıcı graf** denmektedir.



Şekil 1.6.2 Bir graf ve tamamlayıcı grafı

Tanım 1.6.3 Grafa ait köşelerin hepsi r derece olan graflar **düzgün graf** denmektedir.



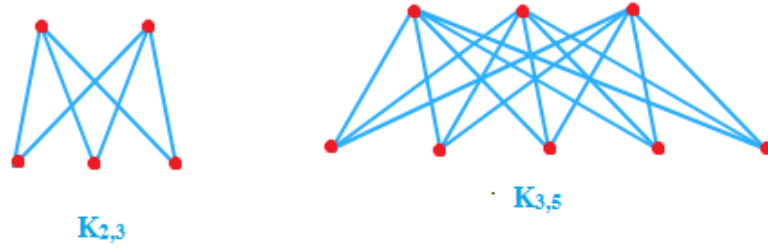
Şekil 1.6.3 3-düzgün graf

Tanım 1.6.4 Bir G grafına ait başlangıçta olan köşeyle bitişte olan köşesinin $der(G) = 1$ olan ve grafa ait kalan tüm köşelerin dereceleri ikiyse bu grafa da **yol graf** denmektedir. n mertebesi olan yol grafın gösrerimi P_n dir.



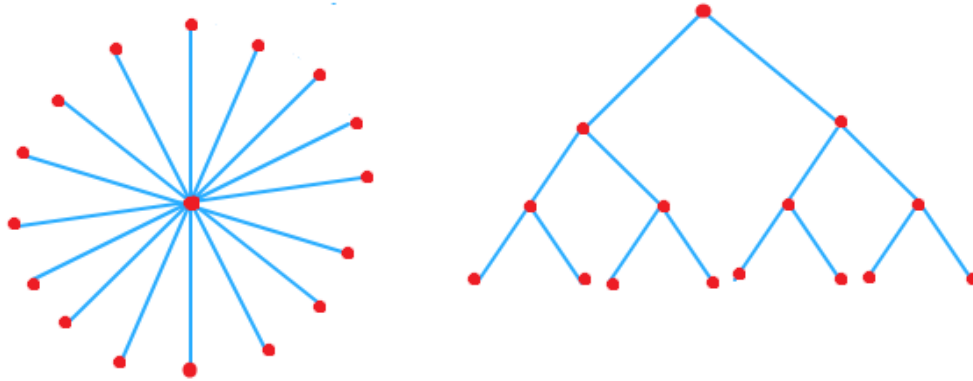
Şekil 1.6.4 Yol Graflar

Tanım 1.6.5 Bir G grafına ait köşe kümesinin iki adetten yüksek mertebeye sahip bağımsızlıkla aynı zamanda ayrıklığı olan küme oluyorsa graf **iki parçalı graf** denmektedir. Köşeye ait kümeler V_1 ve V_2 olup iki parçalıyla ifade ettiğimiz bir grafın bütün köşeleri karşılıklı şekilde birbirleriyle komşuysa **iki parçalı ayrılabilen tam graf** denmektedir. $|V_1| = m$ mertebeli ve $|V_2| = n$ mertebeliyse $K_{m,n}$ olarak ifade edilmektedir.



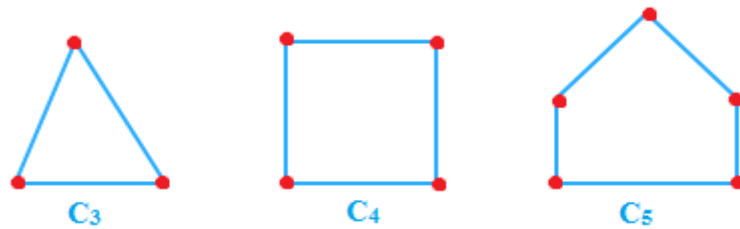
Şekil 1.6.5 İki parçalı tam graf örnekleri

Tanım 1.6.6 Devir içermeyen bağlantı içeren grafa **ağaç graf** denmektedir. T ile ifade edilir.



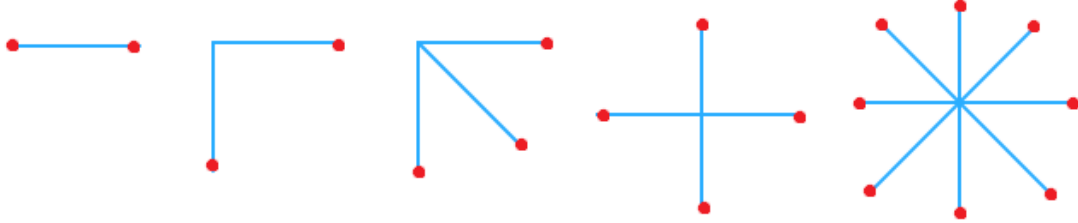
Şekil 1.6.6 Ağaç grafların bazıları

Tanım 1.6.7 G grafına ait bütün köşelerin dereceleri iki olan ve başlangıç ve bitiş noktaları aynı olmasıyla ifade edilen grafa **çevre graf** şeklinde isimlendirilir. Bir de şöyle ifade edecek olursak n adet köşeye sahip çevre grafa C_n olarak adlandırılır.



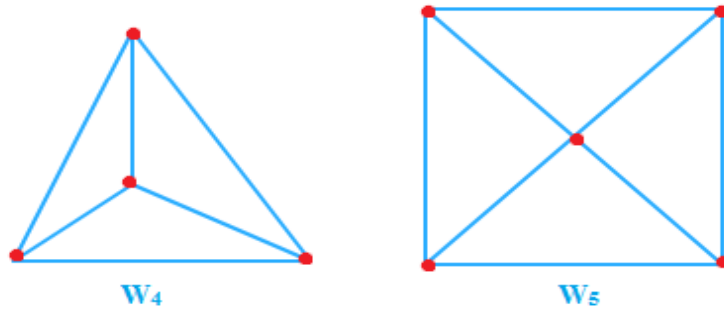
Şekil 1.6.7 Çevre graflar

Tanım 1.6.8 m tane köşesi olan ağaç graf olarak adlandırılan grafın bir tane köşesine ait derecesi $m - 1$; diğer köşelerin ait derecesi 1 olur. Bu grafa **yıldız graf** adlandırılırken olarak S_m şeklinde ifade edilir. Yıldız grafları da iki parçaya ayrılabilen tam graf şeklinde isimlendirebiliriz. m köşesi olan S_m yıldız grafına ait iki parçaya ayrılabilen grafın gösterimi $K_{1,m}$ olan bir tam graftır.



Şekil 1.6.8 Yıldız graflar

Tanım 1.6.9 m tane köşesi olup bir C_m çevre grafına bir adet edge ile bütün köşelerine komşuluğu var olan yeni bir vertex ilavesiyle gösterilen grafa **tekerlek graf** denmektedir. W_m şeklinde ifade edilir.



Şekil 1.6.9 Tekerlek graflar

1.7. Graflara ait bazı parametreler

Tanım 1.7.1 H grafına ait köşeler x ile olsun. x köşesinden y köşesine gidilen en kısa yol olan mesafeye x köşesinden y köşesine **uzaklık** denmektedir. $d(x, y)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.7.2 $H = (S, M)$ grafına ait aldığımız k köşesiyle k köşesine en uzakta olan vertexlerin birbirine olan mesafesine k köşesine ait **eksantirik denmektedir** ve $e(k)$ şeklinde ifade edilir. Başka ifadeyle;

$$e(k) = \max\{d(k, x) : x \in V(H)\}$$

gösterilmektedir.

Tanım 1.7.3 Herhangi bağlantılı H grafına ait köşelerin birbirine olan en ufak eksantirik H grafına ait **yarıçap** denmektedir. İfade edilişi

$$rad(H) = \min\{e(k) : v \in V(H)\}$$

gösterilebilir.

Tanım 1.7.4 Herhangi bağlantılı H grafına ait köşelerin birbirine olan en kocaman eksantirik H grafına ait **çapı** denmektedir. $Diam(H)$ şeklinde gösterimi vardır. Bir de şu şekilde belirtirmek istersek;

$$diam(H) = \max\{e(k) : v \in V(H)\}$$

gösterimi bu şekildedir.

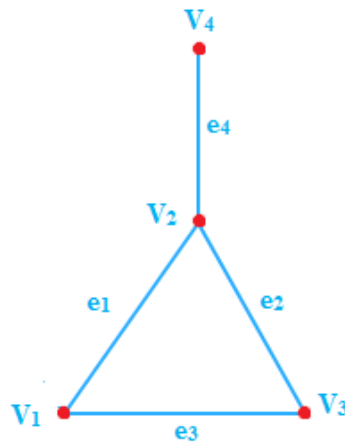
Teorem 1.7.5 Bir H grafında

$$rad(H) \leq diam(H) \leq 2rad(H)$$

eşitsizlik bulunur.

Tanım 1.7.6 G grafına ait en az mesafe ile oluşturduğumuz devir **çevrim** diye ifade edilir. Gösterimi $gr(G)$ şekildedir.

Örnek 1.7.7 Aşağıda şeklini gördüğümüz $G = (V, E)$ ve $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ köşesine ait mesafeler $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$ ve $d(v_1, v_4) = 3$. Çap köşelerin birbirine maksimum uzaklığı ifade ettiğinden G grafının çapı $diam(G) = 2$ olur. Yarıçap $rad(G) = 1$ olur.



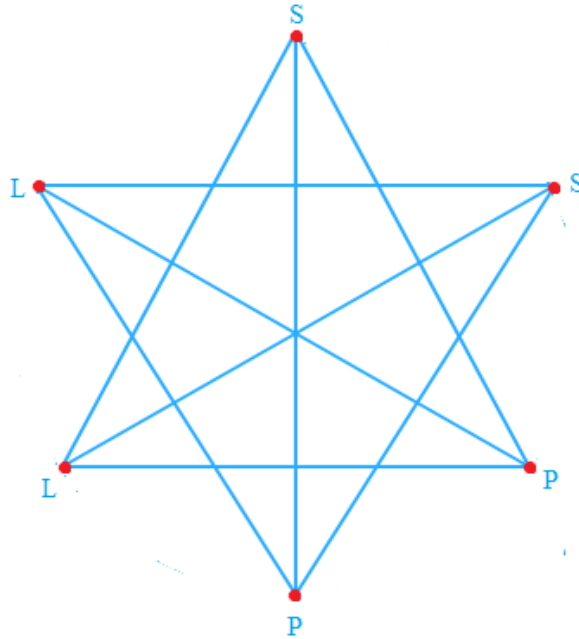
Şekil 1.7.1 Graf örneği

Tanım 1.7.8 G grafına ait köşelerin kümesi V olsun. $D \subseteq V$ olmakla birlikte D kümesine ait bütün elemanların V/D kümesinden seçtiğimiz bir tane küme elemanına komşuysa D kümesinin en az sayıda elemana sahip kümenin **baskınlık sayısı** denmektedir. $\gamma(G)$ şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 1.7.9 Grafa ait **köşe renklendirmesiyle** köşe kümesine ait V_G olan, kümeye ait elemanlarında renklerden oluşmasıyla oluşan C kümesi bir fonksiyon olur. Komşuluk oluşturan köşeler daima başka renge boyanabiliyorsa renklendirme doğru olur. Grafi k veya k den az sayıda renkle ve köşenin uygunluk kuralı göz önünde bulundurularak renklendirilebiliyorsa **k -boyanabilir** denmektedir. G grafına **köşeye ait kromatik numarası** G grafına ait en küçük k rakamıdır. $\chi(G)$ ifade edilir

Tanım 1.7.10 Grafa ait bütün tam alt graflara klik denmektedir. Klik sayılarının içinden daha çok köşeye ait sayıya **klik sayısı** denmektedir. $\omega(G)$ ile ifade edilir.

Örnek 1.7.11 İfade ettiğimiz G grafına ait köşelerin S (siyah), P (pembe) ve L (lila) ile boyarsak kromatik sayısını 3 olmuş olur. Grafa ait altgrafların en büyüğünün vertex sayısı 3 olduğundan grafa ait klik 3 olur.



Şekil 1.7.2 Klik ve Renklendirme için örnek

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Aşağıda belirtilen graflara ait parametreler ve topolojik indeksler üzerine çalışılan kaynak araştırmasında çalışmaların gelişim ve değişimleri daha iyi fark edilmesi için yılları gözetilerek sıralanmıştır.

Berge (1962), “The Theory of GraphsandIts Applications” ismiyle anılan grafları ve mükemmelliklerini bulup tanıtmıştır. Eserde, bu graflarda kullanabilecek kriteri belirleyen standartlar da yer alır.

Ostrand (1973), “Graphs with specified radiusand diameter” çalışmada radius ve diamentre arasında formüsel bir ilişki olduğunu ifade etmiştir.

Bondy, J.A., Murty U. S. R. (1976), “Graph theory with applications” isimli eserde graf teoriye ait standart tanımlar ve teoriyle birlikte yapılan işlemsel ifadeler uygulama gibi pek çok irdelenmiştir.

Beck (1988), “Coloring of Commutating Rings” isimli çalışmada graflarına ait nokta belirlendiği görülmektedir. Çalışmayı yazan, halkalar aracılığıyla sıfır-bölen grafların tanımını gerçekleştirmiş, bu problem üzerinde durulmuştur. Aynı zamanda renklendirmesi problemine de odaklanmıştır; bu sayede insanlar daha iyi anlayabilmek adına matematiksel bir yaklaşım kullanarak halkalı grafların modellenmesini sağlamıştır.

Erdős ve ark. (1989), “Radius, diameterand minimum degree” eserde çok kulanımda olan radius ve diamentreye ile grafa ait köşe sayılarıyla minumum derece kavramları üzerinde durmuş ve çok önemli katkıları olmuştur.

Bollobás, B. (1998), “Modern Graph Theory” çalışmasında graf teorisinin temelleri ve genel bilgiler üzerinde durmuştur.

Dankelmann, ve ark. (2000), “Average distance, minimum degree and spanningtrees” adlı çalışmada grafa ait derece, köşe sayısı ve uzaklık gibi kavramlarla ilgili araştırma yapmıştır.

Dündar (2001), “Accessibility number and then eighbor-integrity of generalized Petersen graphs” isimli eserde grafların komşuluklarıyla ifade edilen erişilebilirlik ile ilgili çalışması vardır.

DeMeyer ve ark. (2002), “The Zero-Divisor Graph of a Commutative Semigroup” isimli çalışmada halkalar üzerinde tanımlı sıfır bölen graflarının bağlantılılığı hakkında çalışma yapmıştır.

Akbari ve ark. (2003), “When a Zero-Divisor Graph is Planaror a Complete r-Partite Graph” çalışmada sıfır bölen grafların parçalı olma durumları incelenmiştir.

Gross, J.L., Yellen, J., (2004), “Handbook of GraphTheory” isimli çalışmada grafları ait temel tanım teoremler üzerine durulmuştur.

DeMeyer, F. R. ve DeMeyer, L., (2005), “Zero-Divisor Graphs of Semigroups” isimli çalışmada değişmeli olmayan sıfır bölen graflarına ait özellikler üzerinde durulmuştur.

Chudnovsky ve ark. (2006), “The strong perfect graph theorem” eserde konjektürün güçlülüğünün ispatı bulunmuş ve mükemmel graf için yapılacak çalışmalara ışık olmuştur.

Mukwambi (2012), “A Note on Diameter and The Degree Sequence of a Graph” isimli çalışmada graflara ait parametre olan düzensizlik indeksi üzerine durulmuştur.

Akgüneş (2012), “Analyzing special parameters over zero-divisor graphs” çalışmada farklı asal olan p ve q ait sıfır bölen graflarına ait parametreler bulunmuştur.

Akgüneş ve Çevik (2013), “A new bound of radius of irregularity index” adlı çalışmada radius kavramında kullanılmak üzere düzensizlik indeks kavramının desteğiyle üst sınır oluşturmuşlar.

Das, Akgüneş ve Çevik (2013), “On a graph of monogenic semigroup” isimli eserlerinde monojenik yarıgruplardan oluşan grafların tanımından bahsetmişlerdir. Grafa çeşitli özellikler incelenmiştir ve grafların mükemmelliği üzerine durulmuştur.

Shao, Z., & Solis-Oba, R. (2013), “ $L(2, 1)$ –labelings on the homomorphic product of two graphs.” Modüler çarpıma ait renklendirme sayısı üzerinde durulmuştur.

Akgüneş, Das ve Çevik (2014), “Topological indices on a graph of monogenic semigroups” isimli çalışmada bir önceki çalışmalarında ifade etikleri monojenik yarıgrup graflara ait topolojik indekslerin monojenik yarıgrup mertebesiyle bulunacağı kanıtlanmıştır. Topolojik indekslerin hesaplamaları yapılmıştır.

Sankar Sahoo and Madhumangal Pal, (2017) Homomorfik çarpım sonucu elde edilen graflar üzerinde dereceler bulunmuştur.

Cangül İ.N., (2017), “Graf Teorisi-I” adlı eserinde genel graf bilgisi yer almaktadır.

Çağan, B. (2017), “Monojenik yarıgruplar üzerinde nokta çarpım grafi ” adlı çalışmada monojenik yarıgrupların nokta çarpımını incelemekle birlikte homomorfik çarpıma da yer vermiştir.

Dervovic, D. (2018), “Perfect weak modular product graphs.” adlı çalışmada zayıf modüler çarpımlarını incelemiş, sonuçlar üzerinden izomorfizmlarını bulmuştur.

Akgüneş, Nihat, and Büşra Çağan. (2018). “On the dot product of graphs over monogenic semigroups” çalışmada nokta çarpım grafi bulunarak çarpım grafi üzerinde gerekli parametreler bulunmuştur.

Öteleş, A., Zangana, D., (2020), “Lucas Sayılarıyla İlişkili İki Parçalı Graflar” adlı çalışmalarında grafa ait mükemmel sınıflama olan (1-factor) sayılarıyla Lucas sayılarının ilişkisi verilmiştir.

3.GRAFÇARPIMLARI

Graf çarpımlarıyla ilgili bu bölümde, temel çarpma teorisi ve uygulamalar hakkında detaylara inilmektedir ve bunlarla ilgili örnekler sunulmaktadır. Çarpımlar hemen hemen her alanda karşımıza çıkmakta işimiz kolaylaştırmaktadır. Matematik dışında kimya gibi, bilgisayar ağırlıklı gibi pek çok yerde kullanım alanı mevcuttur. Çarpım graflarını oluştururken boştan farklı iki grafin hangi kurallar doğrultusunda kenar ve köşe kümelerinin oluşturulacağını görüp inceleyeceğiz.

Tanım 3.1 Herhangi H_1 ve H_2 olacak şekilde iki grafi ele alalım. Köşe kümeleri $S(H_1) \times S(H_2)$ Kartezyen çarpım kümesine ait elemanlardan oluşan ve kenar kümesi “bir kurala bağlı” bir şekilde oluşana **H_1 ve H_2 graflara ait çarpım** denmektedir ve $H_1 * H_2$ ile gösterilir.

3.1.Graflarda Tanımlı Çarpımlar

Tanım 3.1.1 H_1 grafına ait vertex kümesinin elemanları S_1 , H_2 grafına ait vertex kümesinin elemanları S_2 olsun. $S = S_1 \times S_2$ kartezyen çarpım kümesiyle $k = (k_1, k_2)$ ve $m = (m_1, m_2)$ elemanları alınsın.

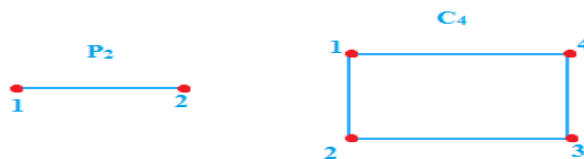
$$i) \quad k_1 = m_1 \text{ ve } (k_2, m_2) \in E(H_2)$$

ya da

$$ii) \quad (k_1, m_1) \in E(H_1) \text{ ve } k_2 = m_2$$

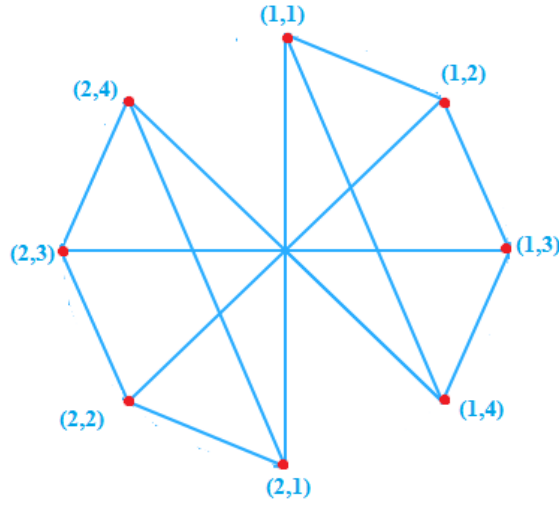
koşulu sağlandığında u ile v vertexleri komşuluk oluşturur denmektedir. Kural doğrultusunda ifade edilen graf H_1 ile H_2 grafına **kartezyen çarpımına ait graf** denmektedir. $H_1 \square H_2$ ile ifade edilir.

Örnek 3.1.2 $H = P_2 \square C_4$ kartezyen çarpımla sonucunda elde edilen grafa açıkladığımız özellikleri uygulayalım.



H çarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları

$V = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_4)\}$ ifade edilir ve H kartezyen çarpımına ait grafın şekli;



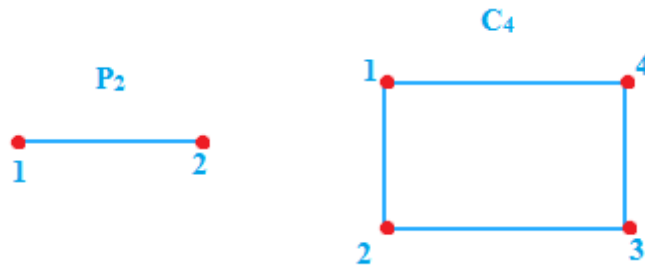
Şekil 3.1.1 P_2 ve C_4 grafi ve Kartezyen Çarpım Grafları

Tanım 3.1.3 H_1 grafına ait vertex kümesinin elemanları S_1 , H_2 grafına ait vertex kümesinin elemanları S_2 olsun. $S = S_1 \times S_2$ kartezyen kümesiyle $k = (k_1, k_2)$ ve $m = (m_1, m_2)$ elemanları alınsın.

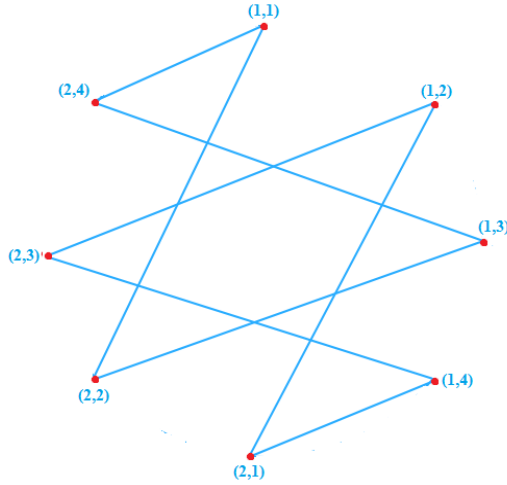
$$(k_1, m_1) \in E(H_1) \text{ ve } (k_2, m_2) \in E(H_2)$$

koşulu sağlandığında u ve v köşelerinin arasında komşuluk oluşur. Oluşum sağlayan H_1 ile H_2 grafına **tensör çarpımın grafı** denmektedir. $H_1 \times H_2$ ifade edilir.

Örnek 3.1.4 $H = P_2 \times C_4$ tensör çarpımıyla oluşan grafı için açıkladığımız özellikleri uygulayalım.



H çarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları $V = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_4)\}$ ifade edilir. H tensörde çarpımıyla elde edilen grafın şekli;



Şekil 3.1.3 $P_2 \times C_4$ tensör çarpımına ait graf

olur. Şeklideki G çarpımına ait grafa mertebesi 8, boyutta 8 olur. $der((1,2)) = 2$ olup $der((3,3)) = 2$ olmasından dolayı $\sigma(G) = 3$ ve $\Delta(G) = 1$.

Tanım 3.1.5 H_1 çarpım grafına ait köşeye ait küme elemanları S_1 , H_2 çarpım grafına ait köşeye ait küme elemanları S_2 olsun. $S = S_1 \times S_2$ kartezyen çarpım sonucunda elde edilen kümenin $k = (k_1, k_2)$ ve $m = (m_1, m_2)$ elemanlar alınsın.

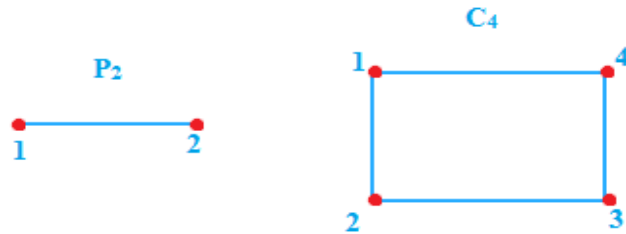
i) $(k_1, m_1) \in E(H_1)$

ya da

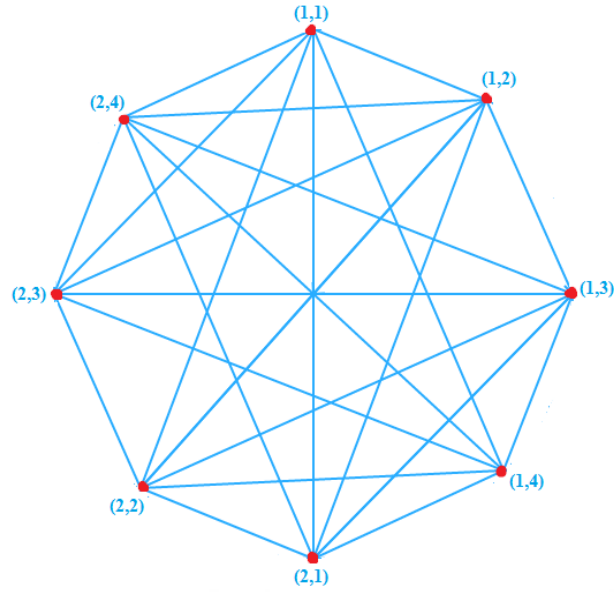
ii) $k_1 = m_1$ ve $(k_2, m_2) \in E(H_2)$

koşulu sağlandığında u ve v köşelerinin arasında komşuluk oluşur. Böyle ifade edilen grafin da H_1 ile H_2 grafına **lexicographical grafi** denmektedir. $H_1[H_2]$ ifade edilir.

Örnek 3.1.6 $P_2[C_4]$ lexicographical grafi için açıkladığımız özellikleri uygulayalım.



H çarpım grafına ait köşeye ait küme elemanları $V = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_4)\}$ ifade edilir. H lexicographical çarpımına ait grafin şekli;



Şekil 3.1.5 $P_2[C_4]$ lexicographical çarpımına ait graf

olur. $der((2,1)) = 6$ ve $der((1,1)) = 6$ olmasıyla birlikte $\sigma(G) = 6$ ve $\Delta(G) = 6$ dur.

Tanım 3.1.7 H_1 çarpım grafına ait köşeye ait küme elemanları S_1 , H_2 çarpım grafına ait köşeye ait küme elemanları S_2 olsun. $S = S_1 \times S_2$ kartezyen kümesinin elemanları $k = (k_1, k_2)$ ile $m = (m_1, m_2)$ alınsın.

i) $k_1 = m_1$ ve $(k_2, m_2) \in E(H_2)$

ya da

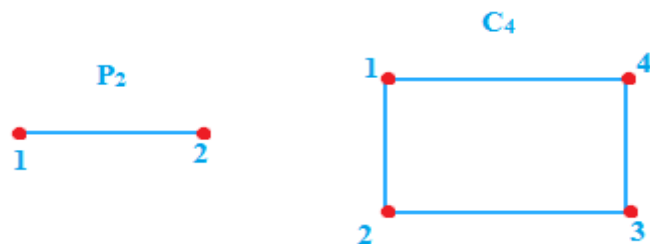
ii) $(k_1, m_1) \in E(H_1)$ ve $k_2 = m_2$

ya da

iii) $(k_1, m_1) \in E(H_1)$ ve $(k_2, m_2) \in E(H_2)$

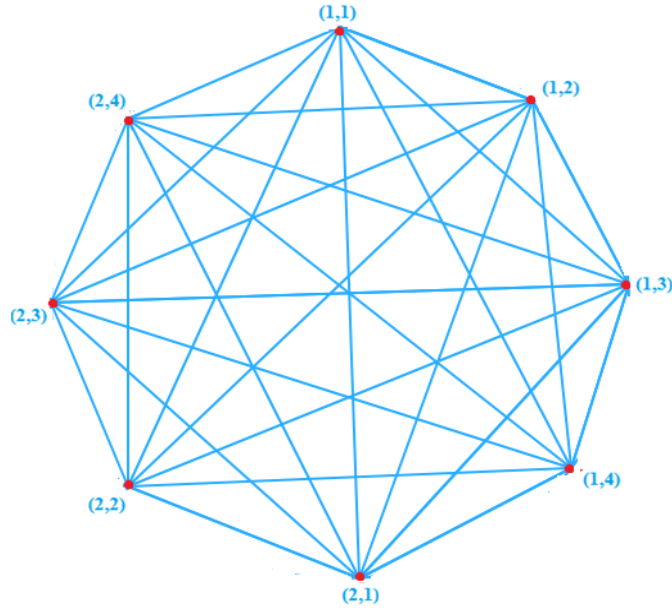
koşulu sağlandığında u ve v köşelerinin arasında komşuluk oluşur. Böyle oluşup H_1 ile H_2 gösterilen grafa strong çarpımın grafi denmektedir. $H_1 \blacksquare H_2$ ile ifade edilir.

Örnek 3.1.8 $G = P_2 \blacksquare C_4$ strong çarpım grafi için açıkladığımız özellikleri uygulayalım.



Hçarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları

$V = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_4)\}$ ifade edilir. H strong çarpımına ait grafın ifadesi;



Şekil 3.1.7 $P_2 \square C_4$ strong çarpımına ait graf

olur. Burada G çarpım grafına ait mertebeye 8, boyutu 16'dır. Bütün vertexler birbiriyle komşu olmasından dereceleri de 7 çıktığından G strong çarpımına ait graf tamgraf belirtir.

$$\sigma(G) = 7 \quad \Delta(G) = 7 \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.9 H_1 çarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları S_1 , H_2 çarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları S_2 olsun. $S = S_1 \times S_2$ kartezyen çarpım kümesinin elemanları $k = (k_1, k_2)$ ve $m = (m_1, m_2)$ alınınca

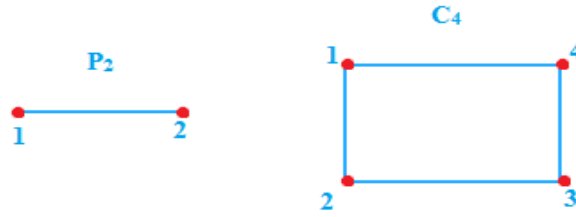
$$i) (k_1, m_1) \in E(H_1) \text{ ve } (k_2, m_2) \in E(H_2)$$

ya da

$$ii) (k_1, m_1) \notin E(H_1) \text{ ve } (k_2, m_2) \notin E(H_2)$$

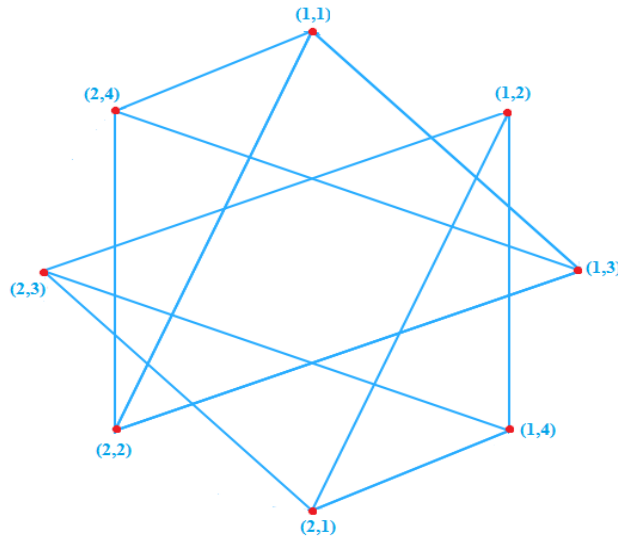
koşulu sağlanmasyla k ve m vertexleri arasında komşuluk olur. Böyle oluşmuş grafına H_1 ile H_2 grafına ait modüler çarpıma ait graf denmektedir.

Örnek 3.1.10 P_2 ve C_4 modüler çarpımın grafı için açıkladığımız özellikleri uygulandığında;



olur. G çarpım grafına ait köşeye ait küme elamanları

$V = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_4)\}$ gösterilir. G modüler çarpıma ait ifadesi;



Şekil 3.1.9 P_2 ve C_4 modüler çarpım grafı

olur.

4.MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE HOMORFİK ÇARPIM GRAFI

Uzun senelerdir önemi fazla olan graf teoriyle cebirsel olarak ifade ettiklerimizle ilgili çalışmalar ile birlikte monojenik yarıgrupların graflarının homomorfik çarpım graflarını bulup bu graflar üzerinde parametreleri ve özelliklerini araştırıldı. Bu çarpım graflarını bulurken kullanacağımız monojenik yarı grupların tanımından da bahsedildi.

4.1.Giriş Kısmı ve Başlıca tanımlar

Irwin Beck (Beck, 1988) tarafından geliştirilen ve Graf Teoriyle cebirsel yapıların birleşmesiyle oluşan ilk çalışmalar değişmeli halkaların üzerinde tanımlı sıfır bölen

graflarıyla alakalıydı. Bu başlangıç diğer araştırmacılar tarafından farklı çalışmalara eklenmesinin ardından bu bölümde monojenik yarı grubu S_M^n ve bu yarı grubun sonlu kartezyen çarpımı olan S' 'nin homomorfik çarpım grafi hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca $\Gamma(S)$ ye ait bazı özelliklere değinilmiş olacaktır.

4.2.Monojenik Yarıgrup Üzerinde Homomorfik Çarpım Grafi

Tanım 4.2.1. G_1 ve G_2 boştan farklı iki graftır.

$V(G_1), E(G_1)$ ve $V(G_2), E(G_2)$ sırası ile G_1 ve G_2 graflarının köşe ve kenar kümeleri olmak üzere

$$u_1, v_1 \in V(G_1) \text{ ve } u_2, v_2 \in V(G_2)$$

G_1 ve G_2 graflarının herhangi köşeleri olsun.

$V(G_1) \times V(G_2)$ Kartezyen kümesinden alınan $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ elemanları için

i) $u_1 = v_1$

ya da

$$\text{ii) } (u_1, v_1) \in E(G_1) \text{ ve } (u_2, v_2) \notin E(G_2)$$

şartları sağlandığında (u_1, u_2) ile (v_1, v_2) vertexleri komşu olur denmektedir.

Bu şekilde oluşmakta olan grafa da G_1 ile G_2 grafinin **homomorfik çarpım grafi** denmektedir;

$G_1 \bowtie G_2$ ile ifade edilir.

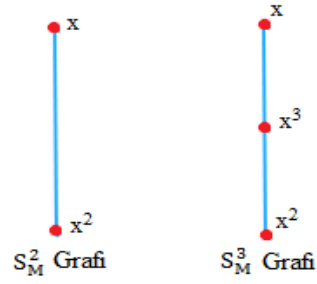
Tanım 4.2.2. S_M^m ve S_M^n m ve n mertebeli yarıgruplar olmak üzere köşe kümeleri sırası ile V_1 ve V_2 olsun. $V(G) = V_1 \times V_2$ ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere $u = (x^i, x^j)$ ve $v = (x^k, x^t)$

$i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $j, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ köşeleri için $i = k$ ya da $i + k > m$ ve $j + t \leq n$ koşulunu sağlayan kenar kümesinden oluşan grafa S_M^m ve S_M^n monojenik yarıgruplarının homomorfik çarpım grafi denir ve $S_M^m \bowtie S_M^n$ ile ifade edilir.

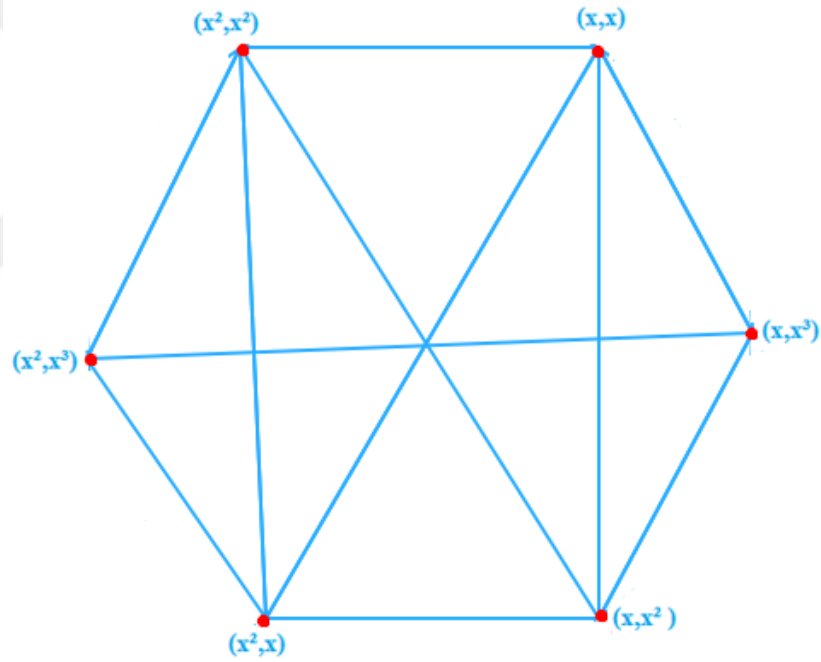
S_M^m ve S_M^n monojenik yarıgruplarının homomorfik çarpım grafinin graf parametrelerinden diameter (çapı), radius (yarıçapı), girth, minimum derece, maksimum derece, örtü sayısı, baskınlık sayısı, kromatik sayısı (renk sayısı), klik sayısını bulup incelendi.

Örnek 4.2.3.

$S = S_M^2 \times S_M^3$ homomorfik çarpım grafini inceleyelim.



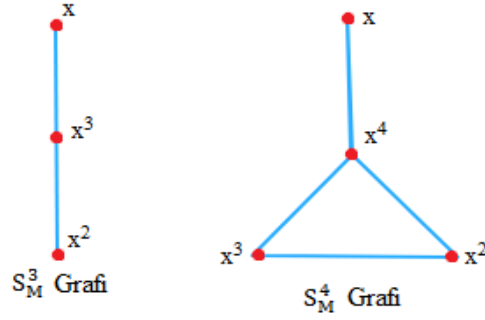
Elemanları $S^* - S \setminus \{(x,x), (x,x^2), (x,x^3), \dots, (x^2,x^3)\}$ ve köşeler arasındaki homomorfik çarpım aşağıda görülmektedir.



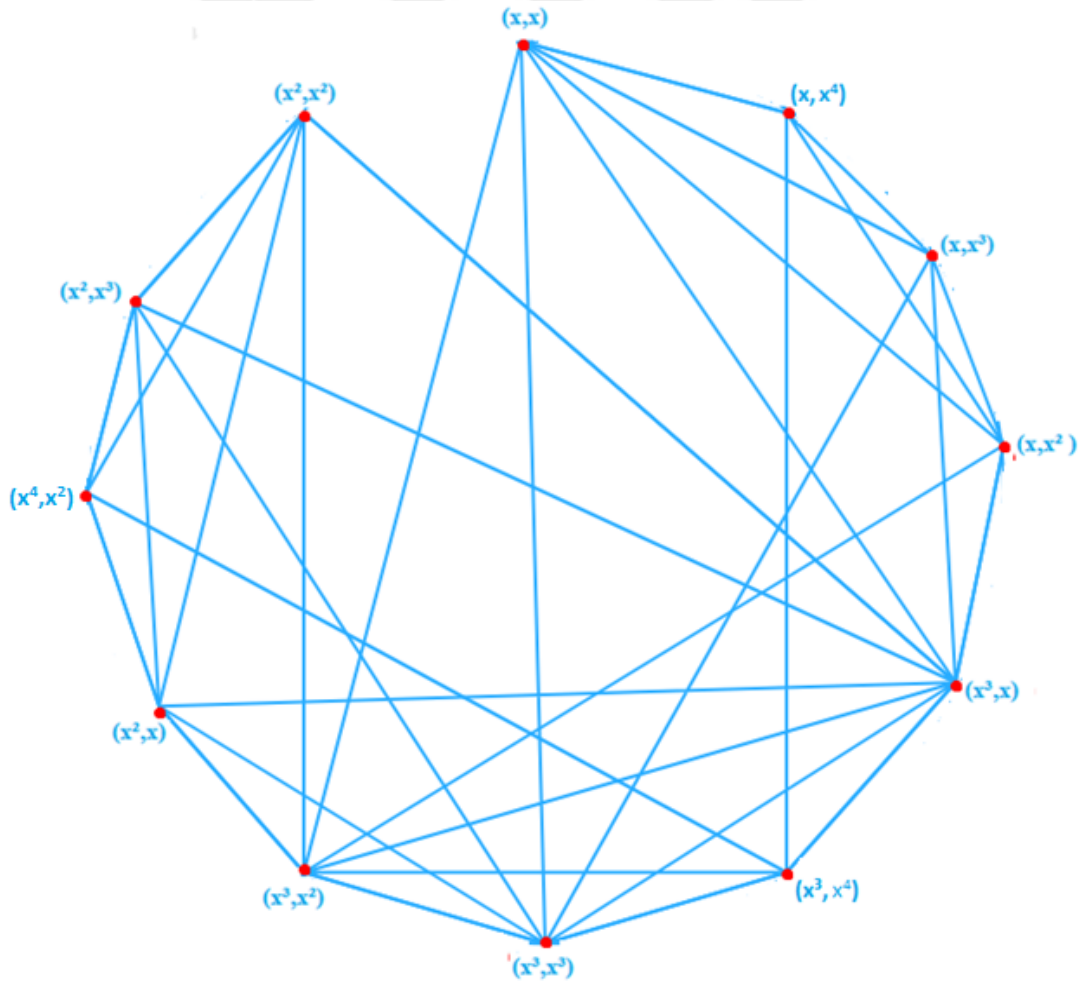
$S_M^2 \times S_M^3$ homomorfik çarpım grafi

Örnek 4.2.4.

$S = S_M^3 \times S_M^4$ homomorfik çarpım grafini incelenmesi gözükmektedir.



Elemanları $S^* - S \setminus \{(x, x), (x, x^2), (x, x^3), (x, x^4), \dots, (x^3, x^4)\}$ ve köşeler arasındaki homomorfik çarpım aşağıda gözükmektedir.



$S_M^3 \times S_M^4$ homomorfik çarpım grafini

4.3.Homomorfik Çarpım Graflarının Bazı Parametreleri

Bu bölümde S_M^m ve S_M^n m ve n mertebeli yarıgruplar olmak üzere köşe kümeleri sırası ile V_1 ve V_2 olsun. $V(G) = V_1 \times V_2$ ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere $u = (x^i, x^j)$ ve $v = (x^k, x^t)$ $i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $j, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ köşeleri için $i=k$ ya da $i+k > m$ ve $j+t \leq n$ koşulunu sağlayan kenar kümesinden oluşan grafa S_M^m ve S_M^n monojenik yarıgruplarının homomorfik çarpım grafi denir. Tanımladığımız S_M^m ve S_M^n monojenik yarıgruplarının homomorfik çarpım grafi üzerinde diameter(çapı), radius(yarıçapı), girth, minimum derece, maksimum derece, örtü sayısı, baskınlık sayısı, kromatik sayısı (renk sayısı), klik ve grafin mükemmelliği bulunup araştırılmaktadır.

Kullanılacak olan başlıca kavramlar, sonrasında homomorfik çarpım grafinin ait tanımların değeriyle birlikte şeklinde ilerlenecektir.

Tanım 4.3.1 Bir G grafinin diametri

$$diam(G) = \sup\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 4.3.2 S_M^m ve S_M^n m ve n mertebeli yarıgruplar olmak üzere köşe kümeleri sırası ile V_1 ve V_2 olsun. $V(G) = V_1 \times V_2$ ve $u, v \in V(G)$ olsun. $u = (x^i, x^j)$ ve $v = (x^k, x^t)$ $i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $j, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ köşeleri için $i=k$ ya da $i+k > m$ ve $j+t \leq n$ koşulunu sağlayan kenar kümesinden oluşan grafa S_M^m ve S_M^n monojenik yarıgruplarının homomorfik çarpım grafi denir. Tanımladığımız herhangi bir homomorfik çarpım kümesi için

$$diam(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = 3 \text{ olur.}$$

İspat. $S = S_M^m \times S_M^n$ homomorfik çarpım grafi olsun.

$i_1, j_1 \in \{S_M^m\}$ $i_2, j_2 \in \{S_M^n\}$ olmak üzere

$\forall (x^{i_1}, x^{i_2}), (x^{j_1}, x^{j_2}) \in v(\Gamma(S))$ için ;

$i_1 + n \geq n$ ve $x^{i_2}, x^{j_2} \notin v(S_M^n)$ olduğundan $(x^{i_1}, x^{i_2}) \sim (x^n, x^{j_2})$ olur.

Daha sonra $(x^n, x^{i_2}) \sim (x^n, x^{j_2})$ olduğu homomorfik çarpımın

i) $u_1 = v_1$ kuralından açıktır.

Ayrıca benzer şekilde $(x^n, x^{j_2}) \sim (x^{j_1}, x^{j_2})$ olur.

Dolayısıyla

$$(x^{i_1}, x^{i_2}) \sim (x^n, x^{i_2}) \sim (x^n, x^{j_2}) \sim (x^{j_1}, x^{j_2}) \text{ olduğundan}$$

$$\text{diam}(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = 3 \text{ bulunur.} \blacksquare$$

Tanım 4.3.3 Grafa ait çevrimi o grafa ait en küçük mesafeli devre ait mesafe bulunup ve bir G grafına ait çevirim $\text{girth}(G)$ ile ifade edilmektedir.

Teorem 4.3.4 Bir $S = S_M^m \times S_M^n$ homomorfik çarpım grafi kümesi için

$$\text{girth}(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = 3 \text{ olur.}$$

İspat. $S = S_M^m \times S_M^n$ homomorfik çarpım grafi olsun.

$x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^m \in S_M^m$ ve $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^n \in S_M^n$ olup

$m+2 > m$ olduğundan $(x^m, x^n) \sim (x^2, x^{j_1})$ olur.

Daha sonra $2+(m-1) > m$ olduğundan $(x^2, x^{j_1}) \sim (x^{m-1}, x^{j_1})$ ve $m+(m-1) = 2m-1 > m$ olduğundan $(x^{m-1}, x^{j_1}) \sim (x^m, x^n)$.

Dolayısıyla $(x^m, x^n) \sim (x^2, x^{j_1}) \sim (x^{m-1}, x^{j_1}) \sim (x^m, x^n)$ şeklinde 3 uzunluk çevrim bulunur.

Daha küçük çevrim bulunmadığından grafın çevrimi 3'tür. $\blacksquare$

Tanım 4.3.5 Bir grafa ait en çok dereceye sahip köşenin derecesi o grafa ait en fazla komşusu olan vertexin derecesinin değeridir. Δ ile gösterilmektedir.

Teorem 4.3.6 Monojenik yarıgrup üzerinde tanımlı homomorfik çarpım grafın en büyük derecesi

$$\Delta(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = m(n-1) \text{ olur.}$$

İspat. $S = S_M^m \times S_M^n$ homomorfik çarpım grafi olsun.

Grafın en az $(n-1)$ tane komşusu vardır.

En büyük dereceli köşe için homomorfik çarpım tanımından (x^m, x) köşesi seçilir.

$$(x^m, x) \sim (x^m, x^{j_1}) \exists j_1 \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

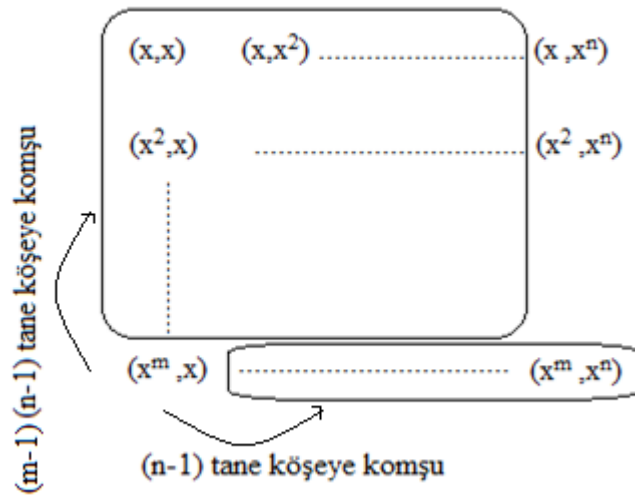
Ayrıca

$$(x^m, x) \sim (x^{i_1}, x^{j_1}) \exists i_1 \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$$

$$j_1 \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

şekildeki köşelere komşudur.

$(m-1)(n-1)$ tane.



O halde $\Delta(S) = (n-1) + (m-1)(n-1) = m(n-1)$ bulunur. ■

Tanım 4.3.7 $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun.

$S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun. Grafa aiten az derecesi grafa ait en az komşusu olan köşeye ait derece değeridir. δ ile gösterilmektedir.

Teorem 4.3.8 Monojenik yarıgrup üzerinde tanımlı homomorfik çarpım grafın en küçük derecesi

$$\delta(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = n \text{ olur.}$$

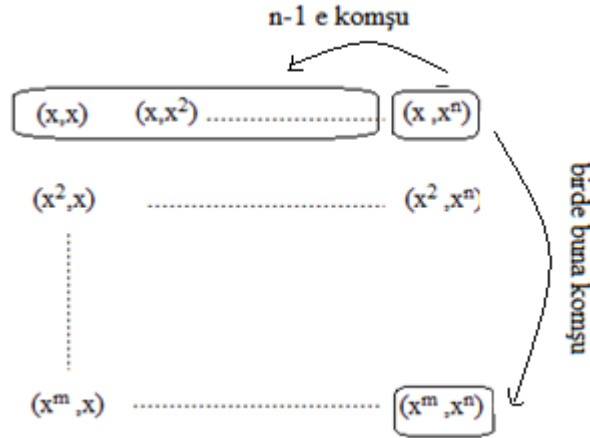
İspat.

$i_1 \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ve

$j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olmak üzere $(x^{i_1}, x^{j_1}) \sim (x^{i_1}, x^{j_2})$ dur.

Dolayısıyla (x^{i_1}, x^{j_1}) herhangi köşenin $(n-1)$ tane komşusu vardır. (homomorfik çarpımın tanımının birinci koşulu $x^{i_1} = x^{i_1}$)

Minumum derece için homomorfik çarpım graf tanımında birinci bileşen için en az komşuluk, ikinci bileşen için en fazla komşuluğa sahip köşeye bakalım. (x, x^n) köşesi.



$(x, x^n) \sim (x^m, x^n)$ olduğundan

Yukarıda da $n-1$ tane komşusu vardır. Dolayısıyla

$$\delta(S) = n-1 + 1 = n \blacksquare$$

Tanım 4.3.9 Bir G grafinin vertex kümesi'nin alt kümesi $V(G)D$ olsun. D 'de bulunmayan G 'nin bütün vertexleri en az bir vertex ile D 'ye komşuysa D kümesi de G grafinin baskınlık kümesi şeklinde isimlendirilir. Baskınlık diye ifade ettiğimiz sayı ise G 'nin en az vertexe sahip baskınlık kümesinin rakamıdır ve $\gamma(G)$ gösterilmektedir.

Teorem 4.3.10 $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun.

$S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun. Baskınlık değeri

$$\gamma(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = m \text{ olur.}$$

İspat $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun. $S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun. Grafin baskınlık sayısı grafin en az köşeye sahip baskınlık kümesinin sayısı olduğundan, grafin baskınlık kümesinde en az elemana sahip olacak şekilde bakmalıyız.

O halde $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun. $S_M^m \times S_M^n$

homomorfik çarpım graf olmak üzere $D \subseteq V(\Gamma(S_M^m \times S_M^n))$ kümesi $(S_M^m \times S_M^n)$ homomorfik çarpım grafinin baskınlık kümesi olsun.

Dolayısıyla baskınlık kümesi tanımı gereği homomorfik çarpım grafinin en fazla komşu köşeye sahip olan köşesi $(x^m, x) \in D$ olmalıdır.

Ayrıca (x^m, x) köşesi teorem 4.3.6 dan $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ olmak üzere yalnızca (x^i, x^n) köşelerine komşu değildir.

Dolayısıyla $\{(x^i, x^n) : i \in \{1, 2, \dots, m-1\}\}$ köşelerine komşu olan en az köşeyi D kümesine dahil edersek $(S_M^m \times S_M^n)$ homomorfik çarpım grafının en az elemana sahip baskınlık kümesi oluşturulur.

Homomorfik çarpım grafının tanımının birinci koşulundan;

$i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ olmak üzere her bir (x^i, x) köşesi (x^i, x^n) köşesine komşudur. Dolayısıyla $(S_M^m \times S_M^n)$ homomorfik çarpım grafının baskınlık kümesi

$D = \{(x^i, x) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ şeklinde olur ve bu grafın baskınlık sayısı m olarak elde edilir. ■

Tanım 4.3.11 $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun.

$S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun. Bir rafa ait **köşe renklendirmesiyle** köşe kümesine ait V_G olan, kümeye ait elemanlarında renklerden oluşmasıyla oluşan C kümesi bir fonksiyon olur. Komşuluk oluşturan köşeler daima başka renge boyanabiliyorsa renklendirme doğru olur.. Grafi c ve ya c den az sayıda renkle ve köşenin uygunluk kuralı göz önünde bulundurularak renklendirilebiliyorsa **c -boyanabilir** denmektedir. G grafına **köşeye ait kromatik numarası** G grafına ait en küçük krakamıdır. $\chi(G)$ ifade edilir.

Teorem 4.3.12 Homomorfik çarpım grafi için renklendirme numarası

$$\chi(I(S_M^m \times S_M^n)) = n$$

olur. ■

İspat $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenik yarıgrup olsun. $S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun.

Bir grafın köşe renklendirme sayısı için en az sayıda renklendirilebilmesi gerekir. Bir grafta komşu olmayan köşeler aynı renk boyanabildiğinden homomorfik çarpım grafında komşu olmama koşuludur.

(x^i, x^j) , $(x^k, x^t) \in V(I(S_M^m \times S_M^n))$ için $(i \neq k) \wedge (i+k \leq m \vee j+t > n)$ koşulunu sağlamalıdır. Buna göre $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ve $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere (x^m, x^j) köşesi

(x^i, x^{n-j+1}) köşelerine komşu değildir. $m \neq i \wedge n-j+1+j > n$ olduğundan Dolayısıyla

$\forall j \in \{1, 2, \dots, \} \text{ için } (\Gamma(S_M^m \times S_M^n))$ homomorfik çarpım grafi en az n farklı renk ile boyanabilir. O halde

$$\chi(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = n$$

olur. ■

Tanım 4.3.13 Bir grafin içerdiği tam altgrafların her birine klik denir. Kliklerden en fazla vertex sayısı olan cliğin vertex sayısına da grafin klik sayısı denmektedir. $\omega(G)$ ile ifade edilmektedir.

Teorem 4.3.14 $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere S_M^m ve S_M^n iki monojenikyarıgrup olsun.

$S_M^m \times S_M^n$ monojenik çarpım grafi olsun. Homomorfik çarpım grafi için klik sayısı

$$\omega(\Gamma(S_M^m \times S_M^n)) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

olur. ■

İspat Bir grafin klik sayısı grafin içerdiği en büyük tam altgrafi köşe sayısıdır. Dolayısıyla $S_M^m \times S_M^n$ homomorfik çarpım grafinin klik sayısı için grafin içerdiği en büyük tam alt grafin içeriği köşeleri belirleyelim.

$(x^i, x^j) \in (\Gamma(S_M^m \times S_M^n))$ için

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 > m \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq n$$

$$m \text{ çift} \Rightarrow m+2 > m \quad n \leq n$$

ve

$$m \text{ tek} \Rightarrow m-1+2=m+1 > m \quad n-1 \leq n \quad \text{olduğundan}$$

köşeleri birbirlerine komşu olan en büyük tam altgrafi oluştururken

$$i \in \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \dots, m \} \quad \text{ve}$$

$j \in \{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$ olmak üzere köşeleri birbirine komşu olan en büyük tam alt grafi oluştururlar.

$$\text{Dolayısıyla klik sayısı } (m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 + 1) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

olur. ■

5.SONUÇ VE ÖNERİ KISMI

5.1 Sonuç Bulguları

Bu tezde, Monojenik yarıgruplarda kartezyen çarpım sonucu elde edilen elemanlar arasındaki eşlemeyi gerçekleştirirken, birinci elemanlar aynı ya da ikinci elemanların komşu olmasına göre birbiriyle bağlanan köşeleri homomorfik çarpım grafini oluşturarak tespit etmekteyiz. Elde ettiğimiz homomorfik çarpım grafları sonucunda elde edilecek değerler;

Diam 3 olduğu, girth 3 bulunduğu, minimum derece n olduğu, maksimum derece $m(n-1)$ olduğu, baskınlık sayısı m olduğu, kromatik sayısı n olduğu, klik sayısı $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olduğu bulundu.

5.2 Öneri

Bu tezde, monojenik gruplar üzerinde graf çarpımlarından bir tanesi detaylı olarak incelenmiş ve homomorfik çarpım sonucunda graf parametreleri bulunmuştur. Bu alanda daha fazla araştırma yapmak için, bu konu hakkında daha derin bilgi edinebilir ve graf parametreleri ve tanımları ile ilgili pekiştirmeler yapabilirsiniz. Ayrıca, homomorfik çarpım hakkında da detaylı araştırmalara girebilirsiniz; bunun sağlanmayan ya da her zaman sağladığı durumlar açık bir şekilde araştırılabilir.

6.KAYNAKÇA

Akgüneş,Nihat and Çağan, Büşra 2018 “On the dot product of graphs over monogenic semigroups.” Applied Mathematics and Computation 322

Anderson, David F. 2011, "Zero-divisorgraphs in commutative rings"

Biggs Norman, Lloyd E. Keith, Wilson Robin J.,1936, graph theory

Das, K., Yurttaş, A., Togan, M., Çevik, A., S., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph, *Operations Das et al. Journal of Inequalities and Applications*, 90.

Eliasi M., Iranmanesh A., Gutman I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index., *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, 217–230.

Gutman, I., Das, K., 2016, On Wiener and multiplicative Wiener indices of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 206, 9-14.

Gutman, 2011, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bull. Int. Math. Virt. Inst.*, 1, 13–19.

Gutman, I., Linert, W., Lukovist, I., Tomovic, Z., 2000, The Multiplicative Version of the Wiener Index, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 40, 113–116

Gutman, I., Linert, W., Lukovist, I., Tomovic, Z., 2000, On the Multiplicative Wiener Index and Its Possible Chemical Applications, *Monatshefte für Chemie Chemical Monthly*, 131, 421–427.

J. A. Bondy and U. S. R. Murty, 1976, *Graph Theory With Applications* 1-4. 129-131

Kumar A., Pradhan P., 2020 The $L(2,1)$ -Labelings on the Homomorphic Product of two Graphs

Liu, J., Zhang, Q., 2012, Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 68, 231-240.

Sankar Sahoo and Madhumangal Pal, 2017, Modular and homomorphic product of intuitionistic fuzzy graphs and their degree, 395-404

Soltania, A., Iranmanesh, A., Majid, Z., A., 2014, The Multiplicative Version of the Edge Wiener Index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 71, 407-416.

Vesztegombi K., 1978/79, Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs *Acta Cybernet.* 4 (1978/79) 207-212.

Xu, K., Hua, H., 2012, A unified approach to extremal multiplicative Zagreb indices for trees, unicyclic and bicyclic graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, 241-256.

Xu, K., Das, K., C., 2012, Trees, unicyclic and bicyclic graph extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68(1), 257-272.

Wang, S., Wei, B., 2015, Multiplicative Zagreb indices of k -trees, *Discrete Applied Mathematics*, 180, 168-175.

