

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ÇEŞİTLİ MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

**Hazırlayan
Kübra YILMAZ**

**Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

Yüksek Lisans Tezi

**Mayıs 2023
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ÇEŞİTLİ MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

**Hazırlayan
Kübra YILMAZ**

**Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

**Mayıs 2023
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Kübra YILMAZ



“Çeşitli Mutlak Toplanabilme Metotları” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Kübra YILMAZ

İmza

Danışman

Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

İmza

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

İmza

TEŞEKKÜR

Bana çalıŐmalarım süresince her türlü yardımı ve fedakârlığı sağlayan, değerli katkıları ile en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. A. Nihal TUNCER hocama ve maddi manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kübra YILMAZ

Mayıs 2023, KAYSERİ

ÇEŞİTLİ MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

Kübra YILMAZ

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Mayıs 2023
Danışman: Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, genel bilgiler ve literatür çalışmasına yer verilmiştir.

İkinci bölümde bu çalışmada kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \lambda_r$ serisinin hemen hemen artan dizi yardımıyla $\left| \overline{N}, p_r \right|_k$ toplanabilmesi üzerine teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \lambda_r$ serisinin hemen hemen artan dizi yardımıyla $\left| \overline{N}, p_r; \delta \right|_k$ toplanabilmesi üzerine teoremlere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$ serisinin $\left| \overline{N}, p_r; \delta \right|_k$ toplanabilmesi üzerine teoremlere yer verilmiştir.

Altıncı bölümde ise teoremlerden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Mutlak toplanabilme metotları, mutlak toplanabilme çarpanları, hemen hemen artan diziler.

VARIOUS ABSOLUTE SUMMABILITY METHODS

Kübra YILMAZ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master Thesis, mAY 2023

Supervisor: Title: Assoc. Prof. Dr. A. Nihal TUNCER

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

In the first part, general information and literature study are given.

In the second part, the basic definitions and theorems that will be used in this study are given.

In the third chapter, theorems about the $\left| \overline{N}, p_r \right|_k$ summability of the $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \lambda_r$ series almost with the help of increasing series are given.

In the fourth chapter, theorems about the $\left| \overline{N}, p_r; \delta \right|_k$ summability of the $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \lambda_r$ series almost with the help of increasing series are given.

In the fifth chapter, theorems on the $\left| \overline{N}, p_r; \delta \right|_k$ summability of the $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$ series are given.

In the sixth chapter, the results obtained from the theorems are given.

Keywords: Absolute summability methods, absolute summability factors, almost increasing sequences.

İÇİNDEKİLER

ÇEŞİTLİ MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

BİLİMSEL ETİGE UYGUNLUK.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER	viii
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1 Problem Durumu	3
1.2 Araştırmanın Amacı	3
1.3 Araştırmanın Önemi.....	3

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Temel Tanım ve Teoremler	4
------------------------------------	---

3. BÖLÜM

3.1 $\sum a_r \lambda_r$ Serisinin Hemen Hemen Artan Dizi Yardımıyla $ \bar{N}, p_r _k$ Toplanabilme Üzerine Teorem	13
--	----

4. BÖLÜM

4.1	$\sum a_r \lambda_r$	Serisinin Hemen Hemen Artan Dizi Yardımıyla $ \bar{N}, p_r; \delta _k$	
	Toplanabilme Üzerine Teorem		18
4.2	$\sum a_r \lambda_r$	Serisinin $ \bar{N}, p_r _k$	Toplanabilme Üzerine Teorem
			22

5. BÖLÜM

5.1	$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$	Serisinin $ \bar{N}, p_r; \delta _k$	Toplanabilme Üzerine Teorem
			27

6. BÖLÜM

SONUÇLAR	33
KAYNAKÇA	34
ÖZGEÇMİŞ.....	37

GİRİŞ

Bir (a_r) reel dizisi verildiğinde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_r + \dots$$

toplamına sonsuz seri denir. Sonsuz seriler yakınsak seriler ve ıraksak seriler şeklinde ikiye ayrılır. Sonsuz bir seri yakınsaktır ancak ve ancak serinin kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır. Kendi aralarında belirsiz ve belirli ıraksak seriler olarak iki grupta incelenen ıraksak serileri için; toplamı $\mp\infty$ olan seriler belirli ıraksak serilerdir. Kısmi toplamlar dizisinin en az iki yığılma noktası olan seriler de belirsiz ıraksak serilerdir. Birden fazla yığılma noktası olan diziler salınım yapan diziler olduğundan, bu tür Salınım yapan dizilerin karşılık geldiği en uygun bir sayıyı bulmak amacıyla toplanabilme teorisi geliştirilmiş ve çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır.

Ondokuzuncu asırda çalışmaya başlanılan Toplanabilme teorisi, günümüze kadar genişletilmiş ve geliştirilmiştir. Matematiğin özellikle matematiksel analiz ve uygulamalı matematik anabilim dalında kullanılmakla birlikte, birçok anabilim dalında da kullanılmaktadır. Newton ve Leibnitz sonsuz serileri sistematik olarak kullanan ilk matematikçiler olup, Abel, Euler, Nörlund, Cesàro ve Riesz gibi matematikçiler de özel toplanabilme metotları tanımlayarak bu alana oldukça fazla katkıları olmuştur. Bu alanda çalışan günümüz matematikçilerinin birçoğu, bu özel toplanabilme metotlarını ve arasındaki bağıntıları araştırmaktadırlar.

Mutlak toplanabilme metotları da oldukça büyük bir çalışma alanı sağlamaktadır. İlk olarak, birinci mertebeden mutlak Cesàro toplanabilme yani $|C,1|$ tanımı 1911

tarihinde Fekete [1] tarafından verilmiş, devamında 1957 tarihinde ise Flett [2] $k \geq 1$ olmak üzere daha genel bir tanım olan $|C, 1|_k$ toplanabilme metodunu vermiştir. Mutlak toplanabilirlik kavramı 1969 da Das [3] ile hayatımıza girmiştir. Sonrasında toplanabilme çarpanını 1970 yılında Kishore ve Hotta [4] bizlere kazandırmıştır. 1979 yılında alt üçgensel matrisler sayesinde $|T|_k$ toplanabilirlik tanımı Tanović-Miller [5] tarafından yapılmıştır. 1985 yılında da Bor [6] tarafından $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilme kavramı tanımlanmıştır.

Bu çalışmada ilk olarak pozitif azalmayan dizi yerine hemen hemen artan dizi kullanılarak bilinen bir teoremin $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirliği genelleştirilmiştir. Sonrasında δ yarı monoton dizileri daha zayıf koşullar altında hemen hemen artan dizileri kullanarak $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirlik incelenmiştir. Son olarak pozitif azalmayan dizi yerine hemen hemen artan dizi kullanılarak bilinen bir teoremin $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilirliği genelleştirilmiştir.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Problem Durumu

Genel mutlak toplanabilme metotlarının alınan diziler üzerine uygulamaları tez çalışmasında ana problem olarak düşünülmüştür.

1.2. Araştırmanın Amacı

Hemen hemen artan ve pozitif monoton olarak azalmayan diziler yardımıyla bulunan teoremlere daha zayıf şartlar koyarak genelleştirmek, bu tez araştırmanın amacını oluşturmaktadır.

1.3. Araştırmanın Önemi

Bu tez çalışmasında hemen hemen artan, pozitif olarak azalmayan, ve δ - yarı monoton olan diziler yardımıyla mutlak Riesz toplanabilme metotları üzerine elde edilen teoremler, daha zayıf şartlar altında incelenmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüme, çalışmalarımızda kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri vererek başlayacağız.

Tanım 2.1 : (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r \geq 0$, $j_1, j_2, j_3, \dots, j_r \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{v=1}^r i_v j_v \leq \left(\sum_{v=1}^r i_v^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^r j_v^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.1)$$

dır [7].

Tanım 2.2 : (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r \geq 0$, $j_1, j_2, j_3, \dots, j_r \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{v=1}^r (i_v + j_v)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{v=1}^r i_v^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{v=1}^r j_v^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

dır [7].

Tanım 2.3 : (Abel Dönüşümü)

(c_k) ve (d_k) kompleks sayı dizileri ve $s_v = \sum_{k=1}^v c_k$ şeklinde tanımlı olduğuna göre

$$\sum_{v=1}^r c_v d_v = \sum_{v=1}^{r-1} s_v \Delta d_v + s_r d_r$$

dır [8].

Aksi belirtilmedikçe bu çalışmada baştan sona kadar (s_r) , $\sum a_r$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n) ,

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \quad (P_{-i} = p_{-i} = 0, i \geq 1)$$

olmak kaydıyla pozitif sayıların bir dizisini belirtecektir.

Tanım 2.4 : (s_r) , $\sum a_r$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve (v_r) de birinci mertebeden Cesàro ortalamasını gösterebilir. Yani

$$v_r = \frac{1}{r+1} \sum_{v=0}^r s_v \quad (2.3)$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_r = s$$

ise, $\sum a_r$ serisi s değerine $(C,1)$ anlamında toplanabilir denir [9].

Tanım 2.5 : v_r , (2.3) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} |v_r - v_{r-1}| < \infty \quad (2.4)$$

ise $\sum a_r$ serisi $|C,1|$ toplanabilir denir [1].

Tanım 2.6 : $k \geq 1$ olmak üzere eğer,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} |v_r - v_{r-1}|^k < \infty \quad (2.5)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilir denir [2].

Özel olarak (2.5) de $k = 1$ alınır, $|C,1|$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 2.7 : (s_r) , $\sum a_r$ serisinin kısmi toplamalar dizisi olsun. $\alpha > -1$ olmak üzere ν_r^α ve τ_r^α sırasıyla (s_r) ve (ra_r) dizisinin α -ıncı mertebeden r-inci Cesàro ortalamasını gösterebilirler. Yani

$$\nu_r^\alpha = \frac{1}{A_r^\alpha} \sum_{v=0}^r A_{r-v}^{\alpha-1} s_v \quad (2.6)$$

$$\tau_r^\alpha = \frac{1}{A_r^\alpha} \sum_{v=1}^r A_{r-v}^{\alpha-1} v a_v \quad (2.7)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu_r^\alpha = s$$

ise $\sum a_r$ serisi s değerine (C, α) toplanabilir denir [10].

Burada

$$A_r^\alpha = \binom{r+\alpha}{r} = O(r^\alpha), \quad \alpha > -1, \quad A_0^\alpha = 1, \quad r > 0, \quad A_{-r}^\alpha = 0 \quad (2.8)$$

dır.

Tanım 2.8 : ν_r^α , (2.6) deki gibi tanımlanmak üzere $\alpha > -1$, için

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\nu_r^\alpha - \nu_{r-1}^\alpha| < \infty \quad (2.9)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|C, \alpha|$ toplanabilir denir [1].

Tanım 2.9 : $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} |\nu_r^\alpha - \nu_{r-1}^\alpha|^k < \infty \quad (2.10)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Burada $\tau_r^\alpha = r(\nu_r^\alpha - \nu_{r-1}^\alpha)$ [11] olduğundan (2.10) şartı

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} |\tau_r^\alpha|^k < \infty$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.10 : $\delta \geq 0$, $\alpha > -1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{\delta k - 1} |\tau_r^\alpha|^k < \infty \quad (2.11)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|C, \alpha; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Özel olarak (2.11) de $\delta = 0$ alınırsa, $|C, \alpha|_k$ toplanabilme ve yine (2.11) de $\delta = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa $|C, 1|_k$ toplanabilme ve son olarak da (2.11) de $\alpha = 1$ alınırsa, $|C, 1; \delta|_k$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 2.11 : (p_r) ,

$$P_r = \sum_{v=0}^r p_v \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini ve (τ_r) de (\bar{N}, p_r) ortalamasını gösterebilir.

Yani

$$\tau_r = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r p_v s_v \quad (2.13)$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_r = s \quad (2.14)$$

ise, $\sum a_r$ serisi s değerine (\bar{N}, p_r) toplanabilirdir denir [12].

(\bar{N}, p_r) metodu regüler bir metottur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart $r \rightarrow \infty$ için $P_r \rightarrow \infty$ olmasıdır.

Tanım 2.12: (τ_r) , (2.13) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\tau_r - \tau_{r-1}| < \infty \quad (2.15)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|\bar{N}, p_r|$ toplanabilirdir denir [13].

Tanım 2.13 : $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\tau_r - \tau_{r-1}|^k < \infty \quad (2.16)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirdir denir [14].

Özel olarak (2.16) ifadesinde $\forall r \in N$ için $p_r = 1$ alınırsa $|C, 1|_k$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 2.14 : $\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\tau_r - \tau_{r-1}|^k < \infty \quad (2.17)$$

ise, $\sum a_r$ serisi $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [15].

Özel olarak (2.17) de $\delta = 0$ alınırsa $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilme $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilmeye dönüşür.

Tanım 2.15 : (δ_r) pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere, eğer $d_r > 0$ ve $\Delta d_r \geq -\delta_r$,

ise (d_r) dizisine δ yarı monoton denir [16].

Tanım 2.16 : B ve K herhangi iki pozitif sabit olsun. (c_n) de pozitif sabitlerin artan bir dizisi olmak üzere

$$Bc_n \leq b_n \leq Kc_n \quad (2.18)$$

şartını sağlayan (b_n) pozitif dizisine hemen hemen artan dizi denir [17].

Açıkça her artan dizi hemen hemen artmaktadır ancak $J_n = n.e^{(-1)^n}$ örneğinde görüleceği gibi tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 2.17: Bir $\sum a_r$ serisi verilsin. $\sum a_r \lambda_r$ serisi bir A toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyorsa (λ_n) dizisine $\sum a_r$ serisinin A metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [4].

Teorem 2.1 : (X_r) pozitif azalmayan bir dizi olsun ve (β_r) , (λ_r) dizileri

$$|\Delta \lambda_r| \leq \beta_r \quad (2.19)$$

$$\beta_r \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r |\Delta \beta_r| X_r < \infty \quad (2.21)$$

$$|\lambda_r| X_r = O(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

şartlarını sağlansın. Eğer,

$$\sum_{r=1}^m \frac{1}{r} |s_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

ise $\sum a_r \lambda_r$ serisi $|C, 1|_k$, $k \geq 1$ toplanabilirdir [18].

Teorem 2.2 : (p_r) ,

$$P_r = O(rp_r), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

Şartını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve (X_r) de hemen hemen artan bir dizi olsun. Kabul edelim ki Teorem 2.1 in (2.19)–(2.22) şartlarını sağlayacak şekilde (β_r) , (λ_r) dizileri mevcut olsun. Eğer

$$\sum_{r=v+1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}} = O \left\{ \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{P_v} \right\} \quad (2.25)$$

$$\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} |\tau_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde

$$\tau_r = \frac{1}{r+1} \sum_{v=1}^r v a_v \quad (2.27)$$

$\sum a_r \lambda_r$ serisi $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta \leq 1/k$ için $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilir [19].

Teorem 2.3 : $\lambda_r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ olsun. Kabul edelim ki tüm r için $|\Delta \lambda_r| \leq |A_r|$, $\sum A_r \log r$ yakınsak ve $\sum r \delta_r \log r < \infty$ olmak üzere δ yarı monoton olacak şekilde bir (A_r) sayı dizisi mevcut olsun. Eğer,

$$\sum_{r=1}^m \frac{1}{r} |\tau_r|^k = O(\log m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.28)$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_r \lambda_r$ serisi $|C, 1|_k$, $k \geq 1$ toplanabilir [14].

Teorem 2.4 : $\lambda_r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ ve (p_r) , (2.24) şartını sağlayacak şekilde pozitif sayıların dizisi olsun. Kabul edelim ki tüm r için $|\Delta \lambda_r| \leq |A_r|$, $\sum A_r \log r$ yakınsak ve $\sum r \delta_r \log r < \infty$ olmak üzere δ yarı monoton olacak şekilde bir (A_r) sayı dizisi mevcut olsun. (X_r) pozitif artan bir dizi olmak üzere, eğer

$$\sum_{r=1}^m \frac{p_r}{P_r} |\tau_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_r \lambda_r$ serisi $|\bar{N}, p_r|_k$, $k \geq 1$ toplanabilirdir [20].

Teorem 2.4 deki tüm r değerleri için $X_r = \log r$ ve $p_r = 1$ alırsak Teorem 2.3 elde ederiz.

Teorem 2.5 : (X_r) , pozitif azalmayan bir dizi olsun ve (β_r) , (λ_r) dizileri de

Teorem 2.1 in (2.19)–(2.22) şartlarını sağlasın. Eğer,

$$\sum_{v=1}^r \frac{1}{v} |s_v|^k = O(X_r), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

şartı sağlanıyorsa ve (p_r) ,

$$P_r = O(rp_r), \quad (2.31)$$

$$P_r \Delta p_r = O(p_r p_{r+1}), \quad (2.32)$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir dizi ise bu takdirde $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{rp_r}$ serisi $k \geq 1$ için

$|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirdir [21].

Teorem 2.6 : (X_r) , pozitif azalmayan bir dizi olsun ve (β_r) , (λ_r) dizileri verilsin ve

Teorem 2.1 in (2.19)–(2.22) şartlarına ilave olarak Teorem 2.5 in (2.30) şartını sağlasınlar. Eğer

$$\sum_{v=1}^r \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v} = O(X_r), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.33)$$

ve

$$\sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}} = O \left(\left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{P_v} \right), m \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

şartları sağlanıyorsa $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$ serisi $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta < 1/k$ için $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilirdir[22].

Burada $\delta = 0$ alınırsa Teorem 2.5 elde edilir. Bu durumda (2.33) şartı (2.30) şartına ve (2.34) şartı da her zaman geçerli olan

$$\sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} = \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{1}{P_{r-1}} - \frac{1}{P_r} \right) = O \left(\frac{1}{P_r} \right), m \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

şartına indirgenir. Ayrıca (λ_r) dizisindeki şartlar altında (λ_r) in sınırlı ve $\Delta \lambda_r = O(1/r)$ olduğu da açıktır.

3. BÖLÜM

Bu bölümde amacımız Teorem 2.1' i daha zayıf şartlar altında $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirliğe genişletmektir.

Teorem 3.1 : (X_r) hemen hemen artan bir dizi olsun ve Teorem 2.1' in (2.23) şartını sağlasın. Eğer (β_r) ve (λ_r) dizileri Teorem 2.1' in (2.19)–(2.22) şartlarını sağlıyorsa ve (p_r) de,

$$\sum_{r=1}^m \frac{p_r}{P_r} |s_r|^k = O(X_m), m \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

şartını sağlanıyorsa bu takdirde $\sum a_r \lambda_r$ serisi $k \geq 1$ için $|\bar{N}, p_r|_k$ toplanabilirdir [23].

Teoremimizin ispatı için aşağıdaki Lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.2 : (X_r) , (β_r) ve (λ_r) dizileri Teorem 3.1 in ifadesindeki gibi diziler olmak üzere (2.21) şartı altında

$$r\beta_r X_r = O(1), m \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \beta_r X_r < \infty \quad (3.3)$$

şartları sağlanır[23].

Lemma 3.2 İspatı : (f_r) artan bir dizi olmak üzere $Cf_r \leq X_r \leq Df_r$ olsun. Bu durumda, $r\beta_r X_r = O(1)$, $r \rightarrow \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
rX_r\beta_r &\leq rDf_r \left| \sum_{v=r}^{\infty} \Delta\beta_v \right| \leq rDf_r \sum_{v=r}^{\infty} |\Delta\beta_v| \\
&\leq D \sum_{v=r}^{\infty} v f_v |\Delta\beta_v| \leq \frac{B}{A} \sum_{v=r}^{\infty} v |\Delta\beta_v| X_v.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Yine $\sum_{r=1}^{\infty} X_r\beta_r < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} X_r\beta_r &\leq D \sum_{r=1}^{\infty} f_r\beta_r = D \sum_{r=1}^{\infty} f_r \left| \sum_{v=r}^{\infty} \Delta\beta_v \right| \\
&\leq D \sum_{r=1}^{\infty} f_r \sum_{v=r}^{\infty} \Delta\beta_r = D \sum_{v=1}^{\infty} |\Delta\beta_v| \sum_{r=1}^{\infty} f_r \\
&\leq D \sum_{v=1}^{\infty} v f_v |\Delta\beta_v| \leq \frac{B}{A} \sum_{v=1}^{\infty} v X_v |\Delta\beta_v| < \infty.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 ispatı : (κ_r) , $\sum a_r\lambda_r$ serisinin (\bar{N}, p_r) ortalamasının dizisi olsun. O zaman tanım gereği

$$\kappa_r = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r p_v \sum_{i=0}^r a_i \lambda_i = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r (P_r - P_{v-1}) a_v \lambda_v. \tag{3.6}$$

dir. O halde $r \geq 1$ için

$$\kappa_r - \kappa_{r-1} = \frac{p_r}{P_r P_r} \sum_{v=0}^r P_{v-1} a_v \lambda_v \tag{3.7}$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeye Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\kappa_r - \kappa_{r-1} &= -\frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} \Delta(P_{v-1} \lambda_v) s_v + \frac{p_r s_r \lambda_r}{P_r} \\
&= \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} p_v s_v \lambda_v - \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v s_v \Delta \lambda_v + \frac{p_r s_r \lambda_r}{P_r} \\
&= \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur.

$$|\kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3}|^k \leq 3^k \left(|\kappa_{r,1}|^k + |\kappa_{r,2}|^k + |\kappa_{r,3}|^k \right) \tag{3.9}$$

olduğundan Teorem 3.1' in ispatı için

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,l}|^k < \infty \quad \text{için} \quad l=1,2,3 \quad (3.10)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$(\lambda_r) = O(1/X_r) = O(1)$ olduğundan $k > 1$, $\left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k'}\right) = 1$ olacak şekilde k ve k'

indisleri için Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,1}|^k &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{r-1} P_v |\lambda_v| |s_v| \right)^k \\ &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{r-1} P_v |\lambda_v|^k |s_v|^k \right) \times \left(\frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.19), (2.22), (3.1) ve (3.3) şartları da kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,1}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |\lambda_v|^k |s_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |\lambda_v|^k |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |\lambda_v| |\lambda_v|^{k-1} |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |\lambda_v| |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_v| \sum_{i=1}^v \frac{P_i}{P_i} |s_i|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{P_v} |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_v| X_v + O(1) |\lambda_m| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

elde edilir.

$\kappa_{r,1}$ de ki gibi yine Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,2}|^k &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{r-1} P_v |\Delta \lambda_v| |s_v| \right)^k \\ &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{r-1} P_v |s_v| \beta_v \right)^k \\ &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |s_v|^k \beta_v \left(\frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \beta_v \right)^{k-1} \end{aligned}$$

bulunur. (2.19), (2.21), (2.23), (3.2) ve (3.3) şartları da kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,2}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |s_v|^k \beta_v \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |s_v|^k \beta_v \sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}^k} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |s_v|^k \beta_v \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v \frac{1}{v} |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v \beta_v) \sum_{u=1}^v \frac{1}{u} |s_u|^k + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |s_v|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v \beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta \beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m \beta_m X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $\kappa_{r,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,3}|^k = O(1) \sum_{r=1}^m \frac{p_r}{P_r} |\lambda_r| |s_r|^k = O(1), m \rightarrow \infty$$

bulunur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.



4. BÖLÜM

Bu bölümde Teorem 2.2 nin (2.24) şartından dolayı $\frac{P_r}{rp_r} = O(1)$ olduğundan $p_r = \frac{1}{r+1}$

için hiçbir sonuç çıkarılamaz. Bu nedenle, bu bölümde aşağıdaki Teorem 4.1 i , Teorem 2.2 nin (2.24) şartı olmadan daha genel bir biçimde ispatlayacağız .

Teorem 4.1 : (X_r) , hemen hemen artan bir dizi olsun ve (β_r) ve (λ_r) dizileri de Teorem 2.2 nin (2.19)–(2.22) ve (2.26)–(2.27) şartlarını sağlayacak şekilde diziler olsun. Eğer,

$$\sum_{r=1}^m \frac{|\lambda_r|}{r} = O(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

$$\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{1}{r} |\tau_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde $\sum a_r \lambda_r$ serisi $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta \leq 1/k$ için $|\bar{N}, p_r; \delta|_k$ toplanabilir [24].

Teorem 4.1 in ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.2: (X_r) , (β_r) ve (λ_r) dizileri Teorem 4.1 in ifadesindeki gibi diziler olmak

üzere (2.21) şartı altında

$$r\beta_r X_r = O(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \beta_r X_r < \infty \quad (4.4)$$

şartları geçerlidir [25].

Teorem 4.1 in ispatı : (κ_r) , $\sum a_r \lambda_r$ serisinin (\bar{N}, p_r) ortalamasını gösterebilir. O zaman tanım gereği

$$\kappa_r = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r p_v \sum_{i=0}^v a_i \lambda_i = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r (P_r - P_{v-1}) a_v \lambda_v.$$

dir. Bu takdirde $r \geq 1$ için,

$$\kappa_r - \kappa_{r-1} = \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r P_{v-1} a_v \lambda_v = \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} v a_v.$$

elde edilir. Abel dönüşümü uygularsak,

$$\kappa_r - \kappa_{r-1} = \frac{r+1}{r P_r} p_r t_r \lambda_r - \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} p_v t_v \lambda_v \frac{v+1}{v}$$

$$+ \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \Delta \lambda_v t_v \frac{v+1}{v}$$

$$+ \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v t_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v}$$

$$= \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4},$$

elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$|\kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4}|^k \leq 3^k \left(|\kappa_{r,1}|^k + |\kappa_{r,2}|^k + |\kappa_{r,3}|^k + |\kappa_{r,4}|^k \right)$$

eşitliğini kullanarak

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,l}|^k < \infty, \quad l=1,2,3,4. \quad (4.5)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

(2.22) şartından dolayı $\lambda_r = O(1/X_r) = O(1)$ şartı kullanılarak ve sonra da (2.19),(2.22),(2.27) ve (3.3) şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\kappa_{r,l}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} |\lambda_r|^{k-1} |\lambda_r| |t_r|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\lambda_r| \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} |\tau_r|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\lambda_r| \sum_{v=1}^r \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k - 1} |t_v|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} |\tau_r|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \lambda_r| X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \beta_r X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de Hölder eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\kappa_{r,2}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}} \left\{ \sum_{v=1}^{r-1} P_v |\lambda_v|^k |t_v|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| |t_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k-1} |t_v|^k |\lambda_v| \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine Hölder eşitsizliği ve (2.19),(2.22),(2.25),(4.2),(4.3) ve (4.4) şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k+k-1} |K_{r,3}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}} \left\{ \sum_{v=1}^{r-1} P_v \beta_v |t_v|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \beta_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m P_v \beta_v |t_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \beta_v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v \beta_v) \sum_{i=1}^v \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\delta k} \frac{1}{i} |t_i|^k + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v \beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v X_v |\Delta \beta_v| + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_{v+1} + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine $k > 1$, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ olacak şekilde k ve k' indisleri için Hölder eşitsizliği ve (2.19),(2.22),(2.25),(4.1),(4.4) şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |K_{r,4}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} |t_v|^k \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m P_v \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} |t_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_{v+1}| \sum_{r=1}^v \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{1}{r} |t_r|^k + O(1) |\lambda_{v+1}| \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_{v+1}| X_v + O(1) |\lambda_{m+1}| X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_{v+1} + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1} \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir . Böylece

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |K_{r,l}|^k < \infty, \quad l=1,2,3,4$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar.

Teorem 4.3: (X_r) hemen hemen artan dizi ve $\lambda_r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ olsun. Kabul edelim ki (A_r) , $\sum A_r X_r$ yakınsak ve tüm r için $|\Delta \lambda_r| \leq |A_r|$ ve $\sum r \delta_r X_r < \infty$ ile δ -yarı monoton olacak şekilde bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{r=1}^m \frac{1}{r} |\lambda_r| = O(1) \tag{4.6}$$

$$\sum_{r=1}^m \frac{1}{r} |t_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \tag{4.7}$$

$$\sum_{r=1}^m \frac{P_r}{P_r} |\tau_r|^k = O(X_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde $\sum a_r \lambda_r$ serisi $(\bar{N}, p_r)_k$, $k \geq 1$ toplanabilir [26].

Lemma 4.4: Teorem 4.3 ün şartları altında

$$|\lambda_r| X_r = O(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

şartı geçerlidir [26].

Lemma 4.4 ispatı : $\lambda_r \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$ olsun.

$$|\lambda_r| X_r = X_r \left| \sum_{v=r}^{\infty} \Delta \lambda_v \right| \leq X_r \sum_{v=r}^{\infty} |\Delta \lambda_v| \leq \sum_{v=0}^{\infty} X_v |\Delta \lambda_v| \leq \sum_{v=0}^{\infty} X_v |A_v| < \infty$$

olur ki, buradan $|\lambda_r| X_r = O(1)$, $r \rightarrow \infty$ şartı elde edilir.

Lemma 4.5 : (X_r) hemen hemen artan dizi olsun. Eğer (A_r) , $\sum r \delta_r X_r < \infty$ ile δ yarı monoton ve $\sum A_r X_r$ yakınsaktır ise bu takdirde

$$r A_r X_r = O(1)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r X_r |\Delta A_r| < \infty$$

şartları geçerlidir [26].

Teorem 4.3 ispatı : (κ_r) , $\sum a_r \lambda_r$ serisinin $(\bar{N}, p_r)_k$ ortalamasını gösterebiliriz. O zaman tanım gereği

$$\kappa_r = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r p_v \sum_{i=0}^v a_i \lambda_i = \frac{1}{P_r} \sum_{v=0}^r (P_r - P_{v-1}) a_v \lambda_v$$

bulunur. $r \geq 1$ için ,

$$\kappa_r - \kappa_{r-1} = \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r P_{v-1} a_v \lambda_v = \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} v a_v$$

elde edilir. Bu eşitliğe Abel dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} \kappa_r - \kappa_{r-1} &= \frac{r+1}{r P_r} p_r \tau_r \lambda_r - \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} p_v \tau_v \lambda_v \frac{v+1}{v} \\ &\quad + \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \tau_v \Delta \lambda_v \frac{v+1}{v} + \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \tau_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v} \\ &= \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left| \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4} \right|^k \leq 3^k \left(\left| \kappa_{r,1} \right|^k + \left| \kappa_{r,2} \right|^k + \left| \kappa_{r,3} \right|^k + \left| \kappa_{r,4} \right|^k \right)$$

Olduğundan Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliğinden faydalanarak

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} \left| \kappa_{r,l} \right|^k < \infty \text{ için } l = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Teoremin (4.3) ün (4.6)-(4.8) şartları ve Lemma 4.5 uygulayarak

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} \left| \kappa_{r,1} \right|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \frac{P_r}{P_r} |\tau_r|^k |\lambda_r| |\lambda_r|^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m \frac{P_r}{P_r} |\tau_r|^k |\lambda_r| \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \lambda_r| \sum_{v=1}^r \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \frac{P_r}{P_r} |t_r|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \lambda_r| X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |A_r| X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $k > 1$ olduğunda Hölder eşitsizliğini $\kappa_{r,1}$ de olduğu gibi uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,2}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |t_v|^k |\lambda_v| |\lambda_v|^{k-1} \sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \frac{P_v}{P_v} |t_v|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine $k > 1$ olduğunda Hölder eşitsizliğini uygulayarak Teorem 2.3 ve Lemma 4.5 kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\kappa_{r,3}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |t_v|^k |A_v| \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |A_v| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |t_v|^k |A_v| \sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{P_r}{P_r P_{r-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |t_v|^k |A_v| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v |A_v| \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v |A_v|) \sum_{i=1}^v \frac{1}{i} |t_i|^k + O(1) m |A_m| \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v|^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v|A_v)| X_v + O(1) m |A_m| X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta A_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |A_{v+1}| X_{v+1} + O(1) m |A_m| X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3 ve Lemma 4.4 kullanarak ve $k > 1$ olduğunda Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |K_{r,4}|^k &\leq \sum_{r=2}^{m+1} \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |t_v|^k |\lambda_{v+1}| \frac{1}{v} \times \left\{ \frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v |\lambda_{v+1}| \frac{1}{v} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m P_v |t_v|^k |\lambda_{v+1}| \frac{1}{v} \sum_{r=v+1}^{m+1} \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}| \frac{1}{v} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_{v+1}| \left| \sum_{i=1}^v \frac{1}{i} |t_i|^k \right| + O(1) |\lambda_{m+1}| \left| \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v|^k \right| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_{v+1}| X_{v+1} + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\lambda_{v+1}| X_{v+1} + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1} \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{k-1} |K_{r,l}|^k < \infty, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar.

5.BÖLÜM

Teorem 5.1 : (X_r) hemen hemen artan bir dizi olsun. Eğer (2.19)–(2.22) ve (2.31)–(2.34) şartları sağlanıyorsa $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$ serisi $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta < 1/k$ için $|\bar{N}, p_r, \delta|_k$ toplanabilirdir [27].

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.2 : (X_r) hemen hemen artan bir dizi ise bu taktirde (2.20)–(2.21) şartları altında

$$rX_r \beta_r = O(1) \quad (5.1)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \beta_r X_r < \infty \quad (5.2)$$

dır [25].

Lemma 5.3 : Eğer (2.31) ve (2.34) şartları sağlanıyorsa bu taktirde

$$\Delta \left(\frac{P_r}{r p_r} \right) = O \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5.3)$$

dır [28].

Teorem 5.1 ispatı : (κ_r) , $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{p_r \lambda_r}{r p_r}$ serisinin (\bar{N}, p_r) ortalamasının dizisi olsun.

$$\begin{aligned}\kappa_r &= \frac{1}{P_r} \sum_{v=1}^r p_v \sum_{r=1}^v \frac{a_r P_r \lambda_r}{r p_r} \\ &= \frac{1}{P_r} \sum_{v=1}^r (P_r - P_{v-1}) \frac{a_v P_v \lambda_v}{v p_v}\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\kappa_r - \kappa_{r-1} = \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r \frac{P_{v-1} P_v a_v \lambda_v}{v p_v}, \quad r \geq 1, \quad (P_{-1} = 0)$$

olur. Bu eşitliğe Abel dönüşümü uygulanarak,

$$\begin{aligned}\kappa_r - \kappa_{r-1} &= \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^r s_v \Delta \left(\frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v p_v} \right) + \frac{\lambda_r s_r}{r} \\ &= \frac{s_r \lambda_r}{r} + \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} s_v \frac{P_{v+1} P_v \Delta \lambda_v}{(v+1) p_{v+1}} \\ &\quad + \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v s_v \lambda_v \Delta \left(\frac{P_v}{v p_v} \right) - \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} s_v P_v \lambda_v \frac{1}{v} \\ &= \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| \kappa_{r,1} + \kappa_{r,2} + \kappa_{r,3} + \kappa_{r,4} \right|^k \leq 3^k \left(\left| \kappa_{r,1} \right|^k + \left| \kappa_{r,2} \right|^k + \left| \kappa_{r,3} \right|^k + \left| \kappa_{r,4} \right|^k \right)$$

olduğundan , Teoremin ispatını tamamlamak için

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} \left| \kappa_{r,l} \right|^k < \infty \quad \text{için } l = 1, 2, 3, 4 \quad (5.4)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak Abel Dönüşümü ile, Teorem 5.1 ve Lemma 5.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\kappa_{r,1}|^k &= \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{r p_r} \right)^{k-1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} |\lambda_r|^{k-1} |\lambda_r| \frac{|s_r|^k}{r} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{|s_r|^k}{r} |\lambda_r| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\lambda_r| \sum_{v=1}^r \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{|s_r|^k}{r} \\
&\quad + O(1) |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{|s_r|^k}{r} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \lambda_r| X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \beta_r X_r + O(1) |\lambda_m| X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, (2.31) şartından $P_{v+1} = O((v+1)p_{v+1})$ olduğundan Teorem 2.6 dan

$\Delta \lambda_r = O\left(\frac{1}{r}\right)$ ve $k > 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\kappa_{r,2}|^k &= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{r-1} P_v s_v \Delta \lambda_v \right|^k \\
&= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{r-1} \frac{P_v}{p_v} |s_v| p_v |\Delta \lambda_v| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \sum_{v=1}^{r-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\Delta \lambda_v|^k \\
&\quad \times \left(\frac{1}{P_{r-1} \sum_{v=1}^{r-1} p_v} \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\Delta \lambda_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_r} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v |\Delta \lambda_v|}{p_v} \right)^{k-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} |s_v|^k |\Delta \lambda_v| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} |s_v|^k |\Delta \lambda_v| \left(\frac{P_v}{v p_v} \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v \beta_v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \Delta(v \beta_v) \sum_{r=1}^v \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k} \frac{|s_r|^k}{r} + O(1) m \beta_m \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\Delta(v \beta_v)| X_v + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v |\Delta \beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} X_v |\beta_v| + O(1) m \beta_m X_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 5.1 ve Lemma 5.2 i kullanılarak yine $\kappa_{n,1}$ de olduğu gibi $k > 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k+k-1} |\kappa_{r,3}|^k &= \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k+k-1} \left| \frac{p_r}{P_r P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} P_v s_v \lambda_v \Delta \left(\frac{P_v}{v p_v} \right) \right|^k \\
&= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{r-1} P_v |s_v| |\lambda_v| \frac{1}{v} \right\}^k
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{r-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right) p_v |s_v| |\lambda_v| \frac{1}{v} \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \sum_{v=1}^{r-1} \left(\frac{P_v}{vp_v} \right)^k p_v |s_v|^k |\lambda_v|^k$$

$$\times \left(\frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} p_v \right)^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{vp_v} \right)^k |s_v|^k p_v |\lambda_v|^k \sum_{r=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{r-1}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{vp_v} \right)^k p_v |s_v|^k |\lambda_v|^k \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{P_v} \frac{v}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{vp_v} \right)^{k-1} |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^m X_v \beta_v + O(1) X_m |\lambda_m|$$

$$= O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

Bulunur. Teorem 5.1 ve Lemma 5.2, Lemma 5.3 kullanılarak yine son olarak $\kappa_{n,3}$ deki gibi $k > 1$ için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k + k - 1} |\kappa_{r,4}|^k &= \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{r-1} s_v \frac{P_v}{v} \lambda_v \right|^k \\
&= \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{r-1} s_v \frac{P_v}{v p_v} p_v \lambda_v \right|^k \\
&\leq \sum_{r=2}^{m+1} \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{r-1}^k} \sum_{v=1}^{r-1} |s_v|^k \left(\frac{P_v}{v p_v} \right)^k p_v |\lambda_v|^k \\
&\quad \times \left(\frac{1}{P_{r-1}} \sum_{v=1}^{r-1} p_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{v p_v} \right)^k \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} |s_v|^k p_v |\lambda_v|^k \frac{1}{P_v} \frac{v}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{v p_v} \right)^{k-1} |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{|s_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m X_v \beta_v + O(1) X_m |\lambda_m| \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teoremin ispatı tamamlanır.

6. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde ifade ve ispatlanmış teoremler için bazı sonuçlar verilecektir.

Sonuç 6.1: Teorem 3.1 de n nin tüm değerleri için (X_r) pozitif azalmayan dizi ve $p_r = 1$ alınırsa Teorem 2.1 bulunur. Böylece (3.1) şartı (2.23) şartına indirgenmiş olur. Ayrıca Teorem 3.1 de $p_r = 1/(r+1)$ alırsak $|\bar{N}, 1/(r+1)|_k$ toplanabilme çarpanlarına ilişkin bir sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 6.2: Teorem 4.1 de $p_r = 1$ alırsak $|C, 1; \delta|_k$ toplanabilirliğiyle ilgili bir sonuç elde edilmiş olur. Ayrıca $p_r = 1/(r+1)$ alırsak o zaman $|\bar{N}, 1/(r+1); \delta|_k$ toplanabilme çarpanlarıyla alakalı bir sonuç bulunur.

Sonuç 6.3: Teorem 4.3 r in tüm değerleri için $p_r = 1$ alırsak $|C, 1|_k$ toplanabilme çarpanlarıyla ilgili bir sonuç elde edilir. Ayrıca $p_r = 1/(r+1)$ alırsak o zaman $|\bar{N}, 1/(r+1)|_k$ toplanabilme çarpanlarıyla ilgili bir sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4: Teorem 5.1 de n in tüm değerleri için $p_r = 1$ alırsak $|C, 1; \delta|_k$ toplanabilirlik ile ilgili bir sonuç elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Fekete, M., 1911. Zur Theorie der divergenten Reihen, *Mathematical es Termezs Ertesitö* (Budapest), 29:719-726.: 719-726.
2. Flett, T.M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, **Proceedings of the London Mathematical Society**, 7: 113-141.
3. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings of the London Mathematical Society** (3), 19: 357-384.
4. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970. On $|\bar{N}, p_n|$ summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum** (Szeged), 31: 9- 12.
5. Tanović-Miller, N., 1979. On strong summability. **Glasnik Matematički Serija III**, 14 (34): 87-97.
6. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, 97 (1): 147-149.
7. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis. **Cambridge University Press, London, 208 pp.**
8. Abel, N. H., 1826. Untersuchungen über die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$
 (German). **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, 1: 311–339.
9. Petersen, G. M., 1966. Regular Matrix Transformations. Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.
10. Zygmund, A. 1959, Trigonometric series, Cambridge University Press, Vol I.
11. Kogbetlontz, E., 1925. Sur les series absolument sommables par la methode des moyannes arithmetiques, **Bull. Sci. Math.** 49, 234-256.
12. Hardy, G. H., 1949. Divergent Series. **Oxford University Press, Oxford.**
13. Mazhar, S. M., 1966. On the summability factors of infinite series. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 13: 229-236.

14. Sulaiman, W. T., 2003. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series (IV). **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **34** (11): 1547-1557.
15. Bor, H., 1986. A note on two summability methods, **Proceedings of the American Mathematical Society**. **98** no. 1, 81–84.
16. Boas, R.P., 1965. Quasi positive sequences and trigonometric series, **Proceedings of the London Mathematical Society**. **14A**, 38-46.
17. Bari, N. K., Stečkin, S. B., 1956. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva**, **5**: 483-522
18. Mishra, K.N. and Srivastava, R.S.L., 1983-1984. On absolute Cesàro summability factors of infinite series, **Portugaliae Mathematica**. **42**, 53-61.
19. Bor, H. and Seyhan, H., 1999. On almost increasing sequences and its applications, **Indian Journal Pure Applications Mathematical** ,**30** 1041-1046.
20. Bor, H.,1991. On quasi monotone sequences and their applications, **Bulletin Australia Mathematical Society**. **43** 187–192.
21. Bor, H., 1987. A note on $\left| \bar{N}, p_n \right|_k$ summability factors of infinite series, **Indian Journal Pure and Applied Mathematics**. **18**, 330-336.
22. Bor, H., 2007. A study on absolute Riesz summability factors. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo** **56: (2)**, 358-368.
23. Bor, H. 1998 An Application Of Almost Increasing Sequences **Internat. J. Math. & Math. Sci.** **23** 859–863
24. Bor, H. and Özarlan H. S. 2000 On Absolute Riesz Summability Factors. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** **246**, 657-663
25. Mazhar, S. M., 1997. A note on absolute summability factors. **Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica**, **25** (3): 233-242.
26. Bor, H. 2000 An Application Of Almost Increasing And δ -Quasi-Monotone Sequences **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics** **18**, 1-6

27. Bor, H. 2009 A New Note on the Increasing Sequences. **Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences** **25(3)** 291-300
28. Mishra K. N. and Srivastava, R. S. L., 1984. On , $|\bar{N}, p_n|$ summability factors of infinite series. **Indian Journal Pure and Applied Mathematics**. 15: 651-656.
29. Aljancic. S. and Arandelovic, D. 1977 O-regularly varying functions, **Publishing Institute Mathematical**. **22** 5-22.
30. Bor, H., 1993. On the local property of , $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ summability of factored Fourier series. **Analysis and Applications Journal of Mathematical**, **179 (2)**: 644-649.
31. Bor, H., 1993. On local property of $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ summability of factored Fourier series. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **179 (2)**: 646-649.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Kübra YILMAZ

Uyruğu: Türkiye (T.C)

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü	2023
Lisans	Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü	2018
Lise	Selçuklu Anadolu Lisesi, Kayseri	2013

YABANCI DİL

İngilizce