

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT FONKSİYON UZAYLARINDA BAZI BEREZİN SAYI
EŞİTSİZLİKLERİ

Verda GÜRDAL

Danışman
Prof. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2023



© 2023 [Verda GÜRDAL]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. NÜMERİK YARIÇAP VE BEREZİN SEMBOLÜ	10
3.1. Genel Notasyon Ve Terminoloji.....	10
3.2. Temel Nümerik Yarıçap Eşitsizlikleri.....	21
3.3. Yarı Hilbert Uzaylarda A-Nümerik Yarıçap Eşitsizlikleri.....	26
3.4. Berezin Sembolü.....	32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	38
4.1. Operatör Dışbükey Fonksiyonlarına Göre Berezin Sayı Eşitsizlikleri.....	38
4.2. Diğer Berezin Yarıçap Eşitsizlikleri.....	47
4.3. Geometrik Dışbükeyliğe Göre Berezin Sayı Eşitsizliği.....	56
4.4. Davis-Wielandt-Berezin Yarıçapları İçin Alt Ve Üst Sınırlar.....	69
4.5. A-Davis-Wielandt-Berezin Yarıçap Eşitsizlikleri.....	84
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	97
KAYNAKLAR	100
ÖZGEÇMİŞ	110

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİLBERT FONKSİYON UZAYLARINDA BAZI BEREZİN SAYI EŞİTSİZLİKLERİ

Verda GÜRDAL

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN

Bu yüksek lisans tez çalışması çekirdek üreten yardımıyla tanımlanan Berezin sembolleri ve Berezin sayısının uygulama alanları olan bazı eşitsizlikler ile ilgilidir. Bu bağlamda yüksek lisans tez çalışması Giriş, Kaynak Özetleri, Nümerik Yarıçap ve Berezin sembolü, ve Araştırma Bulguları ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşacak biçimde planlanmıştır. Bu bölümlerden birincisi giriş kısmı olarak oluşturulmuş ve nümerik değer teorisi, Berezin sembolü, Davis-Wielandt yarıçapı ve eşitsizlikler hakkında genel çerçeve bu kısımda tanıtılmıştır. Tez çalışmasının ikinci bölümünde ise tez kapsamında üzerinde çalışılmış olan problemlerin, yani nümerik değerde bir takım varyasyonlar, çekirdek üretenler teorisi ve Berezin sembolü ile ilgili tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenmiştir. Bu bölümün devamında ise tüm çalışılan konularla ilgili notasyon ve terminoloji, tanım ve ilgili eşitsizlikler, temel nümerik yarıçap eşitsizlikleri, yarı Hilbert uzaylarda A -nümerik yarıçap eşitsizlikleri, Berezin sembolü ve bununla ilgili son zamanlarda elde edilen sonuçlar hakkında üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm ise beş alt başlıklara ayrılarak planlanmıştır. İlk olarak son zamanlarda Alomari vd. (2022) tarafından Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için bazı nümerik yarıçap eşitsizlikleri ile ilgili bir takım sonuçlar ve Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için bazı Berezin sayı eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Yani, Huban vd. (2021a) çalışmasında elde edilen bir sonuç, Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili Dragomir (2019)'in bir sonucu ve Başaran vd. (2022) çalışmasında elde edilen eşitsizliğin bazı iyileştirilmeleri bu alt kısımda incelenmiştir. İkinci alt kısımda ise Berezin yarıçap eşitsizlikleri ve Hilbert fonksiyon uzay operatörü için Berezin normunu içeren sınırlı T fonksiyonunu kullanarak bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir. Özel durumda, keyfi sınırlı doğrusal operatör T için

$$\text{ber}^4(T) \leq \frac{3}{8} \left\| |T|^4 + |T^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |T|^2 + |T^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(T^2)$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Üçüncü alt kısımda ise, literatürde bilinen bazı eşitsizliklerin genel şeklini sunmak için (3.2) eşitsizliği, (3.7) Young eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 3.10 sonuçları uygulanarak $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayı operatörleri üzerindeki Berezin yarıçap eşitsizlikleri için geometrik dışbükey fonksiyonların bazı uygulamaları verilmiş ve onlar ile ilgili diğer eşitsizlikler ispatlanmıştır. Dördüncü alt

kısımda ise, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert fonksiyon uzayında T operatörü için $\text{dwb}(T) := \sup \left\{ \sqrt{|\tilde{T}(\lambda)|^2 + \|T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|^4} : \lambda \in \Omega \right\}$ olmak üzere

$$\max \left\{ \text{ber}(T), \|T\|_{\text{ber}}^2 \right\} \leq \text{dwb}(T) \leq \sqrt{\text{ber}^2(T) + \|T\|_{\text{ber}}^4}$$

formülü ile $\text{dwb}(T)$ Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının özellikleri incelenmiştir. Bu Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının bir üst sınırı elde edilmiştir. Son alt kısımda ise, $\mathcal{H}$ üzerinde yarı-iç çarpımdan indirgenmiş pozitif A operatörü $u, v \in \mathcal{H}$ için $\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle$ ile tanımlı olmak üzere A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçap $\text{dwb}_A(T)$ 'nin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ek olarak, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının bir üst sınırı elde edilmiştir. Bu tez çalışmasının dört ana bölümünden sonra Sonuç ve Öneriler kısmı yer almaktadır. Bu kısımda dördüncü bölümde yer alan ana sonuçlar kısa olarak tartışılmış ve bu sonuçların devamı olarak düşünülen veya ortaya çıkacak bir takım öneriler ve problemler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Berezin sembolü, Berezin yarıçapı, A -Berezin sayısı, A -Berezin normu, karışık-Schwarz eşitsizliği, üçgen eşitsizliği, Hilbert fonksiyon uzay, geometrik dışbükey fonksiyonu, dışbükey fonksiyonu, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı, A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı, yarı-iç çarpım.

2023, 111 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME BEREZIN NUMBER INEQUALITIES IN HILBERT FUNCTION SPACES

Verda GÜRDAL

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN

This master's thesis is about some inequalities which are the application areas of Berezin symbols and Berezin numbers defined with the help of reproducing kernel. In this context, this master's thesis is planned to consist of four main parts: Introduction, Reference Summaries, Numeric Radius and Berezin symbol, and Research Findings and Discussion. The first of these chapters was created as an introduction and the general framework about numerical value theory, Berezin symbol, Davis-Wielandt radius and inequalities is introduced in this section. In the second part of the thesis, the problems that have been studied within the scope of the thesis, namely some variations in numerical value, the historical development of the reproducing kernel theory and the Berezin symbol, and recent studies are examined in detail. In the continuation of this section, notation and terminology related to all studied subjects, definition and related inequalities, basic numerical radius inequalities, A -numerical radius inequalities in semi-Hilbert spaces, Berezin symbol and the results obtained recently are discussed. The fourth chapter is planned by dividing into five sub-titles. First, recently some results on some numerical radius inequalities for Hilbert function space operators and some Berezin number inequalities for Hilbert function space operators have been proved by Alomari et al. (2022). That is, a result obtained in the study Huban et al. (2021a), a result of Dragomir (2019) on the Hermite-Hadamard inequality, and some refinements of the inequality obtained in the study Başaran et al. (2022) are examined in this subsection. In the second subsection, some new inequalities are examined by using the bounded $\tilde{T}$ function including Berezin radius inequalities and the Berezin norm for the Hilbert function space operator. In the special case, the inequality

$$\text{ber}^4(T) \leq \frac{3}{8} \left\| |T|^4 + |T^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |T|^2 + |T^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(T^2)$$

is proved for the arbitrarily bounded linear operator T . In the third subsection, some applications of geometric convex functions for Berezin radius inequalities on $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ space operators are given by applying (3.2) inequality, (3.7) Young's inequality and Lemma 3.10 results to present the general form of some inequalities known in the literature, and other inequalities related to them are proved. In the fourth subsection, the properties of Davis-Wielandt-Berezin radius $\text{dwb}(T) =$

$$\sup \left\{ \sqrt{\left| \tilde{T}(\lambda) \right|^2 + \left\| T \hat{k}_{\mathcal{H}, \lambda} \right\|^4} : \lambda \in \Omega \right\} \text{ with}$$

$$\max \left\{ \text{ber}(T), \|T\|_{\text{ber}}^2 \right\} \leq \text{dwb}(T) \leq \sqrt{\text{ber}^2(T) + \|T\|_{\text{ber}}^4}$$

formula for the T operator in the $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert function space are investigated. Some upper and lower limits have been set for this Davis-Wielandt-Berezin radius. Also, an upper bound is obtained for the Davis-Wielandt-Berezin radius of the sum of the two bounded linear operators. At the bottom, the properties of the A -Davis-Wielandt-Berezin radius $\text{dwb}_A(T)$ are examined, which A is a positive operator defined by $\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle$ for $u, v \in \mathcal{H}$ reduced from the semi-inner product on $\mathcal{H}$. In addition, some lower and upper bounds have been determined for the radius of A -Davis-Wielandt-Berezin for Hilbert function space operators. In addition, an upper bound is obtained for the radius A -Davis-Wielandt-Berezin of the sum of the two bounded linear operators. After the four main parts of this thesis, there is the Conclusion and Suggestions part. In this section, the main results in the fourth section are briefly discussed and some suggestions and problems that are considered or will emerge as a continuation of these results are given.

Keywords: Berezin symbol, Berezin radius, A -Berezin number, A -Berezin norm, mixed-Schwarz inequality, triangle inequality, reproducing kernel, Hilbert function space, geometrically convex function, convex function, Hermite-Hadamard inequality, Davis-Wielandt-Berezin radius, A -Davis-Wielandt-Berezin radius, semi inner product.

2023, 111 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgilerimi sunarım.

Verda GÜRDAL

ISPARTA, 2023



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{B}(\mathcal{H})^+$	$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'daki tüm pozitif operatörlerin kümesi
$\mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H})$	$\mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ 'deki tüm (A, Ω) -eşlenik olan operatörlerin kümesi
$\text{ber}(X)$	X 'nin Berezin sayısı
$\text{Ber}(X)$	X 'nin Berezin kümesi
$\text{ber}_A(X)$	X 'nin A -Berezin sayısı
$\text{Ber}_A(X)$	X 'nin A -Berezin kümesi
$c(X)$	X 'nin Crawford sayısı
$\mathbb{D}$	Birim disk
$dw(\cdot)$	Davis-Wielandt yarıçapı
$DW(\cdot)$	Davis-Wielandt kabuğu
$dwb(X)$	X 'in Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı
$DWB(X)$	X 'in Davis-Wielandt-Berezin kabuğu
$dwb_A(X)$	X 'in A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı
$DWB_A(X)$	X 'in A -Davis-Wielandt-Berezin kabuğu
$\mathcal{H}$	Hilbert uzay
I	Birim operatör
$\text{Im}(X)$	X operatörünün sanal kısmı
$k_{\mathcal{H},\lambda}$	λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının çekirdek üretene
$k(m, M, f)$	Genelleştirilmiş Kantrovich sabiti
$\widehat{k}_\lambda$	$\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş çekirdek üretene
$m(X)$	X operatörünün minimum normu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}(\cdot)$	Sıfır uzayı
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$r(X)$	X operatörünün spektral yarıçapı
$\text{Re}(X)$	X operatörünün gerçel kısmı
$sp(X)$	X operatörünün gerçel spektrumu
$\tilde{X}$	X 'nin Berezin sembolü
$ X $	X operatörünün mutlak değeri
$\ X\ $	X 'nin operatör normu
$\ X\ _{A-\text{Ber}}$	X 'nin A -Berezin normu
$W(\cdot)$	Nümerik aralık kümesi
$w(\cdot)$	Nümerik yarıçap
$W_A(X)$	X 'nin A -nümerik aralığı
$w_A(X)$	X 'nin A -nümerik yarıçapı
$\ X\ _{\text{Ber}}$	X 'nin Berezin normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$	A pozitif operatörünün yarı iç çarpımı
$\sharp$	Geometrik ortalama
$\sharp_A$	A -geometrik ortalama

1. GİRİŞ

Operatör teorisi ve matris analizi, birçok matematikçinin ilgisini çeken ve bilimsel hesaplama, yöneylem araştırması, matematiksel fizik, kontrol ve sistem teorisi, istatistik, ekonomi ve mühendislik disiplinleri dahil olmak üzere çeşitli bilim dallarında birçok uygulamaya sahip olan önemli araştırma alanlarıdır. Matris analizindeki pek çok teorem eşitsizlikler şeklinde ortaya çıkar ve bu alandaki temel araştırma alanlarından biri de matris ve operatör eşitsizliğidir. Aslında matris eşitsizliklerinin niceliksel açıdan matris analizini yansıttığı söylenebilir. Eşitsizlikler, teorik ve uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm alanlarında izlenebilir. Diferansiyel denklemler teorisi, varyasyonlar hesabı ve geometri gibi bazı ilgili alanlarda, klasik örneklerden daha uygun formları genişletmek ve bulmak için çaba gösterilmiştir. Dışbükey fonksiyonlar kavramı, günümüzde alana ayrılmış çok sayıda araştırma makalesinde ve kitapta görülebileceği gibi, gerçekten de modern matematikte önemli bir yer bulmuştur. Ayrıca doğal geometrik yorumu ve birçok uygulaması olan dışbükey fonksiyonların ilk temel sonucu diyebileceğimiz Hermite-Hadamard eşitsizliği temel matematikte büyük ilgi çekmiş ve çekmeye devam etmektedir. Bu nedenle, birçok matematikçi, çabalarını farklı işlev sınıfları için onu genelleştirmeye, iyileştirmeye, muadilleştirmeye ve genişletmeye adanmıştır. Bu tezde yapacağımız şey, bazı Berezin sayısal eşitsizliklerinin Hilbert fonksiyon operatör versiyonunu bulmaktır. Ayrıca, önceki sonuçları iyileştiren veya genelleştiren yeni eşitsizlikler ortaya koymaya çalışır.

Operatörler için eşitsizlikleri uygularken son derece dikkatli olmalıyız çünkü bir eşitsizliğin operatör versiyonu mutlaka belirlenmemiştir. Örneğin, herhangi bir x ve y pozitif tamsayı çifti için şu eşitsizlik geçerlidir:

$$|x - y| \leq x + y.$$

Operatör versiyonunun

$$|X - Y| \leq X + Y, \quad (1.1)$$

olması beklenir, burada X ve Y pozitif operatörler ve $|\cdot|$ operatörün ikinci pozitif kökünü temsil eder. Ancak $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ gibi matrisler dikkate

alındığında (1.1) eşitsizliğin her zaman doğru olmadığı gösterilebilir. Belki tekil değer biçimini kullanırsak (matrisin kendisi yerine),

$$s_j(X - Y) \leq s_j(X + Y), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.2)$$

sonucunu alırız. Burada $\|\cdot\|$ üniter değişmez norm olmak üzere (1.2) eşitsizliğinin daha zayıf versiyonu

$$\|X - Y\| \leq \|X + Y\|$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki eşitsizlik, Bhatia ve Kittaneh (2008)'de oluşturulmuştur.

Matris teorisinde, bir matris ve uygulamaları ile ilişkili kuadratik bir form kavramı oldukça iyi bilinmektedir. Bu fikirlerin doğal bir uzantısı sonlu ve sonsuz boyutlu uzaylarda nümerik değer kavramına yol açar ve bir operatörle ilgili çoğu kuadratik soru bu aralık etrafında döner. Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde düşünüldüğünde bir operatörün nümerik değeri bazen, matris teorisinde yaygın olarak kullanılan bir terim olan değerler alanı olarak adlandırılır. Nümerik değer yerine kullanılan diğer terimler, diğerleri arasında Wertovorat, Hausdorff alanı, değer aralığını içerir. Bununla birlikte, ilk ikisi diğerlerinden daha uzun ömürlüdür, ancak avantaj kesin olarak birincisine, yani nümerik değerdedir ve operatör teorisyenleri tarafından en çok tercih edilenidir. Nümerik değer teorisinin özü Hilbert uzayı ile ilgili olan kısımdadır. Aslında, Hilbert, Hellinger, Toeplitz ve diğerleri gibi araştırmacılar tarafından Hilbert uzayının ilk çalışmalarında, başlıca ilgi nesneleri kuadratik formlardır. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde bir sınırlı doğrusal operatör T için,

$$\varphi_T(x, y) = \langle Tx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}$$

ile verilen φ_T sesquilinear bir formu ve

$$\widehat{\varphi}_T(x) = \varphi_T(x, x) = \langle Tx, x \rangle, \quad x \in \mathcal{H}$$

kuadratik bir formu ile ilişkilendirebiliriz. Bunu akılda tutarak, aşağıda tanımlanan nümerik değer, basitçe $\widehat{\varphi}_T$ 'nin birim küreyle sınırlandırılmasının değeridir. Formal

olarak T operatörü tarafından uygulanan nümerik değer

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$$

ile verilir.

Fonksiyonların meydana getirdiği doğrusal operatörlere, fonksiyonel analizde sıklıkla rastlanır ve bunlar Hankel operatörlerini, bileşke operatörlerini ve Toeplitz operatörlerini içerir. İndirgeme fonksiyonuna bazen ilişkilendirilen operatörün sembolü denir. Pek çok durumda, bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ üzerindeki doğrusal bir operatör ayrıca sınırlı nokta değerli bir küme üzerinde bir fonksiyona yol açar. Bu nedenle, sık sık fonksiyonlar tarafından indirgenen operatörleri inceleriz ve benzer şekilde operatörler tarafından indirgenen fonksiyonları araştırabiliriz. Berezin sembolü, bir operatör-fonksiyon bağlantısının olağanüstü bir örneğidir. Bir operatörün nümerik yarıçapı ve Berezin sayısı kavramları, mühendislik, kuantum hesaplama, kuantum mekaniği, sayısal analiz, diferansiyel denklemler vb. alanlardaki muazzam uygulamaları nedeniyle kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bir operatörün Berezin sembolü ilk olarak 1970'li yıllarda Berezin tarafından Fock uzayları üzerinde Wick sembollerinin bir genişlemesi olarak verilmiştir (Berezin, 1972, 1974). Öte yandan, operatörleri fonksiyonlara bağlayan Berezin dönüşümü, operatör teorisinde, özel olarak Toeplitz operatörlerini, Hankel operatörlerini ve bileşke operatörlerini incelemek için önemli bir rol oynar. Operatör teorisindeki bir diğer önemli kavram da Berezin sayısıdır. Matematiksel analizde eşitsizlikler, operatörlerin özelliklerini alt ve üst sınırlar şeklinde analiz etmek için kullanılır. Bilim ve mühendisliğin çoğu alanlarında, matematiksel eşitsizlikler, gerçek dünya problemlerini tanımlamanın ve bunlara çözüm önermenin en önemli yoludur. Analiz derslerinde incelenen pek çok operatör türünün sınırlılık özelliği, teori ve uygulama oluşturmada önemli bir husustur. Örneğin alt ve üst sınırlardan bazı alakalı konuların incelenmesinde önemli olan operatör normunu oluşturmak için yararlanılır. Matematik ve matematiksel fizik alanındaki birçok araştırmacı, Hilbert fonksiyon uzayını çekirdek üreten üzerinde tanımlanan bir operatörün Berezin sembolüyle ilgilenmektedir. Bu amaçla, birkaç matematikçi

$$\text{ber}(X) \leq w(X) \leq \|X\| \quad (1.3)$$

şeklinde verilen eşitsizlik hakkında bazı iyileştirmeler ve genelleştirmeler yapmıştır (Garayev vd., 2016a, 2017, 2021). Bu eşitsizliğin inceliklerini ve uzantılarını elde etmek akademisyenlerin ilgisini çekmektedir.

Tezin amacı çekirdek üreten ve onun yardımıyla elde edilen Berezin sembollerini kullanarak bazı operatör sınıflarının Berezin sayısı için hedeflenen eşitsizlikler ile ilgili yeni sonuçlar ortaya koymaktır. Bu amaca ulaşmak için temel argümanlarımız Hermite-Hadamard eşitsizliği, operatör dışbükeyliği, Cauchy-Buzano eşitsizliği, pozitif operatörler için klasik operatör Jensen eşitsizliği, geometrik dışbükey fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği, Kantorovich sabiti, genelleştirilmiş karışık Schwarz eşitsizliği, Kantorovich sabiti ile Young eşitsizliğinin çarpımsal düzenlenmesi ile ilgili bazı bilinen literatürdeki eşitsizlikleri, Kuvvet-Young eşitsizliği, McCarty eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyonu ve diğer genellemeleri ile Davis-Wielandt yarıçapı kullanmaktır. Bu argümanlar kullanacağımız metodlarla beraber çalışmamıza yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Aşağıda başlıklar halinde tez çalışması sonucunda ortaya konan sonuçlar verilmiştir. Bu alt başlıklar ile ilgili detaylar dördüncü bölümde verilecektir.

- Berezin sayısının kuvvetlerini ve Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için Berezin normlarını içeren sınırlı $\tilde{T}$ fonksiyonunu kullanarak bazı eşitsizlikler incelenmiştir.
- Cauchy-Buzano eşitsizliği ve pozitif operatörler için klasik operatör Jensen eşitsizliği kullanılarak, Berezin yarıçap eşitsizliklerini ve Hilbert fonksiyon uzayı operatörler için Berezin normunu içeren sınırlı $\tilde{T}$ fonksiyonunu kullanarak bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir.
- Geometrik dışbükey fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği, Kantorovich sabiti, genelleştirilmiş karışık Schwarz eşitsizliği, Kantorovich sabiti ile Young eşitsizliğinin çarpımsal düzenlenmesi ile ilgili bazı literatürdeki bilinen eşitsizlikler kullanılarak operatörler için Berezin sayı eşitsizlikleri sunulmuştur.
- Kuvvet-Young eşitsizliği, McCarty eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyonu ve diğer genellemeleri kullanılarak

Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.

- A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için alt sınırların eşitliği incelenmiş ve Hilbert fonksiyon uzay operatörlerinin A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ek olarak, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde tez kapsamında üzerinde çalışılmış olan problemlerin tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenecektir.

İlk günlerde, Hilbert uzaylarını incelemenin ana hedeflerinden biri kuadratik formlardı. Bir operatörle ilişkili kuadratik hakkındaki temel problemlerden biri onun nümerik aralığıdır. Başlangıçta, nümerik değer kavramı, 1918'de Toeplitz ve Hausdorff tarafından matrisler için, yani sonlu boyutlu uzaylarda başlatılmış, ancak bu tanım sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında operatörlere eşit olarak iyi uygulanmıştır. Daha sonra, Wielandt (1955), bir Hilbert uzayında sınırlı doğrusal bir operatörün spektrumunun sayısal aralığı ile dışbükey kabuğu arasındaki ilişkiyi inceledi. Toeplitz ve Hausdorff, nümerik değer en önemli özelliğini yani dışbükeyliğini ispatlamıştır. Diğer temel özellikleride boş olmaması, kapanışı içinde T nin spektrumunu içermesi ve ayrıca orjin merkezli $\|T\|$ yarıçaplı kapalı diskin içinde yer almasıdır. O zamandan beri teorik çalışma ve uygulamalarla motive edilen nümerik değer çalışmaları çok geniş ve matris analizi ve operatör teorisinde aktif araştırma alanı olmuştur. Gerçekten de bu kavramlar ve bunların yayınlanmış genellemeleri üzerine geniş ve dinamik güncel araştırmalar mevcuttur. Özellikle bunun nedeni, nümerik analiz ve diferansiyel denklemler gibi uygulamalarda matrislerin ve operatörlerin rolünün incelenmesinde ve anlaşılmasında çok yararlı olmalarıdır. Nümerik değer güzelliklerinden biri, özelliklerinin ve kullanımının matematikte matris analizi, operatör teorisi ve diferansiyel denklemler olmak üzere üç alana yayılmasıdır. Sonlu ve sonsuz boyutlu durumlarda nümerik değer Banach uzaylarında ve Banach cebirlerinde genellemeler tam olarak Bonsall ve Duncan (1973), Horn ve Johnson (2012) Gustafson ve Rao (1997)'nin çalışmalarında ayrıntılı olarak verilmiştir. Matris analizi bakış açısından, nümerik değer bir takım varyasyonlar üzerinde k -nümerik değeri, C -nümerik değeri, M -nümerik değerleri ve onların genellemelerini içeren bir takım problemler çalışılmış ve halen çalışılmaktadır. Operatör teorisinden bakış açısına göre, buradaki genellemeler Hahn-Banach teoremi ve yarı-iç çarpım kavramına dayalı olarak büyük ölçüde Banach uzaylarının uzantısı olmuştur. Öte yandan, temel operatörlerin incelenmesi, orijinal olarak Sylvester (1884) tarafından yapılan matris denklemleri teorisinden kaynaklanmıştır. Sylvester, kare matrisler üzerindeki elemanter operatöre karşılık gelen matris operatörlerinin

özdeğerlerini elde etmiştir. Temel operatör terimi Lumer ve Rosenblum (1959) da belgelendiği gibi, ilk olarak 1950'lerin sonlarında Lumer ve Rosenblum tarafından çalışılmıştır. İkisi, bu operatörlerin spektral özelliklerine ve bunların operatör denklem sistemlerine uygulamalarına vurgu yapmıştır. Bu operatörlerin özellikleri üzerine yapılan çalışmalar, o zamandan beri birçok operatör teori matematikçiler için büyük ilgi kaynağı olmuştur. Bu özellikler arasında nümerik değerleri, spektrumları, kompaktlıkları bulunur. Temel operatörlerle ilgili literatür, şimdi kolayca elde edilebilir ve bu operatörlerin belirli yönleri ve özellikle spektral ve yapısal özellikleri hakkında birçok kapsamlı araştırma sonucu ve açıklama mevcuttur. Ancak, çok şey yapılmasına rağmen, hala uzay yapısı ile ilgili birçok açık problem vardır.

Nümerik değer kümesi ve nümerik yarıçap eşitsizliğinin önemi nedeniyle bu alanlar birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir (Bhunia vd., 2019; Bonsal ve Duncan, 2013; Gustafson ve Rao, 1997; Paul ve Bag, 2012). Diğer taraftan bir operatörün Davis-Wielandt yarıçapı, nümerik yarıçapın önemli bir genellemesidir. Operatörün Davis-Wielandt kabuğu ve Davis-Wielandt yarıçapı Davis (1968) ve Wielandt (1955) tarafından verilmiştir. Davis-Wielandt kabuğu ve ilgili çalışmalar Li ve Poon (2009); Li vd. (2008); Lins vd. (2018); Feki ve Sid Ahmed (2020) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda, Zamani ve Shebrawi (2019) ve Zamani vd. (2019) sınırlı doğrusal operatörlerin Davis-Wielandt yarıçaplarını incelemişlerdir.

Çekirdek üretenler teorisi bu yüzyılın ortalarında Aronszajn tarafından verilmiştir (Aronszajn, 1950). Devamında yapılan çalışmalardan sonra, 1970'li yıllardan başlayarak Saitoh, çekirdek üreten metoduna yenilik katarak, Matematiksel analizde, operatörler teorisinde, ve ters problemler konusu gibi çeşitli alanlarda uygulayarak literatüre katkı sağlamıştır (Saitoh, 1988, 1997). Çekirdek üreten yardımıyla tanımlanan Berezin dönüşümü (veya sembolü) karmaşık düzlemdeki $\mathbb{D}$ üzerinde çalışan bir integral operatördür (Berezin, 1972, 1974). Bazı operatörlerin temel özelliği Berezin dönüşümlerinde kodlandığı için, Berezin dönüşümünün, operatör teoride hayati ve kullanışlı bir role sahip olduğu yapılan çalışmalardan bilinen bir gerçektir. Berezin dönüşümünü içeren ilk önemli sonuçlardan biri, H^2 Hardy uzayı üzerinde hareket eden Toeplitz operatörlerinin tersinebilirliğini içerir. Douglas (1973)'da, şunu sordu: $|T_\varphi| \geq \delta > 0$, ile $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ise, Toeplitz operatörü T_φ tersinebilir mi? Tolokonnikov

(1981) ve ardından Wolff (2002), δ , 1'e yeterince yakın olduğunda cevabın olumlu olduğunu gösterdi. δ üzerindeki alt sınır daha sonra Nikolski (1986) tarafından geliştirilmiştir. Çok daha sonra, Karaev, Hilbert fonksiyon uzaylar üzerinde hareket eden bazı genel operatörler için benzer sonuçları ispatlamıştır: Uygun bir operatörün Berezin dönüşümünün modülü, sıfırdan yeterince uzakta sınırlı olursa, o zaman operatörün tersinebilirliği sağlanır (bkz. (Karaev, 2006a, Teorem 3.4)). Toeplitz operatörlerinin kapalı görüntü tipli özellikleri için benzer yeni sonuçlar Zorboska (2019)'te bulunabilir. Douglas'ın sorusunun ardından, Berger ve Coburn (1986) benzer bir şey sordular: Hardy veya Bergman uzayındaki bir operatörün Berezin sembolü diskin sınırında kayboluyorsa, operatör kompakt olmalı mı? Bu soru, birkaç karşı örnek sunarak Nordgren ve Rosenthal (1994) tarafından ele alınmıştır. Bununla birlikte, Nordgren ve Rosenthal, standart Hilbert fonksiyon uzaylar üzerinde, bir operatörün tüm üniter eşdeğerlerinin Berezin sembolleri sınırda kayboluyorsa, operatörün kompakt olduğunu göstermiştir. Axler ve Zheng (1998)'e bağlı olarak buradaki bir diğer önemli teorem şudur: Eğer T , birim diskin Bergman uzayına etki eden Toeplitz operatörlerinin sonlu çarpımlarının sonlu toplamı ise, bu durumda T operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul T 'nin Berezin dönüşümünün diskin sınırına yaklaştıkça kaybolmasıdır. Kısa bir süre sonra, Engliš (1999) bu sonucu çeşitli değişkenlerde sınırlı simetrik alanlar üzerindeki ağırlıklı Bergman uzaylarına genelleştirmiştir. Daha sonra, Suárez (2007), birim yuvar üzerindeki Bergman uzayının Toeplitz cebirindeki herhangi bir operatör için benzer bir sonuç kanıtlamıştır. Berezin dönüşümünün uygulamalarını içeren diğer bazı ilginç sonuçlar, üniter ters çevrilebilir operatörlerin karakterizasyonunu Karaev ve Iskenderov (2013), Schatten-von Neumann sınıf üyeliğinin karakterizasyonlarını (Chalender vd. (2012), Karaev (2002a), Karaev (2012)), bazı Hilbert fonksiyon uzaylar için Beurling-Arveson tipi teoremleri (Karaev (2008)), çarpık simetrik operatörlerin karakterizasyonu Altwaijry vd. (2020) ve izometrik bileşke operatörlerinin invaryant alt uzaylarının tasvirleri boyunca sınırlı sembolü köreltilmiş Toeplitz operatörlerinin karakterizasyonunu içerir (Garayev vd., 2016b). Berezin dönüşümünün aralığının, örneğin Bergman uzayı için Brown-Halmos tipi bir teorem kuran Ahern'in çalışmasında olduğu gibi, fonksiyon teorik bakış açısıyla incelendiği ifade edilebilir (Ahern (2004), ayrıca bkz. Rao (2018), Čučković (2012)). Bununla birlikte, (Karaev, 2013, Bölüm 2.1)'den kaynaklanan bazı örnekler dışında, Cowen ve Felder (2022)'in çalışmasında

Berezin aralığının küme-kuramsal veya geometrik bir bakış açısıyla incelendiği görülmektedir. Devamında çekirdek üreten ve bunun yardımıyla elde edilen Berezin dönüşümü çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (Başaran ve Gürdal, 2021, 2023; Başaran vd., 2019; Gürdal ve Alomari, 2022; Gürdal ve Başaran, 2022, 2023; Garayev vd., 2020; Gürdal ve Yücel, 2022; Huban vd., 2021a,b; Saltan ve Baskan, 2023; Saltan vd., 2022; Yamancı ve Gürdal, 2017; Yamancı vd., 2017, 2020).

Bu tez çalışmasında, çekirdek üreten yardımıyla tanımlı olan Berezin dönüşümü ve sayısı ile ilgili önemli eşitsizliklerin elde edilmesi üzerine bazı incelemeler yapılmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar Omidvar ve Moradi (2021), Huban vd. (2022a), Huban vd. (2022b), Sababheh vd. (2019), Alomari vd. (2022), Bhanja vd. (2021) ve Bhunia vd. (2021a)'daki çalışmalarındaki yöntemler ve sonuçlar kullanılarak ortaya koyulmuştur.

3. NÜMERİK YARIÇAP VE BEREZİN SEMBOLÜ

Bu tez çalışması bazı iyi bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak Hilbert fonksiyon uzaylarında ifade edilen Berezin sembolü kavramı için yeni tipli Berezin sayı eşitsizlikleri ile ilgili incelemeleri amaçlamaktadır. Bu bağlamda hedeflenen problemlerin ve bu problemlere yönelik ortaya konan çözüm yöntemleri ve sonuçlarının kolaylıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde sunacağız.

3.1. Genel Notasyon Ve Terminoloji

Bu kısım, nümerik yarıçap eşitsizliklerini araştırmamız için gerekli olan operatörler ve matrislerle ilgili bazı temel konuların kısa bir incelemesini içermektedir. Hilbert uzay operatörlerinin genel teorisi için okuyucuyu Furuta (2001) ve Murphy (1990) kitaplarına yönlendiriyoruz.

Bu tez boyunca, her vektör uzayının $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde olduğu ve her skaler değerli fonksiyonun $\mathbb{C}$ -değerli ve aksini açıkça belirtmedikçe sürekli olduğu varsayılmıştır. $\alpha, \beta, \dots$ gibi yunan harfleri genellikle karmaşık sayıları ifade eder. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski ve $\partial\mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ 'nin sınırını temsil eder. $\mathcal{H}$ 'yi (karmaşık) Hilbert uzaylarını temsil etmek için kullanırız. Karmaşık Hilbert uzaylarıyla ilgili çoğu sonuç, gerçek Hilbert uzayları durumunda geçerlidir; ancak, gerçek Hilbert uzayları çerçevesindeki teoremler ile karmaşık ortamdakiler arasında tutarsızlık durumları vardır; bkz. Moslehian vd. (2022); Sain vd. (2021). Bu tez çalışmasındaki tüm operatörlerin sınırlı ve doğrusal olduğu varsayılmıştır. Büyük harfler $A, B, \dots$ matrisleri ve operatörleri temsil eder. Birim operatörü (sırasıyla bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ ve $\mathbb{C}^n$ üzerinde) I (sırasıyla $I_{\mathcal{H}}$ ve I_n) ile gösteririz. $x, y, \dots$ Hilbert uzayının elemanlarını belirtmek için kullanılır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ ise sırasıyla $r, s, t, \dots$ reel sayılarının ve α, β karmaşık sayılarının cismi olsun. α karmaşık sayısının gerçek kısmı ve sanal kısmı için sırasıyla $\text{Re}(\alpha)$ ve $\text{Im}(\alpha)$ yazarız.

$\mathcal{H}$ bir karmaşık vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in \mathcal{H}$ ve tüm λ skalerleri için $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna

$$(i) \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

$$(ii) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(iv) \langle x, x \rangle \geq 0,$$

koşulları sağlaması durumunda yarı-iç çarpım denir. $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisi yarı-iç çarpım uzayı olarak bilinir. Ek olarak, eğer $\langle x, x \rangle = 0$ ifadesinden $x = 0$ elde edilir ise o zaman $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ yarı-iç çarpımına iç çarpım denir ve $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine iç çarpım uzayı denir. Buna karşılık, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımı tarafından indirgenen $\|\cdot\|$ normu her $x \in \mathcal{H}$ için $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ ile verilir.

Teorem 3.1. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) $\mathcal{H}$ 'nin bir yarı-iç çarpım uzayı olduğunu kabul edelim. O zaman her $u, v \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} \quad (3.1)$$

elde edilir.

Eğer $\mathcal{H}$ üzerinde iç çarpım tarafından indirgenmiş $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ normu tam ise o zaman $\mathcal{H}$ uzayına bir Hilbert uzayı denir.

Standart iç çarpımına sahip $\mathbb{C}^n$ uzayında sırasıyla $p > 1$ ve $p \geq 1$ için Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri aşağıdaki biçimde verilir: $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ ve p, q eşlenik üsler olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

ve

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

olur.

Aşağıdaki teorem, Hilbert uzayları teorisinde önemli bir rol oynar. Bir Hilbert uzayındaki tüm sınırlı doğrusal fonksiyonelleri karakterize eder.

Teorem 3.2. (Riesz temsil teoremi) $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzay ve f ise bir sınırlı doğrusal fonksiyonel olsun. Bu durumda her $x \in \mathcal{H}$ için $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ ve $\|x_0\| = \|f\|$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathcal{H}$ tek elemanı mevcuttur.

Riesz temsil teoreminin bir sonucu, Hilbert uzayları arasındaki her sınırlı $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ doğrusal operatörünün, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ ($x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$) ile tanımlanan $A^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ eşlenik operatörü sınırlı doğrusal olacak şekilde indirgenir. Burada $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ile $\mathcal{H}$ 'dan $\mathcal{K}$ 'ya tüm sınırlı doğrusal operatörlerin kümesi tanımlanır. $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ için $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ifadesini kullanabiliriz. Aynı zamanda her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için $(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda}B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ ve $(A^*)^* = A$ olduğu gözlemlenir. Böylece $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ uzayı operatör normu

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}$$

ile donatılmış bir Banach *-cebridir. Özel durumda, $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

ile verilen C^* -koşulu geçerlidir.

Şimdi bazı operatör tiplerini ifade edelim: $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü

1. eğer $X^* = X$ ise kendine eş
 2. eğer $X^*X = XX^*$ ise normal
 3. eğer $\|X\| \leq 1$ ise büzüşme
 4. eğer $X^*X = I$ ise izometri
 5. eğer $XX^*X = X$ ise kısmi izometri
 6. eğer $X^*X = XX^* = I$ ise üniter
 7. eğer $X^2 = X$ ise idempotent
 8. eğer $X = X^* = X^2$ ise projeksiyon
- operatör olarak isimlendirilir.

Tüm kendine eş operatörlerin gerçekte vektör uzayını $\mathbb{B}(\mathcal{H})_{sa}$ ile gösteriyoruz. Her $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü,

$$Y = \operatorname{Re}(X) := \frac{X + X^*}{2} \text{ ve } Z = \operatorname{Im}(X) := \frac{X - X^*}{2i}$$

değerlerinin eşlenik olduğu $X = Y + iZ$ kartezyen ayrışımı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Y ve Z operatörlerine X 'in gerçek ve sanal kısımları denir.

Bir $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörünün spektrumu, kompakt boş olmayan bir küme olan

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I, \mathbb{B}(\mathcal{H}) \text{ içinde tersinebilir değil}\}$$

olarak tanımlanır. A operatörünün spektral yarıçapı,

$$r(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in sp(A)\}$$

ile tanımlanır.

$A \in S$ olduğunda $A^* \in S$ ise, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'nin bir S alt kümesi kendine eş küme olarak adlandırılır. $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'nin her kapalı kendine eş alt cebiri $\mathcal{A}$ bir C^* -cebiri olarak adlandırılır. Gelfand–Naimark teoremi ve Murphy (1990)'ye göre, bir C^* -cebri $\mathcal{A}$ 'nın her $A \in \mathcal{A}$ için C^* -koşulunu $\|A^*A\| = \|A\|^2$ sağlayan bir Banach $*$ -cebiri olduğunu söylemeye eşdeğerdir. $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ cebiri, C^* -cebirinin başka bir örneğidir. $C^*(S)$ ile bir S altkümesini içeren $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'nin en küçük C^* -alt cebirini gösteriyoruz.

T 'nin mutlak değeri $|T|$ ile tanımlıdır. Yani $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ dir. Burada $f \mapsto f(A)$ Gelfand dönüşümü A ve I tarafından üretilen C^* -cebir ve bir A kendine eş operatörün $sp(A)$ spektrumu üzerinde sürekli fonksiyonların C^* -cebir $C(sp(A))$ arasındaki bir izometrik $*$ -izomorfizmidir. Eğer $f, g \in C(sp(A))$ ve her $t \in sp(A)$ için $f(t) \geq g(t)$ ise, bu durumda $f(A) \geq g(A)$ sağlanır. Her ne zaman $T \geq 0$ olduğunda $\Phi(T) \geq 0$ ise $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ üzerinde bir Φ doğrusal dönüşümü pozitifdir. Ayrıca $\Phi(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$ ise Φ dönüşümü normalleşmiş adını alır.

Kato (1952), Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sınırlı bir doğrusal operatör $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için genelleştirmiştir. Her $x, y \in \mathcal{H}$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \sqrt{\langle |A|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |A|^*|^{2(1-\alpha)} y, y \rangle}. \quad (3.2)$$

olduğunu ispatlamıştır. Sonuç olarak, her $x \in A$ için (Halmos, 1982, s. 75-76)

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \langle |A| x, x \rangle^{1/2} \langle |A^*| x, x \rangle^{1/2} \quad (3.3)$$

eşitsizliğine sahibiz.

Kato eşitsizliğinin bir genişlemesi Kittaneh tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Önerme 3.3. (Kittaneh, 1988) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. f ve g fonksiyonları $f(t)g(t) = t$, $t \geq 0$, ile $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ise, bu durumda herhangi $x, y \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle f^2(|A|)x, x \rangle \langle g^2(|A^*|)y, y \rangle$$

olur.

Ayrıca Furuta (1994), Kato eşitsizliğini şu şekilde genişletmiştir.

Önerme 3.4. $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda $\alpha + \beta \geq 1$ ile her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $x, y \in \mathcal{H}$ için

$$\left| \langle A |A|^{\alpha+\beta-1} x, y \rangle \right|^2 \leq \langle |A|^{2\alpha} x, x \rangle \langle |A^*|^{2\beta} y, y \rangle \quad (3.4)$$

sağlanır.

$A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörünün her $x \in \mathcal{H}$ için $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ ise pozitif olarak adlandırıldığını hatırlayalım. Bu durumda $A \geq 0$ yazacağız. Aşağıda, Hölder-McCarthy eşitsizliğine ihtiyacımız var. Bu eşitsizlik pozitif operatörler için spektral teoremden ve Jensen eşitsizliğinden kolayca çıkarılabilir.

Matematikte en temel ve yaygın olarak kullanılan eşitsizliklerden biri, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz eşitsizliği olarak da bilinen ünlü Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin temel formu, eğer $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ gerçekte sayılar ise, o zaman

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{1/2}$$

olur. Bir iç çarpım uzayındaki genel formu (3.1)'dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, 1971'de Buzano (1974) tarafından harika bir şekilde geliştirildi. Buzano, a, b, e 'nin $\|e\| = 1$ olan bir iç çarpım uzayındaki elemanlar olması durumunda

$$|\langle x, e \rangle \langle e, y \rangle| \leq \frac{1}{2} (|\langle x, y \rangle| + \|x\| \|y\|). \quad (3.5)$$

olduğunu ispatlamıştır. Cauchy-Buzano eşitsizliğinin bir sonucu aşağıdaki biçimde verilir (Omidvar ve Moradi, 2021, Yardımcı Teorem 2.2):

$$|\langle x, e \rangle \langle e, y \rangle| \leq \frac{1}{2} \sqrt{3 \|x\|^2 \|y\|^2 + \|x\| \|y\| |\langle x, y \rangle|}. \quad (3.6)$$

Klasik Young eşitsizliğinin basit bir sonucu olan ve 4. kısımda kullanacağımız bir yardımcı teoremi verebiliriz (Hardy vd., 1988).

Yardımcı Teorem 3.5. $a, b \geq 0$ ve eşlenik üsler $p, q > 1$ için,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq \left(\frac{a^{pr}}{p} + \frac{b^{qr}}{q} \right)^{1/r}, \quad r \geq 1,$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, skaler Young eşitsizliğinin ek bir iyileştirmesini verir (Kittaneh ve Manasrah, 2011, Teorem 2.1).

Yardımcı Teorem 3.6. Eğer $a, b > 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ ise bu durumda

$$a^\lambda b^{(1-\lambda)} + r \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2 \leq (1-\lambda)a + \lambda b \quad (3.7)$$

sağlanır. Burada $r = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$ dir.

Buzano (1974), Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir genellemesini vermiştir: $\|a_3\| = 1$ ile herhangi bir $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle a_1, a_3 \rangle \langle a_3, a_2 \rangle| \leq \frac{1}{2} (|\langle a_1, a_2 \rangle| + \|a_1\| \|a_2\|) \quad (3.8)$$

olduğunu belirtir.

Dragomir (2015) aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır.

Yardımcı Teorem 3.7. $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olsun. O halde

$$\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 = \|u_1 - zu_2\|^2 \|u_2\|^2 - |\langle u_1 - zu_2, u_2 \rangle|^2$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi iç çarpım uzaylarındaki vektörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin başka bir genellemesini ifade edelim.

Yardımcı Teorem 3.8. (Dragomir, 2007a) Herhangi bir $x, y, z \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle x, y \rangle|^2 + |\langle x, z \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \left(\max \{ \|y\|^2, \|z\|^2 \} + \sqrt{2} |\langle y, z \rangle| \right)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.9. (Dragomir, 2007a) Herhangi bir $x, y, z \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle x, y \rangle|^2 + |\langle x, z \rangle|^2 \leq \|x\| \max \{ |\langle x, y \rangle|, |\langle x, z \rangle| \} \left(\|y\|^2 + \|z\|^2 + 2 |\langle y, z \rangle| \right)^{1/2}$$

olur.

Young eşitsizliğinin Kantorovich sabiti ile çarpımsal iyileştirilmesi Fuji vd. (2011) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.10. $a, b > 0$ olsun. Bu durumda $0 \leq \lambda \leq 1$, $r = \min \{ \lambda, 1 - \lambda \}$ ve

$$K_1(h, 2) = K_1\left(\frac{1}{h}, 2\right) \geq 1, \quad h > 0,$$

ifadesi $[1, \infty)$ üzerinde artan ve $(0, 1)$ üzerinde azalan özelliğe sahip

$$K_1(h, 2) = \frac{(h+1)^2}{4h}, \quad h > 0,$$

olacak şekilde $h = \frac{a}{b}$ değeri için

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \leq K_1(h, 2) a^{(1-\lambda)} b^\lambda \quad (3.9)$$

sağlanır.

(Aujla ve Silva, 2003, Teorem 2.3)'de bulunan aşağıdaki yardımcı teorem, pozitif operatörlerin dışbükey fonksiyonunu içeren bir norm eşitsizliğini verir.

Yardımcı Teorem 3.11. $f, [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan dışbükey fonksiyon ve $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda

$$\left\| f\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\| \leq \left\| \frac{f(A) + f(B)}{2} \right\| \quad (3.10)$$

elde edilir. Özel durumda

$$\left\| \left(\frac{A+B}{2}\right)^r \right\| \leq \left\| \frac{A^r + B^r}{2} \right\|, \quad (r \geq 1)$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.12. (Hölder-McCarthy eşitsizliği (Simon, 1979, s. 20)) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ pozitif ve $\|x\| = 1$ ile $x \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman

$$\langle Ax, x \rangle^r \leq (\geq) \langle A^r x, x \rangle, \quad r \geq 1 \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (3.11)$$

Yardımcı Teorem 3.13. (Kittaneh, 1988) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ve $[0, \infty)$ üzerinde her $t \in [0, \infty)$ için $f(t)g(t) = t$ bağıntısını sağlayan f, g iki negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda her $u, v \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle Au, v \rangle| \leq \|f(|A|)u\| \|g(|A^*|)v\|$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.14. Değişmeli C^* -cebiri üzerinde her birimli, pozitif dönüşüm tümüyle pozitifdir.

Teorem 3.15. (Bhatia, 2007) Φ dönüşümü $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nin C^* -alt cebiri $\mathcal{A}$ 'dan $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 'ye birimli pozitif bir doğrusal dönüşümü olsun. Bu durumda bir $\mathcal{K}$ Hilbert uzayı, bir $V : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathcal{K}$ izometrisi ve $\Phi(A) = V^* \pi(A) V$ olacak şekilde $\mathcal{A}$ 'dan C^* -cebiri $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 'ya $*$ -homomorfizm π mevcuttur.

Teorem 3.16. (Gürdal ve Duman, 2021) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli süperkuadratik fonksiyon ve $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dönüşümü ise birimli pozitif doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda her pozitif $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrisi ve her $\xi \in Q$ için

$$f\left(\widetilde{\Phi(A)}(\xi)\right) \leq \widetilde{\Phi(f(A))}(\xi) - \left(\Phi\left(f\left(\left|A - \widetilde{\Phi(A)}(\xi)I_n\right|\right)\right)\right)^{\sim}(\xi),$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.17. (Kittaneh, 1988) $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ bir operatör ve $x, y \in \mathcal{H}$ olsun. Eğer g, h fonksiyonları $t \in [0, \infty)$ için $g(t)h(t) = t$ bağıntısını sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ise, bu durumda

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle g(|T|)x, g(|T|)x \rangle \langle h(|T^*|)y, h(|T^*|)y \rangle$$

dir. Özel durumda, $|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle |T|^v x, |T|^v x \rangle \langle |T^*|^{(1-v)} y, |T^*|^{(1-v)} y \rangle$ ($0 \leq v \leq 1$) sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.18. (Dragomir, 2019) $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığında operatör dışbükey fonksiyon olsun. Bu durumda $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, J de spektrumlu kendine eş operatörler ve $\beta \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T+S}{2}\right) &\leq (1-\beta)f\left[\frac{(1-\beta)T + (1+\beta)S}{2}\right] + \beta f\left[\frac{(2-\beta)T + \beta S}{2}\right] \\ &\leq \int_0^1 f((1-t)T + tS) dt, \\ &\leq \frac{f(T) + f(S)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer her $s, t \in J$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$f(\beta s + (1 - \beta)t) \leq \beta f(s) + (1 - \beta)f(t)$$

ise $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığı üzerinde dışbükeydir. J aralığı üzerinde bir f dışbükey fonksiyonu ve $s, t \in J$ için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \int_0^1 f(\beta s + (1 - \beta)t) d\beta \leq \frac{f(s) + f(t)}{2}$$

biçiminde ifade edilir. Dışbükey fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğinin birkaç iyileştirmesi ve genellemesi vardır (bkz. Dragomir (2019) ve referansları). Eğer

$$f(\beta T + (1 - \beta)S) \leq \beta f(T) + (1 - \beta)f(S)$$

ise J aralığı üzerinde $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ operatör dışbükey fonksiyondur. Burada $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, J de spektrumlu kendine eş operatörler ve $\beta \in [0, 1]$ dir.

Burada $I, (0, \infty)$ aralığının bir alt aralığı ve $f : I \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere

$$f(a^{1-\nu}b^\nu) = f^{1-\nu}(a)f^\nu(b), \nu \in [0, 1] \quad (3.12)$$

ise f fonksiyonuna geometrik dışbükey adı verilir (Niceleshu, 2000).

Diğer taraftan, herhangi birimli $x \in \mathcal{H}$ için

$$f(\langle Ax, x \rangle) \leq \langle f(A)x, x \rangle \quad (3.13)$$

Jensen tipli eşitsizliği hatırlayalım (Furuta vd., 2005, Teorem 1.2).

Ayrıca $x \in \mathcal{H}$ birim vektörü ve m, M pozitif skalerleri olmak üzere $m \leq A \leq M$ eşitsizliğini sağlayan A pozitif operatörü için $f : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ iç bükey fonksiyonu için geçerli olan

$$f(\langle Ax, x \rangle) \leq k(m, M, f) \langle f(A)x, x \rangle \quad (3.14)$$

eşitsizliğini verebiliriz (Micić vd., 1999, Teorem 6). Burada $k(m, M, f)$ genelleştirilmiş Kantrovich sabiti olarak adlandırılır ve

$$k(m, M, f) = \min \left\{ \frac{1}{f(t)} \left(\frac{M-t}{M-m} f(m) + \frac{t-m}{M-m} f(M) \right) : t \in [m, M] \right\} \quad (3.15)$$

ile tanımlanır. Burada $f(t) = t^r$, $r \in (0, 1]$, için $k(m, M, t^r)$ sabiti

$$k(m, M, t^r) = \frac{h-h^r}{(1-r)(h-1)} \left(\frac{1-r}{r} \frac{h^r-1}{h-h^r} \right)^r, \quad h = \frac{M}{m},$$

formülü ile verilir (Furuta vd., 2005, Tanım 2.2).

$A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ üzerinde bir kendine eş doğrusal operatör olsun. Burada $C(\text{sp}(A))$ ise $A(\text{sp}(A))$ nin spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi, $C^*(A)$ cebiri A tarafından üretilen C^* -cebir ve $1_{\mathcal{H}}$ birim operatör olsun.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{G} : C(\text{sp}(A)) \rightarrow C^*(A)$ dönüşümünü tanımlayabiliriz (Furuta vd., 2005, sayfa 3) :

- (1) Her α, β skaleri için $\mathcal{G}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{G}(f) + \beta \mathcal{G}(g)$,
- (2) $\bar{f}$ fonksiyonu f nin eşleniği ve $\mathcal{G}(f)^*$ ise $\mathcal{G}(f)$ nin Hermityeni olmak üzere $\mathcal{G}(fg) = \mathcal{G}(f)\mathcal{G}(g)$ ve $\mathcal{G}(\bar{f}) = \mathcal{G}(f)^*$,
- (3) $\|\mathcal{G}(f)\| = \|f\| = \sup_{t \in \text{sp}(A)} |f(t)|$,
- (4) $f_0(t) = 1$ ve her $t \in \text{sp}(A)$ için $f_1(t) = t$ olmak üzere $\mathcal{G}(f_0) = 1_{\mathcal{H}}$ ve $\mathcal{G}(f_1) = A$ dır.

Bir A kendine eş operatör için sürekli fonksiyonel hesaplama her $f \in C(\text{sp}(A))$ için

$$f(A) = \mathcal{G}(f)$$

biçimde tanımlanır. Burada f ve g fonksiyonları $\text{sp}(A)$ 'da reel değerli fonksiyonlar ise bu durumda $\mathbb{B}(\mathcal{K})$ 'nin operatör mertebesinde

$$\text{her } t \in \text{sp}(A) \text{ için } f(t) \geq g(t) \text{ ise } f(A) \geq g(A) \quad (3.16)$$

olur. Bir $\Phi : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ doğrusal dönüşümünü toplamsallık ve homojenlik özelliklerini koruyacak şekilde, yani herhangi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için $\Phi(\lambda_1 A +$

$\lambda_2 B) = \lambda_1 \Phi(A) + \lambda_2 \Phi(B)$ şeklinde tanımlayalım. Eğer operatör mertebesi korunursa, yani eğer $A \in \mathbb{B}^+(\mathcal{H})$ ise $\Phi(A) \in \mathbb{B}^+(\mathcal{K})$ olması durumunda $\Phi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ doğrusal dönüşümü pozitifdir. Ayrıca bir Φ pozitif doğrusal dönüşümü sıralama bağıntısını korur, yani $A \leq B \Rightarrow \Phi(A) \leq \Phi(B)$ ve $\Phi(A^*) = (\Phi(A))^*$ adjoint işlemi korunur. Bununla birlikte, eğer birim operatör korunursa, yani $\Phi(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{K}}$ ise Φ dönüşümü normalleşmiş (unital) adını alır.

3.2. Temel Nümerik Yarıçap Eşitsizlikleri

Nümerik değer kavramı, doğrusal cebirde incelenen kuadratik formların doğal bir uzantısıdır. Daha kesin olmak gerekirse, karmaşık bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ üzerindeki sınırlı doğrusal operatör A 'nın nümerik değeri, $W(A)$ ile gösterilir ve $\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki birim küre üzerinde tanımlanan $x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$ sürekli eşleme aralığı olarak tanımlanır, yani

$$W(A) := \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H}(\Omega), \|x\| = 1 \}.$$

nümerik değer incelenmesi, sınırlı bir doğrusal operatörün davranışını anlamaya yardımcı olur. Sınırlı doğrusal operatörün spektrumunun her zaman nümerik değer kümesinin kapanışında yer aldığını gözlemleyebiliriz. Dolayısıyla, sınırlı doğrusal operatörün spektral değeri, eğer nümerik aralık bizim tarafımızdan biliniyorsa tahmin edilebilir. Bu bağlamda, nümerik değer ile ilişkilendirilen iyi bilinen sabit “nümerik yarıçap” önemli bir rol oynar. A 'nın $w(A)$ ile gösterilecek nümerik yarıçapı, merkezi 0'da olan ve

$$w(A) := \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathcal{H}(\Omega), \|x\| = 1 \}$$

ifadesini içeren en küçük diskin yarıçapı olarak tanımlanır.

Nümerik değer ve nümerik yarıçap, özel operatör türlerinin tanıtılmasında basitçe kullanılabilir. Örneğin, bir $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü ancak ve ancak $W(A) \subseteq \mathbb{R}$ ise kendine eşitir ve ancak ve ancak $W(A) \subseteq [0, \infty]$ ise pozitifdir. Ayrıca, $A = \lambda I$ olması için gerekli ve yeterli koşul $W(A) = \{\lambda\}$ olmasıdır. Ayrıca, tersinebilir bir A operatörü, ancak ve ancak $w(A) = w(A^{-1})$ ise üniterdir.

Bu kısımda, nümerik değer kümesinin temel özelliklerini inceleyeceğiz ve sınırlı doğrusal operatörün bazı temel nümerik yarıçap eşitsizliklerini tartışacağız. İki veya daha fazla operatörün çarpımının nümerik yarıçapı için de sınırlar belirleyeceğiz.

$W(A)$ 'nın aşağıdaki özellikleri kolayca verilebilir:

- (a) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $W(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W(A)$,
- (b) $W(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in W(A)\}$,
- (c) keyfi U üniter operatörü için $W(U^*AU) = W(A)$ olur.

Toeplitz-Hausdorff teoremi (Gustafson ve Rao, 1997, s. 4), A operatörünün nümerik değer kümesinin dışbükey olduğunu iddia eder. Spektral içerme teoremi (Gustafson ve Rao, 1997, s. 6) ile, $sp(A)$, $W(A)$ 'nin kapanışında bulunur. Ayrıca, Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ sonlu boyutlu ise, $W(A)$ kompakttır.

Aşağıdaki teorem, operatörün belirli özellikleri sağlaması durumunda nümerik değerini iyi bir biçim aldığını göstermektedir.

Teorem 3.19. (Gustafson ve Rao, 1997; Halmos, 1982) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

- (i) A kendine eş ancak ve ancak $W(A)$ gerçeldir.
- (ii) Eğer A kendine eş ve $W(A) = [m, M]$ ise o zaman $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$ dir.
- (iii) Eğer $\overline{W(A)} = [m, M]$ ise o zaman $m, M \in sp(A)$ olmasıdır.
- (iv) Eğer A normal ise o zaman $\overline{W(A)}$, spektrum $sp(A)$ 'nın dışbükey kabuğudur.

Sınırlı doğrusal operatör A 'nın nümerik aralığının mutlak değerlerinin alt sınırı, A 'nın Crawford sayısı olarak tanımlanır ve $c(A)$ ile gösterilir. Böylece,

$$c(A) := \inf \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}$$

Her $x \in \mathcal{H}$ için $|\langle Ax, x \rangle| \leq w(A) \|x\|^2$ ise $w(\cdot)$ 'nin $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ üzerinde operatör normuna eşdeğer bir norm olduğunu göstermek için (Gustafson ve Rao, 1997, Theorem 1.3.1)'e bakınız.

Teorem 3.20. $w(\cdot)$ nümerik yarıçap $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ üzerinde bir norm olsun. $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ise bu durumda

$$\frac{1}{2} \|A\| \leq w(A) \leq \|A\| \quad (3.17)$$

elde edilir. Bununla beraber eğer A normal ve $A^2 = 0$ ise sırasıyla $w(A) = \|A\| = r(A)$ ve $w(A) = \frac{1}{2} \|A\|$ olur.

Gerçek ve karmaşık Hilbert uzayları arasında pek çok fark vardır; Moslehian vd. (2022) bakınız. Örneğin, eğer $\mathbb{R}^2$ gerçek bir Hilbert uzayı olarak kabul edilirse, o zaman (3.17) eşitsizliğinin sol tarafı $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için geçerli değildir. $\mathcal{H}$ 'nin $\dim(\mathcal{H}) > 1$ ile gerçek bir Hilbert uzayı olması durumunda,

$$\|A\| \leq 2w(A) + w(A^2)^{1/2}$$

eşitsizliği tüm $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için geçerlidir ve 2 ve 1, mümkün olan en iyi sabitlerdir; bakınız (Lumer, 1972, Teorem 10).

(3.17) eşitsizliğinin küçük bir iyileştirmesi, $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'ın kartezyen ayrışımı kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 3.21. (Kittaneh, 2005, Teorem 10) Eğer $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ise o zaman

$$\frac{1}{4} \|X^*X + XX^*\| \leq w^2(X) \leq \frac{1}{2} \|X^*X + XX^*\| \quad (3.18)$$

olur.

(3.18)'deki ikinci eşitsizlik,

$$w^2(X) \leq \|\alpha X^*X + (1 - \alpha)XX^*\|, \alpha \in [0, 1]$$

formuna genelleştirilebilir. Ancak, birinci eşitsizlik

$$\frac{1}{2} \|\alpha X^*X + (1 - \alpha)XX^*\| \leq w^2(X), \alpha \in [0, 1]$$

formuna genelleştirilemez.

(3.16)'deki nümerik yarıçapın üst sınırı (Kittaneh, 2003, Teorem 1) tarafından aşağıdaki gibi

$$w(A) \leq \frac{1}{2} \left(\|A\| + \sqrt{\|A^2\|} \right) \quad (3.19)$$

iyileştirilmiştir. (3.18)'da elde edilen üst sınırın (3.19)'dakiyle kıyaslanamaz olduğuna dikkat ediniz. Ancak, şimdi (3.19)'dakinden daha iyi olan bir üst sınırın geliştirilmesine odaklanabiliriz.

Şimdi, (3.19) ifadesinin aşağıdaki iyileştirmesini sunabilecek durumdayız.

Teorem 3.22. $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda

$$w(A) \leq \frac{1}{2} \left(\|A\| + \sqrt{r(|A| |A^*|)} \right)$$

olur.

Sınırlı doğrusal bir operatörün nümerik yarıçapı, çeşitli nümerik yarıçap eşitsizliklerinin geliştirilmesinde kullanılabilen bir operatörün normu cinsinden de tanımlanabilir. Nümerik yarıçapın tam formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.23. (Yamazaki, 2007, s. 85) Eğer $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ise bu durumda

$$w(A) = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \|\operatorname{Re}(e^{i\gamma}A)\| = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \|\operatorname{Im}(e^{i\gamma}A)\|$$

olur.

Teorem 3.24. (Dragomir, 2007b) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2} \left(w(A^2) + \|A\|^2 \right) \quad (3.20)$$

olur. Burada $\frac{1}{2}$ sabiti en iyi mümkün sabittir.

Abu-Omar ve Kittaneh (2015) tarafından (3.20) eşitsizliği

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w(A^2) + \frac{1}{4}\left\| |A|^2 + |A^*|^2 \right\|$$

olarak gösterilerek genişletilmiştir.

Bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ üzerindeki bir A operatörü, tüm $x \in \mathcal{H}$ birim vektörleri için

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\|$$

olduğunda paranormal olarak adlandırılır. Böylece eğer $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ paranormal ise bu durumda

$$\|A^*A\| \leq \|A^2\|$$

olur.

Şimdi, aşağıdaki teoremden, hem (3.18) hem de (3.19) eşitsizliklerini genelleştiren ve iyileştiren bir eşitsizlik elde edebiliriz.

Teorem 3.25. (Bhunia ve Paul, 2021, Teorem 2.5) $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda her $r \geq 1$ için

$$w^{2r}(A) \leq \frac{1}{4}\left\| |A|^{2r} + |A^*|^{2r} \right\| + \frac{1}{2}w(|A|^r |A^*|^r) \quad (3.21)$$

olur.

Şimdi dikkatimizi başka bir nümerik sabite, yani sınırlı bir doğrusal operatörün Davis-Wielandt yarıçapına çevireceğiz. Bir $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörünün sırasıyla Davis-Wielandt kabuğu ve Davis-Wielandt yarıçapı

$$DW(A) := \left\{ \left(\langle Ax, x \rangle, \|Ax\|^2 \right) : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \right\} \quad (3.22)$$

ve

$$dw(A) := \sup \left\{ \sqrt{|\langle Ax, x \rangle|^2 + \|Ax\|^4} : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \right\} \quad (3.23)$$

biçiminde verilir (Davis, 1968; Wielandt, 1955).

Bir sonraki teorem, nümerik yarıçap, Crawford sayısı ve Davis-Wielandt yarıçapı arasında bir ilişki verir.

Teorem 3.26. (*Bhunia vd., 2021b*) Eğer $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ise bu durumda

$$dw^2(A) \geq \max \left\{ (1 + m^2(A)) w^2(A), (1 + \|A\|^2) c^2(A) \right\}$$

olur. Burada $m(A) = \inf \{ \|Ax\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}$, A 'nın minimum normu olarak adlandırılır.

3.3. Yarı Hilbert Uzaylarda A -Nümerik Yarıçap Eşitsizlikleri

Yıllar geçtikçe, birçok matematikçi, karmaşık Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ üzerinde hareket eden sınırlı bir doğrusal operatörün olağan nümerik yarıçapının farklı genellemelerini incelemiştir (Abu-Omar ve Kittaneh, 2019; Najafi, 2020; Zamani ve Wójcik, 2021).

Bu alt kısımda, bir pozitif operatör A tarafından tanımlanan bir yarı iç çarpımı, yani tüm $x, y \in \mathcal{H}$ için $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$ olan bir Hilbert uzayındaki $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ operatörlerin nümerik aralığını inceleyeceğiz. Böyle bir yapının incelenmesi, Krein (1998) ve Zaanen (1950)'in ünlü eserlerine kadar uzanır. temsil teoreminden, eğer $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ bir Hilbert uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, $\mathcal{H}$ üzerindeki başka bir iç çarpım ve bu iç çarpımlar tarafından tanımlanan normlar eşdeğer ise, o zaman $\langle x, y \rangle_2 = \langle Ax, y \rangle_1$ olacak şekilde $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ üzerinde tek bir tersinebilir pozitif A operatörünün var olduğu sonucuna varmak kolaydır. (Frank, 1990, Önerme 2.2).

A 'nın $\mathcal{H}$ üzerinde pozitif bir doğrusal operatör olduğunu varsayarsak, $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı bir doğrusal operatör T 'nin A -nümerik aralığı, $W_A(T)$ ile gösterilir ve

$$W_A(T) := \{ \langle ATx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \langle Ax, x \rangle = 1 \}$$

olarak tanımlanır. Klasik nümerik aralığın aksine, A -nümerik aralığı $W_A(T)$ her zaman sınırlı olmayabilir. $w_A(T)$ ile gösterilen A -nümerik yarıçapı

$$w_A(T) := \sup \{ \langle ATx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \langle Ax, x \rangle = 1 \}$$

biçiminde tanımlanır. $A = I$ için, A -nümerik aralık ve A -nümerik yarıçap, sırasıyla klasik nümerik aralığa ve nümerik yarıçapa açıkça indirgenir. A -nümerik yarıçapı içeren eşitsizlikler son yıllarda birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bunun için Rout vd. (2021) ve Zamani (2019a) çalışmalarına bakılabilir.

Bu kısımda, sınırlı bir doğrusal operatörün A -nümerik yarıçapının temel özelliklerini inceleyeceğiz. Ek olarak, operatörlerin A -nümerik yarıçapları ve operatör matrisleriyle ilgili birkaç eşitsizlik geliştireceğiz.

Her $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü için, aralığı $\mathcal{R}(T)$, yani $\text{ran}T = \mathcal{R}(T)$ ve sıfır uzayı $\mathcal{N}(T)$, yani $\ker T = \mathcal{N}(T)$ ile gösterilir. $\mathbb{B}(\mathcal{H})^+$ tüm pozitif operatörlerin kümesini, yani

$$\mathbb{B}(\mathcal{H})^+ = \{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \text{her } x \in \mathcal{H} \text{ için } \langle Ax, x \rangle \geq 0\}$$

ifadesini gösterebiliriz. Her pozitif operatör A , tüm $x, y \in \mathcal{H}$ için $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$ ile tanımlanan bir yarı iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ indirger ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ yarı iç çarpımı her $x \in \mathcal{H}$ için $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x \rangle_A} = \|A^{1/2}x\|$ ile tanımlanan bir yarı norm $\|\cdot\|_A : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$ oluşturur. Bu kısım boyunca A , $\mathcal{H}$ üzerinde sıfır olmayan bir pozitif doğrusal operatörü temsil eder. $\|\cdot\|_A$ ancak ve ancak A birebir ise bir normdur. Ayrıca, yarı-iç çarpım uzayı $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$, ancak ve ancak $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{H}$ içinde kapalıysa tamdır. $\mathcal{S}$ ailesi her $x \in \mathcal{H}$ için $\|Tx\|_A \leq c_T \|x\|_A$ olacak şekilde $c_T > 0$ sabiti mevcut olan tüm $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörlerinin ailesi olsun. O zaman bu $\mathcal{S} (\subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ kümesi üzerinde

$$\|T\|_A = \sup \{\|Tx\|_A : x \in \mathcal{H}, \|x\|_A = 1\} = \sup_{x \in \overline{\mathcal{R}(A)}, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_A}{\|x\|_A} < +\infty$$

ile tanımlı $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ yarı iç çarpım ile indirgenmiş bir yarı norm $\|\cdot\|_A$ tanımlanabilir. Burada her bir $T \in \mathcal{S}$ için $\|T\|_A < \infty$ olduğuna dikkat edelim. Bununla birlikte bazı $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü için $\|T\|_A = +\infty$ olabilir. $\|T\|_A < +\infty$ ile $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'daki her T operatörünün ailesi $\mathbb{B}^A(\mathcal{H})$ ile tanımlanır. Ayrıca $T \in \mathbb{B}^A(\mathcal{H})$ için

$$\|T\|_A = \sup \left\{ |\langle Tx, y \rangle_A| : x, y \in \overline{\mathcal{R}(A)}, \|x\|_A = \|y\|_A = 1 \right\}$$

tanımlayabiliriz. Eğer her $x, y \in \mathcal{H}$ için $\langle Tx, y \rangle_A = \langle x, Sy \rangle_A$, yani $\mathcal{S}, AX = T^*A$ operatör denkleminin bir çözümü ise $\mathcal{S} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'nin A -kendine eş adını alır. T nin bir A -kendine eşleniği her zaman mevcut olmayabilir. Örneğin $\mathbb{C}^2$ üzerinde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa T nin A -kendine eşleniğinin mevcut olmadığı kolayca elde edilir. A -kendine eş olmak üzere $\mathbb{B}_A(\mathcal{H}), \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'da tüm operatörlerin ailesini tanımlasın. Douglas teoremi (Douglas, 1966) ile

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_A(\mathcal{H}) &= \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \mathcal{R}(T^*A) \subseteq \mathcal{R}(A)\} \\ &= \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \text{her } x \in \mathcal{H} \text{ için } \|ATx\| \leq c \|Ax\| \text{ o.ş. } c > 0 \text{ mevcut}\} \end{aligned}$$

ifade edebiliriz. $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için $AX = T^*A$ operatör denklemi tek çözüme sahiptir ve $T^{\sharp_A}$ ile gösterilir. Bu ise $\mathcal{R}(T^{\sharp_A}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ ve $\mathcal{N}(T^{\sharp_A}) = \mathcal{N}(T^*A)$ ifadelerini sağlar. $T^{\sharp_A}$ operatöründe benzer olup ancak bazı T^* klasik durumdaki özellikleri sağlamayabilir. Örneğin genelde $(T^{\sharp_A})^{\sharp_A}, T$ 'ye eşit değildir. Burada $(T^{\sharp_A})^{\sharp_A} = T$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ olmasıdır. Ayrıca $\mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ kümesi $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'da ne kapalı ne de yoğun olan $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 'ın bir altcebiridir. Bununla birlikte

$$\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}^A(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

kapsama bağıntısı sağlanır. Eğer A bire-bir ve $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ ise eşitlik durumu oluşur. Tekrar Douglas teoreminden

$$\mathbb{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \text{her } x \in \mathcal{H} \text{ için } \|Tx\|_A \leq c \|x\|_A \text{ o.ş. } c > 0 \text{ mevcut}\}$$

elde edilir. Burada $\mathbb{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ 'daki herhangi bir operatöre A -sınırlı denir. O halde

$$\mathbb{B}_A(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}^A(\mathcal{H})$$

sağlanır (Arias vd., 2008b,a). Ek olarak $T \in \mathbb{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ için

$$\|T\|_A = \sup \{|\langle Tx, y \rangle_A| : x, y \in \mathcal{H}, \|x\|_A = \|y\|_A = 1\}$$

olur.

Eğer AT kendine eş, yani $AT = T^*A$ ise bir $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörüne A -kendine eş denir. Burada eğer $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ A -kendine eş ise o zaman $T \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ olduğu kolayca gözlemlenebilir. Bununla birlikte eğer T , A -kendine eş, yani $AT = T^*A$ ise o zaman $(T^{\sharp_A}) = T$ olmayabilir. Burada eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul T nin A -kendine eş ve $\mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ olmasıdır.

Eğer $T \geq_A 0$ şeklinde yazılan AT pozitif ise kendine eş T operatörüne A -pozitif denir. Açıkça A -pozitif operatör genelde A -kendine eştir. $T \geq_A S$ şeklinde yazılan $T, S \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$, A -kendine eş operatörler için $T \geq_A S$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T - S \geq_A 0$ olmasıdır. Burada eğer $T \geq_A S \geq_A 0$ ise o zaman $\|T\|_A \geq \|S\|_A$ olur. Aynı zamanda, $TT^{\sharp_A}$ ve $T^{\sharp_A}T$ operatörleri A pozitif operatörler ise

$$\|T^{\sharp_A}T\|_A = \|TT^{\sharp_A}\|_A = \|T\|_A^2 = \|T^{\sharp_A}\|_A^2$$

eşitliği sağlanır.

Eğer her $x \in \mathcal{H}$ için sırasıyla $\|Tx\|_A = \|T^{\sharp_A}x\|_A = \|x\|_A$ ise $T \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ operatörüne A -üniter ve eğer $T^{\sharp_A}T = T^{\sharp_A}T$ ise A -normal denir.

Bir $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörünün A -nümerik yarıçapının

$$w_A(X) := \sup \{ \langle Xx, x \rangle_A : x \in \mathcal{H}, \|x\|_A = 1 \}$$

olarak tanımlandığını gözlemledik. A -nümerik aralığı ile ilişkili başka bir nümerik sabit A -Crawford sayısıdır ve $c_A(X)$ ile gösterilir,

$$c_A(X) := \inf \{ \langle Xx, x \rangle_A : x \in \mathcal{H}, \|x\|_A = 1 \}$$

ile tanımlanır. $w_A(X) = +\infty$ olan bazı $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörleri olduğuna dikkat edelim.

Bunun için $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operatörleri verilebilir.

Elde edilen sonuçlar için gerekli olan aşağıdaki iki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.27. (Zamani, 2019a) Eğer $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ operatörü A -kendine eş ise o zaman

$$w_A(X) = \|X\|_A$$

sağlanır.

Önerme 3.28. $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ olsun. O zaman

$$w_A\left(\frac{X + X^{\sharp_A}}{2}\right) = \left\|\frac{X + X^{\sharp_A}}{2}\right\|_A \text{ ve } w_A\left(\frac{X - X^{\sharp_A}}{2i}\right) = \left\|\frac{X - X^{\sharp_A}}{2i}\right\|_A$$

elde edilir.

Zamani, A -nümerik yarıçapı için aşağıdaki gibi kullanışlı bir formül vermiştir.

Teorem 3.29. (Zamani (2019a)) Eğer $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ ise o zaman

$$w_A(X) = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \frac{e^{i\gamma}X + e^{-i\gamma}X^{\sharp_A}}{2} \right\|_A = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \frac{e^{i\gamma}X - e^{-i\gamma}X^{\sharp_A}}{2i} \right\|_A$$

olur.

Önerme 3.30. (Bhunia vd., 2021c) $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ olsun. Her A -üniter operatör U için

$$w_A(X) = w_A(UXU^{\sharp_A})$$

elde edilir.

$w_A(\cdot)$ 'nin $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ üzerinde bir yarı norm tanımladığını gözlemliyoruz ve A -nümerik yarıçapın $\mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ üzerindeki A -operatör yarınormuna eşdeğer olduğunu kanıtlıyoruz. $\text{Re}_A(X) = \frac{X + X^{\sharp_A}}{2}$ ve $\text{Im}_A(X) = \frac{X - X^{\sharp_A}}{2i}$ olsun, o zaman $X, X = \text{Re}_A(X) + i \text{Im}_A(X)$ olarak yazılabilir ve bu ayrıştırmanın X 'in A -kartezyen ayrıştırması olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.31. (Baklouti vd., 2018) Eğer $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ ise o zaman

$$\frac{1}{2} \|X\|_A \leq w_A(X) \leq \|X\|_A$$

olur.

Eğer $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$, A -kendine eş ise o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|X^n\|_A = \|X\|_A^n$$

dir (Baklouti vd., 2020, Teorem 5.1).

Aşağıdaki teoremde, Teorem 3.31'deki eşitsizliklerin bir iyileştirmesini sunuyoruz.

Teorem 3.32. (Zamani, 2019a) Eğer $X \in \mathbb{B}_A(\mathcal{H})$ ise o zaman

$$\frac{1}{2} \sqrt{\|X^\sharp_A X + X X^\sharp_A\|_A} \leq w_A(X) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\|X^\sharp_A X + X X^\sharp_A\|_A}$$

elde edilir.

Bhanja vd. (2021) çalışmasında verilen bazı yararlı sonuçları verebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.33. $\|e\|_A = 1$ ile $u_1, u_2, e \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda

$$|\langle u_1, e \rangle_A \langle e, u_2 \rangle_A| \leq \frac{1}{2} (|\langle u_1, u_2 \rangle_A| + \|u_1\|_A \|u_2\|_A) \quad (3.24)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.34. $\|e\|_A = 1$ ile $u_1, u_2, e \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda

$$\|u_1\|_A^2 \|u_2\|_A^2 - |\langle u_1, u_2 \rangle_A|^2 \geq 2 |\langle u_1, e \rangle_A \langle e, u_2 \rangle_A| (\|u_1\|_A \|u_2\|_A - |\langle u_1, u_2 \rangle_A|)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.35. Eğer $u_1, u_2, e \in \mathcal{H}$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise o zaman

$$\|u_1\|_A^2 \|u_2\|_A^2 - |\langle u_1, u_2 \rangle_A|^2 = \|u_1 - zu_2\|_A^2 \|u_2\|_A^2 - |\langle u_1 - zu_2, u_2 \rangle_A|^2$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak, Hilbert uzay operatörlerinin nümerik yarıçap eşitsizlikleriyle ilgili çok sayıda mevcut sonucun, yarı Hilbert uzay operatörlerinin A -nümerik yarıçap eşitsizlikleriyle ilgili eşitsizlikleri geliştirmek için uygun şekilde kullanılabileceğini belirtebiliriz.

3.4. Berezin Sembolü

Bu kısımda, Hilbert fonksiyon uzayı (HFU) üzerine odaklanacağız. Bunlar, sınırlı nokta değerli bir Ω kümesi üzerinde tanımlanan karmaşık değerli fonksiyonlardan oluşan iç çarpım uzaylarıdır.

Tanım 3.36. $\mathcal{H}$ bir karmaşık Hilbert uzay olsun. Bir $\phi_\lambda(f) = f(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$, değer fonksiyonelleri $\mathcal{H}$ üzerinde sürekli olacak şekilde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ üzerindeki küme üzerindeki karmaşık değerli fonksiyonların Hilbert uzayına Hilbert fonksiyon uzayı denir.

Karmaşık sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli $\mathcal{H}$ uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına Hilbert fonksiyon uzayı ya da çekirdek üreten Hilbert uzayı denir (Halmos, 1982).

Yardımcı Teorem 3.37. $\mathcal{H}$ Hilbert fonksiyon uzayının keyfi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{H}$ uzayının çekirdek üreteni

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

biçiminde gösterilir (Saitoh, 1997).

Yardımcı Teorem 3.37'den $k_\lambda(z) = \overline{k_z(\lambda)}$ olur. Böylece her $\lambda, z \in \Omega$ için $k(z, \lambda) = \overline{k(\lambda, z)}$ elde edilir. Ayrıca k_λ için

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = k(\lambda, \lambda)$$

yazılır. Diğer taraftan λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş çekirdek üreteni

$$\widehat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{(k(\lambda, \lambda))^{\frac{1}{2}}} = \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|} \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Tanım 3.38. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde çekirdek üreten Hilbert uzayı ve $\mathcal{H}$ uzayı üzerinde A herhangi bir sınırlı doğrusal operatör olmak üzere

$$\tilde{A}(\lambda) = \left\langle A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle_{\mathcal{H}}, \lambda \in \Omega \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{A}$ fonksiyonuna A 'nın Berezin sembolü (dönüşümü) adı verilir (Berezin, 1972; Karaev, 2006a, 2013).

Tanım 3.39. $A \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ için A 'nın Berezin kümesi ve Berezin sayısı, sırasıyla

$$\text{Ber}(A) = \text{Range}(\tilde{A}) = \left\{ \tilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} = \left\{ \left\langle A\hat{k}_{\lambda}, \hat{k}_{\lambda} \right\rangle : \lambda \in \Omega \right\}$$

ve

$$\text{ber}(A) = \sup_{\lambda \in \Omega} |\tilde{A}(\lambda)|$$

ifadeleriyle verilir (Karaev, 2002b, 2006b,a, 2013).

Berezin sembolün temel özellikleri aşağıdaki gibidir: (Kılıç, 1994, 1995):

- (i) A pozitif operatör ise bu durumda $\tilde{A}$ pozitif fonksiyondur.
- (ii) $\tilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur.
- (iii) A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü, $\tilde{A}$ kompleks eşleniğine eşittir.
- (iv) Her $\lambda \in \Omega$ için $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda)$ ancak ve ancak $A = B$ şeklinde olmasıdır.
- (v) A operatörü kompakt ise $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) olur ancak $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) ise A operatörü kompakt olmayabilir.

Aynı zamanda $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörünün Berezin normu

$$\|T\|_{\text{Ber}} := \sup_{\lambda \in \Omega} \|T\hat{k}_{\lambda}\|$$

biçiminde tanımlanır. $\|T\|_{\text{Ber}}$ normu $\mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ de yeni bir operatör normu belirlediğini görmek kolaydır. Ayrıca $\text{ber}(T) \leq \|T\|_{\text{Ber}} \leq \|T\|$ olduğu bilinen bir gerçektir. $T, V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için Berezin sayısı ve Berezin normu tanımlarından

$$(B1) \text{ Her } \alpha \in \mathbb{C} \text{ için } \text{ber}(\alpha Y) = |\alpha| \text{ber}(T),$$

$$(B2) \text{ber}(T + V) \leq \text{ber}(T) + \text{ber}(V),$$

$$(B3) \text{ber}(T) \leq \|T\|_{\text{ber}},$$

$$(B4) \text{Her } \alpha \in \mathbb{C} \text{ için } \|\alpha T\|_{\text{ber}} = |\alpha| \|T\|_{\text{ber}},$$

$$(B5) \|T + V\|_{\text{ber}} \leq \|T\|_{\text{ber}} + \|V\|_{\text{ber}},$$

$$(B6) \|T\|_{\text{ber}} = \|T^*\|_{\text{ber}} \text{ ve } \text{ber}(T) = \text{ber}(T^*)$$

özellikleri sağlanır. Bhunia vd. (2023) tarafından eğer $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ pozitif ise $\|T\|_{\text{Ber}} = \text{ber}(T)$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca tanımdan $\text{Ber}(T) \subseteq W(T)$ olur. Diğer taraftan keyfi $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ için

$$\text{ber}(T) \leq w(T) \leq \|T\| \quad (3.26)$$

iyi bilinen ve üzerinde birçok genelleştirme yapılan önemli bir eşitsizliktir.

$\text{ber}(T)$ için bir önemli eşitsizlik $n = 1, 2, \dots$ için

$$\text{ber}(T^n) \leq \text{ber}(T)^n \quad (3.27)$$

biçiminde ifade edilen kuvvet eşitsizliğidir. Daha genel olarak eğer T nilpotent değil ise o zaman bazı $C_1, C_2 > 0$ sabitleri için

$$C_1 \text{ber}(T)^n \leq \text{ber}(T^n) \leq C_2 \text{ber}(T)^n$$

olur. Son zamanlarda bir çok çalışmada nümerik yarıçap ile ilgili olan bazı Hilbert fonksiyon operatörleri için önemli eşitsizlikler verilmiştir. Bunlardan bazıları bu tez çalışmasında kullanılacaktır. Örneğin, Başaran vd. (2022)

$$\text{ber}(T) \leq \frac{1}{2} \left(\|T\|_{\text{ber}} + \|T^2\|_{\text{ber}}^{1/2} \right) \quad (3.28)$$

sonucunu elde etmiştir. Eğer $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ ise Huban vd. (2021a) ve Başaran vd. (2022) çalışmalarında sırasıyla

$$\frac{1}{4} \left\| |A|^2 + |A^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \leq \text{ber}^2(A) \leq \frac{1}{2} \left\| |A|^2 + |A^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \quad (3.29)$$

ve $r \geq 1$ olmak üzere

$$\text{ber}^{2r}(A) \leq \frac{1}{2} \left\| |A|^{2r} + |A^*|^{2r} \right\|_{\text{ber}} \quad (3.30)$$

olduğunu elde etmişlerdir. Ayrıca $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için yine Huban vd. (2021a) çalışmasında

$$\frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\| \leq (\text{ber}(T))^2 \leq \frac{1}{2} \|T^*T + TT^*\| \quad (3.31)$$

ve

$$\text{ber}(T) \leq \frac{1}{2} \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} + (TT^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2} \left(\|T\|_{\text{ber}} + \|T^2\|_{\text{ber}}^{\frac{1}{2}} \right) \leq \|T\|_{\text{ber}} \quad (3.32)$$

önemli eşitsizlikleri verilmiştir. Bu eşitsizliğin diğer iyileştirilmiş durumu Huban vd. (2021a, 2022a, 2021d) çalışmasında $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için

$$\text{ber}^{2r}(Y^*X) \leq \frac{1}{2} \left\| (X^*X)^{2r} + (Y^*Y)^{2r} \right\|_{\text{ber}}, \quad r \geq 1, \quad (3.33)$$

ve

$$\text{ber}(Y^*X) \leq \frac{1}{2} \left\| (X^*X) + (Y^*Y) \right\|_{\text{ber}} \quad (3.34)$$

eşitsizlikleri ile elde edilmiştir.

Şimdi 2022 yılında Gürdal ve Başaran tarafından verilen A -Berezin sayısı ve A -Berezin kümesi kavramlarını hatırlayalım (Gürdal ve Başaran, 2022).

Tanım 3.40. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman X 'in sırasıyla A -Berezin kümesi, A -Berezin sayısı ve A -Berezin normu

$$\text{Ber}_A(X) := \left\{ \left\langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle_A : \lambda \in \Omega \right\},$$

$$\text{ber}_A(X) := \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \left\langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle_A \right|$$

ve

$$\|X\|_{A-\text{Ber}} := \sup_{\lambda \in \Omega} \|AX\widehat{k}_\lambda\|_{\mathcal{H}}$$

ile verilir.

Burada $\text{Ber}_A(X)$ kümesi $\mathbb{C}$ 'nin boş olmayan bir altkümesi ve genelde $\mathcal{H}$ sonlu boyutlu bile olsa kapalı değildir. Tanım 3.40'da $A = I$ alınırsa A -Berezin kümesi, A -Berezin sayısı ve A -Berezin normu ifadeleri sırasıyla Berezin kümesi, Berezin sayısı ve

Berezin normu ile çakışır. Bu yeni fikrin bir sonucu olarak, Hilbert fonksiyon uzay operatörlerinin Berezin sayısı ve operatörlerin Berezin normu daha genel hale gelmiştir. A -Berezin sayı eşitsizlikleri hakkında daha fazla bilgi için Gürdal ve Başaran (2022) ve Huban (2022) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 3.41. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \Omega$ için $\langle X\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \rangle_A = \langle \hat{k}_\lambda, U\hat{k}_\mu \rangle_A$ sağlanır ise o zaman $U \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü X nin (A, Ω) -eşleniğidir.

Burada $\mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}) := \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ ile $\mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ deki tüm (A, Ω) -eşlenik olan operatörlerin kümesini tanımlayalım.

Şimdi Gürdal ve Başaran (2022)'de $\|X\|_{A-\text{Ber}}$ ve $\text{ber}_A(X)$ arasındaki ilişkiyi veren sonucu verelim.

Teorem 3.42. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{2} \|X\|_{A-\text{Ber}} \leq \sqrt{\frac{1}{4} \|X\|_{A-\text{Ber}}^2 + \frac{1}{4} [\max(\text{dwb}_A(X), \text{dwb}_A(X^{*A}))]^2} \leq \text{ber}_A(X)$$

olur.

Önerme 3.43. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü bir (A, Ω) -kendine eş operatör olsun. O zaman $X^{\sharp_A}, (A, \Omega)$ -kendine eş ve

$$(X^{\sharp_A})^{\sharp_A} = X^{*A} \quad (3.35)$$

olur.

Tanım 3.44. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olduğunu kabul edelim. Bu operatörün sırasıyla A -Davis-Wielandt-Berezin kabuğu ve A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı

$$\text{DWB}_A(X) := \left\{ \left(\langle X\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle_A, \|\hat{k}_\lambda\|_A^2 \right), \lambda \in \Omega \right\}$$

ve

$$\text{dwb}_A(X) := \sup_{\lambda \in \Omega} \sqrt{|\tilde{X}^A(\lambda)|^2 + \|\hat{k}_\lambda\|_A^4}$$

formülleri ile verilir.

Bu tanımlardan $\text{dwb}_A(X) \leq dw_A(X)$ dir. Ayrıca $X, Y \in \mathbb{B}_{A, \Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ için

(i) $\text{dwb}_A(X) \geq 0$ ve $\text{dwb}_A(X) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $X = 0$ olmasıdır;

$$(ii) \text{dwb}_A(\xi X) \begin{cases} \geq |\xi| \text{dwb}_A(X) & \text{if } |\xi| > 1 \\ = |\xi| \text{dwb}_A(X) & \text{if } |\xi| = 1 \\ \leq |\xi| \text{dwb}_A(X) & \text{if } |\xi| < 1. \end{cases}$$

$$(iii) \text{dwb}_A(X + Y) \leq \sqrt{2 \left(\text{dwb}_A(X) + \text{dwb}_A(Y) + 4(\text{dwb}_A(X) + \text{dwb}_A(Y))^2 \right)}$$

özelliklerine sahibiz. Bundan dolayı $\text{dwb}_A(\cdot)$, $\mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ üzerinde bir norm olmayabilir.

Böylece $X \in \mathbb{B}_{A, \Omega}(\mathcal{H})$ için $\text{dwb}_A(\cdot)$ 'nin aşağıdaki

$$\max \left\{ \text{ber}_A(X), \|X\|_{A-\text{ber}}^2 \right\} \leq \text{dwb}_A(X) \leq \sqrt{\text{ber}_A^2(X) + \|X\|_{A-\text{ber}}^4} \quad (3.36)$$

özellığı hemen elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Operatör Dışbükey Fonksiyonlarına Göre Berezin Sayı Eşitsizlikleri

Son zamanlarda Alomari vd. (2022) tarafından Hilbert uzay operatörleri için bazı nümerik yarıçap eşitsizlikleri ile ilgili bir takım sonuçlar etmişlerdi. Bu kısımda, Hilbert uzay operatörleri için bazı Berezin sayı eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Yani, Huban vd. (2021a) çalışmasında elde edilen bir sonuç, Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili Dragomir (2019)'in bir sonucu ve Başaran vd. (2022) çalışmasında elde edilen eşitsizliğin bazı iyileştirilmeleri incelenmiştir.

Şimdi, operatör dışbükey fonksiyonları ile bazı Berezin sayı eşitsizliklerini ispatlayalım.

Teorem 4.1. (Başaran vd., 2022, Teorem 1) *Eğer $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ise o zaman*

$$f(\text{ber}(T)) \leq \left\| \int_0^1 f(t|T| + (1-t)|T^*|) dt \right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2} \|f(|T|) + f(|T^*|)\|_{\text{ber}}$$

olur.

Bir sonraki sonuç, Teorem 4.1'ün daha da geliştirilmesi ve genelleştirilmesidir.

Teorem 4.2. *$T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ve $0 \leq \beta \leq 1$ ise o zaman*

$$\begin{aligned} f(\text{ber}(T)) &\leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\| \int_0^1 f(tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|)) dt \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\| \frac{f(g^2(|T|)) + f(h^2(|T^*|))}{2} \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada g ve h fonksiyonları $g(t)h(t) = t$ ($t \in [0, \infty)$) bağıntısını sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. f fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artan ise o zaman Yardımcı Teorem 3.17 ve Aritmetik ve Geometrik ortalama eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
f\left(\left|\left\langle T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &\leq f\left(\sqrt{\left\langle g^2(|T|)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle h^2(|T^*|)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\
&\leq f\left(\frac{\left\langle g^2(|T|)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \left\langle h^2(|T^*|)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle}{2}\right) \\
&= f\left(\left\langle \left(\frac{g^2(|T|) + h^2(|T^*|)}{2}\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right) \\
&\leq (1-\beta) \left[\left\langle f\left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2}\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right] \\
&\quad + \beta \left[\left\langle f\left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2}\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right] \\
&= \left\langle \left[(1-\beta)f\left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2}\right)\right]\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \int_0^1 \left\langle f(tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|))\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle dt \\
&\quad \left\langle \left(\int_0^1 f(tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|)) dt\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \left\langle \left(\frac{f(g^2(|T|)) + f(h^2(|T^*|))}{2}\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
f\left(\left|\left\langle T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &\leq \left\langle \left[(1-\beta)f\left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2}\right)\right]\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\langle \left(\int_0^1 f(tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|)) dt \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \left\langle \left(\frac{f(g^2(|T|)) + f(h^2(|T^*|))}{2} \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

olur. Üstte elde edilen eşitsizlikte $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
f(\text{ber}(T)) &\leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|)) dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \frac{f(g^2(|T|)) + f(h^2(|T^*|))}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur. □

Not 4.3. (a) Eğer Teorem 4.2 de $g(t) = t^\nu, h(t) = t^{1-\nu}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
f(\text{ber}(T)) &\leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)|T|^{2\nu} + (1+\beta)(|T^*|^{2(1-\nu)})}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)|T|^{2\nu} + \beta|T^*|^{2(1-\nu)}}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(t)|T|^{2\nu} + (1-t)|T^*|^{2(1-\nu)} dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \frac{f(|T|^{2\nu}) + f(|T^*|^{2(1-\nu)})}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

olur.

(b) $g(t) = t^{1/2}, h(t) = t^{1/2}$ için ise

$$f(\text{ber}(T)) \leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)|T| + (1+\beta)|T^*|}{2}\right) + \beta f\left(\frac{(2-\beta)|T| + \beta|T^*|}{2}\right) \right\|_{\text{ber}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \int_0^1 f(t|T| + (1-t)|T^*|) dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \frac{f(|T|) + f(|T^*|)}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Özel durumda $\beta = \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned}
f(\text{ber}(T)) &\leq \frac{1}{2} \left\| f\left(\frac{|T| + 3|T^*|}{4}\right) + f\left(\frac{3|T| + |T^*|}{4}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(t|T| + (1-t)|T^*|) dt \right\|_{\text{ber}} \leq \left\| \frac{f(|T|) + f(|T^*|)}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

durumu oluşur.

Burada (4.1) eşitsizliğinin Teorem 4.1'in gelişmiş hali olduğunu ve (4.2) eşitsizliğinin zaten Huban vd. (2021c)'da olduğunu belirtmelidir. Bu sonuçlara dayanarak, Teorem 4.2'in Teorem 4.1'den daha genel olduğu gözlemlenebilir.

$f(t) = t^r$ ($1 \leq r \leq 2$) fonksiyonu artan bir operatör dışbükey fonksiyondur. Aşağıdaki sonuç (3.31)'ün iyileştirme ve genellemesidir.

Sonuç 4.4. $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda herhangi $0 \leq \beta \leq 1$ ve $1 \leq r \leq 2$ için

$$\begin{aligned}
\text{ber}^r(T) &\leq \left\| (1-\beta) \left(\frac{(1-\beta)g^2(|T|) + (1+\beta)h^2(|T^*|)}{2} \right)^r \right. \\
&\quad \left. + \beta \left(\frac{(2-\beta)g^2(|T|) + \beta h^2(|T^*|)}{2} \right)^r \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 (tg^2(|T|) + (1-t)h^2(|T^*|))^r dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \frac{(g^2(|T|))^r + (h^2(|T^*|))^r}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

olur. Özel durumda ise $v \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\text{ber}^r(T) \leq \left\| (1-\beta) \left(\frac{(1-\beta)|T|^{2v} + (1+\beta)|T^*|^{2(1-v)}}{2} \right)^r \right\|_{\text{ber}}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \left(\frac{(2-\beta)|T|^{2\nu} + \beta|T^*|^{2(1-\nu)}}{2} \right)^r \Big\|_{\text{ber}} \\
& \leq \left\| \int_0^1 \left(t|T|^{2\nu} + (1-t)|T^*|^{2(1-\nu)} \right)^r dt \right\|_{\text{ber}} \\
& \left\| \frac{\left(|T|^{2\nu} \right)^r + \left(|T^*|^{2(1-\nu)} \right)^r}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.5. (Başaran vd., 2022, Önerme 2) Eğer $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ iki operatör ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ise bu durumda

$$f(\text{ber}(S^*T)) \leq \left\| \int_0^1 f\left(t|T|^2 + (1-t)|S|^2\right) dt \right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2} \left\| f(|T|^2) + f(|S|^2) \right\|_{\text{ber}}$$

elde edilir. Özel durumda herhangi $1 \leq r \leq 2$ için

$$\text{ber}^r(S^*T) \leq \left\| \int_0^1 \left(t|T|^2 + (1-t)|S|^2 \right)^r dt \right\|_{\text{ber}} \leq \frac{1}{2} \left\| |T|^{2r} + |S|^{2r} \right\|_{\text{ber}}$$

olur.

Aşağıdaki teoremden, Önerme 4.5'in bir iyileştirmesini ve genellemesini gösterebiliriz.

Teorem 4.6. $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ iki operatör olsun. Eğer $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ve $\beta \in [0, 1]$ ise o zaman

$$\begin{aligned}
f(\text{ber}(S^*T)) & \leq \left\| (1-\beta)f\left(\frac{(1-\beta)|T|^2 + (1+\beta)|S|^2}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)|T|^2 + \beta|S|^2}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
& \leq \left\| \int_0^1 f\left(t|T|^2 + (1-t)|S|^2\right) dt \right\|_{\text{ber}} \\
& \leq \left\| \frac{f(|T|^2) + f(|S|^2)}{2} \right\|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel durumda herhangi $1 \leq r \leq 2$ için

$$\begin{aligned} \text{ber}^r(S^*T) &\leq \left\| (1-\beta) \left(\frac{(1-\beta)|T|^2 + (1+\beta)|S|^2}{2} \right)^r + \beta \left(\frac{(2-\beta)|T|^2 + \beta|S|^2}{2} \right)^r \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\| \int_0^1 (t|T|^2 + (1-t)|S|^2)^r dt \right\|_{\text{ber}} \leq \left\| \frac{|T|^{2r} + |S|^{2r}}{2} \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

olur.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normleştirilmiş çekirdek üreten olsun. $f, [0, +\infty)$ üzerinde artan ise Aritmetik ve Geometrik ortalama eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} f\left(\left|\left\langle S^*T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &= f\left(\left|\left\langle T\widehat{k}_\lambda, \right\rangle S\widehat{k}_\lambda \right|\right) \\ &\leq f\left(\sqrt{\left\langle |T|\widehat{k}_\lambda, |T|\widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle |S|\widehat{k}_\lambda, |S|\widehat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\ &= f\left(\sqrt{\left\langle |T|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle |S|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\ &\leq f\left(\frac{\left\langle |T|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \left\langle |S|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle}{2}\right) \\ &= f\left(\left\langle \left(\frac{|T|^2 + |S|^2}{2}\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) eşitliği ve Teorem 3.16'nin ispatındaki benzer bir yöntemi uygulayarak istenilen sonuçları elde edebiliriz. $\square$

Aşağıdaki sonuçta, operatör normunu içeren bazı eşitsizlikleri ispatlayabiliriz.

Önerme 4.7. $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ iki operatör olsun. Eğer $f : I \rightarrow \mathcal{R}$, I aralığı üzerinde bir artan operatör dışbükey fonksiyon ve herhangi $\beta \in [0, 1]$ ise o zaman

$$\begin{aligned} f\left(\left\|\frac{T+S}{2}\right\|_{\text{ber}}\right) &\leq \left\| (1-\beta)f\left(\frac{(1-\beta)|T| + (1+\beta)|S|}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta f\left(\frac{(2-\beta)|T| + \beta|S|}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\| \int_0^1 f(t|T|) + (1-t)|S| dt \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \|f(|T|) + f(|S|)\|_{\text{ber}}$$

olur. Özel durumda $\beta = \frac{1}{2}$ için ise

$$\begin{aligned} f\left(\left\|\frac{T+S}{2}\right\|_{\text{ber}}\right) &\leq \left\|f\left(\frac{|T|+3|S|}{4}\right) + f\left(\frac{3|T|+|S|}{4}\right)\right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \left\|\int_0^1 f(t|T|) + (1-t)|S| dt\right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|f(|T|) + f(|S|)\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f\left(\left|\left\langle\left(\frac{T+S}{2}\right)\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\right) &= f\left(\left|\frac{\langle T\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle + \langle S\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle}{2}\right|\right) \\ &\leq f\left(\frac{|\langle T\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle| + |\langle S\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle|}{2}\right) \\ &\leq f\left(\frac{\langle |T|\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle + \langle |S|\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\rangle}{2}\right) \\ &= f\left(\left\langle\frac{|T|+|S|}{2}\widehat{k}_\lambda,\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right) \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.16'in ispatındaki aynı metodlar kullanılarak arzulanan sonuç elde edilir. $\square$

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ise bu durumda $\frac{|T|+|S|}{2}$ pozitif operatör için fonksiyonel kalkülüs hesaplamaları kullanılarak

$$f\left(\left\|\frac{|T|+|S|}{2}\right\|\right) = \left\|f\left(\frac{|T|+|S|}{2}\right)\right\|$$

elde edilir. Şimdi, Önerme 4.7'de T yerine $|T|$ ve S yerine $|S|$ alınırsa

$$\left\|f\left(\frac{|T|+|S|}{2}\right)\right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)|T| + (1+\beta)|S|}{2}\right) + \beta f\left(\frac{(2-\beta)|T| + \beta|S|}{2}\right) \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(t|T| + (1-t)|S|) dt \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|f(|T|) + f(|S|)\|
\end{aligned} \tag{4.4}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.8. (Huban vd., 2021c, Teorem 3) $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü $T = B + iC$ Kartezyen ayrışımına sahip olsun. Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ise bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\| f\left(\frac{T^*T + TT^*}{4}\right) \right\|_{\text{ber}} &\leq \left\| \int_0^1 f((1-\alpha)B^2 + \alpha C^2) d\alpha \right\|_{\text{Ber}} \\
&\leq \frac{1}{2} \|f(B^2) + f(C^2)\|_{\text{ber}} \\
&\leq f(\text{ber}^2(T))
\end{aligned}$$

olur.

Bu bölümün son sonucu için, Teorem 4.8'in alttaki iyileştirmesini verebiliriz.

Teorem 4.9. $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü $T = B + iC$ Kartezyen ayrışımına sahip olsun. Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir artan operatör dışbükey fonksiyon ise bu durumda $\beta \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left\| f\left(\frac{T^*T + TT^*}{4}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| (1-\beta) f\left(\frac{(1-\beta)B^2 + (1+\beta)C^2}{2}\right) + \beta f\left(\frac{(2-\beta)B^2 + \beta C^2}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(tC^2 + (1-t)B^2) dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2} \|f(B^2) + f(C^2)\|_{\text{ber}} \leq f(\text{ber}^2(T))
\end{aligned}$$

olur.

İspat. Eğer $T = B + iC$ kartezyen ayrışım ise o zaman $B^2 + C^2 = \frac{T^*T + TT^*}{2}$ elde edilir. Şimdi, eğer (4.4) eşitsizliğinde B^2 yerine $|T|$ ve C^2 yerine $|B|$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left\| f\left(\frac{T^*T + TT^*}{4}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&= \left\| f\left(\frac{B^2 + C^2}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| (1-\beta)f\left(\frac{(1-\beta)B^2 + (1+\beta)C^2}{2}\right) + \beta f\left(\frac{(2-\beta)B^2 + \beta C^2}{2}\right) \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \left\| \int_0^1 f(tC^2 + (1-t)B^2) dt \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2} \|f(B^2) + f(C^2)\|_{\text{ber}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|f(B^2) + f(C^2)\|_{\text{ber}} &\leq \frac{1}{2} (\|f(B^2)\|_{\text{ber}} + \|f(C^2)\|_{\text{ber}}) \\
&= \frac{1}{2} (f(\|B^2\|_{\text{ber}}) + f(\|C^2\|_{\text{ber}})) \\
&\leq f(\text{ber}^2(T))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6)'yı kullanarak istediğimiz sonucu elde ederiz. $\square$

$f(t) = t^r$, $1 \leq r \leq 2$, bir artan operatör dışbükey fonksiyon olsun. Önceki teorem, (3.31)'daki ilk eşitsizliğin aşağıdaki şekilde genişletilmesini ve ayrıntılandırılmasını ima eder.

Sonuç 4.10. $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatörü $T = B + iC$ kartezyen ayrışımına sahip olsun. O zaman her $\beta \in [0, 1]$ ve $1 \leq r \leq 2$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^r} \|T^*T + TT^*\|_{\text{ber}}^r &\leq \frac{1}{2^r} \left\| (1-\beta)((1-\beta)B^2 + (1+\beta)C^2)^r + \beta((2-\beta)B^2 + \beta C^2)^r \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{1}{2} \|B^{2r} + C^{2r}\|_{\text{ber}} \\
&\leq \text{ber}^{2r}(T)
\end{aligned}$$

olur. Özel durumda ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \|T^*T + TT^*\|_{\text{ber}} &\leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\| (B^2 + 3C^2)^2 + (3B^2 + C^2)^2 \right\|_{\text{ber}}^{1/2} \\
&\leq \left\| \int_0^1 (tC^2 + (1-t)B^2)^2 dt \right\|_{\text{ber}}^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|B^4 + C^4\|_{\text{ber}}^{1/2} \\
&\leq \text{ber}^2(T)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Diğer Berezin Yarıçap Eşitsizlikleri

Bu kısımda, Berezin yarıçap eşitsizlikleri ve Hilbert fonksiyon uzay operatörü için Berezin normunu içeren sınırlı $\tilde{X}$ fonksiyonunu kullanarak bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir. Özellikle, keyfi X sınırlı doğrusal operatör için

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2)$$

eşitsizliği ispatlanmıştır.

Şimdi, bu bölümün ana sonuçlarını sunmaya başlayalım.

Teorem 4.11. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2) \quad (4.7)$$

sağlanır.

İspat. $\hat{k}_\lambda$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. O zaman (3.6)'de $e = \hat{k}_\lambda$, $x = X\hat{k}_\lambda$ ve $y = X^*\hat{k}_\lambda$ alınarak, Aritmetik ve Geometrik ortalama eşitsizliği ve (3.11) eşitsizliği yardımıyla

$$\left| \langle X\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle \right|^4$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{3}{4} \|X\widehat{k}_\lambda\|^2 \|X^*\widehat{k}_\lambda\|^2 + \frac{1}{4} \|X\widehat{k}_\lambda\| \|X^*\widehat{k}_\lambda\| |\langle X\widehat{k}_\lambda, X^*\widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&= \frac{3}{4} \langle X\widehat{k}_\lambda, X\widehat{k}_\lambda \rangle \langle X^*\widehat{k}_\lambda, X^*\widehat{k}_\lambda \rangle + \frac{1}{4} \sqrt{\langle X\widehat{k}_\lambda, X\widehat{k}_\lambda \rangle \langle X^*\widehat{k}_\lambda, X^*\widehat{k}_\lambda \rangle} |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&= \frac{3}{4} \langle |X|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |X^*|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \frac{1}{4} \sqrt{\langle |X|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |X^*|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle} |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&\leq \frac{3}{8} \left(\langle |X|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle^2 + \langle |X^*|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(\langle |X|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |X^*|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&\leq \frac{3}{8} \left(\langle |X|^4\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |X^*|^4\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(\langle |X|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |X^*|^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&= \frac{3}{8} \langle (|X|^4 + |X^*|^4)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \frac{1}{8} \langle (|X|^2 + |X^*|^2)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınarak

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda \in \Omega} |\langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle|^4 &\leq \sup_{\lambda \in \Omega} \frac{3}{8} \langle (|X|^4 + |X^*|^4)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \\
&\quad + \sup_{\lambda \in \Omega} \frac{1}{8} \langle (|X|^2 + |X^*|^2)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle |\langle X^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle|
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2)$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. $\square$

Gelecek sonuç Yardımcı Teorem 3.11'e dayanan $r = 2$ olduğunda (3.30) eşitsizliğinin iyileştirilmesidir.

Sonuç 4.12. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\text{ber}^4(X) &\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

olur.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normleştirilmiş çekirdek üreten olsun. O zaman eğer $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ve $f, [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan artan fonksiyon ise bu durumda $\|f(|X|)\|_{\text{ber}} = f(\|X\|_{\text{ber}})$ olduğuna dikkat edelim. Böylece (3.27), (3.29) ve (3.10) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\text{ber}^4(X) &\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2) \\
&\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}^2(X) \\
&\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{16} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}}^2 \\
&= \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{16} \| (|X|^2 + |X^*|^2)^2 \|_{\text{ber}} \\
&= \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{16} \left\| \left(\frac{2|X|^2 + 2|X^*|^2}{2} \right)^2 \right\|_{\text{ber}} \\
&\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} \\
&= \frac{1}{2} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple,

$$\begin{aligned}
\text{ber}^4(X) &\leq \frac{3}{8} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^2 + |X^*|^2 \|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \| |X|^4 + |X^*|^4 \|_{\text{ber}}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşabiliriz. □

(3.6) eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki düzeltmeyi elde ederiz.

Teorem 4.13. $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun. Bu durumda herhangi $\lambda \in \Omega$ için

$$\left| \widetilde{X}(\lambda) \widetilde{Y}(\lambda) \right|^2 \leq \frac{3}{8} \left(\widetilde{|X|^4 + |Y^*|^4} \right)(\lambda) + \frac{1}{8} \left(\widetilde{|X|^2 + |Y^*|^2} \right)(\lambda) \left| \widetilde{YX}(\lambda) \right| \quad (4.8)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. (3.6) eşitsizliğinde $e = \widehat{k}_\lambda$, $x = X\widehat{k}_\lambda$ ve $y = X^*\widehat{k}_\lambda$ alınır ve Aritmetik ve Geometrik ortalama eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \widetilde{X}(\lambda) \widetilde{Y}(\lambda) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 \\
&= \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle \widehat{k}_\lambda, Y^*\widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 \\
&\leq \frac{3}{4} \|X\widehat{k}_\lambda\|^2 \|Y^*\widehat{k}_\lambda\|^2 + \frac{1}{4} \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y^*\widehat{k}_\lambda\| |\langle X\widehat{k}_\lambda, Y^*\widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&= \frac{3}{4} \langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \frac{1}{4} \sqrt{\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle} |\langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&\leq \frac{3}{8} \left(\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle^2 + \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) |\langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\
&\leq \frac{3}{8} \left(\langle |X|^4 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |Y^*|^4 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) + \frac{1}{8} \langle (|X|^2 + |Y^*|^2) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle |\widetilde{YX}(\lambda)| \\
&= \frac{3}{8} \left(\langle (|X|^4 + |Y^*|^4) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) + \frac{1}{8} \left(\widetilde{|X|^2 + |Y^*|^2} \right)(\lambda) |\widetilde{BA}(\lambda)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$|\widetilde{X}(\lambda) \widetilde{Y}(\lambda)|^2 \leq \frac{3}{8} \left(\widetilde{|X|^4 + |Y^*|^4} \right)(\lambda) + \frac{1}{4} \left(\widetilde{|X|^2 + |Y^*|^2} \right)(\lambda) |\widetilde{YX}(\lambda)|$$

olur. Bu ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki ifade, Teorem 4.13'nin basit bir sonucudur.

Sonuç 4.14. $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun. O zaman

$$\text{ber}^4(Y^*X) \leq \frac{3}{8} \| |X|^8 + |Y|^8 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^4 + |Y|^4 \|_{\text{ber}} \text{ber}(|Y|^2 |X|^2) \quad (4.9)$$

elde edilir.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normleştirilmiş çekirdek üreten olsun. O zaman (4.8) eşitsizliğinde $X = |X|^2$ ve $Y = |Y|^2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |Y|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right)^2 \\
&\leq \frac{3}{8} \langle (|X|^8 + |Y|^8) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \frac{1}{8} \langle (|X|^4 + |Y|^4) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle |\langle |Y|^2 |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \quad (4.10)
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.1'den

$$\begin{aligned}
\left| \langle Y^* X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^4 &= \left| \langle X \widehat{k}_\lambda, Y \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^4 \\
&\leq \|X \widehat{k}_\lambda\|^4 \|Y^* \widehat{k}_\lambda\|^4 \\
&= \left(\langle X \widehat{k}_\lambda, X \widehat{k}_\lambda \rangle \langle Y \widehat{k}_\lambda, Y \widehat{k}_\lambda \rangle \right)^2 \\
&= \left(\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |Y|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right)^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Şimdi (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left| \langle Y^* X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^4 &\leq \frac{3}{8} \left(\langle |X|^8 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |Y|^8 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left\langle \left(|X|^4 + |Y|^4 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left| \langle |Y|^2 |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bundan dolayı, son eşitsizlikte λ üzerinden supremuma geçilirse

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle Y^* X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^4 &\leq \frac{3}{8} \sup_{\lambda \in \Omega} \left\langle \left(|X|^8 + |Y|^8 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{8} \sup_{\lambda \in \Omega} \left\langle \left(|X|^4 + |Y|^4 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left| \langle |Y|^2 |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|
\end{aligned}$$

ve böylece istenilen

$$\text{ber}^4(Y^*X) \leq \frac{3}{8} \| |X|^8 + |Y|^8 \|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \| |X|^4 + |Y|^4 \|_{\text{ber}} \text{ber}(|Y|^2 |X|^2),$$

eşitsizliği elde edilir. □

Huban vd. (2021a) çalışmasındaki Teorem 3.11'den eğer $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ ve $r \geq 1$ ise

$$\text{ber}^r(Y^*X) \leq \frac{1}{2} \| |X|^{2r} + |Y|^{2r} \|_{\text{ber}} \tag{4.12}$$

olur.

Not 4.15. Eğer (4.12) eşitsizliğinde $r = 4$ alınırsa o zaman Sonuç 4.14'den

$$\text{ber}^4(Y^*X) \leq \frac{1}{2} \| |X|^8 + |Y|^8 \|_{\text{ber}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi aşağıdaki eşitsizliği ispatlayalım.

Sonuç 4.16. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. O zaman

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(|X^*||X|) \quad (4.13)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. Teorem 4.13 de $X = |X|$ ve $Y = |X^*|$ alınır

$$\begin{aligned} & \left(\left\langle |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle |X^*| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right)^2 \\ & \leq \frac{3}{8} \left\langle \left(|X|^4 + |X^*|^4 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \frac{1}{8} \left\langle \left(|X|^2 + |X^*|^2 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left| \left\langle |X^*| |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. Diğer taraftan (3.3) eşitsizliğinden

$$\left| \left\langle X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^4 \leq \left(\left\langle |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle |X^*| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right)^2 \quad (4.15)$$

elde edilir. Şimdi, (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri kullanılarak $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınır

$$\begin{aligned} \left| \left\langle X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^4 & \leq \frac{3}{8} \left(\left\langle \left(|X|^4 + |X^*|^4 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right) \\ & + \frac{1}{8} \left(\left\langle \left(|X|^2 + |X^*|^2 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left| \left\langle |X^*| |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınır

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \left\langle X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^4 & \leq \frac{3}{8} \sup_{\lambda \in \Omega} \left(\left\langle \left(|X|^4 + |X^*|^4 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right) \\ & + \frac{1}{8} \sup_{\lambda \in \Omega} \left(\left\langle \left(|X|^2 + |X^*|^2 \right) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left| \left\langle |X^*| |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(|X^*||X|)$$

elde edilir. Böylece istenen (4.13) eşitsizliğini elde ederiz. $\square$

Sonuç 4.17. Herhangi $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için

$$\text{ber}(|X^*| |X|) \leq \frac{1}{2} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. Hilbert uzaydaki Schwarz eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \left| \left\langle |X^*| |X| \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| &= \left| \left\langle |X| \widehat{k}_\lambda, |X^*| \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \leq \left\| |X|^2 \widehat{k}_\lambda \right\| \left\| |X^*|^2 \widehat{k}_\lambda \right\| \\ &= \sqrt{\left\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle |X^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\langle (|X|^2 + |X^*|^2) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte λ üzerinden supremuma geçilirse

$$\text{ber}(|X^*| |X|) \leq \frac{1}{2} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \quad (4.16)$$

olur. Şimdi, (4.13) eşitsizliği, (4.16) ve (3.10) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{ber}^4(X) &\leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(|X^*| |X|) \\ &\leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{16} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}}^2 \\ &\leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{16} \left\| \left(\frac{2|X|^2 + 2|X^*|^2}{2} \right)^2 \right\|_{\text{ber}} \\ &\leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} \\ &= \frac{1}{2} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Bu sebeple, elde edilen (4.13) eşitsizliği $r = 2$ durumunda (3.30) eşitsizliğini iyileştirir.

Şimdi, iki operatörün toplamı için Berezin norm eşitsizliklerini ve ilgili bir Berezin yarıçap eşitsizliğini ifade edelim.

Teorem 4.18. $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun. Bu durumda

$$\text{ber}^2(X + Y) \leq \text{ber}^2(X) + \text{ber}^2(Y) + \|X\|_{\text{Ber}} \|Y\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(X)$$

olur.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. O zaman üçgen eşitsizliği ve (3.5) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \left| \langle (X + Y)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 &\leq \left(\left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \right)^2 \\ &= \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + 2 \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ &= \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + 2 \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \left| \langle \widehat{k}_\lambda, Y\widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ &\leq \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y\widehat{k}_\lambda\| + \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, Y\widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ &= \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y\widehat{k}_\lambda\| + \left| \langle Y^*X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\left| \langle (X + Y)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 \leq \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y\widehat{k}_\lambda\| + \left| \langle Y^*X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|$$

eşitsizliğini verir. Bu son eşitsizlikte her λ üzerinden supremuma geçilirse

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle (X + Y)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 &\leq \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \sup_{\lambda \in \Omega} \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y\widehat{k}_\lambda\| \\ &\quad + \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle Y^*X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı

$$\text{ber}^2(X + Y) \leq \text{ber}^2(X) + \text{ber}^2(Y) + \|X\|_{\text{Ber}} \|Y\|_{\text{Ber}} + \text{ber}(Y^*X)$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki teorem, iki operatörün toplamı için bir Berezin yarıçap eşitsizliğini verir.

Teorem 4.19. $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun.

$$\text{ber}^2(X+Y) = \text{ber}^2(X) + \text{ber}^2(Y) + \frac{1}{2} \left\| |X|^2 + |Y^*|^2 \right\|_{\text{ber}} + \text{ber}(YX) \quad (4.17)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. Üçgen eşitsizliği, aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği ve (3.5) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \langle (X+Y)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 \\ & \leq \left(\left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \right)^2 \\ & = \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + 2 \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \left| \langle \widehat{k}_\lambda, Y^*\widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ & \leq \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\lambda\| \|Y^*\widehat{k}_\lambda\| + \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, Y^*\widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ & \leq \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \sqrt{\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle} \\ & \quad + \left| \langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ & \leq \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left(\langle |X|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \langle |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right) \\ & \quad + \left| \langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \\ & = \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \langle |X|^2 + |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \left| \langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \end{aligned}$$

olur. Her $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle (X+Y)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 & \leq \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle X\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 + \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle Y\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sup_{\lambda \in \Omega} \langle |X|^2 + |Y^*|^2 \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle + \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \langle YX\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\text{ber}^2(X+Y) \leq \text{ber}^2(X) + \text{ber}^2(Y) + \frac{1}{2} \left\| |X|^2 + |Y^*|^2 \right\|_{\text{ber}} + \text{ber}(YX)$$

elde edilir. Bu sebeple arzu edilen (4.17) eşitsizliği oluşur. $\square$

Şimdi, $\text{ber}(X) \leq \|X\|$ 'daki eşitsizliğin yeni iyileştirmesini sunmaya hazırız.

Sonuç 4.20. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\text{ber}^2(X) \leq \frac{1}{4} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{2} \text{ber}(X^2) \quad (4.18)$$

olur.

İspat. $\mathcal{H}(\Omega)$ uzayının normalleştirilmiş çekirdek üreteni $\widehat{k}_\lambda$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun. İlk olarak

$$\text{ber}(X) = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \text{Re}(e^{i\gamma} X) \right\|_{\text{ber}} \quad (4.19)$$

olduğuna dikkat edelim.

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{Re} \left\{ e^{i\gamma} \langle X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right\} = \left| \langle X \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \right|$$

olduğundan

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \text{Re}(e^{i\gamma} X) \right\|_{\text{ber}} = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}(\text{Re}(e^{i\gamma} X)) = \text{ber}(X)$$

elde edilir. O zaman (4.19)'dan

$$\begin{aligned} \text{ber}(X) &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \text{Re}(e^{i\gamma} X) \right\|_{\text{ber}} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| e^{i\gamma} X + e^{-i\gamma} X^* \right\|_{\text{ber}} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| (e^{i\gamma} X + e^{-i\gamma} X^*)^2 \right\|_{\text{ber}}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 + 2 \text{Re}(e^{2i\gamma} X^2) \right\|_{\text{ber}}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} + 2 \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\| \text{Re}(e^{2i\gamma} X^2) \right\|_{\text{ber}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} + 2 \text{ber}(X^2)} \end{aligned}$$

olur. Bu ise (4.18) deki eşitsizliği ispatlar. Böylece istenilen eşitsizlik elde edilir. $\square$

4.3. Geometrik Dışbükeyliğe Göre Berezin Sayı Eşitsizliği

Bu kısımda, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayı operatörleri üzerindeki Berezin yarıçap eşitsizlikleri için yeni eşitsizlikleri ispatlamak ve literatürde bilinen bazı eşitsizliklerin genel şeklini

sunmak için (3.2) eşitsizliği, (3.7) Young eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 3.10'un sonuçları uygulanarak, bu eşitsizliklere yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır.

Teorem 4.21. $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör ve f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. Eğer f bir dışbükey ise

$$f(\text{ber}(B^*A)) \leq \frac{1}{2} \|f(A^*A) + f(B^*B)\|_{\text{ber}} \quad (4.20)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği, (3.12) ve (3.13) eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} f\left(\left|\left\langle B^*A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &= f\left(\left|\left\langle A\hat{k}_\lambda, B\hat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \leq f\left(\left\|A\hat{k}_\lambda\right\| \left\|B\hat{k}_\lambda\right\|\right) \\ &= f\left(\sqrt{\left\langle A\hat{k}_\lambda, A\hat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle B\hat{k}_\lambda, B\hat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\ &= f\left(\sqrt{\left\langle A^*A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle B^*B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\ &\leq \sqrt{f\left(\left\langle A^*A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right) f\left(\left\langle B^*B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right)} \\ &\leq \sqrt{\left\langle f(A^*A)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle f(B^*B)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left\langle f(A^*A)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle + \left\langle f(B^*B)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\langle (f(A^*A) + f(B^*B))\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı, her $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınarak

$$\begin{aligned} f(\text{ber}(B^*A)) &\leq f\left(\sup_{\eta \in \Omega} \left|\left\langle B^*A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \\ &= \sup_{\eta \in \Omega} f\left(\left|\left\langle B^*A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\eta \in \Omega} \left\langle (f(A^*A) + f(B^*B))\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \|f(A^*A) + f(B^*B)\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. □

Şimdi çift indisli dışbükey fonksiyonları tanımlayabiliriz (Bourin ve Hiai, 2014, Örnek 2.12). Eğer

1. Pozitif $Q \subset [0, \infty)$ $f(t)$ aralığı üzerinde tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyon,
 2. $f(t)$ dışbükey ve
 3. $f(t)$ geometrik dışbükey, yani, her $x, y \in Q$ için $f(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}$
- koşulları sağlanırsa $f(t)$ fonksiyonuna çift indisli dışbükey denir. $f(t) = t^r$ ($r \geq 1$) fonksiyonu çift indisli dışbükey fonksiyon olsun. O zaman (4.20) eşitsizliğinden (3.34) durumu elde edilir.

Sonuç 4.22. $A, B, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ üç operatör ve f ise bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. Eğer ek olarak f bir dışbükey ise o zaman

$$f(\text{ber}(ASB)) \leq \frac{1}{2} \|f(A|S^*|A^*) + f(B^*|S|B)\|_{\text{ber}}$$

olur.

İspat. $\hat{k}_\lambda$ normleştirilmiş çekirdek üreten ve $X = U|S|$, S nin kutupsal ayrışımı olsun. O zaman

$$f(\text{ber}(ASB)) = f(\text{ber}(AU|S|B)) = f\left(\text{ber}\left(\left(|S|^{1/2}U^*A^*\right)^*\left(|S|^{1/2}B\right)\right)\right)$$

dir. Teorem 4.21’de $B = |S|^{1/2}U^*A^*$ ve $A = |S|^{1/2}B$ alınırsa $S = U|S|$, S nin kutupsal ayrışımı olduğunda $|S^*| = U|S|U^*$ yazılabileceğinden istenilen eşitsizlik elde edilir.

□

$f(\text{ber}(ASB))$ için diğer eşitsizlik aşağıdaki gibi elde edilebilir. İlk olarak, eğer f bir dışbükey fonksiyon ve $\alpha \leq 1$ ise

$$f(\alpha t) \leq \alpha f(t) + (1 - \alpha)f(0) \quad (4.21)$$

olduğuna dikkat edelim. Burada $g(t) = f(\alpha t) - \alpha f(t)$ fonksiyonu için bazı kalkülüs hesaplamaları ile kolayca elde edilir.

Birleştirme sonuçları için, norm-büzülme terimini, Berezin normu $\|S\|_{\text{ber}} \leq 1$ ifadesini karşılayan bir S operatörü anlamında kullanacağız.

Önerme 4.23. $A, B, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ üç operatör ve f ise bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. S norm-büzüşmesi için

$$(i) f(\text{ber}(B^*SA)) \leq \|S\|_{\text{ber}} f(\|A\|_{\text{Ber}} \|B\|_{\text{Ber}}) + (1 - \|S\|_{\text{ber}}) f(0).$$

$$(ii) f(0) = 0 \text{ ise } f(\text{ber}(B^*SA)) \leq \|S\|_{\text{ber}} f(\|A\|_{\text{Ber}} \|B\|_{\text{Ber}})$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $\widehat{k}_\lambda$ normleştirilmiş çekirdek üreten olsun. Teorem 4.21'deki ispatları kullanarak ve (4.21) eşitsizliğini dikkate alarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f\left(\left|\left\langle B^*SA\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &= f\left(\left|\left\langle SA\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \\ &\leq f\left(\left\|SA\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}} \left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) \\ &\leq f\left(\|S\|_{\text{ber}} \left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}} \left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) \\ &\leq \|S\|_{\text{ber}} f\left(\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}} \left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) + (1 - \|S\|_{\text{ber}}) f(0) \end{aligned}$$

ve

$$\sup_{\eta \in \Omega} f\left(\left|\left\langle B^*SA\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \leq \sup_{\eta \in \Omega} \left\{ \|S\|_{\text{ber}} f\left(\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}} \left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) + (1 - \|S\|_{\text{ber}}) f(0) \right\}$$

elde edilir. Bu ise

$$f(\text{ber}(B^*SA)) \leq \|S\|_{\text{ber}} f(\|A\|_{\text{Ber}} \|B\|_{\text{Ber}}) + (1 - \|S\|_{\text{ber}}) f(0)$$

ifadesine denk olup (i)'in ispatı tamamlanmıştır. $f(0) = 0$ alınırsa (ii) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Özel durumda eğer $f(t) = t^r$ alınırsa (3.33) eşitsizliğinin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilir.

Sonuç 4.24. $A, B, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ üç operatör olsun. Eğer S norm-büzüşmesi ve $r \geq 1$ ise o zaman

$$\text{ber}^r(B^*SA) \leq \frac{\|S\|_{\text{ber}}^r}{2} \|(A^*A)^r + (B^*B)^r\|_{\text{ber}} \quad (4.22)$$

olur.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. $f(t) = t^r$ fonksiyonu için Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (3.14) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
f\left(\left|\left\langle B^*SA\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) &= f\left(\left|\left\langle SA\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \\
&\leq f\left(\left\|SA\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) \\
&\leq f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) \\
&\leq f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)f\left(\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\left\|B\widehat{k}_\lambda\right\|_{\text{ber}}\right) \\
&= f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)f\left(\sqrt{\left\langle A\widehat{k}_\lambda, A\widehat{k}_\lambda \right\rangle\left\langle B\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda \right\rangle}\right) \\
&\leq f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)\sqrt{f\left(\left\langle A^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right)f\left(\left\langle B^*B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right)} \\
&\leq f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)\sqrt{\left\langle f(A^*A)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\left\langle f(B^*B)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle} \\
&\leq f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)\frac{1}{2}\left(\left\langle f(A^*A)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \left\langle f(B^*B)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right) \\
&= f\left(\left\|S\right\|_{\text{ber}}\right)\frac{1}{2}\left\langle (f(A^*A) + f(B^*B))\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple

$$\left|\left\langle B^*SA\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|^r \leq \frac{1}{2}\|S\|_{\text{ber}}^r \left\langle (A^*A)^r + (B^*B)^r \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle$$

olur. Bu son eşitsizlikte her λ üzerinden supremuma geçilirse, istenilen

$$\text{ber}^r(B^*SA) \leq \frac{\|S\|_{\text{ber}}^r}{2} \|(A^*A)^r + (B^*B)^r\|_{\text{ber}}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Bir sonraki hedefimiz, dışbükey yerine içbükey olan geometrik olarak dışbükey fonksiyonlar için benzer eşitsizlikleri göstermektir.

Teorem 4.25. $0 \leq m \leq A, B \leq M$ olacak şekilde $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör ve f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. Eğer f içbükey ise, o zaman S

norm-genişletici, yani $\|S\| \geq 1$ olmak üzere herhangi $\lambda \in \Omega$ için

$$f\left(\text{ber}\left(A^{1/2}SB^{1/2}\right)\right) \leq \frac{k(m,M,f)}{2} \|S\|_{\text{ber}} \|f(A) + f(B)\|_{\text{ber}} \quad (4.23)$$

olur.

İspat. Keyfi $\lambda \in \Omega$ olsun. Önerme 4.23, (3.14) eşitsizliği ve f içbükey ve $\alpha \geq 1$ olduğunda $f(\alpha t) \leq \alpha f(t)$ eşitsizliği kullanılarak istenilen eşitsizlik elde edilir. $\square$

Not 4.26. Özel durumda $f(t) = t^r$, $0 < r \leq 1$ fonksiyonu Teorem 4.25'nin koşullarını sağlar. Diğer taraftan

$$f(\|S\|_{\text{ber}} \|A\|_{\text{Ber}} \|B\|_{\text{Ber}}) = f(\|S\|_{\text{ber}}) f(\|A\|_{\text{Ber}} \|B\|_{\text{Ber}})$$

olur. Buradan $0 \leq m \leq A$, $B \leq M$ koşulunu sağlayan A , B pozitif operatörleri ve S norm-genişletici için

$$\text{ber}\left(A^{1/2}SB^{1/2}\right) \leq \left(\frac{k(m,M,f)}{2}\right)^{1/r} \|S\|_{\text{ber}} \|A^r + B^r\|_{\text{Ber}}^{1/2}$$

elde edilir.

Huban vd. (2021d) çalışması ve (Huban vd., 2022b, Teorem 3.7)'den $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$, $0 < \alpha < 1$ ve $r \geq 1$ ise

$$\text{ber}^r(X + Y) \leq 2^{r-2} \left(\left\| |X|^{2\alpha r} + |Y|^{2\alpha r} \right\|_{\text{ber}} + \left\| |X^*|^{2(1-\alpha)r} + |Y^*|^{2(1-\alpha)r} \right\|_{\text{ber}} \right) \quad (4.24)$$

olur.

Aşağıdaki sonucumuz (4.24) eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.27. $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör ve f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. Eğer f dışbükey ise bu durumda keyfi $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f\left(\left\| \frac{A+B}{2} \right\|_{\text{Ber}}\right) \leq \frac{1}{4} \left\| f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha}) \right\|_{\text{ber}}$$

$$+ \frac{1}{4} \left\| f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)}) \right\|_{\text{ber}} \quad (4.25)$$

ve

$$f\left(\text{ber}\left(\frac{A+B}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{4} (\|f(|A|) + f(|A^*|) + f(|B|) + f(|B^*|)\|_{\text{ber}}) \quad (4.26)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\lambda, \mu \in \Omega$ olsun. O zaman aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği, (3.2) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2} \left| \langle (A+B)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \right| \right) \\ & \leq f\left(\frac{1}{2} \left(\left| \langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \right| + \left| \langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \right| \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(f\left(\left| \langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \right| \right) + f\left(\left| \langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \right| \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{2} f\left(\sqrt{\langle |A|^{2\alpha} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \langle |A^*|^{2(1-\alpha)} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} f\left(\sqrt{\langle |B|^{2\alpha} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle \langle |B^*|^{2(1-\alpha)} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \rangle} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \sqrt{f\left(\langle |A|^{2\alpha} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle\right) f\left(\langle |A^*|^{2(1-\alpha)} \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \rangle\right)} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sqrt{f\left(\langle |B|^{2\alpha} \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle\right) f\left(\langle |B^*|^{2(1-\alpha)} \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \rangle\right)} \\ & \leq \frac{1}{2} \sqrt{\langle f(|A|^{2\alpha}) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \rangle} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sqrt{\langle f(|B|^{2\alpha}) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \langle f(|B^*|^{2(1-\alpha)}) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \rangle} \\ & \leq \frac{1}{4} \langle (f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha})) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \\ & \quad + \frac{1}{4} \langle (f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)})) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Özel durumda $\lambda = \mu$ için

$$\begin{aligned} f\left(\left\| \frac{A+B}{2} \widehat{k}_\lambda \right\| \right) & \leq \frac{1}{4} \langle (f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha})) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \\ & \quad + \frac{1}{4} \langle (f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)})) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte her $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa istenilen

$$\begin{aligned} f\left(\left\|\frac{A+B}{2}\right\|_{\text{Ber}}\right) &\leq \frac{1}{4}\left\|f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha})\right\|_{\text{ber}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left\|f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)})\right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda = \mu$ için aynı işlemler uygulanırsa

$$f\left(\frac{1}{2}\left|\left\langle (A+B)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \leq \frac{1}{4}\left\langle \left(f(|A| + f(|A^*|) + f(|B|)\widehat{k} + f(|B^*|))\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle$$

ve

$$\begin{aligned} &\sup_{\eta \in \Omega} f\left(\frac{1}{2}\left|\left\langle (A+B)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|\right) \\ &\leq \sup_{\eta \in \Omega} \frac{1}{4}\left\langle \left(f(|A| + f(|A^*|) + f(|B|)\widehat{k} + f(|B^*|))\right)\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \end{aligned}$$

olup

$$f\left(\text{ber}\left(\frac{A+B}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{4}(\|f(|A|) + f(|A^*|) + f(|B|) + f(|B^*|)\|_{\text{ber}})$$

eşitsizliğine denktir. Böylece istenilen eşitsizliği elde ederiz. $\square$

Not 4.28. $A = B$ alındığında üstte elde edilen Berezin sayı eşitsizliği (4.24) durumuna indirgenir.

Şimdi, Teorem 4.27'in içbükey versiyonunu vereceğiz.

Teorem 4.29. $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör $\alpha \in [0, 1]$ ve f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. pozitif skaler m, M için

$$m \leq |A|^{2\alpha}, |A^*|^{2(1-\alpha)}, |B|^{2\alpha}, |B^*|^{2(1-\alpha)} \leq M$$

olduğunu kabul edelim. Eğer f içbükey ise o zaman $K = k(m, M, f)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &f(\text{ber}(A+B)) \\ &\leq \frac{K}{2}\left(\left\|f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha})\right\|_{\text{ber}} + \left\|f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)})\right\|_{\text{ber}}\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

ve

$$f(\text{ber}(A+B)) \leq \frac{K}{2} (\|f(|A|) + f(|A^*|) + f(|B|) + f(|B^*|)\|_{\text{ber}}) \quad (4.28)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\eta, \mu \in \Omega$ olsun. O zaman (3.2) ve (3.14) eşitsizlikleri ile aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & f\left(\left|\left\langle (A+B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right|\right) \\ & \leq f\left(\left|\left\langle A\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right| + \left|\left\langle B\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right|\right) \\ & \leq \left(f\left(\left|\left\langle A\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right|\right) + f\left(\left|\left\langle B\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right|\right)\right) \\ & \leq f\left(\sqrt{\left\langle |A|^{2\alpha}\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle}\right) \\ & \quad + f\left(\sqrt{\left\langle |B|^{2\alpha}\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle |B^*|^{2(1-\alpha)}\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle}\right) \\ & \leq \left(\sqrt{f\left(\left\langle |A|^{2\alpha}\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) f\left(\left\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right)}\right) \\ & \quad + \left(\sqrt{f\left(\left\langle |B|^{2\alpha}\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) f\left(\left\langle |B^*|^{2(1-\alpha)}\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right)}\right) \\ & \leq K\left(\sqrt{\left\langle f\left(|A|^{2\alpha}\right)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle f\left(|A^*|^{2(1-\alpha)}\right)\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle}\right) \\ & \quad + K\left(\sqrt{\left\langle f\left(|B|^{2\alpha}\right)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle f\left(|B^*|^{2(1-\alpha)}\right)\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle}\right) \\ & \leq \frac{K}{2}\left\langle \left(f\left(|A|^{2\alpha}\right) + f\left(|B|^{2\alpha}\right)\right)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \\ & \quad + \frac{K}{2}\left\langle \left(f\left(|A^*|^{2(1-\alpha)}\right) + f\left(|B^*|^{2(1-\alpha)}\right)\right)\widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\eta = \mu$ ile her $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \in \Omega} f\left(\left|\left\langle (A+B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right|\right) & \leq \sup_{\eta \in \Omega} \frac{K}{2} \left\langle \left(f\left(|A|^{2\alpha}\right) + f\left(|B|^{2\alpha}\right)\right)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \\ & \quad + \sup_{\eta \in \Omega} \frac{K}{2} \left\langle \left(f\left(|A^*|^{2(1-\alpha)}\right) + f\left(|B^*|^{2(1-\alpha)}\right)\right)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \end{aligned}$$

olup buradan istenilen

$$\begin{aligned} f(\text{ber}(A+B)) &\leq \frac{K}{2} \left\| f(|A|^{2\alpha}) + f(|B|^{2\alpha}) \right\|_{\text{ber}} \\ &\quad + \frac{K}{2} \left\| f(|A^*|^{2(1-\alpha)}) + f(|B^*|^{2(1-\alpha)}) \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Özel durumda eğer $f(t) = t^r$, $0 \leq r \leq 1$, ise

$$\begin{aligned} &\text{ber}^r(A+B) \\ &\leq \frac{h-h^r}{2(1-r)(h-1)} \left(\frac{1-r}{r} \frac{h^r-1}{h-h^r} \right)^r \left\| |A|^{2\alpha r} + |B|^{2\alpha r} \right\|_{\text{ber}} \\ &\quad + \frac{h-h^r}{2(1-r)(h-1)} \left(\frac{1-r}{r} \frac{h^r-1}{h-h^r} \right)^r \left\| |A^*|^{2(1-\alpha)r} + |B^*|^{2(1-\alpha)r} \right\|_{\text{ber}} \end{aligned}$$

olur. Burada $h = \frac{m}{M}$ dir.

Huban vd. (2022b) çalışmasındaki Teorem 3.3'den $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$, $0 < \alpha < 1$ ve $r \geq 1$ ise o zaman

$$(\text{ber}(A))^{2r} \leq \left\| \alpha |A|^{2r} + (1-\alpha) |A^*|^{2r} \right\|_{\text{ber}} \quad (4.29)$$

olur.

Şimdi, Young eşitsizliğinin iyileştirmelerini uygulayarak (4.29) eşitsizliğinin bazı iyileştirmelerini elde ediyoruz. Bu sonuçta, $\eta \in \Omega$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir içbükey fonksiyon ve A, I 'da spektrum ile kendine eş olduğunda, eşitsizliğin içbükey versiyonunu (3.13) kullanacağız.

Teorem 4.30. $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve f , Teorem 4.21'deki gibi olsun. O zaman

$$f(\text{ber}^2(A)) \leq \left\| \alpha f(|A|^2) + (1-\alpha) f(|A^*|^2) \right\|_{\text{ber}} \quad (4.30)$$

olur.

İspat. Keyfi $\eta \in \Omega$ olsun. O zaman (3.2), (3.12), (3.13), Young eşitsizliği ve f 'nin monotonluğunu kullanarak

$$\begin{aligned}
f\left(\left|\left\langle \widehat{A} \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right|^2\right) &\leq f\left(\left\langle |A|^{2\alpha} \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle |A^*|^{2(1-\alpha)} \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \\
&\leq f\left(\left\langle |A|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha \left\langle |A^*|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{(1-\alpha)}\right) \\
&\leq f^\alpha\left(\left\langle |A|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) f^{(1-\alpha)}\left(\left\langle |A^*|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \\
&\leq \alpha f\left(\left\langle |A|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) + (1-\alpha) f\left(\left\langle |A^*|^2 \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \\
&\leq \alpha \left\langle \left(f|A|^2\right) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle + (1-\alpha) \left\langle f\left(|A^*|^2\right) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\eta \in \Omega$ için

$$\sup_{\eta \in \Omega} f\left(\left|\widetilde{A}(\eta)\right|^2\right) \leq \sup_{\eta \in \Omega} \left(\alpha \left\langle \left(f|A|^2\right) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle + (1-\alpha) \left\langle f\left(|A^*|^2\right) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right)$$

ve

$$f(\text{ber}^2(A)) \leq \left\| \alpha f\left(|A|^2\right) + (1-\alpha) f\left(|A^*|^2\right) \right\|_{\text{ber}}$$

olup istenilen (4.30) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Young eşitsizliğinin iyileştirmelerini kullanarak (3.26)'nın bazı iyileştirmelerini vereceğiz.

Teorem 4.31. $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$, f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $r = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$ olsun. Eğer f bir dışbükey fonksiyon ise o zaman

$$f(\text{ber}(A)) \leq \frac{1-2r}{2} \|f(|A|) + f(|A^*|)\|_{\text{ber}} + 2r \|f(|A|)\|_{\text{ber}} \quad (4.31)$$

olur.

İspat. Keyfi $\eta \in \Omega$ olsun. O zaman (3.2) eşitsizliği, aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği, (3.12) eşitsizliği ve (3.7) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&f\left(\left|\left\langle \widehat{A} \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right|\right) \\
&\leq f\left(\sqrt{\left\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f \left(\left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha \right)^{1/2} \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha \right)^{1/2} \right) \\
&\leq f \left(\frac{1}{2} \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha + \langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha \right) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(f \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha \right) + \frac{1}{2} f \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^{1-\alpha} \langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle^\alpha \right) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} f^{1-\alpha} \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) f^\alpha \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) + \frac{1}{2} f^{1-\alpha} \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) f^\alpha \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) \\
&\leq \frac{1-\alpha}{2} f \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) + \frac{\alpha}{2} f \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) \\
&\quad - \frac{r}{2} \left(\sqrt{f \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right)} - \sqrt{f \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right)} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{2} f \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) + \frac{\alpha}{2} f \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right) \\
&\quad - \frac{r}{2} \left(\sqrt{f \left(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right)} - \sqrt{f \left(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\langle (f(|A|) + f(|A^*|)) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle - r \left\langle (f(|A|) + f(|A^*|)) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \\
&\quad + 2r \sqrt{\left\langle f(|A|) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle f(|A^*|) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$f \left(\left| \widetilde{A}(\eta) \right| \right) \leq \frac{1-2r}{2} \left\langle (f(|A|) + f(|A^*|)) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle + 2r \left\langle f(|A|) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle$$

olur. Bu son eşitsizlikte her η üzerinden supremuma geçilirse

$$\sup_{\eta \in \Omega} f \left(\left| \widetilde{A}(\eta) \right| \right) \leq \frac{1-2r}{2} \sup_{\eta \in \Omega} \left\langle (f(|A|) + f(|A^*|)) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle + 2r \sup_{\eta \in \Omega} \left\langle f(|A|) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle$$

ve buradan

$$f(\text{ber}(A)) \leq \frac{1-2r}{2} \|f(|A|) + f(|A^*|)\|_{\text{ber}} + 2r \|f(|A|)\|_{\text{ber}}$$

eşitsizliği bulunur. O halde istenilen (4.31) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Not 4.32. Teorem 4.31’da $f(t) = t$ alınırsa (Yamancı ve Karlı, 2021, Teorem 2.6)’nın sonucu olan

$$\text{ber}(A) \leq \frac{1-2r}{2} \| |A| + |A^*| \|_{\text{ber}} + 2r \| |A| \|_{\text{ber}}$$

bulunur.

Aşağıdaki teoremden hipernormal operatörler için (4.29) eşitsizliğinin iyileştirilmesi verilmiştir. Burada eğer $A^*A - AA^* \geq 0$, veya denk olarak keyfi $u \in \mathcal{H}$ için $\|A^*u\| \leq \|Au\|$ ise bu durumda $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörüne hipernormal operatör denildiğini hatırlayalım.

Teorem 4.33. *f bir artan geometrik dışbükey fonksiyon olsun. Eğer $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ hipernormal, $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $r = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ ise bu durumda*

$$f(\text{ber}(A)) \leq \frac{1}{\inf_{\eta \in \Omega} \xi(\eta)} \frac{\|f(|A|) + f(|A^*|)\|_{\text{ber}}}{2}$$

olur. Burada $\xi(\eta) = K_1 \left(\frac{f(\widetilde{|A|}(\eta))}{f(\widetilde{|A^*|}(\eta))}, 2 \right)^r$ dir.

İspat. Keyfi $\eta \in \Omega$ olsun. O zaman (3.2) eşitsizliği, aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği, (3.12) eşitsizliği ve (3.9) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & f\left(\left|\left\langle A\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right|\right) \\ & \leq f\left(\sqrt{\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle \left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle}\right) \\ & \leq f\left(\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha\right)^{1/2} \left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha\right)^{1/2}\right) \\ & \leq f\left(\frac{1}{2} \left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha + \left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha\right)\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(f\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha\right) + f\left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^{1-\alpha} \left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle^\alpha\right)\right) \\ & \leq \frac{1}{2} f^{1-\alpha}\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) f^\alpha\left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) + \frac{1}{2} f^{1-\alpha}\left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) f^\alpha\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_1 \left(\frac{f(\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}{f(\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}, 2 \right)^r} \left((1-\alpha) f\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) + \alpha f\left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_1 \left(\frac{f(\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}{f(\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}, 2 \right)^r} \left((1-\alpha) f\left(\left\langle |A|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) + \alpha f\left(\left\langle |A^*|\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \right\rangle\right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_1 \left(\frac{f(\langle |A| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}{f(\langle |A^*| \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle)}, 2 \right)^r} \langle (f(|A^*|) + f(|A|)) \widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta \rangle \right]$$

elde edilir. Her $\eta \in \Omega$ üzerinden üstteki eşitsizlikte supremum alınırsa

$$\sup_{\eta \in \Omega} f \left(\left| \widetilde{|A|}(\eta) \right| \right) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\inf_{\eta \in \Omega} \xi(\eta)} \sup_{\eta \in \Omega} \left((f(|A|) + f(|A^*|))(\eta) \right) \right]$$

ve böylece $\xi(\eta) = K_1 \left(\frac{f(\widetilde{|A|}(\eta))}{f(\widetilde{|A^*|}(\eta))}, 2 \right)^r$ olmak üzere

$$f(\text{ber}(A)) \leq \frac{1}{\inf_{\eta \in \Omega} \xi(\eta)} \frac{\|f(|A|) + f(|A^*|)\|_{\text{ber}}}{2}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. $\square$

Not 4.34. Teorem 7’de $f(t) = t$ alınırsa (Yamancı ve Karlı, 2021, Teorem 2.6)’nın sonucu olan

$$\text{ber}(A) \leq \frac{1}{\inf_{\eta \in \Omega} K_1 \left(\left(\frac{\widetilde{|A|}(\eta)}{\widetilde{|A^*|}(\eta)} \right)^n, 2 \right)^r} \frac{\||A| + |A^*|\|_{\text{ber}}}{2}$$

elde edilir.

4.4. Davis-Wielandt-Berezin Yarıçapları İçin Alt Ve Üst Sınırlar

Bu kısımda, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert fonksiyon uzayında X operatörü için

$$\max \left\{ \text{ber}(X), \|X\|_{\text{ber}}^2 \right\} \leq \text{dwb}(X) \leq \sqrt{\text{ber}^2(X) + \|X\|_{\text{ber}}^4}, \quad (4.32)$$

formülü ile Davis-Wielandt-Berezin yarıçap $\text{dwb}(X)$ ’nın özelliklerini inceleyeceğiz.

Burada $\text{dwb}(X) := \sup \left\{ \sqrt{\left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|^4} : \rho \in \Omega \right\}$ dır. Yukarıda belirtilen Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için alt sınırların eşitliğini incelenmiştir. Daha sonra çekirdek üreten Hilbert uzay operatörlerinin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı

üst ve alt sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.

Tanım 4.35. Herhangi $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için operatörün Davis-Wielandt-Berezin kabuğu ve Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı sırasıyla

$$\text{DWB}(X) := \left\{ \left(\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle, \|X\hat{k}_\rho\|^2 \right), \rho \in \Omega \right\}$$

ve

$$\text{dwb}(X) := \sup_{\rho \in \Omega} \sqrt{|\tilde{X}(\rho)|^2 + \|X\hat{k}_\rho\|^4}$$

formülleri ile verilir.

Kolayca $\text{dwb}(X) \leq dw(X)$ olduğu gözlemlenebilir. $X, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için

(i) $\text{dwb}(X) \geq 0$ ve $\text{dwb}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$;

$$(ii) \text{dwb}(\varsigma X) \begin{cases} \geq |\varsigma| \text{dwb}(X) & \text{eğer } |\varsigma| > 1 \text{ ise} \\ = |\varsigma| \text{dwb}(X) & \text{eğer } |\varsigma| = 1 \text{ ise} \\ \leq |\varsigma| \text{dwb}(X) & \text{eğer } |\varsigma| < 1 \text{ ise} \end{cases} ;$$

$$(iii) \text{dwb}(X+B) \leq \sqrt{2 \left(\text{dwb}(X) + \text{dwb}(B) + 4(\text{dwb}(X) + \text{dwb}(B))^2 \right)}$$

özelliklerine sahibiz. Bu sebeple $\text{dwb}(\cdot)$, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ üzerinde bir norm olmayabilir. $\text{dwb}(\cdot)$ nin aşağıdaki özelliği kolayca elde edilebilir:

$$\max \left\{ \text{ber}(X), \|X\|_{\text{ber}}^2 \right\} \leq \text{dwb}(X) \leq \sqrt{\text{ber}^2(X) + \|X\|_{\text{ber}}^4}. \quad (4.33)$$

Çalışmamıza aşağıdaki sonuçla başlıyoruz.

Teorem 4.36. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizler sağlanır:

$$(a) \text{dwb}^2(X) \geq \max \left\{ \text{ber}^2(X) + \tilde{c}^2(X^*X), \|X\|_{\text{Ber}}^4 + \tilde{c}^2(X) \right\},$$

$$(b) \text{dwb}^2(X) \geq 2 \max \left\{ \text{ber}(X) \tilde{c}(X^*X), \tilde{c}(X) \|X\|_{\text{Ber}}^2 \right\}.$$

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \text{dwb}^2(X) &\geq \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 = \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\langle X^* X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^2 \\ &\geq \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \inf_{\rho \in \Omega} \left\langle X^* X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^2 \\ &= \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \tilde{c}^2 \langle X^* X \rangle \end{aligned}$$

olup her $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\text{dwb}^2(X) \geq \text{ber}^2(X) + \tilde{c}^2(X^* X)$$

elde edilir. $\text{dwb}^2(X) \geq \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4$ koşulundan

$$\text{dwb}^2(X) \geq \tilde{c}^2(X) + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4$$

olur. Böylece her ρ üzerinden üstteki eşitsizlikte supremuma geçilirse

$$\text{dwb}^2(X) \geq \tilde{c}^2(X) + \|X\|_{\text{Ber}}^4$$

elde edilir. Bu ise (a) durumunu verir. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. O zaman

$$\left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 \geq 2 \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right| \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^2 \quad (4.34)$$

ve bu sebeple

$$\begin{aligned} \text{dwb}^2(X) &\geq 2 \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right| \left\langle X^* X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ &\geq 2 \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right| \inf_{\rho \in \Omega} \left\langle X^* X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ &= 2 \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right| \tilde{c}(X^* X) \end{aligned}$$

ve

$$\text{dwb}^2(X) \geq 2\text{ber}(X) \tilde{c}(X^* X)$$

olur. (4.34) eşitsizliğinden

$$\text{dwb}^2(X) \geq 2\tilde{c}(X) \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2$$

ve her ρ üzerinden bu eşitsizlikte supremuma geçilirse

$$\text{dwb}^2(X) \geq 2\tilde{c}(X) \|X\|_{\text{Ber}}^2$$

eşitsizliği elde edilir. □

Not 4.37. Teorem 4.36 (a)'da elde edilen eşitsizliğin (4.33)'deki birinci eşitsizliği iyileştirdiği açıktır. Aynı zamanda, eğer $\tilde{c}(X) > \frac{\|X\|_{\text{Ber}}^2}{2}$ ve $\text{ber}(X) \leq \|X\|_{\text{Ber}}^2$ ise o zaman Teorem 4.36 (b)'deki eşitsizliğin (4.33)'deki ilk eşitsizlikten daha keskin olduğunu görmek kolaydır.

$X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için

$$m_{\text{ber}}^2(X) := \inf_{\rho \in \Omega} \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2$$

ifadesini tanımlayalım.

Bir sonraki sonuçta, çekirdek üreten Hilbert uzayı üzerinde sınırlı doğrusal operatörlerin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 4.38. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\text{dwb}^2(X) \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X) - 2\tilde{c}(X) m_{\text{ber}}^2(X)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. O zaman

$$\left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right| = e^{i\gamma} \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Şimdi

$$\begin{aligned}
& \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\
&= \langle e^{i\gamma}X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle^2 + \langle X^*X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle^2 \\
&= \left(\langle e^{i\gamma}X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle + \langle X^*X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right)^2 - 2 \langle e^{i\gamma}X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \langle X^*X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
& 2 \langle e^{i\gamma}X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \langle X^*X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle + \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\
&= \langle (e^{i\gamma}X + X^*X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle^2 \leq \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X)
\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| \left| \langle X^*X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| + \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\
&\leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X),
\end{aligned}$$

ve

$$2\widetilde{c}(X)m_{\text{ber}}^2(X) + \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X)$$

elde edilir. Buradan

$$\text{dwb}^2(X) \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X) - 2\widetilde{c}(X)m_{\text{ber}}^2(X)$$

olur. Bu ispatı tamamlar. □

Not 4.39. Tapdigoglu vd. (2021)'de verilen Teorem 1'deki eşitsizlik

$$\text{dwb}^2(X) \leq \text{ber}^2(|X|^2 - X) + 2\|X\|_{\text{Ber}}^2 \text{ber}(X)$$

olduğunu ifade eder. Buradan Teorem 4.38'de elde edilen $\text{dwb}(X)$ nın üst sınırının (Tapdigoglu vd. (2021), Teorem 1) çalışmasında elde edilen sonuçtan daha iyi olduğunu gösterir.

Teorem 4.40. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \{ \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X) + \tilde{c}^2(e^{i\gamma}X - X^*X) \} \\ & \leq \text{dwb}^2(X) \\ & \leq \frac{1}{2} \{ \text{ber}^2(X + X^*X) + \text{ber}^2(X - X^*X) \} \end{aligned}$$

olur.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. O zaman

$$\left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| = e^{i\gamma} \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Böylece,

$$\begin{aligned} & \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| + \langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| - \langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\langle (e^{i\gamma}X + X^*X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left\langle (e^{i\gamma}X - X^*X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 \end{aligned}$$

ve

$$\left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \geq \frac{1}{2} \left(\left\langle (e^{i\gamma}X + X^*X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{c}^2(e^{i\gamma}X - X^*X)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \sup_{\rho \in \Omega} \left\{ \left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \right\} \\ & \geq \frac{1}{2} \sup_{\rho \in \Omega} \left(\left\langle (e^{i\gamma}X + X^*X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{c}^2(e^{i\gamma}X - X^*X) \end{aligned}$$

olup bu ise

$$\text{dwb}^2(X) \geq \frac{1}{2} \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X) + \frac{1}{2} \tilde{c}^2(e^{i\gamma}X - X^*X)$$

eşitsizliğine denktir. Bu her $\gamma \in \mathbb{R}$ için sağlanacağından

$$\text{dwb}^2(X) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \{ \text{ber}^2(e^{i\gamma}X + X^*X) + \tilde{c}^2(e^{i\gamma}X - X^*X) \}$$

elde edilir. O halde teoremin birinci eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. Şimdi diğer kısmını ispatlayalım. O halde

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 \\ &= \frac{1}{2} \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle + \left\langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle - \left\langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle + \left\langle X^*X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle - \left\langle X^*X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \left\langle (X + X^*X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \left\langle (X - X^*X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\sup_{\rho \in \Omega} \left\{ \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 \right\} \leq \frac{1}{2} \sup_{\rho \in \Omega} \left| \widetilde{X + X^*X}(\rho) \right|^2 + \frac{1}{2} \sup_{\rho \in \Omega} \left| \widetilde{X - X^*X}(\rho) \right|^2$$

olup bu ise

$$\text{dwb}^2(X) \leq \frac{1}{2} \{ \text{ber}^2(X + X^*X) + \text{ber}^2(X - X^*X) \}$$

eşitsizliğine denktir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiştir. $\square$

Not 4.41. Burada Teorem 4.40'daki eşitsizliğin (Tapdigoglu vd. (2021), Teorem 1 ve 4 (ii)) and (4.32)'deki mevcut eşitsizlikleri iyileştirdiği verilmiştir. (Tapdigoglu vd. (2021), Teorem 4 (ii))'deki eşitsizlik $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için

$$\begin{aligned} \text{dwb}^2(X) &\leq \frac{1}{2} \text{ber}(X^2) + \frac{1}{4} \text{ber}(|X|^2 + |X^*|^2) \\ &+ 4 \text{ber}^2(X) \left(2 \text{ber}^2(X) - \tilde{c}^2(X) + 2 \text{ber}(X) \sqrt{\text{ber}^2(X) - \tilde{c}^2(X)} \right) \end{aligned}$$

olduğunu ifade eder. Bu ise Teorem 4.40'da elde edilen $\text{dwb}(X)$ nin üst sınırının (Tapdigoglu vd. (2021), Teorem 1 ve 4 (ii))'de elde edilenden daha iyi olduğudur.

Şimdi, sınırlı doğrusal operatörlerin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için aşağıdaki eşitsizliği ispatlayacak durumdayız.

Teorem 4.42. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Eğer her $t \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$, için $f_i(t)g_i(t) = t$ olacak şekilde f_i, g_i iki negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve $\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} = 1$ ile $\alpha_i, \beta_i > 1$ ise, o zaman

$$\text{dwb}^2(X) \leq \left\| \frac{1}{\alpha_1} f_1^{2\alpha_1}(|X|) + \frac{1}{\beta_1} g_1^{2\beta_1}(|X^*|) + \frac{1}{\alpha_2} f_2^{2\alpha_2}(|X^*X|) + \frac{1}{\beta_2} g_2^{2\beta_2}(|X^*X|) \right\|_{\text{ber}}$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. Yardımcı Teorem 3.5, 3.12 ve 3.13 ile

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 = \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 + \left\langle X^*X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^2 \\ & \leq \left\langle f_1^2(|X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \left\langle g_1^2(|X^*|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ & + \left\langle f_2^2(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \left\langle g_2^2(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ & \leq \frac{1}{\alpha_1} \left\langle f_1^{2\alpha_1}(|X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \left\langle g_1^{2\beta_1}(|X^*|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^{\beta_1} \\ & + \frac{1}{\alpha_2} \left\langle f_2^{2\alpha_2}(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^{\alpha_2} \\ & + \frac{1}{\beta_2} \left\langle g_2^{2\beta_2}(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle^{\beta_2} \\ & \leq \frac{1}{\alpha_1} \left\langle f_1^{2\alpha_1}(|X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle + \frac{1}{\beta_1} \left\langle g_1^{2\beta_1}(|X^*|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ & + \frac{1}{\alpha_2} \left\langle f_2^{2\alpha_2}(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ & + \frac{1}{\beta_2} \left\langle g_2^{2\beta_2}(|X^*X|)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \\ & = \left\langle \left(\frac{1}{\alpha_1} f_1^{2\alpha_1}(|X|) + \frac{1}{\beta_1} g_1^{2\beta_1}(|X^*|) + \frac{1}{\alpha_2} f_2^{2\alpha_2}(|X^*X|) + \frac{1}{\beta_2} g_2^{2\beta_2}(|X^*X|) \right) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte her ρ üzerinden supremuma geçilirse

$$\begin{aligned} & \sup_{\rho \in \Omega} \left\{ \left| \tilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\hat{k}_\rho \right\|^4 \right\} \\ & = \sup_{\rho \in \Omega} \left\langle \left(\frac{1}{\alpha_1} f_1^{2\alpha_1}(|X|) + \frac{1}{\beta_1} g_1^{2\beta_1}(|X^*|) + \frac{1}{\alpha_2} f_2^{2\alpha_2}(|X^*X|) + \frac{1}{\beta_2} g_2^{2\beta_2}(|X^*X|) \right) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\text{dwb}^2(X) \leq \left\| \frac{1}{\alpha_1} f_1^{2\alpha_1}(|T|) + \frac{1}{\beta_1} g_1^{2\beta_1}(|T^*|) + \frac{1}{\alpha_2} f_2^{2\alpha_2}(|T^*T|) + \frac{1}{\beta_2} g_2^{2\beta_2}(|T^*T|) \right\|_{\text{ber}}$$

dir. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik elde edilir. $\square$

Eğer Teorem 4.42’de $f_1(t) = g_1(t) = f_2(t) = g_2(t) = t^{1/2}$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ alınırsa o zaman aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 4.43. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

(a) Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta > 1$ ise

$$\text{dwb}^2(X) \leq \left\| \frac{1}{\alpha} |X|^\alpha (1 + |X|^\alpha) + \frac{1}{\beta} (|X^*|^\beta + |X|^{2\beta}) \right\|_{\text{ber}}$$

dir.

$$(b) \text{dwb}^2(X) \leq \frac{1}{2} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 + 2|X|^4 \right\|_{\text{ber}}.$$

Not 4.44. Sonuç 4.43 (b)’deki eşitsizliğin, T normaloid ise eşitlik haline geldiğini belirtmek isteriz.

(3.5) eşitsizliği kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayabiliriz.

Teorem 4.45. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$(a) \text{dwb}^2(X) \leq \left\| |X|^2 + |X|^4 \right\|_{\text{ber}},$$

$$(b) \text{dwb}^2(X) \leq \frac{1}{2} \left(\text{ber}(X^2) + \|X\|^2 \right) + \|X\|^4.$$

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ alalım. $X = X\hat{k}_\rho$, $c = \hat{k}_\rho$ and $b = X\hat{k}_\rho$ için (3.5) uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\tilde{X}(\rho)|^2 + \|X\hat{k}_\rho\|^4 &= \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\hat{k}_\rho\|^4 \\ &= \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle \langle \hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \rangle \right| \\ &\quad + \left| \langle |X|^2 \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle \langle \hat{k}_\rho, |X|^2 \hat{k}_\rho \rangle \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \left(\|X\widehat{k}_\rho\|^2 + \langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\| |X|^2 \widehat{k}_\rho \|^2 + \langle |X|^2 \widehat{k}_\rho, |X|^2 \widehat{k}_\rho \rangle \right) \\
&= \langle (|X|^2 + |X|^4) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\sup_{\rho \in \Omega} \left\{ |\widetilde{X}(\rho)|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \right\} \leq \sup_{\rho \in \Omega} \langle (|X|^2 + |X|^4) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle$$

elde edilir. Bu (a)'yı ispatlar. (b)'nin ispatı

$$|\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle|^2 = |\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \langle \widehat{k}_\rho, X^* \widehat{k}_\rho \rangle| \quad (4.35)$$

eşitliğinden ve (4.35)'de $X = X\widehat{k}_\rho$, $c = \widehat{k}_\rho$, $b = X^* \widehat{k}_\rho$ için (3.5) uygulanarak

$$|\langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle|^2 = \langle |X|^2 \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \langle \widehat{k}_\rho, |X|^2 \widehat{k}_\rho \rangle \quad (4.36)$$

ve (4.36)'da $X = |X|^2 \widehat{k}_\rho$, $c = \widehat{k}_\rho$ and $b = |X|^2 \widehat{k}_\rho$ alınarak elde edilir. $\square$

Tapdigoglu vd. (2021)'nin çalışmasındaki Önerme 1'deki eşitsizliğinden $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için

$$\text{dwb}(X) \leq \left[\max \left\{ \|X\|_{\text{Ber}}^2, \| |X|^2 \|_{\text{Ber}}^2 \right\} + \sqrt{2} \text{ber}(|X|^2 X) \right]^{1/2}$$

olur.

Şimdi sınırlı doğrusal operatörlerin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için başka bir üst sınır elde edelim.

Teorem 4.46. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$(a) \text{dwb}(X) \leq \left[\frac{1}{2} \left(\text{ber}(|X|^4 + |X|^2) + \text{ber}(|X|^4 - |X|^2) \right) + \sqrt{2} \text{ber}(|X|^2 X) \right]^{1/2}$$

$$(b) \text{dwb}(X) \leq \left[\max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(\|X\|_{\text{Ber}}^2 + \| |X|^2 \|_{\text{Ber}}^2 + 2 \text{ber}(|X|^2 X) \right) \right]^{1/2}$$

$$(c) \text{dwb}(X) \leq \left[\|X\|_{\text{Ber}} \max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(1 + \|X\|_{\text{Ber}}^2 + 2 \text{ber}(X) \right) \right]^{1/2}.$$

İspat. (a) Keyfi $\rho \in \Omega$ alınsın. Yardımcı Teorem 3.8’de $X = \widehat{k}_\rho$, $b = X\widehat{k}_\rho$ ve $c = |X|^2\widehat{k}_\rho$ alınırsa her $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\
&= \left| \langle \widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \left| \langle \widehat{k}_\rho, |X|^2\widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 \\
&\leq \|\widehat{k}_\rho\|^2 \left(\max \left\{ \|X\widehat{k}_\rho\|^2, \||X|^2\widehat{k}_\rho\|^2 \right\} + \sqrt{2} \left| \langle X\widehat{k}_\rho, |X|^2\widehat{k}_\rho \rangle \right| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\|X\widehat{k}_\rho\|^2 + \||X|^2\widehat{k}_\rho\|^2 + \left| \|X\widehat{k}_\rho\|^2 - \||X|^2\widehat{k}_\rho\|^2 \right| \right) \\
&\quad + \sqrt{2} \left| \langle |X|^2 X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle (|X|^4 + |X|^2) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle + \langle (|X|^4 - |X|^2) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right) \\
&\quad + \sqrt{2} \left| \langle |X|^2 X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\text{ber}(|X|^4 + |X|^2) + \text{ber}(|X|^4 - |X|^2) \right) + \sqrt{2} \text{ber}(|X|^2 X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
& \sup_{\rho \in \Omega} \left(\left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \right)^{1/2} \\
&\leq \left[\frac{1}{2} \left(\text{ber}(|X|^4 + |X|^2) + \text{ber}(|X|^4 - |X|^2) \right) + \sqrt{2} \text{ber}(|X|^2 X) \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\text{dwb}(X) \leq \left[\frac{1}{2} \left(\text{ber}(|X|^4 + |X|^2) + \text{ber}(|X|^4 - |X|^2) \right) + \sqrt{2} \text{ber}(|X|^2 X) \right]^{1/2}$$

olup (a) ispatlanır.

(b) Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. Yardımcı Teorem 3.9’da $X = \widehat{k}_\rho$, $b = X\widehat{k}_\rho$ ve $c = |X|^2\widehat{k}_\rho$ seçilirse her $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|^4 \\
&= \left| \langle \widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 + \left| \langle \widehat{k}_\rho, |X|^2\widehat{k}_\rho \rangle \right|^2 \\
&\leq \|\widehat{k}_\rho\| \max \left\{ \left| \langle \widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \rangle \right|, \left| \langle \widehat{k}_\rho, |X|^2\widehat{k}_\rho \rangle \right| \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + \left\| |X|^2 \widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, |X|^2 \widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right)^{1/2} \\
& \leq \max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(\left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + \left\| |X|^2 \widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \left| \left\langle |X|^2 X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\begin{aligned}
& \sup_{\rho \in \Omega} \left(\left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^4 \right)^{1/2} \\
& \leq \sup_{\rho \in \Omega} \left[\max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(\left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + \left\| |X|^2 \widehat{k}_\rho \right\|^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \left| \left\langle |X|^2 X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right)^{1/2} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

ve

$$\text{dwb}(X) \leq \left[\max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(\left\| X \right\|_{\text{Ber}}^2 + \left\| |X|^2 \right\|_{\text{Ber}}^2 + 2 \text{ber}(|X|^2 X) \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

olduğunu verir. Dolayısıyla Teorem 4.46 (b)'nin ispatı tamamlanır.

(c) Şimdi, Yardımcı Teorem 3.9'da $X = X\widehat{k}_\rho$, $b = \widehat{k}_\rho$ ve $c = X\widehat{k}_\rho$ alınarak

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^4 \\
& = \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\
& \leq \left\| X\widehat{k}_\rho \right\| \max \left\{ \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|, \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right\} \\
& \times \left(1 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \left| \left\langle \widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right)^{1/2} \\
& = \left\| X\widehat{k}_\rho \right\| \max \left\{ \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|, \left| \left\langle |X|^2 \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right\} \\
& \times \left(1 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \left| \left\langle \widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \right\rangle \right| \right)^{1/2} \\
& = \left\| X\widehat{k}_\rho \right\| \max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(1 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \text{ber}(X) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{\rho \in \Omega} \left(\left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^4 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sup_{\rho \in \Omega} \left[\left\| X \widehat{k}_\rho \right\| \max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(1 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|^2 + 2 \text{ber}(X) \right)^{1/2} \right]^{1/2},$$

veya denk olarak

$$\text{dwb}(X) \leq \left[\|X\|_{\text{Ber}} \max \left\{ \text{ber}(X), \text{ber}(|X|^2) \right\} \left(1 + \|X\|_{\text{Ber}}^2 + 2 \text{ber}(X) \right)^{1/2} \right]^{1/2},$$

eşitsizliği elde edilir. $\square$

Not 4.47. Teorem 4.45'deki eşitsizliklerin yukarıdaki teoremdaki mevcut eşitsizliklerden daha iyi sonuç veren operatörler olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.48. (Tapdigoglu vd. (2021), Teorem 2) $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

$$\text{dwb}^2(X) \leq \frac{1}{2} \text{ber}(|X|^2 + 2|X|^4 + |X^*|^2) - \frac{1}{2} \inf_{\rho \in \Omega} \left(\left\| X \widehat{k}_\rho \right\| - \left\| X^* \widehat{k}_\rho \right\| \right)^2$$

olur.

Şimdi, aşağıdaki teoremdaki eşitsizliğin, bazı operatörler için Teorem 4.48'deki mevcut eşitsizlikleri iyileştirdiğini gösterebiliriz.

Teorem 4.49. $X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

(a)

$$\begin{aligned} \text{dwb}^2(X) \leq \inf_{z \in \Omega} \left\{ (2 \|\text{Re}(z) \text{Re}(X) + \text{Im}(z) \text{Im}(X)\|_{\text{ber}} + \|X^* X - 2 \text{Re}(\bar{z}X)\|_{\text{ber}})^2 \right. \\ \left. + 2 \|\text{Re}(\bar{z}X)\|_{\text{ber}} - |z|^2 + \text{ber}^2(X - zI) \right\}. \end{aligned}$$

$$(b) \text{dwb}^2(X) \leq \text{ber}^2(X) + \|X\|_{\text{ber}}^4.$$

İspat. $z \in \mathbb{C}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.7'da $u = X \widehat{k}_\rho$ ve $v = \widehat{k}_\rho$ seçilirse her $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|^2 \left\| \widehat{k}_\rho \right\|^2 - \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 &= \left\| X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\|^2 \left\| \widehat{k}_\rho \right\|^2 \\ &\quad - \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \end{aligned}$$

olur. O halde X 'in kartezyen ayrışımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 \\
&= \left(\left\langle \operatorname{Re}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 - \left(\left\langle \operatorname{Re}(X - zI)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 \\
&+ \left(\left\langle \operatorname{Im}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 - \left(\left\langle \operatorname{Im}(X - zI)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho \right\|^2 \\
&= \left\langle (2\operatorname{Re}(X) - \operatorname{Re}(z)I)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \left\langle \operatorname{Re}(z)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \\
&+ \left\langle (2\operatorname{Im}(X) - \operatorname{Im}(z)I)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \left\langle \operatorname{Im}(z)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle + \left\| X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho \right\|^2 \\
&= 2\operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle + 2\operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \\
&- (\operatorname{Re}(z))^2 - (\operatorname{Im}(z))^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho \right\|^2 \\
&= 2 \left(\operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle + \operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right) - |z|^2 \\
&+ \left\langle X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho \right\rangle \\
&= 2 \left(\operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle + \operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}(X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right) \\
&+ \left\langle (X^*X - 2\operatorname{Re}(\bar{z}X))\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar Yardımcı Teorem 3.7 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 &= \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^2 - \left\| X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho \right\|^2 + \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\
&= 2 \left\langle \operatorname{Re}(\bar{z}X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle - |z|^2 + \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2
\end{aligned}$$

olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
& \left| \widetilde{X}(\rho) \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|^4 \\
&\leq 2 \left\langle \operatorname{Re}(\bar{z}X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle - |z|^2 + \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho - z\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right|^2 \\
&+ \left(2 \left\langle (\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(X) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(X))\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle + \left\langle (X^*X - 2\operatorname{Re}(\bar{z}X))\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle \right)^2
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı, her $z \in \mathbb{C}$ üzerinden infimum ve $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınır

$$\begin{aligned}
\operatorname{dwb}^2(X) &\leq \inf_{z \in \mathbb{C}} \left\{ (2 \left\| \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(X) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(X) \right\|_{\operatorname{ber}} + \left\| X^*X - 2\operatorname{Re}(\bar{z}X) \right\|_{\operatorname{ber}})^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\| \operatorname{Re}(\bar{z}X) \right\|_{\operatorname{ber}} - |z|^2 + \operatorname{ber}^2(X - zI) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $z = 0$ alınarak $\text{dwb}^2(X) \leq \text{ber}^2(X) + \|X\|_{\text{ber}}^4$ elde edilir. $\square$

Daha sonra, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 4.50. $X, Y \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(a) $\text{dwb}(X + Y) \leq \text{dwb}(X) + \text{dwb}(Y) + \text{dwb}(X^*Y + Y^*X)$;

(b) Eğer $X^*Y + Y^*X = 0$ ise $\text{dwb}(X + Y) \leq \text{dwb}(X) + \text{dwb}(Y)$ dir.

İspat. (a) Tanım 3.44'dan $S = \left\{ \left(0, \left\langle (X^*Y + Y^*X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right) : \rho \in \Omega \right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \text{DWB}(X + Y) \\
&= \left\{ \left(\widetilde{X + Y}(\rho), (X + Y)\hat{k}_\rho, \left\| (X + Y)\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \right), \rho \in \Omega \right\} \\
&= \left\{ \left(\tilde{X}(\rho) + \tilde{Y}(\rho), \left\langle (X + Y)\hat{k}_\rho, (X + Y)\hat{k}_\rho \right\rangle \right), \rho \in \Omega \right\} \\
&= \left\{ \left(\tilde{X}(\rho) + \tilde{Y}(\rho), \left\| X\hat{k}_\rho \right\|_A^2 + \left\| Y\hat{k}_\rho \right\|_A^2 + \left\langle (X^*Y + Y^*X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right), \rho \in \Omega \right\} \\
&= \left\{ \left(\tilde{X}(\rho), \left\| X\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \right) + \left(\tilde{Y}(\rho), \left\| Y\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(0, \left\langle (X^*Y + Y^*X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle \right) : \rho \in \Omega \right\} \\
&\subseteq \text{DWB}(X) + \text{DWB}(Y) + S,
\end{aligned}$$

yani,

$$\text{DWB}(X + Y) \subseteq \text{DWB}(X) + \text{DWB}(Y) + S$$

olur. Buradan (a)'nın ispatı tamamlanır. (b)'nin ispatı (a)'dan hemen yapılır ve teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

4.5. A-Davis-Wielandt-Berezin Yarıçap Eşitsizlikleri

Bu kısımda, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert fonksiyon uzayında pozitif A operatörü için

$$\text{dwb}_A(X) := \sup \left\{ \sqrt{\left| \langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \|X\widehat{k}_\rho\|_A^4} : \rho \in \Omega \right\}$$

formülü ile A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçap $\text{dwb}_A(X)$ 'in özelliklerini inceleyeceğiz. Burada $\mathcal{H}$ üzerinde yarı-iççarpımdan indirgenmiş pozitif A operatörü $u, v \in \mathcal{H}$ için $\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle$ ile tanımlıdır. Yukarıda belirtilen A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için alt sınırların eşitliği bu kısımda incelenmiştir. Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ek olarak, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir üst sınır elde edilmiştir.

$X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H})$ için Crawford sayısı $c_A(X)$,

$$c_A(X) := \inf_{u \in \mathcal{H}, \|u\|_A=1} |\langle Xu, u \rangle_A|$$

ile tanımlanır (Zamani, 2019b). Burada $\tilde{c}_A(X) := \inf_{\rho \in \Omega} |\tilde{X}^A(\rho)|$ ile sayısını A -Berezin-Crawford sayısını tanımlayabiliriz. O halde

$$c_A(X) \leq \tilde{c}_A(X) \leq \text{ber}_A(X)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Bu kısımdaki ilk sonucumuz aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.51. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

- (i) $\text{dwb}_A^2(X) \geq \max \left\{ \text{ber}_A^2(X) + \tilde{c}_A^2(X^{\sharp_A} X), \|X\|_{A-\text{Ber}}^4 + \tilde{c}_A^2(X) \right\},$
- (ii) $\text{dwb}_A^2(X) \geq 2 \max \left\{ \text{ber}_A(X) \tilde{c}_A(X^{\sharp_A} X), \tilde{c}_A(X) \|X\|_{A-\text{Ber}}^2 \right\}.$

İspat. Herhangi $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \text{dwb}_A^2(X) &\geq \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \\ &= \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\langle X^{\sharp A} X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A^2 \\ &\geq \left| \widetilde{X}^A(\rho) \right|^2 + \inf_{\rho \in \Omega} \left\langle X^{\sharp A} X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A^2 \end{aligned}$$

ve

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq \text{ber}_A^2(X) + \widetilde{c}_A^2(X^{\sharp A} X)$$

olur. Buradan, $\text{dwb}_A^2(X) \geq \left| \widetilde{X}^A(\rho) \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^4$ eşitsizliğini gözönüne alınırsa

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq \widetilde{c}_A^2(X) + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^4$$

elde edilir. O halde $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq \widetilde{c}_A^2(X) + \|X\|_{A-\text{Ber}}^4$$

olup (i)'nin ispatı tamamlanır.

Keyfi $\rho \in \Omega$ alınırsa kolayca

$$\left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \geq 2 \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^2 \quad (4.37)$$

ve

$$\begin{aligned} \text{dwb}_A^2(X) &\geq 2 \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \left\langle X^{\sharp A} X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &\geq 2 \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \inf_{\rho \in \Omega} \left\langle X^{\sharp A} X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &= 2 \left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \widetilde{c}_A(X^{\sharp A} X) \end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir. $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq 2\text{ber}_A(X) \widetilde{c}_A(X^{\sharp A} X)$$

dir. (4.37) eşitsizliğinden

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq 2\tilde{c}_A(X) \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^2$$

elde edilir. Böylece

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq 2\tilde{c}_A(X) \|X\|_{A\text{-Ber}}^2$$

olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır. $\square$

Not 4.52. Teorem 4.51 (a)'da elde edilen alt sınırın (3.36)'dakinden daha katı olduğu açıktır. Ayrıca, Teorem 4.51'de $A = I$ alınırsa bu sonuç Gürdal ve Güncan (2021) çalışmasında elde edilen Teorem 1'i verir.

$X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için

$$m_{A\text{-ber}}^2(X) := \inf_{\rho \in \Omega} \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^2$$

tanımlayabiliriz.

Aşağıdaki sonuçta HFU zerindeki sınırlı doğrusal operatörlerin A-Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bir st sınır elde edilmiştir.

Teorem 4.53. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. O zaman

$$\text{dwb}_A^2(X) \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}_A^2 \left(e^{i\gamma} X + X^{\sharp_A} X \right) - 2\tilde{c}_A(X) m_{A\text{-ber}}^2(X)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ alınsın. O zaman

$$\left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| = e^{i\gamma} \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$ mevcuttur. şimdi

$$\left| \left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X\widehat{k}_\rho \right\|_A^4$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle e^{i\gamma} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A^2 + \left\langle X^{\sharp A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A^2 \\
&= \left(\left\langle e^{i\gamma} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \left\langle X^{\sharp A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2 \\
&\quad - 2 \left\langle e^{i\gamma} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle X^{\sharp A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A
\end{aligned}$$

olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
&2 \left\langle e^{i\gamma} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle X^{\sharp A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \\
&= \left\langle \left(e^{i\gamma} X + X^{\sharp A} X \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A^2 \\
&\leq \text{ber}_A^2 \left(e^{i\gamma} X + X^{\sharp A} X \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
&2 \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \left\langle X^{\sharp A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \\
&\leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}_A^2 \left(e^{i\gamma} X + X^{\sharp A} X \right)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$2\widetilde{c}_A(X) m_{A-\text{ber}}^2(X) + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}_A^2 \left(e^{i\gamma} X + |X|_A^2 \right)$$

olur. Burada $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum almak

$$\text{dwb}_A^2(X) \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}_A^2 \left(e^{i\gamma} X + X^{\sharp A} X \right) - 2\widetilde{c}_A(X) m_{A-\text{ber}}^2(X)$$

eşitsizliğini verir. Bu ispatı tamamlar. □

Not 4.54. (Gürdal ve Güncan, 2021) çalışmasındaki Teorem 2'deki eşitsizliğe göre

$$\text{dwb}^2(X) \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \text{ber}^2 \left(e^{i\gamma} X + X^* X \right) - 2\widetilde{c}(X) m_{\text{ber}}^2(X)$$

sağlanır. O halde Teorem 4.53'de $A = I$ alınırsa üstteki eşitsizliğe indirgendiği elde edilir

Artık sınırlı doğrusal operatörlerin A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için aşağıdaki eşitsizliği gösterebiliriz.

Teorem 4.55. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \text{ber}_A^2 \left(X + X^{\sharp_A} X \right) + \tilde{c}_A^2 \left(X - X^{\sharp_A} X \right) \right\} \\ & \leq \text{dwb}_A^2(X) \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ \text{ber}_A^2 \left(X + X^{\sharp_A} X \right) + \text{ber}_A^2 \left(X - X^{\sharp_A} X \right) \right\} \end{aligned}$$

olur.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \|X\hat{k}_\rho\|_A^4 \\ & = \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A + \langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & + \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A - \langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & = \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A + \langle X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & + \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A - \langle X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & = \frac{1}{2} \left| \langle (X + X^{\sharp_A} X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle (X - X^{\sharp_A} X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & \geq \frac{1}{2} \left\{ \left| \langle (X + X^{\sharp_A} X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \tilde{c}_A^2 \left(X - X^{\sharp_A} X \right) \right\} \end{aligned}$$

dir. Burada $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\text{dwb}_A^2(X) \geq \frac{1}{2} \left\{ \text{ber}_A^2 \left(X + X^{\sharp_A} X \right) + \tilde{c}_A^2 \left(X - X^{\sharp_A} X \right) \right\}$$

olur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} & \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \|X\hat{k}_\rho\|_A^4 \\ & = \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A + \langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & + \frac{1}{2} \left| \langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A - \langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & = \frac{1}{2} \left| \langle (X + X^{\sharp_A} X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle (X - X^{\sharp_A} X)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde aynı hesaplamalarla

$$\text{dwb}_A^2(X) \leq \frac{1}{2} \left\{ \text{ber}_A^2(X + X^{\sharp_A} X) + \text{ber}_A^2(X - X^{\sharp_A} X) \right\}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise istenilen sonucu verir. $\square$

Şimdi $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H})$ nin A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için üst sınır verelim.

Teorem 4.56. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$(a) \text{dwb}_A^2(X) \leq \left\| X^{\sharp_A} X + (X^{\sharp_A} X)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X \right\|_{A-\text{ber}},$$

$$(b) \text{dwb}_A^2(X) \leq \frac{1}{2} \left(\text{ber}_A(X^2) + \|X\|_A^2 \right) + \|X\|_{A-\text{Ber}}^4.$$

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. Yardımcı Teorem 3.33’de $u_1 = X\hat{k}_\rho$, $e = \hat{k}_\rho$ ve $u_2 = X\hat{k}_\rho$, olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}(\rho) \right|_A^2 + \|X\hat{k}_\rho\|_A^4 &= \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle \hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \\ &\quad + \left| \left\langle X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle \hat{k}_\rho, X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|X\hat{k}_\rho\|_A^2 + \left\langle X\hat{k}_\rho, X\hat{k}_\rho \right\rangle_A \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\|X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho\|_A^2 + \left\langle X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho, X^{\sharp_A} X\hat{k}_\rho \right\rangle_A \right) \\ &= \left\langle \left(X^{\sharp_A} X + (X^{\sharp_A} X)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X \right) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \end{aligned}$$

olur. Her $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{\rho \in \Omega} \left\{ \left| \tilde{X}(\rho) \right|_A^2 + \|X\hat{k}_\rho\|_A^4 \right\} \leq \sup_{\rho \in \Omega} \left\langle \left(X^{\sharp_A} X + (X^{\sharp_A} X)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X \right) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A$$

olup (a) elde edilir. (b) nin ispatı için

$$\left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 = \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle \hat{k}_\rho, X^{\sharp_A} \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right| \quad (4.38)$$

durumunu gözönüne alınsın. (4.38) eşitliğinde $u = X\hat{k}_\rho$, $e = \hat{k}_\rho$, $X = X^* \hat{k}_\rho$ için Yardımcı Teorem 3.33’deki eşitsizlik uygulanırsa (b) elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

X 'nin A -normaloid olması halinde $\|X^2\|_A = \|X\|_A^2$ olduğu yaygın olarak bilinir. Dolayısıyla Teorem 4.56'daki her iki eşitsizlik de X 'nin A -normaloid olması halinde eşitlik haline gelir ve kolayca gözlemlenebilir.

Şimdi sınırlı doğrusal operatörlerin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için başka bir üst sınır elde edilecektir.

Teorem 4.57. *Eğer $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ ise, o zaman*

$$\begin{aligned} & \text{dwb}_A^2(X) \\ & \leq 3 \left\| \left(X^{\sharp_A} X \right)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X + X^{\sharp_A} X \right\|_{A-\text{ber}} - \tilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) \\ & \quad - \tilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde edilir.

İspat. Keyfi $\rho \in \Omega$ olsun. Yardımcı Teorem 3.33 ve 3.34 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ & \leq \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 \left\| \hat{k}_\rho \right\|_A^2 \\ & \quad - 2 \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \langle \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| \left(\left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A \left\| \hat{k}_\rho \right\|_A - \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| \right) \\ & = \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 + 2 \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| \left| \langle \hat{k}_\rho, X \hat{k}_\rho \rangle_A \right| - 2 \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A \\ & \leq \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 + \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 + \langle X \hat{k}_\rho, X \hat{k}_\rho \rangle_A - 2 \tilde{c}_A(X) \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A \\ & \leq 3 \langle X^{\sharp_A} X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A - 2 \tilde{c}_A(X) m_{A-\text{ber}}(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} & \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^4 \\ & = \frac{1}{2} \left(\left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 + \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \left\| X \hat{k}_\rho \right\|_A^2 - \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\left| \langle (X^{\sharp_A} X + X) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 + \left| \langle (X^{\sharp_A} X - X) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(3 \left| \langle X^{\sharp_A} X + X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 - 2 \tilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \left\langle \left| X^{\sharp_A} X - X \right|_A^2 \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A - 2\widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right) \\
& = \frac{3}{2} \left\langle \left(\left| X^{\sharp_A} X + X \right|_A^2 + \left| X^{\sharp_A} X - X \right|_A^2 \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) \\
& - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right) \\
& = 3 \left\langle \left(\left(X^{\sharp_A} X \right)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X + X^{\sharp_A} X \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece üstteki durumda her ρ üzerinden supremuma geçilirse

$$\begin{aligned}
\sup_{\rho \in \Omega} \left(\left| \widetilde{X}^A(\rho) \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \right) & \leq 3 \sup_{\rho \in \Omega} \left\langle \left(\left(X^{\sharp_A} X \right)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X + X^{\sharp_A} X \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& - \sup_{\rho \in \Omega} \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) \\
& - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right)
\end{aligned}$$

olup bu ise

$$\begin{aligned}
\text{dwb}_A^2(X) & \leq 3 \left\| \left(X^{\sharp_A} X \right)^{\sharp_A} X^{\sharp_A} X + X^{\sharp_A} X \right\|_{A-\text{ber}} - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X + X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X + X \right) \\
& - \widetilde{c}_A \left(X^{\sharp_A} X - X \right) m_{A-\text{ber}} \left(X^{\sharp_A} X - X \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine denktir. Bu, (4.39)'un gerektiği gibi olduğunu hemen ispatlar. $\square$

Artık aşağıdaki teorem kurulabilir.

Teorem 4.58. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

(a)

$$\begin{aligned}
\text{dwb}_A^2(X) & \leq \inf_{\varkappa \in \mathbb{R}} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{ 2|\varkappa| \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) - \varkappa I \right\|_A \right. \\
& + \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) - 2\varkappa I \right\|_A^2 \\
& \left. + \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right\}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{dwb}_A^2(X) \leq \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{ \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right. \\ \left. + \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (a) Keyfi $\rho \in \Omega$ alınsın. Bu durumda $\left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| = e^{-i\gamma} \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A$ olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$ mevcuttur. X 'nin kartezyen ayrışımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| &= \left\langle e^{-i\gamma} X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &= \left\langle ((\cos \gamma - i \sin \gamma) (\text{Re}_A(X) + i \text{Im}_A(X))) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &= \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &\quad + i \left\langle (\cos \gamma \text{Im}_A(X) - \sin \gamma \text{Re}_A(X)) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right| = \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A$$

sağlanır. O halde Yardımcı Teorem 3.35 kullanılarak herhangi $\varkappa \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} &\left| \langle X \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_A \right|^2 \\ &= \left| \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\ &= \left\| (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho \right\|_A^2 \\ &\quad - \left\| (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho - \varkappa \hat{k}_\rho \right\|_A^2 \\ &\quad + \left| \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X)) \hat{k}_\rho - \varkappa \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\ &= \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X))^2 \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &\quad - \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X) - \varkappa I)^2 \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \\ &\quad + \left| \left\langle (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X) - \varkappa I) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\ &= \left\langle \left\{ (\cos \gamma \text{Re}_A(X) + \sin \gamma \text{Im}_A(X))^2 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I)^2 \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \rangle_A \\
& + \left| \left\langle (\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
& = \left\langle (2\varkappa(\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X)) - \varkappa^2 I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& + \left| \left\langle (\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\|X \widehat{k}_\rho\|_A^4 &= \left| \left\langle X^{\sharp_A} X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
&= \left\langle (2\varkappa X^{\sharp_A} X - \varkappa^2 I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \left| \left\langle (X^{\sharp_A} X - \varkappa I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 + \|X \widehat{k}_\rho\|_A^4 \\
&= \left\langle 2\varkappa \left\{ \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) \right\} \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A - 2\varkappa^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left| \left\langle (\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - 2\varkappa I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left| \left\langle (\cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X)) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
&\leq 2|\varkappa| \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I \right\|_A \\
&+ \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - 2\varkappa I \right\|_A^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) \right\|_A^2 \\
&\leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{ 2|\varkappa| \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I \right\|_A \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - 2\varkappa I \right\|_A^2 \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\operatorname{dwb}_A^2(X) &\leq \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{ 2|\varkappa| \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - \varkappa I \right\|_A \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) - 2\varkappa I \right\|_A^2 \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left\| \cos \gamma \operatorname{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \operatorname{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right\}
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizlik her $\varkappa \in \mathbb{R}$ için sağlanacağından istenilen eşitsizlik elde edilir.

(b) Burada ise $\varkappa = 0$ alınırsa istenilen

$$\begin{aligned} \text{dwb}_A^2(X) &\leq \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{ \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) + X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \cos \gamma \text{Re}_A(X) - X^{\sharp_A} X + \sin \gamma \text{Im}_A(X) \right\|_A^2 \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Bunu takiben, aşağıda gösterilen eşitsizlik bulunur.

Teorem 4.59. $X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ olsun. Bu durumda

(a)

$$\begin{aligned} &\text{dwb}_A^2(X) \\ &\leq \inf_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \left(2 \left\| \text{Re}(z) \text{Re}_A(X) + \text{Im}(z) \text{Im}_A(X) \right\|_{A-\text{ber}} + \left\| X^{\sharp_A} X - 2 \text{Re}(\bar{z}X) \right\|_{A-\text{ber}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\| \text{Re}(\bar{z}X) \right\|_{A-\text{ber}} - |z|^2 + \text{ber}_A^2(X - zI) \right\}, \end{aligned}$$

$$(b) \text{dwb}_A^2(X) \leq \text{ber}_A^2(X) + \|X\|_{A-\text{ber}}^4$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $z \in \mathbb{C}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.33'de $u_1 = X\hat{k}_\rho$ ve $u_2 = \hat{k}_\rho$ seçilirse her $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \left\| X\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \left\| \hat{k}_\rho \right\|_A^2 - \left| \left\langle X\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 &= \left\| X\hat{k}_\rho - z\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \left\| \hat{k}_\rho \right\|_A^2 \\ &\quad - \left| \left\langle X\hat{k}_\rho - z\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \end{aligned}$$

olur. O halde X 'in kartezyen ayrışımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\left\| X\hat{k}_\rho \right\|_A^2 \\ &= \left(\left\langle \text{Re}_A(X) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2 - \left(\left\langle \text{Re}_A(X - zI) \hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left\langle \operatorname{Im}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2 - \left(\left\langle \operatorname{Im}_A(X - zI) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2 \\
& + \left\| X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\|_A^2 \\
& = \left\langle (2 \operatorname{Re}_A(X) - \operatorname{Re}(z)I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle \operatorname{Re}(z) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& + \left\langle (2 \operatorname{Im}_A(X) - \operatorname{Im}(z)I) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \left\langle \operatorname{Im}(z) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& + \left\| X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\|_A^2 \\
& = 2 \operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + 2 \operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& - (\operatorname{Re}(z))^2 - (\operatorname{Im}(z))^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\|_A^2 \\
& = 2 \left(\operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) - |z|^2 \\
& + \left\langle X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho, X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \\
& = 2 \left(\operatorname{Re}(z) \left\langle \operatorname{Re}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A + \operatorname{Im}(z) \left\langle \operatorname{Im}_A(X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) \\
& + \left\langle \left(X^{\sharp_A} X - 2 \operatorname{Re}_A(\bar{z}X) \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar Yardımcı Teorem 3.33 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle X \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 & = \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^2 - \left\| X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho \right\|_A^2 + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
& = 2 \left\langle \operatorname{Re}(\bar{z}X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A - |z|^2 + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2
\end{aligned}$$

dir. Bu sebeple her $\rho \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \widetilde{X}^A(z) \right|^2 + \left\| X \widehat{k}_\rho \right\|_A^4 \\
& \leq 2 \left\langle \operatorname{Re}(\bar{z}X) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A - |z|^2 + \left| \left\langle X \widehat{k}_\rho - z \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right|^2 \\
& \quad \left(2 \left\langle (\operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}_A(X) + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}_A(X)) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right. \\
& \quad \left. + \left\langle \left(X^{\sharp_A} X - 2 \operatorname{Re}_A(\bar{z}X) \right) \widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right)^2.
\end{aligned}$$

olur. Böylece, her $\rho \in \Omega$ üzerinden supremum ve $z \in \mathbb{C}$ üzerinden infimum alınırsa

$$\begin{aligned}
& \operatorname{dwb}_A^2(X) \\
& \leq \inf_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \left(2 \left\| \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}_A(X) + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}_A(X) \right\|_{A-\text{ber}} + \left\| X^{\sharp_A} X - 2 \operatorname{Re}_A(\bar{z}X) \right\|_{A-\text{ber}} \right)^2 \right.
\end{aligned}$$

$$+2 \|\operatorname{Re}_A(\bar{z}X)\|_{A-\operatorname{ber}} - |z|^2 + \operatorname{ber}_A^2(X - zI) \}$$

sağlanır.

(a) durumunda $z = 0$ alınırsa $\operatorname{dwb}_A^2(X) \leq \operatorname{ber}_A^2(X) + \|X\|_{A-\operatorname{ber}}^4$ elde edilir. Bu gerekli sonucu ispatlar. $\square$

Daha sonra, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapında bir üst sınırı veren aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.60. $Y, X \in \mathbb{B}_{A,\Omega}(\mathcal{H}(\Omega))$ iki operatör olsun. Bu durumda

$$(a) \operatorname{dwb}_A(Y + X) \leq \operatorname{dwb}_A(Y) + \operatorname{dwb}_A(X) + \operatorname{ber}_A(Y^{\sharp_A}X + X^{\sharp_A}Y) \text{ ve}$$

$$(b) \text{ Eğer } Y^{\sharp_A}X + X^{\sharp_A}Y = 0 \text{ ise o zaman } \operatorname{dwb}_A(Y + X) \leq \operatorname{dwb}_A(Y) + \operatorname{dwb}_A(X)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (a) Tanım 3.44 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \operatorname{DWB}_A(Y + X) \\ &= \left\{ \left(\left\langle (Y + X)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A, \left\langle (Y + X)\widehat{k}_\rho, (Y + X)\widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right), \rho \in \Omega \right\} \\ &= \left\{ \left(\left\langle Y\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A, \left\langle Y\widehat{k}_\rho, Y\widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) + \left(\left\langle X\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A, \left\langle X\widehat{k}_\rho, X\widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(0, \left\langle (Y^{\sharp_A}X + X^{\sharp_A}Y)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) : \rho \in \Omega \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$J = \left\{ \left(0, \left\langle (Y^{\sharp_A}X + X^{\sharp_A}Y)\widehat{k}_\rho, \widehat{k}_\rho \right\rangle_A \right) : \rho \in \Omega \right\}$$

olmak üzere $\operatorname{DWB}_A(Y + X) \subseteq \operatorname{DWB}_A(Y) + \operatorname{DWB}_A(X) + J$ olup (a) elde edilir. (b)'nin ispatı (a) ve $A(Y^{\sharp_A}X + X^{\sharp_A}Y) = 0$ gerçeği kullanılarak verilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. $\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ana sonuçlarımız dördüncü bölümde yer aldığından, bu bölümdeki kısımları kısaca ve ayrı ayrı tartışacağız ve her alt kısmın ana sonuçlarından ve son sözlerinden aşağıdaki şekilde bahsedeceğiz:

Dışbükey fonksiyonun tanımını operatör dışbükey fonksiyonuna genişletirken, sürekli fonksiyonel analize göre sadece operatörlerin toplamı ile ilgilendiğimiz için bu kolayca yapılabilir, ancak operatörlerin çarpımı ile uğraştığımız zaman operatörü geometrik olarak dışbükey fonksiyonları tanımlarken ve operatörlerin çoğalması değiştirilemediği için dikkatli olunmalıdır. Dördüncü bölümün ilk kısmında Berezin sayısının kuvvetlerini ve Hilbert fonksiyon uzay operatörleri için Berezin normlarını içeren sınırlı $\tilde{X}$ fonksiyonunu kullanarak bazı eşitsizlikleri inceledik. Yani, Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve diğer bazı yeni sonuçları operatör dışbükeyliği kavramını kullanarak uygulanmıştır.

Audernaert (2015), matrisler için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ile Cauchy-Schwarz eşitsizliği arasında enterpolasyon yapan üniter değişmez normlar için eşitsizliği elde etmiştir. Cauchy-Buzano eşitsizliği ve pozitif operatörler için klasik operatör Jensen eşitsizliği kullanılarak ikinci kısımda, Berezin yarıçap eşitsizliklerini ve Hilbert fonksiyon uzayı operatörler için Berezin normunu içeren sınırlı $\tilde{X}$ fonksiyonunu kullanarak bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir. Özellikle, keyfi sınırlı doğrusal operatör X için

$$\text{ber}^4(X) \leq \frac{3}{8} \left\| |X|^4 + |X^*|^4 \right\|_{\text{ber}} + \frac{1}{8} \left\| |X|^2 + |X^*|^2 \right\|_{\text{ber}} \text{ber}(X^2),$$

olduğu kanıtlanmıştır. Bu bağlamda, iyi bilinen diğer iki eşitsizlik de geliştirilmiştir.

Üçüncü kısımda ana hedef, geometrik dışbükey fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği, Kantorovich sabiti, genelleştirilmiş karışık Schwarz eşitsizliği, Kantorovich sabiti ile Young eşitsizliğinin çarpımsal düzenlenmesi ile ilgili bazı bilinen literatürdeki eşitsizlikler kullanılarak operatörler için Berezin sayı eşitsizlikleri sunulmuştur. Devamında Berezin sembolünün tanımından yola çıkarak bazı diğer Berezin sayı

eşitsizlikleri elde edilmiş ve Berezin sayı eşitsizliklerinin genelleştirilmesini içeren bazı diğer eşitsizlikler kurulmuştur.

Dördüncü kısımda, Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının sınırlılıkları tartışılmıştır. Yani, Kuvvet-Young eşitsizliği, McCarty eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyonu ve diğer genellemeleri kullanılarak Hilbert fonksiyon uzay operatörlerinin Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı üst ve alt sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının bir üst sınırı elde edilmiştir.

Son kısımda ise, A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı

$$\text{dwb}_A(X) := \sup_{\rho \in \Omega} \sqrt{|\langle Xk_\rho, k_\rho \rangle_A|^2 + \|Xk_\rho\|_A^4}$$

şeklinde tanımlanmıştır. A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için alt sınırların eşitliği incelenmiş ve Hilbert fonksiyon uzay operatörlerinin A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapı için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Ek olarak, iki sınırlı doğrusal operatörün toplamının A -Davis-Wielandt-Berezin yarıçapının bir üst sınırı elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

Nümerik değer kümesinin dışbükeyliği tartışmasız en esrarengiz özelliği olduğundan, bir kaç belli operatörlerin sınıfı için Cowen ve Felder (2022)'de cevap verilen aşağıdaki soru doğal olarak karşımıza çıkmaktadır:

Soru 1. Acaba Hilbert fonksiyon uzayında sınırlı X operatörü verildiğinde $\text{Ber}(X)$ sürekli mi? Tersine $\text{Ber}(X)$ dışbükey ise X hakkında ne söylenebilir?

Soru 2. Hardy uzayında belli sembollü bileşke operatörünün nümerik ve Berezin kümesi verilmiştir. Toeplitz-Hausdorf teoreminde, normalleştirilmiş çekirdek üreten ile kısıtlanırken başarısız olan nedir?

Berezin aralığı, eliptik durumda olduğundan daha çok geometrik olarak ilginçtir ve açıkça dışbükey değildir. Bu durumda Berezin aralığının dışbükeyliği için nihai olarak bir karakterizasyon verilmiştir. Aslında Karaev, belirli bir model uzayı üzerinde hareket eden z^n ile çarpmanın Berezin aralığını göstermiştir (Karaev, 2013, Örnek 2.1(a)). Eğer $\varphi(z) = \frac{1+z}{2}$ için Hardy uzayında C_φ bileşke operatörü olmak üzere Berezin aralığının diğer operatörler için dairesel bir disk olabileceği ihtimaline işaret edildiği görülmektedir. Bu duruma göre Axler-Zheng teoremi ve onun devamı ışığında, Berezin dönüşümü muhtemelen Bergman uzayında en kullanışlıdır ve kuşkusuz Berezin aralığının bu ortamda dikkate alınması daha doğal olabilir. Buradan doğal olarak aşağıdaki soru ortaya çıkıyor:

Soru 3. Bergman uzayındaki bir operatör sınıfı verildiğinde, bu operatörlerin Berezin aralığının dışbükeyliği hakkında ne söylenebilir?

Cowen ve Felder (2022) çalışmasındaki Teorem 3.2'ye bakıldığında, dikkate alınan çarpım operatörleri karmaşık değildir. Genel olarak, eğer $\mathcal{H}$ bir Banach uzayı Y 'nin kapalı bir alt uzayı ise, $g \in Mult(Y)$ fonksiyonu alınabilir ve $\mathcal{H}$ üzerinde

$$T_g f = P_{\mathcal{H}} g f$$

ile verilen genelleştirilmiş Toeplitz operatörü T_g düşünülebilir, burada $P_{\mathcal{H}}$, Y 'den $\mathcal{H}$ üzerine dik izdüşümdür. Buradan doğal olarak aşağıdaki soru ortaya çıkıyor:

Soru 4. Acaba Hilbert fonksiyon uzayı $\mathcal{H}$ 'da genelleştirilmiş Toeplitz operatörü T_g verildiğinde $Ber(T_g)$ 'nin dışbükeyliği hakkında ne söylenebilir?

Pek çok HFU'da, belirli operatörlerin çeşitli özelliklerinin (örneğin, sınırlılık veya kompaktlık), yalnızca normalleştirilmiş çekirdek üreten küme üzerinde tanımlı operatörün işlevinden çıkarılabileceği iyi bilinmektedir. Bu türden sonuçlar, çekirdek üreten tezleri olarak bilinir. Berezin ve nümerik aralıklar arasında bu tür sonuçların var olup olmadığı sorulabilir:

Soru 5. Acaba Hilbert fonksiyon uzayı $\mathcal{H}$ 'da X operatörü verildiğinde $Ber(X)$ 'den indirgenmiş $W(X)$ 'in herhangi bir özelliği mevcut mu?

$X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ olduğunda eğer X operatörü nilpotent ise o zaman

$$\text{ber}(X) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \|X^{2^n}\|_{\text{ber}}^{1/2^n}$$

eşitsizliği doğru mu? Eğer cevap olumlu ise Başaran vd. (2022) tarafından verilen

$$\text{ber}(X) \leq \frac{1}{2} \left(\|X\|_{\text{ber}} + \|X^2\|_{\text{ber}}^{1/2} \right)$$

eşitsizliği ile ilgili aşağıdaki soru doğal olarak sorulabilir:

Soru 6. $\text{ber}(X) \leq \frac{1}{2} \left(\|X\|_{\text{ber}} + \sqrt{\|X^2\|_{\text{ber}}} \right)$ eşitsizliğinin sağlaması için X^2 hakkında ne söylenebilir?

KAYNAKLAR

- Abu-Omar, A., Kittaneh, F., 2015. Numerical radius inequalities for $n \times n$ operator matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 468, 18–26.
- Abu-Omar, A., Kittaneh, F., 2019. A generalization of the numerical radius. *Linear Algebra and Its Applications*, 569, 323–334.
- Ahern, P., 2004. On the range of the Berezin transform. *Journal Functional Analysis*, 215(1), 206–216.
- Alomari, M., Sahoo, S., Bahherad, M., 2022. Further numerical radius inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(1), 307–326.
- Altwaijry, N., Garayev, M., Guediri, H., Baazeem, A., 2020. Skew-symmetric and essentially unitary operators via Berezin symbols. *Open Mathematics*, 18(1), 1760–1770.
- Arias, M., Corach, G., Gonzales, M., 2008a. Metric properties of projection in semi-Hilbertian spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 62, 11–28.
- Arias, M., Corach, G., Gonzales, M., 2008b. Partial isometric in semi-Hilbertian spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 428(7), 1460–1475.
- Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3), 337–404.
- Audernaert, K., 2015. Interpolating between the arithmetic-geometric mean and Cauchy-Schwarz matrix norm inequalities. *Operators and Matrices*, 9, 475–479.
- Aujla, J., Silva, F., 2003. Weak majorization inequalities and convex functions. *Linear Algebra and Its Applications*, 369, 217–233.
- Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin transform on the Toeplitz algebra. *Studia Mathematica*, 1(2), 113–136.
- Başaran, H., Gürdal, M., 2021. Berezin number inequalities via Young inequality. *Honam Mathematical Journal*, 43(3), 523–537.
- Başaran, H., Gürdal, M., Güncan, A.N., 2019. Some operator inequalities associated with Kantorovich and Hölder–McCarthy inequalities and their applications. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 523–532.
- Başaran, H., Gürdal, V., 2023. Berezin radius and Cauchy-Schwarz inequality. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(3), 16–22.
- Başaran, H., Huban, M., Gürdal, M., 2022. Inequalities related to Berezin norm and Berezin number of operators. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 14(2), 1–11.

- Baklouti, H., Feki, K., Ahmed, O.S., 2018. Joint numerical ranges of operators in semi-Hilbertian spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 555, 266–284.
- Baklouti, H., Feki, K., Ahmed, O.S., 2020. Joint normality of operators in semi-Hilbertian spaces. *Linear and Multilinear Algebra*, 68(4), 845–866.
- Berezin, F.A., 1972. Covariant and contravariant symbols of operators. *Mathematics Of The USSR-Izvestiya*, 6(5), 1117–1151.
- Berezin, F.A., 1974. Qutaization. *Mathematics Of The USSR-Izvestiya*, 8(5), 1109–1163.
- Berger, C., Coburn, L., 1986. Toeplitz operators and quantum mechanics. *Journal of Functional Analysis*, 68(3), 273–299.
- Bhanja, A., Bhunia, P., Paul, K., 2021. On generalized Davis-Wielandt radius inequalities of semi-Hilbertian space operators. *Operators and Matrices*, 15(4), 1201–1225.
- Bhatia, R., 2007. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Bhatia, R., Kittaneh, F., 2008. The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited. *Linear Algebra and Its Applications*, 428, 2177–2191.
- Bhunia, P., Bag, S., Paul, K., 2019. Numerical radius inequalities and its applications in estimation of zeros of polynomials. *Linear Algebra and Its Applications*, 573, 166–177.
- Bhunia, P., Bhanja, A., Bag, S., Paul, K., 2021a. Bounds for the Davis-Wielandt radius of bounded linear operators. *Annals of Functional Analysis*, 12(18), 1–23.
- Bhunia, P., Bhanja, A., Paul, K., 2021b. New inequalities for Davis-Wielandt radius of Hilbert space operators. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44(5), 3523–3539.
- Bhunia, P., Feki, K., Paul, K., 2021c. A-numerical radius orthogonality and parallelism of semi-Hilbertian space operators and their applications. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 47, 435–457.
- Bhunia, P., Paul, K., 2021. New upper bounds for the numerical radius of Hilbert space operators. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 167(102959), 11.
- Bhunia, P., Paul, K., Sen, A., 2023. Inequalities involving Berezin norm and Berezin number. *Complex Analysis and Operator Theory*, 17, <https://doi.org/10.1007/s11785-022-01305-9>.
- Bonsal, F., Duncan, J., 2013. *Numerical Ranges II*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Bonsall, F.F., Duncan, J., 1973. Numerical ranges II. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bourin, J.C., Hiai, F., 2014. Jensen and Minkowski inequalities for operator means and anti norms. *Linear Algebra and Its Applications*, 456, 22–53.
- Buzano, M., 1974. Generalizzazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Trimo*, 31, 405–409.
- Chalender, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M., 2012. Compactness and Berezin Symbols. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 78(1), 315–329.
- Cowen, C., Felder, C., 2022. Convexity of the Berezin range. *Linear Algebra and Its Applications*, 647, 47–63.
- Davis, C., 1968. The shell of a Hilbert-space operator. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 29, 69–86.
- Douglas, R., 1966. On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17, 413–416.
- Douglas, R., 1973. Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators. American Mathematical Society, Providence, R.I.
- Dragomir, S., 2007a. Advances in inequalities of the Schwarz, triangle and Heisenberg type in inner product spaces. New York.
- Dragomir, S., 2007b. Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces. *Demonstratio Mathematica*, 40(2), 411–417.
- Dragomir, S., 2015. Reverses of Schwarz inequality in inner product spaces with applications. *Mathematische Nachrichten*, 288(7), 730–742.
- Dragomir, S., 2019. Some Hermite-Hadamard type inequalities for operator convex functions and positive maps. *Special Matrices*, 7(1), 38–51.
- Engliš, M., 1999. Compact Toeplitz operators via the Berezin transform on bounded symmetric domains. *Integral Equations and Operator Theory*, 33(4), 426–455.
- Feki, K., Sid Ahmed, O., 2020. Davis-Wielandt shells of semi-Hilbertian space operators and its applications. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 14, 1281–1304.
- Frank, M., 1990. Self-duality and C^* -reflexivity of Hilbert C^* -modules. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 9, 165–176.
- Fuji, M., Zuo, H., Shi, G., 2011. Refinement Young inequality with Kantorovich constant. *Journal of Mathematical Inequalities*, 5, 551–556.
- Furuta, T., 1994. An extension of the Heinz-Kato theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(3), 785–787.

- Furuta, T., 2001. Invitation to Linear Operators, From Matrices to bounded linear operators on a Hilbert space. Taylor & Francis, London and New York, 255 pp.
- Furuta, T., Hot, J.M., Pecaric, J., Seo, Y., 2005. Mond–Pecaric Method in Ooperator Inequalities, in: Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space. vol. 1, Element, Zagreb.
- Garayev, M., Bouzeffour, F., Gürdal, M., Yangöz, C., 2020. Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities. *Extracta Mathematicae*, 35(1), 1–20.
- Garayev, M., Gürdal, M., Okudan, A., 2016a. Hardy-Hilbert’s inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 19, 883–891.
- Garayev, M., Guedri, H., Gürdal, M., Alsahli, G., 2021. On some problems for operators on the reproducing kernel Hilbert space. *Linear and Multilinear Algebra*, 69(11), 2059–2077.
- Garayev, M.T., Gürdal, M., Saltan, S., 2017. Hardy type inequality for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems. *Positivity*, 21(14), 1615–1623.
- Garayev, M.T., Guediri, H., Sadraoui, H., 2016b. Applications of reproducing kernels and Berezin symbols. *New York Journal Of Mathematics*, 22, 583–604.
- Gürdal, M., Alomari, M., 2022. Improvements of some Berezin radius inequalities. *Constructive Mathematical Analysis*, 5(3), 141–153.
- Gürdal, M., Başaran, H., 2022. A-Berezin number of operators. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 48(1), 77–87.
- Gürdal, M., Duman, N., 2021. Berezin number inequalities involving superquadratic functions. *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 10(1), 18–27.
- Gürdal, M., Yücel, O., 2022. Berezin radius inequalities and extensions of the Dragomir-Furuta inequality. *Theory and Applications of Mathematics and Computer Science*, 12(1), 21–37.
- Gürdal, V., Başaran, H., 2023. On Berezin radius inequalities via Cauchy-Schwarz type inequalities. *Malaya Journal of Matematik*, 11(2), 1–15.
- Gürdal, V., Güncan, A., 2021. Upper and lower bounds for the Davis-Wielandt-Berezin radius. Preprint.
- Gustafson, K., Rao, D., 1997. Numerical Range, The field of values of linear operators and matrices. Springer, New York.
- Halmos, P.R., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.

- Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G., 1988. *Inequalities*. 2nd edn. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Horn, R.A., Johnson, C.R., 2012. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Huban, M., 2022. Upper and lower bounds of the A -Berezin number of operators. *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 189–206.
- Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2021a. New upper bounds related to the Berezin number inequalities. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 12(3), 1–12.
- Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2022a. Berezin number inequalities via convex functions. *Filomat*, 36(7), 2333–2344.
- Huban, M., Başaran, H., Gürdal, M., 2022b. Some new inequalities via Berezin numbers. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(1), 129–137.
- Huban, M., Gürdal, M., Tilki, H., 2021b. Some classical inequalities and their applications. *Filomat*, 35(7), 2165–2173.
- Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., 2021c. Artan Operatör Konveks Fonksiyon İçin Berezin Sayı Eşitsizliği. *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 9(6), 1–14.
- Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., 2021d. Some new inequalities via Berezin numbers. *3rd International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAME 2021)*, October 1-3. (s. 51).
- Karaev, M., 2002a. Berezin symbols and Schatten-von Neumann classes. *Mathematical Notes*, 72(2), 185–192.
- Karaev, M., 2006a. Berezin set and Berezin number of operators and their applications. *The 8th Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii (WONRA -06)*, University of Bremen, July 15-17, 14.
- Karaev, M., 2006b. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis*, 238(1), 181–192.
- Karaev, M., 2008. On a Beurling-Arveson type theorem for some functional Hilbert spaces and related questions. *Integral Equations and Operator Theory*, 62(1), 77–84.
- Karaev, M., Iskenderov, N., 2013. Berezin number of operators and related questions. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 19(1), 68–72.
- Karaev, M.T., 2002b. Berezin symbols and Schatten-von Neumann classes. *Matematics Notes*, 72, 185–192.

- Karaev, M.T., 2012. Use of reproducing kernels and Berezin symbols technique in some questions of operator theory. *Forum Mathematicum*, 24(3), 553–564.
- Karaev, M.T., 2013. Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7(4), 983–1018.
- Kato, T., 1952. Notes on some inequalities for linear operators. *Mathematische Annalen*, 125, 208–212.
- Kittaneh, F., 1988. Notes on some inequalities for Hilbert space operators. *Publications of RIMS Kyoto University*, 24, 283–293.
- Kittaneh, F., 2003. A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix. *Studia Mathematica*, 158(1), 11–17.
- Kittaneh, F., 2005. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. *Studia Mathematica*, 168(1), 73–80.
- Kittaneh, F., Manasrah, Y., 2011. Reverse Young and Heinz inequalities for matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 59, 1031–1037.
- Kılıç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44p, New Hampshire.
- Kılıç, S., 1995. The Berezin symbol and multipliers of functional Hilbert spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(12), 3687–3691.
- Krein, M., 1998. Compact linear operators on functional spaces with two norms. *Integral Equations and Operator Theory*, 30, 140–162.
- Li, C.K., Poon, Y.T., 2009. Spectrum, numerical range and Davis-Wielandt shell of a normal operator. *Glasgow Mathematical Journal*, 51, 91–100.
- Li, C.K., Poon, Y.T., Sze, N., 2008. Davis-Wielandt shells of operators. *Operators and Matrices*, 2, 341–355.
- Lins, B., Spitkovsky, I., Zhong, S., 2018. The normalized numerical range and the Davis-Wielandt shell. *Linear Algebra and its Applications*, 546, 187–209.
- Lumer, G., 1972. Complex methods, and the estimation of operator norms and spectra from real numerical ranges. *Journal of Functional Analysis*, 10, 482–495.
- Lumer, G., Rosenblum, M., 1959. Linear operator equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10, 32–41.
- Mićić, J., Seo, Y., Takahasi, S.E., Tominaga, M., 1999. Inequalities of Furuta and Mond-Pečarić. *Mathematical Inequalities and Applications*, 2, 83–111.

- Moslehian, M., Muñoz-Fernández, G., Peralta, A., Seoane-Sepúlveda, J., 2022. Similarities and differences between real and complex Banach spaces: an overview and recent developments. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 116(2), 88.
- Murphy, G., 1990. *C*-algebras and Operator Theory*. Academic, Boston, MA.
- Najafi, H., 2020. Some numerical radius inequality for several operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 588, 489–496.
- Niceleshu, C.P., 2000. Convexity according to the geometric mean. *Mathematical Inequalities and Applications*, 3, 155–167.
- Nikolski, N.K., 1986. *Treatise on the shift operator*. Heidelberg, V. 73, Springer-Verlag Berlin, s. 491.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362–368.
- Omidvar, M.E., Moradi, H.R., 2021. New estimates for the numerical radius of Hilbert space operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 69, 946–956.
- Paul, K., Bag, S., 2012. On the numerical radius of a matrix and estimation of bounds for zeros of a poly nomial. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012, Article Id 129132.
- Rao, N., 2018. The range of the Berezin transform, *Problems in Mathematical Analysis. J. Math. Sci. (N.Y.)*, 228(6), 684–694.
- Rout, N., Sahoo, S., Mishra, D., 2021. Some A -numerical radius inequalities for semi-Hilbertian space operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 69(5), 980–996.
- Sababheh, M., Moradi, H.R., Furuichi, S., 2019. Operator inequalities via geometric convexity. *Mathematical Inequalities and Applications*, 22, 1215–1231.
- Sain, D., Mal, A., Bhunia, P., Paul, K., 2021. On numerical radius and Crawford number attainment sets of a bounded linear operator. *Journal of Convex Analysis*, 28(1), 67–80.
- Saitoh, S., 1988. *Theory of reproducing kernels and its applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Saitoh, S., 1997. *Integral transforms, Reproducing kernels and their applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Saltan, S., Baskan, N., 2023. Some refinements of Berezin number inequalities via convex functions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(1), 32–42.

- Saltan, S., Tapdigoglu, R., Çalışır, I., 2022. Some new relations between the Berezin number and the Berezin norm of operators. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 52(5), 1767–1774.
- Simon, B., 1979. *Trace Ideals and Their Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Suárez, D., 2007. The essential norm of operators in the Toeplitz algebra on $A^p(B_n)$. *Indiana University Mathematics Journal*, 56(5), 2185–2232.
- Sylvester, J., 1884. Sur l'equations en matrices $px = xq$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*, 99(2), 115–116.
- Tapdigoglu, R., Gürdal, M., Altwaijry, N., Sarı, N., 2021. Davis-Wielandt-Berezin radius inequalities via Dragomir inequalities. *Operators Matrices*, 15(4), 1445–1460.
- Tolokonnikov, V., 1981. Estimates in the Carleson corona theorem, ideals of the algebra H^∞ , a problem of Sz.-Nagy. *Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 113(9), 178–198.
- Čučković, e., 2012. Berezin Transform, Mellin Transform and Toeplitz Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, 6(1), 189–218.
- Wielandt, H., 1955. On eigenvalues of sums of normal matrices. *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 633–638.
- Wolff, T., 2002. Counterexamples to two variants of the Helson-Szego theorem. *Journal d'Analyse Mathématique*, 88, 41–62.
- Yamancı, U., Gürdal, M., 2017. On numerical radius and Berezin number inequalities for reproducing kernel Hilbert space. *New York Journal of Mathematics*, 23, 1531–1537.
- Yamancı, U., Gürdal, M., Garayev, M.T., 2017. Berezin Number Inequality for Convex Function in Reproducing Kernel Hilbert Space. *Filomat*, 31(18), 5711–5717.
- Yamancı, U., Karlı, .M., 2021. Further refinements of the Berezin number inequalities on operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(20), 5237–5246.
- Yamancı, U., Tunç, R., Gürdal, M., 2020. Berezin Number, Grüss-Type Inequalities and Their Applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43, 2287–2296.
- Yamazaki, T., 2007. On upper and lower bounds of the numerical radius and an equality condition. *Studia Mathematica*, 178(1), 83–89.
- Zaanen, A., 1950. Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations. *Acta Mathematica*, 83, 197–248.

- Zamani, A., 2019a. A -numerical radius inequalities for semi-Hilbertian space operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 578, 159–183.
- Zamani, A., 2019b. Characterization of numerical radius parallelism in C^* -algebras. *Positivity*, 23(2), 397–411.
- Zamani, A., Moslehian, M., Chien, M.T., Nakazato, H., 2019. Norm-parallelism and the Davis-Wielandt radius of Hilbert space operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 67, 2147–2158.
- Zamani, A., Shebrawi, K., 2019. Some upper bounds for the Davis-Wielandt radius of Hilbert space Operators. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17, 25.
- Zamani, A., Wójcik, P., 2021. Another generalization of the numerical radius for Hilbert space operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 609, 114–128.
- Zorboska, N., 2019. Closed range type properties of Toeplitz operators on the Bergman space and the Berezin transform. *Complex Analysis and Operator Theory*, 13(8), 4027–4044.