



**HADAMARD-TİPLİ k -BASAMAK PELL
DİZİLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE SONLU
GRUPLARDA İNCELENMESİ**

Muhammad Eshaq RASHEDI

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ömür DEVECİ
2023**



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



HADAMARD-TİPLİ k -BASAMAK PELL DİZİLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE
SONLU GRUPLARDA İNCELENMESİ

Muhammad Eshaq RASHEDI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

TEMMUZ-2023
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Muhammad Eshaq RASHEDI'nin Prof. Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı “ Hadamard-Tipli k -Basamak Pell Dizilerinin Elde Edilmesi ve Sonlu Gruplarda İncelenmesi” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

.. / .. / 2023

Adı ve Soyadı

İmza

Başkan : Prof. Dr. Ömür DEVECİ
Üye : Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .. / .. / 2023 gün ve ..
.../. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Muhammad Eshaq RASHEDI

Tarih

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

HADAMARD-TİPLİ k -BASAMAK PELL DİZİLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE SONLU GRUPLARDA İNCELENMESİ

Muhammad Eshaq RASHEDI

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tez çalışmasında, Pell ve genelleştirilmiş k -basamak Pell dizilerinin karakteristik polinomlarının Hadamard tipli çarpımı ile yeni bir k -basamak dizi tanımlanmıştır ve bu diziye Hadamard tipli k -basamak Pell dizisi adı verilmiştir. Daha sonra tanımlanan bu dizinin üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ile sonlu toplamaları gibi çeşitli özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, tanımlanan dizinin üreteç matrisi m modülüne göre indirgenerek bu matrisin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretilmiş ve dizinin m modülüne göre periyotları belirlenmiştir. Üretilen devirli grupların mertebeleri ve dizinin periyotları arasında bağıntılar elde edilmiştir. Son olarak, SD_{2^m} semidihedral grup ve QD_{2^m} quasi-dihedral gruplarındaki Hadamard tipli 3-basamak Pell dizilerinin periyotları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: k -basamak Pell Dizisi, Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci Dizisi, Hadamard-tipli k -basamak Pell Dizisi, Sonlu Gruplarda Hadamard-tipli k -basamak Pell Dizileri, Matris, Grup, Periyot.

2023, 85 Sayfa

ABSTRAT

(M. Sc. Thesis)

THE OBTAINING HADAMARD-TYPE k -STEP PELL SEQUENCES AND EXAMINING THESE SEQUENCES IN FINITE GROUPS

Muhammad Eshaq RASHEDI

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

In this thesis, a new k -order sequence is defined by the Hadamard type product of the characteristic polynomials of the Pell and generalized k -step Pell sequences, and this sequence is called the Hadamard type k -step Pell sequence. Miscellaneous properties of the sequences defined such as the generating matrix, the generating functions, the Binet formula, the permanental, determinantal, exponential and combinatorial representations and finite sums were obtained. Futhermore, cyclic groups were produced with the help of the force of these matrix by reducing according to the modulo m the generator matrix of the defined sequence and the periods of sequence were determined according to the modulo m . The relations between the order of the cyclic groups produced and the periods of the sequence was obtained. Finally, the periods of the Hadamard-type 3-step Pell sequences in the semidihedral group SD_{2^m} and the quasi-dihedral group QD_{2^m} was examined.

Key Words: k -step Pell Sequences, Hadamard-type k -step Fibonacci Sequences, Hadamard-type k -stap Pell Sequences, Hadamard-type k -step Pell Sequences in Finite Groups, Matrix, Group, Period.

2023, 85 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımnda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sırasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri sayın Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM'e ve Arş. Gör. Özgür ERDAĞ'a Hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum beni en iyi şekilde yetiştiren, bugüne kadar hiçbir desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İmza

Muhammad Eshaq RASHEDI

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	III
ABSTRACT	IV
ÖNSÖZ.....	V
İÇİNDEKİLER	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Grup Takdimleri.....	3
1.2 Matris Cebiri	10
1.3 Lineer İndirgemeli Diziler	26
1.4 Fibonacci Dizisi	30
1.5 Pell Dizisi	32
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	35
2.1 Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci Dizileri	35
2.2 Gruplarda Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci Dizileri	46
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	63
3.1 Hadamard-Tipli k -basamak Pell Dizileri	63
3.2 Sonlu Gruplarda Hadamard-Tipli k -basamak Pell Dizileri	72
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	78
5. KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ.....	85

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	: Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
G	: Grup
$ G $	: Grubun mertebesi
$H \leq G$	: H, G nin alt grubu
$H \triangleright G$	: H, G nin normal alt grubu
$\langle H, +, \cdot \rangle$	: Halka
$\det A$	: A matrisinin determinanı
$\text{per}(A)$	: A matrisinin permanenti
$M \circ K$	: M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı
D_{2n}	: Dihedral grup
$Q_{2^{n+1}}$	: Geneleştirilmiş Quaternion grup
SD_{2^m}	: Semidihedral grup
QD_{2^m}	: Quasi-dihedral grup
$C(c_1, c_2, \dots, c_v)$	: $v \times v$ boyutlu bir Companion matris
V_k	: Vandermonede matris
$\{F_n\}$	: Fibonacci dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$	: k -basamak Fibonacci dizisi
$\{P_n\}$	: Pell dizisi
$\{P_n^k\}$	: Geneleştirilmiş k -mertebeden Pell sayıları
$f(x) * g(x)$	: Polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı
$\{HF_k(n)\}$	: Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi

FM_k^h	:	Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisi
$PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	:	$HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin periyodu
$\overline{HF_k}(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	:	Esas Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi
$\overline{PHF_k}(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	:	Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin esas periyodu
HP_n^k	:	Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi
H_k^p	:	Hadamard-tipli k -basamak Pell matrisi
$ \langle Q \rangle_m $	:	$\langle Q \rangle_m$ grubunun mertebesi
$h^{k,p}(m)$	:	$\{HP_n^{k,m}\}$ Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin m modülüne göre periyod uzunluğu
$LHP^k(G; a_0, a_1, \dots, a_{j-1})$	:	$HP^k(G; a_0, a_1, \dots, a_{j-1})$ Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin periyodu

1. GİRİŞ

Son derece öneme sahip olan indirgemeli diziler disiplinler arası ilişkiler noktasında sıkça rastlanmaktadır. Bu çalışmaların güncel olanlarına örnek olarak [1-8]'deki çalışmalar verilebilir. Daha sonra bu Cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin; üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, üstel, permanental, determinantal ve toplamsal temsilleri ile sonlu toplamaları gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve çalışılmaya da devam edilmektedir. Bu çalışmaların güncel olanlarına örnek olarak [9-21]'deki çalışmalar verilebilir. Bu çalışmaların birçoğunda indirgemeli dizilerin üreteç matrisleri ve bu matrisler yardımıyla tanımlanan özel matrisler kullanılarak ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

İndirgemeli diziler, cebirsel yapılara ilk olarak Wall'ın [22]'deki çalışması ile taşınmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda standart Fibonacci dizisini incelemiştir. Daha sonra Wilcox [23]'deki çalışmasıyla teoriyi değişmeli (abelyen) gruplara genişletmiştir. Sonraki süreçte ise konsept farklı indirgemeli diziler ve farklı cebirsel yapılara taşınmıştır. Bu çalışmaların güncel olanlarına örnek olarak [10, 12, 24-28, 29-31, 32-36, 37-44]'deki çalışmalar verilebilir.

[12, 24, 30, 31, 35, 36, 43-51]'deki çalışmalarda ise özel tanımlı matrisler kullanılarak devirli gruplar üretilmiş ve bu grupların mertebeleri için çeşitli kurallara ulaşılmıştır.

Önceki çalışmalarda indirgemeli diziler kullanılarak karesel matrisler (üreteç matrisleri) tanımlanmışken, ilk olarak [11, 12, 24, 31, 46-48, 52] çalışmalarında; özel tanımlı karesel matrisler kullanılarak indirgemeli diziler elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının 1. bölüm, üzerinde çalışılacak gruplar ve lineer indirgemeli diziler hakkında temel bilgi ve teoremler sunulmuştur.

2. bölümünde, Hadamard-tipli k -basmak Fibonacci dizisi tanımlanmış ve yapısal özellikleri belirlenmiştir. Bunlara ek olarak, tanımlanan bu dizi gruplara taşınmış ve sonlu gruplarda detaylı olarak incelenmiştir. Ulaşılan bulguların uygulaması olarak da,

dizinin gruptaki karşılığının D_{2n} dihedral grup ve $Q_{2^{n+1}}$ genelleştirilmiş quaternion gruptaki periyotları elde edilmiştir.

3. Bölümünde ise Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi tanımlanmış, çeşitli özellikleri belirlenmiş ve bu dizi gruplara taşınmıştır. Bu manada;

Deveci ve arkadaşları [53]'deki çalışmalarında, Pell ve genelleştirilmiş k -basamak Pell dizilerinin karakteristik polinomlarının Hadamard tipli çarpımı ile yeni bir k -basamak dizi tanımlanmış ve bu diziye Hadamard tipli k -basamak Pell dizisi adı vermişlerdir. Daha sonra tanımlanan bu dizinin üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ile sonlu toplamaları gibi çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir.

Deveci ve arkadaşlarının [54]'deki çalışmalarında ise tanımlanan Hadamard tipli k -basamak Pell dizisinin üreteç matrisi m modülüne göre indirgenerek bu matrisin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretilmiş ve dizinin m modülüne göre periyotları belirlenmiştir. Buna ek olarak, üretilen devirli grupların mertebeleri ile dizinin periyotları arasında bağıntılar elde edilmiştir. Yapılan çalışmanın değişmeli olmayan gruptaki uygulaması olarak da, SD_{2^m} semidihedral ve QD_{2^m} quasi-dihedral grupların elemanları ile tanımlanan Hadamard tipli 3-basamak Pell dizilerinin periyotları belirlenmiştir.

1.1. Grup Takdimleri

Tanım 1.1.1: $G \neq \emptyset$ bir küme olsun. $*$: $G \times G \rightarrow G$ olmak üzere

$$(x, y) \rightarrow x * y$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona G üzerinde bir ikili işlem denir. Bu ikili işlemle birlikte G kümesine bir cebirsel yapı denir ve $(G, *)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.1: $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ve $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + y - 3xy$ şeklinde tanımlanan ikili işlemdir.

Tanım 1.1.2: $G \neq \emptyset$ bir küme ve $*$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olmak üzere, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G, *)$ cebirsel yapısına grup denir:

$G_1)$ $\forall x, y \in G$ için $x * y \in G$ (Kapalılık özelliği)

$G_2)$ $\forall x, y, z \in G$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ (Birleşme özelliği)

$G_3)$ $\forall x \in G$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

$G_4)$ e , G nin birim elemanı olmak üzere G kümesindeki her bir x için

$$x * x' = x' * x = e$$

olacak şekilde $x' \in G$ vardır (Ters elemanın varlığı).

Örnek 1.1.2: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{C}, +)$ cebirsel yapıları birer gruptur.

Tanım 1.1.3: $(G, *)$ cebirsel yapısı için sadece kapalılık ve birleşme özellikleri yani G_1 ve G_2 şartları sağlanırsa o takdirde G kümesine $*$ ikili işlemine göre bir yarı grup denir.

Tanım 1.1.4: $(G, *)$ cebirsel yapısı için G_1 , G_2 ve G_3 şartları sağlanırsa o takdirde $(G, *)$ cebirsel yapısına monoid denir.

Tanım 1.1.5: $(G, *)$ cebirsel yapısı bir grup olmak üzere $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ oluyorsa, G ye değişmeli (abelyan) grup denir.

Tanım 1.1.6: Bir G grubunun elemanlarının sayısına G nin mertebesi denir. $|G|$ veya $\circ(G)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.1: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre

- (i). G nin birimi tektir.
- (ii). G nin her elemanının tersi tektir.
- (iii). $x \in G$ için $x * x = x$ ise $x = e$ dir.
- (iv). G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a, b, c \in G$ için,
 $a * b = a * c$ ise $a = c$ (soldan kısaltma kuralı)
 $b * a = c * a$ ise $b = c$ (sağdan kısaltma kuralı)
- (v). $a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.
- (vi). $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır [55].

Tanım 1.1.7: $|G|$ sonlu ise G ye sonlu bir grup, sonsuz ise sonsuz grup adı verilir.
 $|G| = n$ ise G ye n -inci mertebeden bir grup denir.

Tanım 1.1.8: G bir grup ve H de G ' nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere H kümesi G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9: G bir grup ve e de G 'nin birim elemanı olmak üzere $\{e\}$ kümesi ve G grubunun kendisine G nin aşık alt grupları denir.

Tanım 1.1.10: G bir grup, e G 'nin birim elemanı ve $H \leq G$ olsun. $H \neq G$ ve $\{e\} \neq H$ ise o zaman H ye G nin bir özalt grubu denir.

Tanım 1.1.11: G bir grup ve H da G 'nin bir alt grubu olsun. $\forall g \in G$ için $gH = Hg$ eşitliği sağlanırsa H a G nin normal bir alt grubudur denir ve $H \triangleleft G$ ile gösterilir. G toplama işlemine göre bir grup olduğu zaman $gH = Hg$ eşitliği $g + H = H + g$ şeklinde gösterilecektir.

Örnek 1.1.3: $(3\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{Z}, +)$ 'nin alt grubudur.

Tanım 1.1.12: N , G nın bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N bu çarpıma göre bir gruptur ve bu gruba G nin N ye göre bölüm grubu denir.

Tanım 1.1.13: G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ara kesitini $\langle A \rangle$ ile gösterelim. Bu takdirde $\langle A \rangle$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.14: G bir grup olmak üzere $S = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubuna G nin x elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle x \rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = S$$

dir. Buradan yola çıkarak devirli gruplar aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

G bir grup olmak üzere G de $G = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir x elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir x elemanına G nin üretici denir ve $G = \langle x \rangle$ şeklinde gösterilir [55].

Tanım 1.1.15: G bir grup ve $x \in G$ olsun. Eğer $\langle x \rangle$ sonlu bir grup ise o zaman $\langle x \rangle$ alt grubunun eleman sayısına x nin mertebesi denir ve $\circ(x)$ veya $|x|$ ile gösterilir [56].

Teorem 1.1.2: Her devirli grup deęişmelidir.

Teorem 1.1.3: Devirli bir grubun her alt grubu devirlidir.

Teorem 1.1.4: Aynı mertebeli herhangi iki devirli grup izomorfdur.

Sonuç 1.1.1: G bir devirli grup olsun. Eğer G sonsuz ise $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesine $|G| = n$ olduğunda ise $\mathbb{Z}_n$ kümesine izomorftur.

Teorem 1.1.5: G bir grup ve x de G nin mertebesi n olan bir elemanı olsun $x \in G$ ve x nın mertebesi n yani $\circ(x) = n$ olsun. Buna göre;

- i) Eğer x in mertebesi sonsuz ise o taktirde x in bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.
 - ii) Eğer x in mertebesi sonlu ise o taktirde $x^n = e$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayı n ise o taktirde x nın ürettiği devirli grubun yani $\langle x \rangle$ in mertebesi de n dır.
- Diğer bir ifadeyle;

$$\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

dir.

- iii) x in mertebesi sonlu ve n olmak üzere $x^k = x^l$ olması için gerek ve yeter şart $k \equiv l \pmod{n}$ olmasıdır.

- iv) $\circ(x) = n$ sonlu olmak üzere $x^k = e$ olması için gerek ve yeter şart $n|k$ olmasıdır [55].

Sonuç 1.1.2: $G = \langle x \rangle$ sonlu bir devir grubu ve $\circ(G) = k < \infty$ olsun. $S \neq \{e\}$ ve $x^n \in S$ olacak şekilde $n > 0$ pozitif tamsayılarının en küçüğü m olmak üzere $S = \langle x^m \rangle$ olduğu kabul edilsin. O halde,

$$m|k \text{ ve } \circ(S) = \frac{k}{m}$$

dir [57].

$G = \langle x \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grup olsun. x^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından x^m tarafından üretilen $S = \langle x^m \rangle$ devirli alt grubu da sonsuz olur [55].

Teorem 1.1.6: G , x tarafından üretilen n mertebeli bir devirli grup olsun. G grubunun x^m tarafından üretilmesi için yani $G = \langle x^m \rangle$ olması için gerek ve yeter şart n ile m nin aralarında asal olmasıdır.

Yukarıdaki teorem göz önüne alınarak bir m tamsayısının $(\mathbb{Z}_n, +)$ devirli grubunun bir üretici olması için gerek ve yeter şartın $(m, n) = 1$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Tanım 1.1.16: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir [58].

Tanım 1.1.17: X bir küme olsun. $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R \subseteq F(X)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ 'ye G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine de tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir.

Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [58].

Tanım 1.1.18: P boş olmayan bir küme olmak üzere eğer $f : P \rightarrow P$ dönüşümü 1-1 ve örten ise o zaman f dönüşümüne P kümesinin bir permütasyonu denir.

P kümesi üzerindeki bütün permütasyonları kümesini S_P ile gösterirsek S_P kümesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup teşkil eder.

P yı n elemanlı $(1, 2, \dots, n)$ kümesi olarak kabul edelim. Bu durumda S_P yı S_n ile göstereceğiz ve simetrik grup olarak adlandıracağız. S_n simetrik grubunun mertebesi $n!$ dir.

Tanım 1.1.19: $P = (1, 2, \dots, n)$ kümesinin $k \leq n$ olmak üzere 1 ile n arasında elemanlarının $r_1, r_2, \dots, r_n$ ile gösterelim. Buna göre eğer $f \in S_n$ permütasyonu aşağıdaki şartları sağlarsa o takdirde f ye k uzunluğunda bir devir ya da kısaca bir k -devir denir ve $f = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ şeklinde gösterilir

i.) $f(r_i) = r_{i+1}, 1 \leq i \leq k$

ii.) $f(r_k) = r_1$

iii.) $n \notin \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ ise o zaman $f(n) = n$ dir[55].

$f = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, k uzunluğunda bir devir olmak üzere $k = 1$ ise f ye birli devir, $k = 2$ ise f ye ikili devir ya da transpozisyon denir.

Tanım 1.1.20: Bir S_n simetrik grubundaki bir f permütasyonu transpozisyonların çarpımı olarak yazıldığında bu transpozisyonların sayısı çift ise f ye çift permütasyon tek ise tek permütasyon denir.

S_n nin bütün çift permütasyonlarının kümesini A_n ile göstereceğiz. A_n , S_n nin indeksi 2 olan bir normal alt grubu olup mertebesi $\frac{n!}{2}$ dir.

Tanım 1.1.21: $G = \langle X : R \rangle$ ve $H = \langle Y : S \rangle$ herhangi iki grup olmak üzere $G \times H$ direkt çarpımı,

$$[X : Y] = \{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$$

olmak üzere

$$G \times H = \langle X, Y : R, S, [R, S] \rangle$$

şeklinde tanımlanır [58].

Tanım 1.1.22: G , j -gerenli sonlu bir grup ve

$$X = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \in \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_j \mid \langle \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}\} \rangle = G \right\}$$

olsun. $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ifadesine G için bir geren j -lisi denir.

Tanım 1.1.23: $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere ve bu iki grup arasında tanımlanan $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

koşulu sağlıyorsa bu dönüşüme bir grup homomorfizmi denir.

Tanım 1.1.24: $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümü bir homomorfizm olsun. φ homomorfizmi birebir ise φ 'ye monomorfizm denir.

Tanım 1.1.25: $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümü bir homomorfizm olsun. φ homomorfizmi örten ise φ 'ye epimorfizm denir.

Tanım 1.1.26: $\varphi: G \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. φ homomorfizmi birebir ve örten ise φ dönüşümüne bir izomorfizm, G ile H gruplarına ise izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.27: $\varphi: G \rightarrow G$ dönüşümü bir homomorfizm olsun. φ homomorfizmi birebir ve örten ise φ 'ye otomorfizm denir.

Tanım 1.1.28: $n \geq 3$ için $2n$ mertebeli D_{2n} dihedral grubu

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.29: $n \geq 2$ için 2^{n+1} mertebeli $Q_{2^{n+1}}$ genelleştirilmiş quaternion grubu

$$Q_{2^{n+1}} = \langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2, a^{2^n} = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.30: $m \geq 4$ için 2^m mertebeli SD_{2^m} semidihedral grubu

$$SD_{2^m} = \langle x, y : x^{2^{m-1}} = y^2 = e, y^{-1}xy = x^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.31: $m \geq 4$ için 2^m mertebeli QD_{2^m} quasi-dihedral grubu

$$QD_{2^m} = \langle x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = e, yxy = x^{1+2^{m-2}} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

1.2. Matris Cebiri

Tanım 1.2.1: F bir cisim, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} \in F$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgen tabloya $m \times n$ boyutunda bir matris denir. i -inci satır ve j -inci sütunun kesişimin de bulunan cismin elemanına matrisin (i, j) -inci elemanı denir. Bu çalışmada bir A matrisini $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ notasyonu ile göstereceğiz.

Teorem 1.2.1: A, B ve C aynı mertebeden (aynı boyutlu) matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

- i. $A + B = B + A$ (değişme özelliği)
- ii. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (birleşme özelliği)
- iii. $A + 0 = 0 + A = A$ (etkisiz eleman)
- iv. $A - A = 0$
- v. $\lambda_1 (A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$
- vi. $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
- vii. $(\lambda_1 \lambda_2) A = \lambda_1 (\lambda_2 A)$
- viii. $1.A = A.1 = A$

özellikleri vardır [59].

Tanım 1.2.2: Bir satır matrisi ile bir sütun matrisinin çarpılabilmesi için onların her birinin aynı sayıda elemana sahip olması gerekir.

Eğer $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ ve $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ ise, o zaman uv aşağıdaki gibi tanımlanan 1×1

boyutlu bir matristir [57].

$$uv = [u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_mv_m] = \left[\sum_{j=1}^m u_j v_j \right].$$

Tanım 1.2.3: $A = [a_{ij}]_{m \times r}$ ve $B = [b_{ij}]_{r \times n}$ iki matris olsun. Yani A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit olmak üzere bu iki matrisin çarpımı $A \cdot B$ ile gösterilip bu çarpımın neticesi $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ tipinde bir matris olur ve c_{ij} elemanı

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 1.2.2: i. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times t}$ ve $C = [c_{ij}]_{n \times t}$ olmak üzere sol dağılma kuralı denilen

$$A(B + C) = AB + AC \quad (1.2.1)$$

kuralı geçerlidir.

ii. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{t \times n}$ ve $C = [c_{ij}]_{t \times m}$ olmak üzere sağ dağılma kuralı denilen

$$(B + C)A = BA + CA \quad (1.2.2)$$

kuralı geçerlidir [57].

İspat: i. önce (1.2.1) nin sol tarafını göz önüne alalım. $B + C = D$ ve D nin genel elemanı d_{ij} olsun. Bu durumda c_{ij}

$$B + C = [b_{ij}]_{n \times t} + [c_{ij}]_{n \times t} = [d_{ij}]_{n \times t} = D$$

ve

$$d_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (1.2.3)$$

yazılır. Şimdi de $A(B+C)=AD=E$ ve E nin genel elemanın e_{ij} olduğunu farz edelim. Buna göre

$$AD = [a_{ij}]_{m \times n} [d_{ij}]_{n \times t} = [e_{ij}]_{m \times t} = E \quad (1.2.4)$$

ve

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} \quad (1.2.5)$$

yazılır ve (1.2.3) den

$$d_{kj} = b_{kj} + c_{kj} \quad (1.2.6)$$

yazılabileceği kolaylıkla görülür. Böylece (1.2.6) ifadesi (1.2.5) da yerine yazılırsa

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [b_{kj} + c_{kj}] = \sum_{k=1}^n [a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}] = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \quad (1.2.7)$$

elde edilir. Şimdi de (1.2.1) ifadesinin sağ tarafı göz önüne alalım. Burada da $AB=Y$; Y nin genel elemanı y_{ij} , $AC=Z$ ve Z nin genel elemanı z_{ij} olduğu kabul edilsin. Buna göre

$$AB = [a_{ij}]_{m \times n} [b_{ij}]_{n \times t} = [y_{ij}] = Y \quad (1.2.8)$$

ve

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (1.2.9)$$

yazılır. Yine aynı şekilde

$$AC = [a_{ij}]_{m \times n} [c_{ij}]_{n \times t} = [z_{ij}]_{m \times t} = Z \quad (1.2.10)$$

ve

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \quad (1.2.11)$$

ifadeleri yazılır. Son olarak $AB+AC=T$ ve T nin genel elemanı t_{ij} ile gösterilirse o zaman

$$AB + AC = Y + Z = [y_{ij}]_{m \times t} + [z_{ij}]_{m \times t} \quad (1.2.12)$$

$$[y_{ij} + z_{ij}]_{m \times t} = [t_{ij}]_{m \times t} = T$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \quad (1.2.13)$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda (1.2.4) ve (1.2.12) den E ve T matrislerinin mertebeleri eşit olduğu, yine (1.2.7) ve (1.2.13) den E ve T matrislerinin elemanlarının eşit olduğu sonucu elde edilir. Bu da matrislerin eşitliği tanımına göre $E = T$ olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise (1.2.1) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

ii. için ispat benzerdir.

Tanım 1.2.4: $A = [a_{ij}]$ matrisinin bütün elemanları sıfır ise; yani $\forall i, j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine sıfır matris denir.

Tanım 1.2.5: Bir matrisin satır ve sütun sayısı eşit ise yani $m = n$ ise bu matrise karesel matris (kare matris) denir.

Örneğin;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 boyutlu bir kare matristir.

Tanım 1.2.6: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ mertebeden bir kare matris olmak üzere $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine köşegen matris denir.

Tanım 1.2.7: Köşegen üzerindeki bütün elemanları aynı skalere eşit olan köşegen matrise skaler matris denir.

Tanım 1.2.8: Bir kare matrisin köşegen üzerindeki tüm elemanları 1 diğer elemanları sıfır ise bu matrise birim matris denir. $n \times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

Örneğin;

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi birim matristir.

Tanım 1.2.9: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin satırları sütun ve sütunları da satır yapılarak elde edilen matrise A matrisinin transpozü denir ve A^T ile gösterilir. A^T matrisi $n \times m$ boyutlu bir matris olarak elde edilir. Yani

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.10: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, kare matrisi olmak üzere; $j > i, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine alt üçgen matris denir ve $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, kare matrisi olmak üzere $j < i, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine üst üçgen matris denir.

Buna göre $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ alt üçgen ve $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ üst üçgen matrisler;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.11: S_n , simetrik grup, $\sigma \in S_n$ bir permütasyon ve

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1; & \sigma \text{ çift ise} \\ -1; & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonu olmak üzere $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin determinanı

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2.12: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi için $a_{i,j+1} = 1$, $a_{n1} = 1$ ve diğer bütün elemanlar sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matrisi denir [57].

Tanım 1.2.13: A , $n \times n$ boyutlu bir kare matris ve I , $n \times n$ boyutlu birim matris olmak üzere,

$$AB = BA = I$$

eşitliğini sağlayan $n \times n$ boyutlu bir B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Ters olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün, tekil olmayan) matrisler denir [57].

Teorem 1.2.3: Bir kare matrisinin tersi varsa o zaman bu ters tektir [57].

İspat: Bir A kare matrisin B ve C gibi iki tane tersinin olduğunu varsayalım. Bu durumda ters matrisin tanımından dolayı A matrisinin tersi B ise,

$$AB = BA = I \quad (1.2.14)$$

ve eğer A matrisinin tersi C ise,

$$AC = CA = I \quad (1.2.15)$$

yazılır. Eğer $B = C$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunu için (1.2.14) ve (1.2.15) ifadelerini ve matrislerin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini göz önüne alarak

$$B = I \quad B = (CA)B = C(AB) = C \quad I = C$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.2.4: A ve B ters çevrilebilir iki $n \times n$ boyutlu matris ise, o zaman AB çarpımı da ters çevrilebilirdir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir [57].

İspat: A ve B matrisleri ters çevrilebilir matrisler ise, o zaman ters matris tanımından

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \text{ve} \quad BB^{-1} = B^{-1}B = I$$

yazılır. Diğer taraftan matris çarpımının birleşme özelliğini kullanarak

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I \quad \text{ve} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

yazılır. Böylece bunları birleştirerek

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

yazmak mümkündür. Bu son ifade ise ters matris tanımı gereğince AB matrisinin tersinin $B^{-1}A^{-1}$ olduğunu ifade eder. Böylece AB ters çevrilebilirdir ve bu ters (invers) tek olduğundan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.2.14: A sıfır olmayan bir n -kare matris olmak üzere $AB = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir B , n -kare matris varsa, o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir n -kare matris olmak üzere $CA = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir C , n -kare matris varsa, o zaman A matrisine sağ sıfır bölen matrisi denir. Eğer A matrisi hem sol sıfır bölen matrisi hem de sağ sıfır bölen matrisi ise, o takdirde A matrisine sadece sıfır bölen matris denir [57].

Teorem 1.2.5: $A \neq 0$ bir kare matris olmak üzere eğer tersi mevcut ise, o takdirde A matrisi bir sıfır bölen matrisi değildir [57].

İspat: Eğer $AB = 0$ ya da $CA = 0$ ve A matrisinin tersi A^{-1} ise, o takdirde

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B = 0$$

veya

$$(CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CI = C = 0$$

yazılır. Bu A matrisinin bir sıfır bölen matrisi olmadığını gösterir.

Tanım 1.2.15: Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır denir.

i. İlk k tane satır sıfırdan farklı ve $(k+1)$ -inci satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

ii. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir ve bu 1 ler $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ olacak şekilde s_j -inci sütunda bulunurlar.

iii. Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij} = 1$ ise j -inci sütundaki a_{ij} nin altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Yukarıdaki iii koşulu a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır, şeklinde alınırsa, i – ii koşullarını sağlayan matrise satırca indirgenmiş eşelon formdadır denir. Satır yerine sütunlar alınarak sütunca indirgenmiş form ve sütunca indirgenmiş eşelon form elde edilir [59].

Tanım 1.2.16: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin bazı satır veya sütunları silinerek elde edilen matrise A matrisinin bir alt matrisi denir.

Tanım 1.2.17: Birim matrise herhangi bir elemanter işlem uygulayarak elde edilen matrise elemanter matris denir ve E ile gösterilir.

Teorem 1.2.6: i. B , $m \times n$ matrisi bir elemanter satır işleminin uygulanması ile A , $m \times n$ matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde B matrisi A matrisi ile bu elemanter satır işlemlerine karşılık gelen $m \times m$ elemanter matrisin çarpımına eşittir. Yani eğer ε ile elemanter satır işlemi gösterilirse, o zaman $B = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$ dir.

ii. Her elemanter matris ters çevrilebilirdir. Üstelik her elemanter matrisin tersi de yine bir elemanter matristir [57].

İspat : i. E_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $E_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris ve $E_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i + \alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matris olmak üzere,

$$E_{ij}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olur. Bu da $E_{ij}A$ matrisinin i -inci satır ile j -inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen bir matris olduğunu gösterir. Gerçekten I , $m \times m$ birim matris olmak üzere bu birim matrisin i -inci satır ile j -inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise $\varepsilon(I_m)$ denilir ise ve bu matris ile A matrisi soldan çarpılırsa yine $E_{ij}A$ matris elde edilir.

Bu da E_{ij} elemanter matrisi için

$$B = E_{ij}A = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$B = E_i(\alpha)A = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

ve

$$B = E_{ij}(\alpha)A = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

olduğu gösterilebilir.

ii. Basit bir hesap ile

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$$

$$(E_i(\alpha))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

olduğu görülebilir. Buradan gerçekten elemanter matrislerin ters çevrilebilir olduğu ve aynı zamanda elemanter matrisin tersinin de bir elemanter matris olduğu sonucu çıkar.

Teorem 1.2.7: Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [57].

İspat : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olsun. $\det B = \alpha \det A$ özelliği kullanılarak :

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \cdot \det I = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.2.8: Bir A kare matrisinin determinanı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır. Yani

$$\det A = \det A^T$$

dır.

Teorem 1.2.9: E , bir elemanter matris ise, o zaman

i. $\det E \neq 0$,

ii. $\det E^T = \det E$,

iii. E^{-1} bir elemanter matristir [57].

İspat: $\alpha \neq 0$ olmak üzere $P_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, P_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemlerine karşılık gelen elemanter matris ve $P_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i + \alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre bu üç farklı tipten elemanter matrislerin determinantları alınır ise o takdirde

$$\begin{aligned}\det P_i(\alpha) &= \det P_i(\alpha)^T = \alpha & (i=1,2,\dots,n) \\ \det P_{ij} &= \det P_{ij}^T = -1 & (i,j=1,2,\dots,n) \\ \det P_{ij}(\alpha) &= \det P_{ij}(\alpha)^T = 1 & (i,j=1,2,\dots,n)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) yi ispatlar. (iii) ü ispatlamak için sırasıyla

$$P_i(\alpha)^{-1} = P_i(\alpha^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 1.2.10: E , $n \times n$ boyutlu bir elemanter matris ise, o zaman her $n \times n$ boyutlu A matris için

$$\det(EA) = (\det E)(\det A)$$

dir.

Teorem 1.2.11: Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $\det A \neq 0$ olmasıdır [57].

İspat: A ters çevrilebilir bir matris ise, o zaman

$$E_1 E_2 \dots E_k A = I$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \dots, E_k$ elemanter matrisleri vardır. Böylece

$$\det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_k) \det(A) = \det I = 1$$

yazılır. Bundan dolayı $\det A \neq 0$ sonucu elde edilir. Tersine; eğer A ters çevrilebilir bir matris değilse, o zaman

$$E_1 E_2 \dots E_k A = R$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \dots, E_k$ elemanter matrisleri vardır. Burada R , bir sıfır satırını kapsayan $n \times n$ boyutlu bir eşelon matristir. Böylece $\det R = 0$ olur ve $\det E_i \neq 0 (i=1,2,\dots,k)$ olduğundan $\det A = 0$ olduğu görülür.

Teorem 1.2.12: A ve B , $n \times n$ boyutlu iki matris olsun. O zaman,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

dir [57].

İspat: A bir elemanter matris ise, o zaman iddianın doğru olduğu söylenebilir. A matrisi elemanter matrislerin bir çarpımı olduğundan eşitlik yine doğrudur. Gerçekten E_1 ve E_2 elemanter matrisler olmak üzere,

$$A = E_1 E_2$$

ise, o zaman elemanter matris için determinant özelliği iki kez art arda uygulanması ile

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 E_2 B) = \det(E_1) \det(E_2 B) \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \det(B) \\ &= \det(E_1 E_2) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

yazılır. $k > 2$ olmak üzere

$$A = E_1 E_2 \dots E_k$$

olduğu zaman da ispat benzer olarak yapılabilir. Diğer taraftan her ters çevrilebilir matris elemanter matrislerin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden A matrisinin ters çevrilebilir olduğu her zaman

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer A matrisi ters çevrilebilir değilse, o zaman $\det A = 0$ ve $\det(AB) = 0$ dır. Böylece bu durumda da $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ifadesi geçerlidir.

Tanım 1.2.18: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu kare matrisinin permanenti, S_n simetrik grubu ve σ permütasyon olmak üzere

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. $P(A)$ veya $\text{per}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.19: $M = [m_{i,j}]$ matrisi $u \times v$ boyutlu reel matris olsun. Bu matrisin k -inci satır(ya da sütun) iki tane sıfırdan farklı elemanı varsa bu matrise k -inci satır(ya da sütun) göre indirgenebilir (contractible) matris denir.

Tanım 1.2.20: $M = [m_{ij}]$, satır vektörleri $x_1, x_2, \dots, x_u$ olacak şekildeki $u \times v$ boyutlu matris olsun. Eğer M matrisinin k -inci sütununda tam olarak iki elemanı sıfırdan farklı, diğer elemanlarının hepsi sıfır ise, M matrisine k -inci sütuna göre contraction (büzüşme) uygulanabilir denir. M matrisinde, $m_{ik} \neq 0, m_{jk} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere k -inci sütuna göre contraction uygulandığını farz edelim. O zaman A matrisinde i -inci satır $m_{jk}r_i + m_{ik}r_j$ vektörü ile yer değiştirerek ve j -inci satır ile k -inci sütun silinerek $(u-1) \times (v-1)$ boyutlu $M_{ij:k}$ matrisi elde edilir. Bu yöntemle M matrisinin i -inci ve j -inci satırlarıyla k -inci sütununa göre contraction olarak adlandırılır. Eğer M matrisi $m_{ik} \neq 0, m_{jk} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere k -inci satıra göre contraction yapılabilirse $M_{k:ij} = [M_{ij:k}^T]^T$ ile belirtilen matrise M matrisinin i -inci ve j -inci sütunlarıyla k -inci satırına göre contraction'ı denir [74].

Lemma 1.2.1: $n > 1$ için M matrisi elemanları negatif olmayan tamsayılardan oluşan matris ve N matrisi de, M matrisinden contraction ile elde edilen matris olmak üzere $perM = perN$ dir [74].

Tanım 1.2.21: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu matris olsun. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir [59].

Teorem 1.2.13: $n \geq 2$ olmak üzere A , $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

dir. Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir [59].

Tanım 1.2.22: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ve $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ olmak üzere, $AX = \lambda X$

denklemini sağlayan λ ya A matrisinin özdeğeri veya karakteristik değeri denir. $AX = \lambda X$ denklemin den $(AX - \lambda X) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Yani

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. $|A - \lambda I|$ ifadesi λ ya göre n -inci dereceden bir polinom olup, bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir. $|A - \lambda I| = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

şeklinde bir polinumdur [59].

Tanım 1.2.23: A bir kare matris ve λ , A nın bir özdeğeri olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan X vektörüne λ , öz değerine karşılık gelen öz vektör ya da karakteristik vektör denir [59].

Tanım 1.2.24: A ve B , $n \times n$ boyutlu iki kare matris olmak üzere $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde tekil olmayan (yani $\det P \neq 0$) bir P matrisi varsa, bu takdirde A ve B matrislerine benzerdir denir [57].

Tanım 1.2.25: verilen bir $n \times n$ boyutlu A matrisi bir D köşegen matrisine benzer ise, o takdirde A matrisine köşegenleştirilebilir denir. Diğer bir deyimle D köşegen bir matris olmak üzere $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi varsa, bu takdirde A matrisi köşegenleştirilebilir denir [57].

Teorem 1.2.14: bir $n \times n$ boyutlu A kare matrisinin köşegenleştirilebilir olması için, yani $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde bir D köşegen matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A matrisinin n -tane lineer bağımsız öz vektörlere sahip olması gerekir. Üstelik bu durumda D nin köşegen elemanları A nın özdeğerleridir [57].

İspat: $\Rightarrow$: A köşegenleştirilebilir bir matris olsun. Yani $D = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir A matrisi D köşegen matrisine benzer olsun. O takdirde $D = P^{-1}AP$ eşitliğinden $AP = PD$ yazılır. Kabul edelim ki; P ve D matrisleri aşağıdaki gibi olsun:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

o zaman

$$AP = PD = \begin{bmatrix} d_{11}p_{11} & d_{22}p_{12} & \cdots & d_{nn}p_{1n} \\ d_{11}p_{21} & d_{22}p_{22} & \cdots & d_{nn}p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{11}p_{n1} & d_{22}p_{n2} & \cdots & d_{nn}p_{nn} \end{bmatrix}$$

olur. P matrisinin sütun vektörleri p_i ile gösterilsin. Bu durumda yukarıda ki matrisin denklemi

$$Ap_i = d_{ii}p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ifade edilebilir. P ters çevirebilir bir matris olduğundan p_i vektörlerinin hiçbiri sıfır vektörü olamaz. Böylece, $Ap_i = d_{ii}p_i$, $(1 \leq i \leq n)$ eşitliğinden p_i lerin d_{ii} özdeğerlerine karşılık gelen A matrisinin özvektörleri olduğu görülür. Üstelik P ters çevirebilir bir matris olduğundan onun sütun vektörleri istenildiği gibi lineer bağımsız olmak zorundadır.

$\Leftarrow$: A matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen n -tane lineer bağımsız $p_1, p_2, \dots, p_n$ öz vektörlerine sahip ise, o takdirde P matrisini sütun vektörleri p_i $(1 \leq i \leq n)$ ler olmak üzere $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ şeklinde teşkil edilebilir. P nin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan P matrisi ters çevirebilir bir matris olur. Böylece

$$\begin{aligned}
AP &= [Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n] \\
&= [\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n] \\
&= P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= PD
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $D = P^{-1}AP$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla A matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları A 'nın özdeğerleri olan bir D köşegen matrisine benzer olduğunu, yani A matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu ifade eder.

Tanım 1.2.26: $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ monik polinomuna karşılık gelen companion matrisi aşağıdaki gibidir:

$$C = [c_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Companion matris hakkında daha detaylı bilgilere [75,76]'daki çalışmalarda ulaşılabilir.

Tanım 1.2.27: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ $m \times n$ boyutlu matrisler olsun. A nin (i, j) -inci elemanı ile B nin (i, j) -inci elemanının çarpımına A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı denir ve $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.28: Bir M matrisi için $perM = \det(M \circ K)$ olacak şekilde bir $n \times n$ boyutlu $(1, -1)$ K matrisi var ise, o takdirde M matrisi değiştirilebilir (*convertible*) matris olarak adlandırılır. Burada $M \circ K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilmektedir.

Tanım 1.2.29: A , $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan alt karesel matrislerinin en büyüğü mertebesine A nin rankı denir ve $rank(A)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.15: $v \times v$ boyutlu $K(k_1, k_2, \dots, k_v)$ Companion matrisi

$$K(k_1, k_2, \dots, k_v) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_v \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda $K^u(k_1, k_2, \dots, k_v)$ matrisin i -inci satır j -inci sütunundaki elemanı

$$K_{i,j}^{(u)}(k_1, k_2, \dots, k_v) = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_v)} \frac{t_j + t_{j+1} + \dots + t_v}{t_1 + t_2 + \dots + t_v} \times \binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} k_1^{t_1} \dots k_v^{t_v} \quad (1.2.16)$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinden $t_1 + 2t_2 + \dots + vt_v = u - i + j$, koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} = \frac{(t_1 + \dots + t_v)!}{t_1! \dots t_v!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer $u = i - j$ ise (1.2.16) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [60].

Tanım 1.2.30: $x_1, x_2, \dots, x_k$ sayıları için $k \times k$ boyutlu V_k Vandermonde matrisi:

$$V_k = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

1.3. Lineer İndirgemeli Diziler

Bir H kümesi ile bu küme üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma ikili işlemlerinden oluşan cebirsel yapı $(H, +, \cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.1: $R \neq \emptyset$ bir küme ve sırasıyla $(+)$ ve $(\cdot)$ da R üzerinde tanımlı birinci ve ikinci ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

R_1) $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

R_2) R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. $\forall x, y \in R$ için $xy \in R$ dir.

R_3) R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. $\forall x, y, z \in R$ için $x(yz) = (xy)z$ dir.

R_4) çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. $\forall x, y, z \in R$ için

$$x(y + z) = xy + xz$$

ve

$$(y + z)x = yx + zx$$

dir.

Tanım 1.3.2: $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa, R ye değişmeli (komutatif) halka denir.

Tanım 1.3.3: $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise, $\forall a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, R halkasına birimli halka denir.

Tanım 1.3.4: $(F, +, \cdot)$ birim elemanlı ve değişmeli bir halka olsun. Eğer F 'nin sıfırdan farklı her elemanının toplama ve çarpma işlemine göre bir tersi varsa o takdirde $(F, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir cisim denir ve F ile gösterilir.

Örnek 1.3.1: $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları birer cisimdir, fakat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir cisim değildir.

Tanım 1.3.5: R değişmeli ve birimli bir halka, $c_i \in R (0 \leq i \leq k-1)$ sabit katsayılar ve $n \in N$ olsun. $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1} \quad (1.3.1)$$

şeklindeki k -basamak homojen lineer indirgemeli bağıntı yardımıyla tanımlanan $\{a_n\}$ dizisine R halkasının elemanlarının lineer indirgemeli dizisi denir [61].

Tanım 1.3.6: $f(x) = x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_{k-1}x + c_k$ şeklindeki k -inci dereceden polinoma, (1.3.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternary lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırasıyla tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks sayı lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k , R nin terslenebilir bir elemanı ise (1.3.1) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$, şeklinde devam eder [61].

Tanım 1.3.7: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, \dots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \dots + c_ka_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir. Bu bağıntı kullanılarak,

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1)a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i)a_{n+k-i} - c_ka_n \quad (1.3.2)$$

şeklindeki $(n+1)$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir. (1.3.2) bağıntısı için,

$$F(x) = (x^k - c_1x^{k-1}, \dots, c_{k-1}x - c_k)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir [61].

[65] daki çalışmada, $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k} = c_0a_n + c_1a_{n+1} + \dots + c_{k-1}a_{n+k-1}$$

şeklindeki k -basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizinin elemanları:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir.

Tanım 1.3.8: Dizi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodik dizi denir. Tekrar eden alt dizideki eleman sayısına ise dizinin periyodu denir. Örneğin; $x, y, z, q, w, z, q, w, z, q, w, \dots$ dizisi periyodiktir ve periyodu 3 tür.

Tanım 1.3.9: Bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyodu basit periyodik dizidir. Örneğin; $x, y, z, q, w, x, y, z, q, w, \dots$ dizisi basit periyodik olup periyodu 5 dir.

Tanım 1.3.10: $\mathbb{R}[x]$ deki n -inci ve m -inci dereceden iki polinom aşağıdaki gibi verilsin;

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$k = \min(n, m)$ olmak üzere p ve q polinomlarının Hadamard çarpımı;

$$(p * q)(x) = a_k b_k x^k + a_{k-1} b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 b_1 x + a_0 b_0$$

şeklinde tanımlanır [62].

1.4. Fibonacci Dizisi

Tanım 1.4.1: Fibonacci dizisi, $f_0 = 0, f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Fibonacci dizisinin terimleri

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

olarak elde edilir. Fibonacci dizisinin karakteristik polinomu $f(x) = x^2 - x - 1$ şeklindedir. [63]'da Fibonacci dizisinin terimlerinin

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$$

şekildeki bir matris bağıntısı ile elde edilebileceği gösterilmiştir. [64]'da ise Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceği gösterilmiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q -matrisi denir.

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim:

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$.

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eşitliğine “Binet formülü” denir.

Bu formül n nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir.

$\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.4.2: k -basamak Fibonacci dizisi, $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-2} = 0, f_{k-1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$f_{n+k}^{(k)} = f_{n+k-1}^{(k)} + f_{n+k-2}^{(k)} + \dots + f_n^{(k)} \quad (1.4.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. k -basamak Fibonacci dizisinin karakteristik polinomu

$$F^k(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1$$

şeklinde dir.

k -basamak Fibonacci dizisi, $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ reel sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilen lineer kombinasyonun özel bir halidir:

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1}. \quad (1.4.2)$$

[65]'da

$$A_k = [a_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla, (1.4.2) deki lineer kombinasyon formatında tanımlan indirgemeli diziler için

$$A_k^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde etmiştir. Bu eşitlik yardımıyla, k -basamak Fibonacci dizisinin terimleri için aşağıdaki matris bağıntısı yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n^{(k)} \\ f_{n+1}^{(k)} \\ f_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ f_{n+k-2}^{(k)} \\ f_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

1.5. Pell Dizileri

Tanım 1.5.1: Pell dizisi, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Pell dizisinin terimleri

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

olarak elde edilir. Pell dizisinin karakteristik polinomu $P(x) = x^2 - 2x - 1$ şeklindedir [66].

[9]'da Pell sayılarının

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir M matrisi tarafından üretebileceği gösterilmiştir.

Tanım 1.5.2: Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell sayılarının bir k dizisi,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1-i \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad 1-k \leq n \leq 0$$

başlangıç değerleriyle $n > 0$ ve $1-k \leq n \leq 0$ için

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \dots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanır. Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi için karakteristik polinomu

$$P(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - 1$$

şeklindedir [67].

Burada P_n^i , i -inci dizinin n -inci terimidir. $i = k$ olarak alınırsa, $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k -Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k = 2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir.

[16]'da genelleştirilmiş k -mertebeden Pell matrisi

$$R = [r_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

şeklinde tanımlanmış ve

$$E_n = [e_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \dots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix} \quad (1.5.2)$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R.E_n$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir [67].

Tanım 1.5.3: $n \geq 0$ sabit tam sayılar için $\{P_n^{(\alpha)}\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi, $P_0^{(\alpha)} = 0$ ve $P_1^{(\alpha)} = 1$ başlangıç değerleri ile $n \geq 0$ için

$$P_{n+2}^{(\alpha)} = (\alpha + 1)P_{n+1}^{(\alpha)} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} P_n^{(\alpha)}$$

şeklinde tanımlanır [68].

Ayrıca, Deveci ve Karaduman [69]'da $\alpha > 0$ sabitleri için genelleştirilmiş Pell dizilerinin elemanlarını

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (M^{(\alpha)})^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisi yardımıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Deveci ve Karaduman [69]'da $\alpha > 0$ sabit tamsayısı için $P_n^{(\alpha)k}$, k -basamak genelleştirilmiş Pell dizisini, $P_0^{(\alpha)k} = 0, \dots, P_{k-2}^{(\alpha)k} = 0, P_{k-1}^{(\alpha)k} = 1$ başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$P_{n+k}^{(\alpha)k} = (\alpha + 1)P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \dots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha)k}$$

bağıntısı yardımıyla tanımlanmışlardır. Burada $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\beta_j = \binom{\alpha+j}{j+1}$

dir. Ayrıca burada $\{P_n^{(\alpha) \cdot 2}\} = \{P_n^{(\alpha)}\}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

[69]'da k -basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha) \cdot k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha) \cdot k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha) \cdot k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha) \cdot k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha) \cdot k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha) \cdot k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha) \cdot k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha) \cdot k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U = [u_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine, k -basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir [69].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci Dizileri

Tanım 2.1.1: m -inci ve n -inci dereceden iki polinom olan

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

verilmiş olsun. f ve g polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) * g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i * b_i) x^i$$

burada

$$a_i * b_i = \begin{cases} a_i b_i & \text{eğer } a_i b_i \neq 0 \\ a_i + b_i & \text{eğer } a_i b_i = 0 \end{cases}$$

dir [70].

[70]'da Fibonacci dizisi ve k -basamak Fibonacci dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı kullanılarak tanımlanan yeni bir k -basamak dizisi tanımlanmış olup, bu dizi Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi olarak adlandırılmıştır:

Tanım 2.1.2: $k \geq 3$ ve $n \geq 0$ için Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi $HF_k(0) = \dots = HF_k(k-2) = 0, HF_k(k-1) = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte

$$HF_k(n+k) = HF_k(n+k-1) + \dots + HF_k(n+2) - HF_k(n+1) - HF_k(n) \quad (2.1.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlanır [70].

(2.1.1) bağıntısı kullanılarak, $\{HF_k(n)\}$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisi

$$FM_k^h = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisi olarak adlandırılmaktadır. n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisinin n -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilir:

(i). $k = 3$ için,

$$(FM_3^h)^n = \begin{bmatrix} HF_3^{n+2} & -HF_3^{n+1} - HF_3^n & -HF_3^{n+1} \\ HF_3^{n+1} & -HF_3^n - HF_3^{n-1} & -HF_3^n \\ HF_3^n & -HF_3^{n-1} - HF_3^{n-2} & -HF_3^{n-1} \end{bmatrix},$$

(ii). $k = 4$ için,

$$(FM_4^h)^n = \begin{bmatrix} HF_4^{n+3} & HF_4^{n+4} - HF_4^{n+3} & -HF_4^{n+2} - HF_4^{n+1} & -HF_4^{n+2} \\ HF_4^{n+2} & HF_4^{n+3} - HF_4^{n+2} & -HF_4^{n+1} - HF_4^n & -HF_4^{n+1} \\ HF_4^{n+1} & HF_4^{n+2} - HF_4^{n+1} & -HF_4^n - HF_4^{n-1} & -HF_4^n \\ HF_4^n & HF_4^{n+1} - HF_4^n & -HF_4^{n-1} - HF_4^{n-2} & -HF_4^{n-1} \end{bmatrix},$$

(iii). $k \geq 5$ için $(FM_k^h)^n$ matrisi

$$(FM_k^h)^n = \begin{bmatrix} HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k-2} - HF_k^{n+k-3} - HF_k^{n+k-4} \\ HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k-1} - HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k-3} - HF_k^{n+k-4} - HF_k^{n+k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ HF_k^{n+1} & HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} & HF_k^n - HF_k^{n-1} - HF_k^{n-2} \\ HF_k^n & HF_k^{n+1} - HF_k^n & HF_k^{n-1} - HF_k^{n-2} - HF_k^{n-3} \\ & & -HF_k^{n+k-2} - HF_k^{n+k-3} - HF_k^{n+k-4} \\ & & -HF_k^{n+k-3} - HF_k^{n+k-4} - HF_k^{n+k-5} \\ & & \vdots \\ & & -HF_k^n - HF_k^{n-1} - HF_k^{n-2} \\ & & -HF_k^{n-1} - HF_k^{n-2} - HF_k^{n-3} \\ & & -HF_k^n & -HF_k^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

şeklinde olup $n \geq 3$ için $(k-5) \times (k-5)$ boyutlu $FM_k^{h,*}$ matrisi aşağıdaki gibidir [70]:

$$\begin{bmatrix}
HF_k^{n+k+1} - HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k+2} - HF_k^{n+k+1} - HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} & \dots \\
HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} - HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k+1} - HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} - HF_k^{n+k-2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
HF_k^{n+k} - HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} & HF_k^{n+4} - HF_k^{n+3} - HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} & \dots \\
HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} - HF_k^n & HF_k^{n+3} - HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} - HF_k^n & \dots \\
& HF_k^{n+2k-5} - HF_k^{n+2k-6} - \dots - HF_k^{n+k} - HF_k^{n+k-1} & \\
& HF_k^{n+2k-6} - HF_k^{n+2k-7} - \dots - HF_k^{n+k-1} - HF_k^{n+k-2} & \\
& \vdots & \\
& HF_k^{n+k-3} - HF_k^{n+k-4} - \dots - HF_k^{n+2} - HF_k^{n+1} & \\
& HF_k^{n+k-4} - HF_k^{n+k-5} - \dots - HF_k^{n+1} - HF_k^n &
\end{bmatrix}$$

Ayrıca $\det FM_k^h = (-1)^k$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisi için binet formülü aşağıdaki gibi elde edilir:

Lemma 2.1.1: Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^k - x^{k-1} - \dots - x^2 + x + 1 = 0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [70].

İspat : $f(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x^2 + x + 1$ olsun. $k = 3$ için Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ şeklinde olup, bu denklemin kökleri

$$x_1 = 0.77184 - 1.1151i,$$

$$x_2 = 0.77184 + 1.1151i$$

ve

$$x_3 = -0.54369$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, $k = 4$ için Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ şeklinde olup bu denklemin kökleri:

$$x_1 = 1.1924 - 0.54788i,$$

$$x_2 = 1.1924 + 0.54788i,$$

$$x_3 = -0.69244 - 0.31815i$$

ve

$$x_4 = -0.69244 + 0.31815i$$

olarak elde edilir. Böylece $k=3$ ve $k=4$ için $f(x)=0$ denkleminin çok katlı kökü olmadığı kolaylıkla görülmektedir. Şimdi de $k \geq 5$ durumunu göz önüne alalım. Farz edelim ki denklem $g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 2x^2 - 1$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$x^k = \frac{1-2x^2}{x-2} \quad (2.1.3)$$

elde edilir. Öte yandan $g'(x) = (k+1)x^k - 2kx^{k-1} + 4x$ olup

$$x^k = \frac{-4x^2}{(k+1)x - 2k} \quad (2.1.4)$$

olmalıdır. (2.1.3) ve (2.1.4) denklemleri göz önünde bulundurularak

$$(2k-2)x^3 + (8-4k)x^2 - (k+1)x + 2k = 0 \quad (2.1.5)$$

olduğu görülür ki, buradan da $k = 1 + \frac{4x^2 - 2x + 2}{-2x^3 + 4x^2 + x - 2}$ eşitliğine ulaşılır.

Matematica wolfram 10.0 [71] gibi kullanarak denklemin bir çözümü olmadığı görülür. Dolayısıyla $k \geq 5$ için bu eşitliği sağlayacak k tam sayısının varlığı noktasında çelişki elde edilir. Bu da bize $f(x)=0$ denkleminin çok katlı köklerinin olmadığı sonucunu verir.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ lar FM_k^h matrisinin kökleri ise o zaman Lemma 3.1.1'den $x_1, x_2, \dots, x_k$ 'lerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Bu kökler yardımıyla, $k \times k$ boyutlu V_k Vandermonde matrisi

$$V_k = \begin{bmatrix} (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \dots & (x_k)^{k-1} \\ (x_1)^{k-2} & (x_2)^{k-2} & \dots & (x_k)^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $U_k(i,j)$ matrisi

$$U_k(i, j) = \begin{bmatrix} x_1^{n+k-i} \\ x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ x_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. $k \times k$ boyutlu $V_k(i, j)$ matrisi, V_k matrisinin j -inci sütununun $U_k(i, j)$ sütun matrisiyle yer değiştirilmesi sonucu elde edilsin[70].

Teorem 2.1.1: $n \geq 3$ ve $k \geq 3$ için $(FM_k^h)^n = [f_{i,j}^{h,k,n}]$ olsun. Bu durumda

$$f_{i,j}^{h,k,n} = \frac{\det V_k(i, j)}{\det V_k}$$

dir [70].

İspat: FM_k^h matrisinin öz değerleri birbirinden farklı olduğundan FM_k^h matrisi köşegenleştirilebilir. Bu durumda $FM_k^h V_k = V_k P_k$ olduğu kolaylıkla görülür ki, burada $P_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dir. V_k matrisi tersinir matris olduğundan $(V_k)^{-1} FM_k^h V_k = P_k$ eşitliği yazılabilir. Bu yazımdan dolayı FM_k^h matrisi P_k matrisine benzerdir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $n \geq 3$ ve $k \geq 3$ için $(FM_k^h)^n V_k = V_k (P_k)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} f_{i,1}^{h,k,n} x_1^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_1^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_1^{n+k-i} \\ f_{i,1}^{h,k,n} x_2^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_2^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ f_{i,1}^{h,k,n} x_k^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_k^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_k^{n+k-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \dots, k$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$f_{i,j}^{h,k,n} = \frac{\det V_k(i, j)}{\det V_k}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Sonuç 2.1.1: $k \geq 3$ için $HF_k(n)$, n -inci Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayısı olmak üzere

$$HF_k(n) = \frac{\det V_k(k,1)}{\det V_k} = \frac{\det V_k(k-1,k)}{\det V_k}$$

eşitliği elde edilir [70].

Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin Companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin permanental temsilleri elde edilmiştir:

Tanım 2.1.3: $\alpha \geq k$ ($k \geq 3$) bir tamsayı olmak üzere $\alpha \times \alpha$ boyutlu $L_{\alpha,k} = [l_{i,j}^{\alpha,k}]$ süper köşegen matrisi:

$$l_{i,j}^{\alpha,k} = \begin{cases} 1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha, \\ &i = u \text{ ve } j = u + 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - 1, \\ &\vdots \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 3 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 3 \\ &\text{ve} \\ &i = u \text{ ve } j = u - 1 \text{ ise } 2 \leq u \leq \alpha, \\ &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u + k - 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 2 \\ &\text{ve} \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \end{aligned} \\ -1 & \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Yani $L_{\alpha,k} = [l_{i,j}^{\alpha,k}]$ süper köşegen matrisi:

(k) – inci

↓

$$L_{\alpha,k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [70].

Teorem 2.1.2: $\alpha \geq k$ ve $k \geq 3$ için,

$$perL_{\alpha,k} = HF_k(\alpha + k - 1)$$

eşitliği elde edilir [70].

İspat: Teorem α üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanır. Denklemin $\alpha \geq k$ için $perL_{\alpha,k} = HF_k(\alpha + k - 1)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $\alpha + 1$ için de sağlandığını gösterilmelidir. Eğer $perL_{\alpha,k}$, $L_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perL_{\alpha+1,k} = perL_{\alpha,k} + perL_{\alpha-1,k} + \dots + perL_{\alpha-k+3,k} - perL_{\alpha-k+2,k} - perL_{\alpha-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir.

$$perL_{\alpha,k} = HF_k(\alpha + k - 1),$$

$$perL_{\alpha-1,k} = HF_k(\alpha + k - 1 - 2),$$

$\vdots$

$$perL_{\alpha-k+3,k} = HF_k(\alpha + 2),$$

$$perL_{\alpha-k+2,k} = HF_k(\alpha + 1)$$

ve

$$perL_{\alpha-k+1,k} = HF_k(\alpha)$$

olduğundan $perL_{\alpha+1,k} = HF_k(\alpha + k)$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.1.4: $\alpha > k$ olmak üzere $\alpha \times \alpha$ boyutlu $Y_{\alpha,k} = [y_{i,j}^{\alpha,k}]$ matrisi;

$$y_{i,j}^{\alpha,k} = \begin{cases} 1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha, \\ &i = u \text{ ve } j = u + 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &i = u \text{ ve } j = u + 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &\quad \vdots \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 3 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &i = u \text{ ve } j = u - 1 \text{ ise } 2 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &\quad \text{ve} \\ &i = \alpha - k + 1 \text{ ve } j = \alpha, \end{aligned} \\ -1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u + k - 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k, \\ &\quad \text{ve} \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k, \end{aligned} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\alpha \times \alpha$ boyutlu $D_{\alpha,k} = [d_{i,j}^{\alpha,k}]$ matrisi aşağıdaki gibi,

$$\begin{array}{c} (\alpha - k + 1) - \text{inci} \\ \downarrow \\ D_{\alpha,k} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & Y_{\alpha-1,k} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır[70].

Teorem 2.1.3: (i) $\alpha > k$ için,

$$\text{per}Y_{\alpha,k} = HF_k(\alpha),$$

(ii) $\alpha > k + 1$ için,

$$\text{per}D_{\alpha,k} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} HF_k(i)$$

eşitlikleri elde edilir [70].

İspat: (i) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Denklemin $\alpha > k$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $k + 1$ için de sağlandığı

gösterilmelidir. Eğer $perY_{\alpha,k}$, $Y_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$\begin{aligned} perY_{\alpha+1,k} &= perY_{\alpha,k} + perY_{\alpha-1,k} + \dots + perY_{\alpha-k+3,k} - perY_{\alpha-k+2,k} - perY_{\alpha-k+1,k} \\ &= HF_k(\alpha) + HF_k(\alpha-1) + \dots + HF_k(\alpha-k+3) - HF_k(\alpha-k+2) - HF_k(\alpha-k+1) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(ii) Eğer $perD_{\alpha,k}$, $D_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perD_{\alpha,k} = perD_{\alpha-1,k} + perY_{\alpha-1,k}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.1.2 ve 2.1.3 (i) göz önünde bulundurularak α üzerinde tümevarım yönteminden ispat kolaylıkla görülür.

$\alpha > k+1$ için $\alpha \times \alpha$ boyutlu bir R matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.1.2: $\alpha > k+1$ için,

$$\begin{aligned} \det(L_{\alpha,k} \circ R) &= HF_k(\alpha + k - 1), \\ \det(Y_{\alpha,k} \circ R) &= HF_k(\alpha) \end{aligned}$$

ve

$$\det(D_{\alpha,k} \circ R) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} HF_k(i)$$

eşitlikleri elde edilir [70].

Aşağıdaki Sonuç ile Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayıları için toplamsal temsil verilmektedir.

Sonuç 2.1.3: $k \geq 3$ için $HF_k(\alpha)$, α -inci Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayısı olsun.

i.

$$HF_k(\alpha) = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} (-1)^{t_{k-1} + t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = \alpha - k + 1$ koşulunu sağlamaktadır.

ii.

$$HF_k(\alpha) = - \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} \times \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} (-1)^{t_{k-1} + t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = \alpha + 1$ koşulunu sağlamaktadır [70].

İspat: Teorem (1.2.15) da i. durum için $i = k$ ve $j = 1$ ve ii. durum için $i = k - 1$, $j = k$ olarak alınırsa ispat Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisinden kolaylıkla görülür.

Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_k(x) = \frac{x^{k-1}}{1 - x - x^2 - \dots - x^{k-2} + x^{k-1} + x^k}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının üstel temsilleri verilmiştir.

Teorem 2.1.4: Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir:

$$g_k(x) = x^{k-1} \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (1 + x + \dots + x^{k-3} - x^{k-2} - x^{k-1})^i \right)$$

burada $k \geq 3$ dir [70].

İspat:

$$\begin{aligned}\ln g_k(x) &= \ln \frac{x^{k-1}}{1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k} \\ &= \ln x^{k-1} - \ln(1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-\ln(1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k) &= -\left[-x(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})-\right. \\ &\quad \left.\frac{1}{2}x^2(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^2-\dots-\right. \\ &\quad \left.\frac{1}{n}x^n(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^n-\dots\right]\end{aligned}$$

olduğundan

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının toplamını göz önüne alalım. O halde

$$S_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\alpha} HF_k(\alpha)$$

olmak üzere ve $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu A_k^h matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$A_k^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & FM_k^h & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Bu durumda $(A_k^h)^{\alpha}$ matrisi aşağıdaki gibi olup tümevarım yöntemi ile görülebilir [70]:

$$(A_k^h)^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_{\alpha+k-2} & & & \\ S_{\alpha+k-3} & & (FM_k^h)^{\alpha} & \\ \vdots & & & \\ S_{\alpha-1} & & & \end{bmatrix}$$

2.2. Gruplarda Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci dizileri

$\{HF_k(n)\}$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden

$$\{HF_k^m(n)\} = \{HF_k^m(0), HF_k^m(1), \dots, HF_k^m(i), \dots\}$$

dizisi elde edilir. Burada $HF_k^m(i)$, m modülüne göre indirgenmiş n -inci Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayısını ifade etmek için kullanılmaktadır. Önemle belirtmek gerekir ki, $\{HF_k(n)\}$ dizisinin indirgeme bağıntısıyla (2.1.1) deki bağıntı aynıdır [72].

Teorem 2.2.1: $k \geq 3$ için $HF_k^m(n)$ dizisi basit periyodik bir dizidir [72].

İspat: $X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid 1 \leq x_i \leq m-1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|X_k| = m^k$ dir. Z_m elemanlarının m^k tane farklı k -tiplisi mevcut olduğundan, bu k -tiplilerden en az bir tanesi $\{HF_k^m(n)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -tiplileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece $\{HF_k^m(n)\}$ dizisi periyodik bir dizidir. Dolayısıyla $u \geq 0$ için $u \geq v$ olmak üzere

$$HF_k^m(u) \equiv HF_k^m(v), HF_k^m(u+1) \equiv HF_k^m(v+1), \dots, HF_k^m(u+k) \equiv HF_k^m(v+k)$$

ifadeleri elde edilir. Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin tanımından,

$$HF_k(n) = -HF_k(n+1) - HF_k(n+k) + HF_k(n+k-1) + \dots + HF_k(n+2)$$

eşitliği elde edilir. Böylece bu eşitlik kullanılarak

$$HF_k^m(u-1) \equiv HF_k^m(v-1), HF_k^m(u-2) \equiv HF_k^m(v-2), \dots, HF_k^m(u-v) \equiv HF_k^m(0)$$

denklilerine ulaşılır ki bu da $\{HF_k(n)\}$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{HF_k^m(n)\}$ dizisinin periyodu $P_k(m)$ ile gösterilir.

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A = [a_{ij}]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\text{mod } m$ ye göre indirgenmesi $A(\text{mod } m)$ şeklinde ifade edilir. Yani $A(\text{mod } m) = (a_{ij}(\text{mod } m))$ dir. $\langle A \rangle_m = \{A^i(\text{mod } m) \mid i \geq 0\}$ kümesini ele alalım. $\langle A \rangle_m$

kümesi $\text{obeb}(m, \det A) = 1$ olduğunda devirli, $\text{obeb}(m, \det A) \neq 1$ olduğunda ise bir yarı grup olur. $\langle A \rangle_m$ kümesinin mertebesini $|\langle A \rangle_m|$ notasyonu ile gösterelim.

FM_k^h Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisi için $\det FM_k^h = (-1)^k$ olduğundan m nin bütün pozitif tamsayı değerleri için FM_k^h kümesi devirli grup olarak karşımıza çıkmaktadır. (3.1.2) den $P_k(m) = |\langle FM_k^h \rangle_m|$ olduğu kolayca görülür. $P_k(m) = |\langle FM_k^h \rangle_m|$ ve $\det FM_k^h = (-1)^k$ olduğundan k çift tamsayı olduğu zaman herhangi bir $m \geq 2$ tam sayısı için $P_k(m)$ 'nin çift sayı olacağı açıktır.

$\{HF_k^m(n)\}$ dizisinin rankı $HF_k^m(r) \equiv HF_k^m(r+1) \equiv \dots \equiv HF_k^m(r+k-2) \equiv 0 \pmod{m}$ olacak şekilde en küçük r pozitif tamsayısı olup $R_k(m)$ ile gösterilir. $HF_k^m(r+k-1) \equiv u \pmod{m}$ olduğu zaman $\{HF_k^m(n)\}$ dizisinin terimleri $R_k(m)$ index ile başlar. Yani $\{HF_k(n)\}$ dizisinin başlangıç terimleri $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, u, u, \dots$ olarak şekilde bir u çarpanı ile çarpılmış olur. $\{HF_k(n)\}$ 'nin bir u faktörü ile çarpımı olan ilk terimlerdir. α üstsel değerleri üzerinden $(FM_k^h)^\alpha \equiv I \pmod{m}$ denkleğini basit bir aritmetik ifade olarak ele alalım, bu durumda

$$(FM_k^h)^\alpha \equiv I \pmod{m} \Leftrightarrow P_k(m) | \alpha$$

bağıntısı elde edilir. Benzer olarak bazı $u \in \mathbb{Z}$ ler için α üstsel değerleri üzerinde $(FM_k^h)^\alpha \equiv uI \pmod{m}$ aritmetik ifadesi düşünüldüğünde

$$(FM_k^h)^\alpha \equiv uI \pmod{m} \Leftrightarrow R_k(m) | \alpha$$

bağıntısı gerçekleşmektedir. Böylece $R_k(m) | P_k(m)$ olduğu görülmektedir.

$\{HF_k^m(n)\}$ dizisinin mertebesi $P_k(m) / R_k(m)$ olarak tanımlanır.

$(FM_k^h)^{R_k(m)} \equiv uI \pmod{m}$ olsun bu durumda $\text{ord}_m(u)$, $(FM_k^h)^{\lambda R_k(m)} \equiv I \pmod{m}$ koşulunu sağlayan en küçük λ pozitif tamsayıdır. Bu da bize gösterir ki $\text{ord}_m(u)$, $P_k(m) | \lambda R_k(m)$ koşulunu sağlayan en küçük λ pozitif tamsayıdır. Bunun doğrudan bir

sonucu olarak $ord_m(u) = \lambda$ elde edilir. Sonuç olarak $W_k(m)$ nin her zaman bir tamsayı olarak karşımıza çıkar ve bu ifade $HF_k(R_k(m) + k - 1)$ mertebesi m modülüne göre bir çarpımsal kuvveti olup $W_k(m) = ord_m(HF_k(R_k(m) + k - 1))$ şeklinde kolayca gösterilir.

Örnek 2.2.1: $\{HF_3^2(n)\} = \{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1, \dots\}$ indirgemeli dizisi ele alınırsa, o zaman $P_3(2) = 26$, $R_3(2) = 13$ ve $W_3(2) = 2$ olarak elde edilir [72].

Teorem 2.2.2: p bir asal sayı ve k pozitif bir tamsayı olsun o zaman $k \geq 3$ için

- (i). Eğer $t, P_k(p^{t+1}) \neq P_k(p^t)$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı ise, her $l > t$ tam sayı değeri için $P_k(p^l) = p^{l-t} \cdot P_k(p^t)$ eşitliği yazılır.
- (ii). Eğer $t, R_k(p^{t+1}) \neq R_k(p^t)$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı ise, her $l > t$ tam sayı değeri için $R_k(p^l) = p^{l-t} \cdot R_k(p^t)$ eşitliği yazılır [72].

İspat: (i). $t, P_k(p^{t+1}) \neq P_k(p^t)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı ve q pozitif bir tam sayı olsun. $P_k(m) = \left| \langle FM_k^h \rangle_m \right|$ ise o zaman $(FM_k^h)^{P_k(p^{q+1})} \equiv I \pmod{p^{q+1}}$ olup ve dolayısıyla $(FM_k^h)^{P_k(p^{q+1})} \equiv I \pmod{p^q}$ olur. Böylece $P_k(p^q)$ nın $P_k(p^{q+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $(FM_k^h)^{P_k(p^q)} = I + (f_{i,j}^{(q)} \cdot p^q)$ eşitliği yazılarak binom açılımından

$$(FM_k^h)^{P_k(p^q) \cdot p} = \left(I + (f_{i,j}^{(q)} \cdot p^q) \right)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (f_{i,j}^{(q)} \cdot p^q)^i \equiv I \pmod{p^{q+1}}$$

eşitliği elde edilir ki, buda bize eşitlik $P_k(p^{q+1})$ nın $P_k(p^q) \cdot p$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla $P_k(p^{q+1}) = P_k(p^q)$ ya da $P_k(p^{q+1}) = P_k(p^q) \cdot p$ olmalıdır. Ancak $P_k(p^{q+1}) = P_k(p^q) \cdot p$ eşitliğinin sağlanması, p tarafından bölünemeyen bir $f_{i,j}^{(q)}$ nin var olması ile mümkündür. $t, P_k(p^{t+1}) \neq P_k(p^t)$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $f_{i,j}^{(t)}$ vardır. $f_{i,j}^{(t)}$ ifadesi p tarafından

bölünemediğinden $f_{i,j}^{(t+1)}$ ifadesi de p tarafından bölünemeyecektir. Dolayısıyla

$P_k(p^{t+2}) \neq P_k(p^{t+1})$ eşitsizliği elde edilir ki bu eşitsizlik göz önünde bulundurularak

$$P_k(p^{t+2}) = P_k(p^{t+1}) \cdot p = P_k(p^t) \cdot p^2$$

sonucuna ulaşılır. Böylece t üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak $l > t$ tam sayısı için $P_k(p^l) = p^{l-t} P_k(p^t)$ eşitliği elde edilir.

(ii). İspat yukarıdakine benzer olarak elde edilir.

Teorem 2.2.3: m_1 ve m_2 , $m_1, m_2 \geq 2$ koşulunu sağlayan tamsayılar olsun. O zaman $k \geq 3$ için

$$R_k(\text{okek}[m_1, m_2]) = \text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)]$$

ve benzer olarak

$$P_k(\text{okek}[m_1, m_2]) = \text{okek}[P_k(m_1), P_k(m_2)]$$

dir [72].

İspat: $\text{okek}[m_1, m_2] = m$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2$ için

$$HF_k(R_k(m)) \equiv HF_k(R_k(m) + 1) \equiv \dots \equiv HF_k(R_k(m) + k - 2) \equiv 0 \pmod{m}$$

ve

$$HF_k(R_k(m_i)) \equiv HF_k(R_k(m_i) + 1) \equiv \dots \equiv HF_k(R_k(m_i) + k - 2) \equiv 0 \pmod{m_i}$$

bağlantıları sağlanmaktadır. En küçük ortak kat kavramı kullanılarak $i = 1, 2$ için

$$HF_k(R_k(m_i)) \equiv HF_k(R_k(m_i) + 1) \equiv \dots \equiv HF_k(R_k(m_i) + k - 2) \equiv 0 \pmod{m_i}$$

denkliklerinin sağlandıkları görülmektedir. Böylece $R_k(m_1) | R_k(m)$ ve $R_k(m_2) | R_k(m)$

bağlantılarına ulaşılır ki bu da bize $\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)]$ nin $R_k(\text{okek}[m_1, m_2])$

sayısını böldüğünü gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned} HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)]) &\equiv HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)] + 1) \equiv \dots \\ &\equiv HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)] + k - 2) \equiv 0 \pmod{m_i} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)]) &\equiv HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)] + 1) \equiv \dots \\ &\equiv HF_k(\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)] + k - 2) \equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

bağıntısı sağlanmakta olup bunun bir sonucu olarak da $R_k(\text{okek}[m_1, m_2])$ nin $\text{okek}[R_k(m_1), R_k(m_2)]$ yi böldüğü görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$P_k(m)$ periyodu için de benzer bir ispat bulunmaktadır.

Herhangi bir $k \geq 3$ için gruplarda Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisini ele alalım:

Tanım 2.2.1: G , j -gerenli bir grup ve $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ de G için bir geren j -lisi olsun. O halde, G deki bir Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ grup elemanlarının bir dizisi olup dizinin her elemanı verilen $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarına göre aşağıdaki gibi tanımlanır:

$k \leq j$ ve $n \geq j$ ise

$$a_0 = x_0, a_1 = x_1, \dots, a_{j-1} = x_{j-1}$$

ve

$$a_n = (a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1});$$

$k = j+1$ ve $n \geq k$ ise

$$a_0 = x_0, a_1 = x_1, \dots, a_{j-1} = x_{j-1}, a_j = (a_0)^{-1}(a_1) \cdots (a_{j-1})$$

ve

$$a_n = (a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1});$$

$k \geq j+2$ ise

$$a_0 = x_0, a_1 = x_1, \dots, a_{j-1} = x_{j-1}$$

ve

$$a_n = \begin{cases} (a_0)(a_1) \cdots (a_{n-1}) & \text{ise } j \leq n \leq k-2, \\ (a_0)^{-1}(a_1) \cdots (a_{n-1}) & \text{ise } n = k-1, \\ (a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1}) & \text{ise } n \geq k \end{cases}$$

$(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ geren j -lisi için G grubundaki Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilmektedir. $C_m = \langle x \rangle$, m . mertebeden devirli grup olmak üzere bu gruptaki Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi $HF_k(C_m; x)$ şeklinde ifade edilir ve $n \geq k$ için

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = e, a_{k-1} = x$$

ve

$$a_n = (a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \dots (a_{n-1})$$

olarak tanımlanır.

Dizinin $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ şeklindeki başlangıç elemanları grup için üreteçler olduğundan Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin grubun yapısını yansıttığına dikkat edilmelidir [72].

Teorem 2.2.4: Sonlu bir gruptaki Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi periyodiktir. Özellikle; $k \geq j$ için, bir j -gerenli sonlu gruptaki Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi basit periyodiktir [72].

İspat: G , j -gerenli bir grup ve $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ de G için bir geren j -lisi olsun. Eğer $|G| = n$ ise, bu durumda G nin elemanlarının n^k tane farklı k -lisi mevcut olduğundan, bu k -lilerden en az bir tanesi $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -liyi takip eden alt dizisi tekrarlanır. Böylece $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisinin periyodik bir dizi olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $u > v$ olmak üzere

$$a_{u+1} = a_{v+1}, a_{u+2} = a_{v+2}, \dots, a_{u+k} = a_{v+k}$$

olacak şekilde u ve v doğal sayıları bulunmaktadır. $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisinin tanımından

$$a_n = (a_{n+1})^{-1}(a_{n+2}) \dots (a_{n+k-1})(a_{n+k})^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $k \geq j$ ise, o zaman $a_u = a_v$ yazılabilir ve dolayısıyla

$$a_{u-1} = a_{v-1}, a_{u-2} = a_{v-2}, \dots, a_{u-u} = a_0 = x_0 = a_{v-u}$$

eşitliklerine ulaşılır ki bu da $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisinin basit periyodik olduğu gösterir.

$HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin periyodu $PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir.

$HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ basit periyodik dizisinin rankı, $a_r = a_0, a_{r+1} = a_1, \dots, a_{r+k-2} = a_{k-2}$ olacak şekilde en küçük pozitif r tamsayıdır. $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin rankı $RHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.2.5: i. G , gerenleri a ve b olan 2-gerenli bir grup olsun. $k \geq 3$ için G nin birim elemanı $HF_k(G; a, b)$ veya $HF_k(G; b, a)$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G değişmeli (abelian) gruptur.

ii. G , gerenleri a, b ve c olan 3-gerenli bir grup olsun. $k \geq 3$ için G nin birim elemanı $HF_k(G; a, b, c)$, $HF_k(G; a, c, b)$, $HF_k(G; b, a, c)$, $HF_k(G; b, c, a)$, $HF_k(G; c, a, b)$ ve $HF_k(G; c, b, a)$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizilerinin en az birinde görülüyorsa G değişmeli (abelian) gruptur [72].

İspat: $j = 2$ veya 3 ve e birim eleman olmak üzere $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ 'nin n -inci elemanı olsun. Dizinin $(n-1)$ -inci elemanı G grubunun herhangi bir elemanı olabilir. Dolayısıyla dizi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\dots, x, \underbrace{e, e, \dots, e}_{k-1}, \dots$$

Tanımlanan bağıntıyı, $(n-2)$ -inci eleman için sadece x^{-1} in sağlayacağı açıktır. Aynı şekilde $(n-3)$ -inci eleman x^2 olur. Benzer şekilde devam edersek dizi

$$\dots, x^2, x^{-1}, x, \underbrace{e, e, \dots, e}_{k-1}, \dots$$

şeklinde oluşur. Bu dizinin elemanlarının üsleri,

$$u = u_1 = \dots = u_{k-2} = 0, u_{k-1} = 1 \text{ ve } u_n = -u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-k+1} - u_{n-k} \quad (n \geq k)$$

dizisi kullanılarak üretilbildiğinden $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisinin aşağıdaki formda yazılabileceği açıkça görülmektedir:

$$x^{u_n}, x^{u_{n-1}}, x^{u_{n-2}}, \dots, x^2, x^{-1}, x, \underbrace{e, e, \dots, e}_{k-1}, \dots$$

$\{u_n\}$ dizisindeki indirgeme bağıntısı kullanarak $x^{u_n} x^{u_{n-1}} = x^{u_{n-2}} \dots x^{u_{n-k+1}} x^{-u_{n-k}}$ eşitliğine ulaşılabilir.

i. Genelliği bozmadan $HF_k(G; a, b)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $k=3$ ise $HF_k(G; a, b)$ dizisi aşağıdaki gibidir:

$$a, b, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}a^{-1}b, \dots, x, e, e, \dots$$

bu durumda $x^{u_n} x^{u_{n-1}} = x^{u_{n-2}} x^{-u_{n-3}}$ olduğundan $a_0 a_1 = a_2 (a_3)^{-1}$ ve dolayısıyla $ab = (a^{-1}b)(a^{-1}b^{-1}a^{-1}b)^{-1} = ba$ bağıntısı elde edilir ki bu da bize grubun değişmeli olduğunu gösterir.

$k \geq 4$ durumunu göz önüne alalım, bu durumda dizi

$$a, b, ab, (ab)^2, \dots, (ab)^{2^{k-2}}, a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1}, \\ a^{-1}b^{-1}(ab)^{2^{k-3}-1} a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1}, \dots, x^2, x^{-1}, x, \underbrace{e, e, \dots, e}_{k-1}, \dots$$

şeklinde. Yukarıdaki ifadeler kullanılarak, $HF_k(G; a, b)$ dizisinin ilk $k+1$ elemanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a_0 = a, a_1 = b, a_2 = ab, a_3 = (ab)^2, \dots, a_{k-2} = (ab)^{2^{k-4}}, \\ a_{k-1} = a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1}, a_k = a^{-1}b^{-1}(ab)^{2^{k-3}-1} a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1}.$$

$x^{u_n} x^{u_{n-1}} = x^{u_{n-2}} \dots x^{u_{n-k+1}} x^{-u_{n-k}}$ bağıntısı üzerinden $a_0 a_1 = a_2 a_3 \dots a_{k-1} (a_k)^{-1}$ olduğu görülür.

Böylece

$$ab = (ab)(ab)^2 \dots (ab)^{2^{k-4}} a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1} \left(a^{-1}b^{-1}(ab)^{2^{k-3}-1} a^{-1}b(ab)^{2^{k-3}-1} \right)^{-1} = ba$$

eşitliği elde edilir ki bu da grubun değişmeli olduğunu gösterir.

ii. İspat yukarıdakilere benzer işlemler kullanılarak yapılacaktır. $HF_k(G; a, b, c)$ dizisini göz önüne alalım. $x^{u_n} x^{u_{n-1}} = x^{u_{n-2}} \dots x^{u_{n-k+1}} x^{-u_{n-k}}$ bağıntısı kullanılarak $a_n a_{n+1} = a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{n+k-1} (a_{n+k})^{-1}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Eğer $k=3$ ise $a_3 = a^{-1}b^{-1}c$ olacağından

$$ab = a_0a_1 = a_2(a_3)^{-1} = a_2(a_2)^{-1}a_1a_0 = ba,$$

$$bc = a_1a_2 = a_3(a_4)^{-1} = a_3(a_3)^{-1}a_2a_1 = bc$$

ve

$$ca^{-1}b^{-1}c = a_2a_3 = a_4(a_5)^{-1} = a_4(a_4)^{-1}a_3a_2 = a^{-1}b^{-1}c^2$$

dolayısıyla

$$ac = ca$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da bizi istenilen sonuca ulaştırır.

$k = 4$ durumunu göz önüne alalım, bu durumda $a_3 = a^{-1}bc$ olmaktadır.

$$a_0a_1 = a_2a_3(a_4)^{-1} = a_2a_3(a_3)^{-1}(a_2)^{-1}a_1a_0, \quad a_1a_2 = a_3a_4(a_5)^{-1} = a_3a_4(a_4)^{-1}(a_3)^{-1}a_2a_1$$

ve

$$a_2a_3 = a_4a_5(a_6)^{-1} = a_4a_5(a_5)^{-1}(a_4)^{-1}a_3a_2$$

olduğundan $ab = ba, bc = cb$ ve $ca^{-1}bc = a^{-1}bc^2$ olur. Dolayısıyla $ac = ca$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$k \geq 5$ olsun. O zaman $HF_k(G; a, b, c)$ dizisinin 4-inci elemanı $a^{-1}bc$ dir, yani $a_3 = a^{-1}bc$ dir. $a_0a_1 = a_2a_3 \cdots a_{k-1}(a_k)^{-1}$, $a_1a_2 = a_3a_4 \cdots a_k(a_{k+1})^{-1}$ ve $a_2a_3 = a_4a_5 \cdots a_{k+1}(a_{k+2})^{-1}$ bağıntılarından $ab = ba, bc = cb$ ve $cabc = abc^2$ olduğu kolaylıkla görülür. b, c ile değişmeli olduğundan son denklem kullanılarak $ac = ca$ sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece grubun değişmeli olduğu görülmektedir.

$AutG$ kümesi $\theta: G \rightarrow G$ şeklindeki tüm izomorfizmleri içerdiğinden $\theta \in AutG$ ve $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \in X$ ise $(x_0\theta, x_1\theta, \dots, x_{j-1}\theta) \in X$ olduğu açıktır.

Her bir $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \in X$ geren j -lisi, $AutG$ kümesinin elemanlarının etkisi altında X in $|AutG|$ tane elemanına dönüşür. Bundan dolayı G grubu için

$$d_j(G) = |X|/|AutG|$$

tane izomorf olmayan geren j -lisi vardır [34]. $d_j(G)$ notasyonu hakkında ayrıntılı bilgiye [73] çalışmasında ulaşılabilir. Konsepti daha ayrıntılı ele alma adına G nin $AutG$ otomorfizm grubunun $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin üzerine etkisini incelemek gerekir.

$A \subseteq G$ altkümesi ve $\theta \in \text{Aut}G$ için A nın θ altındaki görüntüsü

$$A\theta = \{a\theta : a \in A\}$$

şeklindedir.

Lemma 2.2.1: $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \in X$ ve $\theta \in \text{Aut}G$ olsun. Eğer $k \geq j$ ise

$$(HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1}))\theta = HF_k(G; x_0\theta, x_1\theta, \dots, x_{j-1}\theta)$$

dir [72].

İspat: $\{a_i\}\theta = \{a_i\theta\}$ ve $k \geq j$ ise $n \geq j$ için

$$(a_n)\theta = ((a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1}))\theta;$$

$k = j+1$ ise $n \geq k$ için

$$(a_j)\theta = ((a_0)^{-1}(a_1) \cdots (a_{j-1}))\theta$$

ve

$$(a_n)\theta = ((a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1}));$$

$k \geq j+2$ ise $n \geq k$ için

$$(a_n)\theta = \begin{cases} ((a_0)(a_1) \cdots (a_{n-1}))\theta & \text{ise } j \leq n \leq k-2, \\ ((a_0)^{-1}(a_1) \cdots (a_{n-1}))\theta & \text{ise } n = k-1 \\ ((a_{n-k})^{-1}(a_{n-k+1})^{-1}(a_{n-k+2}) \cdots (a_{n-1}))\theta & \end{cases}$$

olduğundan dolayı sonuç açıktır.

$\text{Aut}G$ kümesinin λ tane elemanının $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisini kendi üzerine dönüştürdüğü varsayalım. Bu durumda $\theta \in \text{Aut}G$ ve $k \geq j$ için $|\text{Aut}G|/\lambda$ tane farklı $HF_k(G; x_0\theta, x_1\theta, \dots, x_{j-1}\theta)$ dizisinin mevcut olacağı açıktır.

Tanım 2.2.2: $k \geq j$ olmak üzere bir $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ geren j -lisi için s esas periyotlu $\overline{HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ esas Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi verilen

$x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ başlangıç değerleri ile grup elemanlarının $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ şeklindeki bir dizisidir. Burada dizinin her elemanı,

$k = j$ ve $n \geq j$ ise

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, \dots, b_{j-1} = x_{j-1} \text{ ve } b_n = (b_{n-k})^{-1}(b_{n-k+1})^{-1}(b_{n-k+2}) \cdots (b_{n-1});$$

$k = j+1$ ve $n \geq k$ ise

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, \dots, b_{j-1} = x_{j-1}, b_j = (b_0)^{-1}(b_1) \cdots (b_{j-1})$$

ve

$$b_n = (b_{n-k})^{-1}(b_{n-k+1})^{-1}(b_{n-k+2}) \cdots (b_{n-1});$$

$k \geq j+2$ ve $n \geq k$ ise

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, \dots, b_{j-1} = x_{j-1}$$

ve

$$b_n = \begin{cases} (b_0)(b_1) \cdots (b_{n-1}) & \text{ise } j \leq n \leq k-2, \\ (b_0)^{-1}(b_1) \cdots (b_{n-1}) & \text{ise } n = k-1, \\ (b_{n-k})^{-1}(b_{n-k+1})^{-1}(b_{n-k+2}) \cdots (b_{n-1}) & \text{ise } n \geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $s \geq 1$, $\theta \in \text{Aut}G$ için $b_0 = b_s\theta, b_1 = b_{s+1}\theta, b_2 = b_{s+2}\theta, \dots, b_{k-1} = b_{s+k-1}\theta$ koşullarını sağlayan en küçük tam sayıdır [72].

G , j -gerenli bir grup ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$ elemanları G grubunun üreteçleri olduğundan θ otomorfizmi tek türlü belirlenmektedir.

$\overline{HF}_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ esas Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin esas periyodu $\overline{PHF}_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir.

Sonlu bir G grubundaki $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ve $\overline{HF}_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizilerinin tanımlarından açık olarak görülür ki bu dizilerin periyotları seçilen geren kümesine ve bu kümenin elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişir.

Teorem 2.2.6: G sonlu bir grup ve $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ da G nin bir geren j -lisi olsun.

Eğer $k \geq j$ ise, $\overline{PHF}_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ sayısı $PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ yi böler ve $\text{Aut}G$

kümesinin $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ yı kendisi üzerine dönüştüren $PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) / \overline{PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ tane eleman vardır [72].

İspat: $k \geq j$ ve $\theta \in \text{Aut}G$ olsun. Bu durumda

$$PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) = \alpha \overline{PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$$

olurki

burada

α

$$HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) = \overline{HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})} \cup \overline{HF_k(G; x_0\theta, x_1\theta, \dots, x_{j-1}\theta)} \cup \overline{HF_k(G; x_0\theta^2, x_1\theta^2, \dots, x_{j-1}\theta^2)} \cup \dots$$

ve $\overline{PHF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})} = \overline{PHF_k(G; x_0\theta, x_1\theta, \dots, x_{j-1}\theta)}$ olduğundan otomorfizminin mertebesidir. Bu eşitlik yardımıyla $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{x-1}$ dönüşümlerinin $HF_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ dizisini kendisi üzerine dönüştürdükleri görülmektedir.

Teorem 2.2.7: p bir asal sayı olmak üzere $C_p = \langle x \rangle$, p mertebeli bir devirli grup olsun. Bu durumda $\overline{PHF_k(C_p; x)} = RHF_k(C_p; x)$ dir [72].

İspat: $\overline{PHF_k(C_p; x)} = u$ ve $PHF_k(C_p; x) = v$ olsun. O zaman

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = e, a_{k-1} = x, \dots,$$

$$a_u = a_{u+1} = \dots = a_{u+k-2} = e, a_{u+k-1} = x^{n_1}, \dots,$$

$$a_{\left(\frac{v}{u}-1\right)_u} = a_{\left(\frac{v}{u}-1\right)_{u+1}} = \dots = a_{\left(\frac{v}{u}-1\right)_{u+k-2}} = e, a_{\left(\frac{v}{u}-1\right)_{u+k-1}} = x^{\left(\frac{v}{u}-1\right)}, \dots,$$

$$a_v = a_{v+1} = \dots = a_{v+k-2} = e, a_{v+k-1} = x, \dots$$

dir. Esas Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisinin tanımından u 'nun

$$\text{ord}_p(n_1) = \text{ord}_p\left(n_{\left(\frac{v}{u}-1\right)}\right) = \frac{v}{u}$$

olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olduğu açıktır. Ayrıca, $RHF_k(C_p; x) = r$ ise, o zaman r , $a_r = a_{r+1} = \dots = a_{r+k-2} = e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Eğer $a_{r+k-2} = x^n$ ise $\text{ord}_p(n) = \frac{v}{r}$ olur. Şimdi $\mathbb{Z}_p$ de ki Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci

dizisini ele alalım. $\{HF_k(n)\}$ dizisinin terimleri $R_k(p)$ indeksi ile başladığı için yani $\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1}, n, n, \dots$ ifadesi tam olarak $\{HF_k(n)\}$ dizisinin başlangıç terimlerinin n ile

çarpımı olduğu için $ord_p(n) = \frac{v}{u}$ dır. Böylece $u = r$ sonucu elde edilir.

(a, b) ve (b, a) geren çiftlere göre D_{2n} dihedral grup ve $Q_{2^{n+1}}$ genelleştirilmiş quaternion grubundaki Hadamard-tipli 3-basamak Fibonacci dizisinin periyotlarını, esas periyotlarını ve ranklarını ele alalım;

Teorem 2.2.8: $n \geq 3$ için D_{2n} dihedral grup göz önüne alındığında

$$PHF_3(D_{2n}; a, b) = RHF_3(D_{2n}; a, b) = \begin{cases} 4n, & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ 2n, & \text{eğer } n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

$$\overline{PHF}_3(D_{2n}; a, b) = \begin{cases} n, & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ \frac{n}{2}, & \text{eğer } n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

$$PHF_3(D_{2n}; b, a) = \overline{PHF}_3(D_{2n}; b, a) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 4n, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 8n, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve

$$RHF_3(D_{2n}; b, a) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2n, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 4n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir [72].

İspat: İspat doğrudan hesaplama yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Önemle belirtmek gerekir ki $ab = ba^{-1}$ ve $ba = a^{-1}b$ dır. $HF_3(D_{2n}; a, b)$ dizisi

$$a, b, ba, e, ba^2, ba^3, e, a, ba^4, ba^5, e, a, ba^6, ba^7, \dots$$

şeklinde olup, bundan faydalanan dizinin genel hali

$$\begin{aligned} a_0 &= a, a_1 = b, a_2 = ba, a_3 = e, \\ a_4 &= a, a_5 = ba^2, a_6 = ba^3, a_7 = e, \\ a_8 &= a, a_9 = ba^4, a_{10} = ba^5, a_{11} = e, \dots, \\ a_{4i} &= a, a_{4i+1} = ba^{2i}, a_{4i+2} = ba^{2i+1}, a_{4i+3} = e, \dots, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada i negatif olmayan bir tamsayıdır. Bu nedenle $n \geq 3$ için $2i \mid n$ olacak şekilde en küçük i pozitif tam sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer n tek ise $i = n$ olur. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = ba^{-2}$ olduğundan $PHF_3(D_{2n}; a, b) = 4n$ ve $\overline{PHF_3}(D_{2n}; a, b) = n$ olarak elde edilir. Burada θ , a ya eşlenik (conjugate) bir iç otomorfizmdir.

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = ba^{-2}$ olduğundan $PHF_3(D_{2n}; a, b) = 2n$ ve $\overline{PHF_3}(D_{2n}; a, b) = \frac{n}{2}$ olarak elde edilir. Burada θ , a ya eşlenik bir iç otomorfizmdir.

Ayrıca yukarıdaki diziden $PHF_3(D_{2n}; a, b) = RHF_3(D_{2n}; a, b)$ olduğu açıktır. (b, a) geren çift için D_{2n} dihedral gruptaki Hadamard-tipli 3-basamak Fibonacci dizisi

$$b, a, ba, a^2, ba^4, a^5, ba^{11}, a^{12}, ba^{28}, a^{29}, ba^{69}, a^{70}, ba^{168}, a^{169}, ba^{407}, a^{408}, ba^{984}, a^{985}, ba^{2377}, \dots$$

şeklindeir. i pozitif bir tamsayı olmak üzere dizinin genel hali

$$a_0 = a, a_1 = b, a_2 = ba, \dots, \\ a_{8i} = ba^{4i\lambda_1}, a_{8i+1} = a^{4i\lambda_1+1}, a_{8i+2} = ba^{4i\lambda_2+1}, \dots,$$

formunda olup burada λ_1 ve λ_2 , $\text{obeb}(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır. Bu nedenle $n \geq 3$ için $4i \mid n$ olacak şekilde en küçük i pozitif tam sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ olur. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = b$ olduğundan

$$PHF_3(D_{2n}; b, a) = \overline{PHF_3}(D_{2n}; b, a) = 2n \text{ olarak elde edilir. Burada } \theta \text{ birim dönüşümüdür.}$$

Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = b$ olduğundan

$$PHF_3(D_{2n}; b, a) = \overline{PHF_3}(D_{2n}; b, a) = 4n \text{ olarak elde edilir. Burada } \theta \text{ birim dönüşümüdür.}$$

Eğer n tek ise $i = n$ olur. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = b$ olduğundan $PHF_3(D_{2n}; b, a) = \overline{PHF_3}(D_{2n}; b, a) = 8n$ olarak elde edilir. Burada θ birim dönüşümüdür.

Yukarıdaki diziden, i pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$a_0 = a, a_1 = b, \dots,$$

$$a_{4i} = ba^{4i\lambda}, a_{4i+1} = a^{4i\lambda+1}, \dots,$$

olarak yazılabilir. Burada λ , $\text{obeb}(4, \lambda) = 1$ olacak şekilde pozitif bir tamsayıdır. Sonuç

olarak $RHF_3(D_{2n}; b, a) = \frac{PHF_3(D_{2n}; b, a)}{2}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.9: $n \geq 2$ için $Q_{2^{n+1}}$ genelleştirilmiş quaternion grup göz önüne alındığında,

$$PHF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b) = RHF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b) = 2^{n+1},$$

$$\overline{PHF_3}(Q_{2^{n+1}}; a, b) = 2^n,$$

$$PHF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a) = 2^{n+1},$$

$$\overline{PHF_3}(Q_{2^{n+1}}; b, a) = \begin{cases} 4, & n = 2 \text{ için,} \\ 2^{n+1}, & n \geq 3 \text{ için,} \end{cases}$$

ve

$$RHF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a) = \begin{cases} 8, & n = 2 \\ 2^n - 4, & n \geq 3 \end{cases}$$

dir [72].

İspat: Önemle belirtmek gerekir ki $Q_{2^{n+1}}$ ($n \geq 2$) genelleştirilmiş quaternion grup

$$(ab)^4 = (ab)^2(ab)^2 = abba^{-1}abba^{-1} = b^2b^2 = e$$

ve

$$(ba)^4 = (ba)^2(ba)^2 = bba^{-1}abba^{-1}a = b^2b^2 = e$$

bağıntılarını sağlayan a ve b elemanları tarafından üretilmektedir. Bu bağıntılar yardımıyla $HF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b)$ dizisi

$$a, b, ba, e, a^{2^{n-1}+1}, ba^2, ba^{2^{n-1}+3}, e, a, ba^4, ba^5, e, a^{-2^{n-1}+1}, ba^6, ba^{2^{n-1}+7}, e, a, ba^8, ba^9, \dots$$

şeklinde elde edilir. Böylece, dizinin her bir sekiz terimde bir aynı formdaki elemanlardan ibaret olduğu görülmektedir.

Yukarıdakiler kullanarak, i pozitif bir tamsayı olmak üzere dizinin genel hali

$$a_0 = a, a_1 = b, a_2 = ba, \dots,$$

$$a_{8i} = a, a_{8i+1} = ba^{4i\lambda_1+1}, a_{8i+2} = b^{-1}a^{4i\lambda_2+1}, \dots,$$

formunda elde edilir ki burada λ_1 ve λ_2 , $\text{obeb}(\lambda_1, \lambda_2)=1$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır. Bu nedenle $n \geq 3$ için $4i \mid 2^n$ olacak şekilde en küçük i pozitif tamsayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $i = 2^{n-2}$ olarak seçilirse $a\theta = a^{-1}$ ve $b\theta = b^{-1}$ olduğundan $PHF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b) = 2^{n+1}$ ve $\overline{PHF}_3(Q_{2^{n+1}}; a, b) = 2^n$ olarak elde edilir. Burada θ , $n = 2$ için $a\theta = a^{-1}$ ve $b\theta = b^{-1}$ olduğundan ab ye eşlenik bir iç otomorfizmdir $n \geq 3$ olduğunda ise $a\theta = a$ ve $b\theta = b^{-1}$ olduğundan $a^{2^{n-2}}$ ye eşlenik iç otomorfizmdir. Ayrıca, yukarıdaki dizilerden $PHF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b) = RHF_3(Q_{2^{n+1}}; a, b)$ olduğu görülür.

Şimdi (b, a) geren çift için $Q_{2^{n+1}}$ quaternion grubundeki Hadamard-tipli 3-basamak Fibonacci dizisini dikkate alalım. $HF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a)$ dizisi

$$b, a, b^{-1}a, a^{2^{n-1}+2}, b^{-1}a^4, a^{2^{n-1}+5}, ba^{11}, a^{12}, ba^{28}, a^{29}, b^{-1}a^{69}, \\ a^{2^{n-1}+70}, b^{-1}a^{168}, a^{2^{n-1}+169}, ba^{407}, a^{408}, ba^{984}, a^{985}, b^{-1}a^{2377}, \dots$$

şeklinde elde edilir. $n = 2$ için $HF_3(Q_8; b, a) = \{b, a, b^{-1}a, e, b^{-1}, a^{-1}, b^{-1}a, e, b, a\}$ olduğu görülür. Bu nedenle $PHF_3(Q_8; b, a) = RHF_3(Q_8; b, a) = 8$ elde edilir. Böylece $a\theta = a$ ve $b\theta = b$ olduğundan $\overline{PHF}_3(Q_8; b, a) = 4$ olarak elde edilir. Burada θ birim dönüşümdür. Eğer $n \geq 3$ ise i pozitif bir tamsayı olmak üzere $HF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a)$ dizisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a_0 = b, a_1 = a, a_2 = b^{-1}a, \dots, \\ a_{8i} = ba^{4i\lambda_1}, a_{8i+1} = a^{4i\lambda_1}, a_{8i+2} = ba^{4i\lambda_2+1}, \dots,$$

burada λ_1 ve λ_2 , $\text{obeb}(\lambda_1, \lambda_2)=1$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır. Bu nedenle $n \geq 3$ için $4i \mid 2^n$ olacak şekilde en küçük i pozitif tamsayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $i = 2^{n-2}$ olarak seçilirse $a\theta = a$ ve $b\theta = b$ olduğundan $PHF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a) = \overline{PHF}_3(Q_{2^{n+1}}; b, a) = 2^{n+1}$ olarak elde edilir. Burada θ birim dönüşümdür. Tümevarım yöntemi kullanılarak $n \geq 3$ ve i pozitif tamsayısı için aşağıdaki eşitliklerin de $HF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a)$ dizisini sağladığı görülmektedir:

$$a_{8i-4} = b^{-1}a^{4i\lambda}, a_{8i-3} = b^2a^{4i\lambda+1}, \dots,$$

burada λ , $\text{obeb}(4, \lambda) = 1$ olacak şekilde bir pozitif tamsayıdır. Eğer $i = 2^{n-3}$ ve $\lambda = 2\alpha + 1$ olarak seçilirse

$$a_{8i-4} = b^{-1}a^{4i\lambda} = b^{-1}a^{4(2^{n-3})(2\alpha+1)} = b^{-1}(a^{2^n})^\alpha b^2 = b^{-1}b^2 = b$$

ve

$$a_{8i-3} = b^2a^{4i\lambda+1} = b^2a^{4(2^{n-3})(2\alpha+1)+1} = b^2(a^{2^n})^\alpha ab^2 = b^2b^2a = b$$

eşitlikleri elde edilir ki buda $RHF_3(Q_{2^{n+1}}; b, a) = 2^n - 4$ olduğunu gösterir.



3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Hadamard-Tipli k -basamak Pell Dizileri

[53]' da Pell dizisi ve genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı kullanılarak k -basamak yeni bir dizi tanımlanmış olup, bu dizi Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi olarak adlandırılmıştır;

Tanım 3.1.1: $k \geq 3$ ve $n \geq 0$ için Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi

$HP_0^k = HP_1^k = \dots = HP_{k-2}^k = 0$ ve $HP_{k-1}^k = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte

$$HP_{n+k}^k = 2HP_{n+k-1}^k + HP_{n+k-2}^k + \dots + HP_{n+2}^k - 2HP_{n+1}^k - HP_n^k \quad (3.1.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [53].

(3.1.1) bağıntısı yardımıyla, Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi için üreteç matrisi

$$H_k^p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu matris Hadamard-tipli k -Pell matrisi olarak adlandırılmıştır. n üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Pell matrisinin n -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilir:

(i) $k = 3$ için,

$$\left(H_3^p\right)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+2}^3 & -2HP_{n+1}^3 - HP_n^3 & -HP_{n+1}^3 \\ HP_{n+1}^3 & -2HP_n^3 - HP_{n-1}^3 & -HP_n^3 \\ HP_n^3 & -2HP_{n-1}^3 - HP_{n-2}^3 & -HP_{n-1}^3 \end{bmatrix},$$

(ii) $k = 4$ için,

$$(H_4^p)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+3}^4 & HP_{n+4}^4 - 2HP_{n+3}^4 & -2HP_{n+2}^4 - HP_{n+1}^4 & -HP_{n+2}^4 \\ HP_{n+2}^4 & HP_{n+3}^4 - 2HP_{n+2}^4 & -2HP_{n+1}^4 - HP_n^4 & -HP_{n+1}^4 \\ HP_{n+1}^4 & HP_{n+2}^4 - 2HP_{n+1}^4 & -2HP_n^4 - HP_{n-1}^4 & -HP_n^4 \\ HP_n^4 & HP_{n+1}^4 - 2HP_n^4 & -2HP_{n-1}^4 - HP_{n-2}^4 & -HP_{n-1}^4 \end{bmatrix},$$

(iii) $k \geq 5$ için $(H_k^p)^n$ matrisi

$$(H_k^p)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+k-1}^k & HP_{n+k}^k - 2HP_{n+k-1}^k & -2HP_{n+k-2}^k - HP_{n+k-3}^k & -HP_{n+k-2}^k \\ HP_{n+k-2}^k & HP_{n+k-1}^k - 2HP_{n+k-2}^k & -2HP_{n+k-3}^k - HP_{n+k-4}^k & -HP_{n+k-3}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HP_{n+1}^k & HP_{n+2}^k - 2HP_{n+1}^k & -2HP_n^k - HP_{n-1}^k & -HP_n^k \\ HP_n^k & HP_{n+1}^k - 2HP_n^k & -2HP_{n-1}^k - HP_{n-2}^k & -HP_{n-1}^k \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

şeklinde olup $n \geq k-3$ için, $(k-4) \times (k-4)$ boyutlu H_k^{p*} matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} HP_{n+k-2}^k + HP_{n+k-3}^k + \dots + HP_{n+3}^k - 2HP_{n+2}^k - HP_{n+1}^k & HP_{n+k-2}^k + HP_{n+k-3}^k + \dots + HP_{n+4}^k - 2HP_{n+3}^k - HP_{n+2}^k & \dots \\ HP_{n+k-3}^k + HP_{n+k-4}^k + \dots + HP_{n+2}^k - 2HP_{n+1}^k - HP_n^k & HP_{n+k-3}^k + HP_{n+k-4}^k + \dots + HP_{n+3}^k - 2HP_{n+2}^k - HP_{n+1}^k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ HP_n^k + HP_{n-1}^k + \dots + HP_{n-k+5}^k - 2HP_{n-k+4}^k - HP_{n-k+3}^k & HP_n^k + HP_{n-1}^k + \dots + HP_{n-k+6}^k - 2HP_{n-k+5}^k - HP_{n-k+4}^k & \dots \\ HP_{n-1}^k + HP_{n-2}^k + \dots + HP_{n-k+4}^k - 2HP_{n-k+3}^k - HP_{n-k+2}^k & HP_{n-1}^k + HP_{n-2}^k + \dots + HP_{n-k+5}^k - 2HP_{n-k+4}^k - HP_{n-k+3}^k & \dots \\ & & HP_{n+k-2}^k - 2HP_{n+k-3}^k - HP_{n+k-4}^k \\ & & HP_{n+k-3}^k - 2HP_{n+k-4}^k - HP_{n+k-5}^k \\ & & \vdots \\ & & HP_n^k - 2HP_{n-1}^k - HP_{n-2}^k \\ & & HP_{n-1}^k - 2HP_{n-2}^k - HP_{n-3}^k \end{bmatrix}.$$

Ayrıca $\det H_k^p = (-1)^k$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [53].

Şimdi Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi için Binet formülü üzerinde duracağız;

Lemma 3.1.1: $k, k \geq 3$ olacak şekilde bir tek tamsayı olsun. Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin karakteristik denklemi $x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1 = 0$ olup, bu denklemin çok katlı kökü yoktur [53].

İspat: $f(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1$ olsun. $k = 3$ için Hadamard-tipli k -Pell dizisinin karakteristik denklemi $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ şeklinde olup bu denklemin kökleri

$$x_1 = 1.1766 - 1.2028i,$$

$$x_2 = 1.1766 + 1.2028i,$$

ve

$$x_3 = -0.35321$$

olarak elde edilir. Böylece, $k = 3$ için $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı kökü olmadığı kolaylıkla görülmektedir.

Şimdi de $k \geq 5$ durumunu göz önüne alalım. Farz edelim ki $g(x)$ fonksiyomu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 3x^k + x^{k-1} + 3x^2 - x - 1$$

bu durumda

$$x^k = \frac{-3x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Öte yandan $g'(x) = (k+1)x^k - 3kx^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + 6x - 1$ olup

$$x^k = \frac{-6x^3 + x^2}{(k+1)x^2 - 3kx + k-1} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerinin eşitliğine

$$k = 1 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 4x}{-3x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 1}$$

eşitliğine ulaşılır. Matematica wolfram 10.0 [71] gibi kullanarak denklemin bir çözümü olmadığı görülür. Dolayısıyla $k \geq 5$ için bu eşitliği sağlayacak k tam sayısının varlığı noktasında çelişki elde edilir. Bu da bize $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı köklerinin olmadığı sonucunu verir.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ 'ler $x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1$ denkleminin kökleri ise o zaman Lemma 4.1.1'den bu köklerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. $k \times k$ boyutlu V^k Vandermonde matrisi

$$V^k = \begin{bmatrix} (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \dots & (x_k)^{k-1} \\ (x_1)^{k-2} & (x_2)^{k-2} & \dots & (x_k)^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x & & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $R^k(i, j)$ matrisi

$$R^k(i, j) = \begin{bmatrix} x_1^{n+k-i} \\ x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ x_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. $k \times k$ boyutlu $V^k(i, j)$ matrisi, V^k matrisinin j -inci sütununu $R^k(i, j)$ sütun matrisiyle yer değiştirilmesi sonucu elde edilsin [53].

Teorem 3.1.1: $k \geq 3$ olacak şekilde k tek tamsayısı ve $n \geq 0$ için $(H_k^p)^n = [h_{i,j}^{p,k,n}]$ olsun. Bu durumda

$$h_{i,j}^{p,k,n} = \frac{\det V^k(i, j)}{\det V^k}$$

dir [53].

İspat: $x_1, x_2, \dots, x_k$ öz değerleri birbirinden farklı olduğundan H_k^p matrisi köşegenleştirilebilir. Bu durumda $H_k^p V^k = V^k S^k$ olduğu kolaylıkla görülür ki, burada $S^k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dir. V^k matrisi tersinir matrisi olduğundan $(V^k)^{-1} H_k^p V^k = S^k$ eşitliği sağlanır ki, bu da bize H_k^p matrisinin S^k matrisine benzer olduğunu gösterir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $(H_k^p)^n V^k = V^k (S^k)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} h_{i,1}^{p,k,n} x_1^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_1^{k-2} + \dots + h_{i,k}^{p,k,n} = x_1^{n+k-i} \\ h_{i,1}^{p,k,n} x_2^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_2^{k-2} + \dots + h_{i,k}^{p,k,n} = x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ h_{i,1}^{p,k,n} x_k^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_k^{k-2} + \dots + h_{i,k}^{p,k,n} = x_k^{n+k-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \dots, k$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$h_{i,j}^{p,k,n} = \frac{\det V^k(i, j)}{\det V^k}$$

eşitliği elde edilir.

Hadamard-tipli k -basamak Pell sayıları için Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Sonuç 3.1.1: $k \geq 3$ olacak şekilde k tek tamsayı ve $n \geq 0$ için HP_n^k , n -inci Hadamard - tipli k -basamak Pell sayısı olmak üzere

$$HP_n^k = \frac{\det V^k(k,1)}{\det V^k} = \frac{\det V^k(k-1,k)}{\det V^k}$$

eşitliği elde edilir [53].

Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin Companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin permanental temsili elde edilmiştir:

Tanım 3.1.2: $r \geq k$ ($k \geq 3$) bir tam sayı olmak üzere $r \times r$ boyutlu $M^{r,k} = [m_{i,j}^{r,k}]$ süper köşegen matrisi;

$$m_{i,j}^{r,k} = \begin{cases} 1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-1, \\ &i=t \text{ ve } j=t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-2, \\ &\vdots \\ &i=t \text{ ve } j=t+k-3 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+3, \\ &\text{ve} \end{aligned} \\ 2 & i=t \text{ ve } j=t-1 \text{ ise } 2 \leq t \leq r, \\ -2 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t \text{ ise } 1 \leq t \leq r, \\ -1 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+2, \\ & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [53].

Teorem 3.1.2: $r \geq k$ ve $k \geq 3$ için,

$$\text{per} M^{r,k} = HP_{r+k-1}^k$$

eşitliği elde edilir [53].

İspat: İspat matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Denklemin $r \geq k$ için $perM^{r,k} = HP_{r+k-1}^k$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $r+1$ için de sağlandığı göstermelidir. Eğer $perM^{r,k}$, $M^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perM^{r+1,k} = 2 perM^{r,k} + perM^{r-1,k} + \dots + perM^{r-k+3,k} - 2 perM^{r-k+2,k} - perM^{r-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir.

$$perM^{r,k} = HP_{r+k-1}^k,$$

$$perM^{r-1,k} = HP_{r+k-2}^k,$$

$\vdots$

$$perM^{r-k+3,k} = HP_{r+2}^k,$$

$$perM^{r-k+2,k} = HP_{r+1}^k$$

ve

$$perM^{r-k+1,k} = HP_r^k$$

olduğundan $perM^{r+1,k} = HP_{r+k}^k$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.3: $r > k$ olmak üzere ve $r \times r$ boyutlu $N^{r,k} = [n_{i,j}^{r,k}]$ matrisi;

$$n_{i,j}^{r,k} = \begin{cases} 1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-2, \\ &i=t \text{ ve } j=t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-3, \\ &\vdots \\ &i=t \text{ ve } j=t+k-3 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+2, \end{aligned} \\ \text{ve} \\ 2 & i=t \text{ ve } j=t-1 \text{ ise } 2 \leq t \leq r, \\ -2 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t \text{ ise } 1 \leq t \leq r-1, \\ -1 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ 0 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [53].

$r \times r$ boyutlu $B^{r,k} = [b_{i,j}^{r,k}]$ matrisi aşağıdaki gibi,

$$\begin{array}{c}
(r-k)\text{-inci} \\
\downarrow \\
B^{r,k} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & N^{r-1,k} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

şeklinde tanımlanır [53].

Teorem 3.1.3: (i). $r > k$ için,

$$perN^{r,k} = -HP_{r-1}^k,$$

(ii). $r > k+1$ için,

$$perB^{r,k} = -\sum_{i=0}^{r-2} HP_i^k$$

eşitlikleri elde edilir [53].

İspat: (i). Theorem r üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanacaktır. Denklemin $r > k$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda denklemin $r+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $perN^{r,k}$, $N^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perN^{r+1,k} = 2 perN^{r,k} + perN^{r-1,k} + \cdots + perN^{r-k+3,k} - 2 perN^{r-k+2,k} - perN^{r-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$perN^{r,k} = HP_{r-1}^k,$$

$$perN^{r-1,k} = HP_{r-2}^k,$$

$$\vdots$$

$$perN^{r-k+3,k} = HP_{r-k+2}^k,$$

$$perN^{r-k+2,k} = HP_{r-k+1}^k$$

ve

$$perN^{r-k+1,k} = HP_{r-k}^k$$

olduğundan $perN^{r+1,k} = HP_r^k$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(ii). Eğer $perB^{r,k}$, $B^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perB^{r,k} = perB^{r-1,k} + perN^{r-1,k}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.1.3 ve 4.1.4 (i) göz önünde bulundurularak r üzerinde tümevarım yönteminden ispat kolaylıkla görülür.

$r > k + 1$ için ve $r \times r$ boyutlu bir Q matrisi,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 3.1.2: $r > k + 1$ için,

$$\det(M^{r,k} \circ Q) = HP_{r+k-1}^k,$$

$$\det(N^{r,k} \circ Q) = -HP_{r-1}^k$$

ve

$$\det(B^{r,k} \circ Q) = -\sum_{i=0}^{r-2} HP_i^k$$

eşitlikleri elde edilir [53].

Aşağıdaki sonuç ile Hadamard-tipli k -basamak Pell sayıları için toplamsal temsil verilmektedir.

Sonuç 3.1.3: $k \geq 3$ için HP_n^k , n -inci Hadamard-tipli k -basamak Pell sayısı olsun.

Yani

i.

$$HP_n^k = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \binom{t_1 + \cdots + t_k}{t_1, \dots, t_k} 2^{t_1} (-2)^{t_{k-1}} (-1)^{t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = n - k + 1$ koşulunu sağlamaktadır.

ii.

$$HP_n^k = - \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} \times \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} 2^{t_1} (-2)^{t_{k-1}} (-1)^{t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = n + 1$ koşulunu sağlamaktadır [53].

İspat: Teorem (1.2.15) da *i.* durum için $i = k$ ve $j = 1$ ve *ii.* durum için $i = k - 1$, $j = k$ olarak alınırsa ispatı Hadamard-tipli k -basamak Pell matrisinden kolaylıkla görülür.

Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_k(x) = \frac{x^{k-1}}{1 - 2x - x^2 - \dots - x^{k-2} + 2x^{k-1} + x^k}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının üstel temsili verilmiştir.

Teorem 3.1.4: Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir:

$$g_k(x) = x^{k-1} \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} \left(2 + x + \dots + x^{k-3} - 2x^{k-2} - x^{k-1} \right)^i \right)$$

burada $k \geq 3$ dir [53].

İspat:

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = -\ln(1 - 2x - x^2 - \dots - x^{k-2} + 2x^{k-1} + x^k)$$

ve

$$\begin{aligned}
-\ln(1-2x-x^2-\dots-x^{k-2}+2x^{k-1}+x^k) = & -\left[-x(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})-\right. \\
& \frac{1}{2}x^2(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^2-\dots- \\
& \left.\frac{1}{n}x^n(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^n-\dots\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının toplamını göz önüne alalım. O halde $n \geq 0$ ve $k \geq 3$ için,

$$S_n = \sum_{i=0}^n HP_n^k$$

olmak üzere ve $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu L_k^h matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$L_k^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & H_k^p & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

bu durumda $(L_k^h)^n$ matrisi aşağıdaki gibi olup tümevarım yöntemi ile görülebilir[53]:

$$(L_k^h)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_{n+k-2} & & & \\ S_{n+k-3} & & (H_k^p)^n & \\ \vdots & & & \\ S_{n-1} & & & \end{bmatrix}.$$

3.2. Sonlu Gruplarda Hadamard-Tipli k -Basamak Pell Dizileri

$\{HP_n^k\}$ Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisini bir m modülüne göre indirgenirse,

$$\{HP_n^{k,m}\} = \{HP_0^{k,m}, HP_1^{k,m}, \dots, HP_i^{k,m}, \dots\}$$

şeklindeki indirgemeli dizi elde edilir. Burada $HP_i^{k,m} = HP_i^k \pmod{m}$ dır. Önemle belirtmek gerekir ki, buaradaki indirgeme bağıntısı (4.1.1)'deki bağıntı ile aynıdır [22].

Teorem 3.2.1: $k \geq 3$ için $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [54].

İspat: $P = \{(p_0, p_1, \dots, p_{k-1}) \mid 0 \leq p_i \leq m-1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|P| = m^k$ dir. Z_m elemanlarının m^k tane farklı k -tiplisi mevcut olduğundan, bu k -tiplilerden en az bir tanesi $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -tipliye takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisi periyodik bir dizidir. Dolayısıyla $i > j$ ve $i \equiv j \pmod{k}$ olmak üzere

$$HP_i^{k,m} \equiv HP_j^{k,m}, HP_{i+1}^{k,m} \equiv HP_{j+1}^{k,m}, \dots, HP_{i+k-1}^{k,m} \equiv HP_{j+k-1}^{k,m}$$

sonucuna ulaşılır. Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin tanımından,

$$HP_{i-1}^{k,m} \equiv HP_{j-1}^{k,m}, HP_{i-2}^{k,m} \equiv HP_{j-2}^{k,m}, \dots, HP_{i-j}^{k,m} \equiv HP_0^{k,m}.$$

denklikleri elde edilir ki bu da $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisinin basit bir periyodik olduğunu gösterir.

$\langle Q \rangle_m = \{Q^i \pmod{m} \mid i \geq 0\}$ kümesi ele alalım. Daha önce de belirttiğimiz gibi $\langle Q \rangle_m$ kümesi $\gcd(m, \det Q) = 1$ olduğunda devirli grup olur. H_k^p Hadamard-tipli k -basamak Pell matrisi için $\det H_k^p = (-1)^k$ olduğundan m nin bütün pozitif tamsayı değerleri için $\langle H_k^p \rangle_m$ kümesi devirli grup olarak karşımıza çıkmaktadır.

Teorem 3.2.2: s bir asal sayı ve $\langle H_k^p \rangle_{s^m}$ devirli bir grup olsun. Eğer j ,

$\left| \langle H_k^p \rangle_s \right| = \left| \langle H_k^p \rangle_{s^j} \right|$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı ise, her $w \geq j$ tamsayı değeri için $\left| \langle H_k^p \rangle_{s^w} \right| = s^{w-j} \cdot \left| \langle H_k^p \rangle_s \right|$ eşitliği yazılır. Özellikle her $w \geq 2$ için $\left| \langle H_k^p \rangle_s \right| \neq \left| \langle H_k^p \rangle_{s^2} \right|$ ise $\left| \langle H_k^p \rangle_{s^w} \right| = s^{w-1} \cdot \left| \langle H_k^p \rangle_s \right|$ dir [54].

İspat: $\langle H_k^p \rangle_{s^m}$ devirli grubunu ele alalım. Farz edelim ki α pozitif bir tamsayı olsun ve $|\langle H_k^p \rangle_{s^m}|$, $L^{k,p}(s^m)$ ile gösterilsin. Eğer $(H_k^p)^{L^{k,p}(s^{\alpha+1})} = I \pmod{s^{\alpha+1}}$ ise o zaman $(H_k^p)^{L^{k,p}(s^{\alpha+1})} = I \pmod{s^\alpha}$ dir. Burada I , $(k) \times (k)$ tipli birim matristir. Böylece $L^{k,p}(s^\alpha)$ nin $L^{k,p}(s^{\alpha+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $(H_k^p)^{L^{k,p}(s^\alpha)} = I + (h_{i,j}^{(\alpha)} s^\alpha)$ eşitliği yazılarak, binom açılımından

$$(H_k^p)^{L^{k,p}(s^\alpha) \cdot s} = \left(I + (h_{i,j}^{(\alpha)} s^\alpha) \right)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} (h_{i,j}^{(\alpha)} s^\alpha)^i \equiv I \pmod{s^{\alpha+1}}$$

elde edilir ki bu da $L^{k,p}(s^{\alpha+1})$ nin $L^{k,p}(s^\alpha) \cdot s$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $L^{k,p}(s^{\alpha+1}) = L^{k,p}(s^\alpha) \cdot s$ ya da $L^{k,p}(s^{\alpha+1}) = L^{k,p}(s^\alpha) \cdot s$ dir. Ancak $L^{k,p}(s^{\alpha+1}) = L^{k,p}(s^\alpha) \cdot s$ eşitliğin sağlanması, s tarafından bölünemeyen bir $h_{i,j}^{(\alpha)}$ nin var olması ile mümkündür. q , $L^{k,p}(s) = L^{k,p}(s^q)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $L^{k,p}(s^q) \neq L^{k,p}(s^{q+1})$ eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlik, s tarafından bölünmeyen bir $h_{i,j}^{(q+1)}$ nin mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $L^{k,p}(s^{q+1}) \neq L^{k,p}(s^{q+2})$ sonucu elde edilir ve q üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$\{HP_n^{k,m}\}$ dizisinin periyodunun uzunluğu $h^{k,p}(m)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.3: $u \geq 1$ ve s_i 'ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^u (s_i)^{\beta_i}$ olsun. Bu

takdirde

$$h^{k,p}(m) = \text{okek} \left[h^{k,p}((s_1)^{\beta_1}), h^{k,p}((s_2)^{\beta_2}), \dots, h^{k,p}((s_u)^{\beta_u}) \right]$$

dir [54].

İspat: $\{HP_n^{k,(s_i)^{\beta_i}}\}$ dizisinin periyodu $h^{k,p}((s_i)^{\beta_i})$ olduğundan bu dizi sadece $\varepsilon \cdot h^{k,p}((s_i)^{\beta_i})$, $(\varepsilon \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $h^{k,p}(m)$, $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\{HP_n^{k,(s_i)^{\beta_i}}\}$ dizisi $h^{k,p}(m)$ terimde bir

tekrar eder. Böylece her i değeri için $h^{k,p}(m)$ periyodu $\varepsilon.h^{k,p}((s_i)^{\beta_i})$ şeklinde olup bu sayı $\{HP_n^{k,m}\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla

$$h^{k,p}(m) = \text{okek} \left[h^{k,p}((s_1)^{\beta_1}), h^{k,p}((s_2)^{\beta_2}), \dots, h^{k,p}((s_u)^{\beta_u}) \right]$$

elde edilmektedir.

Tanım 3.2.1: G , j -gerenli bir grup ve $(a_0, a_1, \dots, a_{j-1})$ de G için geren bir j -lisi olsun. O halde, G' deki Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır [54]:
 $k \leq j$ ve $n \geq j$ ise

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}$$

ve

$$x_n = (x_{n-k})^{-1} (x_{n-k+1})^{-2} (x_{n-k+2}) \cdots (x_{n-2}) (x_{n-1})^2$$

dir.

$k = j+1$ ve $n \geq k$ ise

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_j = (x_0)^{-2} (x_1) \cdots (x_{j-2}) (x_{j-1})^2$$

ve

$$x_n = (x_{n-k})^{-1} (x_{n-k+1})^{-2} (x_{n-k+2}) \cdots (x_{n-2}) (x_{n-1})^2$$

dir.

$k \geq j+2$ ve $n \geq k$ ise

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}$$

ve

$$x_n = \begin{cases} (x_0)(x_1) \cdots (x_{n-2})(x_{n-1})^2 & \text{ise } j \leq n \leq k-2, \\ (x_0)^2 (x_1) \cdots (x_{n-2})(x_{n-1})^2 & \text{ise } n = k-1, \\ (x_{n-k})^{-1} (x_{n-k+1})^2 (x_{n-k+2}) \cdots (x_{n-2})(x_{n-1})^2, & \end{cases}$$

dir. Bir $(a_0, a_1, \dots, a_{j-1})$ geren j -lisi için, G nin Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi

$HP_{(G; a_0, a_1, \dots, a_{j-1})}^k$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.4: Sonlu bir gruptaki Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi periyodiktir. Özellikle; $k \geq j$ için, bir j -gerenli sonlu gruptaki Hadamard-tipli k -basamak Pell

dizisi basit periyodiktir [54].

İspat: G grubunun mertebesi p olsun. G nin elemanlarının p^k tane farklı k -lisi mevcut olduğundan, bu k -lilerden en az bir tanesi $HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -liyi takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece $HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisinin periyodik bir dizi olduğu görülmektedir. $HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisi periyodik olduğundan, $g > h$ olmak üzere

$$x_{g+1} = x_{h+1}, x_{g+2} = x_{h+2}, \dots, x_{g+k} = x_{h+k}$$

olacak şekilde g ve h doğal sayıları bulunmaktadır. $HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisinin tanımından,

$$x_n = (x_{n+1})^{-2} (x_{n+2}) \cdots (x_{n+k-2}) (x_{n+k-1})^2 (x_{n+k})^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $k \geq j$ ise, o zaman $x_g = x_h$ yazılabilir ve böylece

$$x_{g-1} = x_{h-1}, x_{g-2} = x_{h-2}, \dots, x_{g-g} = x_0 = x_{h-g}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da $HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisinin basit bir periyodik olduğu gösterir.

$HP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ dizisinin periyodu $LHP_{(G;a_0,a_1,\dots,a_{j-1})}^k$ ile gösterilsin.

Son olarak, SD_{2^m} semidihedral grup ve QD_{2^m} quasi-dihedral gruplarındaki Hadamard tipli 3-basamak Pell dizilerinin periyotları incelenecektir;

Teorem 3.2.5: SD_{2^m} Semidihedral grubundaki Hadamard-tipli 3-basamak Pell dizisinin periyodu $3 \cdot 2^{m-2}$ dir [54].

İspat: Doğrudan hesaplama yöntemi kullanılarak Teorem ispatlanır. $HP_{(SD_{2^m;x,y})}^3$ dizisi

$$x, y, x^{-2}, x^{-5}, yx^{-6}, x^{12}, x^{29}, yx^{28}, x^{-70}, x^{-169}, yx^{-170}, x^{408}, x^{985}, yx^{984}, x^{-2378}, \dots$$

şeklinde olup, bundan faydalanan dizinin genel hali

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^{-2}, \dots$$

$$x_{6i} = x^{4i\beta_1+1}, x_{6i+1} = yx^{4i\beta_1}, x_{6i+2} = x^{-4i\beta_2-2}, \dots$$

şeklinde elde edilir. Burada, β_1 ve β_2 , $\text{obeb}(\beta_1, \beta_2) = 1$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır. Bu nedenle, dizinin periyodunu belirlemek için $4i = 2^{m-1}k$ ($k \in N$) olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Eğer $i = 2^{m-3}$ olarak seçilirse

$$x_{6 \cdot 2^{m-3}} = x, x_{6 \cdot 2^{m-3}+1} = y, x_{6 \cdot 2^{m-3}+2} = x^{-2}.$$

eşitlikleri elde edilir. $x_{6 \cdot 2^{m-3}}, x_{6 \cdot 2^{m-3}+1}, x_{6 \cdot 2^{m-3}+2}$ tekrar eden elemanlar x ve y başlangıç değerlerine bağlı olarak karşımıza çıktığı için dizi $(6 \cdot 2^{m-3})$. elemandan sonra tekrar eder. Dolayısıyla $LHP_{(SD_{2^m}; x, y)}^2 = 3 \cdot 2^{m-2}$ olur.

Teorem 3.2.6: (x, y) geren çifti için QD_{2^m} quasi-dihedral grubunu ele alalım. O zaman $HP_{(QD_{2^m}; x, y)}^3$ dizisinin periyod uzunluğu $3 \cdot 2^{m-2}$ dir [54].

İspat: $HP_{(QD_{2^m}; x, y)}^3$ dizisi

$$x, y, x^{-2}, x^{-5}, yx^{-6}, e, x^{17}, yx^{40}, x^{46}, x^{-5}, yx^{-142}, x^{-320}, x^{-351}, yx^{80}, x^{1182}, \dots$$

şeklinde olup, bundan faydalanan dizinin genel halini

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^{-2}, \dots$$

$$x_{6i} = x^{8i\beta_1+1}, x_{6i+1} = yx^{8i\beta_2}, x_{6i+2} = x^{8i\beta_3-2}, \dots$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, β_1 , β_2 ve β_3 , $\text{obeb}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$ olacak şekilde pozitif tamsayılarıdır. Bu nedenle dizinin periyodunu belirlemek için $8i = 2^{m-1}k$ ($k \in N$) olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Eğer $i = 2^{m-4}$ olarak seçilirse

$$x_{6 \cdot 2^{m-4}} = x, x_{6 \cdot 2^{m-4}+1} = y, x_{6 \cdot 2^{m-4}+2} = x^{-2}.$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $LHP_{(QD_{2^m}; x, y)}^3 = 3 \cdot 2^{m-3}$ olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak, Pell ve genelleştirilmiş k -basamak Pell dizilerinin karakteristik polinomlarının Hadamard tipli çarpımı ile yeni bir k -basamak dizi tanımlanmıştır ve bu diziye Hadamard tipli k -basamak Pell dizisi denilmiştir. Daha sonra tanımlanan bu dizinin üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ile sonlu toplamaları gibi çeşitli yapısal özellikleri belirlenmiştir.

Ayrıca, tanımlanan dizinin üreteç matrisi m modülüne göre indirgenerek bu matrisin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretilmiş ve dizinin m modülüne göre periyotları belirlenmiştir. Üretilen devirli grupların mertebeleri ve dizinin periyotları arasında bağıntılar elde edilmiştir.

Tanımlanan diziler grup elemanları yardımıyla kendi yapısal özellikleri de dikkate alınarak yeniden tanımlanmıştır. Grup elemanları yardımıyla tanımlanan Hadamard tipli 3-basamak Pell dizisi SD_{2^m} semidihedral ve QD_{2^m} quasi-dihedral gruplarında incelenmiştir.

Yukarıda belirtilen sonuçlar göz önüne alındığında tanımlanan bu diziler Pell dizileri ile ilişkilendirilebilir. Ayrıca Hadamard tipli k -basamak Pell dizileri yapısal özellikleri de dikkate alınarak farklı sonlu grup ailelerinde incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Adams, W. and Shanks, D., (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. *Mathematics of Computation*, 36(159), 255-300.
- [2] Becker, P.G., (1994). k -Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. *Journal of Number Theory*, 49(3), 269-286.
- [3] El Naschie, M.S., (2005). Deriving The Essential Features of Standard Model From The General Theory of Relativity, Chaos, Solitons & Fractals, 24(4), 941-946.
- [4] Fraenkel, A.S., Klein, S.T., (1996). Robust Universal Complete Codes for Transmission and Compression. *Discrete Applied Mathematics*, 64(1), 31-55.
- [5] Kirchoff, B.K. and Rutishauser, R., (1990). The Phyllotaxy of *Costus* (Costaceae). *Botanical Gazette*, 151(1), 88-105.
- [6] Mandelbaum, D., (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(2), 281-285.
- [7] Spinadel, V.W., (2002). The Metallic Means Family and Forbidden Symmetries. *Int. Math. J.*, 2(3), 279-288.
- [8] Stein, W., (1993). Modelling The Evolution of Stellar Architecture in Vascular Plants. *International Journal of Plant Sciences*, 154(2), 229-263.
- [9] Bicknell, M., (1975). A Primer on The Pell Sequences and Related Sequence. *Fibonacci Quarterly*, 13(4), 345-350.
- [10] Deveci, O., Akdeniz, M. and Karaduman, E., (2015). The Generalized Pell p -Sequences in Groups. *Ars Combinatoria*, 120, 383-401.
- [11] Deveci, O. and Akuzum, Y., (2016). The Recurrence Sequences via The Fibonacci Groups. *AIP Conference Proceedings*, 1726, 020084-1-020084-4; doi: 10.1063/1.4945910.
- [12] Deveci, O., Karaduman, E. and Campbell, C.M., (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A:Science*, 41(4), 1033-1038.
- [13] Deveci, O. and Shannon, A.G., (2017). On The Adjacency-Type Sequences. *International Journal of Advances in Mathematics*, 2017(2), 10-24.

- [14] Deveci, Ö. and Shannon, A. G., (2017). The Pell-Padovan-Circulant Sequences and their Applications, Notes Number Theory Disc. Math., 23(3), 100-114.
- [15] Falcon, S. and Plaza, A., (2009). k -Fibonacci Sequences Modulo m . Chaos, Solitons & Fractals, 41(1), 497-504.
- [16] Kilic, E., (2009). The generalized Pell (p,i) -Numbers and Their Binet Formulas, Combinatorial Representations, Sums. Chaos, Solitons & Fractals, 40 (4), 2047-2063.
- [17] Pinch, R. G. E. (1993). Recurrent sequences modulo prime powers. In: Cryptography and Coding, III (Cirencester, 1991). Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New., 45. New York: Oxford University Press, pp. 297-310.
- [18] Shannon, A. G. Anderson, P. G. and Horadam, A. F., (2006). Properties of Cordonnier Perrin and Van der Laan Numbers, Internat. J. Math. Ed. Sei. Tech, 37(7), 825-831.
- [19] Shannon, A.G., Horadam, A.F. and Anderson, P.G., (2006). The Auxiliary Equation associated with Plastic Number. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 12(1), 1-12.
- [20] Stakhov, A.P. and Rozin, B., (2006) Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p -Numbers. Chaos. Solitons Fractals. 27, 1162-1177.
- [21] Tuglu, N., Kocer, E.G. and Stakhov, A.P., (2011). Bivariate Fibonacci like p -Polynomials. Applied Mathematics and Computation, 217(24), 10239-10246.
- [22] Wall, D. D., (1960). Fibonacci Series Modulo m . The Amer. Math. Monthly, 67(6), 525-532.
- [23] Wilcox, H. J., (1986). Fibonacci Sequences of Period n in Groups. Fibonacci Quaterly, 24: 356-361.
- [24] Aküzüm, Y., Deveci, Ö. and Shannon. A. G. (2017). On The Pell p -Circulant Sequences. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(2), 91-103.
- [25] Aydın, H. and Dikici, R., (1998). General Fibonacci Sequences in Finite Groups. Fibonacci Quart, 36(3), 216-221.
- [26] Aydın, H. and Smith, G. C., (1994). Finite p -quotients of Some Cyclically Presented Groups. Journal of the London Mathematical Society, 49(1), 83-92.
- [27] Campbell, P.P., (2003). Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews..

- [28] Campbell, C.M., Campbell, P.P., Doostie, H. And Robertson, E.F., (2004). The Fibonacci Length for Certain Metacyclic Groups. *Algebra Colloquium*, 11, 215-222.
- [29] Deveci, O., (2013). The k -Nacci Sequences and The Generalized Order- k Pell Sequences in The Semi-Direct Product of Finite Cyclic Groups. *Chiang Mai Journal of Science*, 40(1), 89-98.
- [30] Deveci, O., (2015). The Pell-Padovan Sequences and The Jacobsthal-Padovan Sequences in Finite Groups. *Utilitas Mathematica*, 98, 257-270.
- [31] Deveci, O., (2016). The Pell-Circulant Sequences and Their Applications. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 10(3), 284-293.
- [32] Deveci, O. and Akuzum, Y. and Campbell, C.M., (2018). The Recurrence Sequences via Polyhedral Groups. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics*, 67(2), 99-115.
- [33] Deveci, O., Campbell, C. M. (2014). The k -nacci sequences in some special modular groups. *Algebra Colloq.* 21(01):59-66. DOI: 10.1142/S1005386714000042.
- [34] Deveci, O., Karaduman, E. (2011). On the basic k -nacci sequences in finite groups. *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2011. DOI: 10.1155/2011/639476.
- [35] Deveci, Ö. and Karaduman, E., (2015). The Pell Sequences in Finite Groups, *Util. Math.*, 96, 263-276.
- [36] Deveci, O. and Karaduman, E., (2016). The Lehmer Sequences in Finite Groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68(1), 175-182.
- [37] Dikici, R. and Smith, G.C., (1995). Recurrences in Finite Groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 19(3), 321-329.
- [38] Doostie, H. and Hashemi, M., (2006). Fibonacci Lengths Involving The Wall Number $k(n)$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 20, 171-180.
- [39] Karaduman, E., Aydin, H. (2009). k -nacci sequences in some special groups of finite order. *Math. Comput. Modell.* 50(1-2): 53-58. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.03.010.
- [40] Karaduman, E. and Yavuz, U., (2003). On The Period of Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups. *Applied Mathematics and Computation*, 142(2-3), 321-332.

- [41] Knox, S. W., (1990). Fibonacci Sequences in Finite Groups. *The Fibonacci Quaterly*, 30, 116-120.
- [42] Ozkan, E., (2007). On Truncated Fibonacci Sequences. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 38 (4), 241-251.
- [43] Tas, S., Deveci, O. and Karaduman, E., (2014). The Fibonacci-Padovan Sequences in Finite Groups. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 8(03), 279-287.
- [44] Tas, S. and Karaduman, E., (2014). The Padovan Sequences in Finite Groups. *Chiang Mai Journal of Science*, 41(2), 456-462.
- [45] Aküzüm, Y. and Deveci, Ö., (2017). Sylvester-Padovan-Jacobsthal-Type Sequences, *Maejo İnt. J. Sci. Technol.*, 11(03), 236-248.
- [46] Deveci, O., (2016). The Generalized Quaternion Sequence. *AIP Conference Proceedings*, 1726, 020125-1-020125-3; doi: 10.1063/1.4945951.
- [47] Deveci, O. and Akuzum, Y., (2017). The Recurrence Sequences via Hurwitz Matrices. *The Scientific Annals of “Al. I. Cuza” University of Iasi*, f3, 529-542.
- [48] Deveci, O. and Karaduman, E., (2017). On The Padovan p -Numbers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(4), 579-592.
- [49] Deveci, O., Karaduman, E. and Saglam, G., (2016). The Jacobsthal Sequences in Finite Groups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 42(1), 81-91.
- [50] Karaduman, E. and Deveci O., (2017). The Recurrence Sequences via Sylvester Matrices. *AIP Conference Proceedings*, 1863, 560007.
- [51] Lü, K. and Wang, J., (2006). k -step Fibonacci Sequence Modulo m . *Utilitas Mathematica*, 71, 169-177.
- [52] Gultekin, I. and Deveci O., (2016). On The Arrowhead-Fibonacci Numbers. *Open Mathematics*, 14(1), 1104-1113.
- [53] Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Rashedi, M. E., (2022). The Hadamard-type k -step Pell Sequences. *Notes Number Theory Disc. Math*, 28(2), 339-349.
- [54] Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Rashedi, M. E., (2022). The Hadamard-type k -step Pell Sequences in Finite Groups. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*, 11(1), 304-312.
- [55] Taşçı, D., (2010). *Soyut Cebir*. Alp Yayınevi, Ankara.
- [56] Çallıalp, F. (2001). *Örneklerle Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi, İstanbul.

- [57] Taşcı, D., (2005). Lineer Cebir. Gazi Kitapevi, Ankara.
- [58] Johnson, D. L., (1990). Presentation of Groups. Cambridge University Press.
- [59] Ağargün, A. G. and Özdağ, H., (2008). Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri. Birsen Yayınevi, İstanbul
- [60] Chen, W. Y. C. And Louck, J. C., (1996). The Combinatorial Power of the Companion Matrix. Linear Algebra Appl., 232, 261-278.
- [61] Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I., Ward, T. (2003). Recurrence Sequences. American Mathematical Society.
- [62] Garloff, J. and Wagner, D. G., (1996). Hadamard Products of Stable Polynomials are Stable, J. Math. Anal. Appl. 202(3), 797-809..
- [63] Sylvester, J. R., (1979). Fibonacci Properties by Matrix Methods. The Mathematical Gazette, 63(425), 188-191.
- [64] Honsberger, R., (1985). The Matrix Q, Mathematical Gems III . Washington DC, Mathematical Association of America, 106-107.
- [65] Kalman, D., (1982). Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods. Fibonacci Quaterly, 20(1), 73-76.
- [66] Horadam, A. F., (1971). Pell identities. Fibonacci Quaterly, 9(3), 245-252.
- [67] Kılıç, E. and Taşcı, D., (2006). The Genralized Binet Formula, Representation and Sums of the Generalized Order- k Pell Numbers, Taiwan. J. Math. 10(6), 1661-1670.
- [68] Gandhi, B. K. And Reddy, M. J. (2003) “Triangular Numbers in the Generalized Associated Pell Sequence”, Indian J. Pure appl. Math., Vol. 34 (8), 1237-1248.
- [69] Deveci, Ö. and Karaduman, E., (2013). Reurrence Sequence in Groups. Lambert Academic Publishing, Germany.
- [70] Aküzüm, Y. and Deveci, Ö., (2022). The Hadamard-type k -step Fibonacci Sequences. An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) Tomul LXVIII, 2022, f. 2, 153-165.
- [71] Wolfram Research, (2014). Inc. Mathematica, Version 10.0: Champaign, Illinois.
- [72] Aküzüm, Y. and Deveci, Ö., (2020). The Hadamard-type k -step fibonacci Sequences in Groups, Communications in Algebra, 48:7, 2844-2856.
- [73] Hall, P. (1936). Tha Eulerian functions of a group. Q. J. Math. 7:134-151. DOI: 10.1093/qmath/os-7.1.134.

- [74] Brualdi, R. A. and Gibson, P. M., (1977). Convex Polyhedra of Doubly Stochastic Matrices I: Applications of Permanent Function. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 22, 194-230.
- [75] Lancaster, P. and Tismenesky, M., (1985). The Theory of Matrices. Academic.
- [76] Lidl, R. and Niederreiter, H., (1986). Introduction to Finite Fields and their Applications. Cambridge U. P.

