



**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ÖZEL GRADYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ
OPTİK DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL
PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

**Aytaj ABBASOVA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB
Haziran-2023
KARS**



T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**ÖZEL GRADYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ
OPTİK DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Aytaj ABBASOVA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

Haziran-2023

KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında Aytaj ABBASOVA'nın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı 'Özel Gradyent Terimli Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında..... ile kabul edilmiştir.

...../...../2023

	Adı Soyadı	İmza
Başkan	:	
Üye	:	
Üye	:	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/....../2023 gün ve/..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aytaj ABBASOVA

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın başlangıcından bitimine kadar her aşamada çalışmayı yönlendiren, değerli bilgilerini ve özverili yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Danışmanım

Prof. Dr. Gabil YAGUB ve Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Başkanım Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2023

Aytaj ABBASOVA

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN.....	II
ÖNSÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
SİMGELER DİZİNİ	VII
1. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	3
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. BÖLÜM	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	9
3.1 Özel Gradyent Terimli Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin Nümerik çözümü	9
3.1.1 Optimal Kontrol Probleminin Konulması.	9
3.1.2 Optimal Kontrol Probleminin Diskritleştirilmesi.	11
4. BÖLÜM	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	14
4.1. Fark Şemasının Çözümü ve Hatası İçin Kestirimler	14
4.1.1. Fark Şemasının Çözümü için kestirim	14
4.1.2. Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim	23
4.2. Fark Approksimasyonlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı.....	42
4.2.1. Fonksiyonellerin Farkının Değerlendirilmesi.....	42
4.2.2. Fonksiyonele Göre Yakınsaklık.....	46
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	50
6. KAYNAKLAR.....	51

ÖZET

Bu tezde özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol probleminin nümerik çözümü ele alındı. Bu çalışmanın 3.1.1. bölümünde önce özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi tanımlandı. 3.1.2. bölümünde özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu farklar yönteminin yardımıyla diskritleştirilmesi yapıldı ve probleme karşılık gelen fark şeması oluşturuldu. Bu çalışmanın 4.1.1 bölümünde fark şemasının çözümü için kestirm elde edildi. 4.1.2 bölümünde ise fark şemasının hatası değerlendirilerek hata içim kestirim ispatlandı. 4.2.1 bölümünde fonksiyonellerin farkı değerlendirilerek fark için kestirim elde edildi. Nihayet çalışmanın 4.2.2 bölümünde sonlu fark approxsimasyonlarının yakınsaklığı için iki yardımcı lemma ispatlanarak fonksiyonele göre yakınsaklık için kestirim gösterildi. Tezin tartışma ve sonuç bölümünde incelenen optimal kontrol probleminin konulma ve verilerin sağladığı şartlar açısından daha genel olduğu, bir önceki çalışmalarda yer alan optimal kontrol problemlerinden ciddi bir biçimde farklı olduğu gösterilmiştir. Bunların yanı sıra elde edilen sonuçların güncel olduğu ve bir önceki çalışmalardaki sonuçlarla örtüşmediği de vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Durgun olmayan kuazi optik denklemi, optimal kontrol, nümerik çözüm, fonksiyonele göre yakınsaklık.

2023, 63 Sayfa.

ABSTRACT

In this thesis, the numerical solution of the optimal control problem for the non-stationary quasi-optic equation with special gradient terms is discussed. 3.1.1 of this study. In the first part, the optimal control problem for the non-stationary quasi-optic equation with special gradient terms is defined. 3.1.2. In the second part, the optimal control problem for the non-stationary quasi-optic equation with special gradient terms is discretized with the help of the finite difference method and the difference diagram corresponding to the problem is created. In section 4.1.1 of this study, an approximation was obtained for the solution of the difference scheme. In section 4.1.2, the error of the difference scheme was evaluated and the estimation for the error was proved. In section 4.2.1, the difference of the functionals was evaluated and an estimation was obtained for the difference. Finally, in section 4.2.2 of the study, two auxiliary Lemmas are proved for the convergence of finite difference approximations, and the estimation for the convergence according to the functional is shown.

It has been shown that the optimal control problem examined in the discussion and conclusion section of the thesis is more general in terms of setting and the conditions provided by the data, and it is significantly different from the optimal control problems in previous studies. In addition, it was emphasized that the results obtained were up-to-date and did not coincide with the results of previous studies.

Keywords: Non-stationary quasi-optic equation, optimal control, numerical solution, convergence with respect to the functional

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$ -	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$ -	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$ -	Sanal birim
$l > 0$ -	Verilen sayı
$T > 0$ -	Verilen sayı
$L > 0$ -	Verilen sayı
$x \in [0, l]$ -	Uzay değişkeni
$t \in [0, T]$ -	Zaman değişkeni
$z \in [0, L]$ -	Uzaklığı ifade eden uzay değişkeni
$\Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z),$	
$\Omega = \Omega_{TL}$ -	Verilen bölge
$\tilde{\Omega}_{tz} = (0, l) \times (t, T) \times (z, L)$ -	Verilen bölge
$Q_{tz} = (0, t) \times (0, z), Q = Q_{TL}$ -	Verilen bölge
$c_k, k = 1, 2, \dots$ -	Pozitif sabitler
$\delta_{km}, k, m = 1, 2, \dots$ -	Kronecher sabitleri
B -	Banach uzayı
H -	Hilbert uzayı
$W_p^{k, m, l}$ -	Sobolev uzayları

1. BÖLÜM

1. GİRİŞ

Durgun olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilen süreçler için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorisinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, lineer olmayan optikte, çağdaş fiziğin ve teknolojinin farklı alanlarında ortaya çıkar [1–4]. Bu nedenle böyle optimal kontrol problemlerinin incelenmesi ve onların nümerik çözümü gerek teorik, gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Durgun kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümleri, başka bir deyişle kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümleri daha önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır [5–25] ve s. Söylememiz gerekir ki, [4] çalışmasında, yani M.A. Vorontsov ve V.İ. Şmalgauzen' in çalışmalarında ışık demetinin lineer ve homogen olmayan ortamda dağılmasını gösteren optimal kontrol problemleri ele alınmış ve bu problemler matematiğin klasik yöntemleri ile çözülmeğe çalışılmıştır. Ancak üstte söylediğimiz çalışmalar içerisinde A.D. İskenderov, G. Yagub, N.S. İbrahimov ve onların öğrencilerinin çalışmalarını önemle dikkate almamız gerekir ki, bu çalışmalarda hem lineer hem lineer olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisinin ve onların çözümlerinin matematiksel temelleri ciddi bir biçimde atılmış ve ortaya çıkan problemlerin çağdaş çözüm yöntemleri oluşturulmuştur.

Bu tez çalışmasında özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi ve onun nümerik çözümü ele alınıp incelenmiştir. Bu tür problemler yüklü parçacıkların ve ışık demetinin lineer ve homogen olmayan ortamda dağılması sürecinin incelenmesi sonucu ortaya çıkan optimal kontrol problemlerindendir [1,2,4]. Söylemek gerekir ki, özel gradyent terim içermeyen ve durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol ve identifikasyon problemleri ve onların nümerik çözümü önceden [26–38] çalışmalarında ele alınmıştır. Bu çalışmalarda kontrol rolünü oynayan ortamın kırılma ve yutulma göstergeleri denklemin katsayılarında yer alıp, çoğunlukta ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır.

Söylemmiz gerekir ki, özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemleri az incelenmiştir. Özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi ilk kez [39] çalışmasında ele alınmış ve bu çalışmada optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ve çözüm için gerek şartlara ait hükümler ispatlanmıştır. Ancak söz konusu optimal kontrol probleminin nümerik çözümü incelenmemiştir. Bu nedenle bu tez çalışmasının konusunun güncel olduğu ve tezde elde edilen sonuçların gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem taşıdığını vurgulamamız gerekmektedir.

Bu tez çalışmasında ilk önce ele alınan optimal kontrol probleminin sonlu farklar yönteminin yardımıyla diskritleştirilmesi yapılmış ve elde edilen fark şemasının kararlılığına ve hatasının değerlendirilmesine ait sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla ilk önce elde edilen fark şemasının çözümü için karalılık kestirimi ispatlanmıştır. Bu kestirimden yararlanılarak fark şemasının hatası için kestirim elde edilmiştir. Daha sonra inşa edilen sonlu farklı approxsimasyonların fonksiyonele göre yakınsaklığı ele alınmıştır. Bu amaçla ilk önce özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol probleminde yer alan amaç fonksiyoneli ile bu optimal kontrol problemine karşılık gelen ayırık optimal kontrol probleminde yer alan amaç fonksiyonelinin farkı değerlendirilerek onların farkı için kestirim elde edilmiştir. Daha sonra bu kestirimden yararlanılarak ve iki yardımcı lemma ispatlanarak sonlu farklı approxsimasyonların fonksiyonele göre yakınsaklığı için kestirim elde edilerek yakınsaklık ispatlanmıştır.

2. BÖLÜM

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız tanım (bak: [18,40–45]) ve lemmaları açıklayacağız.

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x) \bar{v}(x) dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0,l)}}.$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir.

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega = (0,l) \times (0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t) \bar{\phi}(x,t) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.3: $L_{\infty}(0,l)$, Banach uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_{\infty}(0,l)} = \text{vrai sup}_{x \in (0,l)} |u(x)| = \text{ess sup} \{ |u(x)| : x \in (0,l) \}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$, Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{(x,t) \in \Omega} |\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^0([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_B.$$

Burada $B \equiv \mathbb{R}$ alınırsa $C[0,T] \equiv C^0([0,T];\mathbb{R})$ elde edilir.

Tanım 2.6: $L_2([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left[\int_0^T \left\| u(.,t) \right\|_B^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Tanım 2.7: $W_2^1(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$W_2^{0,1}(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.8: $W_2^2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{d^2\bar{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$W_2^{0,2}(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap W_2^{0,1}(0,l).$$

Tanım 2.9: $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left(\psi(x,t) \bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega_T)}}.$$

Tanım 2.10: $W_2^{0,1,0}(\Omega_T)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda Ω_T 'nin sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

Tanım 2.11: $W_2^{0,1}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left(\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega_T)}}.$$

Tanım 2.12: $W_2^{2,1}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left[\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial t} \right] dx dt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega_T)}},$$

$$W_2^{0,2,1}(\Omega_T) = W_2^{2,1}(\Omega_T) \cap W_2^{0,1,0}(\Omega_T) \text{ dir.}$$

Aynı biçimde $W_2^{1,0}(\Omega_L)$, $W_2^{0,1,0}(\Omega_L)$, $W_2^{0,1}(\Omega_L)$, $W_2^{2,1}(\Omega_L)$, $W_2^{0,2,1}(\Omega_L)$ Sobolev uzayları $\psi = \psi(x, z)$ fonksiyonları için tanımlanır.

Tanım 2.13: $W_2^{0,1,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve t, z değişkenlerine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan

$\psi = \psi(x, t, z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi \bar{\Phi} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}};$$

Tanım 2.14: $W_2^{2,0,0}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve x değişkenine göre ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t, z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi \bar{\Phi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} \right) dx dt dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega) \text{ dir;}$$

Tanım 2.15: $W_2^{0,2,1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları $S = \{(x, t, z): x = 0, l, t \in (0, T), z \in (0, L)\}$ kümesi üzerinde sıfıra eşit oluyor.

Lemma 2.16 (Gronwall lemması, [45, sayfa110]): Eğer $\varphi_j, j = \overline{0, N}$ miktarları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b \sum_{m=0}^j \varphi_m, j = \overline{0, N-1}$$

şartlarını sağlıyor ise, bu taktirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j, j = \overline{0, N}$$

kestirimi geçerlidir. Ayrıca eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b \sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m, j = \overline{0, N-1}, 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a$$

şartları sağlanıyor ise, bu taktirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1}, j = \overline{0, N-1}$$

kestirimi geçerlidir.

3. BÖLÜM

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Özel Gradyent Terimli Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin Nümerik çözümü

Bu bölümde özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemini tanımlayacak ve problemin sonlu farklar yönteminin yardımıyla diskretleştirilmesini yaparak ayrık optimal kontrol problemini elde edeceğiz. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır.

3.1.1 Optimal Kontrol Probleminin Konulması.

Bu alt bölümde özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemini tanımlayalım. Farz edelim ki,

$$J(v) = \|\psi - y\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0, l), |v(x)| \leq b_0, \forall x \in (0, l) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_2(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + a(x) \psi + v(x) \psi = f(x, t, z), (x, t, z) \in \Omega, \quad (3.1.1.2)$$

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), (x, z) \in \Omega_L, \quad (3.1.1.3)$$

$$\psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.1.1.4)$$

$$\psi(0, t, z) = \psi(l, t, z) = 0, (t, z) \in Q, \quad (3.1.1.5)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekiyor olsun. Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birim;
 $l > 0, T > 0, L > 0, a_0 > 0, a_1 > 0, b_0 > 0$, verilen sayılar; $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq L$, $\Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z), \Omega = \Omega_{TL}, \Omega_t = (0, l) \times (0, t), \Omega_z = (0, l) \times (0, z);$
 $a(x), a_2(x)$ - verilen reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \forall x \in (0, l), \mu_0 = \text{const} > 0; \quad (3.1.1.6)$$

$$0 \leq a_2(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da_2(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \forall x \in (0, l), \mu_1, \mu_2 = \text{const} > 0; \quad (3.1.1.7)$$

şartlarını sağlar; $\varphi_0(x, z), \varphi_1(x, t), f(x, t, z), y(x, t, z)$ - verilen kompleks değerli fonksiyonlar olup

$$\varphi_0 \in W_2^{0,2,1}(\Omega_L), \varphi_1 \in W_2^{0,2,1}(\Omega_T), f \in W_2^{0,1,1}(\Omega); \quad (3.1.1.8)$$

$$y \in W_2^{1,1,1}(\Omega). \quad (3.1.1.9)$$

şartlarını sağlar.

Her bir $v \in V$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5) şartlarından $\psi = \psi(x, t, z) = \psi(x, t, z; v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (3.1.1.2) biçiminde olan özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü dendiğinde $W_2^{0,2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan hemen hemen çözümü düşüneceğiz. [46] çalışmasının sonuçlarından yararlanılarak söyleye biliriz ki, her bir $v \in V$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{0,2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek hemen hemen çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi_0\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_L)}^2 + \left(\|\varphi_1\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right) \right). \quad (3.1.1.10)$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti φ_0, φ_1 ve f ' den bağımsızdır.

Söylemek gerekir ki, benzer optimal kontrol problemi [39] çalışmasında ele alınmıştır.

Bu çalışmanın sonuçlarından yararlanarak vurgulaya biliriz ki. (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır, başka deyişle $V_* = \left\{ v^* \in V : J(v^*) = J_* = \inf_{v \in V} J(v) \right\}$ minimum noktaları kümesi boş değıl.

3.1.2 Optimal Kontrol Probleminin Diskritleştirilmesi.

(3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin sonlu farklı approximasyonunu elde etmeğı, başka değışle problemi diskritleştirmeğı çalışalım. Bu amaçla ilk önce $\bar{\Omega} \equiv [0, l] \times [0, T] \times [0, L]$ bölgesini aşağıdaki ağılar dizisine dönüştürelim:

$$\left\{ (x_j, t_k, z_p)_n \right\}, x_j = jh_n - \frac{h_n}{2}, j = \overline{1, M_n - 1}, x_0 = x_1 - h_n / 2, x_{M_n} = x_{M_n - 1} + h_n / 2,$$

$$t_k = k\tau_n, k = \overline{0, N_n}, z_p = p\theta_n, p = \overline{0, Z_n}, h_n = \frac{l}{M_n - 1}, \tau_n = \frac{T}{N_n}, \theta_n = \frac{L}{Z_n}, n = 1, 2, \dots$$

Farz edelim ki $M = M_n, N = N_n, Z = Z_n, h = h_n, \tau = \tau_n, \theta = \theta_n$ ve

$$\begin{aligned} \delta_t \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p}{\tau}, \quad \delta_z \Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}}{\theta}, \\ \delta_x \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p}{h}, \quad \delta_x \Phi_{1k}^p = \frac{2(\Phi_{1k}^p - \Phi_{0k}^p)}{h}, \\ \delta_x \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{j+1k}^p - \Phi_{jk}^p}{h}, \quad \delta_x \Phi_{M-1k}^p = \frac{2(\Phi_{Mk}^p - \Phi_{M-1k}^p)}{h}, \\ \delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk}^p &= \frac{\Phi_{j+1k}^p - 2\Phi_{jk}^p + \Phi_{j-1k}^p}{h^2} = \frac{\delta_x \Phi_{jk}^p - \delta_x \Phi_{jk}^p}{h} \end{aligned}$$

dir.

Her bir $n \geq 1$ için

$$I_n([v]_n) = \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - y_{jk}^p|^2 \quad (3.1.2.1)$$

fonksiyonunun

$$V_n = \left\{ [v]_n : [v]_n = (v_1, v_2, \dots, v_{M-1}), |v_j| \leq b_0, j = \overline{1, M-1} \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_t \Phi_{jk}^p + ia_0 \delta_z \Phi_{jk}^p - a_1 \delta_{xx} \Phi_{jk}^p + a^j \Phi_{jk}^p +$$

$$+ia_{2j} \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk}^p + v_j \Phi_{jk}^p = f_{jk}^p, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (3.1.2.2)$$

$$\Phi_{j0}^p = \varphi_{0j}^p, j = \overline{0, M}, p = \overline{1, Z}, \quad (3.1.2.3)$$

$$\Phi_{jk}^0 = \varphi_{1j}^k, j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N}, \quad (3.1.2.4)$$

$$\Phi_{0k}^p = \Phi_{Mk}^p = 0, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (3.1.2.5)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $a^j, a_{2j}, \varphi_{0j}^p, \varphi_{1j}^k, f_{jk}^p, y_{jk}^p$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$a^j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) dx, j = \overline{1, M-1}; a_{2j} = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_2(x) dx, j = \overline{1, M-1}; \quad (3.1.2.6)$$

$$\varphi_{0j}^p = \frac{1}{h\theta} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi_0(x, z) dx dz, j = \overline{1, M-1}, p = \overline{1, Z}, \varphi_{00}^p = \varphi_{0M}^p = 0, p = \overline{1, Z}; \quad (3.1.2.7)$$

$$\varphi_{1j}^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi_1(x, t) dx dt, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \varphi_{10}^k = \varphi_{1M}^k = 0, k = \overline{1, N}; \quad (3.1.2.8)$$

$$f_{jk}^p = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x, t, z) dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}; \quad (3.1.2.9)$$

$$y_{jk}^p = \frac{1}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y(x, t, z) dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z} \quad . \quad (3.1.2.10)$$



4. BÖLÜM

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Fark Şemasının Çözümü ve Hatası İçin Kestirimler

Bu bölümde her bir $[v_n] \in V_n$ için (3.1.2.2)-(3.1.2.5) fark şemasının kararlılığı ve hatası ile ilgili soruları ele alarak fark şemasının çözümü ve hatası için kestirimler elde edeceğiz. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır.

4.1.1. Fark Şemasının Çözümü için kestirim

Bu alt bölümde (3.1.2.2)-(3.1.2.5) fark şemasının kararlılığı kestirimini elde edeceğiz.

Teorem 4.1.1.1. Farz edelim ki, $a(x), a_2(x), \varphi_0(x, z), \varphi_1(x, t), f(x, t, z)$ fonksiyonları (3.1.1.6)-(3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Ayrıca farz edelim ki, τ ve θ ağ adımları için $\tau \leq \frac{1}{2\mu_2}, \theta \leq \frac{a_0}{2\mu_2}$ şartları sağlansın. Bu takdirde herhangi $[v_n] \in V_n$ olduğunda (3.1.2.2)-(3.1.2.5) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq \\ & \leq c_1 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right), \\ & \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}. \end{aligned} \quad (4.1.1.1)$$

İspat. (3.1.2.2)-(3.1.2.5) fark şemasının $z = z_p, t = t_k$ olduğunda $\{(x_j, t_k, z_p)_n\}$ ağı üzerinde tanımlanan $\eta_{0k}^p = \eta_{Mk}^p = 0, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jk}^p ağ fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğine denk olduğu açıktır:

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=1}^{M-1} \left(i \delta_t \Phi_{jk}^p \bar{\eta}_{jk}^p + i a_0 \delta_z \Phi_{jk}^p \bar{\eta}_{jk}^p \right) + h \sum_{j=1}^M a_1 \delta_x \Phi_{jk}^p \delta_x \bar{\eta}_{jk}^p + h \sum_{j=1}^{M-1} i a_{2j} \delta_x \Phi_{jk}^p \delta \bar{\eta}_{jk}^p + \\
& + h \sum_{j=1}^{M-1} \left(a^j \Phi_{jk}^p + v \Phi_{jk}^p \right) \bar{\eta}_{jk}^p = h \sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}^p \bar{\eta}_{jk}^p, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.1.2)
\end{aligned}$$

Bu özdeşlikte $\bar{\eta}_{jk}^p$ ağ fonksiyonu yerine $\theta \tau \bar{\Phi}_{jk}^p$ ağ fonksiyonunu alırsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& i \theta h \sum_{j=1}^{M-1} \tau \delta_t \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + i a_0 \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \theta \delta_z \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + a_1 \theta \tau h \sum_{j=1}^M \left| \delta_x \Phi_{jk}^p \right|^2 + i \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} \delta_x \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \\
& + \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a^j \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 + \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} v_j \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 = \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.1.3)
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
& -i \theta h \sum_{j=1}^{M-1} \tau \delta_t \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p - i a_0 \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \theta \delta_z \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p + a_1 \theta \tau h \sum_{j=1}^M \left| \delta_x \Phi_{jk}^p \right|^2 - i \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} \delta_x \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p + \\
& + \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a^j \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 + \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} v_{0j} \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 = \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \bar{f}_{jk}^p \Phi_{jk}^p, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliği (4.1.1.3) eşitliğinden taraf tarafa çıkarırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& i \theta h \sum_{j=1}^{M-1} \tau \left(\delta_t \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_t \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) + i a_0 \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \theta \left(\delta_z \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_z \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) + \\
& + i \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} \left(\delta_x \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_x \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) =
\end{aligned}$$

$$= \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left(f_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p - \bar{f}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right), k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.1.4)$$

Aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$\tau \left(\delta_t \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_t \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) = \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 - \left| \Phi_{jk-1}^p \right|^2 + \left| \Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p \right|^2, \quad (4.1.1.5)$$

$$\theta \left(\delta_z \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_z \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) = \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 - \left| \Phi_{jk}^{p-1} \right|^2 + \left| \Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1} \right|^2, \quad (4.1.1.6)$$

$$f_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p - \bar{f}_{jk}^p \Phi_{jk}^p = 2i \operatorname{Im} \left(f_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p \right). \quad (4.1.1.7)$$

(4.1.1.5)- (4.1.1.7) eşitliklerinin yardımıyla (4.1.1.4) eşitliğinden elde edilen eşitliğin $(-i)$ ‘ e çarpılmasından sonra aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned} & \theta h \sum_{j=1}^{M-1} \left(\left| \Phi_{jk}^p \right|^2 - \left| \Phi_{jk-1}^p \right|^2 + \left| \Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p \right|^2 \right) + a_0 \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left(\left| \Phi_{jk}^p \right|^2 - \left| \Phi_{jk}^{p-1} \right|^2 + \left| \Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1} \right|^2 \right) + \\ & + \theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} \left(\delta_x \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_x \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) = \\ & = 2\theta \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \operatorname{Im} \left(f_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p \right), k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \end{aligned} \quad (4.1.1.8)$$

Şimdi bu eşitliğin sol tarafındaki üçüncü terimi dönüştürelim. Bu amaçla

$$h \left(\delta_x \Phi_{jk}^p \bar{\Phi}_{jk}^p + \delta_x \bar{\Phi}_{jk}^p \Phi_{jk}^p \right) = \left| \Phi_{jk}^p \right|^2 - \left| \Phi_{j-1k}^p \right|^2 + \left| \Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p \right|^2$$

eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu kolaylıkla ispatlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
& +\theta\tau h\sum_{j=1}^{M-1}a_{2j}\left(\delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}^p\bar{\Phi}_{jk}^p+\delta_{\bar{x}}\bar{\Phi}_{jk}^p\Phi_{jk}^p\right)=-\theta\tau h\sum_{j=2}^{M-1}\delta_{\bar{x}}a_{2j}\left|\Phi_{j-1k}^p\right|^2+ \\
& +\theta\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_{2j}\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{j-1k}^p\right|^2+\theta\tau a_{2M-1}\left|\Phi_{M-1k}^p\right|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.1.9}$$

Eğer bu eşitliği (4.1.1.8) eşitliğinin sol tarafında dikkate alırsak, bu taktirde oradan aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \theta h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2-\left|\Phi_{jk-1}^p\right|^2+\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{jk-1}^p\right|^2\right)+a_0\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2-\left|\Phi_{jk}^{p-1}\right|^2+\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{jk}^{p-1}\right|^2\right)- \\
& -\theta\tau h\sum_{j=2}^{M-1}\delta_{\bar{x}}a_{2j}\left|\Phi_{j-1k}^p\right|^2+\theta\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_{2j}\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{j-1k}^p\right|^2+\theta\tau a_{2M-1}\left|\Phi_{M-1k}^p\right|^2= \\
& =2\theta\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\text{Im}\left(f_{jk}^p\bar{\Phi}_{jk}^p\right), k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikleri k üzerinden $k=1$ ' den $k=m\leq N$ ' e kadar ve p üzerinden $p=1$ ' den $p=q\leq Z$ ' e kadar toplarsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \theta h\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2-\left|\Phi_{jk-1}^p\right|^2+\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{jk-1}^p\right|^2\right)+ \\
& +a_0\tau h\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2-\left|\Phi_{jk}^{p-1}\right|^2+\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{jk}^{p-1}\right|^2\right)+ \\
& +\theta\tau\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{M-1}a_{2j}\left|\Phi_{jk}^p-\Phi_{j-1k}^p\right|^2+\theta\tau\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^ma_{2M-1}\left|\Phi_{M-1k}^p\right|^2= \\
& =\theta\tau h\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^m\sum_{j=2}^{M-1}\delta_{\bar{x}}a_{2j}\left|\Phi_{j-1k}^p\right|^2+2\theta\tau h\sum_{p=1}^q\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{M-1}\text{Im}\left(f_{jk}^p\bar{\Phi}_{jk}^p\right), m=\overline{1,N}, q=\overline{1,Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin sol tarafında yer alan birinci ve ikinci terimlerinde toplam işlemini gerçekleştirerek aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 - \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{j0}^p|^2 + \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p|^2 + \\
& + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 - a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^0|^2 + a_0 \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}|^2 + \\
& + \theta \tau \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p|^2 + \theta \tau \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m a_{2M-1} |\Phi_{M-1k}^p|^2 = \\
& = \theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{M-1} \delta_{\bar{x}} a_{2j} |\Phi_{j-1k}^p|^2 + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} \text{Im} \left(f_{jk}^p \overline{\Phi_{jk}^p} \right), m = \overline{1, N}, q = \overline{1, Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikten (3.1.2.3), (3.1.2.4) başlangıç şartlarının yardımıyla aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p|^2 + \\
& + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 + a_0 \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}|^2 + \\
& + \theta \tau \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} a_{2j} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p|^2 + \theta \tau \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m a_{2M-1} |\Phi_{M-1k}^p|^2 = \\
& = \theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{M-1} \delta_{\bar{x}} a_{2j} |\Phi_{j-1k}^p|^2 + \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\
& + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} \text{Im} \left(f_{jk}^p \overline{\Phi_{jk}^p} \right), m = \overline{1, N}, q = \overline{1, Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikten de $a_{2j} \geq 0, j = \overline{1, M-1}$ şartlarının ve sol taraftaki ikini ve dördüncü terimlerin negatif olmamasının yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
& \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq \\
& \leq \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\
& + \theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{M-1} |\delta_{\bar{x}} a_{2j}| |\Phi_{j-1k}^p|^2 + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p|, m = \overline{1, N}, q = \overline{1, Z}. \quad (4.1.1.10)
\end{aligned}$$

(3.1.1.7) şartın yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri ele ederiz:

$$|\delta_{\bar{x}} a_{2j}| \leq \mu_2, j = 2, 3, \dots, M-1. \quad (4.1.1.11)$$

Bu eşitsizliklerin yardımıyla (4.1.1.10) eşitsizliğinden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq \\
& \leq \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\
& + \mu_2 \theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p|^2 + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p|, m = \overline{1, N}, q = \overline{1, Z}. \quad (4.1.1.12)
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $q = Z$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\ &+ \mu_2 \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p|^2 + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p|, m = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

$\tau \leq \frac{1}{2\mu_2}$ şartını kullanarak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq 2\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + 2a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\ &+ 4\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p|, m = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu toplamın m 'ci terimini ayırıp ε -Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq 2\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + 2a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + 4\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p| + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} 4\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \varepsilon 4\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2, m = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Bu şitsizlikte $\varepsilon = 8\tau$ seçerek aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu buluruz:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 \leq 4\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + 4a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + 64T\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jm}^p|^2 +$$

$$+8\tau\theta h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p| |\Phi_{jk}^p|, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terime Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak bir sonraki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq 4\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + 4a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + 64T\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jm}^p|^2 + \\ &+ 4\tau\theta h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 + 4\tau\theta h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terimleri birleştirerek ve toplam işlemini $k = N$ ' e kadar tamamlayarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq 4\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + 4a_0 \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \\ &+ 4(1+16T)\tau\theta h \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 + 4\tau\theta h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Gronwall lemmasının diskrit aynısını, yani kuramsal temeller bölümündeki Lemma 2.16' yı uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 &\leq c_2 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \right. \\ &\left. + \tau\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (4.1.1.13)$$

Bu kestirimin elde edilmesine denk olarak (4.1.1.12) eşitsizliğinden (4.1.1.11) ve

$\theta \leq \frac{a_0}{2\mu_2}$ şartlarının yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu

buluruz:

$$\begin{aligned} & \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq \\ & \leq c_3 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right), \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}. \end{aligned} \quad (4.1.1.14)$$

(4.1.1.13)-(4.1.1.14) kestirimlerini taraf tarafa toplayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 \leq \\ & \leq c_4 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right) \\ & \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\} \end{aligned} \quad (4.1.1.15)$$

Burada $c_1 = c_4$ seçerek (4.1.1.1) kestiriminin geçerli olduğunu buluruz. Bu kestirimin yanı sıra (4.1.1.9) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimin de geçerli olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} & \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}^p|^2 + \theta h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p|^2 + \\ & + a_0 \tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^q|^2 + a_0 \tau h \sum_{p=1}^q \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_5 \left(\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{0j}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{1j}^k|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}^p|^2 \right)$$

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\} \quad (4.1.1.16)$$

Teorem 4.1.1.1 ispatlandı.

4.1.2. Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim

Şimdi (3.1.2.2)- (3.1.2.5) fark şemasının hatası için kestirim elde etmeğe çalışalım. Bu amaçla aşağıdaki sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} & i\delta_t W_{jk}^p + ia_0 \delta_z W_{jk}^p - a_1 \delta_{xx} W_{jk}^p + ia_2 \delta_x W_{jk}^p + \\ & + a^j W_{jk}^p + v_j W_{jk}^p = F_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \end{aligned} \quad (4.1.2.1)$$

$$W_{j0}^p = 0, \quad j = \overline{0, M}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.2)$$

$$W_{jk}^0 = 0, \quad j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N}, \quad (4.1.2.3)$$

$$W_{0k}^p = W_{Mk}^p = 0, \quad k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.4)$$

Burada F_{jk}^p ağ fonksiyonu aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$F_{jk}^p = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_2(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + a(x) \psi \right) dx dt dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x) \psi dx dt dz - \\
& - i \delta_t \psi_{jk}^p - i a_0 \delta_z \psi_{jk}^p + a_1 \delta_{xx} \psi_{jk}^p - a_{2j} \delta_{\bar{x}} \psi_{jk}^p - a^j \psi_{jk}^p - v_j \psi_{jk}^p, \\
& j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.
\end{aligned} \tag{4.1.2.5}$$

$W_{jk}^p = \Phi_{jk}^p - \psi_{jk}^p$, burada Φ_{jk}^p ağ fonksiyonu (3.1.2.2)-(3.1.2.5) fark şemasının $[v_n] \in V_n$ diskrit kontrolüne karşılık gelen çözümdür, ψ_{jk}^p ağ fonksiyonu ise aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\psi_{jk}^p = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, t, z) dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z},$$

$$\psi_{j0}^p = \varphi_{0j}^p, \quad j = \overline{0, M}, p = \overline{1, Z},$$

$$\psi_{jk}^0 = \varphi_{1j}^k, \quad j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N}, \psi_{0k}^p = \psi_{Mk}^p = 0, \quad k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \tag{4.1.2.6}$$

Farz edelim ki $Q_n = Q_n(v)$ operatörü aşağıdaki formüllerle tanımlansın:

$$Q_n(v) = [w]_n = (w_1, w_2, \dots, w_{M-1}), \tag{4.1.2.7}$$

$$w_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x) dx, \quad j = \overline{1, M-1}. \tag{4.1.2.8}$$

Teorem 4.1.2.1. Farz edelim ki, teorem 4.1.1.1' in şartları sağlansın. Bu taktirde herhangi $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, herhangi $q \in \{1, 2, \dots, Z\}$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq c_6 \left(\beta_{\tau h}^\theta + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2 \right), \tag{4.1.2.9}$$

burada $\theta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ için $\beta_{\tau h}^\theta > 0, \beta_{\tau h}^\theta \rightarrow 0$ şartları sağlanıyor ve

$$\|Q_n(v) - [v]_n\|^2 = h \sum_{j=1}^{M-1} |w_j - v_j|^2 \quad (4.1.2.10)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.1.1’de yer alan (4.1.1.1) kestirimin ispat metodüğüne denk olarak aşağıdaki kestirimi $\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}$ için elde edebiliriz:

$$\theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq c_7 \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^p|^2. \quad (4.1.2.11)$$

Burada F_{jk}^p ağ fonksiyonu (4.1.2.5) formülü ile tanımlanır. Bu fonksiyonu aşağıdaki biçimde göstereyim:

$$F_{jk}^p = F_{jk}^{p1} + F_{jk}^{p2} + F_{jk}^{p3} + F_{jk}^{p4} + F_{jk}^{p5} + F_{jk}^{p6}, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.12)$$

Burada

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt dz - i \delta_t \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.13)$$

$$F_{jk}^{p2} = \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dt dz - i a_0 \delta_z \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.14)$$

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dt dz + a_1 \delta_{xx} \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.15)$$

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} ia_2(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt dz - ia_2 \delta_x \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.16)$$

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) \psi dx dt dz - a^j \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.17)$$

$$F_{jk}^{p6} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x) \psi dx dt dz - v_j \psi_{jk}^p, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.18)$$

Şimdi bu ağ fonksiyonlarının her birini değerlendirmeye çalışalım. İlk önce F_{jk}^{p1} , $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (4.1.2.13) ve (4.1.2.6) formüllerine göre $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{2, N}$, $p = \overline{1, Z}$ için aşağıdaki formülü kolaylıkla elde edebiliriz:

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(\int_{-\tau}^0 \left[\frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t+\gamma, z)}{\partial t} \right] d\gamma \right) dx dt dz. \quad (4.1.2.19)$$

Burada Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|F_{jk}^{p1}|^2 \leq \frac{1}{\theta\tau^2 h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t+\gamma, z)}{\partial t} \right|^2 d\gamma dx dt dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.20)$$

F_{j1}^{p1} ağ fonksiyonu için yine de (4.1.2.13) ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$F_{j1}^{p1} = \frac{i}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz -$$

$$- \frac{i}{\theta \tau^2 h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_0}^t \frac{\partial \psi(x, \gamma, z)}{\partial \gamma} d\gamma dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad p = \overline{1, Z}.$$

Burada Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left| F_{j1}^{p1} \right|^2 \leq \frac{4}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.21)$$

(4.1.2.20), (4.1.2.21) eşitsizliklerinin elde edilmesine denk olarak (4.1.2.14) ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla F_{jk}^{p2} ağ fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| F_{jk}^{p2} \right|^2 \leq \frac{a_0^2}{\theta^2 \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\theta}^0 \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, t, \eta + z)}{\partial z} \right|^2 d\eta dx dt dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{2, Z}, \quad (4.1.2.22)$$

$$\left| F_{jk}^{12} \right|^2 \leq \frac{4a_0^2}{\theta \tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.1.2.23)$$

(4.1.2.15) ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla F_{jk}^{p3} $j = \overline{2, M-2}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonu için kolaylıkla aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{a_1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dt dz + \frac{a_1}{\theta\tau h^3} \left\{ \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz \right\}.$$

Buradan da aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{a_1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t, z)}{\partial x^2} \right) d\beta d\xi dx dt dz, j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Bu formülden Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left| F_{jk}^{p3} \right|^2 \leq \frac{a_1^2}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 \left| \frac{\partial^2 \psi(x, t, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t, z)}{\partial x^2} \right|^2 d\beta d\xi dx dt dz, j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.24)$$

Şimdi $F_{1k}^{p3}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (4.1.2.15) ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla $j = 1$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{1k}^{p3} = -\frac{a_1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dt dz + \frac{a_1}{\theta\tau h^3} \left\{ \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \psi(x, t, z) dx - \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \psi(x, t, z) dx - 2 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \psi(x, t, z) dx + 2 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \psi(x_1 - h/2, t, z) dx \right] dt dz \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a_1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz + \\
&+ \frac{2a_1}{\theta\tau h^3} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \int_{x_1-h/2}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz.
\end{aligned}$$

Buradan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$|F_{1k}^{p3}|^2 \leq \frac{16a_1^2}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|^2 dx dt dz, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.25)$$

(4.1.2.15) ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla $F_{M-1k}^{p3}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$|F_{M-1k}^{p3}|^2 \leq \frac{16a_1^2}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|^2 dx dt dz, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.26)$$

Şimdi $F_{jk}^{p4}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (4.1.2.16)

ve (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
F_{jk}^{p4} &= \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(a_2(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a_{2j} \delta_x \psi_{jk}^p \right) dx dt dz = \\
&= \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_{2j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \delta_x \psi_{jk}^p \right) dx dt dz + \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_2(x) - a_{2j}) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt dz =
\end{aligned}$$

$$= F_{jk}^{p40} + F_{jk}^{p41}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.27)$$

$F_{jk}^{p40}, F_{jk}^{p41}$ ağ fonksiyonlarının formüllerinin yardımıyla aşağıdakileri yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p40} = \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_{2j} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \delta_x \psi_{jk}^p \right) dx dt dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}, \quad (4.1.2.28)$$

$$F_{jk}^{p41} = \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_2(x) - a_{2j}) \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.29)$$

Şimdi ilk önce F_{jk}^{p41} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu taktirde (3.1.2.6) formüllerinden ikincisini yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{jk}^{p41} &= \frac{i}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_2(x) - a_{2j}) \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz = \\ &= \frac{i}{\theta\tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_2(x) - a_2(\xi)) d\xi \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz = \\ &= \frac{i}{\theta\tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{\xi}^x \frac{da_2(\eta)}{d\eta} d\eta d\xi \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikten (3.1.1.7) şartının yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde ederiz:

$$\begin{aligned} |F_{jk}^{p41}| &\leq \frac{1}{\theta\tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{\xi}^x \left| \frac{da_2(\eta)}{d\eta} \right| d\eta d\xi \left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right| dx dt dz \leq \\ &\leq \frac{\mu_2}{\theta\tau} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right| dx dt dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \end{aligned}$$

Buradan da Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$|F_{jk}^{p41}| \leq \frac{\mu_2 \sqrt{h}}{\sqrt{\theta \tau}} \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx dt dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.30)$$

Şimdi F_{jk}^{p40} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (4.1.2.28) formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p40} = \frac{ia_{2j}}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \delta_x \psi_{jk}^p \right) dx dt dz = ia_{2j} \left(\frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt dz - \delta_x \psi_{jk}^p \right),$$

$$j = \overline{2, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}.$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki parantezin içinde yer alan farkı değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla ψ_{jk}^p ağ fonksiyonu için olan (4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$F_{jk}^{p40} = ia_{2j} \left(\frac{1}{\theta \tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x + \xi, t, z)}{\partial x} \right) d\xi dx dt dz \right),$$

$$j = \overline{2, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}.$$

Buradan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$|F_{jk}^{p40}|^2 \leq \frac{1}{\theta \tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-h}^0 \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x + \xi, t, z)}{\partial x} \right|^2 d\xi dx dt dz,$$

$$j = \overline{2, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.31)$$

Şimdi F_{1k}^{p40} ağ fonksiyonuna bakalım. (4.1.2.28) formülünün ve $\psi(0, t, z) = 0, \psi_{0k}^p = 0$ şartlarının yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
F_{1k}^{p40} &= \frac{ia_{21}}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz - ia_{21} \delta_x \psi_{1k}^p = \frac{ia_{21}}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dt dz - \\
&\quad - ia_{21} \frac{1}{h} (\psi_{1k}^p - \psi_{0k}^p) = ia_{21} \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial x} dx dt dz - \\
&\quad - ia_{21} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \psi(x, t, z) dx dt dz - \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \psi(0, t, z) dx dt dz \right) = \\
&= ia_{21} \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial x} dx dt dz - ia_{21} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \frac{\partial\psi(\xi, t, z)}{\partial \xi} d\xi dx dt dz \right) = \\
&= ia_{21} \frac{1}{\theta\tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \left(\frac{\partial\psi(x, t, z)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(\xi, t, z)}{\partial \xi} \right) d\xi dx dt dz = \\
&= ia_{21} \frac{1}{\theta\tau h^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \int_{\xi}^x \frac{\partial^2\psi(\eta, t, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dt dz, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin ve Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu buluruz:

$$|F_{1k}^{p40}|^2 \leq \mu_1^2 \frac{h}{\theta\tau} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left| \frac{\partial^2\psi(\eta, t, z)}{\partial \eta^2} \right|^2 d\eta dt dz, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.32)$$

(4.1.2.17) formülünün yardımıyla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) (\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p) dx dt dz +$$

$$+ \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a(x) - a^j) \psi_{jk}^p dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}.$$

Bu formülün sağ tarafındaki ikinci terim (3.1.2.6) formüllerinden birincisine göre sıfıra eşit oluyor. Bu taktirde aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) (\psi - \psi_{jk}^p) dx dt dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.33)$$

Şimdi $\psi - \psi_{jk}^p$ farkına bakalım. (4.1.2.6) formüllerin kullanırsak bu farkı aşağıdaki biçime dönüştürebiliriz:

$$\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p = -\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (\psi(x, t, z) - \psi(\xi, \gamma, \eta)) d\xi d\gamma d\eta =$$

$$= \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(\int_{\xi}^x \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} d\beta + \int_{\gamma}^t \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, z)}{\partial \alpha} d\alpha + \int_{\eta}^z \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, x)}{\partial x} dx \right) d\xi d\gamma d\eta. \quad (4.1.2.34)$$

Buradan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu ispatlarız:

$$|\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p| \leq \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\theta\tau}} \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta d\gamma d\eta \right)^{1/2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta h}} \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\alpha d\xi d\eta \right)^{1/2} + \\
& + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\tau h}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\chi d\xi d\gamma \right)^{1/2}. \quad (4.1.2.35)
\end{aligned}$$

(3.1.1.6) şartına göre (4.1.2.33) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|F_{jk}^{p5}| \leq \frac{\mu_0}{\sqrt{\theta \tau h}} \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz \right)^{1/2}, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Bu eşitsizlikte (4.1.2.35) eşitsizliğini dikkate alarak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\begin{aligned}
|F_{jk}^{p5}|^2 & \leq \frac{3\mu_0^2 h}{\theta \tau} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta dt dz + \frac{3\mu_0^2 \tau}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\alpha d\xi dz + \\
& + \frac{3\mu_0^2 \theta}{h \tau} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\chi d\xi d\gamma, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.36)
\end{aligned}$$

(4.1.2.18), (4.1.2.7) formüllerinin yardımıyla $F_{jk}^{p6}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p6} = \psi_{jk}^p (w_{0j} - v_{0j}) + \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) (\psi - \psi_{jk}^p) dx dt dz.$$

Buradan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|F_{jk}^{p6}| \leq |\psi_{jk}^p| |w_{0j} - v_{0j}| + \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |v_0(x)| |\psi - \psi_{jk}^p| dx dt dz \leq$$

$$\leq |\psi_{jk}^p| |w_{0j} - v_{0j}| + \frac{b_0}{\sqrt{\theta\tau h}} \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z} . \quad (4.1.2.37)$$

(4.1.2.35) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p|^2 \leq 3h \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta +$$

$$+ 3 \frac{\tau}{h} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\alpha d\xi + 3 \frac{\theta}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\chi d\xi d\gamma ,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z} .$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını x, t, z değişkenlerine göre sırasıyla

$\left[x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2} \right], [t_{k-1}, t_k], [z_{p-1}, z_p]$ aralıkları üzerinden integrallersek aşağıdaki

eşitsizliği buluruz:

$$\int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz \leq 3h^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta} \right|^2 d\beta dt dz +$$

$$+ 3\tau^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \alpha, z)}{\partial \alpha} \right|^2 d\xi d\alpha dz + 3\theta^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(\xi, \gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|^2 d\xi d\gamma d\chi ,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z} .$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında integral değişkenlerini değiştirerek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz \leq 3h^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial x} \right|^2 dx dt dz + \\ + 3\tau^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz + 3\theta^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial z} \right|^2 dx dt dz, \end{aligned}$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.38)$$

Bu eşitsizliğin yardımıyla (4.1.2.37) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned} |F_{jk}^{p6}|^2 \leq 2|\psi_{jk}^p|^2 |w_j - v_j|^2 + \frac{6b_0^2 h}{\theta \tau} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial x} \right|^2 dx dt dz + \\ + \frac{6b_0^2 \tau}{\theta h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz + \frac{6b_0^2 \theta}{\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial z} \right|^2 dx dt dz, \end{aligned}$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}. \quad (4.1.2.39)$$

[47, sayfa 61-62] çalışmasından bildiğimiz Fubini teoremine göre (4.1.2.20) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz \right) d\gamma. \quad (4.1.2.40)$$

Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. $L_2(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonların orta kuadratik sürekliliğine göre

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t + \gamma, z)}{\partial t} \right|^2 dx dt dz < \varepsilon, \quad |\gamma| \leq \tau < \delta \quad (4.1.2.41)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu nedenle $|\gamma| \leq \tau < \delta$ şartını sağlayan τ ' lar için (4.1.2.40) eşitsizliğinden aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \omega_{\tau}^0. \quad (4.1.2.42)$$

Burada $\tau \rightarrow 0$ için $\omega_{\tau}^0 > 0, \omega_{\tau}^0 \rightarrow 0$.

(4.1.2.21) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq 4 \int_0^{\tau} \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, \gamma, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 d\gamma. \quad (4.1.2.43)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında yer integralin mutlak sürekliliğinden aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \tilde{\omega}_{\tau}^0, \quad (4.1.2.44)$$

burada $\tilde{\omega}_{\tau}^0 > 0, \tilde{\omega}_{\tau}^0 \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ dir. (4.1.2.42) ve (4.1.2.44) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p1}|^2 \leq \omega_\tau^1, \quad (4.1.2.45)$$

burada $\omega_\tau^1 = \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_\tau^0$ dir.

(4.2.2.45) bağıntısının elde edilmesine denk olarak (2.1.2.22), (4.1.2.23) eşitsizliklerinden aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p2}|^2 \leq \omega_\theta^2, \quad (4.1.2.46)$$

Burada $\omega_\theta^2 > 0, \omega_\theta^2 \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$ dir.

(4.1.2.24) eşitsizliğinden Fubini teoremine göre (4.1.2.42) eşitsizliğinin elde edilmesine denk olarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=2}^{M-2} |F_{jk}^{p3}|^2 \leq \tilde{\omega}_h^3, \quad (4.1.2.47)$$

burada $\tilde{\omega}_h^3 > 0, \tilde{\omega}_h^3 \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ dir. (4.1.2.25), (4.1.2.26) eşitsizliklerinin yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikler elde ederiz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |F_{1k}^{p3}|^2 \leq 16a_1^2 \int_0^h \left\| \frac{\partial^2 \psi(x, \cdot, \cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 dx, \quad (4.1.2.48)$$

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |F_{M-1k}^{p3}|^2 \leq 16a_1^2 \int_{l-h}^l \left\| \frac{\partial^2 \psi(x, \cdot, \cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 dx, \quad (4.1.2.49)$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayıp sağ tarafta yer alan integrallerin mutlak sürekliliğine göre aşağıdaki bağıntının geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |F_{1k}^{p3}|^2 + \theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |F_{M-1k}^{p3}|^2 \leq \tilde{\omega}_h^4, \quad (4.1.2.50)$$

burada $\tilde{\omega}_h^4 > 0, \tilde{\omega}_h^4 \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ dir. Bu taktirde bu eşitsizlikten ve (4.1.2.47) eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p3}|^2 \leq \omega_h^3, \quad (4.1.2.51)$$

burada $\omega_h^3 = \tilde{\omega}_h^3 + \tilde{\omega}_h^4$ dir.

(4.1.2.30)-(4.1.2.32) eşitsizliklerinin yardımıyla (4.1.2.27) eşitsizliğinden aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p4}|^2 \leq \omega_h^4 + c_8 h^2, \quad (4.1.2.52)$$

burada $\omega_h^4 > 0, \omega_h^4 \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ ve $c_8 > 0$ sabiti θ, τ, h ' den bağımsızdır.

(4.1.2.36) eşitsizliğine göre aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p5}|^2 \leq 3\mu_0^2 \left(h^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

Buradan (3.1.1.10) kestirimini yardımıyla aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$\theta\tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p5}|^2 \leq c_9 (h^2 + \tau^2 + \theta^2). \quad (4.1.2.53)$$

(4.1.2.39) ve (4.1.2.40) eşitsizliklerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p6}|^2 \leq \\ & \leq 2\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_j - v_j|^2 + c_{10} \left(h^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte (3.1.1.10) kestirimini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p6}|^2 \leq c_{11} (h^2 + \tau^2 + \theta^2) + 2\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_j - v_j|^2. \quad (4.1.2.54)$$

Aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_j - v_j|^2 \leq \max_{1 \leq j \leq M-1} \left(\theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \right) \left(h \sum_{j=1}^{M-1} |w_j - v_j|^2 \right). \quad (4.1.2.55)$$

(4.1.2.6) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 = \theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \left| \frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, t, z) dx dt dz \right|^2 \leq \\ & \leq \theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\theta \tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z)| dx dt dz \right)^2, j = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (4.1.2.56)$$

Buradan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \leq \theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{\theta \tau h}} \left(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi(x, t, z)|^2 dx dt dz \right)^{1/2} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi(x, t, z)|^2 dt dz \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2 dx \leq \max_{x \in [0, \ell]} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M-1\}. \quad (4.1.2.57)$$

[20, sayfa 412] çalışmasından bildiğimiz ünlü lemma 6' ya göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\max_{x \in [0, \ell]} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2 \leq c_{12} \left(\|\psi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.1.2.58)$$

Buradan (3.1.1.10) kestirimin yardımıyla aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\max_{x \in [0, \ell]} \|\psi(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2 \leq c_{13}. \quad (4.1.2.59)$$

Bu bağıntıyı (4.1.2.5)' de dikkate alırsak, bu taktirde oradan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \leq c_{13}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M-1\}. \quad (4.1.2.60)$$

Bu eşitsizliği dikkate alarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\max_{1 \leq j \leq M-1} \left(\theta \tau \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N |\psi_{jk}^p|^2 \right) \leq c_{13}. \quad (4.1.2.61)$$

Bu bağıntıyı dikkate alarak (4.1.2.56)' den aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |\psi_{jk}^p|^2 |w_j - v_j|^2 \leq c_{13} h \sum_{j=1}^{M-1} |w_j - v_j|^2. \quad (4.1.2.62)$$

Bu bağıntının yardımıyla (4.1.2.54) , (4.1.2551)' den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^{p6}|^2 \leq c_{12} (h^2 + \tau^2 + \theta^2) + 2c_{13} h \sum_{j=1}^{M-1} |w_j - v_j|^2, \quad (4.1.2.63)$$

Böylelikle, (4.1.2.45), (4.1.2.46), (4.1.2.51), (4.1.2.52), (4.2.2.53), (4.1.2.63) bağıntılarının, (4.1.2.12) formülünün ve (4.1.2.11) kestiriminin yardımıyla aşağıdaki kestirimi ispatlamış oluruz:

$$\begin{aligned} \theta h \sum_{p=1}^Z \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jm}^p|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |W_{jk}^q|^2 \leq c_{14} (\omega_\tau^1 + \omega_\theta^2 + \omega_h^3 + \omega_h^4 + h^2 + \\ + \tau^2 + \theta^2 + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall q \in \{1, 2, \dots, Z\}. \end{aligned} \quad (4.1.2.64)$$

Burada

$$\beta_{th}^\theta = \omega_\tau^1 + \omega_\theta^2 + \omega_h^3 + \omega_h^4 + h^2 + \tau^2 + \theta^2, \quad (4.1.2.65)$$

işaretlemesini yapıp $c_6 = c_{14}$ seçersek, bu taktirde (4.1.2.64) kestiriminden teoremin hükmünü elde ederiz. Teorem 4.1.2.1 ispatlandı.

4.2. Fark Approksimasyonlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Bu bölümde sonlu farklı approksimasyonların fonksiyonele göre yakınsaklığı incelenecektir. İlk önce (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminde yer alan fonksiyonelle (3.1.2.1)-(3.1.2.5) ayrık optimal kontrol probleminde yer alan fonksiyonellerin farkı değerlendirilecektir. Sonra bu değerlendirmeden yararlanılarak ve iki yardımcı lemma ispatlanarak sonlu farklı approksimasyonların fonksiyonele göre yakınsaklık kestirimi elde edilecektir.

4.2.1. Fonksiyonellerin Farkının Değerlendirilmesi.

Bu alt bölümde (3.1.1.1) fonksiyoneli ile (3.1.2.1) fonksiyonelinin farkını değerlendirelim.

Teorem 4.2.1.1. Farz edelim ki, teorem 4.1.2.1' nin şartları sağlansın ve θ, τ, h adımları için ise aşağıdaki uzlaşma şartları geçerli olsun:

$$c_{15} \leq \frac{\tau}{h} \leq c_{16}, c_{17} \leq \frac{\theta}{h} \leq c_{18}, c_{19} \leq \frac{\tau}{\theta} \leq c_{20}. \quad (4.2.1.1)$$

Burada $c_m > 0, m = 15, 16, 17, 18, 19, 20$ sabitleri θ, τ, h ' den bağımsızdır. Bu taktirde herhangi $v \in V$ ve herhangi $[v]_n \in V_n$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \leq c_{21} \left(\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta + \|Q_n(v) - [v]_n\| \right), \quad (4.2.1.2)$$

burada $c_{21} > 0$ sabiti θ, τ, h ' den bağımsızdır ve $\theta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ için $\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta > 0, \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta \rightarrow 0$ dir.

İspat. $J(v) - I_n([v]_n)$ farkına bakalım. (3.1.1.1), (3.1.2.1) formüllerini kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$J(v) - I_n([v]_n) = \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(|\psi(x, t, z) - y(x, t, z)|^2 - |\Phi_{jk}^p - y_{jk}^p|^2 \right) dx dt dz.$$

Bu formülden $|a|^2 - |b|^2 = (|a| + |b|)(|a| - |b|)$ eşitliğinin ve $|a| - |b| \leq |a - b|$ eşitsizliğinin yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \leq \\ & \leq \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(|\psi(x, t, z)| + |y(x, t, z)| + |\Phi_{jk}^p| + |y_{jk}^p| \right)^2 dx dt dz \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \Phi_{jk}^p + y_{jk}^p - y(x, t, z) \right|^2 dx dt dz \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikten (3.1.1.10), (4.1.1.1) kestirimlerinin, (3.1.2.10) formülünün ve $y \in L_2(\Omega)$ şartının yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_{22} \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \Phi_{jk}^p + y_{jk}^p - y(x, t, z) \right|^2 dx dt dz \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} c_{22} \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \Phi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz \right)^{1/2} + \\
&+ \sqrt{2} c_{22} \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| y_{jk}^p - y(x, t, z) \right|^2 dx dt dz \right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{2} c_{22} (J_1 + J_2) . \tag{4.2.1.3}
\end{aligned}$$

Şimdi ilk önce J_1 terimini değerlendirelim. Bu terimin formülüne göre aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
(J_1)^2 &= \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \Phi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz = \\
&= \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p + \psi_{jk}^p - \Phi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz \leq \\
&\leq 2 \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz + \\
&+ 2 \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi_{jk}^p - \Phi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz = 2(J_{11} + J_{12}) . \tag{4.2.1.4}
\end{aligned}$$

J_{12} teriminin formülüne göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$J_{12} = \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi_{jk}^p - \Phi_{jk}^p \right|^2 dx dt dz = \theta \tau h \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \left| \psi_{jk}^p - \Phi_{jk}^p \right|^2 .$$

Bu eşitlikten (4.1.2.9) kestirimini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$J_{12} \leq c_{23} \left(\beta_{\tau h}^\theta + \|Q_n(v) - [v_n]\|^2 \right). \quad (4.2.1.5)$$

J_{11} terimi için formüle göre aşağıdakini yazabiliriz:

$$J_{11} = \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz.$$

Burada (4.1.2.35) eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z) - \psi_{jk}^p|^2 dx dt dz \leq \\ &\leq c_{24} \left(h^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Buradan (3.1.1.10) kestiriminin yardımıyla aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{11} \leq c_{25} (h^2 + \tau^2 + \theta^2). \quad (4.2.1.6)$$

Böylelikle, (4.2.1.4), (4.2.1.5) eşitsizliklerinin yardımıyla (4.2.1.3)' den aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{aligned} (J_1)^2 &= \sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, t, z) - \Phi_{jk}^p|^2 dx dt dz \leq \\ &\leq c_{26} \left(\beta_{\tau h}^\theta + h^2 + \tau^2 + \theta^2 + \|Q_n(v) - [v_n]\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.1.7)$$

J_2 terimi için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$(J_2)^2 = \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |y_{jk}^p - y(x, t, z)|^2 dx dt dz \right)^{1/2}.$$

Bu formülden $y = y(x, t, z)$ fonksiyonu için olan (3.1.1.9) şartından ve y_{jk}^p ağ fonksiyonu için olan (3.1.2.10) formülünden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} (J_2)^2 &= \left(\sum_{p=1}^Z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |y_{jk}^p - y(x, t, z)|^2 dx dt dz \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_{27} \left(h^2 \left\| \frac{\partial y}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2 \left\| \frac{\partial y}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2 \left\| \frac{\partial y}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq c_{28} (h^2 + \tau^2 + \theta^2). \end{aligned} \quad (4.2.1.8)$$

(4.2.1.7), (4.2.1.8) eşitsizliklerinin yardımıyla (4.2.1.3) eşitsizliğinden aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \leq c_{29} \left(\sqrt{\beta_{th}^\theta} + h + \tau + \theta + \|Q_n(v) - [v]_n\| \right). \quad (4.2.1.9)$$

Burada $c_{21} = c_{29}$ olduğunda $\tilde{\beta}_{th}^\theta = \sqrt{\beta_{th}^\theta} + \theta + \tau + h$ işaretlemesini yaparsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 4.2.1.1 ispatlandı.

4.2.2. Fonksiyonele Göre Yakınsaklık.

Bu alt bölümde fonksiyonele göre yakınsaklığı göstermek için ilk önce iki yardımcı lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.2.2.1. Farz edelim ki, teorem 4.2.1.1' in şartları sağlansın. Bunların yanı sıra farz edelim ki, $Q_n(v)$ operatörü herhangi $v \in V$ için (4.1.2.7), (4.1.2.8) formülleri ile tanımlansın. Bu taktirde $Q_n(v) \in V_n$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left| J(v) - I_n(Q_n(v)) \right| \leq c_{21} \tilde{\beta}_{th}^\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2.2.1)$$

İspat. Farz edelim ki, herhangi $v \in V$ elemanı verilsin. Bu taktirde (4.1.2.8) formülünden yararlanırsak, aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$w_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x) dx, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Bu formülün yardımıyla aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$|w_j| \leq \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |v(x)| dx \leq \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} b_0 dx = b_0, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Bu bağıntıdan ve V_n kümesinin yapısından $[w]_n = Q_n(v)$ ' in V_n kümesinin elemanı olduğu çıkar. Bu taktirde teorem 4.2.1.1 in ispatında $[v]_n \in V_n$ elemanının yerine $Q_n(v)$ ' yi seçersek ve ispatı yaparsak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 4.2.2.1 ispatlandı.

Lemma 4.2.2.2. Farz edelim ki, teorem 4.2.1.1' in şartları sağlansın. Bunun yanı sıra farz edelim ki, P_n operatörü aşağıdaki formül ile tanımlansın:

$$P_n([v]_n) = \tilde{v}(x) = v_j, \quad x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \forall [v]_n \in V_n. \quad (4.2.2.2)$$

Bu takdirde $\tilde{v} = P_n([v]_n) \in V$ şartı sağlanır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left| J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n) \right| \leq c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (4.2.2.3)$$

İspat. Farz edelim ki, $[v]_n \in V_n$ verilen herhangi eleman olsun. (4.2.2.2) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left| P_n([v]_n) \right| = |\tilde{v}(x)| = |v_j| \leq b_0, \quad x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \forall [v]_n \in V_n.$$

Bu bağıntılardan $[v]_n$ elemanının parçalı sabit tamamlaması $\tilde{v}(x) = P_n([v]_n)$, $\forall x \in [0, l]$ fonksiyonunu tanımlar ve bu eleman $\tilde{v} \in V$ şartını sağlar. Bu taktirde teorem 4.2.1.1 in ispatında $v \in V$ ' nin yerine $\tilde{v} \in V$ alıp teoremi ispatlarsak oradan aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left| J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n) \right| \leq c_{21} \left(\tilde{\beta}_{\tau h}^\theta + \|Q_n(\tilde{v}) - [v]_n\| \right), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (4.2.2.4)$$

(4.2.1.7) ve (4.2.1.8) formüllerinin kullanırsak, aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\|Q_n(\tilde{v}) - [v]_n\| = 0.$$

Bunu (4.2.2.4)' de dikkate alırsak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 4.2.2.2 ispatlandı

Nihayet, sonlu fark approksimasyonlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını gösteren teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.2.2.3. Farz edelim ki, lemma 4.2.2.1 ve lemma 4.2.2.2' nin şartları sağlansın. Ayrıca farz edelim ki, $v^* \in V$ elemanı (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü, $[v]_n^* \in V_n$ ise (3.1.2.1)-(3.1.2.5) ayrık probleminin çözümü olsun, başka deyişle, $J_* = J(v^*) = \inf_{v \in V} J(v)$, $I_{n*} = I_n([v]_n^*) = \inf_{[v]_n \in V_n} I_n([v]_n)$ şartları sağlansın. Bu takdirde (3.1.2.1)-(3.1.2.5) ayrık optimal kontrol problemi (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin approksimasyonudur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n*} = J_* \quad (4.2.2.5)$$

ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J_* - I_{n*}| \leq c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2.2.6)$$

İspat. Teoremi ispatlamak için [19] çalışmasında bildiğimiz ispat metodini kullanacağız. Farz edelim ki $v^* \in V$ ve $[v]_n^* \in V_n$ elemanları sırasıyla (3.1.1.1)-(3.1.1.5) ve (3.1.2.1)-(3.1.2.5) problemlerinin çözümleri olsun. Bu takdirde Lemma 4.2.2.1' i kullanırsak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$I_{n*} \leq I_n(Q_n(v^*)) \leq c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta + J(v^*) = J_* + c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$J_* - I_{n^*} \geq -c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, n=1,2,\dots. \quad (4.2.2.7)$$

Diğer taraftan Lemma 4.2.2.2' yi kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$J_* \leq J \left(P_n \left([v]_n^* \right) \right) \leq I_n \left([v]_n^* \right) + c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta = I_{n^*} + c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, n=1,2,\dots.$$

Bu takdirde bu eşitsizlikten aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_* - I_{n^*} \leq c_{21} \tilde{\beta}_{\tau h}^\theta, n=1,2,\dots. \quad (4.2.2.8)$$

Buradan ve (4.2.2.7) eşitsizliğinden (4.2.2.6) kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Eğer $\theta = \theta_n, \tau = \tau_n, h = h_n$ işaretlemelerini dikkate alırsak ve $n \rightarrow \infty$ için $\theta_n \rightarrow 0, \tau_n \rightarrow 0, h_n \rightarrow 0$ olduğunu kullanırsak, bu taktirde $n \rightarrow \infty$ için $\tilde{\beta}_{\tau_n h_n}^{\theta_n} \rightarrow 0$ şartından yararlanırsak, (4.2.2.6) kestiriminden (4.2.2.5) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlarız. Teorem 4.2.2.3 ispatlandı.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi bir biçimde farklıdır. Her şeyden önce söylemek gerekir ki, incelenen optimal kontrol probleminde kontrol edilen sistemin durumu özel gradyent terim içeren durgun olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilmektedir. Diğer taraftan amaç fonksiyoneli tüm bölge üzerinden integral fonksiyoneldir. Söylememiz gerekir ki, bir önceki çalışmalarda, örneğin, [38] çalışmalarında kontrol edilen sistemin durumu özel gradyent terim içermeyen durgun olmayan kuazi optik denklemdir ve amaç fonksiyoneli final fonksiyonel olarak kullanılmıştır. Bu söylediklerimizden yola çıkarak söyleyebiliriz ki, tez çalışmasında incelenen optimal kontrol probleminin konusunun güncel ve konulma açısından ciddi bir biçimde önceki çalışmalarda incelenen problemlerden farklı olduğundan bu çalışmada elde edilen sonuçlar da güncel olup gerek teorik gerekse de pratik açıdan bilimsel önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında alınan sonuçlar önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla da örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

- [1.] Butkovskiy A.G., Samoilenko Y.I. (1984) Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. M.: Nauka, 256 s. (Rusça)
- [2.] Karamzin Yu.N., Sukhorukov A.P., Trofimov V.A. (1989) Lineer olmayan optikte matematiksel modelleme- Moskova, MDÜ nin yayın evi.
- [3.] Landau L.D., Lifşis E.M. (1963) Kuantum Mekanığı. Cilt 3. - s.702 (Rusça).
- [4.] Vorontsov M.A., Shmalgauzen, V.I. (1984) Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka, 288 s Rusça).
- [5.] Akbaba D.G. (2011) Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problrmi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.
- [6.] Aksoy Y.N., Yıldız B., Yetişkin H. (2012) Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathematical Sciences, 122(3), pp. 469-484.
- [7.] ksoy Y.N. (2015) The variational formulation of an inverse problem for multi-dimensional nonlinear time dependent Schrödinger equation. DOI:10.1515/jiip-2015-0029.
- [8.] Aksoy N.Y., Yagubov G.Ya., Yıldız B. The finite difference approximations of the optimal control problem for a nonlinear Schrödinger equation // IJMMNO, vol. 3, issue 3, 2012, pp.158-183.
- [9.] Aksoy N.Y., Dinh Nho Hao, Yagub G. Finite difference method for an optimal control problem for a nonlinear time-dependent Schrödinger equation // Numerical Functional Analysis and Optimization, 2016, 28 p.
- [10.] Ibrahimov N.S. (2009) Linner olmayan durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminin çözümünün gerek şartı hakkında // Lankaran Devlet Üniversitesinin Haberleri. Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 30-46
- [11.] Ibrahimov N.S. (2010) Linner durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerek şart // Kiev Üniversitesinin Haberleri. Fizik-Matematik Bilimler serisi, № 4, s. 124-129.

- [12.] İbrahimov N.S. (2010) Zayıf genelleştirilmiş çözümlü kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerek şart // Azerbaycan Teknik Üniversitesinin Bilimsel Çalışmaları. Temel bilimler serisi, № 3, s. 41-47.
- [13.] İbrahimov N.S. (2010) Çok boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için final gözlem üzerinden identifikasyon probleminin çözümünün varlığı hakkında // Azerbaycan Teknik Üniversitesinin Bilimsel Çalışmaları. Temel bilimler serisi, № 2, s. 75-83.
- [14.] İbrahimov N.S. (2011) Bir boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerek şart // Kontrol ve İformatiğin Problemleri, № 4, s. 51-62.
- [15.] İbrahimov N.S. (2011) Bir boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için bir identifikasyon problemi hakkında // İformatiğin ve Matematiğin Tavriya Haberleri, № 2, s. 17-29.
- [16.] İbrahimov N.S. (2012) Lineer olmayan kısmında sanal katsayı olan çok boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için final gözlem üzerinden identifikasyon problemi // Kontrol ve İformatiğin Problemleri, № 4, s. 15-27.
- [17.] İskenderov A.D., Mahmudov N.M. (1995) Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol // AMEA 'nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-c.16,No:5-6-30-35 (Rusça)
- [18.] İskenderov A.D., Yagubov G.Ya., Musayeva M.A. (2012) Kuantum potansiyellerinin identifikasyonu. Baku, Çaşıoğlu, 552 s. (Rusça).
- [19.] İskenderov A.D., Yagubov G.Y., İbragimov N.S., Aksoy N.Y. (2014) Variation formulation of the inverse problem of determining the complex-coefficient of equation of quasioptics // Euroasian Journal of Mathematical and Computer Applications. Vol 2., Issue 2 , pp. 102-121.
- [20.] İskenderov A.D., Yagub G., Zengin M. (2016) Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27 , - pp.79-80
- [21.] Lions J.L. (1987) Dağılmış parametrelili singuler sistemlerle kontrol. M.: Nauka, 308 s. (Rusça).

- [22.] Mahmudov N.M. (1997) Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri- c.7.s.39-42 (Rusça).
- [23.] Potapov M.M., Razgulin A.V., Shameyeva T.Yu. (1988) Schrödinger tipli denklem için optimal kontrol probleminin aproksimasyonu ve regulerizasyonu // Moskova Üniversitesinin Haberleri. Nümerik Analiz ve Siberetik serisi, № 1, s.8-13.
- [24.] Yagubov G.Ya. (1994) Kuazi Lineer Schrödinger denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. Bilimler Doktoru Tezi. Kiev Devlet Üniversitesi, Kiyev., 318 s.(Rusça)
- [25.] Yetişkin H. (2005) Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- [26.] İbrahimov N.S. (2010) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için sınır gözlemi üzerinden identifikasyon probleminin çözümünün varlığı hakkında // Lankaran Devlet Üniversitesinin Haberleri. Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 27-44.
- [27.] İbrahimov N.S. (2010) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemi // İnformatiğin ve Matematiğin Tavriya Haberleri, № 2, s. 45-55.
- [28.] İbrahimov N.S. (2010) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için final gözlemi üzerinden bir identifikasyon problem hakkında // T. Şevçenko Kiev Devlet Üniversitesi, 'Nümerik ve Uygulamalı Matematik' Dergisi, № 4, s. 26-37.
- [29.] İbrahimov N.S (2010). Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminin sonlu farklar yöntemiyle çözümünün yakınsaklığı hakkında // Azerb. Teknik Üniversitesinin Bilimsel Eserleri. Temel bilimler serisi, № 4, s. 54-60.
- [30.] İbrahimov N.S. (2011) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemiyle çözümünün kesinlik mertebesi hakkında // Journal of Qafqaz University. Mathematic and Informatic, cilt. 1, № 31, s. 55-68.
- [31.] İbrahimov N.S. (2011) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminin fark yöntemiyle çözümünün yakınsama hızı //

Nümerik Analiz ve Uygulamalı Matematik Dergisi, T. Şevçenko Kiev Devlet Üniversitesi , № 3, s.43-58.

- [32.] İbrahimov N.S. (2012) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde Pontryaginın maksimum prensibi tipinde gerek şart // Sibernetik ve Sistemli Analiz, c. 48, № 3, s. 142-154.
- [33.] İskenderov A.D., Ekber A.S. (2013) Karesel integrallenebilir katsayılı durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlenebilirliği // Lankaran Devlet Üniversitesinin İlmi Haberleri. Matematik ve Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 5-22.
- [34.] Yagubov G.Y., İbragimov N.S. (1998) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için bir ters problem hakkında // ‘Matematiksel Fiziğin Ters Problemleri’ Uluslar arası Kongrenin Sunum Özetleri, Novosibirsk, 21-25 Eylül, s. 76-77.
- [35.] Yagubov G.Y., İbrahimov N.S. (2001) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi // ‘Matematik modellemenin ve optimal kontrolün problemleri’ toplusu, Bakü, s. 49-57.
- [36.] Yagubov G.Y., İbragimov N.S. (2003) Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemi // ‘Teorik ve Matematiksel Fiziğin Ters Problemleri’ Uluslar arası Kongrenin Sunum Özetleri, Sumgayıt, s. 41-42.
- [37.] Yagub G., Ugurlu G., A. Ekber A., Zengin M. (2019) Identification problem for the linear nonstationary quasi optics equation with a square summable coefficients // Abstracts of the XXXIV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2019),Lviv, Ukraine, September 23-27, pp. 117-119
- [38.] Yıldız B., Kilicoglu O., Yagubov G. (2009) Optimal control problem for non stationary Schrodinger equation // Numerical methods for partial differential equations, 25, p. 1195-1203.
- [39.] Farzaliyeva U.M. (2019) Özel gradyent terimli lineer durgun olmayan kuazi optik denklemi için bir optimal kontrol problemi hakkında // ‘Doktora öğrencilerin ve genç araştırmacılar’ın XXIII Cumhuriyet Bilimsel Kongresi, Azerbaycan İnşaat ve Mimarlık Üniversitesi, Bakü, Aralık, 2019, s. 18-19.
- [40.] İyosida,K.(1967) Functional Analysis-Moskova, Mir- s.624 (Rusça)

- [41.] Kolmogorov A.N., Formin S.V. (1989) Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. M.Nauka.1989-s.624 (Rusça)
- [42.] Ladyzenskaja O.A. (1973) Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri- M:Nauka, (Rusça)
- [43.] Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A.,Uraltseva N.N. (1968) Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Amer. Math. Soc. (english trans) Providence, R.I. Nauka, 765 s.
- [44.] Lions J.-L., Magenes E. (1972) Non-homogeneous boundary value problems and applications, vol. 2. Berlin, 307 p.
- [45.] Vasilyev F.P. (1981) Ekstremal Problemlerin Çözüm Metodları. M: Nauka, 400 s. (Rusça).
- [46.] Ibrahimov N., Yagub G., Farzaliyeva Ü. (2018) Özel gradiyent terimli lineer durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemi hakkında // Lankaran Devlet Universitesinin Bilimsel Haberleri, Doğa bilimleri, № 2, s. 212-220.
- [47.] Mikhaylov V.P. (1983) Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler . M.: Nauka,Hayka, 424 s (Rusça).