

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
RASTGELE ANALİZİ



YÜKSEK LİSANS

Eda YILDIZ

NİSAN-2023
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
RASTGELE ANALİZİ**

**RANDOM ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY
ANALYSIS METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Eda YILDIZ

**NİSAN-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
RASTGELE ANALİZİ**

**RANDOM ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY
ANALYSIS METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Eda YILDIZ

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**NİSAN-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Homotopi Analiz Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Rastgele Analizi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

06/04/2023

Eda YILDIZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet MERDAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni bu günlere getiren, bugüne dek her konuda beni destekleyen bana inançlarını asla kaybetmeyen sevgili annem Gülhanım YILDIZ, sevgili Zenzem YILDIZ, Kübra YILDIZ İYİK, Zennure GÖĞNE, Esra YILDIZ GÜNBAY, Tuğçe YILDIZ aileme, sevgili arkadaşlarım Edanur GİRMEÇ ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili eşim Sıtkı ESEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Eda YILDIZ
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu çalışmada adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin katsayıları veya başlangıç koşulları farklı olasılık dağılımlarından seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Rastgele davranışları için Normal, Gamma, Düzgün, Laplace ve Beta gibi sürekli zamanlı olasılık dağılımları kullanılarak incelendi. Rastgele hale getirilen bu denklemler literatürde lineer olmayan denklemlerin çözümünde de yaygın olarak kullanılan Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren seri çözümlerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etmeyi sağlayan optimal h değerinin incelendiği Homotopi Analiz Metodu ve q-HAM'dan faydalanılarak çözümler elde edilmiştir.

Elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin olasılık karakteristiklerinden en yaygın olarak kullanılan beklenen değer, varyans ve değişim katsayısı hesaplanarak bulunan çözümlerin grafikleri MATLAB veya MAPLE paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Homotopi analiz yöntemi, Sürekli zamanlı olasılık dağılımları, Beklenen değer, Varyans, Değişim katsayısı

SUMMARY

In this study, the coefficients or initial conditions of the systems of ordinary, partial and differential equations are chosen from different probability distributions and the equations are randomized. For their random behavior, continuous time probability distributions such as Normal, Gamma, Uniform, Laplace, Beta, and Triangular were examined. These randomized equations are solved by using the Homotopy Analysis Method and q-HAM, which examines the optimal $\hbar$ value, which allows to control the convergence region and speed of the series solutions combining the Taylor series with the concept of Homotopy, which is widely used in the solution of nonlinear equations in the literature.

The most commonly used expected value, variance and coefficient of variation from the probability characteristics of the obtained random differential equations were calculated and the graphs of the solutions were drawn with the help of MATLAB or MAPLE package programs.

Keywords: Homotopy analysis method, Continuous-time probability distributions, expected value, Variance, Coefficient of change

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XIV
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Literatür Özeti	2
2. HOMOTOPI ANALİZ METODU	4
2.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Homotopi Analiz Metodu	4
2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler için q- Homotopi Analiz Metodu	6
3. BAZI OLASILIK DAĞILIMLARI.....	8
3.1. Düzgün Dağılım ve Özellikleri	8
3.2. Normal Dağılım.....	8
3.3. Beta Dağılımı	9
3.4. Standart Laplace Dağılımı.....	10
3.5. Gamma Dağılımı	10
3.7. Üstel Dağılım	11
3.8. Rastgele Diferansiyel Denklemler.....	12
4. UYGULAMALAR.....	13
4.1. Rastgele adi diferansiyel denklemlerin HAM Metodu ile Analizleri.....	13
4.2. Rastgele adi diferansiyel denklem sistemlerinin HAM Metodu ile Analizleri	39
4.3. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin HAM Metodu ile Analizleri.....	54
4.4 Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin Q-HAM Metodu ile Analizleri	70
5. İRDELEME.....	80
6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	81
7. ÖNERİLER	82

KAYNAKÇA	83
ÖZGEÇMİŞ.....	87



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. (4.79) probleminin uygun h belirleme tablosu.....	32
--	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $B \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $C \sim \text{Gamma}(u = 2, v = 3)$ özel değerler için (4.70) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	22
Şekil 2. $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $B \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $C \sim \text{Gamma}(u = 2, v = 3)$ özel değerler için (4.74) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	26
Şekil 3. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$ özel değerler için (4.77) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	29
Şekil 4. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$ özel değerler için (4.78) denkleminin varyansının çözüm davranışı	30
Şekil 5. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$ özel değerler için (4.79) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı	31
Şekil 6. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$ özel değerler için (4.79) denkleminin $\hbar$ eğrisi değerinin çözüm davranışı	32
Şekil 7. $A \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 3)$, $B \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.82) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	36
Şekil 8. $A \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 3)$, $B \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.83) denkleminin varyansının çözüm davranışı	37
Şekil 9. $A \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 3)$, $B \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.84) değişim katsayı değerinin çözüm davranışı	38
Şekil 10. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim \text{Laplace}(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.90) denkleminin $x_1(t)$ beklenen değerinin çözüm davranışı.....	43
Şekil 11. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim \text{Laplace}(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.91) denkleminin $x_2(t)$ beklenen değerinin çözüm davranışı.....	44
Şekil 12. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim \text{Laplace}(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.92) denkleminin $x_1(t)$ varyansının çözüm davranışı.....	46

Şekil 13. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.93) denkleminin $x_2(t)$ varyansının çözüm davranışı.....	47
Şekil 14. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.94) denkleminin $x_1(t)$ değişim katsayı değerinin çözüm davranışı.....	48
Şekil 15. $k \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$, $\delta \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 2)$ özel değerler için (4.95) denkleminin $x_2(t)$ değişim katsayı değerinin çözüm davranışı.....	49
Şekil 16. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$ özel değerler için (4.104) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	52
Şekil 17. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$ özel değerler için (4.105) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	53
Şekil 18. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$ özel değerler için (4.106) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı.....	54
Şekil 19. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.113) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	56
Şekil 20. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.114) denkleminin varyansının çözüm davranışı	57
Şekil 21. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.115) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı	58
Şekil 22. $A \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 8)$ özel değerler için (4.119) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	60
Şekil 23. $A \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 8)$ özel değerler için (4.120) denkleminin varyansının çözüm davranışı	61
Şekil 24. $A \sim Laplace(a = 1, a2b^2 = 8)$ özel değerler için (4.121) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı	62
Şekil 25. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.128) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	64

Şekil 26. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.129) denkleminin varyansının çözüm davranışı	65
Şekil 27. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (4.130) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı.....	66
Şekil 28. $X \sim Gamma(\alpha = 1, \beta = 3)$ özel değerler için (4.134) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	68
Şekil 29. $X \sim Gamma(\alpha = 1, \beta = 3)$ özel değerler için (1.135) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	69
Şekil 30. $X \sim Gamma(\alpha = 1, \beta = 3)$ özel değerler için (1.136) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	70
Şekil 31. $A = 2$ seçildiğinde (4.144) denklemi için ($h = -1, n = 1$) için q-HAM ve tam çözüm grafiği.....	74
Şekil 32. x, t 'nin farklı değerleri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM (q-HAM; n=1) ile $\hbar$ eğrisi.....	75
Şekil 33. x, t 'nin farklı değerleri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM (q-HAM; n=5) ile $\hbar$ eğrisi.....	75
Şekil 34. x, t 'nin farklı değerleri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM (q-HAM; n=10) ile $\hbar$ eğrisi.....	76
Şekil 35. $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.144) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	77
Şekil 36. $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.144) denkleminin varyansının çözüm davranışı	78
Şekil 37. $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 5)$ özel değerler için (4.144) denkleminin değişim katsayı değerinin çözüm davranışı.....	79

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

HAM	: Homotopy Analiz Metodu
HPM	: Homotopy Pertürbasyon Metodu
Q-HAM	: Q-Homotopy Analiz Metodu
$E[X]$	: X rastgele değişkenin beklenen değeri
$E[X^n]$	: X rastgele değişkenin n . momenti
$Var[X]$	: X rastgele değişkenin varyansı
$std[X]$	: X rastgele değişkenin standart sapması
$DK[X]$	: X rastgele değişkenin değişim katsayısı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Matematiksel modellerin lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklem yardımıyla ifade edilmesi sonucunda elde edilen denklemlerin çoğunlukla analitik çözümü elde edilememektedir. Bu tür denklemlerin yaklaşık veya yaklaşık analitik çözümleri literatürde çok sık kullanılan yöntemler yardımıyla bulunabilir. Bunlar arasında en sık kullanılanı Homotopi kavramına dayanan Homotopi Analiz Metodu (HAM), Pertürbasyon yönteminden farklı ve küçük parametrelere bağlı olmayan Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol altına almamızı sağlayan Homotopi Analiz Metodu (HAM), topolojinin önemli kavramlarından biri olan ve Shijun Liao tarafından 1992 yılında geliştirilen Homotopi ve Taylor formülüne dayalı yarı analitik bir yöntemdir. Cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, diferansiyel-integral denklemler, diferansiyel-integral denklemler dahil olmak üzere çeşitli türlerdeki doğrusal olmayan denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yaklaşık analitik yaklaşımdır. Bu yöntem, esasen pertürbasyon tekniklerinde gerekli olan, doğrusal olmayan bir problemin küçük/büyük fiziksel parametreler içerip içermediğine bakılmaksızın geçerlidir. Daha da önemlisi, tüm pertürbasyon ve geleneksel pertürbasyonsuz yöntemlerden farklı olarak, homotopi analiz yöntemi bize hem doğrusal olmayan bir probleme yaklaşmak için uygun temel fonksiyonları seçme özgürlüğü hem de çözüm serilerinin yakınsamasını sağlamak için basit bir yol sağlar.

Homotopi Analizi Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Lyapunov Yapay Parametre Metodu, δ – Açılım Metodu gibi önceden verilen pertürbatif metotlarını birleştirerek genel bir çözüm yöntemi sunar. Liao (1992, 1995), HAM yakınsaması ile elde edilen seri çözümün güçlü bir şekilde yardımcı parametre h 'ye bağlı olduğunu kanıtladı. Bazı değiştirilmiş optimal HAM'ler önerildi. Doğal sınır koşulları için ilk tahmin çözümlerini oluşturmanın yolu Liao (2003, 2004, 2012) ve Yang ve Liao'da (2006) bulunabilir. Bu metotla cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler ve benzeri denklemlerin çözüm serilerine fiziksel parametrelerden bağımsız olarak ulaşılabilir ve yakınsaklık bölgesi ve hızı kontrol altına alınabilir.

1.2. Literatür Özeti

Homotopi analiz yöntemi ile yapılan son çalışmalar (Liao, 1992; Liao, 1999; Liao, 2003a; Liao, 2003b; Liao, 2004; Liao, 2005; Liao S.J., 1995; Liao S.J., 1997; Liao S.J., 2009). Bu yöntem birçok yazar tarafından kullanılmıştır (Liao, 1992; Liao, 1999; Liao S.J., 2002; Liao, 2003a; Liao, 2003b; Liao, 2004; Liao, 2005; Liao S.J. 2012; Ayub, Hayat ve Rasheed, 2003; Hayat, Khan, Ayub ve Angew, 2005; Wu ve Liao, 2005; Wu ve Liao, 2004; Wu, & M. S. (1982); Wu, Y., Wang C. & Liao, S.J. (2005); Hayat ve Sajid, 2007; Abbasbandy, 2006; Abbasbandy, 2007; Akinyemi L., Olaniyi S. I. ve Mensah Owusu I. 2022; Bataineh, S. A., Noorani, M.S.M. ve Hashim, I., (2007); Hariharan G. (2017); Odibat Z. M. (2010); Sajid, M., Ahmad, I., Hayat, T. & Ayub, M. (2009); Soong T. (1973); Wazwaz, A. M., (2014); Leal-Vazquez H., Koçak H. & Ateş İ. (2016); Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., Kesemen T., (2017)) bilim ve mühendislikte birçok türde doğrusal olmayan problemi çözmek için başarıyla uygulanmıştır. Aynı zamanda mühendislik (Liao, 2003b; Liao & Cheung, 2003; Liao & Pop, 2004; Liao, 1999; Hayat, Khan & Ayub, 2004a; Hayat, Khan & Ayub, 2004b; Hayat & Khan, 2005) ve fiziksel özelliklere sahiptir. (Tan ve Abbasbandy, 2006; Liao ve Cheung, 2003; Liao, 2004; Ganji ve Rafei, 2006; Hayat, Khan ve Asghar, 2004) ve sonuçlar kesin çözümlerle hemen hemen aynıdır.

Alkan tarafından 2019 yılında yapılan çalışma Kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin Homotopi analiz metodu ile nümerik çözümleri elde etmiştir (Alkan, A. 2019). Babaoğlu tarafından 2009 yılında Diferansiyel denklemleri sayısal çözümlerinde adomian ayrışım metodu ve Homotopi analiz metodu'nun karıştırılması çalışması yapılmıştır (Babaoğlu, M. 2009). Cihan tarafından 2015 yılında Fark denklemlerinin Homotopi analiz metodu ile incelenmiştir (Cihan, A. 2015). Çil tarafından 2013 yılında Pantograph denklemlerin Homotopi analiz metodu ile çözümü üzerinde çalışmalar gerçekleştirmiştir (Çil, A. 2013). Erdoğan 2012 yılında Homotopi analiz metodu'nun farklı tipte diferansiyel denklemlere uygulanışı ve adomian Decomposition metodu, diferansiyel transform Metodu ile karşılaştırılması yapılmıştır (Erdoğan, Ş. (2012)).

Merdan ve Khaniyev tarafından 2008 yılında yapılan çalışmada Kuş Gribi hastalığının yayılımı için rastgele bir model kullanılmaktadır (Merdan ve Khaniyev, 2008). Bekiryazici vd. tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışmada Dang Humması hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2016). Bekiryazici vd. tarafından 2017 yılında bir çalışmada Sıtma hastalığının yayılımı rastgele ve stokastik diferansiyel denklem sistemleri ile 24 incelenmektedir (Bekiryazici vd., 2017).

Bekiryazici vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Çocuk Felci hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2018). Merdan vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Ebola hastalığının rastgele yayılımına ait yaklaşık karakteristikler üzerine bir inceleme yapılmaktadır (Merdan vd., 2018). Merdan vd. tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada Hepatit C hastalığının yayılımının rastgele davranışları ile ilgili bir inceleme yapılmaktadır (Merdan vd., 2017). Bu çalışma literatürdeki rastgele modelleme çalışmalarını kaynak olarak El, ayak, ağız hastalığı ile ilgili bir inceleme içermektedir. Bekiryazıcı vd. tarafından 2022 yılında yapılan bir çalışmada Zika virüsünün yayılımı için rastgele bir model kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2022). Merdan vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada rastgele Lane–Emden kompleks diferansiyel denklemler diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülerek çözüm davranışları ele alınmaktadır. Merdan ve Atasoy tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada Residual kuvvet serisi metodu ile kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmektedir (Merdan ve Atasoy, 2023).

Bu çalışma literatürdeki rastgele modelleme çalışmalarını kaynak olarak, adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri, bazı olasılık dağılımları ile rastgele etki terimleri Düzgün, Gamma, Normal, Beta ve Laplace dağılımlarından seçilerek rastgele hale dönüştürülen denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri optimal h değerinin incelendiği HAM ve q-HAM yöntemi ile elde edilerek ve rasgele davranışları analiz edilecektir.

2. HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Çözüm serilerinin yakınsama bölgesini ve hızını kontrol etmemizi sağlayan homotopi kavramı ve Taylor serisinin birleştirilmesi ile elde edilen Homotopi Analiz Metodu (HAM), Adomian Ayırıştırma Metodu, Lyapunov Yapay Parametre Metodu, δ -Genişletme Metodu gibi daha önce verilen pertürbatif yöntemleri birleştirerek genel bir çözüm yöntemi sunar. Bu yöntemle cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler, integral denklemler ve benzeri denklemlerin çözüm serilerine fiziksel parametrelerden bağımsız olarak ulaşılabilir, yakınsama bölgesi ve hız kontrol edilebilir.

2.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Homotopi Analiz Metodu

Yöntemin temel fikrini göstermek için, aşağıdaki doğrusal olmayan denklemi genel olarak ele alalım;

$$N[v(\xi)] = 0, \quad (2.1)$$

Sırasıyla N doğrusal olmayan bir operatör, τ bağımsız değişkeni, $v(\xi)$ bilinmeyen bir fonksiyonu belirtmektedir. Basit olması için, benzer şekilde ele alınabilecek tüm sınır veya başlangıç koşullarını yok sayıyoruz. Liao, geleneksel Homotopi yöntemini geliştirerek aşağıdaki sıfır dereceli deformasyon denklemini oluşturmuştur.

$$(1 - p)L[\psi(\xi; p) - v_0(\xi)] = p\hbar H(\xi)N[\psi(\xi; p)] \quad (2.2)$$

Burada sırasıyla $p \in [0,1]$ gömme parametresi $\hbar \neq 0$ sıfır olmayan bir parametredir, $H(\xi) \neq 0$ yardımcı bir fonksiyonu, L yardımcı bir lineer operatördür, $v_0(\xi)$ ilk tahmindir, $\psi(\xi; p)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

Sırasıyla $p = 0$ iken

$$\psi(\xi; 0) = v_0(\xi), \quad (2.3)$$

ve $p = 1$ iken,

$$\psi(\xi; 1) = v(\xi) \quad (2.4)$$

elde edilir. Böylece, p 0'dan 1'e arttığında $\psi(\xi; p)$ çözümü, $v_0(\xi)$ ilk tahminlerden $v(\xi)$ çözüme doğru değişir. p 'ye göre Taylor serisine açılımından,

$$\psi(\xi; p) = v_0(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\xi)p^i, \quad (2.5)$$

burada

$$p = 0 \text{ da } v_i(\xi) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \psi(\xi; p)}{\partial p^i} \text{ dır.} \quad (2.6)$$

Yardımcı lineer operatör, ilk tahmin, yardımcı $\hbar$ ve yardımcı fonksiyon çok uygun şekilde seçilirse, yukarıdaki seri 'de $p = 1$ de aşağıdaki ifadeye yakınsar,

$$v(\xi) = v_0(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\xi), \quad (2.7)$$

o zaman elimizde

$$\vec{v} = \{v_0(\xi), v_1(\xi), v_2(\xi), \dots, v_i(\xi)\} \quad (2.8)$$

vektörünü tanımlayalım,

Denklem (2.6)'nin p gömme parametresine göre i kez diferensiyeli alınırsa ve $p = 0$ yerine yazılıp son olarak $i!$ 'ye bölerek, i 'inci mertebeden deformasyon denklemini elde ederiz.

(2.12) sıfırıncı-mertebe deformasyon denkleminde türetilebilir.

$$\chi_i = \begin{cases} 0, & i \leq 1, \\ 1, & i > 1, \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_i fonksiyonu da kullanılarak,

$$L[v_i(\xi) - \chi_i v_{i-1}(\xi)] = \hbar H(\xi) R_i(\vec{v}_{i-1}) \quad (2.9)$$

$$\text{burada, } p = 0 \text{ da } R_i(\vec{v}_{i-1}) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} \psi(\xi; p)}{\partial p^{i-1}}.$$

(2.9)'in her iki tarafına L^{-1} uygularsak,

$$v_i(\xi) = \chi_i v_{i-1}(\xi) + \hbar L^{-1}[H(\xi) R_i(\vec{v}_{i-1})]$$

Bu şekilde, $i \geq 1$ için $v_i(\xi)$ kolayca elde edilebilir,

i . mertebeden çözüm yaklaşımı,

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^i v_k(\xi), \quad (2.10)$$

biçimin de elde edilir. $i \rightarrow \infty$, (2.1) orijinal denkleminde doğru bir yaklaşımını elde edilir.

2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler için q- Homotopi Analiz Metodu

Aşağıdaki doğrusal olmayan denklemi genel olarak ele alalım;

$$N[\nu(x, t)] = 0. \quad (2.11)$$

Burada N doğrusal olmayan bir operatördür, x konumu, t zamanın bağımsız değişkenleridir ve $\nu(x, t)$ bu değişkenlere bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. Klasik homotopi kavramını kullanan Liao, sıfır dereceli deformasyon denklemini elde etti. $q \in [0,1]$ gömme parametresi, $\hbar \neq 0$ sıfır olmayan yakınsama-kontrol parametresi, $\mathcal{H}(x, t)$ yardımcı fonksiyon, L yardımcı lineer operatör ve $\nu_0(x, t), \nu(x, t)$ 'nin sıfırı - bir başlangıç tahmini ile çözüm serisi $\mathfrak{S}(x, t; q)$ için sıfırıncı-mertebe deformasyon denklemi;

$$(1 - q)L[\mathfrak{S}(x, t; q) - \nu_0(x, t)] = q\hbar\mathcal{H}(x, t)N[\mathfrak{S}(x, t; q)] \quad (2.12)$$

ile verilir. Homotopi analiz metodunda; $\hbar$ yakınsaklık-kontrol parametresi, $\mathcal{H}(x, t)$ yardımcı fonksiyonu ve L yardımcı lineer operatörü keyfi olarak seçilebilir. Denklemin çözümü olan $\mathfrak{S}(x, t; q)$, sadece $\nu_0(x, t), L, \hbar, \mathcal{H}(x, t)$ ' ye bağlı değil aynı zamanda $q \in [0,1]$ gömme parametresine de bağlıdır.

$q = 0$ iken,

$$\mathfrak{S}(x, t; 0) = \nu_0(x, t) \quad (2.13)$$

ve

$q = 1$ iken,

$$\mathfrak{S}(x, t; 1) = \nu(x, t) \quad (2.14)$$

elde edilir. Homotopi parametresi $q, 0$ ' dan 1 ' e doğru artarken $\mathfrak{S}(x, t; q)$ ' da $\nu_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımından, tam çözüm $\nu(x, t)$ 'ye sürekli olarak değişir. Bu tip sürekli değişime Homotopi'de deformasyon denir.

i . mertebe deformasyon denkleminin türevleri

$$\nu_0^{(i)}(x, t) = \frac{\partial^i \mathfrak{S}(x, t; q)}{\partial q^i} \Big|_{q=0}, \quad (2.15)$$

ile tanımlanır. Taylor teoremi yardımıyla $\mathfrak{S}(x, t; q)$ ifadesinin q ' nun kuvvet serisine açılımı aşağıdaki şekildedir.

$$\mathfrak{S}(x, t; q) = \nu_0(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(x, t)q^i. \quad (2.16)$$

Burada,

$$\nu_i(x, t) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \mathfrak{S}(x, t; q)}{\partial q^i} \Big|_{q=0}, \quad (2.17)$$

olup ve $\mathfrak{J}(x, t; q)$ 'nin kuvvet serisi

$$\mathfrak{J}(x, t; q) = v_0(x, t) + \sum_{i=1}^{+\infty} v_i(x, t)q^i, \quad (2.18)$$

şeklindedir.

L yardımcı lineer operatör, $v_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımı, $\hbar$ yakınsak-kontrol parametresi ve $\mathcal{H}(x, t)$ yardımcı fonksiyonu uygun seçilirse, $\mathfrak{J}(x, t; q)$ kuvvet serisi $q = 1$ ' de yakınsar ve

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \sum_{i=1}^{+\infty} v_i(x, t), \quad (2.19)$$

olarak bulunur.

Liao tarafından literatürde sunulduğu gibi başlangıçta verilen lineer olmayan denklemin çözümlerinden biri $\hbar = -1$ ve $\mathcal{H}(x, t) = 1$ olarak seçilirse denklem;

$$(1 - q)L[\mathfrak{J}(x, t; q) - v_0(x, t)] + qN[\mathfrak{J}(x, t; q)] = 0, \quad (2.20)$$

Homotopi pertürbasyon metodunda kullanılan forma dönüşür.

$$\vec{v}_n = \{v_0(x, t), v_1(x, t), \dots, v_i(x, t)\}$$

vektörü tanımlanarak (2.17) eşitliğine göre $v_i(x, t)$ 'nin denklemi, (2.12) sıfırıncı-mertebe deformasyon denkleminde türetilir.

$$\mathcal{X}_i = \begin{cases} 0, & i \leq 1, \\ 1, & i > 1, \end{cases}$$

ile tanımlanan $\mathcal{X}_i$ fonksiyonu da kullanılarak,

$$L[v_i(x, t) - \mathcal{X}_i v_{i-1}(x, t)] = \hbar \mathcal{H}(x, t) R_i(\vec{v}_{i-1}, x, t) \quad (2.21)$$

bulunur. (2.21)' de

$$R_m(\vec{v}_{i-1}, x, t) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} \mathcal{N}[\mathfrak{J}(x, t; q)]}{\partial q^{i-1}} \Big|_{q=0}, \quad (2.22)$$

biçimindedir. Burada i . mertebeden deformasyon denklemini elde edilir. (2.16) ile (2.22) denklemlerinde,

$$R_i(\vec{v}_{i-1}, x, t) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial q^{i-1}} \mathcal{N}[\sum_{j=0}^{+\infty} v_j(x, t)q^j] \Big|_{q=0} \quad (2.23)$$

elde edilir. i . mertebeden çözüm yaklaşımı,

$$v(x, t) = \sum_{l=0}^i v_l(x, t), \quad (2.24)$$

biçiminde elde edilir. Buradaki $v(x, t)$ çözümü, $\hbar$ yakınsaklık parametresi içermektedir.

Teorem 2.2.1. Eğer (2.19) denklemindeki homotopi serisi yakınsak ise

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_i(\vec{v}_{i-1}, x, t) = 0,$$

olur (Liao, 2003).

Teorem 2.2.2. Eğer (2.10) denklemindeki homotopi serisi yakınsak ise bu seri orijinal lineer olmayan (2.1) denkleminin bir çözümü olmalıdır (Liao, 2003).

3. BAZI OLASILIK DAĞILIMLARI

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak bazı olasılık dağılımları hakkında temel bilgiler verilmektedir.

3.1. Düzgün Dağılım ve Özellikleri

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise X rastgele değişkeni $[c, d]$ kapalı aralığında sürekli düzgün dağılıma sahiptir.

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim U(\alpha, \beta)$ ' dir.

Düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\alpha - \beta)t} \quad (3.25)$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak, $X \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \quad (3.26)$$

bulunur (William Feller 1968, Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

3.2. Normal Dağılım

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, x \in R$$

ise rastgele değişkenine Normal Dağılıma sahip rastgele değişken denir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (3.27)$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \quad (3.28)$$

ve varyansı

$$Var[X] = \sigma^2 \quad (3.29)$$

bulunur (William Feller, 1968, Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017). Buradaki momentler kullanılarak X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için beklenen değer $E[XY] = E[X]E[Y]$ olur.

3.3. Beta Dağılımı

Tanım 3.3.1. u ve v değişkenlerinin bütün pozitif değerleri için tanımlanan

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx \quad (3.30)$$

(3.30) fonksiyonuna, beta fonksiyonu denir (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017). Ayrıca gösterilebilir ki

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (3.31)$$

ve

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, u, v > 0 \quad (3.32)$$

dir.

Tanım 3.3.2. (Beta Dağılımı) Aşağıdaki yoğunluk fonksiyonuna sahip X rastgele değişkeni, beta dağılımına sahiptir denir (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

$$f(x; \varphi, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\varphi, \zeta)} x^{\varphi-1} (1-x)^{\zeta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{aralığın dışında} \end{cases} \quad (3.33)$$

Burada φ ve ζ parametreleri pozitif reel sayılardır. Spesifik olarak, $\varphi = \zeta = 1$ ise, dikdörtgensel bir dağılım elde edilir. $\varphi = 1, \zeta = 2$ veya $\varphi = 2, \zeta = 1$ ise üçgensel dağılım bulunur.

$$f(x; 1, 2) = \begin{cases} 2(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{Aralığın dışında} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$f(x; 2, 1) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{Aralığın dışında} \end{cases} \quad (3.35)$$

Beta dağılımına sahip X rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E(X) = \frac{\theta}{\theta + \xi} \quad (3.36)$$

$$Var(X) = \frac{\theta \xi}{(\theta + \xi)^2 (\theta + \xi + 1)} \quad (3.37)$$

3.4. Standart Laplace Dağılımı

Standart Laplace dağılımı, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(v) = \frac{1}{2} e^{-|v|}, v \in R$$

şeklindedir. G dağılım fonksiyonu;

$$G(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^v, v \in (-\infty, 0] \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-v}, v \in [0, \infty) \end{cases},$$

M moment çıkaran foksiyonu,

$$M_v(t) = E(e^{tv}) = \frac{1}{1-t^2}, t \in (-1, 1)$$

olarak verilir. Beklenen değer ve varyansı;

$$E(v) = 0$$

ve

$$Var(v) = 2$$

şeklindedir (Khaniyev vd., 2017).

3.5. Gamma Dağılımı

X negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ise X rastgele değişkenine (α, β) parametrelili gamma dağılımına sahiptir denir.

Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dir.

Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \quad (3.38)$$

(3.40) ifadesi bulunur . $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin, birinci moment ve varyansı $E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2$ (3.39)

(3.39)'dır (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

3.6. Üstel Dağılım

X rastgele değişkeninin, $\zeta > 0$ parametre olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\phi(x) = \begin{cases} \zeta e^{-\zeta x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

şeklinde verilmişse X'e üstel dağılmış rastgele değişken, $\phi(x)$ 'e de üstel dağılım denir.

Bu dağılımın tek parametresi ζ 'dir. Bu durumda birikimli dağılım fonksiyonu

$$\Theta(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \zeta e^{-\zeta t} dt = 1 - e^{-\zeta x} \quad (3.41)$$

$$\Theta(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\zeta x} & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.42)$$

şeklindedir.

Moment çıkaran fonksiyon tanımı kullanılarak bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{xt} \zeta e^{-\zeta x} dx = \zeta \int_0^\infty e^{(t-\zeta)x} dx \quad (3.43)$$

$$= \frac{\zeta}{t-\zeta} e^{(t-\zeta)x} \Big|_0^\infty \quad (3.44)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-\zeta)x} = 0$ olduğu için;

$$M(t) = \frac{\zeta}{\zeta-t}; \quad t < \zeta \text{ için elde edilir.}$$

Moment çıkaran fonksiyon, beklenen değer ve varyans tanımları kullanılarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017). Bu durumda beklenen değer:

$$E(X) = \int_0^\infty \zeta x e^{-\zeta x} dx \quad (3.45)$$

Hesaplamamızda parçalı integral kullanırsak ($u = x, dv = \zeta e^{-\zeta x}$)

$$E(X) = -x e^{-\zeta x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\zeta x} dx = \frac{1}{\zeta} \quad (3.46)$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki şekilde de varyans elde edilir.

$$E(X^2) = \int_0^\infty \zeta x^2 e^{-\zeta x} dx = \frac{2}{\zeta^2} \quad (3.47)$$

$E(X^2)$ hesaplanırken de parçalı integral kullanılır. ($x^2 = u, dv = e^{-\zeta x} dx$)

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (3.48)$$

$$Var(X) = \frac{2}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2} \quad (3.49)$$

3.7. Rastgele Diferansiyel Denklemler

Doğada karşılaşılan olayların matematiksel modellemede adi diferansiyel denklemler kullanılarak incelenmesi her zaman uygun olmamaktadır. Rastgele bileşenlere sahip olan olayların incelenmesi için rastgele ve stokastik diferansiyel denklemlerin kullanılması daha iyi sonuçların elde edilmesine yol açmaktadır. Adi diferansiyel denklemler kullanılarak rastgele diferansiyel denklemler üç şekilde elde edilebilmektedir (Soong, 1973): i. Rastgele başlangıç değerlerine sahip diferansiyel denklemler ii. Homojen olmayan kısımları rastgele olan diferansiyel denklemler iii. Katsayıları rastgele olan denklemler. Bir $Y'(x) = G(Y(x), Z(x), x), x \in T, Y(x_0) = y_0$ diferansiyel denklemi ele alınsın.

Tanım 3.8.1 $Y'(x) = G(Y(x), x), x \in T, Y(x_0) = y_0$ denkleminde tek rastgele bileşen başlangıç koşulu ise bu diferansiyel denklem, rastgele başlangıç koşullarına sahip bir rastgele diferansiyel denklemdir.

4. UYGULAMALAR

4.1. Rastgele adi diferansiyel denklemlerin HAM Metodu ile Analizleri

Başlangıç koşulları veya katsayılar mutlak sürekli dağılımlardan seçilerek rastgele hale getirilen diferansiyel denklemlerin HAM metodu ile çözülerek farklı analizler gerçekleştirilecektir. İlk olarak aşağıda başlangıç koşulları rastgele seçilerek elde edilen adi diferansiyel denklemin çözüm davranışları ele alınacaktır.

Örnek 1: $X'''(t) + aX''(t) + bX'(t) - f(X(t)) = 0$, $X(0) = A$, $X'(0) = B$, $X''(0) = C$ başlangıç değer probleminde $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1,2)$ düzgün dağılıma sahip, $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(1,3)$ normal dağılıma sahip, $C \sim Gamma(u, v) \rightarrow C \sim Gamma(2,3)$ gamma dağılımına sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopy Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$f(X(t)) = -CX(t) + X^2(t), \quad (4.50)$$

$$X(0) = A, X'(0) = B, X''(0) = C, \quad (4.51)$$

a, b, c pozitif sabitler

$$X_0(t) = A + Bt + \frac{C}{2}t^2 \quad (4.52)$$

lineer operatör

$$L[\phi(t; q)] = \frac{\partial^3 \phi(t; q)}{\partial t^3} \quad (4.53)$$

$$L[a_1 + a_2 t + a_3 t^2] = 0 \quad (4.54)$$

$a_i \quad i = 1, 2, 3 \dots$

$$X_0(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

$$X_0(0) = a_1 = A$$

$$X_0'(t) = a_2 + 2a_3 t$$

$$X_0'(0) = B = a_2$$

$$X_0''(t) = 2a_3$$

$$X_0''(0) = C = 2a_3$$

$$a_3 = \frac{C}{2}$$

$$X_0(t) = A + Bt + \frac{C}{2}t^2$$

(2.12) deki sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminde göre ve $m \geq 1$ için

$$L[X_m(t) - \chi_m X_{m-1}(t)] = \hbar R_m(\vec{X}_{m-1})$$

m . mertebeden deformasyon denklemini başlangıç koşulları ile

$$X_m(0) = 0, \quad X'_m(0) = 0, \quad X''_m(0) = 0, \quad X'''_m(0) = 0 \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} R_m(\vec{X}_{m-1}) &= X'''_{m-1}(t) + a X''_{m-1}(t) + b X'_{m-1}(t) + c X_{m-1}(t) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{m-1} X_j(t) X_{m-1-j}(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$X_m(t) = \chi_m X_{m-1}(t) + \hbar L^{-1} R_m(\vec{X}_{m-1}) \quad (4.57)$$

$m = 1$ için

$$X_1(t) = \chi_1 X_0(t) + \hbar L^{-1} R_1(\vec{X}_0) \quad (4.58)$$

$$R_1(\vec{X}_0) = X'''_0(t) + a X''_0(t) + b X'_0(t) + c X_0(t) - \sum_{j=0}^0 X_j(t) X_0(t) \quad (4.59)$$

$$X_0(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

$$X'_0(t) = a_2 + 2a_3 t$$

$$X''_0(t) = 2a_3$$

$$X'''_0(t) = 0$$

$$R_1(\vec{X}_0) = 0 + 2aa_3 + ba_2 + 2ba_3 t + ca_1 + ca_2 t + ca_3 t^2 - 0 \quad (4.60)$$

$$X_0(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

$$X_1(t) = \hbar \iiint (2aa_3 + ba_2 + 2ba_3 t + ca_1 + ca_2 t + ca_3 t^2) ddd$$

$$= \hbar \iint \left[(2aa_3 + ba_2 + ca_1)t + \frac{(2ba_3 + ca_2)t^2}{2} + \frac{ca_3 t^3}{3} \right] dd$$

$$= \hbar \int \left[\frac{(2aa_3+ba_2+ca_1)t^2}{2} + \frac{(2ba_3+ca_2)t^3}{6} + \frac{ca_3t^4}{12} \right] d$$

$$X_1(t) = \hbar \frac{(2aa_3+ba_2+ca_1)t^3}{6} + \frac{(2ba_3+ca_2)t^4}{12} + \frac{ca_3t^5}{60}$$

⋮

$$X(t) = X_0(t) + X_1(t) + X_2(t) \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} x(t) = & 0.2645502645x10^{-3}t^9ABC + 0.06Ct^4 + Bt + 0.5Ct^2 + A + 0.3At^4 + \\ & 0.1310533334Bt^5 + 0.3184222223x10^{-1}Ct^6 - 0.7738095238x10^{-3}C^2t^8 - \\ & 0.5000000002x10^{-1}A^2t^4 + 0.146Bt^4 + 0.584x10^{-1}Ct^5 - \\ & 0.3333333332x10^{-2}BCt^7 - 0.1999999999x10^{-1}ABt^5 + 0.1460000000At^5 + \\ & 0.4866666667x10^{-1}Bt^6 + 0.6952380953x10^{-2}Ct^7 - 0.2896825397x10^{-3}C^2t^9 - \\ & 0.2433333334x10^{-1}A^2t^5 + 0.05At^6 + 0.7142857140x10^{-2}Bt^7 + \\ & 0.8928571428x10^{-3}Ct^8 - 0.7936507937x10^{-4}C^2t^{10} - 0.025A^2t^6 + \\ & 0.9018759016x10^{-6}C^3t^{12} - 0.2607142857x10^{-2}BCt^8 - \\ & 0.1622222222x10^{-1}ABt^6 - 0.7936507936x10^{-3}BCt^9 - \\ & 0.1428571428x10^{-1}ABt^7 + 0.1082251082x10^{-4}BC^2t^{11} - \\ & 0.6666666666x10^{-2}t^6AC - 0.2317460317x10^{-2}t^7AC - \\ & 0.3571428571x10^{-2}t^8AC + 0.2645502645x10^{-4}t^{10}AC^2 + \\ & 0.4629629629x10^{-4}t^{10}B^2C + 0.5952380951x10^{-3}t^8AB^2 + \\ & 0.5952380953x10^{-3}t^8A^2C + 0.2380952381x10^{-2}t^7A^2B - \\ & 0.3333333332x10^{-2}t^6B^2 - 0.5793650792x10^{-2}t^7B^2 - 0.1785714286x10^{-2}t^8B^2 + \\ & 0.6613756611x10^{-4}t^9B^3 + 0.2777777779x10^{-2}A^3t^6 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$x(t)$ değerlerim (4.62) deki gibidir.

$x(t)$ ' nin beklenen değerleri :

$$\begin{aligned} E[X(t)] = & E[0.2645502645x10^{-3}t^9ABC + 0.06Ct^4 + Bt + 0.5Ct^2 + A + 0.3At^4 + \\ & 0.1310533334Bt^5 + 0.3184222223x10^{-1}Ct^6 - 0.7738095238x10^{-3}C^2t^8 - \\ & 0.5000000002x10^{-1}A^2t^4 + 0.146Bt^4 + 0.584x10^{-1}Ct^5 - \\ & 0.3333333332x10^{-2}BCt^7 - 0.1999999999x10^{-1}ABt^5 + 0.146At^5 + \\ & 0.4866666667x10^{-1}Bt^6 + 0.6952380953x10^{-2}Ct^7 - 0.2896825397x10^{-3}C^2t^9 - \\ & 0.2433333334x10^{-1}A^2t^5 + 0.05At^6 + 0.7142857140x10^{-2}Bt^7 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.8928571428x10^{-3}Ct^8 - 0.7936507937x10^{-4}C^2t^{10} - 0.025A^2t^6 + \\
& 0.9018759016x10^{-6}C^3t^{12} - 0.2607142857x10^{-2}BCt^8 - \\
& 0.1622222222x10^{-1}ABt^6 - 0.7936507936x10^{-3}BCt^9 - \\
& 0.1428571428x10^{-1}ABt^7 + 0.1082251082x10^{-4}BC^2t^{11} - \\
& 0.6666666666x10^{-2}t^6AC - 0.2317460317x10^{-2}t^7AC - \\
& 0.3571428571x10^{-2}t^8AC + 0.2645502645x10^{-4}t^{10}AC^2 + \\
& 0.4629629629x10^{-4}t^{10}B^2C + 0.5952380951x10^{-3}t^8AB^2 + \\
& 0.5952380953x10^{-3}t^8A^2C + 0.2380952381x10^{-2}t^7A^2B - \\
& 0.3333333332x10^{-2}t^6B^2 - 0.5793650792x10^{-2}t^7B^2 - 0.1785714286x10^{-2}t^8B^2 + \\
& 0.6613756611x10^{-4}t^9B^3 + 0.2777777779x10^{-2}A^3t^6] \tag{4.63}
\end{aligned}$$

A, B ve C bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
E[X(t)] = & 0.2645502645x10^{-2}t^9E[A]E[B]E[C] + 0.06t^4E[C] + tE[B] + 0.5t^2E[C] \\
& + E[A] + 0.3t^4E[A] + 0.1310533334t^5E[B] \\
& + 0.3184222223x10^{-1}t^6E[C] - 0.7738095238x10^{-3}t^8E[C^2] \\
& - 0.5000000002x10^{-1}t^4E[A^2] + 0.146t^4E[B] + 0.584x10^{-1}t^5E[C] \\
& - 0.3333333332x10^{-2}t^7E[B]E[C] - 0.1999999999x10^{-1}t^5E[A]E[B] \\
& + 0.146t^5E[A] + 0.4866666667x10^{-1}t^6E[B] \\
& + 0.6952380953x10^{-2}t^7E[C] - 0.2896825397x10^{-3}t^9E[C^2] \\
& - 0.2433333334x10^{-1}t^5E[A^2] + 0.05t^6E[A] \\
& + 0.7142857140x10^{-2}t^7E[B] + 0.8928571428x10^{-3}t^8E[C] \\
& - 0.7936507937x10^{-4}t^{10}E[C^2] - 0.025t^6E[A^2] \\
& + 0.9018759016x10^{-6}t^{12}E[C^3] - 0.2607142857x10^{-2}t^8E[B]E[C] \\
& - 0.1622222222x10^{-1}t^6E[A]E[B] - 0.7936507936x10^{-3}t^9E[B]E[C] \\
& - 0.1428571428x10^{-1}t^7E[A]E[B] \\
& + 0.1082251082x10^{-4}t^{11}E[B]E[C^2] \\
& - 0.6666666666x10^{-2}t^6E[A]E[C] - 0.2317460317x10^{-2}t^7E[A]E[C] \\
& - 0.3571428571x10^{-2}t^8E[A]E[C] \\
& + 0.2645502645x10^{-4}t^{10}E[A]E[C^2] \\
& + 0.4629629629x10^{-4}t^{10}E[B^2]E[C] \\
& + 0.5952380951x10^{-3}t^8E[A]E[B^2] \\
& + 0.5952380953x10^{-3}t^8E[A^2]E[C] \\
& + 0.2380952381x10^{-2}t^7E[A^2]E[B] - 0.3333333332x10^{-2}t^6E[B^2] \\
& - 0.5793650792x10^{-2}t^7E[B^2] - 0.1785714286x10^{-2}t^8E[B^2] \\
& + 0.6613756611x10^{-4}t^9E[B^3]
\end{aligned}$$

$$+0.2777777779x10^{-2}t^6E[A^3] \quad (4.64)$$

$$A \sim U(\alpha, \beta) \quad (4.65)$$

$$B \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (4.66)$$

$$C \sim Gamma(u, v) \quad (4.67)$$

(4.65), (4.66) ve (4.67) da ki formülleri beklenen değer de yerine yazalım:

$$\begin{aligned}
E[X(t)] = & 0.2645502645x10^{-3}t^9 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] [\mu] \left[\frac{v}{u} \right] + 0.06t^4 \left[\frac{v}{u} \right] + t[\mu] + 0.5t^2 \left[\frac{v}{u} \right] \\
& + \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] + 0.t^4 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] + 0.1310533334t^5[\mu] \\
& + 0.3184222223x10^{-1}t^6 \left[\frac{v}{u} \right] - 0.7738095238x10^{-3}t^8 \left[\frac{v(v+1)}{u^2} \right] \\
& - 0.5000000002x10^{-1}t^4 \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^2 \right] + 0.14t^4[\mu] \\
& + 0.5840000000x10^{-1}t^5 \left[\frac{v}{u} \right] - 0.3333333332x10^{-2}t^7[\mu] \left[\frac{v}{u} \right] \\
& - 0.1999999999x10^{-1}t^5 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] [\mu] + 0.14t^5 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \\
& + 0.4866666667x10^{-1}t^6[\mu] + 0.6952380953x10^{-2}t^7 \left[\frac{v}{u} \right] \\
& - 0.2896825397x10^{-3}t^9 \left[\frac{v(v+1)}{u^2} \right] \\
& - 0.2433333334x10^{-1}t^5 \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^2 \right] + 0.05t^6 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \\
& + 0.7142857140x10^{-2}t^7[\mu] + 0.8928571428x10^{-3}t^8 \left[\frac{v}{u} \right] \\
& - 0.7936507937x10^{-4}t^{10} \left[\frac{v(v+1)}{u^2} \right] \\
& - 0.2500000000x10^{-1}t^6 \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^2 \right] \\
& + 0.9018759016x10^{-6}t^{12} \left[\frac{v(v^2+3v+2)}{u^3} \right] \\
& - 0.2607142857x10^{-2}t^8[\mu] \left[\frac{v}{u} \right] - 0.1622222222x10^{-1}t^6 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] [\mu] \\
& - 0.7936507936x10^{-3}t^9[\mu] \left[\frac{v}{u} \right] - 0.1428571428x10^{-1}t^7 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] [\mu] \\
& + 0.1082251082x10^{-4}t^{11}[\mu] \left[\frac{v(v+1)}{u^2} \right] \\
& - 0.6666666666x10^{-2}t^6 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \left[\frac{v}{u} \right] \\
& - 0.2317460317x10^{-2}t^7 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \left[\frac{v}{u} \right] \\
& - 0.3571428571x10^{-2}t^8 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \left[\frac{v}{u} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.2645502645x10^{-4}t^{10} \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \left[\frac{v(v+1)}{u^2} \right] \\
& + 0.4629629629x10^{-4}t^{10} [\mu^2 + \sigma^2] \left[\frac{v}{u} \right] \\
& + 0.5952380951x10^{-3}t^8 \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] [\mu^2 + \sigma^2] \\
& + 0.5952380953x10^{-3}t^8 \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^2 \right] \left[\frac{v}{u} \right] \\
& + 0.2380952381x10^{-2}t^7 \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^2 \right] [\mu] \\
& - 0.3333333332x10^{-2}t^6 [\mu^2 + \sigma^2] - 0.5793650792x10^{-2}t^7 [\mu^2 + \sigma^2] \\
& - 0.1785714286x10^{-2}t^8 [\mu^2 + \sigma^2] \\
& + 0.6613756611x10^{-4}t^9 [\mu^3 + 3\mu\sigma^2] \\
& + 0.2777777779x10^{-2}t^6 \left[\frac{1}{4}\beta^3 + \frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\alpha^3 \right] \tag{4.68}
\end{aligned}$$

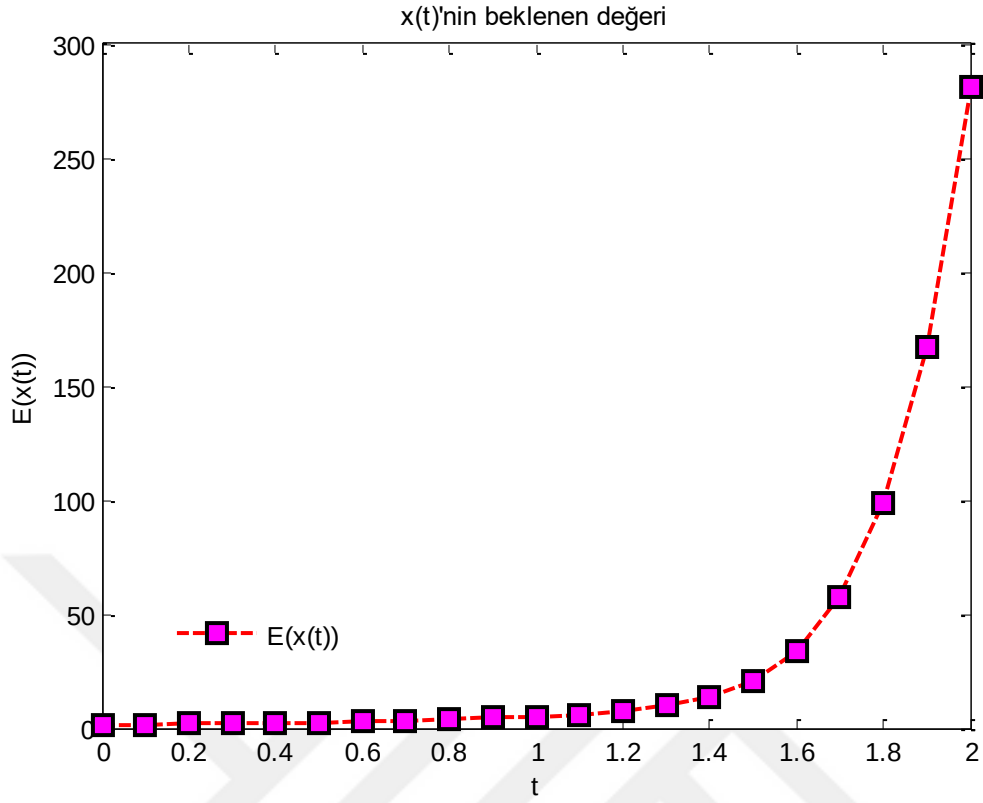
(4.68) elde edilir. Düzgün dağılıma sahip, $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 2)$, normal dağılıma sahip, $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(1, 3)$ normal dağılıma sahip, $C \sim \text{Gamma}(u, v) \rightarrow C \sim \text{Gamma}(2, 3)$ özel değerleri için beklenen değer:

$$\begin{aligned}
E[X(t)] = & 0.2645502645x10^{-3}t^9 \left[\frac{3}{2} \right] [1] \left[\frac{3}{2} \right] + 0.06t^4 \left[\frac{3}{2} \right] + t[1] + 0.5t^2 \left[\frac{3}{2} \right] + \left[\frac{3}{2} \right] \\
& + 0.3t^4 \left[\frac{3}{2} \right] + 0.1310533334t^5[1] + 0.3184222223x10^{-1}t^6 \left[\frac{3}{2} \right] \\
& - 0.7738095238x10^{-3}t^8[3] - 0.5000000002x10^{-1}t^4 \left[\frac{7}{3} \right] + 0.146t^4[1] \\
& + 0.584x10^{-1}t^5 \left[\frac{3}{2} \right] - 0.3333333332x10^{-2}t^7[1] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& - 0.1999999999x10^{-1}t^5 \left[\frac{3}{2} \right] [1] + 0.1460000000t^5 \left[\frac{3}{2} \right] \\
& + 0.4866666667x10^{-1}t^6[1] + 0.6952380953x10^{-2}t^7 \left[\frac{3}{2} \right] \\
& - 0.2896825397x10^{-3}t^9[3] - 0.2433333334x10^{-1}t^5 \left[\frac{7}{3} \right] \\
& + 0.5000000000x10^{-1}t^6 \left[\frac{3}{2} \right] + 0.7142857140x10^{-2}t^7[1] \\
& + 0.8928571428x10^{-3}t^8 \left[\frac{3}{2} \right] - 0.7936507937x10^{-4}t^{10}[3] \\
& - 0.025t^6 \left[\frac{7}{3} \right] + 0.9018759016x10^{-6}t^{12} \left[\frac{15}{2} \right] \\
& - 0.2607142857x10^{-2}t^8[1] \left[\frac{3}{2} \right] - 0.1622222222x10^{-1}t^6 \left[\frac{3}{2} \right] [1] \\
& - 0.7936507936x10^{-3}t^9[1] \left[\frac{3}{2} \right] - 0.1428571428x10^{-1}t^7 \left[\frac{3}{2} \right] [1] \\
& + 0.1082251082x10^{-4}t^{11}[1][3] - 0.6666666666x10^{-2}t^6 \left[\frac{3}{2} \right] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& - 0.2317460317x10^{-2}t^7 \left[\frac{3}{2} \right] \left[\frac{3}{2} \right] - 0.3571428571x10^{-2}t^8 \left[\frac{3}{2} \right] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& + 0.2645502645x10^{-4}t^{10} \left[\frac{3}{2} \right] [3] + 0.4629629629x10^{-4}t^{10}[10] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& + 0.5952380951x10^{-3}t^8 \left[\frac{3}{2} \right] [10] + 0.5952380953x10^{-3}t^8 \left[\frac{7}{3} \right] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& + 0.2380952381x10^{-2}t^7 \left[\frac{7}{3} \right] [1] - 0.3333333332x10^{-2}t^6[10] \\
& - 0.5793650792x10^{-2}t^7[10] - 0.1785714286x10^{-2}t^8[10] \\
& + 0.6613756611x10^{-4}t^9[28] \\
& + 0.2777777779x10^{-2}t^6 \left[\frac{15}{4} \right]
\end{aligned} \tag{4.69}$$

(4.69) de hesaplama yapılırsa:

$$\begin{aligned}
E[X(t)] = & 0.5952380952x10^{-3}t^9 + 0.09t^4 + t + 2.25t^2 + 1.5 + 0.45t^4 \\
& + 0.1310533334t^5 + 0.4776333334x10^{-1}t^6 - 2.321428571x10^{-3}t^8 \\
& - 1.166666667x10^{-1}t^4 + 0.1460000000t^4 + 0.876x10^{-1}t^5 \\
& - 0.4999999998x10^{-2}t^7 - 0.2999999998x10^{-1}t^5 + \\
& 0.2190000000t^5 + 0.4866666667x10^{-1}t^6 + 1.042857143x10^{-2}t^7 \\
& - 0.8690476191x10^{-3}t^9 - 0.5677777779x10^{-1}t^5 \\
& + 0.7500000000x10^{-1}t^6 + 0.7142857140x10^{-2}t^7 \\
& + 1.339285714x10^{-3}t^8 - 2.380952381x10^{-4}t^{10} \\
& - 0.5833333333x10^{-1}t^6 + 6.764069262x10^{-6}t^{12} \\
& - 0.3910714286x10^{-2}t^8 - 0.2433333333x10^{-1}t^6 \\
& - 1.190476190x10^{-3}t^9 - 0.2142857142x10^{-1}t^7 \\
& + 0.3246753246x10^{-4}t^{11} - 1.500000000x10^{-2}t^6 \\
& - 0.5214285714x10^{-2}t^7 - 0.8035714284x10^{-2}t^8 \\
& + 1.190476190x10^{-4}t^{10} + 6.944444444x10^{-4}t^{10} \\
& + 8.928571426x10^{-3}t^8 + 2.083333334x10^{-3}t^8 + \\
& 0.5555555556x10^{-2}t^7 - 3.333333332x10^{-2}t^6 - 5.793650792x10^{-2}t^7 - \\
& 1.785714286x10^{-2}t^8 + 18.51851851x10^{-4}t^9 + 1.041666667x10^{-2}t^6
\end{aligned} \tag{4.70}$$

(4.70) şeklinde elde edilir.



Şekil 1. denklem (4.70)'un $x(t)$ beklenen değeri

(4.65) de ki $x(t)$ ' in Varyans değeri:

$$\begin{aligned}
 Var(x(t)) = & (0.2645502645x10^{-3}t^9)^2Var[A]Var[B]Var[C] + (0.06t^4)^2Var[C] + \\
 & t^2Var[B] + (0.5t^2)^2Var[C] + Var[A] + (0.3t^4)^2Var[A] + \\
 & (0.1310533334t^5)^2Var[B] + (0.3184222223x10^{-1}t^6)^2Var[C] - \\
 & (0.7738095238x10^{-3}t^8)^2Var[C^2] - (0.5000000002x10^{-1}t^4)^2Var[A^2] + \\
 & (0.146t^4)^2Var[B] + (0.584x10^{-1}t^5)^2Var[C] - \\
 & (0.3333333332x10^{-2}t^7)^2Var[B]Var[C] - (0.1999999999x10^{-1}t^5)^2Var[A]Var[B] + \\
 & (0.146t^5)^2Var[A] + (0.4866666667x10^{-1}t^6)^2Var[B] + \\
 & (0.6952380953x10^{-2}t^7)^2Var[C] - (0.2896825397x10^{-3}t^9)Var[C^2] - \\
 & (0.2433333334x10^{-1}t^5)^2Var[A^2] + (0.05t^6)^2Var[A] + \\
 & (0.7142857140x10^{-2}t^7)^2Var[B] + (0.8928571428x10^{-3}t^8)^2Var[C] - \\
 & (0.7936507937x10^{-4}t^{10})^2Var[C^2] - (0.025t^6)^2Var[A^2] + \\
 & (0.9018759016x10^{-6}t^{12})^2Var[C^3] - (0.2607142857x10^{-2}t^8)^2Var[B]Var[C] - \\
 & (0.1622222222x10^{-1}t^6)^2Var[A]Var[B] - (0.7936507936x10^{-3}t^9)^2Var[B]Var[C] - \\
 & (0.1428571428x10^{-1}t^7)^2Var[A]Var[B] + \\
 & (0.1082251082x10^{-4}t^{11})^2Var[B]Var[C^2] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (0.6666666666x10^{-2}t^6)^2 Var[A]Var[C] - (0.2317460317x10^{-2}t^7)^2 Var[A]Var[C] - \\
& (0.3571428571x10^{-2}t^8)^2 Var[A]Var[C] + \\
& (0.2645502645x10^{-4}t^{10})^2 Var[A]Var[C^2] + \\
& (0.4629629629x10^{-4}t^{10})^2 Var[B^2]Var[C] + \\
& (0.5952380951x10^{-3}t^8)^2 Var[A]Var[B^2] + \\
& (0.5952380953x10^{-3}t^8)^2 Var[A^2]Var[C] + \\
& (0.2380952381x10^{-2}t^7)^2 Var[A^2]Var[B] - (0.3333333332x10^{-2}t^6)^2 Var[B^2] - \\
& (0.5793650792x10^{-2}t^7)^2 Var[B^2] - (0.1785714286x10^{-2}t^8)^2 Var[B^2] + \\
& (0.6613756611x10^{-4}t^9)^2 Var[B^3] + (0.2777777779x10^{-2}t^6)^2 Var[A^3] \quad (4.71)
\end{aligned}$$

(4.71) şeklinde elde edilir.

(4.65), (4.66) ve (4.67) da ki formüllerin de varyans değerlerini yerine yazalım:

$$\begin{aligned}
Var(X(t)) = & (0.2645502645x10^{-3}t^9)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] [\sigma^2] \left[\frac{v}{u^2} \right] + \\
& (0.06t^4)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] + t^2[\sigma^2] + (0.5t^2)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] + \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] + (0.3t^4)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \right. \\
& \left. \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] + (0.1310533334t^5)^2 Var[\sigma^2] + (0.3184222223x10^{-1}t^6)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] - \\
& (0.7738095238x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{2v(2v^2+5v+3)}{u^4} \right] - (0.5000000002x10^{-1}t^4)^2 \left[\frac{4}{45}\beta^4 - \right. \\
& \left. \frac{1}{45}\beta^3\alpha - \frac{2}{15}\beta^2\alpha^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta + \frac{4}{45}\alpha^4 \right] + (0.146t^4)^2[\sigma^2] + (0.584x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] - \\
& (0.3333333332x10^{-2}t^7)^2[\sigma^2] \left[\frac{v}{u^2} \right] - (0.1999999999x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \right. \\
& \left. \frac{1}{12}\alpha^2 \right] [\sigma^2] + (0.146t^5)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] + (0.4866666667x10^{-1}t^6)^2[\sigma^2] + \\
& (0.6952380953x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] - (0.2896825397x10^{-3}t^9)^2 \left[\frac{2v(2v^2+5v+3)}{u^4} \right] - \\
& (0.2433333334x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{4}{45}\beta^4 - \frac{1}{45}\beta^3\alpha - \frac{2}{15}\beta^2\alpha^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta + \frac{4}{45}\alpha^4 \right] + \\
& (0.05t^6)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] + (0.7142857140x10^{-2}t^7)^2[\sigma^2] + \\
& (0.8928571428x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{v}{u^2} \right] - (0.7936507937x10^{-4}t^{10})^2 \left[\frac{2v(2v^2+5v+3)}{u^4} \right] - \\
& (0.025t^6)^2 \left[\frac{4}{45}\beta^4 - \frac{1}{45}\beta^3\alpha - \frac{2}{15}\beta^2\alpha^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta + \frac{4}{45}\alpha^4 \right] + \\
& (0.9018759016x10^{-6}t^{12})^2 \left[\frac{3v(3v^4+24v^3+71v^2+90v+40)}{u^6} \right] - \\
& (0.2607142857x10^{-2}t^8)^2[\sigma^2] \left[\frac{v}{u^2} \right] - (0.1622222222x10^{-1}t^6)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \right. \\
& \left. \frac{1}{12}\alpha^2 \right] [\sigma^2] - (0.7936507936x10^{-3}t^9)^2[\sigma^2] \left[\frac{v}{u^2} \right] - (0.1428571428x10^{-1}t^7)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] [\sigma^2] + (0.1082251082x10^{-4}t^{11})^2 [\sigma^2] \left[\frac{2v(2v^2+5v+3)}{u^4} \right] - \\
& (0.6666666666x10^{-2}t^6)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] \left[\frac{v}{u^2} \right] - \\
& (0.2317460317x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] \left[\frac{v}{u^2} \right] - \\
& (0.3571428571x10^{-2}t^8)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] \left[\frac{v}{u^2} \right] + \\
& (0.2645502645x10^{-4}t^{10})^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] \left[\frac{2v(2v^2+5v+3)}{u^4} \right] + \\
& (0.4629629629x10^{-4}t^{10})^2 [4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] \left[\frac{v}{u^2} \right] + (0.5952380951x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{1}{12}\beta^2 - \right. \\
& \left. \frac{1}{6}\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha^2 \right] Var[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] + (0.5952380953x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{4}{45}\beta^4 - \frac{1}{45}\beta^3\alpha - \right. \\
& \left. \frac{2}{15}\beta^2\alpha^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta + \frac{4}{45}\alpha^4 \right] \left[\frac{v}{u^2} \right] + (0.2380952381x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{4}{45}\beta^4 - \frac{1}{45}\beta^3\alpha - \right. \\
& \left. \frac{2}{15}\beta^2\alpha^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta + \frac{4}{45}\alpha^4 \right] [\sigma^2] - (0.3333333332x10^{-2}t^6)^2 [4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] - \\
& (0.5793650792x10^{-2}t^7)^2 [4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] - (0.1785714286x10^{-2}t^8)^2 [4\mu^2\sigma^2 + \\
& 2\sigma^4] + (0.6613756611x10^{-4}t^9)^2 [\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - 1\mu^6 - 6\mu^4\sigma^2 - 9\mu^2\sigma^4] + \\
& (0.2777777779x10^{-2}t^6)^2 \left[\frac{9}{112}\beta^6 + \frac{1}{56}\alpha\beta^5 - \frac{5}{112}\alpha^2\beta^4 - \frac{3}{28}\alpha^3\beta^3 - \frac{5}{112}\alpha^4\beta^2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{56}\alpha^5\beta + \frac{9}{112}\alpha^6 \right] \tag{4.72}
\end{aligned}$$

(4.72) şeklinde elde edilir. Düzgün dağılıma sahip, $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 2)$, normal dağılıma sahip, $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(1, 3)$, gamma dağılımına sahip, $C \sim Gamma(u, v) \rightarrow C \sim Gamma(2, 3)$ özel değerleri için varyans değeri

$$\begin{aligned}
Var(X(t)) = & (0.2645502645x10^{-3}t^9)^2 \left[\frac{9}{16} \right] + (0.06t^4)^2 \left[\frac{3}{4} \right] + t^2[3] + (0.5t^2)^2 \left[\frac{3}{4} \right] + \\
& \left[\frac{1}{12} \right] + (0.3t^4)^2 \left[\frac{1}{12} \right] + (0.1310533334t^5)^2[3] + (0.3184222223x10^{-1}t^6)^2 \left[\frac{3}{4} \right] - \\
& (0.7738095238x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{27}{2} \right] - (0.5000000002x10^{-1}t^4)^2 \left[\frac{1054}{675} \right] + \\
& (0.1460000000t^4)^2[3] + (0.584x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{3}{4} \right] - (0.3333333332x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{9}{4} \right] - \\
& (0.1999999999x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{1}{4} \right] + (0.146t^5)^2 \left[\frac{1}{12} \right] + (0.4866666667x10^{-1}t^6)^2[3] + \\
& (0.6952380953x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{3}{4} \right] - (0.2896825397x10^{-3}t^9)^2 \left[\frac{27}{2} \right] - \\
& (0.2433333334x10^{-1}t^5)^2 \left[\frac{1054}{675} \right] + (0.05t^6)^2 \left[\frac{1}{12} \right] + (0.7142857140x10^{-2}t^7)^2[3] + \\
& (0.8928571428x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{3}{4} \right] - (0.7936507937x10^{-4}t^{10})^2 \left[\frac{27}{2} \right] - (0.025t^6)^2 \left[\frac{1054}{675} \right] + \\
& (0.9018759016x10^{-6}t^{12})^2 \left[\frac{1035}{4} \right] - (0.2607142857x10^{-2}t^8)^2 \left[\frac{9}{4} \right] -
\end{aligned}$$

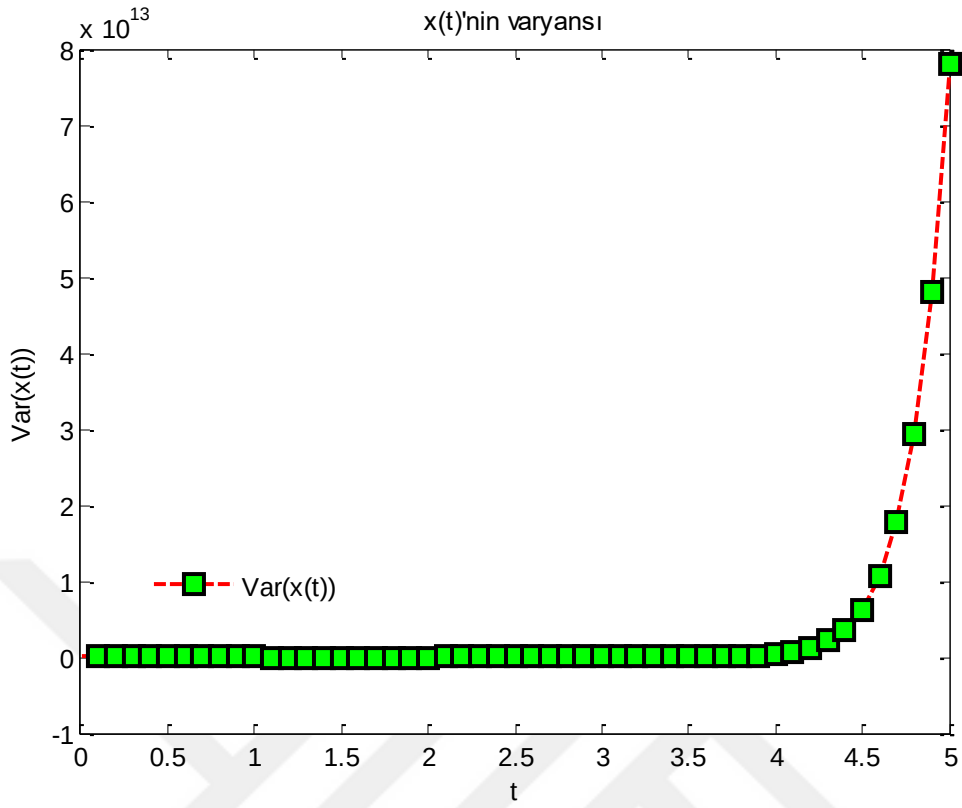
$$\begin{aligned}
& (0.1622222222x10^{-1}t^6)^2 \left[\frac{1}{4} \right] - (0.7936507936x10^{-3}t^9)^2 \left[\frac{9}{4} \right] - \\
& (0.1428571428x10^{-1}t^7)^2 \left[\frac{1}{4} \right] + (0.1082251082x10^{-4}t^{11})^2 \left[\frac{81}{2} \right] - \\
& (0.6666666666x10^{-2}t^6)^2 \left[\frac{1}{16} \right] - (0.2317460317x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{1}{16} \right] - \\
& (0.3571428571x10^{-2}t^8)^2 \left[\frac{1}{16} \right] + (0.2645502645x10^{-4}t^{10})^2 \left[\frac{9}{8} \right] + \\
& (0.4629629629x10^{-4}t^{10})^2 \left[\frac{297}{2} \right] + (0.5952380951x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{33}{2} \right] + \\
& (0.5952380953x10^{-3}t^8)^2 \left[\frac{527}{450} \right] + (0.2380952381x10^{-2}t^7)^2 \left[\frac{1054}{225} \right] - \\
& (0.3333333332x10^{-2}t^6)^2 [198] - (0.5793650792x10^{-2}t^7)^2 [198] - \\
& (0.1785714286x10^{-2}t^8)^2 [198] + (0.6613756611x10^{-4}t^9)^2 [-54] + \\
& (0.2777777779x10^{-2}t^6)^2 \left[\frac{457}{112} \right]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

(4.73) elde edilir.

(4.73)'de hesaplama yapılırsa:

$$\begin{aligned}
Var(X(t)) = & 0.03936759888x10^{-6}t^{18} + 0.2700000000x10^{-2}t^8 + 3t^2 + \\
& 0.1875000000t^4 + \frac{1}{12} + 0.007500000000t^8 + 0.05152492860t^{10} + \\
& 0.07604453378x10^{-2}t^{12} - 8.083545918x10^{-6}t^{16} - 0.3903703707x10^{-2}t^8 + \\
& 0.06394800000t^8 + 0.2557920000x10^{-2}t^{10} - 0.2499999998x10^{-4}t^{14} - \\
& 0.009999999990x10^{-2}t^{10} + 0.001776333333t^{10} + 0.7105333335x10^{-2}t^{12} + \\
& 0.3625170069x10^{-4}t^{14} - 1.132865646x10^{-6}t^{18} - 0.09245705354x10^{-2}t^{10} + \\
& 0.02083333333x10^{-2}t^{12} + 1.530612244x10^{-4}t^{14} + 0.5978954080x10^{-6}t^{16} - \\
& 8.503401361x10^{-8}t^{20} - 0.09759259259x10^{-2}t^{12} + 210.4621117x10^{-12}t^{24} - \\
& 0.1529368622x10^{-4}t^{16} - 0.006579012345x10^{-2}t^{12} - 1.417233560x10^{-6}t^{18} - \\
& 0.005102040813x10^{-2}t^{14} + 0.4743632986x10^{-8}t^{22} - 0.02777777777x10^{-4}t^{12} - \\
& 0.003356638951x10^{-4}t^{14} - 0.007971938775x10^{-4}t^{16} + \\
& 0.07873519776x10^{-8}t^{20} + 31.82870369x10^{-8}t^{20} + 5.846088434x10^{-6}t^{16} + \\
& 0.4149344924x10^{-6}t^{16} + 0.2655580751x10^{-4}t^{14} - 21.99999998x10^{-4}t^{12} - \\
& 66.46145121x10^{-4}t^{14} - 6.313775512x10^{-4}t^{16} - 23.62055932x10^{-8}t^{18} + \\
& 0.3148423724x10^{-4}t^{12}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

(4.74) elde edilir.



Şekil 2. denklem (4.74)'un $x(t)$ varyans değeri

Örnek 2:

$$u' = ku(1 - u)(2 - u), \quad u(0) = 0.5 \quad (4.75)$$

başlangıç değer probleminde $k \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow k \sim N(1, 2)$ standart normal dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

(4.75) denklemin HAM metodu uygulanırsa;

Lineer operatör:

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}$$

Lineer olmayan operatör;

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - k\phi(x, t; q)(1 - \phi(x, t; q))(2 - \phi(x, t; q))$$

$$L(C_1(x)) = 0 \quad c_1(x) \text{ integrasyon sabiti}$$

$$(L[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{u}_m, t)) \quad (4.76)$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - k\phi(x, t; q)(1 - \phi(x, t; q))(2 - \phi(x, t; q))$$

ve $m \geq 1$ için denklem (4.77)'in m . mertebeden deformasyon denkleminin çözümü:

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + hH(r, t)L^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})]$$

$m \geq 1$, $\chi_m = 1$, $h = -1$ ve $H(r, t) = 1$ yapılırsa

$$R_1(\vec{u}_0(t)) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} - ku_0(t)(1 - u_0(t))(2 - u_0(t))$$

$$u_1(t) = \chi_1 u_0(t) + h \int R_1(u_0(t))dt$$

$$u_0(t) = 0.5$$

$$u_1(t) = 0.5 + 0.3750000000kt$$

$$u_2(t) = 0.5 + 0.3750000000kt - 0.04687500000k^2t^2 \\ - 0.07031250000k^3t^3 + 0.01318359375k^4t^4$$

$$u_3(t) = 0.5 + 0.3750000000kt - 0.04687500000k^2t^2 \\ - 0.06640625000k^3t^3 + 0.03076171875k^4t^4 \\ + 0.01054687500k^5t^5 - 0.008651733398k^6t^6 \\ + 0.001044682094k^7t^7 + 0.0008111000061k^8t^8 \\ - 0.0003283023834k^9t^9 + 0.00001086294651k^{10}t^{10} \\ + 0.00001555376432k^{11}t^{11} - 0.305520370610^{-5}k^{12}t^{12} \\ + 0.176261752310^{-6}k^{13}t^{13}$$

⋮

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$$

$$\begin{aligned}
&= 3(0.5) + 3(0.3750000000k)t - 2(0.04687500000k^2)t^2 \\
&\quad - (0.07031250000k^3 + -0.06640625000k^3)t^3 \\
&\quad + (0.01318359375k^4 + +0.03076171875k^4)t^4 \\
&\quad + (0.01054687500k^5)t^5 - (0.008651733398k^6)t^6 \\
&\quad + (0.001044682094k^7)t^7 + (0.0008111000061k^8)t^8 \\
&\quad - (0.0003283023834k^9)t^9 + (0.00001086294651k^{10})t^{10} \\
&\quad + (0.00001555376432k^{11})t^{11} - (0.305520370610^{-5}k^{12})t^{12} \\
&\quad + (0.176261752310^{-6}k^{13})t^{13} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= E[1.5 + 3(0.3750000000k)t - 2(0.04687500000k^2)t^2 \\
&\quad - (0.07031250000k^3 + -0.06640625000k^3)t^3 \\
&\quad + (0.01318359375k^4 + +0.03076171875k^4)t^4 \\
&\quad + (0.01054687500k^5)t^5 + \dots]
\end{aligned}$$

- $E[C] = C, C \rightarrow \text{sabit}$

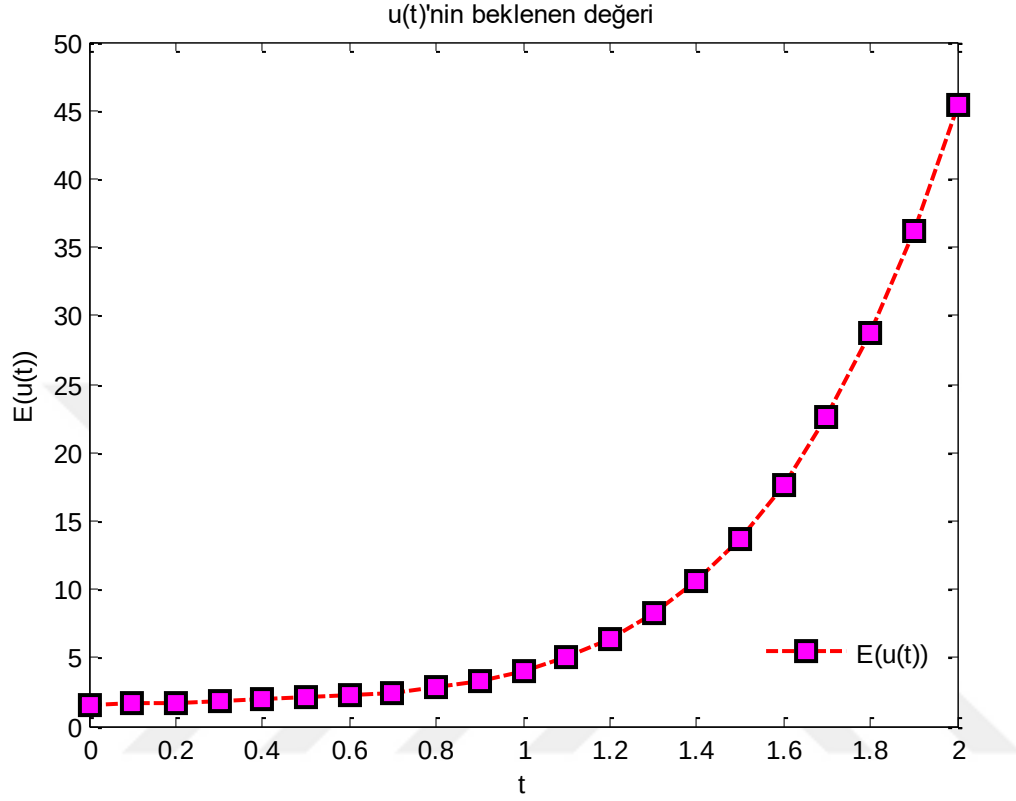
Özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= 1.5 + 3(0.3750000000)tE[k] - 2(0.04687500000)t^2E[k^2] \\
&\quad - E[k^3]((0.07031250000) - (0.06640625000))t^3 \\
&\quad + E[k^4]((0.01318359375) + 0.03076171875)t^4 \\
&\quad + (0.01054687500t^5)E[k^5] + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= 1.5 + 3(0.3750000000)t[\mu] - 2(0.04687500000)t^2[\mu^2 + \sigma^2] \\
&\quad - [\mu^3 + 3\mu\sigma^2]((0.07031250000) - (0.06640625000))t^3 \\
&\quad + [\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 \\
&\quad + 3\sigma^4]((0.01318359375) + 0.03076171875)t^4 \\
&\quad + (0.01054687500t^5)[\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4] + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= 1.5 + 3(0.3750000000)t[1] - 2(0.04687500000)t^2[3] \\
&\quad - [7]((0.07031250000) - (0.06640625000))t^3 \\
&\quad + [25]((0.01318359375) + 0.03076171875)t^4 \\
&\quad + (0.01054687500)t^5[81] + \dots
\end{aligned}$$

$$E[u(t)] = 1.5 + 1.125t - 0.28125t^2 - 0.2734375000t^3 + 1.098632812t^4 + 0.8542968750t^5 + \dots \quad (4.77)$$



Şekil 3. denklem (4.77)'deki $u(t)$ 'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[u(t)] = & Var[1.5 + 3(0.3750000000k)t - 2(0.04687500000k^2)t^2 \\ & - (0.07031250000k^3 + -0.06640625000k^3)t^3 \\ & + (0.01318359375k^4 + +0.03076171875k^4)t^4 \\ & + (0.01054687500k^5)t^5 + \dots] \end{aligned}$$

- $Var[C] = 0, C \rightarrow sabit$

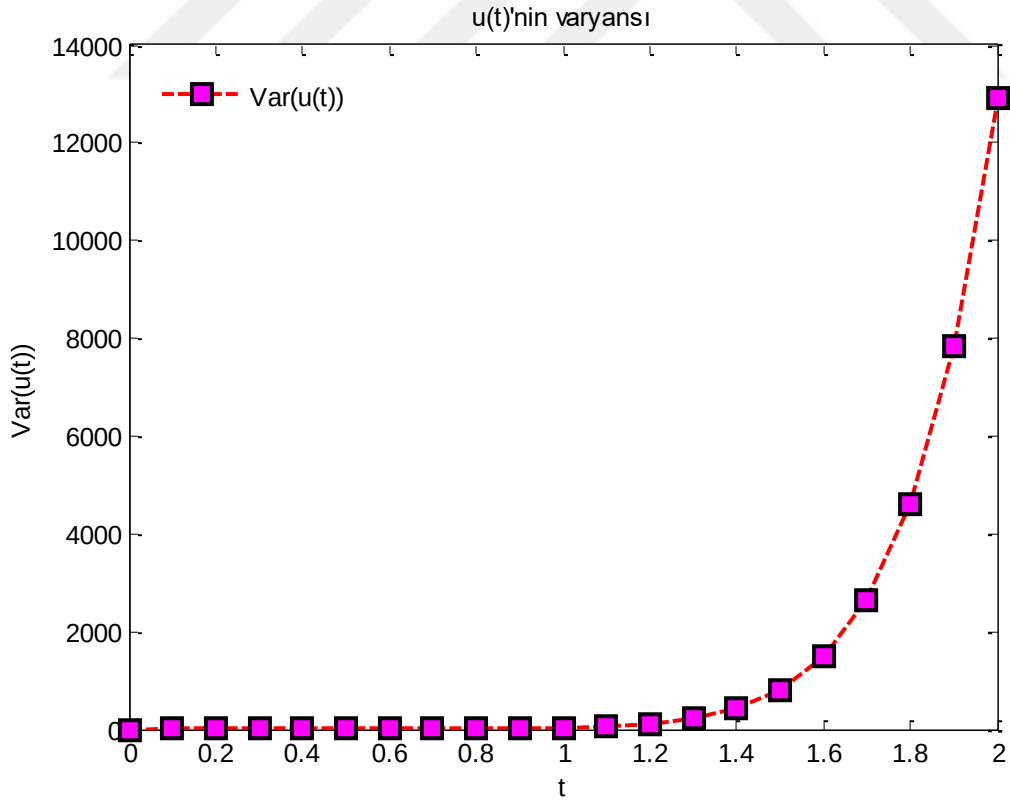
Özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} Var[u(t)] = & 0 + 9(0.3750000000)^2 t^2 Var[k] \\ & - 4(0.04687500000)^2 t^4 Var[k^2] - ((0.07031250000)^2 \\ & - (0.06640625000)^2) t^6 Var[k^3] \\ & + ((0.01318359375)^2 + (0.03076171875)^2) t^8 Var[k^4] \\ & + (0.01054687500)^2 t^{10} Var[k^5] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u(t)] = & 0 + 9(0.3750000000)^2 t^2 [\sigma^2] \\
& - 4(0.04687500000)^2 t^4 [4\mu^2 \sigma^2 + 2\sigma^4] - ((0.07031250000)^2 \\
& - (0.06640625000)^2) t^6 [15\sigma^6 + 9\mu^4 \sigma^2 + 36\mu^2 \sigma^4] \\
& + ((0.01318359375)^2 + (0.03076171875)^2) t^8 [96\sigma^8 \\
& + 384\mu^2 \sigma^6 + 16\mu^6 \sigma^2 + 168\mu^4 \sigma^4] \\
& + (0.01054687500)^2 t^{10} [945\sigma^{10} + 4500\mu^2 \sigma^8 + 25\mu^8 \sigma^2 \\
& + 2850\mu^4 \sigma^6 + 500\mu^6 \sigma^4] + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u(t)] = & 0 + 9(0.3750000000)^2 t^2 [2] - 4(0.04687500000)^2 t^4 [16] \\
& - ((0.07031250000)^2 - (0.06640625000)^2) t^6 [282] \\
& + ((0.01318359375)^2 + (0.03076171875)^2) t^8 [5312] \\
& + (0.01054687500)^2 t^{10} [99858] + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u(t)] = & 2.531250000 t^2 - 0.1406250000 t^4 - 0.1506042480 t^6 + \\
& 5.949920656 t^8 + 11.10786164 t^{10} + \dots
\end{aligned} \tag{4.78}$$



Şekil 4. denklem (4.78)'deki $u(t)$ 'nin varyans değeri

$u(t)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[u(t)] = \sqrt{Var[u(t)]}$$

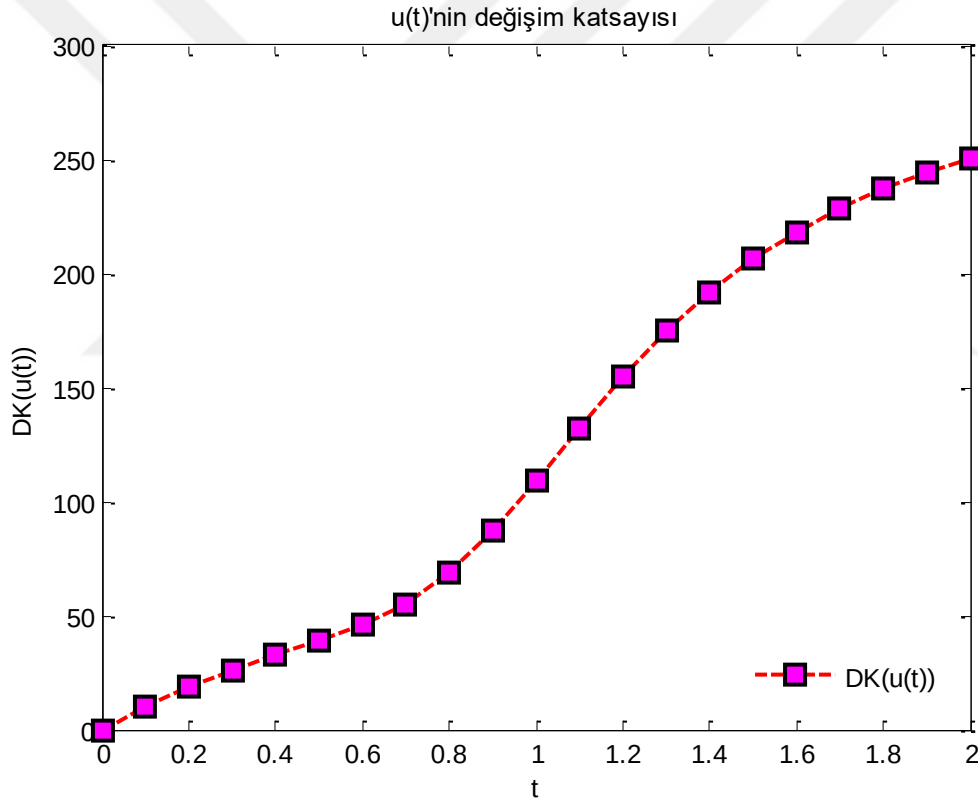
$$= \sqrt{2.531250000t^2 - 0.1406250000t^4 - 0.1506042480t^6 + 5.949920656t^8 + 11.10786164t^{10}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(t)]}{E[u(t)]} \times 100 =$$

$$\frac{\sqrt{2.531250000t^2 - 0.1406250000t^4 - 0.1506042480t^6 + 5.949920656t^8 + 11.10786164t^{10}}}{1.5 + 1.125t - 0.28125t^2 - 0.2734375000t^3 + 1.098632812t^4 + 0.8542968750t^5} \times 100 \quad (4.79)$$

$u(t)$ için değişim katsayısı grafiği:

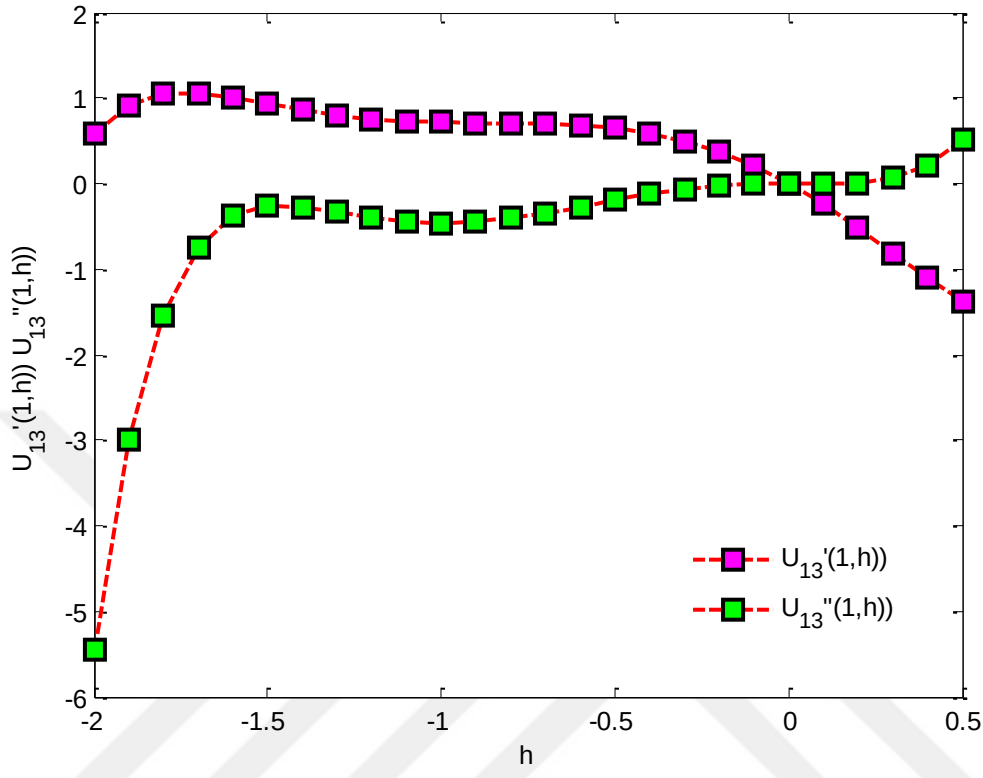


Şekil 5. denklem (4.79)'deki $u(t)$ 'nin değişim katsayı değeri

Burada uygun bir h yakınsama parametresi seçmek için $U_m(t, h) = \sum_{n=0}^m u_n(t, h)$ toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada $u_{13}(x, h)$ 'a kadar Maple ile elde edilirse, çözüm serisi:

$$u(t) \approx U_{13}(t, h)$$

şeklinde gerçek çözümüne yakınsar. Ancak burada uygun h parametresi belirlemek gerekir. h 'ın uygun aralığını bulmak için, $U'_{13}(1, h)$ ve $U''_{13}(1, h)$ grafiklerini çizersek;



Şekil 6. denklem (4.79)'in h eğrisi değeri

Şekil 6'daki $U'_{13}(1, h)$ ile $U''_{13}(1, h)$ grafiklerinin x eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa h 'ın $[-0.1, 0.3]$ aralığında olması gerektiğini gösterir.

Tablo 1. (4.79) probleminin uygun h belirleme tablosu

t_i	$U(t, h)$	h
0	0	$h \rightarrow 1$
0.2	$-0.8009772650 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow 1.708550183$
0.4	$0.6093339164 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow 1.146786593$
0.6	$-0.4976242494 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow 0.8900689737$
0.8	$0.1840347227 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow 0.7363858107$
1	$-0.3655075399 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow 0.6320727783$

Seçilebilecek en iyi h yakınsaklık kontrol parametresinin Tablo 1. tablosunda görüldüğü gibi yaklaşık $h = 0.736$ olduğu görülür.

Örnek 3:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t}y' + y = 6A + 12Bt + At^2 + Bt^3 \quad (4.80)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$A \sim \text{Gamma}(u, v) \rightarrow A \sim \text{Gamma}(1, 3)$ Gamma dağılıma sahip, $B \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \rightarrow B \sim \text{Beta}(1, 5)$ Beta dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Tam çözüm:

$$y(t) = At^2 + Bt^3$$

(4.80) denkleminde HAM. yöntemi uygulanırsa;

Lineer operatör:

$$L[\phi(t, q)] = \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2}$$

Lineer olmayan operatör;

$$N[\phi(t, q)] = \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \frac{2}{t} \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \phi(t, q) - 6A - 12Bt - At^2 - Bt^3$$

$L(C_1(t)) = 0$ $c_1(x)$ integrasyon sabiti

$$(L[y_m(t) - \chi_m y_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{y}_m, t)) \quad (4.81)$$

$$R_m(\vec{y}_{m-1}) = \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \frac{2}{t} \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \phi(t, q) - 6A - 12Bt - At^2 - Bt^3$$

ve $m \geq 1$ için denklem (4.81)'in m . mertebeden deformasyon denkleminin çözümü:

$$y_m(t) = \chi_m y_{m-1}(t) + hH(r, t)L^{-1}[R_m(\vec{y}_{m-1})]$$

$m \geq 1, \chi_m = 1$, ve $H(r, t) = 1$ yapılırsa

$$\begin{aligned} R_1(y_0(t)) &= \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + \frac{2}{t} \frac{\partial y_0}{\partial t} + y_0 - 6A - 12Bt - At^2 - Bt^3 \\ &= -6A - 12Bt - At^2 - Bt^3 \end{aligned}$$

$$y_1(t) = \chi_1 y_0(t) + h \int R_1(y_0(t)) dt$$

$$y_0(t) = 0$$

$$y_1(t) = h(-3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) = & h(-3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) \\ & + h(h(-3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5)) \\ & + 2h(-3At^2 - Bt^3 - \frac{1}{36}At^4 - \frac{1}{80}Bt^5) \\ & + h(-\frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{10}Bt^5 - \frac{1}{360}At^6 - \frac{1}{840}Bt^7) - 3At^2 - 2Bt^3 \\ & - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(t) = & h(-3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) + h(h(-3At^2 - 2Bt^3 \\ & - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) + 2h(-3At^2 - Bt^3 - \frac{1}{36}At^4 \\ & - \frac{1}{80}Bt^5) + h(-\frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{10}Bt^5 - \frac{1}{360}At^6 - \frac{1}{840}Bt^7) \\ & - 3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) + h(h(-3At^2 - 2Bt^3 \\ & - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) + h(h(-3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) \\ & + 2h(-3At^2 - Bt^3 - \frac{1}{36}At^4 - \frac{1}{80}Bt^5) + h(-\frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{10}Bt^5 \\ & - \frac{1}{360}At^6 - \frac{1}{840}Bt^7) - 3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) \\ & + \frac{1}{180}h(-2160At^2 - 720Bt^3 - 20At^4 - 9Bt^5 - 3240hAt^2 \\ & - 720hBt^3 - \frac{140}{3}hAt^4 - \frac{63}{4}hBt^5 - \frac{1}{5}hAt^6 - \frac{1}{14}hBt^7) \\ & + h(-\frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{10}Bt^5 - \frac{1}{360}At^6 - \frac{1}{840}Bt^7) + h(h(-\frac{1}{4}At^4 \\ & - \frac{1}{10}Bt^5 - \frac{1}{360}At^6 - \frac{1}{840}Bt^7) + 2h(-\frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5 \\ & - \frac{1}{1080}At^6 - \frac{1}{3360}Bt^7) + h(-\frac{1}{120}At^6 - \frac{1}{420}Bt^7 \\ & - \frac{1}{20160}At^8 - \frac{1}{60480}Bt^9) - \frac{1}{4}At^4 - \frac{1}{10}Bt^5 - \frac{1}{360}At^6 \\ & - \frac{1}{840}Bt^7) - 3At^2 - 2Bt^3 - \frac{1}{12}At^4 - \frac{1}{20}Bt^5) \end{aligned}$$

⋮

$h = -1$ alınır;

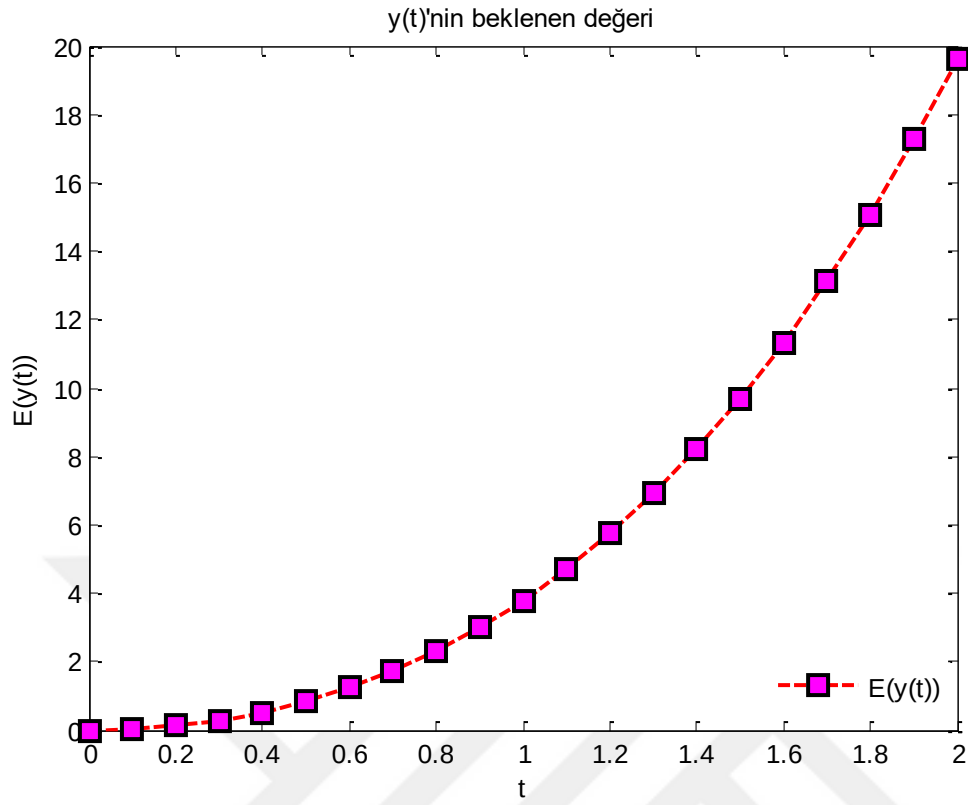
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m(t) \\
 &= 9At^2 + 4Bt^3 + \frac{37}{108}At^4 + \frac{1}{16}Bt^5 + \frac{31}{5400}At^6 + \frac{1}{1008}Bt^7 \\
 &\quad + \frac{1}{20160}At^8 + \frac{1}{60480}Bt^9 \\
 E[y(t)] &= E[9At^2 + 4Bt^3 + \frac{37}{108}At^4 + \frac{1}{16}Bt^5 + \frac{31}{5400}At^6 + \frac{1}{1008}Bt^7 \\
 &\quad + \frac{1}{20160}At^8 + \frac{1}{60480}Bt^9 + \dots]
 \end{aligned}$$

A ve B bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 E[y(t)] &= 9E[A]t^2 + 4E[B]t^3 + \frac{37}{108}E[A]t^4 + \frac{1}{16}E[B]t^5 + \frac{31}{5400}E[A]t^6 \\
 &\quad + \frac{1}{1008}E[B]t^7 + \frac{1}{20160}E[A]t^8 + \frac{1}{60480}E[B]t^9 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[y(t)] &= 9\frac{u}{v}t^2 + 4\frac{\alpha}{\alpha+\beta}t^3 + \frac{37}{108}\frac{u}{v}t^4 + \frac{1}{16}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}t^5 + \frac{31}{5400}\frac{u}{v}t^6 \\
 &\quad + \frac{1}{1008}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}t^7 + \frac{1}{20160}\frac{u}{v}t^8 + \frac{1}{60480}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}t^9 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[y(t)] &= 3t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{37}{324}t^4 + \frac{1}{96}t^5 + \frac{31}{16200}t^6 + \frac{1}{6048}t^7 + \frac{1}{60480}t^8 + \\
 &\quad \frac{1}{362880}t^9 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.82}$$



Şekil 7. denklem (4.82)'deki $y(t)$ 'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = Var[9At^2 + 4Bt^3 + \frac{37}{108}At^4 + \frac{1}{16}Bt^5 + \frac{31}{5400}At^6 + \frac{1}{1008}Bt^7 + \frac{1}{20160}At^8 \\ + \frac{1}{60480}Bt^9 + \dots] \end{aligned}$$

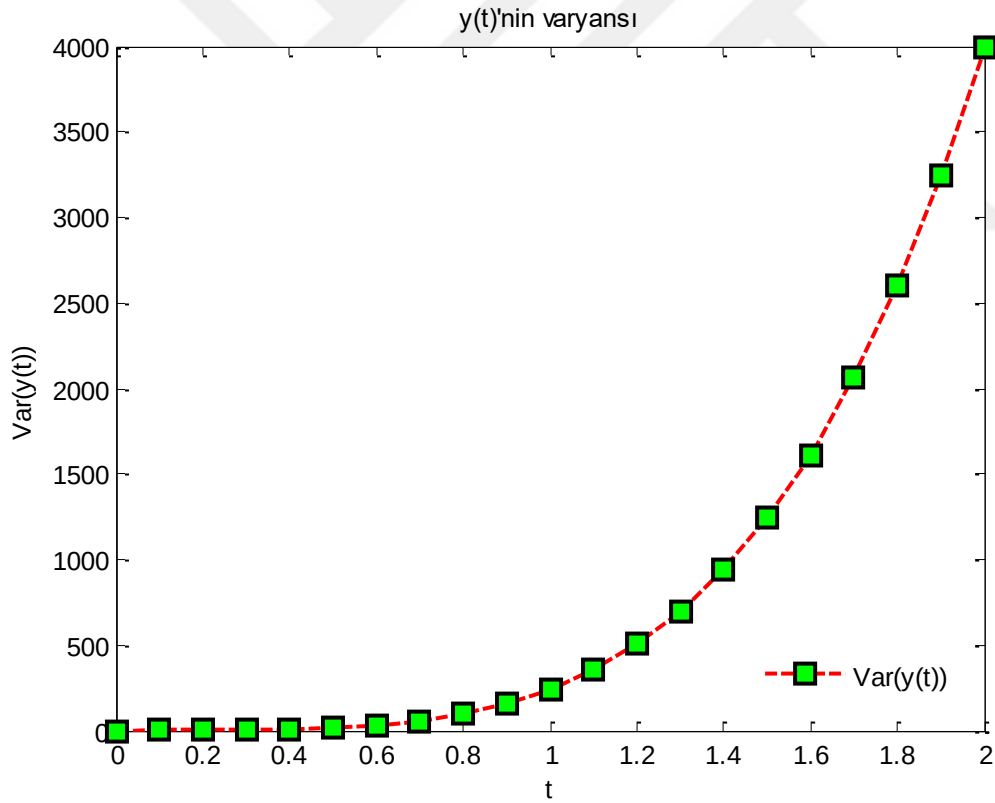
- $Var[C] = 0, C \rightarrow \text{sabit}$

Özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = 81Var[A]t^4 + 16Var[B]t^6 + \frac{1369}{11664}Var[A]t^8 + \frac{1}{256}Var[B]t^{10} \\ + \frac{961}{29160000}Var[A]t^{12} + \frac{1}{1016064}Var[B]t^{14} \\ + \frac{1}{406425600}Var[A]t^{16} + \frac{1}{3657830400}Var[B]t^{18} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = & 81 \left[\frac{v}{u^2} \right] t^4 + 16 \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] t^6 + \frac{1369}{11664} \left[\frac{v}{u^2} \right] t^8 \\
& + \frac{1}{256} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] t^{10} + \frac{961}{29160000} \left[\frac{v}{u^2} \right] t^{12} \\
& + \frac{1}{1016064} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] t^{14} + \frac{1}{406425600} \left[\frac{v}{u^2} \right] t^{16} \\
& + \frac{1}{3657830400} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] t^{18} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = & 243t^4 + \frac{20}{63}t^6 + \frac{1369}{3888}t^8 + \frac{5}{64512}t^{10} + \frac{961}{9720000}t^{12} + \\
& \frac{5}{256048128}t^{14} + \frac{1}{135475200}t^{16} + \frac{1}{184354652160}t^{18} + \dots
\end{aligned} \tag{4.83}$$



Şekil 8. denklem (4.83)'deki $y(t)$ 'nin varyans değeri

$y(t)$ değişim katsayısı;
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[y(t)] = \sqrt{Var[y(t)]}$$

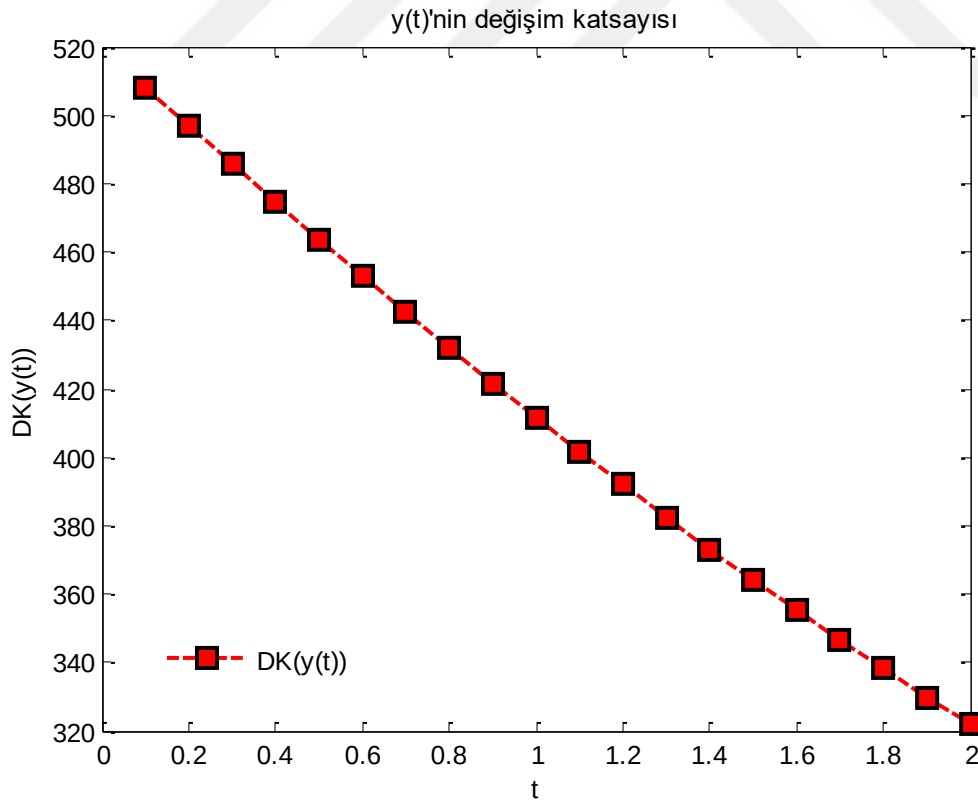
$$= \sqrt{243t^4 + \frac{20}{63}t^6 + \frac{1369}{3888}t^8 + \frac{5}{64512}t^{10} + \frac{961}{9720000}t^{12} + \frac{5}{256048128}t^{14} + \frac{1}{135475200}t^{16} + \frac{1}{184354652160}t^{18}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[y(t)]}{E[y(t)]} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{243t^4 + \frac{20}{63}t^6 + \frac{1369}{3888}t^8 + \frac{5}{64512}t^{10} + \frac{961}{9720000}t^{12} + \frac{5}{256048128}t^{14} + \frac{1}{135475200}t^{16} + \frac{1}{184354652160}t^{18}}}{3t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{37}{324}t^4 + \frac{1}{96}t^5 + \frac{31}{16200}t^6 + \frac{1}{6048}t^7 + \frac{1}{60480}t^8 + \frac{1}{362880}t^9} \times 100 \quad (4.84)$$

$y(t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 9. denklem (4.84)'deki $y(t)$ 'nin değişim katsayısı değeri

4.2. Rastgele adi diferansiyel denklem sistemlerinin HAM Metodu ile Analizleri

Örnek 4:

$$x_1' = k\delta x_1 + k(1 - \delta)x_2 \quad (4.85)$$

$$x_2' = k(1 - \delta)x_1 + k\delta x_2 \quad (4.86)$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -1 \quad (4.87)$$

başlangıç değer probleminde $k \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow k \sim N(1, 3)$ standart normal dağılıma sahip, $\delta \sim Laplace(a, 2b^2) \rightarrow \delta \sim Laplace(1, 2)$ Laplace dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopy Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Tam çözüm

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{k(-1+2\delta)t} \\ x_2(t) = -e^{k(-1+2\delta)t} \end{cases}$$

(4.85) ve (4.86) sistemine HAM uygulanırsa,

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

burada a_n ve b_n katsayılar. Bu bize (4.85) ve (4.87) çözüm ifadesinin ilk kuralını sağlar.

Başlangıç koşuluna göre ve çözüm ifadesi kuralı altında, doğrudan

$$x_{1,0}(t) = 1, \quad x_{2,0}(t) = -1$$

başlangıç yaklaşımı olarak seçebiliriz ve lineer yardımcı operatör

$$L[\Phi_i(t; q)] = \frac{\partial \Phi_i(t; q)}{\partial t}, \quad i = 1, 2.$$

$L[C_i] = 0$, özelliği ile $C_i (= 1, 2)$ integral sabitleri. Buna ilaveten (4.85) ve (4.86) için aşağıdaki nonlinear operatör sistemi tanımlayabiliriz.

$$N_1[\Phi_i(t; q)] = \frac{\partial \Phi_1(t; q)}{\partial t} - k\delta \Phi_1(t; q) - k(1 - \delta)\Phi_2(t; q)$$

$$N_2[\Phi_i(t; q)] = \frac{\partial \Phi_2(t; q)}{\partial t} - k(1 - \delta)\Phi_1(t; q) - k\delta \Phi_2(t; q)$$

Yukarıdaki tanımı kullanarak, sıfırcı mertebeden deformasyon denklemini oluşturulursa,

$$(1 - q)[\Phi_i(t; q) - x_{i,0}(t)] = qh_i N_i[\Phi_i(t; q)], \quad i = 1, 2. \quad (4.88)$$

Açık olarak, $q = 0$, $q = 1$ için,

$$\Phi_i(t; 0) = x_{i,0}(t), \quad \Phi_i(t; 1) = x_i(t).$$

Bu yüzden, q gömme parametresi 0'dan 1'e kadar değiştiğinde, $x_{i,0}(t)$ ve $x_i(t)$ başlangıç yaklaşımları $\Phi_i(t; q)$ 'a kadar değiştiğinde çözümler $x_{i,0}(t)$ ve $x_i(t)$ ortaya çıkar.

$\Phi_i(t; q)$ q 'ya bağlı olarak Taylor serisine açılırsa,

$$\Phi_i(t; q) = x_{i,0}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_{i,m}(t) q^m,$$

Burada

$$x_{i,m}(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi_i(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

Vektörü tanımlarsak,

$$\vec{x}_{i,n} = \{ x_{i,0}(t), x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), \dots, x_{i,n}(t) \}$$

sıfır dereceli deformasyon denkleminin (4.87) türevini alırsak, m kez q 'ya göre ve son olarak $m!$ 'ye bölerek, m . dereceden deformasyon denklemini elde ederiz.

$$L[x_{i,m}(t) - \chi_m x_{i,m-1}(t)] = h_i R_{i,m}(\vec{x}_{i,m}), \quad (4.88)$$

$x_{1,m}(0) = 0$ ve $x_{2,m}(0) = 0$ başlangıç koşuluna bağlıdır. Burada

$$R_{1,m}(\vec{x}_{i,m-1}) = x'_{1,m-1}(t) - k\delta x_{1,m-1}(t) - k(1 - \delta)x_{2,m-1}(t)$$

$$R_{2,m}(\vec{x}_{i,m-1}) = x'_{2,m-1}(t) - k(1 - \delta)x_{1,m-1}(t) - k\delta x_{2,m-1}(t)$$

Şimdi $m > 1$ için m . dereceden deformasyon denkleminin (4.88) çözümü şu şekilde olur.

$$x_{i,m}(t) = \chi_m x_{i,m-1}(t) + h_i L^{-1}[R_{i,m}(\vec{x}_{i,m-1})] \quad (4.89)$$

Şimdi art arda elde edelim:

$$x_{1,1}(t) = h_1 (-k\delta + k(1 - \delta))t$$

$$x_{1,2} = h_1(h_1(-k\delta + k(1-\delta))t - \frac{1}{2}k\delta h_1(-k\delta + k(1-\delta))t^2 \\ - \frac{1}{2}k(1-\delta)h_2(-k(1-\delta) + k\delta)t^2)$$

$\vdots$

$$x_{2,1}(t) = h_2(-k(1-\delta) + k\delta)t$$

$$x_{2,2}(t) = h_2(h_2(-k(1-\delta) + k\delta)t - \frac{1}{2}k(1-\delta)h_1(-k\delta + k(1-\delta))t^2 \\ - \frac{1}{2}k\delta h_2(-k(1-\delta) + k\delta)t^2)$$

$\vdots$

şeklindedir. $h_1 = -1$ ve $h_2 = -1$ olduğunda,

$$x_{1,1}(t) = -tk + 2tk\delta$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}k^2t^2 + 2k^2\delta^2t^2$$

$\vdots$

$$x_{2,1}(t) = tk - 2tk\delta$$

$$x_{2,2}(t) = -\frac{1}{2}k^2t^2 - 2k^2\delta^2t^2$$

$\vdots$

Böylece (4.85) ve (4.86)'in analitik çözümü, tam çözümler ve genel form:

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_{1,m}(t) \\ = 1 + (2k\delta - k)t + (\frac{1}{2}k^2 + 2k^2\delta^2 - 2k^2\delta)t^2 + (k^3\delta - 2k^3\delta^2 \\ + \frac{4}{3}k^3\delta^3 - \frac{1}{6}k^3)t^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2kt)^m}{m!} = e^{k(-1+2\delta)t}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} x_{2,m}(t) \\
&= -1 - (2k\delta - k)t + \left(2k^2\delta - 2k^2\delta^2 - \frac{1}{2}k^2\right)t^2 \\
&\quad + \left(2k^3\delta^2 - k^3\delta - \frac{4}{3}k^3\delta^3 + \frac{1}{6}k^3\right)t^3 + \dots - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2kt)^m}{m!} = -e^{k(-1+2\delta)t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $k = 100$ ve $\delta = 0.02$ değerleri yerine koyarsak:

$$x_1(t) = e^{k(-1+2\delta)t} = e^{-100t} + e^{2t}$$

$$x_2(t) = -e^{k(-1+2\delta)t} = -e^{-100t} + e^{2t}$$

sistem:

$$x'_1 = 2x_1 + 98x_2$$

$$x'_2 = 98x_1 + 2x_2$$

şeklinde elde edilir.

x_1 ve x_2 beklenen değeri:

k, δ bağımsız rastgele değişkenler

$$\begin{aligned}
E[x_1] &= E \left[1 + (2k\delta - k)t + \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k^2\delta^2 - 2k^2\delta \right)t^2 + (k^3\delta - 2k^3\delta^2 + \frac{4}{3}k^3\delta^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{6}k^3\right)t^3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x_1] &= E[1] + (2E[k]E[\delta] - E[k])E[t] \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}E[k^2] + 2E[k^2]E[\delta^2] - 2E[k^2]E[\delta] \right) E[t^2] \\
&\quad + \left(E[k^3]E[\delta] - 2E[k^3]E[\delta^2] + \frac{4}{3}E[k^3]E[\delta^3] - \frac{1}{6}E[k^3] \right) E[t^3]
\end{aligned}$$

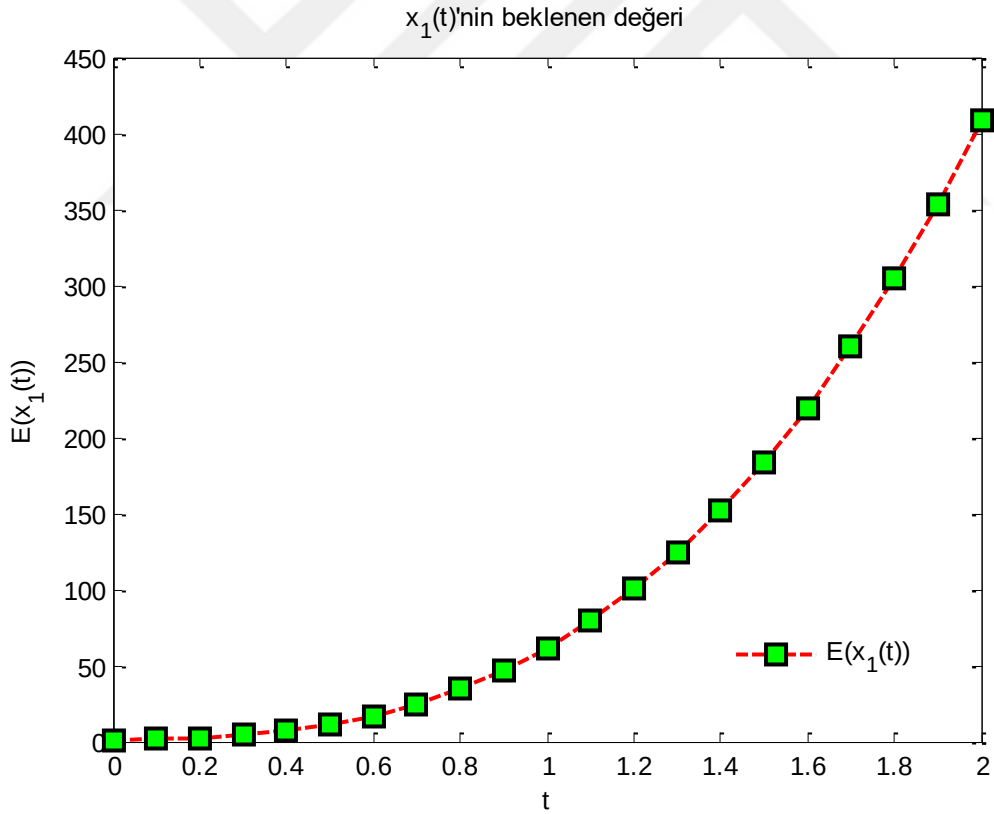
- $E[C] = C, C \rightarrow \text{sabit}$

Özellikliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
E[x_1] &= 1 + (2[\mu][a] - [\mu])t \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}[\mu^2 + \sigma^2] + 2[\mu^2 + \sigma^2][a^2 + 2b^2] - 2[\mu^2 + \sigma^2][a] \right) t^2 \\
&\quad + \left([\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a] - 2[\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a^2 + 2b^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3}[\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a^3 + 6ab^2] - \frac{1}{6}[\mu^3 + 3\mu\sigma^2] \right) t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x_1] &= 1 + (2[1][1] - [1])t + \left(\frac{1}{2}[4] + 2[4][3] - 2[4][1] \right) t^2 \\
&\quad + \left([10][1] - 2[10][3] + \frac{4}{3}[10][7] - \frac{1}{6}[10] \right) t^3
\end{aligned}$$

$$E[x_1] = 1 + t + 18t^2 + \frac{125}{3}t^3 \quad (4.90)$$



Şekil 10. denklem (4.90)'deki $x_1(t)$ 'nin beklenen değeri

$$E[x_2] = E\left(-1 - (2k\delta - k)t + \left(2k^2\delta - 2k^2\delta^2 - \frac{1}{2}k^2\right)t^2 + \left(2k^3\delta^2 - k^3\delta - \frac{4}{3}k^3\delta^3 + \frac{1}{6}k^3\right)t^3\right)$$

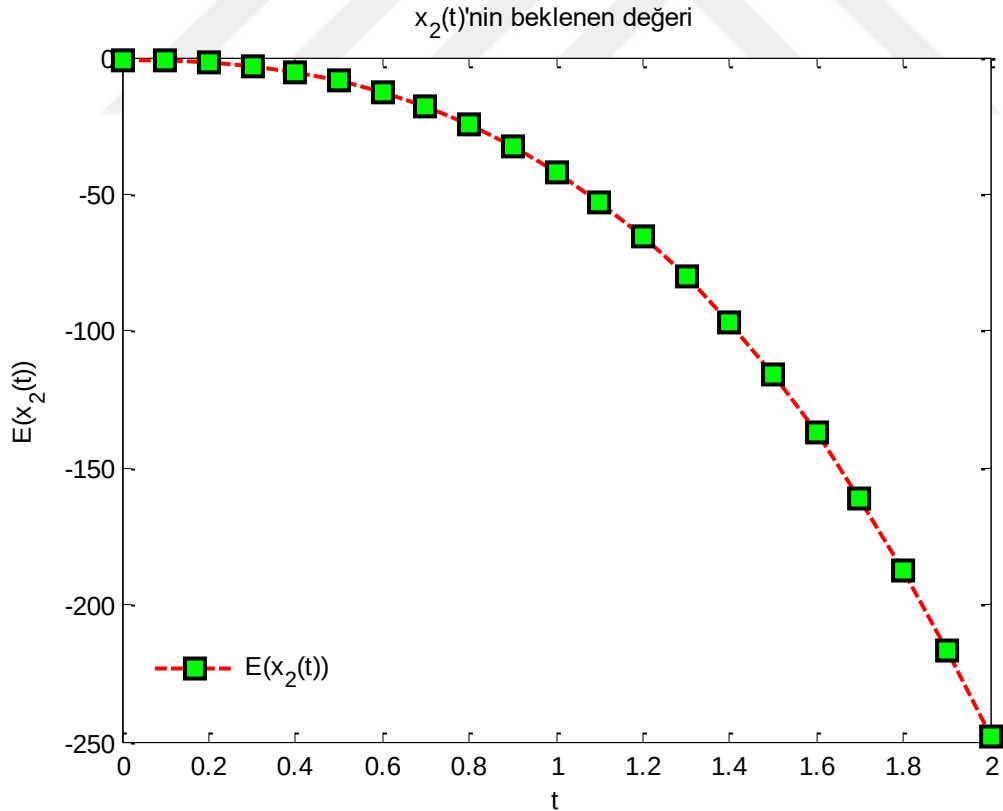
$$E[x_2] = E[-1] - (2E[k]E[\delta] - E[k])E[t] + \left(2E[k^2]E[\delta] - 2E[k^2]E[\delta^2] - \frac{1}{2}E[k^2]\right)E[t^2] + \left(E[k^3]E[\delta] + 2E[k^3]E[\delta^2] - \frac{4}{3}E[k^3]E[\delta^3] + \frac{1}{6}E[k^3]\right)E[t^3]$$

- $E[C] = C, C \rightarrow \text{sabit}$

Özelliğini kullanırsak

$$E[x_2] = [-1] - (2[\mu][a] - [\mu])t + \left(2[\mu^2 + \sigma^2][a] - 2[\mu^2 + \sigma^2][a^2 + 2b^2] - \frac{1}{2}[\mu^2 + \sigma^2]\right)t^2 + \left([\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a] + 2[\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a^2 + 2b^2] - \frac{4}{3}[\mu^3 + 3\mu\sigma^2][a^3 + 6ab^2] + \frac{1}{6}[\mu^3 + 3\mu\sigma^2]\right)t^3$$

$$E[x_2] = -1 - t - 18t^2 - \frac{65}{3}t^3 \quad (4.91)$$



Şekil 11. denklem (4.91)'deki $x_2(t)$ 'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[x_1] = Var \left[1 + (2k\delta - k)t + \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k^2\delta^2 - 2k^2\delta \right) t^2 \right. \\ \left. + \left(k^3\delta - 2k^3\delta^2 + \frac{4}{3}k^3\delta^3 - \frac{1}{6}k^3 \right) t^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[x_1] = Var[1] + (Var[2k]Var[\delta] - Var[k])Var[t] \\ + \left(Var \left[\frac{1}{2}k^2 \right] + Var[2k^2]Var[\delta^2] - Var[2k^2]Var[\delta] \right) Var[t^2] \\ + \left(Var[k^3]Var[\delta] - Var[2k^3]Var[\delta^2] + Var \left[\frac{4}{3}k^3 \right] Var[\delta^3] - Var \left[\frac{1}{6}k^3 \right] \right) t^3 \end{aligned}$$

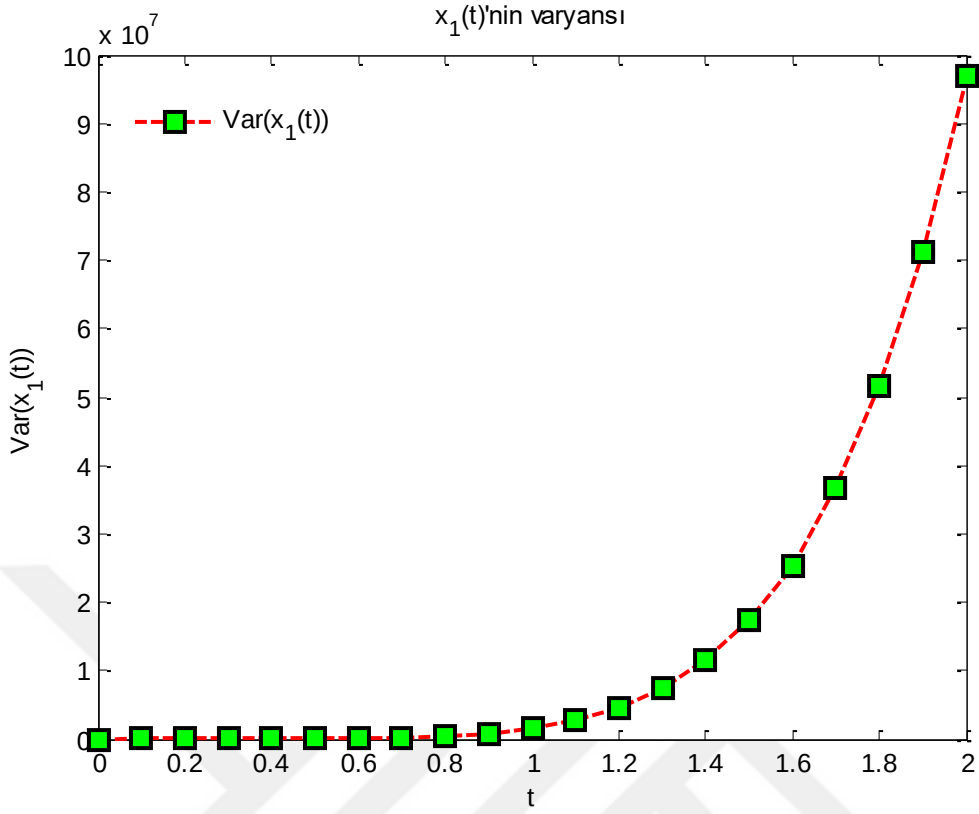
- $Var[C] = 0, C \rightarrow \text{sabit}$

Özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} Var[x_1] = 0 + (4Var[k]Var[\delta] - Var[k])t^2 \\ + \left(\frac{1}{4}Var[k^2] + 4Var[k^2]Var[\delta^2] + 4Var[k^2]E[\delta] \right) t^4 \\ + \left(Var[k^3]Var[\delta] + 4Var[k^3]Var[\delta^2] + \frac{16}{9}Var[k^3]Var[\delta^3] + \frac{1}{36}Var[k^3] \right) t^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[x_1] = 0 + (4[\sigma^2][2b^2] - [\sigma^2])t^2 \\ + \left(\frac{1}{4}[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] + 4[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4][8a^2b^2 + 20b^4] - 4[4\mu^2\sigma^2 \right. \\ \left. + 2\sigma^4][2b^2] \right) t^4 \\ + \left([15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][2b^2] \right. \\ + 4[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][8a^2b^2 + 20b^4] \\ + \frac{16}{9}[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][720b^6 + 18a^4b^2 + 324a^2b^4] \\ \left. - \frac{1}{36}[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4] \right) t^6 \end{aligned}$$

$$Var[x_1] = 21t^2 + \frac{7257}{2}t^4 + 1513533t^6 \quad (4.92)$$



Şekil 12. denklem (4.92)'deki $x_1(t)$ 'nin varyans değeri

$$Var[x_2] = Var\left([-1] - ([2k][\delta] - [k])t + \left([2k^2][\delta] - [2k^2][\delta^2] - \left[\frac{1}{2}k^2\right]\right)t^2\right.$$

$$\left. + \left([k^3][\delta] + [2k^3][\delta^2] - \left[\frac{4}{3}k^3\right][\delta^3] + \left[\frac{1}{6}k^3\right]\right)t^3\right)$$

$$Var[x_2] = Var[1] + (Var[2k]Var[\delta] - Var[k])Var[t]$$

$$+ \left(Var[2k^2]Var[\delta] + Var[2k^2]Var[\delta^2] + Var\left[\frac{1}{2}k^2\right]\right)Var[t^2]$$

$$+ \left(Var[k^3]E[\delta] + Var[2k^3]Var[\delta^2] + Var\left[\frac{4}{3}k^3\right]Var[\delta^3]\right.$$

$$\left. + Var\left[\frac{1}{6}k^3\right]\right)Var[t^3]$$

$$Var[x_2] = Var[1] + (4Var[k]Var[\delta] - Var[k])Var[t]$$

$$+ \left(4Var[k^2]Var[\delta] + 4Var[k^2]Var[\delta^2] + \frac{1}{4}Var[k^2]\right)Var[t^2]$$

$$+ \left(Var[k^3]E[\delta] + 4Var[k^3]Var[\delta^2] + \frac{16}{9}Var[k^3]Var[\delta^3]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{36}Var[k^3]\right)Var[t^3]$$

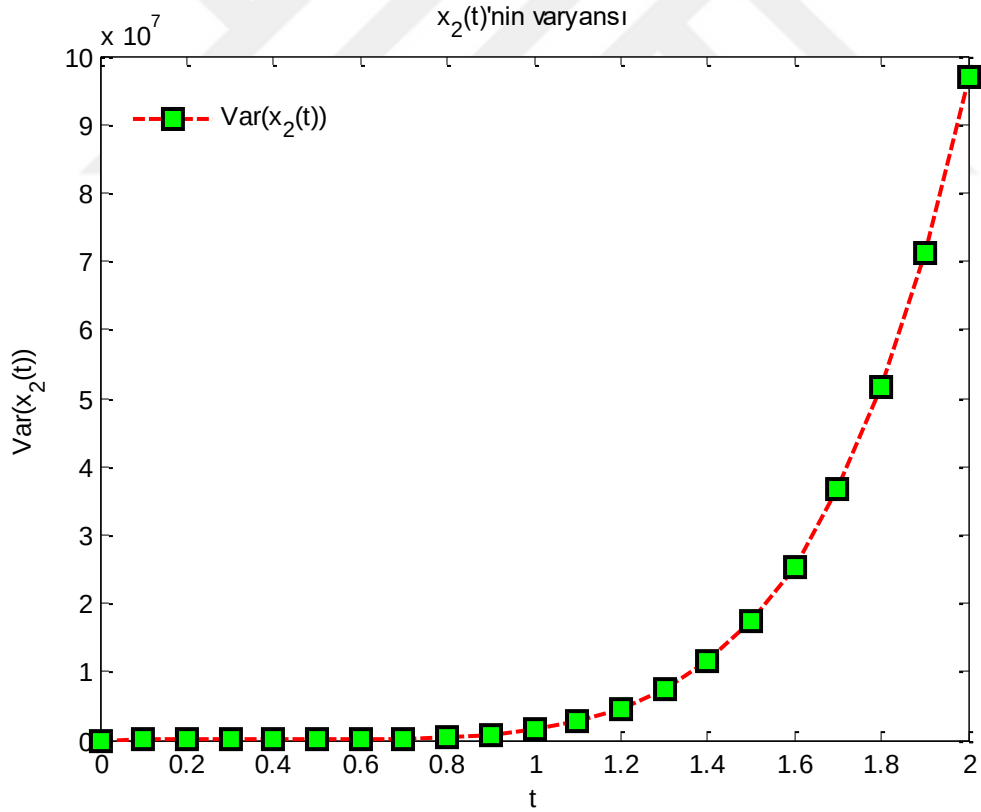
- $Var[C] = 0, C \rightarrow \text{sabit}$

Özellikliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
 Var[x_2] &= 0 + (4[\sigma^2][2b^2] - [\sigma^2])t^2 \\
 &+ \left(4[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4][2b^2] + 4[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4][8a^2b^2 + 20b^4] \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{4}[4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4] \right) t^4 \\
 &+ \left([15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][2b^2] \right. \\
 &+ 4[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][8a^2b^2 + 20b^4] \\
 &+ \frac{16}{9}[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4][720b^6 + 18a^4b^2 + 324a^2b^4] \\
 &+ \left. \frac{1}{36}[15\sigma^6 + 9\mu^4\sigma^2 + 36\mu^2\sigma^4] \right) t^6
 \end{aligned}$$

$$Var[x_2] = 21t^2 + \frac{7215}{2}t^4 + 1513533t^6 \quad (4.93)$$

elde edilir.



Şekil 13. denklem (4.93)'deki $x_2(t)$ 'nin varyans değeri

$x_1(t)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

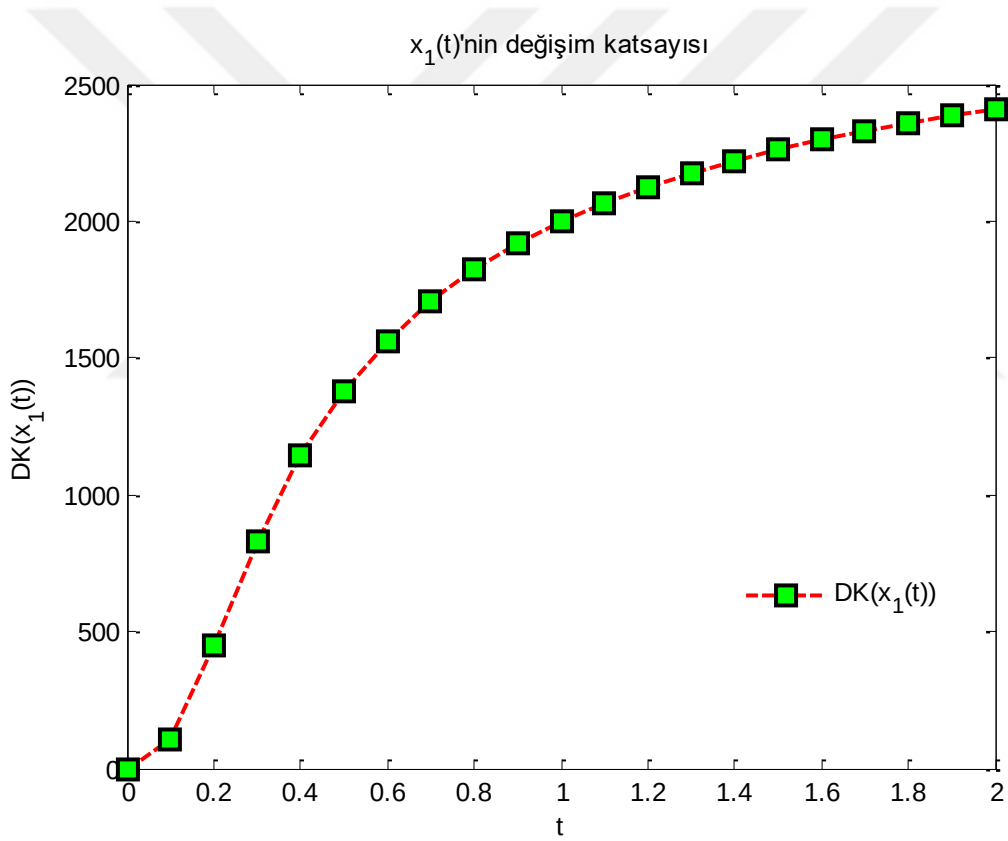
$$stdsapma[x_1(t)] = \sqrt{Var[x_1(t)]} = \sqrt{21t^2 + \frac{7215}{2}t^4 + 1513533t^6}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[x_1(t)]}{E[x_1(t)]} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{21t^2 + \frac{7215}{2}t^4 + 1513533t^6}}{1+t+18t^2+\frac{125}{3}t^3} \times 100 \quad (4.94)$$

$x_1(t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 14. denklem (4.94)'deki $x_1(t)$ 'nin değişim katsayısı değeri

$x_2(t)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

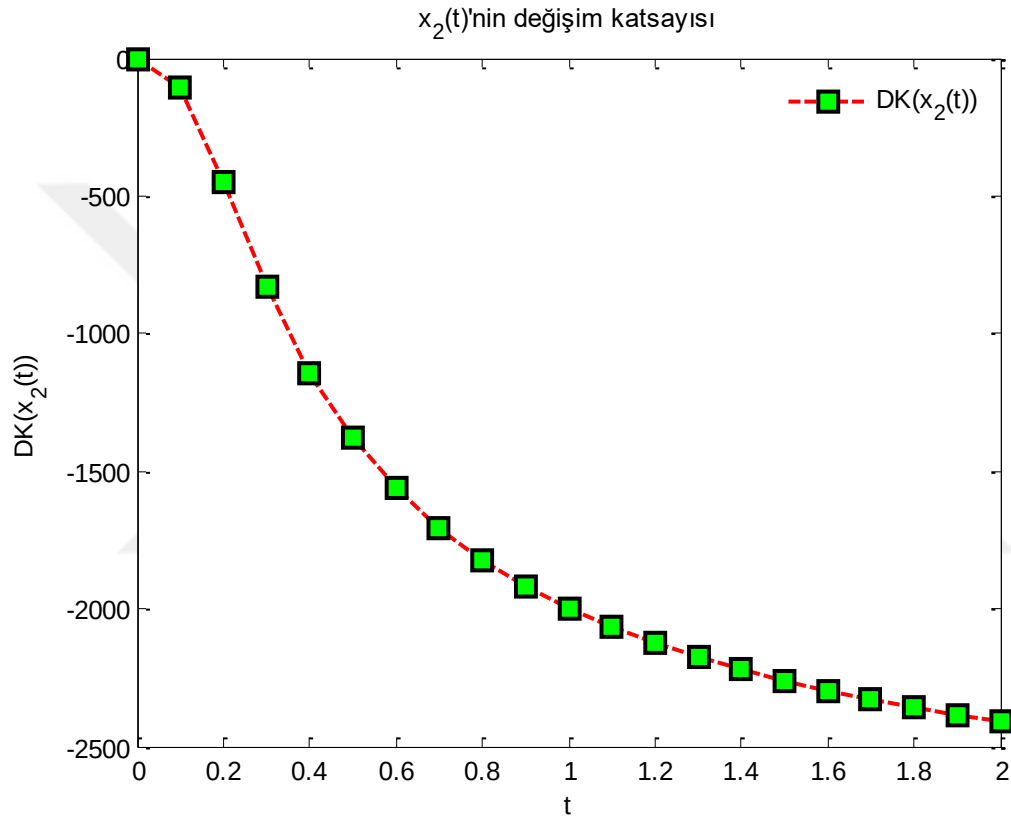
$$stdsapma[x_2(t)] = \sqrt{Var[x_2(t)]} = \sqrt{21t^2 + \frac{7215}{2}t^4 + 1513533t^6}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[x_2(t)]}{E[x_2(t)]} \times 100 =$$

$$\frac{\sqrt{21t^2 + \frac{7215}{2}t^4 + 1513533t^6}}{-1 - t - 18t^2 - \frac{65}{3}t^3} \times 100 \quad (4.95)$$

$x_2(t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 15. denklem (4.95)'deki $x_2(t)$ 'nin değişim katsayısı değeri

Örnek 5:

$$x_1' = x_2 \quad (4.96)$$

$$x_2' = x_3 \quad (4.97)$$

$$x_3' = x_3 + \frac{2}{t}x_2 - \frac{2}{t^2}x_1 \quad (4.98)$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3 = 2A \quad (4.99)$$

başlangıç değer probleminde $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim \text{Beta}(2, 3)$ dağılıma sabit, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

(4.96), (4.97) ve (4.98) sistemine HAM uygulanırsa;

Tam Çözüm

$$x(t) = At^2 e^t$$

Şimdi (4.96)-(4.99) sistemini çözmek için HAM'ı uyguluyoruz. HAM'a göre (4.96)-(4.99) sisteminin ilk yaklaşımı şöyledir,

$$x_{1,0}(0) = 0, x_{2,0}(0) = 0, x_{3,0} = 2A$$

ve yardımcı operatör

$$L[\phi_i(t; q)] = \frac{\partial \phi_i(t; q)}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3$$

nonlineer operatör,

$$N_1[\phi_i(t; q)] = \frac{\partial \phi_1(t; q)}{\partial t} - \phi_2(t; q),$$

$$N_2[\phi_i(t; q)] = \frac{\partial \phi_2(t; q)}{\partial t} - \phi_3(t; q),$$

$$N_3[\phi_i(t; q)] = \frac{\partial \phi_1(t; q)}{\partial t} - \phi_3(t; q) - \frac{2}{t} \phi_2(t; q) + \frac{2}{t^2} \phi_1(t; q),$$

Yukarıdaki tanımları kullanarak sıfır dereceli deformasyonu oluşturuyoruz.

Denklem:

$$(1 - q)L[\phi_i(t; q) - x_{i,0}(t)] = qh_i N_i[\phi_i(t; q)], \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.100)$$

sıfır dereceli deformasyon denkleminin türevlenmesi, (4.100) q 'a göre m kez ve sonunda m 'ye bölerek m . dereceden deformasyon denklemlerini elde ederiz.

$$L[x_{i,m}(t) - \chi_m x_{i,m-1}(t)] = h_i R_{i,m}(\vec{x}_{i,m-1}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.101)$$

Başlangıç koşulları;

$$x_{1,m}(0) = 0, x_{2,m}(0) = 0, x_{3,m} = 2A \quad (4.102)$$

$$R_{1,m}(\vec{x}_{i,m-1}) = x'_{1,m-1}(t) - x_{2,m-1}(t)$$

$$R_{2,m}(\vec{x}_{i,m-1}) = x'_{2,m-1}(t) - x_{3,m-1}(t)$$

$$R_{3,m}(\vec{x}_{i,m-1}) = x'_{3,m-1}(t) - x_{3,m-1}(t) - \frac{2}{t} x_{2,m-1}(t) + \frac{2}{t^2} x_{1,m-1}(t)$$

Şimdi $m \geq 1$ için m . dereceden deformasyon denkleminin (4.101) çözümü:

$$x_{i,m}(t) = \chi_m x_{i,m-1}(t) + h \int_0^t R_{i,m}(\vec{x}_{i,m-1}) d\tau + C_i \quad i = 1, 2, 3$$

burada entegrasyon sabitleri $C_i (i = 1, 2, 3)$ başlangıç koşulları (4.102) tarafından belirlenir.

$$x_{1,1}(t) = 0, \quad x_{1,2}(t) = h_1 h_2 A t^2$$

$$\begin{aligned}
x_{2,1}(t) &= -2h_2At, & x_{2,2}(t) &= -2h_2At + h_2(-2h_2At + h_3At^2) \\
x_{3,1}(t) &= -2h_3At, & x_{3,2}(t) &= -2h_3At + h_3(-2h_3At + h_3At^2 + 4h_2At)
\end{aligned}$$

$h_1 = -1, h_2 = -1, h_3 = -1$ değerlerini yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
x_{1,1}(t) &= 0, & x_{1,2}(t) &= At^2 \\
x_{2,1}(t) &= 2At, & x_{2,2}(t) &= At^2 \\
x_{3,1}(t) &= 2At, & x_{3,2}(t) &= 5At + At^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

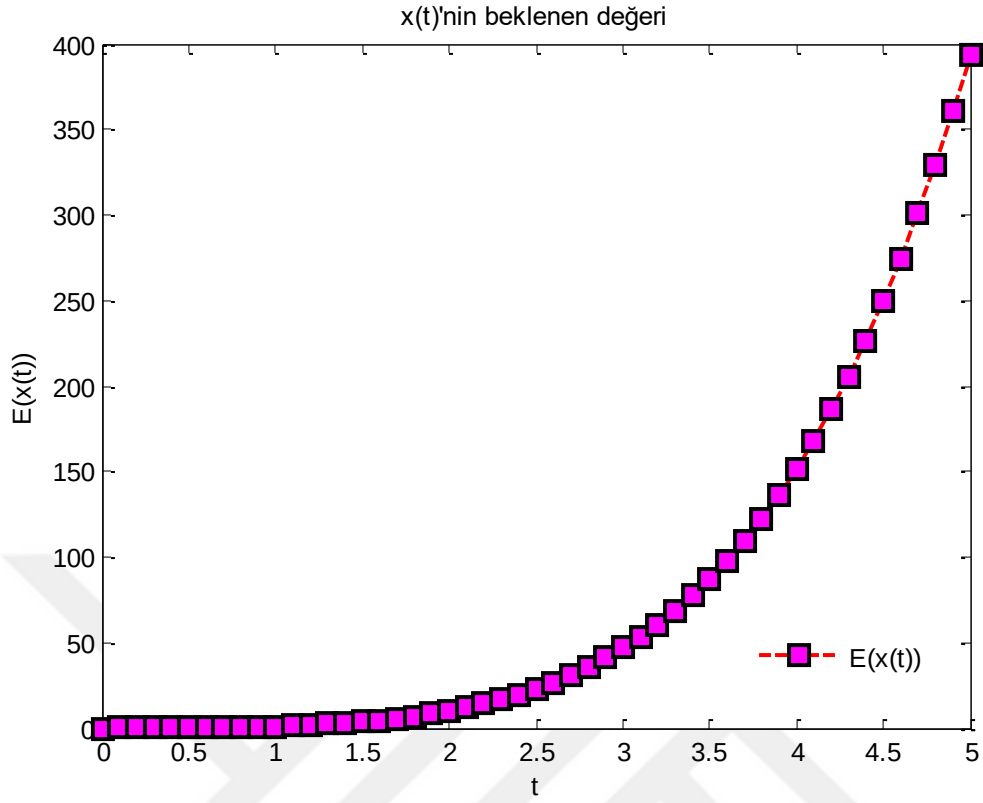
(4.96)-(4.99) genel formu;

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} x_{1,m}(t) = x_{1,0}(t) + x_{1,2}(t) + x_{1,3}(t) \dots \\
&= At^2 + At^3 + \frac{At^4}{2!} + \frac{At^5}{3!} + \dots \\
&= At^2 \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \\
&\cong Ae^{t^2}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

$x(t)$ beklenen değeri:

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= \left[At^2 + At^3 + \frac{At^4}{2!} + \frac{At^5}{3!} \right] \\
E[x(t)] &= E[At^2] + E[At^3] + E\left[\frac{At^4}{2!}\right] + E\left[\frac{At^5}{3!}\right] \\
E[x(t)] &= t^2E[A] + t^3E[A] + \frac{t^4}{2}E[A] + \frac{t^5}{6}E[A] \\
A &\sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim \text{Beta}(2, 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= t^2 \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] + t^3 \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] + \frac{t^4}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] + \frac{t^5}{6} \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] \\
E[x(t)] &= \frac{2}{5}t^2 + \frac{2}{5}t^3 + \frac{1}{5}t^4 + \frac{1}{15}t^5
\end{aligned} \tag{4.104}$$



Şekil 16. denklem (4.104)'deki $x(t)$ 'in beklenen değeri

$x(t)$ varyans değeri:

$$Var[x(t)] = \left[At^2 + At^3 + \frac{At^4}{2!} + \frac{At^5}{3!} \right]$$

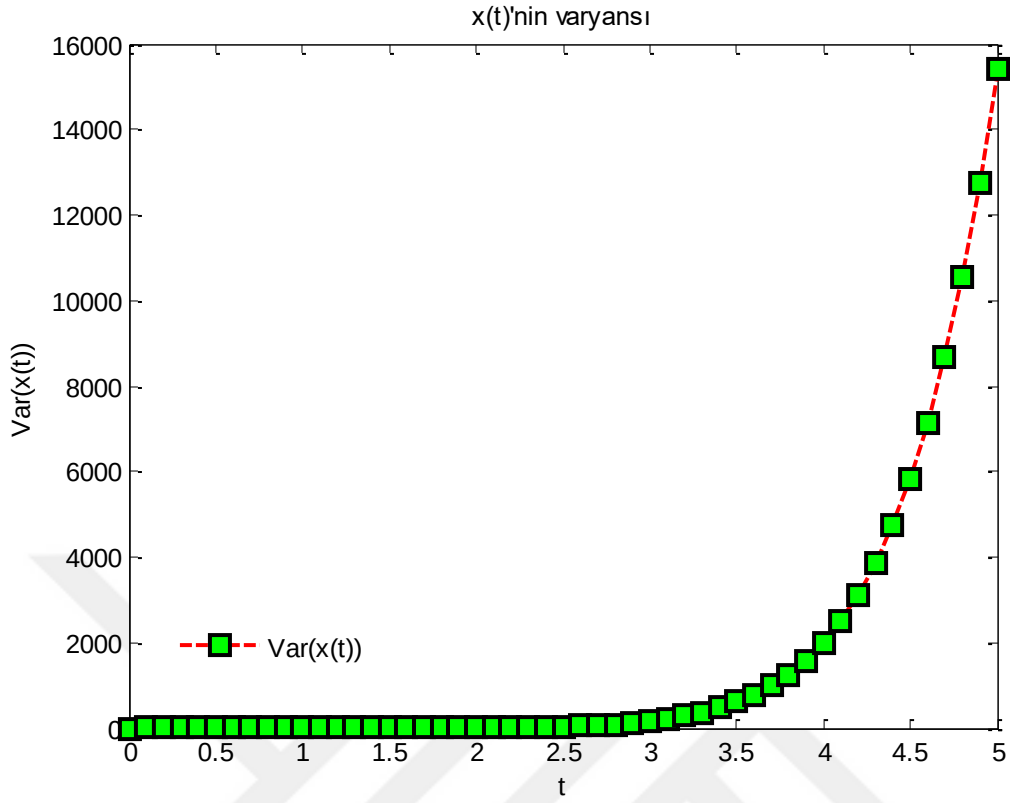
$$Var[x(t)] = Var[At^2] + Var[At^3] + Var\left[\frac{At^4}{2!}\right] + Var\left[\frac{At^5}{3!}\right]$$

$$Var[x(t)] = t^2 Var[A] + t^3 Var[A] + \frac{t^4}{2} Var[A] + \frac{t^5}{6} Var[A]$$

$$A \sim Beta(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim Beta(2, 3)$$

$$Var[x(t)] = t^4 \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] + t^6 \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] \\ + \frac{t^8}{4} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right] + \frac{t^{10}}{36} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \right]$$

$$Var[x(t)] = \frac{1}{25} t^4 + \frac{1}{25} t^6 + \frac{1}{100} t^8 + \frac{1}{900} t^{10} \quad (4.105)$$



Şekil 17. denklem (4.105)'deki $x(t)$ 'in varyans değeri

$x(t)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

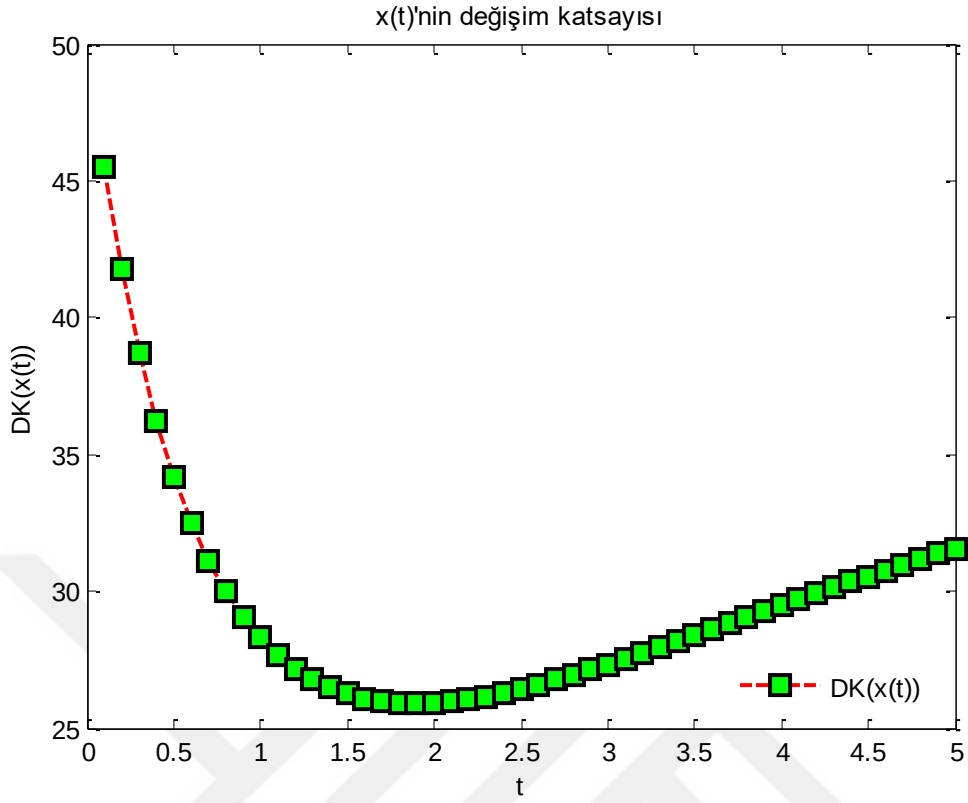
$$stdsapma[x(t)] = \sqrt{Var[x(t)]} = \sqrt{\frac{1}{25}t^4 + \frac{1}{25}t^6 + \frac{1}{100}t^8 + \frac{1}{900}t^{10}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[x(t)]}{E[x(t)]} \times 100 =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{25}t^4 + \frac{1}{25}t^6 + \frac{1}{100}t^8 + \frac{1}{900}t^{10}}}{\frac{2}{5}t^2 + \frac{2}{5}t^3 + \frac{1}{5}t^4 + \frac{1}{15}t^5} \times 100 \quad (4.106)$$

$x(t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 18. denklem (4.106)'deki $x(t)$ 'in değişim katsayı değeri

4.3. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin HAM Metodu ile Analizleri

Örnek 6:

$$u_t + u_x = x, x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = Ae^x \quad (4.107)$$

başlangıç koşulu ile $A \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow A \sim N(3, 4)$ normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Aşağıdaki gibi (4.107)'a HAM yöntemi uygulanırsa;

$u_0(x, t) = Ae^x$ başlangıç yaklaşımı ve lineer olmayan operatör

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - x \quad (4.108)$$

ve lineer operatör:

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} \quad (4.109)$$

$L(c_1(x)) = 0$, $c_1(x)$ integrasyon sabiti.

$$L[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{u}_m, t) \quad (4.110)$$

denklem kullanılarak,

$$R_m[\vec{u}_{m-1}] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - x \quad (4.111)$$

ve $m \geq 1$ için denklem (4.111)'in m . mertebeden deformasyon denklemin çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + hH(r, t)L^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))]$$

bulunur. $m \geq 1$, $\chi_m = 1$, $h = -1$ ve $H(r, t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} R_1(\vec{u}_0(x, t)) &= \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - x \\ &= Ae^x - x \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = \chi_1 u_0(x, t) + \hbar L^{-1}[R_1 \vec{u}_0(x, t)]$$

$$u_1(x, t) = Ae^x + \hbar \int (Ae^x - x) dt$$

$$u_1(x, t) = Ae^x - (Ae^x - x)t$$

$$u_2(x, t) = Ae^x - (Ae^x - x)t + \frac{1}{2}(Ae^x - 1)t^2$$

$$= t \left(x - \frac{t}{2} \right) + Ae^x \left(1 - t + \frac{t^2}{2} \right)$$

$\vdots$

$$u_3(x, t) = Ae^x - (Ae^x - x)t + \frac{1}{2}(Ae^x - x)t^2 - \frac{1}{6}Ae^x + 3$$

$$= t \left(x - \frac{t}{2} \right) + Ae^x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right)$$

bu şekilde devam edilerek kapalı formda çözümü

$$u(x, t) = t \left(x - \frac{t}{2} \right) + Ae^{x-t} \quad (4.112)$$

elde edilir.

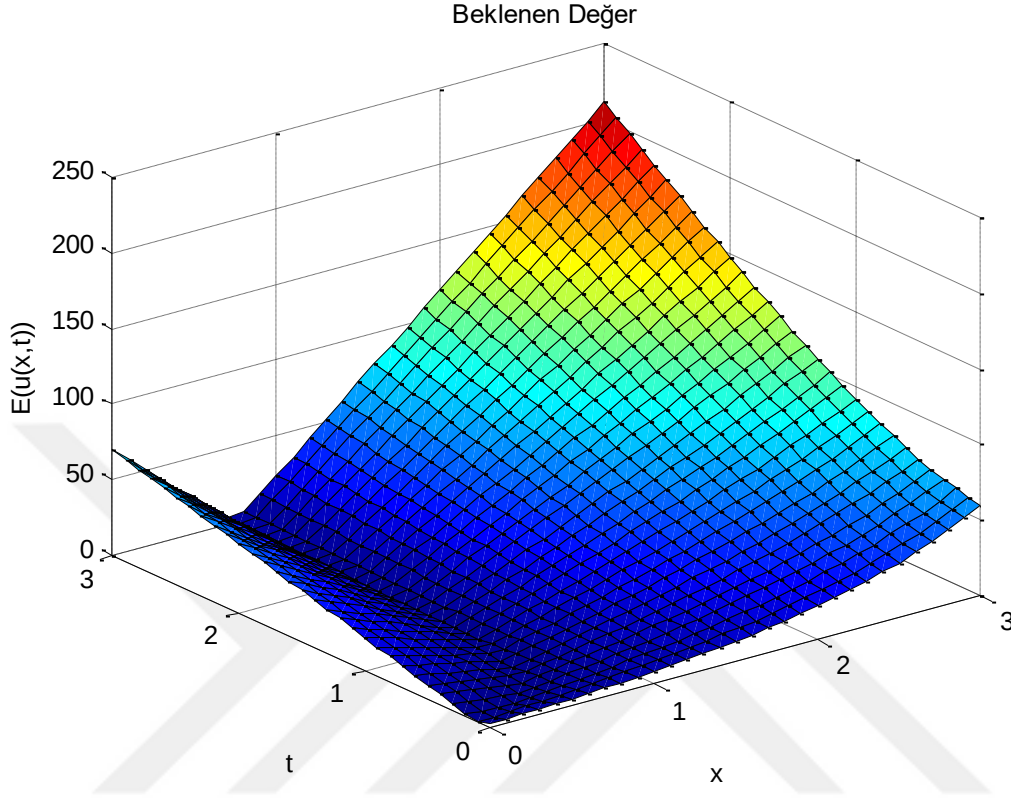
(4.112)'in beklenen değeri (4.110) deki normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E \left[t \left(x - \frac{t}{2} \right) + Ae^{x-t} \right] \\ &= E \left[t \left(x - \frac{t}{2} \right) \right] + E[Ae^{x-t}] \\ &= t \left(x - \frac{t}{2} \right) + e^{x-t} E[A] \\ &= t \left(x - \frac{t}{2} \right) + \mu e^{x-t} \end{aligned}$$

$\mu = 3$ özel değeri için

$$E[u(x, t)] = t \left(x - \frac{t}{2} \right) + 3e^{x-t} \quad (4.113)$$

(4.113) bulunur.



Şekil 19. denklem (4.113)'deki $u(x, t)$ 'in beklenen değeri

(4.112)'in Varyans değerini (4.110) deki normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= Var \left[t \left(x - \frac{t}{2} \right) + Ae^{x-t} \right] \\ &= Var \left[t \left(x - \frac{t}{2} \right) \right] + Var[Ae^{x-t}] \end{aligned}$$

- $Var[C] = 0, C \rightarrow \text{sabit}$

Özellikliğini kullanırsak

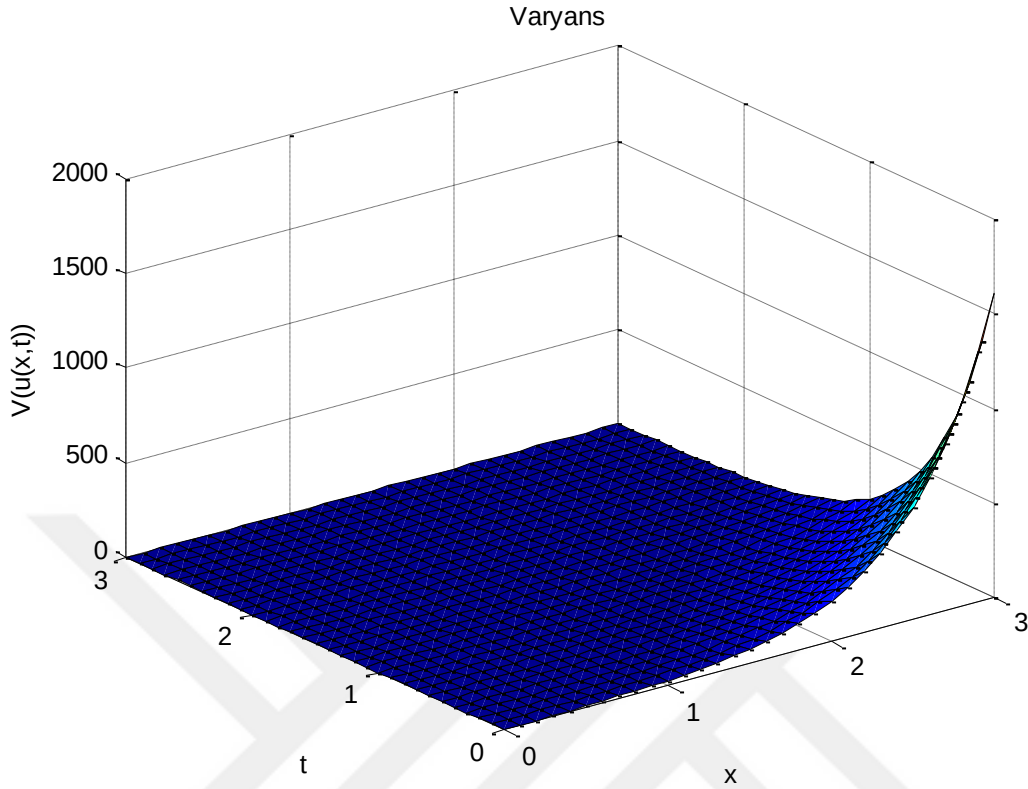
$$Var \left[t \left(x - \frac{t}{2} \right) \right] = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + e^{2x-2t} Var[A] \\ &= e^{2x-2t} \sigma^2 \end{aligned}$$

$\sigma^2 = 4$ özel değeri için

$$Var[u(x, t)] = 4e^{2x-2t} \quad (4.114)$$

(4.114) bulunur.



Şekil 20. denklem (4.114)'deki $u(x, t)$ 'in varyans değeri

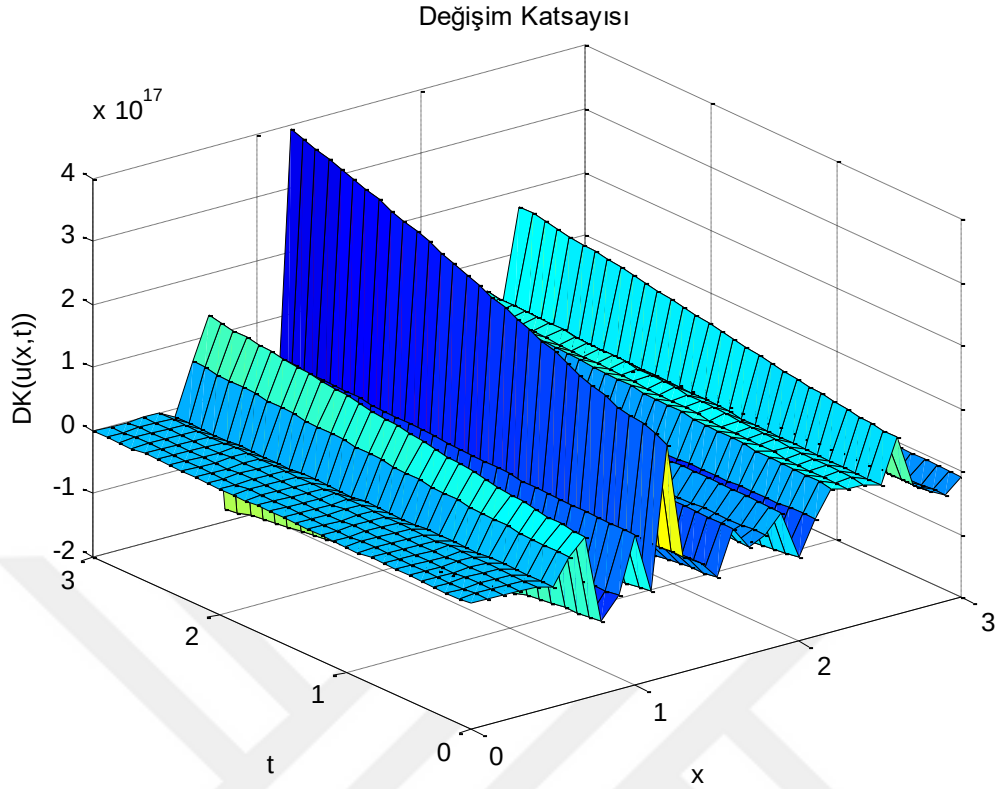
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{4e^{2x-2t}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(x, t)]}{E[u(x, t)]} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{4e^{2x-2t}}}{t\left(x-\frac{t}{2}\right)+3e^{x-t}} \times 100 \quad (4.115)$$



Şekil 21. denklem (4.115)'deki $u(x, t)$ 'in değişim katsayı değeri

Örnek 7:

$$u_t = (u_x)^2 + uu_{xx} + u - u^2, x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = 1 - Ae^{-x/\sqrt{2}} \quad (4.116)$$

başlangıç koşulu ile $A \sim \text{Laplace}(a, 2b^2) \rightarrow A \sim \text{Laplace}(1, 8)$ Laplace dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopy Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Aşağıdaki gibi (4.116)'e HAM yöntemi uygulanırsa;

$u_0(x, t) = Ae^{-x/\sqrt{2}}$ başlangıç yaklaşımı ve lineer olmayan operatör

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} \quad (4.117)$$

$$u_m(x, t) = u_{m-1}(x, t) - L^{-1}(R_m(u_{m-1}, x, t))$$

denklem kullanılarak,

$$\begin{aligned} R_m[\vec{u}_{m-1}, x, t] = & \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial x} \right)^2 - u_{m-1}(x, t) \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} \\ & - u_{m-1}(x, t) + u_{m-1}^2(x, t) \end{aligned}$$

bulunur.

$$R_1(\vec{u}_0(x, t)) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right)^2 - u_0(x, t) \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - u_0(x, t) + u_0^2(x, t)$$

$$= -\frac{1}{2} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}$$

$$u_1(x, t) = \chi_1 u_0(x, t) + \hbar L^{-1}[R_1 \vec{u}_0(x, t)]$$

$$u_1(x, t) = 1 - A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t$$

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) + \hbar L^{-1}[R_1 \vec{u}_1(x, t)]$$

$$R_1 u_1 = \frac{1}{4} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t$$

$$u_2(x, t) = 1 - A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t - \frac{1}{8} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t^2$$

⋮

$$u_3(x, t) = 1 - A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t - \frac{1}{8} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t^2 + \frac{1}{48} A e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} t^3$$

bu şekilde devam edilerek kapalı formda çözümü

$$u(x, t) = 1 - A e^{-\frac{x + \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \quad (4.118)$$

elde edilir.

(4.118)'in beklenen değeri (4.110) deki normal dağılım uygulanırsa,

$$E[u(x, t)] = E \left[1 - A e^{-\frac{x + \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \right]$$

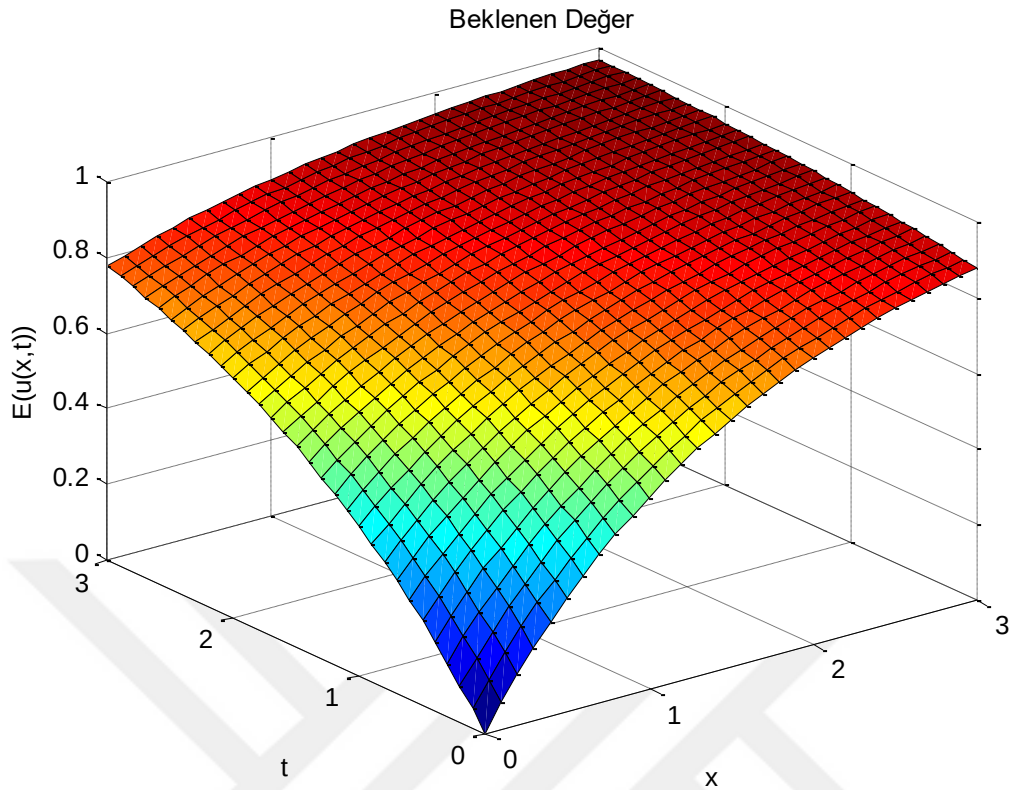
$$= 1 - \left[e^{-\frac{x + \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \right] E[A]$$

$$= 1 - \left[e^{-\frac{x + \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \right] a$$

$a = 1$ özel değeri için

$$E[u(x, t)] = 1 - \left[e^{-\frac{x + \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \right] \quad (4.119)$$

(4.119) bulunur.



Şekil 22. denklem (4.119)'deki $u(x, t)$ 'in beklenen değeri

(4.116)'in Varyans değerini (4.110) deki Laplace dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= Var \left[1 - Ae^{-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}} \right] \\ &= Var[1] + e^{2\left(-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)} Var[A] \end{aligned}$$

- $Var[C] = 0, C \rightarrow \text{sabit}$
Özelliğini kullanırsak

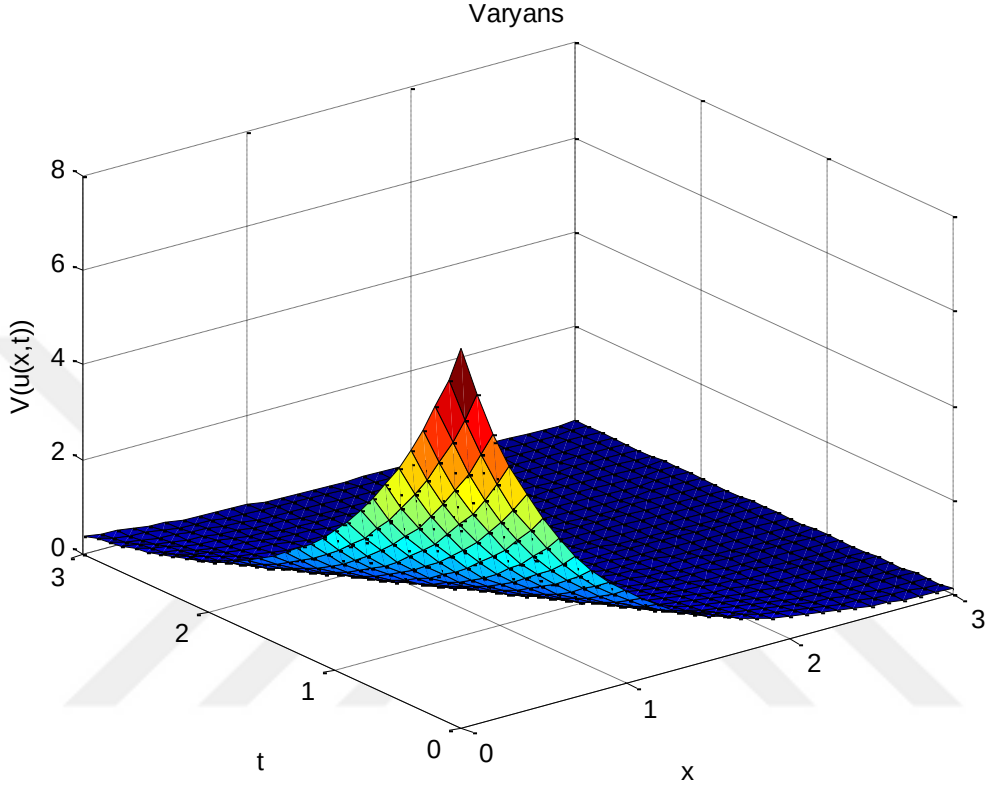
$Var[1] = 0$ olur.

$$\begin{aligned} &= 0 + e^{2\left(-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)} Var[A] \\ &= e^{2\left(-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)} Var[A] \end{aligned}$$

$2b^2 = 8$ özel değeri için

$$Var[u(x, t)] = 8e^{2\left(-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)} \quad (4.120)$$

(4.120) bulunur.



Şekil 23. denklem (4.120)'deki $u(x, t)$ 'in varyans değeri

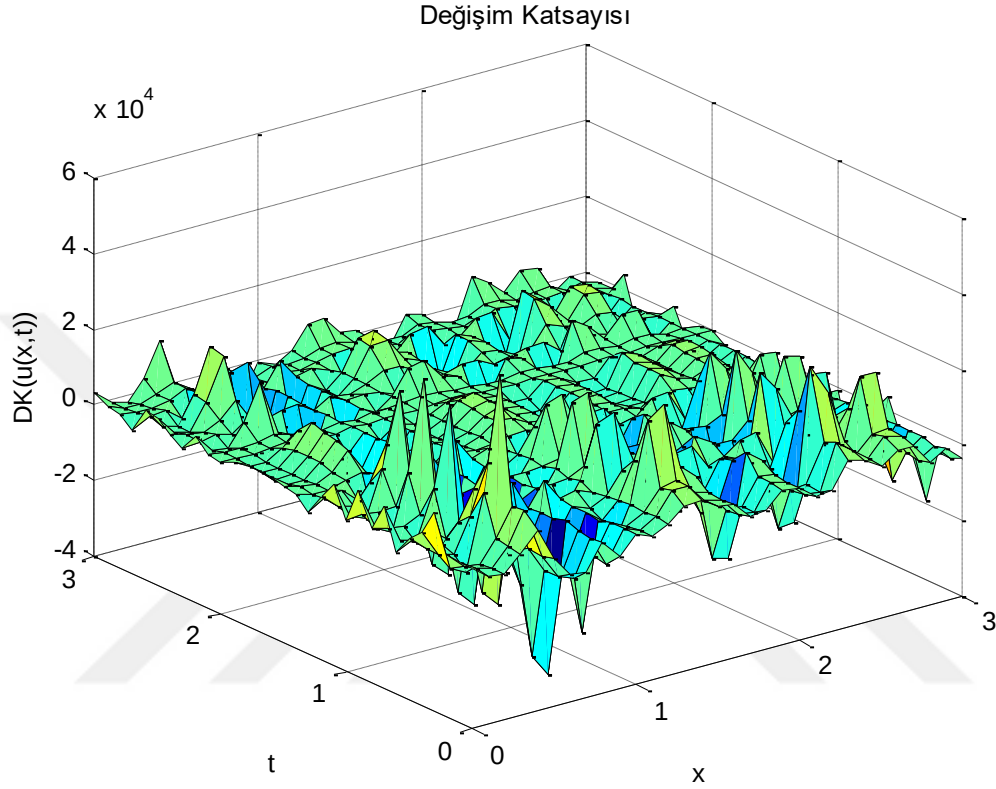
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{8e^{2\left(-\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(x, t)]}{E[u(x, t)]} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{8e^{\left(2\left(\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)\right)}}}{1 - \left[e^{\frac{x+\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}\right]} x 100 \quad (4.121)$$



Şekil 24. denklem (4.121)'deki $u(x, t)$ 'in değişim katsayı değeri

Örnek 8:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = A \sinh(x) \quad (4.122)$$

başlangıç koşulu ile $A \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow A \sim N(2, 4)$ normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Aşağıdaki gibi (4.122)'e HAM yöntemi uygulanırsa;

$u_0(x, t) = A \sinh(x)$ başlangıç yaklaşımı ve lineer olmayan operatör

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \quad (4.123)$$

ve lineer operatör:

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} \quad (4.124)$$

$L(c_1(x)) = 0$, $c_1(x)$ integrasyon sabiti.

$$L[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{u}_m, t) \quad (4.125)$$

denklem kullanılarak,

$$R_m[\vec{u}_{m-1}] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \quad (4.126)$$

ve $m \geq 1$ için denklem (4.125)'in m. mertebeden deformasyon denklemin çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + hH(r, t)L^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))]$$

bulunur. $m \geq 1$, $\chi_m = 1$, $h = -1$ ve $H(r, t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} R_1(\vec{u}_0(x, t)) &= \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + i \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} \\ &= i \operatorname{Asinh}(x) \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = \chi_1 u_0(x, t) + hL^{-1}[R_1 \vec{u}_0(x, t)]$$

$$u_1(x, t) = \operatorname{Asinh}(x) + \hbar \int (i \operatorname{Asinh}(x)) dt$$

$$u_1(x, t) = \operatorname{Asinh}(x) - i \operatorname{Asinh}(x)t$$

$$u_2(x, t) = \operatorname{Asinh}(x) - i \operatorname{Asinh}(x)t + \frac{1}{2} i^2 \operatorname{Asinh}(x)t^2$$

$\vdots$

$$u_3(x, t) = \operatorname{Asinh}(x) - i \operatorname{Asinh}(x)t + \frac{1}{2} i^2 \operatorname{Asinh}(x)t^2 - \frac{1}{6} i^3 \operatorname{Asinh}(x)t^3$$

bu şekilde devam edilerek kapalı formda çözümü

$$u(x, t) = \operatorname{Asinh}(x) e^{-it} \quad (4.127)$$

elde edilir.

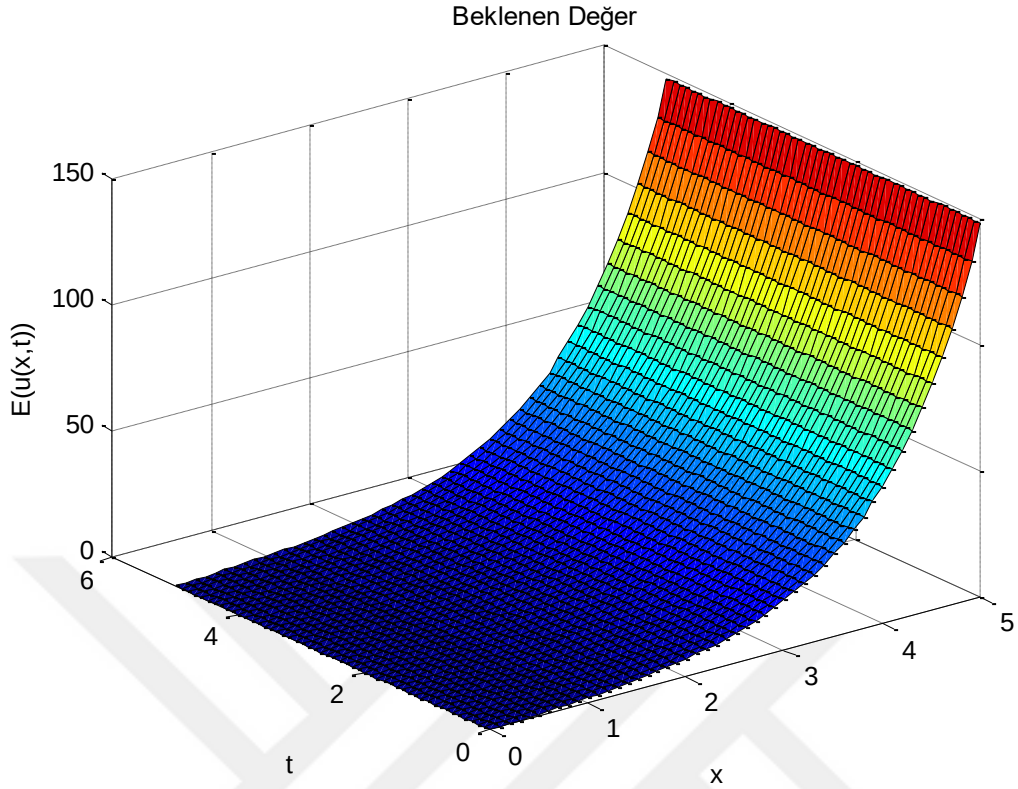
(4.127)'in beklenen değeri (4.125) deki normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E[\operatorname{Asinh}(x) e^{-it}] \\ &= E[\sinh(x) e^{-it}] E[A] \\ &= \sinh(x) e^{-it} \mu \end{aligned}$$

$\mu = 2$ özel değeri için

$$E[u(x, t)] = 2 \sinh(x) e^{-it} \quad (4.128)$$

(4.128) bulunur.



Şekil 25. denklem (4.128)'deki $u(x, t)$ 'in beklenen değeri

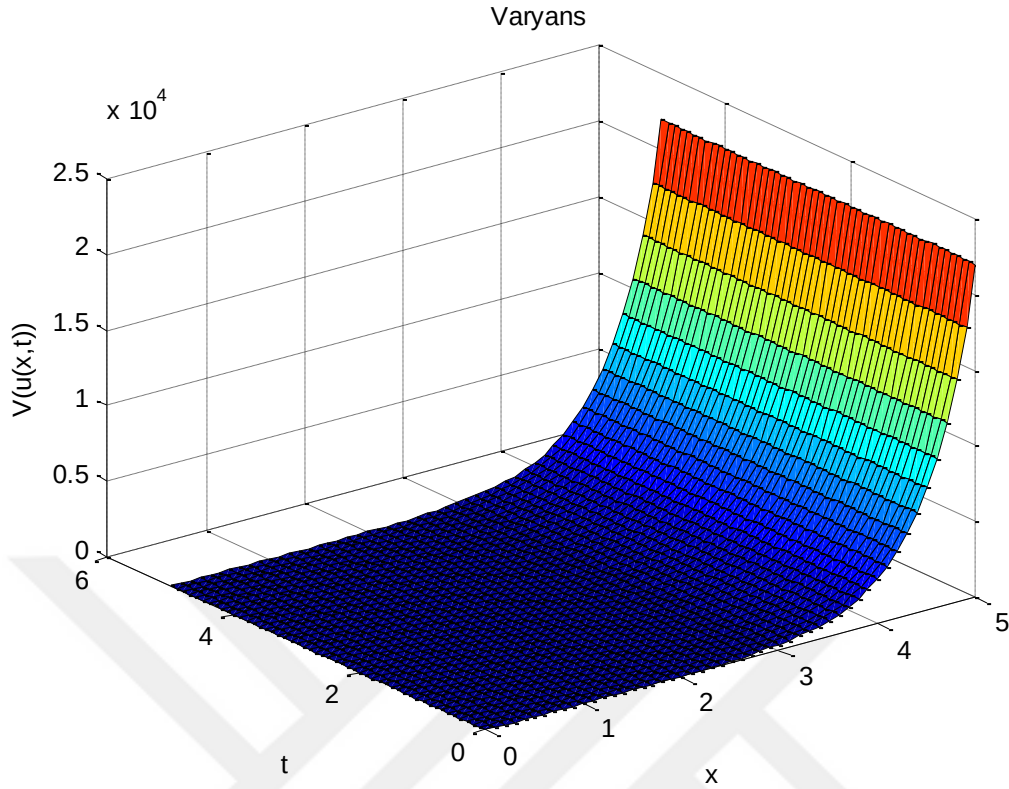
(4.128)'in Varyans değerini (4.10)'deki normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= Var[A \sinh(x) e^{-it}] \\ &= e^{2(-it)} \sin^2 h(x) Var[A] \end{aligned}$$

$\sigma^2 = 4$ özel değeri için

$$Var[u(x, t)] = 4e^{2(-it)} \sin^2 h(x) \quad (4.129)$$

(4.129) bulunur.



Şekil 26. denklem (4.129)'deki $u(x, t)$ 'in varyans değeri

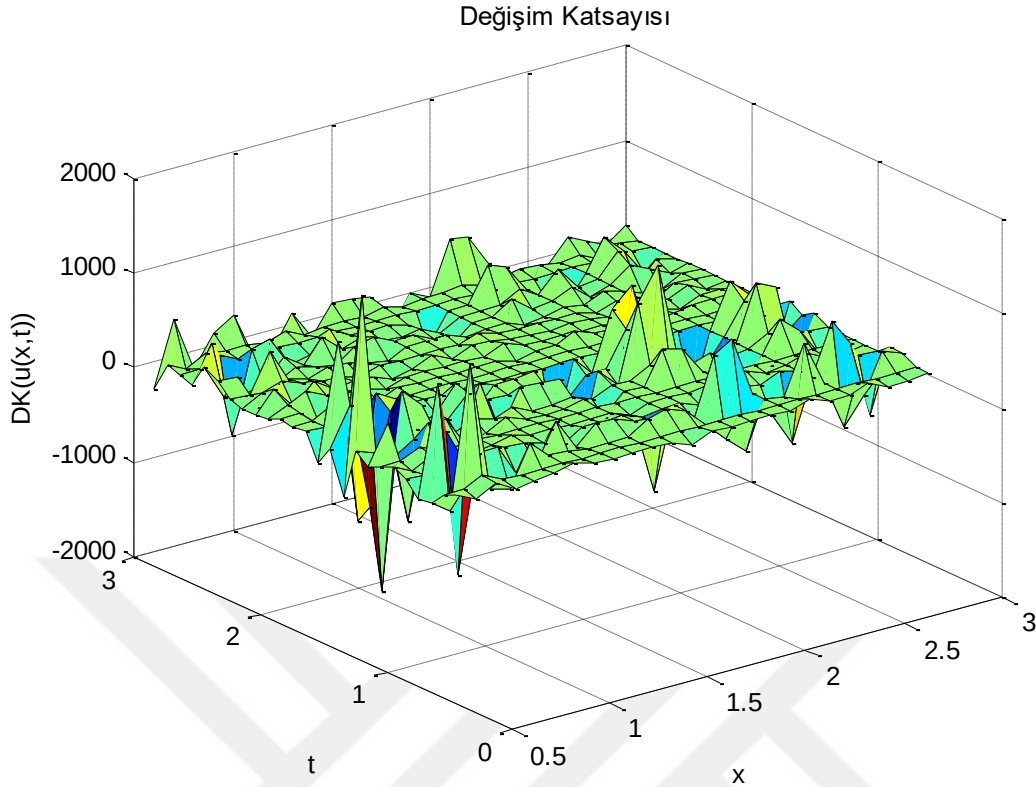
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{4e^{2(-it)} \sin^2 h(x)}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(x, t)]}{E[u(x, t)]} \times 100 =$$

$$\frac{\sqrt{4e^{2(-it)} \sin^2 h(x)}}{2sinh(x)e^{-it}} \times 100 \quad (4.130)$$



Şekil 27. denklem (4.130)'deki $u(x, t)$ 'in değişim katsayı değeri

Örnek 9:

$u_t + iu_{xx} + u + 8iu = 0, x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = Ae^{3xi}$ (4.131)
başlangıç koşulu ile $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \rightarrow X \sim \text{Gamma}(1, 3)$ Laplace dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopy Analiz Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

Aşağıdaki gibi (4.131)'e HAM yöntemi uygulanırsa;

$u_0(x, t) = Ae^{3xi}$ başlangıç yaklaşımı ve lineer olmayan operatör

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} \quad (4.132)$$

$$u_m(x, t) = u_{m-1}(x, t) - L^{-1}(R_m(u_{m-1}, x, t))$$

denklem kullanılarak,

$$R_m[\vec{u}_{m-1}, x, t] = \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} + u_{m-1}(x, t)i \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + 8iu_{m-1}(x, t)$$

bulunur.

$$R_1(\vec{u}_0(x, t)) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + u_0(x, t) \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - 8iu_0(x, t)$$

$$\begin{aligned}
&= -Aie^{3xi} \\
u_1(x, t) &= \chi_1 u_0(x, t) + \hbar L^{-1}[R_1 \vec{u}_0(x, t)] \\
u_1(x, t) &= Ae^{3xi} + -Aie^{3xi} t \\
u_2(x, t) &= u_1(x, t) + \hbar L^{-1}[R_1 \vec{u}_1(x, t)] \\
R_1 u_1 &= Ae^{3xi} t \\
u_2(x, t) &= Ae^{3xi} + -Aie^{3xi} t - \frac{1}{2} Ae^{3xi} + -Ae^{3xi} t^2 \\
&\vdots \\
u_3(x, t) &= Ae^{3xi} + -Aie^{3xi} t - \frac{1}{2} Ae^{3xi} + -Ae^{3xi} t^2 - \frac{1}{6} Ae^{3xi} t^3
\end{aligned}$$

bu şekilde devam edilerek kapalı formda çözümü

$$u(x, t) = Ae^{-(3x+t)} \quad (4.133)$$

elde edilir.

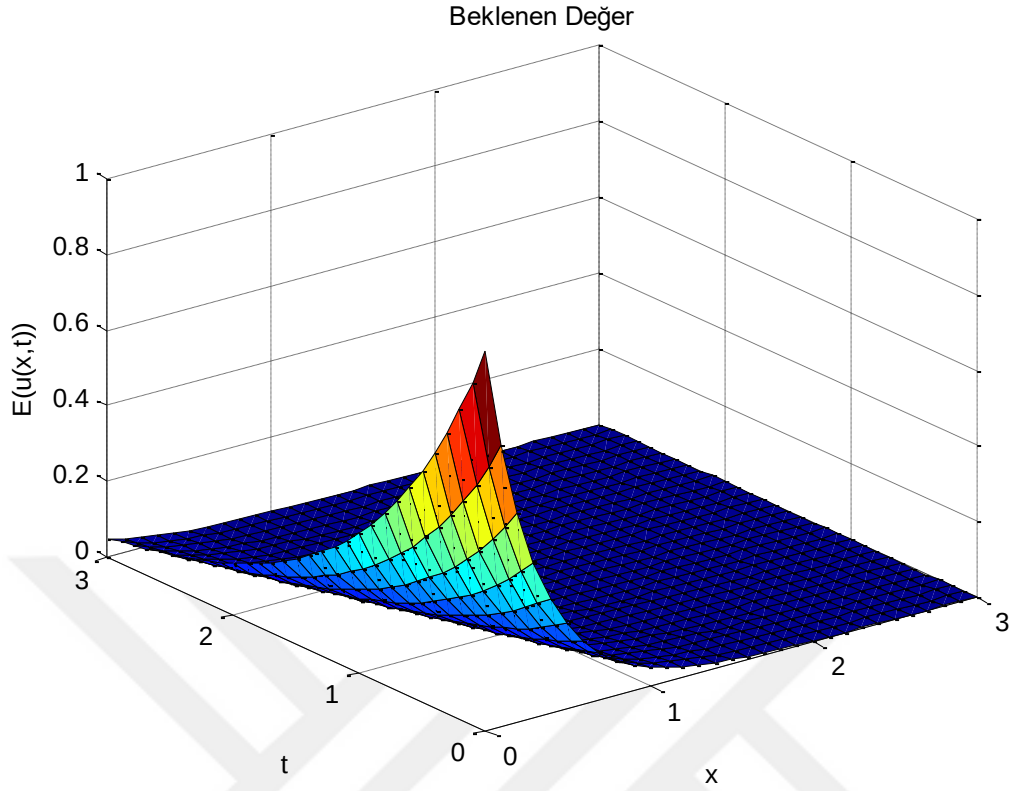
(4.133)'in beklenen değeri (4.110) deki normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= E[Ae^{-(3x+t)}] \\
&= [e^{-(3x+t)}] E[A] \\
&= [e^{-(3x+t)}] \alpha
\end{aligned}$$

$a = 1$ özel değeri için

$$E[u(x, t)] = [e^{-(3x+t)}] \quad (4.134)$$

(4.134) bulunur.



Şekil 28. denklem (4.134)'deki $u(x, t)$ 'in beklenen değeri

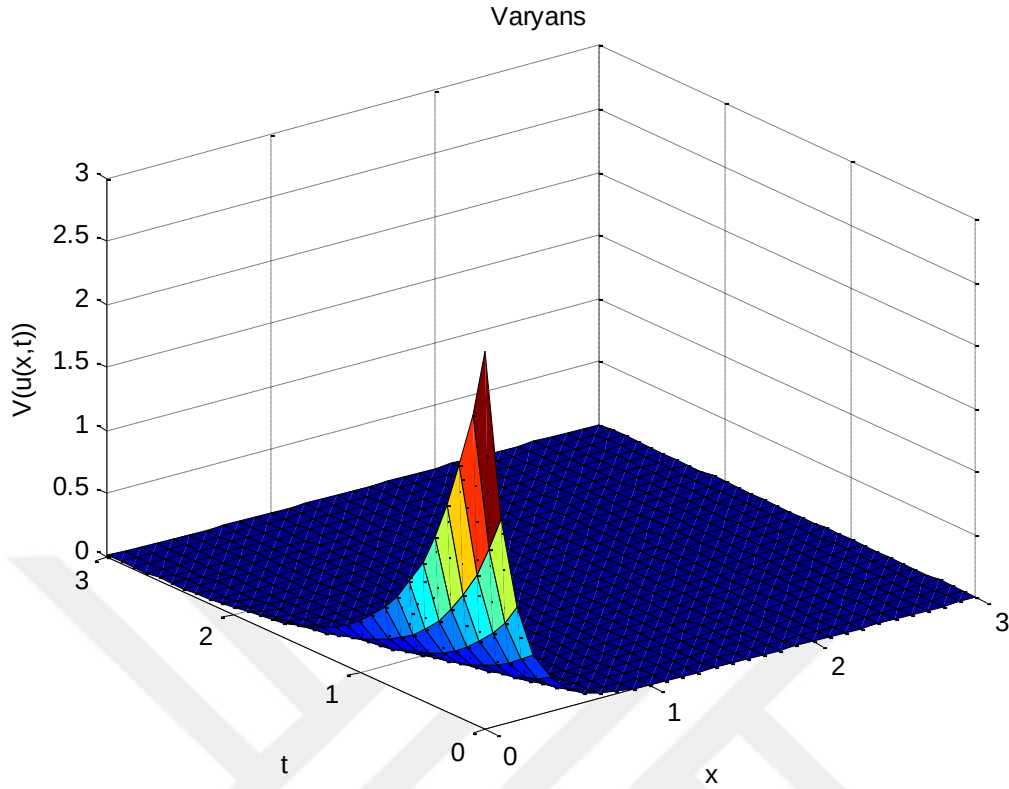
(4.133)'in Varyans değerine normal dağılım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= Var[Ae^{-(3x+t)}] \\ &= e^{2(-3x-t)} Var[A] \end{aligned}$$

$\sigma^2 = 3$ özel değeri için

$$Var[u(x, t)] = 3e^{2(-3x-t)} \quad (4.135)$$

(4.135) bulunur.



Şekil 29. denklem (4.135)'deki $u(x,t)$ 'in varyans değeri

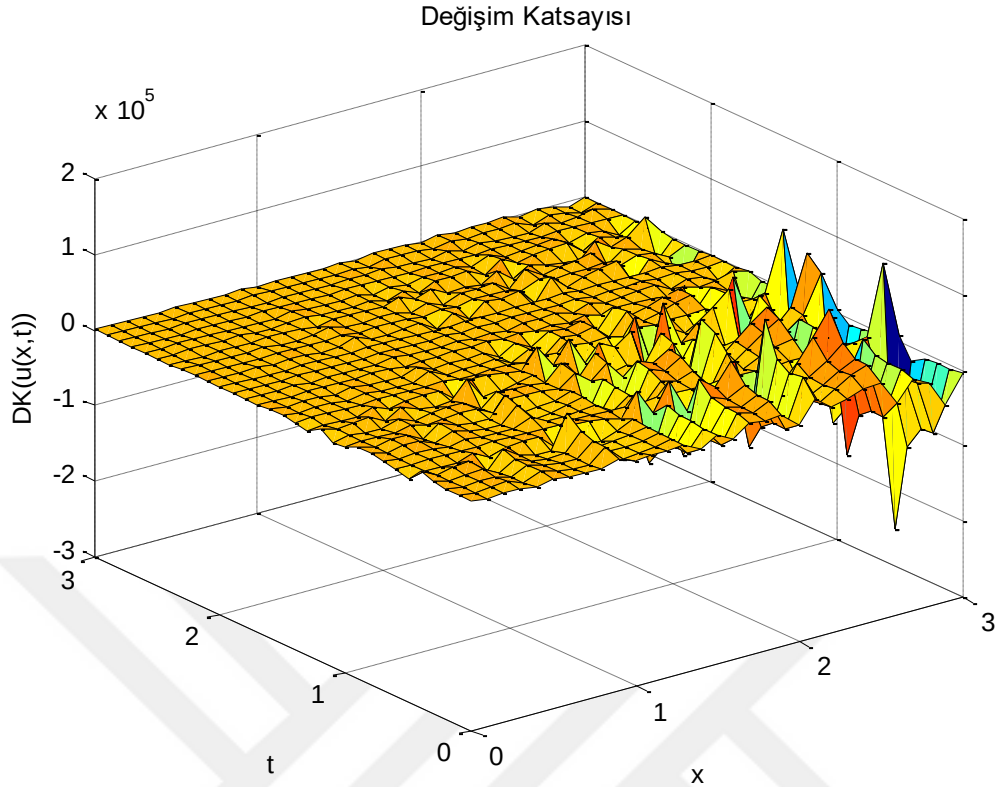
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[u(x,t)] = \sqrt{Var[u(x,t)]} = \sqrt{3e^{2(-3x-t)}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(x,t)]}{E[u(x,t)]} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{3e^{2(-3x-t)}}}{e^{-(3x+t)}} \times 100 \quad (4.136)$$



Şekil 30. denklem (4.136)'deki $u(x, t)$ 'in değişim katsayı değeri

4.4. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin $Q - HAM$ Metodu ile Analizleri

Aşağıdaki diferansiyel denklemi göz önünde bulundurun:

$$N[u(x, t)] - f(x, t) = 0 \quad (4.137)$$

N doğrusal olmayan bir operatör, (x, t) bağımsız değişkenleri, $f(x, t)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

Sıfır dereceli deformasyon denklemini oluşturalım.

$$(1 - nq)L[Q(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar H(x, t)(N[x, t; q] - f(x, t)) \quad (4.138)$$

$n \geq 1, q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ gömülü parametreyi belirtir. $L, f = 0$ olduğunda $L[f] = 0$ özelliğine sahip bir yardımcı lineer operatördür, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir, $H(x, t)$, sıfır olmayan bir yardımcı işlevi belirtir.

$q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ denklemi (4.138) olduğunda

$$\emptyset(x, t; 0) = u_0(x, t) \quad , \quad \emptyset\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = u(x, t) \quad (4.139)$$

sırasıyla.

Böylece q , 0 ' dan $\frac{1}{n}$ ye arttıkça, $\emptyset(x, t; q)$ çözümü, $u_0(x, t)$ ilk tahmininden $u(x, t)$ çözümüne değişir.

$u_0(x, t)$, L , $\hbar$, $H(x, t)$ ögesini seçme özgürlüğüne sahip olarak, denklem (4.138)'nin $\emptyset(x, t; q)$ çözümünün $q \in [0, \frac{1}{n}]$ için mevcut olması için hepsinin uygun şekilde seçebileceğini varsayabiliriz. Taylor serisinde $\emptyset(x, t; q)$ 'yu genişletirken, bir tanesinde şunlar bulunur:

$$\emptyset(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) q^m \quad (4.140)$$

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!!} \frac{\partial^m \emptyset(x, t; q)}{\partial q^m} \big|_{q=0} \quad (4.141)$$

$\hbar$, $H(x, t)$, $u_0(x, t)$, L nin, (4.140) serisinin $q = \frac{1}{n}$ de yakınsadığı şekilde uygun şekilde seçildiğini varsayalım ve

$$u(x, t) = \emptyset\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (4.142)$$

$u_r(x, t) = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_r(x, t)\}$, vektörünü tanımlama denklemini (4.138) m kez q ' ya göre ayırt etmek ve ardından $q = 0$ ayarlamak ve son olarak bunları $m!$ ' le bölmek m . dereceden deformasyon denklemine sahibiz:

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) \quad (4.143)$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) = \frac{1}{(m-1)!!} \frac{\partial^{m-1} (N[\emptyset(x, t; q)] - f(x, t))}{\partial q^{m-1}} \big|_{q=0}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ n & m > 1 \end{cases}$$

$m > 1$ için $u_m(x, t)$ 'nin, orijinal problemde gelen lineer sınır koşulları ile lineer denklem (4.1143) tarafından yönetildiği vurgulanmalıdır. $\left(\frac{1}{n}\right)^m$ faktörünün varlığından dolayı, daha fazla yakınsama şansı ortaya çıkabilir veya standart HAM'den daha iyi bir şekilde çok daha hızlı yakınsama elde edilebilir. Denklem (4.138)'deki $n = 1$ durumunun standart HAM olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 10:

Aşağıda rastgele başlangıç ve sınır koşulları ile verilen kısmi diferansiyel denklemin çözümünü $q - HAM$ yöntemiyle elde ederek çözüm davranışlarını inceleyiniz.

$$u_{tt} = u_{xx} - 8u \quad 0 < x < \pi \quad (4.144)$$

Sınır koşulu: $u(0, t) = A \sin(3t)$

Başlangıç koşulu: $u(x, 0) = 0$

$$u(\pi, t) = -A \sin(3t), \quad u_t(x, 0) = 3A \cos x$$

Burada $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 5)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişkendir.

Çözüm:

(4.144) denklemine q – HAM ni uygulayalım. Bunun için bir lineer operatör seçelim:

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial t^2}$$

$L[c_1] = 0$ özelliği ile; burada c_1 sabittir.

Uygun başlangıç yaklaşımı olarak

$$u_0(x, t) = 3At \cos x$$

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} + 8\phi(x, t; q)$$

olarak bir nonlinear (lineer olmayan) operatör tanımlanır.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemini oluşturalım.

$$(1 - nq)L[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar H(x, t)N[\phi(x, t; q)]$$

$H(x, t) = 1$, ve m . mertebeden deformasyon denklemi;

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))$$

$m \geq 1$ için başlangıç koşulu $u_m(x, t) = 0$

burada,

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} R_m(\vec{u}_{m-1}(x, t)) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; t)]}{\partial q^{m-1}} \big|_{q=0} \\ &= \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + 8u_{m-1}(x, t) \end{aligned}$$

$m \geq 1$ için denklem (4.133)'in çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \int_0^t \int_0^t R_m(\vec{u}_{m-1}(x, s)) ds ds + c_1$$

c_1 başlangıç koşulları ile belirlenen bir integrasyon sabiti.

$$u_m(x, 0) = \chi_m u_{m-1}(x, 0) + c_1$$

$m = 1$ için;

$$u_1(x, 0) = \chi_1 u_0(x, 0) + c_1 = 0$$

$$L[u_1(x, t)] = \hbar R_1[u_0(x, t)]$$

$$u_1(x, t) = \hbar \int_0^t \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} + 8u_0(x, t) \right] dt dt$$

$$u_1(x, t) = \frac{9}{2} \hbar A \cos x (t^3) = \hbar \frac{(3t)^3}{3!} A \cos x$$

$$\left(\hbar = -1 \text{ için } u_1 = -\frac{(3t)^3}{3!} A \cos x \right)$$

$m = 2$ için;

$$L[u_2(x, t) - u_1(x, t)] = \hbar R_2[u_1(x, t)]$$

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) + \hbar \int_0^t \int_0^t R_2[u_1(x, t)] dt dt$$

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) + \hbar \int_0^t \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + 8u_1(x, t) \right] dt dt$$

$$u_2(x, t) = \hbar \frac{(3t)^3}{3!} A \cos x + \int_0^t \int_0^t \hbar \left[27t A \cos x \hbar + \frac{9}{2} A \hbar \cos x t^3 + 8\hbar \frac{(3t)^3}{3!} A \cos x \right] dt dt$$

$$u_2(x, t) = \frac{9}{2} \hbar A \cos x t^3 + \frac{9}{2} \hbar^2 A \cos x t^3 + \frac{81}{40} \hbar^2 A \cos x t^5$$

$$= \frac{9}{2} A \cos t^3 (\hbar + \hbar^2) + \frac{81}{40} \hbar^2 A \cos t^5$$

$$\left(\hbar = -1 \text{ için } u_2(x, t) = \frac{81}{40} A \cos x t^5 = \frac{243}{120} A \cos x t^5 = \frac{(3t)^5}{5!} A \cos x \right)$$

böylece devam edilirse

$u_m(x, t)$, ($m = 3, 4, 5, 6, \dots$) benzer şekilde hesaplanabilir. q –HAM ile ifade edilen seri çözüm aşağıdaki formda yazılabilir.

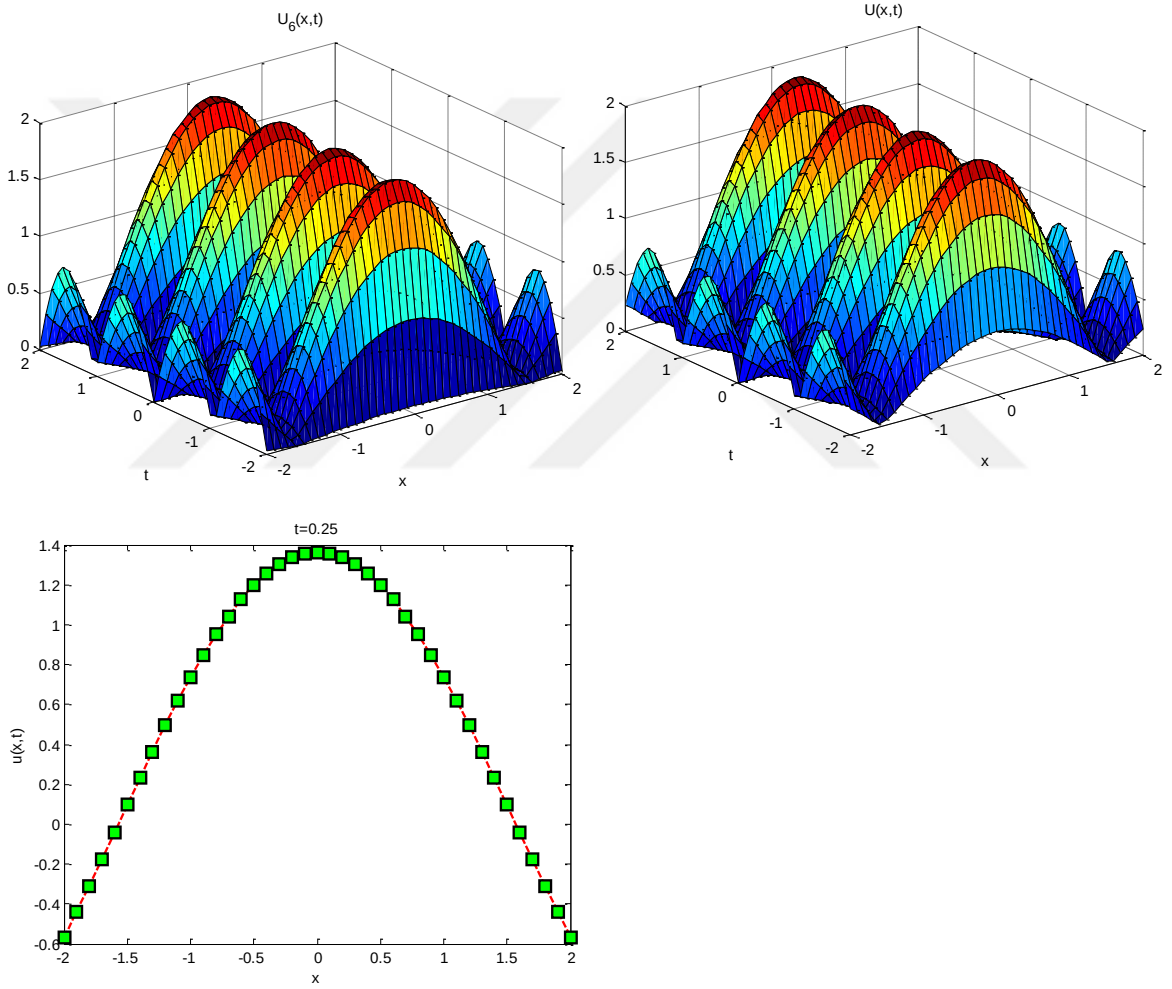
$$u(x, t; n; \hbar) \cong u_M(x, t; n; \hbar) = \sum_{i=0}^M u_i(x, t; n; \hbar) \left(\frac{1}{n} \right)^i$$

$$u(x, t; n; \hbar) = u_0(x, t; n; \hbar) + u_1(x, t; n; \hbar) \left(\frac{1}{n} \right)^1 + u_1(x, t; n; \hbar) \left(\frac{1}{n} \right)^2$$

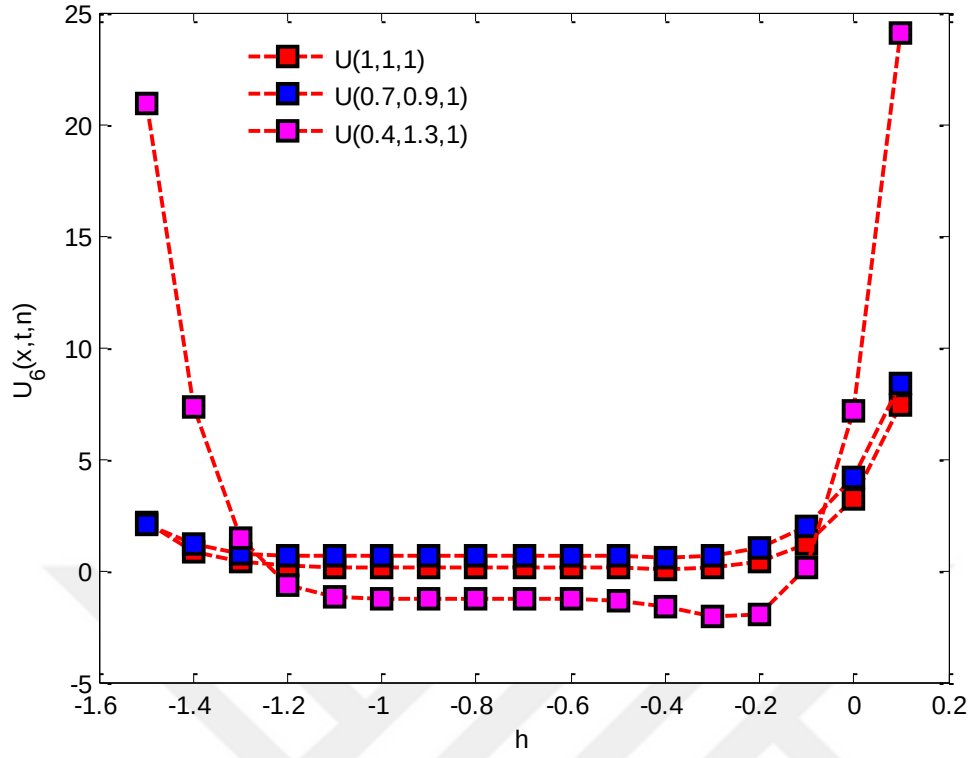
$$u(x, t; n; \hbar) = 3A t \cos x + \hbar \frac{(3t)^3}{3!} A \cos x \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} A \cos x t^3 (\hbar + \hbar^2) + \hbar^2 \frac{(3t)^5}{5!} A \cos x$$

Özel durumda $n = 1$ ve $\hbar = -1$ için

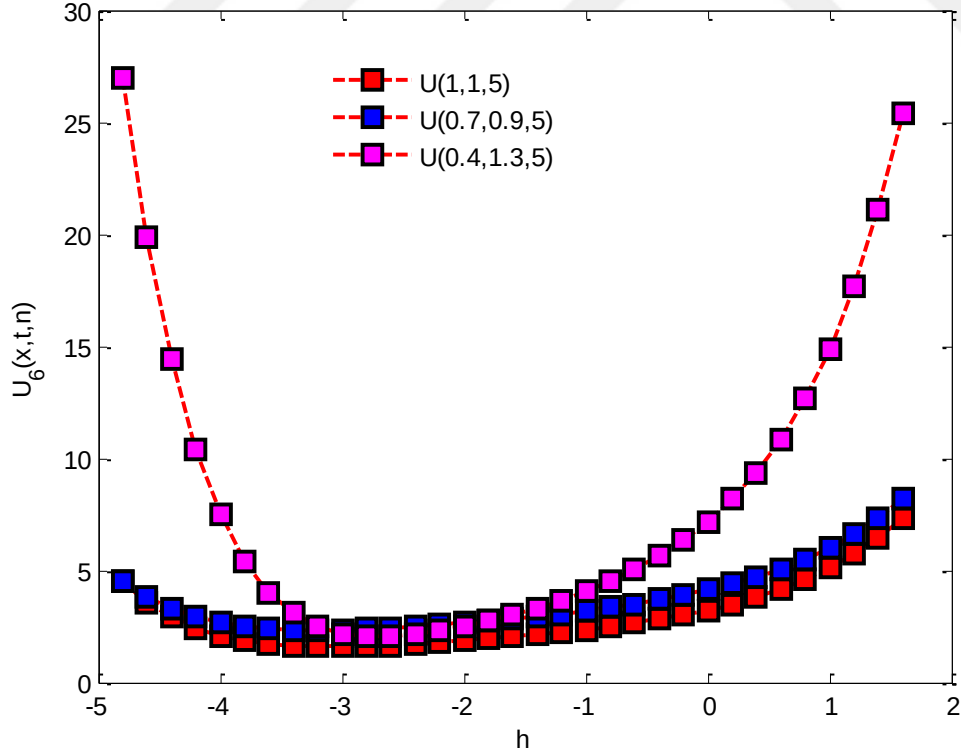
$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 3At\cos x - \frac{(3t)^3}{3!}A\cos x + \frac{(3t)^5}{5!}A\cos x + \dots \\
&= A\cos x \left[3t - \frac{(3t)^3}{3!} + \frac{(3t)^5}{5!} + \dots \right] \\
u(x,t) &= A\cos(x) \sin(3t)
\end{aligned}$$



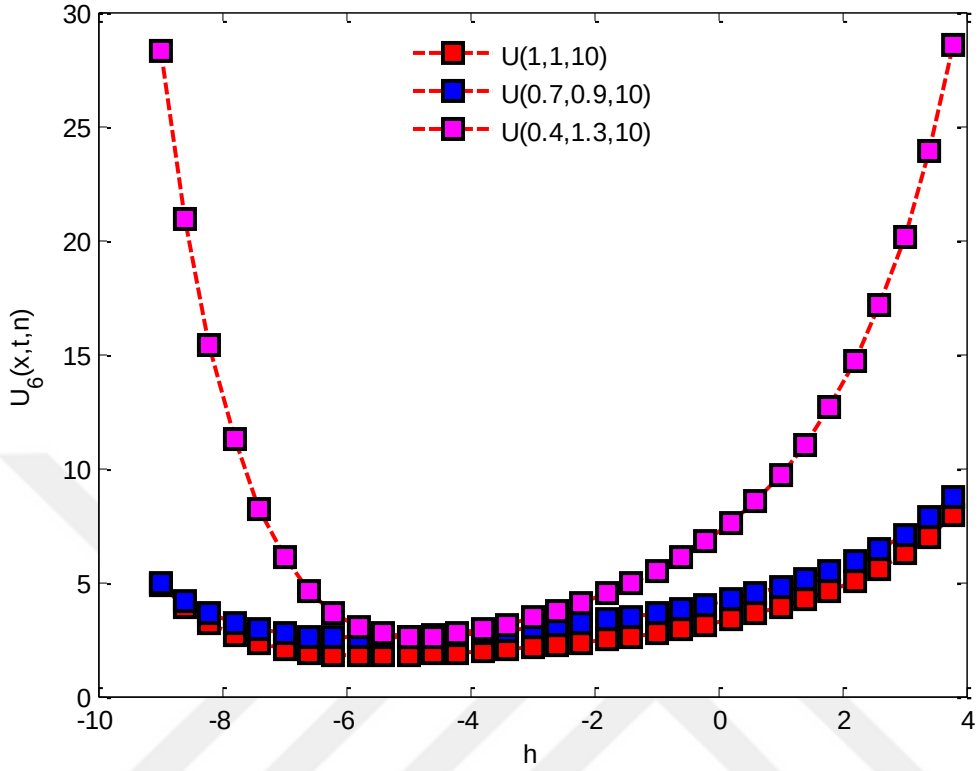
Şekil 31. $A = 2$ seçildiğinde (4.144) denklemi için $h = -1, n = 1$ için q – HAM ve tam çözüm grafiği



Şekil 32. x, t 'nin farklı değeri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM ($q - HAM$; $n = 1$) ile h eğrisi



Şekil 33. x, t 'nin farklı değeri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM ($q - HAM$; $n = 5$) ile h eğrisi



Şekil 34. x, t 'nin farklı değeri için (4.144) denkleminin $U_6(x, t, 1)$ yaklaşık çözümü için HAM ($q - HAM; n = 10$) ile $\hbar$ eğrisi

Deformasyon denkleminin seri çözümlerinden elde edilen $u_m(x)$ lerin toplamı olan $U(x)$ çözüm serisinin (4.144) denkleminin analitik çözümüne yakınsamasını sağlar ancak burada uygun bir $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi belirlemek gerekir. Burada $\hbar$ parametresi $U'(x, t)$, $U''(x, t)$ türev grafikleri çizilerek grafiklerin yatay eksene paralel olduğu aralıkta seçilir. Bulunan uygun $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olarak elde edilen çözüm serisinin problemin gerçek çözümüne yakınsaklığı kontrol altına alınmaya çalışılır.

Beklenen değeri;

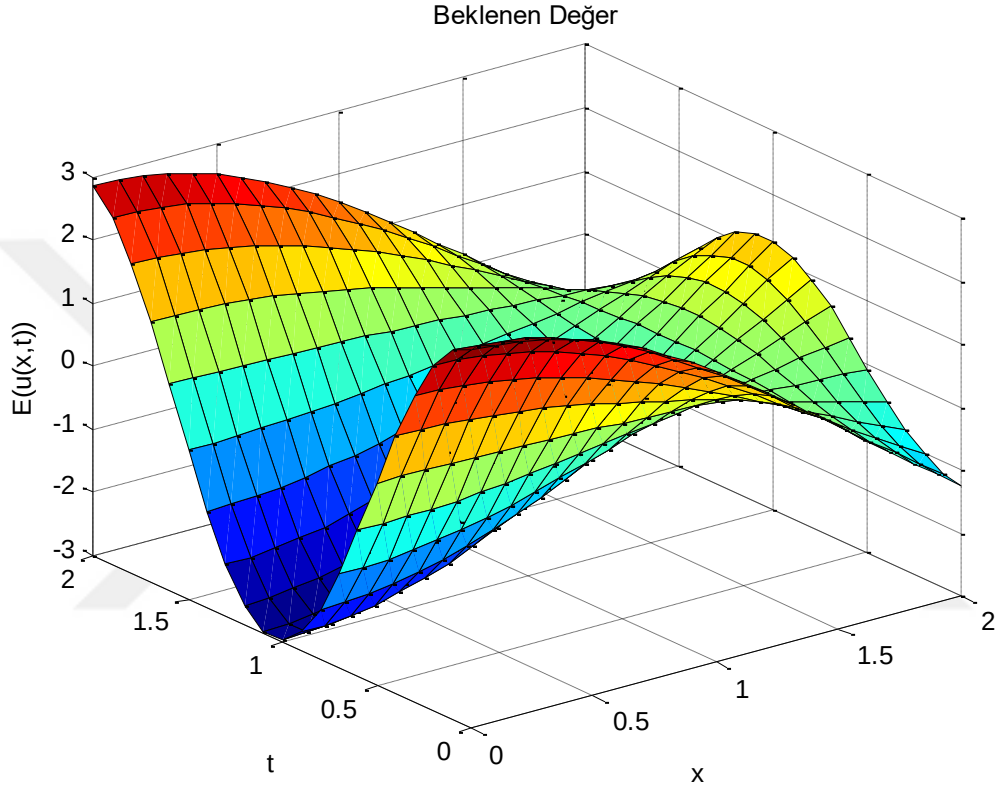
$A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 5)$ düzgün dağılıma sahip

$$E = [u(x, t)] = \cos x \sin 3t E[A]$$

$$= \cos x \sin 3t \left[\frac{\beta + \alpha}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \cos x \sin 3t \left[\frac{5+1}{2} \right] \\
&= 3 \cos x \sin 3t
\end{aligned}$$

(x, t) için Beklenen grafiği:



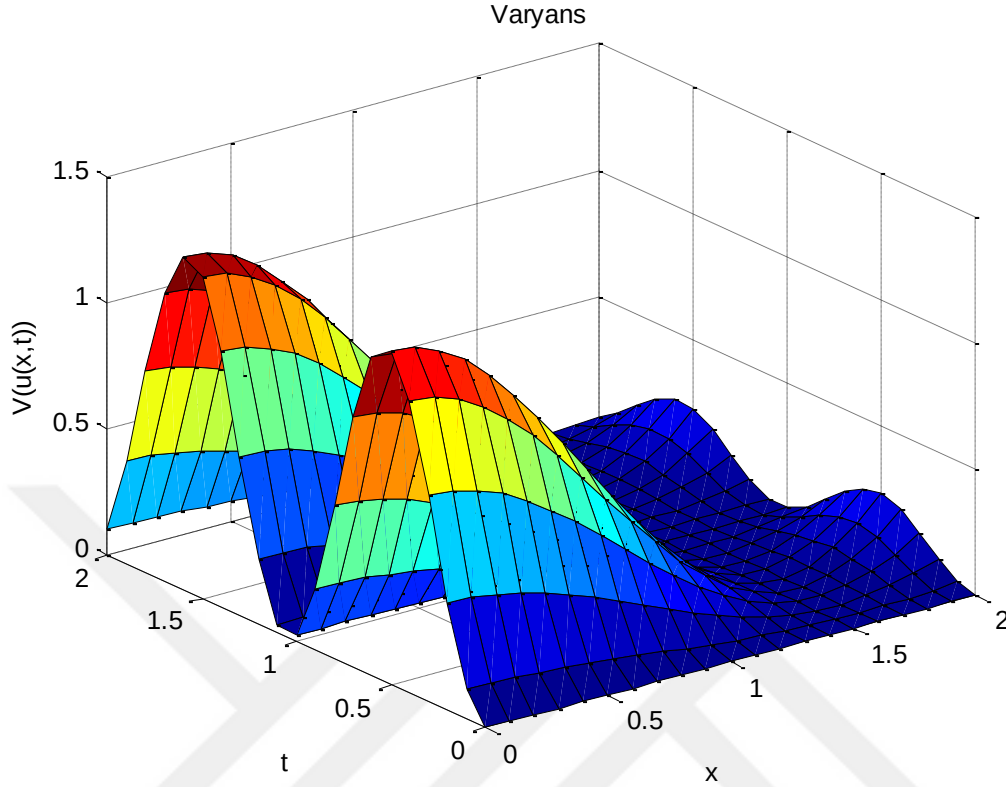
Şekil 35. denklem (4.144)'deki $u(x, t)$ 'in beklenen değeri

Varyans değeri;

$A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 5)$ düzgün dağılıma sahip

$$\begin{aligned}
Var[u(x, t)] &= (\cos x \sin 3t)^2 Var[A] \\
&= (\cos x \sin 3t)^2 \left[\frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2}{12} \right] \\
&= (\cos x \sin 3t)^2 \left[\frac{25 - 10 + 1}{12} \right] \\
&= \frac{4}{3} (\cos x \sin 3t)^2
\end{aligned}$$

$u(x, t)$ için Varyans grafiği:



Şekil 36. denklem (4.144)'deki $u(x, t)$ 'in varyans değeri

$u(x, t)$ değişim katsayısı;
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

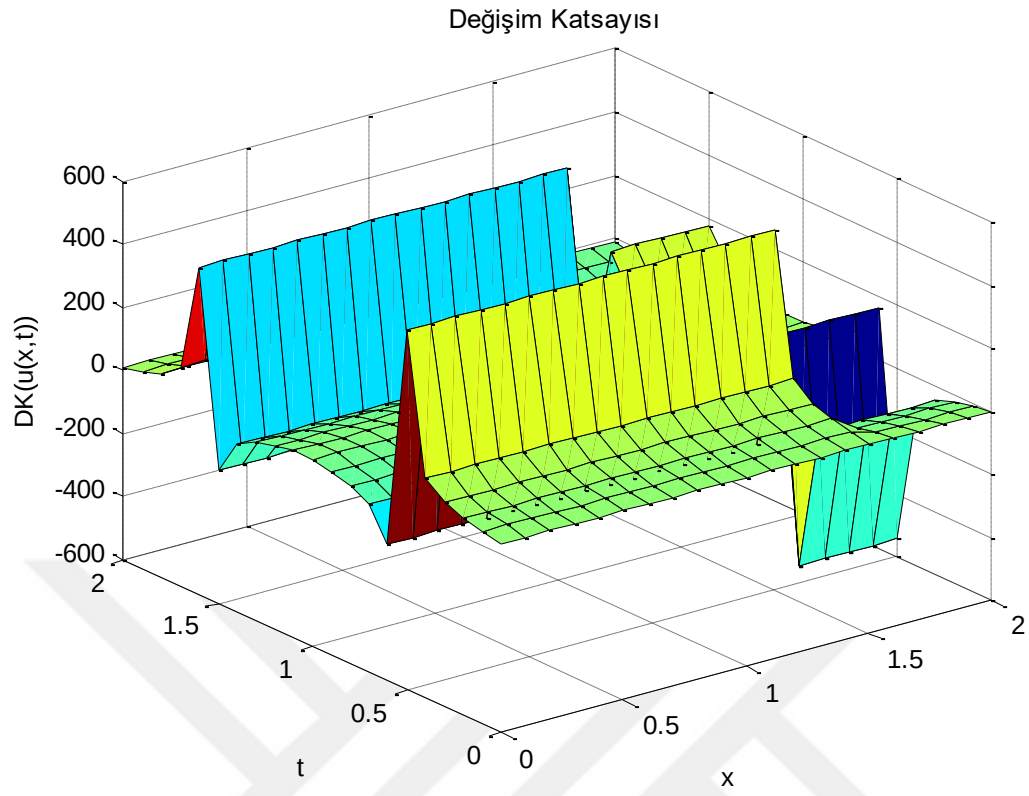
$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{\frac{4}{3} (\cos x \sin 3t)^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(x, t)]}{E[u(x, t)]} \times 100 =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{3} (\cos x \sin 3t)^2}}{3 \cos x \sin 3t} \times 100 \quad (4.145)$$

$u(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 37. denklem (4.145)'deki $u(x,t)$ 'in değişim katsayı değeri

5. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, adi ve kısmi diferansiyel denklemler başlangıç koşulları, katsayılar veya kuvvet terimleri rastgele seçilerek, rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin rast gele etkiler altında incelenmesi için normal, düzgün beta, gamma, geometri, laplace ve üstel dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılmıştır. Bu rastgele adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri için literatürde çok sık kullanılan yöntemlerden birisi olan HAM (Homotopy Analiz Metodu) ve q – HAM yöntemlerinden istifade edilmiştir. Elde edilen bu çözümlerin beklenen değer, varyans ve değişim katsayıları hesaplanarak Matlab paket programı yardımıyla grafiksel olarak gösterilmiştir.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri başlangıç koşulları ya da katsayıları sürekli zamanlı olasılık dağılımları olan düzgün, normal, beta, laplace, gamma ve üstel dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Bu rastgele hale getirilen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve değişim katsayısı hesaplanmıştır. Rastgele hale dönüştürülen adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde çok yaygın olarak kullanılan HAM ve Q-HAM yöntemlerinden faydalanılmıştır. Buna ilaveten Homotopi Analiz Metodunda $\hbar$ yardımcı keyfi parametresi bize çözüm seri için yakınsaklık hızını ayarlamak ve kontrol etmek için imkân sağladığından dolayı $\hbar$ 'ın farklı değerleri alındığında yakınsaklığın azaldığı görüldüğünden $\hbar$ için en uygun değer -1 seçilerek analizler yapılmıştır. Son olarak elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve değişim katsayısı grafikleri Matlab 2013 paket programı yardımıyla çizilmiştir.

7. ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler ve denklem sistemleri rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Rastgele hale getirilen denklemler HAM yöntemiyle yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Rastgele lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere dönüştürülerek HAM ve $q - HAM$ yöntemleriyle yaklaşık analitik çözümleri bulunabilir. Literatür de çok sık kullanılan homotopy pertürbasyon, varyasyonel iterasyon ve Adomian ayrışım yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümler bulunabilir.

KAYNAKÇA

- Abbasbandy, S. (2007). The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation. *Physics Letters A*, 361(6), 478-483.
- Abbasbandy, S. (2006). The application of the homotopy analysis method to nonlinear quations arising in heat transfer. *Phys Lett A*. 360: 109–113.
- Akdeniz, F. (2022). *Olasılık ve İstatistik*. Akademisyen Kitapevi.
- Akinyemi, L., Olaniyi, S. I. and Mensah- Owusu, I. (2022). Iterative Methods for Solving Seventh-Order Nonlinear Time Fractional Equations. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 8(1), 147-175.
- Alkan, A. (2019). *Kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin Homotopi analiz metodu ile nümerik çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, 59s.
- Ayub, M., Rasheed, A. and Hayat, T. (2003). Exact flow of a third grade fluid past a porous plate usinghomotopy analysis method, *Int. J. Eng. Sci.* 41: 2091–2103.
- Babaoğlu, M. (2009). *Diferansiyel denklemleri sayısal çözümlerinde adomian ayrışım metodu ve Homotopi analiz metodu'nun karıştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş, 83s.
- Bataineh, S. A., Noorani, M. S. M. and Hashim, I. (2007). Solving systems of ODEs by Homotopy analysis method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13: 2060-2070.
- Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Merdan, M. (2017). Stochastic and random models of Malaria disease with vertical transmission. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1), 269-277.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2018). Generalized beta parameters for a -type random model of Polio transmission, *AIP Conference Proceedings* 2037(1), 020004.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T. ve Najmuldeen, M. (2016). Mathematical modeling of Dengue disease under random effects. *Mathematical Sciences and*

Applications E-Notes, 4(2), 58-70.

- Bekiryazici, Z., Kesemen, T., Merdan, M. ve Khaniyev T. (2022). A modification of approximate random characteristics for a model of Zika virus transmission, *Thermal Science* 26 (4 Part A), 3067-3077
- Cihan, A. (2015). *Fark denklemlerinin Homotopi analiz metodu ile incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir, 61s.
- Çil, A. (2013). *Pantograph denklemlerin Homotopi analiz metodu ile çözümü*, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir, 57s.
- Feller, W. (1968). Extending the iterative logarithm law to variables without variance, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18 (4), 343-355
- Erdoğan, Ş. (2012). *Homotopi analiz metodu'nun farklı tipte diferansiyel denklemlere uygulanışı ve adomian Decomposition metodu, diferansiyel transform Metodu ile karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 65s.
- Hariharan, G. (2017). A homotopy analysis method for the nonlinear partial differential equations arising in engineering, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 18:2-3, 191-200.
- Hayat, T. and Sajid, M. (2007). On analytic solution for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder. *Physics Letters A.*, 361: 316-322
- Hayat, T., Khan, M. and Ayub, M. (2004). On the explicit analytic solutions of an Oldroyd 6-constant fluid. *Int. J. Engineering Science*. 42: 123–135.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z. ve Kesemen T. (2017). *Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Leal-Vazquez, H., Koçak, H. and Ateş, İ. (2016). Rational Approximations for Heat Radiation and Troesch's Equations. *International Journal of Computational Methods* Vol. 13, No. 6 1650039 (14 pages).
- Liao, S. J. (2012). *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Liao, S. J. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Appl Math Comput*, 147:499–513.
- Liao, S. J. (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. *Ph.D thesis, Shanghai Jiao Tong University*.

- Liao, S. J. (1995). An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example. *Int J Nonlinear Mech*, 30:371–80.
- Liao, S. J. (1997). An approximate solution technique which does not depend upon small parameters (II): an application in fluid mechanics. *Int J Nonlinear Mech*, 32:815–22.
- Liao, S. J. (1999). An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems. *Int J Nonlinear Mech*, 34(4):759–78.
- Liao, S. J. (2002). Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems. *J Fluid Mech*, 453:411–25.
- Liao, S. J. (2003a). Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. *Ist. End., Chapman and Hall, CRC Press, Boca Raton, ISBN-10: 158488407X, pp:336.*
- Liao, S. J. (2003b). On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet. *J. Fluid Mech.*, 488: 189-212.
- Liao, S. J. (2005). A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* 48: 2529-2539.
- Liao, S. J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14: 983–997.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z. Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2017). Deterministic stability and random behavior of a Hepatitis C model. *PloS One*, 12(7), e0181571.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z. Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2018). Analyzing the dynamics of Ebola transmission with random effects. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 22.
- Merdan, M. ve Khaniyev, T. (2008). On the Behavior of Solutions under the influence of stochastic Effect of Avian-Human influenza epidemic Model, *International Journal of Biotechnology and Biochemistry*, 4(1): 75-100.
- Merdan, M. ve Atasoy, N. (2023). On the solutions of fractional random ordinary differential equations with the Residual power series method, *Alexandria Engineering Journal* 70: 169-177
- Merdan, M., Merdan, M. ve Şahin, R. (2023). Investigation of Behavior on Solutions of Lane–Emden Complex Differential Equations by a Random Differential Transformation Method, *Complexity* ,3713454
- Mohamed, S. M. and Hamed, Y. S. (2016). Solving the convection–diffusion equation by means of the optimal q-homotopy analysis method (Oq-HAM). *Results in Physics*.6:20-25.

- Odibat, Z. M. (2010). Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*. 60(4):479–487
- Sajid, M., Ahmad, I., Hayat, T. and Ayub, M. (2009). Unsteady flow and heat transfer of a second grade fluid over a stretching sheet. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 14: 96-108.
- Soong, T. (1973). Random differential equations in science and engineering (Book). New York, Academic Press, Inc.(Mathematics in Science and Engineering)., 103.
- Hayat, T., Khan, M. and Asghar, S. (2004). Homotopy analysis of MHD flows of an Oldroyd 8-constant fluid. *Acta Mech*. 168: 213–232.
- Hayat, T., Khan, M. and Asghar, S. (2004). Magneto hydrodynamic flow of an Oldroyd 6-constant fluid. *Appl. Math. Comput*. 15: 417–425.
- Wu, W. and Liao, S. J. (2004). Solving solitary waves with discontinuity by means of the homotopy analysis method. *Chaos, Solitons and Fractals* 23: 1733–1740.
- Wazwaz, A. M. (2014). The variational iteration method for solving linear and nonlinear ODEs and scientific models with variable coefficients. *Central European Journal of Engineering*, 4(1):64-71.
- Wu, and M. S. (1982). Modified variational solution of the Thomas-Fermi equation for atoms. *Phys. Rev. A*, 26(1):57–61.
- Wu, Y., Wang, C. and Liao, S. J. (2005). Solving the one-loop soliton solution of the Vakhnenko equation by means of the homotopy analysis method. *Chaos Solitons and Fractals* 23 (5):1733–1740.

ÖZGEÇMİŞ

Eda YILDIZ. İlk ve orta öğretimini Samsun/İlkadım Kazım Orbay İlköğretim Okulunda ve ile öğrenimini Samsun/İlkadım Şehit Ahmet Altunoğlu Anadolu İmam Hatip lisesinde tamamladı. 2014 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.



