

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PERİYODİK SINIR ŞARTLI KUAZİ LİNEER HİPERBOLİK
DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ**

MELİKE SATILMIŞ

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. KADİR KUTLU

TEZ JÜRİLERİ
DR. ÖĞR. ÜYESİ AYŞE KABATAŞ
DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET ÜNLÜ

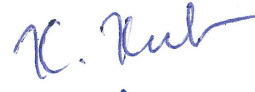
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2019
Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PERİYODİK SINIR ŞARTLI KUAZİ LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMİN
ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ**

Prof. Dr. Kadir KUTLU danışmanlığında, Melike SATILMIŞ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 04/07/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı	İmzası
Başkan	: Prof. Dr. Kadir KUTLU	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe KABATAŞ	
Üye:	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ	



Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam süresince bana destek olan, tavsiyeleri ile beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Kadir KUTLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İstanbul dan Rize'ye her gelişimde bana ev sahipliği yapan Meligül GÜNAYDIN'a, okul hayatım boyunca desteklerini benden eksik etmeyen anneannem Fatime USTA'ya, hayatımın her anında benimle olan ve beni cesaretlendiren en büyük şansım aileme özellikle annem Meryem SATILMIŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Melike SATILMIŞ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tafimdan hazırlanan “Periyodik Sınır Şarh Kuazi Lineer Hiperbolik Denklemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim.

04/07/2019


Melike SATILMIŞ

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

PERİYODİK SINIR ŞARTLI KUAZİ LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Melike SATILMIŞ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Prof. Dr. Kadir KUTLU

Bu çalışmanın asıl konusu Kuazi lineer hiperbolik denklemlerle başlangıç ve periyodik sınır değer probleminin $D := \{(x, t) \mid 0 < t < T; -\pi < x < +\pi\}$ bölgesinde çözümünün varlığını ve tekliğini göstermektir. Problem aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_x); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_x < +\infty)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T)$$

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[-\pi, +\pi]$ aralığında, $f(x, t, u_x)$, D $x \in (-\infty, +\infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x, t)$ ise aranan çözüm fonksiyonudur. Çözümü için ileride açıklayacağımız Fourier yönteminden yararlanıyoruz. Çözümün varlığı ve tekliğinin ispatında ise klasik yöntem olan art arda yaklaşımlar metodundan faydalanıyoruz.

2019, 67 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fourier Yöntemi, Periyodik Koşullar, Dirichlet Şartları, Kuazi Lineer Hiperbolik Denklemler

ABSTRACT

THE EXISTANCE AND THE UNIQUENESS OF QUASI LINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

Melike SATILMIŞ

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kadir KUTLU

The main topic of this work is to Show the existence and uniqueness of the solution of the Quasi linear hyperbolic equation with the initial and periodic boundary value problem in the domain $D := \{(x, t) \mid 0 < t < T; -\pi < x < +\pi\}$. The problem is as follows:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_x); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_x < +\infty)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T)$$

Here $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are the known function which are defined on the interval $[-\pi, +\pi]$ and $f(x, t, u_x)$ is the known functions which is defined on the domain $D \times (-\infty, +\infty)$. These functions satisfy the necessary conditions. $u(x, t)$ is the desired solution function. For the solution, we use the Fourier method which we will explain later. For the proof of the existence and uniqueness of the solution, we use the classical method of successive approximations.

2019, 67 pages

Keywords: Fourier Method, Periodic Conditions, Dirichlet Conditions, Quasi Linear
Hyperbolic Equations

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Düzgün Yakınsak Seriler	2
1.3. Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyon Aileleri.....	5
1.4. İki Fonksiyonun Skaler Çarpımı Ortogonal Fonksiyonlar	6
1.5. Fourier Serileri ve Katsayıları.....	9
1.6. Trigonometrik Seriler	10
1.7. Ard Arda Yaklaşım Metodu	13
1.8. Lagrange Sabitlerin Değişimi Yöntemi	17
1.9. İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler	23
1.10. Periyodik Sınır Şartı.....	24
1.11. İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Kanonik Forma İndirgenmesi	25
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	31
3. BULGULAR	32
4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	63
5. ÖNERİLER	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	67

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{B}$	Banach Uzayı
$\ f(x)\ $	f Fonksiyonun Normu
(f, g)	İki Fonksiyonun İç Çarpımı
$u(x, t)$	Çözüm Fonksiyonu
$\vartheta(x, t)$	Test Fonksiyonu
$U_0^T(t)$	Denklemin Homojen Çözümü
$G(t, \xi - x)$	Kaynak Fonksiyonu
$G(t - \tau, \xi - x)$	Kaynak Fonksiyonu
Δ	Diskriminant
N	Doğal Sayılar Kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fizikte ve mühendislikte titreşim ve dalga hareketi içeren pek çok problem genellikle kısmi türevli diferansiyel denklem halinde karşımıza çıkmaktadır. Bu tür problemlerin belli şartlar altında çözümünün varlığı ve tekliği veya en azından çözülebilir olup olmadığı fiziksel olarak ispatı ya mümkün değildir ya da yeterli değildir. Öncelikle problemin varsa analitik çözümü aranır veya en azından çözümünün varlığı ve tekliği doğruluğu kanıtlanmış çeşitli matematiksel yöntemlerle ispatlanması gerekir. Çözümü kolaylıkla bulunamayan bir problemle karşılaşıldığında çözümün varlığı ve tekliği sorusu ortaya çıkar. Bu soruya ilgili teoremlerin çerçevesi içinde yanıt aramaya çalışılır.

Burada incelenen problemde aranan fonksiyonun ve türevlerinin tanımlandığı aralığın uç değerlerinin birbirine eşit olması periyodik sınır şartı olarak adlandırılır.

Genelde lineer olmayan kısmi türevli denklemler için bir genel çözüm vermek imkânsızdır. Bu yüzden lineer, yarı lineer veya kuazi lineer (parabolik, hiperbolik veya eliptik) denklemler uygulama bakımından öne çıkmaktadır. Bu tür denklemler çeşitli başlangıç ve sınır şartlarında veya karışık sınır şartlarında farklı yöntemler uygulayarak pek çok araştırmacının inceleme konusu olmuştur ancak Fourier yöntemiyle periyodik sınır şartlı problemler fazla araştırılmamıştır.

Fourier yöntemi, yarı doğrusal ve doğrusal olmayan parabolik, hiperbolik veya daha yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için periyodik sınır şartlı karışık problemlerin çözümüne de uygulanabilir.

Bu çalışmada periyodik başlangıç ve sınır şartları (karışık şartlar) ile verilen kuazi lineer hiperbolik denklemler başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini incelenmektedir.

1.2. Düzgün Yakınsak Seriler

Tanım 1.2.1. Terimleri $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ fonksiyon serisini göz önüne alalım. Eğer genel terimi $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ olan dizi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisine “yakınsak” ve $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ fonksiyonuna da “serinin toplamı” denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) yazılır. $\{S_n(x)\}$ dizisi $a \leq x \leq b$ aralığında $S(x)$ e düzgün yakınsıyorsa, fonksiyon serisine bu aralıkta “düzgün yakınsak” denir. Yani “Düzgün Yakınsaklık” keyfi olarak seçilebilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, x ’e bağlı olmayan bir N doğal sayısı bulunabilir ve $\forall n > N(\varepsilon)$ için $(|S(x) - S_n(x)|) < \varepsilon$, $x \in [a, b]$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 1.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ serisinin $|x| < a < 1$ için düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi,

$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ olup $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = \frac{1}{1-x}$ bulunur. Diğer yandan $|x| < a < 1$ için,

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{|x^n|}{|1-x|} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

elde edilir. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, x ’e bağlı olmayan bir N doğal sayısı bulunabilir. Öyle ki $n > N$ için $\frac{a^n}{1-a} < \varepsilon$ yazılabilir. Gerçekten eşitsizliğin iki yanının e tabanına göre logaritması alınırsa,

$$n \ln a - \ln(1-a) < \ln \varepsilon \text{ veya}$$

$$n > -\frac{\ln[\varepsilon(1-a)]}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}$$

bulunur.

$$N(\varepsilon) = -\frac{\ln[\varepsilon(1-a)]}{\ln(\frac{1}{a})}$$

seçilir ise $n > N(\varepsilon)$ için $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ olur. Böylece $\{S_n(x)\}$ dizisinin ve dolayısıyla serinin düzgün yakınsaklığı gösterilmiş olur.

Örnek 1.2.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ serisinin $0 \leq x \leq 1$ aralığında düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Verilen seri bir geometrik seri olup, ilk terimi $1-x$ ve ortak çarpanı x dir. Buna göre, kısmi toplamlar dizisi için,

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_{n-1}(x) = (1-x) \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = 1-x^n, \quad 0 \leq x \leq 1$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = 1$ olduğundan seri verilen aralıkta yakınsaktır.

Fakat $0 \leq x \leq 1$ aralığına ait bütün noktalar için ortak bir N doğal sayısı, $\forall n > N$ için

$|S_n(x) - S(x)| = x^n < \varepsilon$ olacak şekilde mevcut değildir. Gerçekten, örneğin $\varepsilon = \frac{1}{4}$

olarak seçilirse, n sayısı ne kadar büyük seçilirse seçilsin x^n ifadesi verilen aralığa ait

olan ve $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} < x_0 < 1$ şartı sağlayan bütün x_0 noktaları için $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ten daha büyük kalır.

Yani, $|S_n(x_0) - S(x_0)| = x_0^n > \frac{1}{4} = \varepsilon$ bulunur. O halde $\{S_n(x)\}$ dizisi dolayısıyla

verilen seri $0 \leq x \leq 1$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Teorem 1.2.1. (Weierstrass M-Testi) Sabit ve pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ve $a \leq x \leq b$ için $|u_n(x)| \leq M_n$ bulunuyorsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi $a \leq x \leq b$ aralığında Mutlak ve Düzgün Yakınsaktır.

Örnek 1.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ serisini göz önüne alalım. $-2 \leq x \leq -1$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Çözüm: $u_n(x) = e^{nx} = (e^x)^n$ diyelim $-2 \leq x \leq -1$ aralığında $e^x \leq \frac{1}{e}$ olduğundan

$u_n(x) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n = M_n$ ve $M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ geometrik serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass M-Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi $-2 \leq x \leq -1$ aralığının da mutlak düzgün yakınsaktır. Bir fonksiyon serisinin toplamının sürekliliği, terim terim integrasyonu ve terim terim türetilmesi hakkında bazı önemli teoremler vardır.

Teorem 1.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisinin terimleri $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve seri bu aralıkta $S(x)$ toplamına düzgün olarak yakınsıyorsa, $S(x)$ fonksiyonu aralığın bütün noktalarında süreklidir.

Teorem 1.2.3. Terimleri integre edilebilen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi $a \leq x \leq b$ aralığında $S(x)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyorsa $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt$ olup sağ taraftaki integraller serisi de $a \leq x \leq b$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek 1.2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ serisinin $0 \leq x \leq a$ aralığında düzgün olarak $\frac{1}{x+1}$ fonksiyonuna yakınsadığını ve terim terime integre edildiğini gösteriniz.

Çözüm : $u_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$ diyelim. Serinin kısmi toplamlar dizisi genel terim,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \text{ olup,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan $0 \leq x \leq a$ aralığında $\forall x$ için $|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1} = \vartheta(n)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(n) = 0$ elde edilir ki buda bize $\{S_n(x)\}$ dizisinin yakınsak olduğunu

ifade eder. O halde seri $0 \leq x \leq a$ da düzgün yakınsaktır. Teoreme göre terim terime integre edilebilir. Buna göre,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dx}{(x+n)(x+n+1)} = \int_0^x \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \ln|x+1|$$

bulunur.

Teorem 1.2.4. (Hölder Eşitsizliği) $\forall n \in N$ için E 'de tanımlı $\{f_n\}$ ve $\{g_n\}$ iki fonksiyon dizisi olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n \cdot g_n| \leq [\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^q]^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 0 \quad (\text{Saban, 1981})$$

eşitsizliğine “Hölder Eşitsizliği” denir.

1.3. Ortogonal ve Ortonormal Vektör Aileleri

Tanım 1.3.1. $[a, b]$ aralığında tanımlı, bu aralıkta özdeş olarak 0 olmayan ve Riemann anlamında integrale sahip fonksiyonlardan meydana gelen $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer,

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i^2 & i = j \end{cases}$$

ise böyle bir kümeye $[a, b]$ aralığında “Ortogonal Fonksiyon” kümesi veya “Ortogonal Fonksiyon Sistemi” denir. Bu ortogonal fonksiyon sisteminden elde edilen,

$$\left\{ u_1(x) = \frac{f_1(x)}{k_1}, \dots, u_n(x) = \frac{f_n(x)}{k_n} \right\}$$

kümesine $[a, b]$ aralığında “*Ortanormal Fonksiyon Sistemi*” denir. Buna göre; bu ortogonal fonksiyon sistemine ait bir $f_i(x)$ fonksiyonunun normu $\|f_i(x)\|$ şeklinde gösterilir ve

$$\|f_i(x)\| = \left[\int_a^b f_i^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

1.4. İki Fonksiyonun Skaler Çarpımı Ortogonal Fonksiyonlar

$f(x)$ ve $g(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında parçalı sürekli fonksiyon olduğunda $\int_a^b f(x)g(x)dx$ integraline, sözü edilen fonksiyonların “*Skaler Çarpımı*” denir ve (f, g) veya $(f, g)_{[a, b]}$ ile gösterilir.

$[a, b]$ aralığında ki parçalı sürekli $f(x), g(x), h(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki özelliklerin doğruluğu yukarıdaki tanımda görülmektedir.

$$1) \quad (f, g) = (g, f)$$

2) $(f, f) \geq 0$ dır. $(f, f) = 0$ eşitliğinde gerek ve yeter koşul $[a, b]$ de $f(x) = 0$ olduğunda doğrudur. ($[a, b]$ nin sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda noktası hariç olabilir.)

$$3) \quad \text{Keyfi } \lambda, \nu \in R \text{ için } (\lambda f + \nu g, h) = \lambda(f, h) + \nu(g, h)$$

$\int_a^b f(x).g(x)dx = 0$ olduğunda $f(x)$ ve $g(x)$ ’e $[a, b]$ aralığında “*Ortogonal Fonksiyon*” denir.

$$4) \quad (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \text{ sayısına, } f(x) \text{ fonksiyonun “skaler karesi”}$$

$(f, f)^{\frac{1}{2}}$ sayısına ise “*f(x) in normu*” denir ve $\|f(x)\|$ ile gösterilir.

$$\|f(x)\| = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

Örnek 1.4.1. $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının $[0,4]$ aralığında ortogonal olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (x+1, \sqrt{x}) &= \int_0^4 (x+1) \cdot \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{5} x^{3/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 32 + \frac{2}{3} \cdot 8 = 18 \frac{2}{15} \end{aligned}$$

demek ki verilen fonksiyon verilen aralıkta ortogonal değildir.

Örnek 1.4.2. $[-\pi, +\pi]$ simetrik aralığında, $f(x) = \sin kx$ fonksiyonu tek, $g(x) = \cos nx$ fonksiyonu çift olduğundan onların çarpımı tek fonksiyon ve bu nedenle $(\sin kx, \cos nx) = 0$ eşitliği doğrudur. Yani, $[-\pi, +\pi]$ aralığında 2π uzunluklu her bir $\sin kx, \cos nx$ fonksiyonları ($k, n \in \mathbb{Z}$) ortogonaldır.

$$\begin{aligned} \|\sin kx\| &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \\ \|\cos nx\| &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

olduğu açıktır. O halde, iki fonksiyon Skaler çarpımı için Cauchy Eşitsizliği denilen bir teorem ortaya çıkabilir.

Teorem 1.4.1. (Cauchy Eşitsizliği)

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Teorem 1.4.2. (*Grönwall Eşitsizliği*) Negatif olmayan $f, g, h \in [a, b]$ fonksiyonları için $x \in [a, b]$ aralığında integral eşitsizliği sağlansın.

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x g(t)h(t)dt$$

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x h(s)ds}dt \quad \text{olur.}$$

Tanım 1.4.1. (*Ortonormal Fonksiyon Ailesi*) $\forall k, n \in N$ için $\langle \vartheta_k, \vartheta_n \rangle = \delta_{kn}$ olacak şekilde mevcut $\{\vartheta_n\}_{n \in N}$ fonksiyon ailesine $[a, b]$ aralığında “Ortonormal Fonksiyon Ailesi” denir.

$$(\vartheta_k, \vartheta_n) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } k \neq n \\ 1 & \text{eğer } k = n \end{cases}$$

Örnek 1.4.3. $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin kx, \cos kx, \dots [-\pi, +\pi]$ fonksiyon sistemini ele alalım.

$$(1, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot dx = 0$$

$$(1, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot dx = 0$$

$$(\sin kx, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos kx \cdot dx = 0$$

$k \neq n$ ise,

$$(\sin kx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx \cdot dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-n)x - \cos(k+n)x] dx \right] = 0$$

$$(\cos kx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] dx \right] = 0$$

$k = n \neq 0$ ise,

$$(\sin kx, \sin kx) = \|\sin kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$$

$$(\cos kx, \cos kx) = \|\cos kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi$$

$k = n = 0$ ise

$$(1,1) = \|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \cdot dx = 2\pi$$

olduğundan verilen sistem $[-\pi, +\pi]$ aralığında ortogonaldır. Elde edilen sistem her fonksiyonun kendi normuna bölerek elde edilen,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \dots \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

fonksiyon sistemi ise $[-\pi, +\pi]$ aralığında ortonormaldir.

1.5. Fourier Serileri ve Katsayıları

Tanım 1.5.1. Bir fonksiyonun ortonormal fonksiyon sistemine göre Fourier seri açılımı, $[a, b]$ aralığında integre edilebilen bir $f(x)$ fonksiyonu ile elemanları $[a, b]$ de integre edilebilen bir $\{f_n(x)\}$ ortonormal fonksiyon sistemi verilmiş olsun. $c_n \{n = 1, 2, \dots\}$ sabit sayı olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot f_n(x) \quad (1.1)$$

ve sağ taraftaki serinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu taktirde c_n sabitleri için,

$$c_n = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

bulunur. (1.2) ile verilen c_n sabitlerine $f(x)$ fonksiyonunun $\{f_n(x)\}$ ortonormal fonksiyon sistemine göre “Fourier Katsayıları” ve (1.1) serisine de $f(x)$ in aynı ortonormal fonksiyon sistemine göre “Fourier Serisi” denir.

Teorem 1.5.1. (*Bessel Eşitsizliği*) $f_n(x)$ ($n \in N$) $C[a, b]$ uzayında ortonormal bir fonksiyon ailesi, f aynı uzayda bir fonksiyon ve c_n de f nin f_n ’e göre Fourier katsayısı olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

dir. Bu eşitsizliğe “Bessel eşitsizliği” denir.

1.6. Trigonometrik Seri

Tanım 1.6.1. $\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x + \dots$ şeklindeki seriye “trigonometrik seri” denir. Daha kısa olarak,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.3)$$

şeklinde gösterilebilir. Seri yakınsak ise toplamı, 2π periyotlu bir $f(x)$ toplamıdır. Çünkü $\sin nx, \cos nx$ fonksiyonları 2π periyotlu periyodik fonksiyonlardır. O halde $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = f(x + 2\pi)$ dir.

Şimdi biz, verilen 2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonunun yakınsak bir trigonometrik seri ile temsil edilebilmesinin hangi şartlarda mümkün olabileceğini araştıralım.

Birinci taraftaki fonksiyonun integralinin (1.3) serisinin terimlerinin integrallerinin toplamına eşit olduğunu farz edelim.

İlk olarak a_0 ı hesaplayalım.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right]$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

İkinci olarak a_n yi hesaplayalım. $n \neq 0$ olmak üzere her tarafı $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ integrali ile çarpalım.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx \right]$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Üçüncü olarak b_n yi hesaplayalım. $n \neq 0$ olmak üzere her tarafı $\sin nx$ ile çarpalım Benzer işlemler sonucunda,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

elde edilir. Fourier serisi ile ilgili asıl problem şu iki sorunun cevabı ile ilgilidir.

- Verilen seri hangi şartlarda yakınsaktır.
- Hangi şartlarda bu seri $f(x)$ e yakınsar.

Bu soruların cevabını şu teorem verir.

Teorem 1.6.1. (Parseval Özdeşliği) $[-\pi, +\pi]$ aralığında parçalı sürekli bir f fonksiyonu Fourier serisi yakınsak ve

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos x + b_n \sin x)$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

olmasıdır.

UYARI 1.6.1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \cdot \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Bessel eşitsizliği aşağıdaki halini alır.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Genel olarak f şu koşulları sağlamalıdır.

UYARI 1.6.2. Dirichlet Koşulları

1. $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı ve aralıkta sonlu sayıdaki nokta dışında tek değerli olduğunu,
2. $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$ aralığında 2π periyotlu olduğunu,
3. $f(x)$ ve $f'(x)$ in $(-\pi, \pi)$ de kesikli sürekli olduğunu varsayalım.

O zaman seri katsayılarıyla,

- a. Eğer x süreklilik noktası ise $f(x)$ e,
- b. Eğer x süreksiz noktası ise $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$,

burada $f(x^+)$ ve $f(x^-)$, $f(x)$ in sırasıyla x noktasındaki sağ ve sol limitleridir.

$f(x)$ in üzerine konulan (1), (2), (3) koşulları yeterlidir ancak gerekli değildir ve genel olarak pratikte sağlar. Fourier serilerinin yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşullar halen bilinmemektedir.

Teorem 1.6.2. (Fourier Teoremi) f fonksiyonu 2π periyotlu, R de parçalı sürekli ve birinci türevi de R de parçalı sürekli olan bir periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Fourier serisi yakınsak ve $x \in R$ için $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ sayısına eşittir. Burada x^+ sağ ve x^- sol limiti gösterir.

1.7. Ard- Arda Yaklaşımlar Metodu (Picard)

D bölgesi, merkezi (x_0, y_0) olan $|x - x_0| \leq a$ ve $|y - y_0| \leq b$ ile tanımlı bölgede $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ diferansiyel denklemdeki f ile kısmi türevi fonksiyonları $\frac{\partial f}{\partial y}$ sürekli olsun. Bu denklemin her iki tarafını x 'e göre integralini alırsak

$$y(x) = c + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.4)$$

denklemini ve başlangıç şartının kullanılmasıyla,

$$y(x_0) = c + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = c$$

$c = y_0$ değerini ve bunun yerine yazılmasıyla da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \text{ buluruz.} \quad (1.5)$$

Önce Picard metodunun ilk adımında sıfırıncı yaklaşım olarak, başlangıç şartı y_0 seçilir. Sonra, y_1 birinci yaklaşım,

$$y_1'(x) = f(x, y_0(x)) \quad y_1(x) = y_0 \quad (1.6)$$

olacak şekilde $f(x, y_0)$ fonksiyonun sürekli olması kabulüyle,

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \quad (1.7)$$

denklemini bulunur. Benzer olarak y_2 ikinci yaklaşımı,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \quad (1.8)$$

denklemini bulunur. Üçüncü yaklaşımı ise y_3 ,

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \quad (1.9)$$

buluruz ve n inci yaklaşım, y_{n-1} ($n - 1$) inci yaklaşım olmak üzere,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (1.10)$$

buluruz. Böylece $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ fonksiyonların bir dizisini buluruz.

Öyleyse uygun şartlar altında, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ şeklinde tanımlanan y fonksiyonu (1.4) başlangıç değer probleminin tam çözümü verilecektir. Ayrıca n inci yaklaşım ile y tam çözümüne yaklaşımındaki hata n nin yeterince büyük ve x in başlangıç noktası x_0 a yeteri kadar yakın olması şartı ile keyfi olarak küçük olacaktır.

Örnek 1.7.1. $y' = x + y^2$ $y(0) = 0$ picard yöntemi ile çözünüz.

Çözüm : $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ $n = 1, 2, 3 \dots$

$y_0 = 0$ ile başlayalım.

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (x + 0)dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(x + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \left(x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} \right)^2 \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{440}$$

Genelde bu örnek için değeri belirlemek olası görülmemektedir.

f fonksiyonun $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevinin D bölgesinde sürekli olduğunu kabul edelim.

(x, y_1) ve (x, y_2) D de iki nokta ve y nin bir fonksiyonu olarak f ye ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*)(y_1 - y_2)$$

elde edilir. Burada y^* , y_1 ve y_2 arasında bir sayıdır. D bölgesinde $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevinin sürekli olması kabulü $\frac{\partial f}{\partial y}$ değerinin D de sınırlı olmasını gerektirir. Yani D deki her nokta için $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. $(x, y^*) \in D$ olduğundan, D deki (x, y_1) ve (x, y_2) noktalarının her bir çifti için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) \right| \cdot |y_1 - y_2| \leq K \cdot |y_1 - y_2|$$

bulunur. Bu eşitsizlik f fonksiyonu için “*Lipschitz Şartı*” olarak adlandırılır.

Sonuç 1.7.1. Eğer $|x - x_0| \leq h$ ise $n = 1, 2, 3, \dots$

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq K \cdot |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

eşitsizliği doğrudur.

Örnek 1.7.1. $y' = y$ diferansiyel denklemin $x = 0$ için $y = 1$ başlangıç şartını sağlayan çözümün varlığına bakarak, Picard Metodunu kullanın.

Çözüm : D bölgesi merkezi $(0,1)$ noktası olan $|x - 0| \leq 1$, $|y - 1| \leq 2$ şeklinde tanımlanan bir dikdörtgensel bölge olsun. Bu bölgede $f(x, y) = y \leq 3 = M$ olup sınırlıdır. Eğer (x, y_1) ve (x, y_2) D de iki nokta ise D deki bu noktaların her biri için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2 \cdot |y_1 - y_2|$$

Lipschitz şartı sağlanacak şekilde bir $k = 2 > 0$ sayısı vardır. O halde,

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right) = \min\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

olmak üzere $|x| < \frac{1}{2}$ de tek çözüm vardır. Çözüm için Picard kullanalım.

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad f(x, y) = y$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$y_0 = 1$ ile başlarsak,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = x + 1$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + 1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$y_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 1 + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \right) dt \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1) \cdot k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse verilen aranan çözümü,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

olarak tanımlanır. Bu serinin her yerde yakınsak olduğu ve $y = e^x$ fonksiyonunu tanımladığı bilinmektedir.

1.8. Lagrange Sabitlerin Değişim Yöntemi

(n) inci mertebeden ikinci taraflı lineer bir

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = f(x) \quad (1.11)$$

denkleminin genel çözümünü bulmak için bu denklemin özel bir çözümünün bulunması gerekir. Lagrange ispat etmiştir ki ikinci tarafsız olan,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0 \quad (1.12)$$

denkleminin genel çözümü biliniyorsa, ikinci taraflı olan (1.11) denklemin özel çözümü integral işlemi ile bulunabilir. Gerçekten (1.12) denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = \sum_{k=1}^n c_k y_k \quad (1.13)$$

olsun ($c_k y_k$ lineer olarak bağımsızdır). Şimdi keyfi parametrelerin değişim metodunda $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi parametreleri yerine (x) in hangi fonksiyonlarını koymalıdır ki (1.13) eşitliği ile tanımlanan (y) fonksiyonu (1.11) fonksiyonunun bir çözümü olsun. Yani $y_p = c_1(x) + c_2(x) + c_3(x) + \cdots + c_n(x)$ in (1.11) denkleminin özel çözümü olması için $c_1(x), c_2(x), c_3(x), \dots, c_n(x)$ leri belirtelim. (1.12) denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = \sum_{k=1}^n c_k y_k$$

dır. (c) ler (x) in fonksiyonu kabul edildiğinden (1.13) denklemini (x) e göre türetelim,

$$\frac{dy}{dx} = (c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n') + (c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n)$$

olur. (c) leri o suretle belirtelim ki

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = \sum_{k=1}^n c_k' y_k \quad (1.14)$$

olsun. Bu taktirde 1.türev,

$$\frac{dy}{dx} = (c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n') = \sum_{k=1}^n c_k y_k' \quad (1.15)$$

tekrardan (x) e göre türev alalım.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'') + (c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n') \text{ veya}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{k=1}^n c_k y_k'' + \sum_{k=1}^n c_k' y_k'$$

olur. Bu defa (c) ler arasında şart olarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k' y_k' = 0 \quad (1.16)$$

yazarak ikinci türev,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' y_k' = 0 \quad (1.17)$$

bu türetme işlemine ($n - 1$) inci türeve kadar devam edilirse sırasıyla,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k' y_k'' = 0 \quad (1.18)$$

$\vdots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k' y_k^{n-2} = 0 \quad (1.19)$$

ancak ($n - 1$) inci türevde,

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \sum_k c_k y_k^{(n-1)} \quad (1.20)$$

kalır. (1.20) formülünden,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_k c_k' y_k^{(n-1)} + \sum_k c_k y_k^{(n)} \quad (1.21)$$

bulunur. Ardışık türevlerin değerleri (1.14), (1.16), (1.18), (1.19) şartları göz önünde tutularak verilen (1.11) denkleminde yerine konulursa,

$$\sum c_k' y_k^{(n-1)} + \left[\sum c_k y_k^{(n)} + P_1 \sum c_k y_k^{(n-1)} + \dots + P_n \sum c_k y_k \right] = f(x) \quad (1.22)$$

olur. Halbuki $y_1, y_2, \dots, y_n$ ikinci tarafsız denklemin çözümleri olduğundan,

$$c_1(y_1^{(n)} + P_1 y_1^{(n-1)} + \dots + P_n y_1) + c_2(y_2^{(n)} + P_1 y_2^{(n-1)} + \dots + P_n y_2) + \dots + c_n(y_n^{(n)} + P_1 y_n^{(n-1)} + \dots + P_n y_n)$$

toplamında ki parantez içindeki ifadeler 0 olduğundan (1.22) denklemindeki köşeli parantez içindeki toplam 0 olur ve (1.22) denklemi,

$$\sum_k c_k' y_k^{(n-1)} = f(x) \quad (1.23)$$

şeklini alır. Bu suretle (1.14), (1.16), ..., (1.23) denklemleri $c_1', c_2', \dots, c_n'$ leri belirtecek olan lineer bir sistem meydana getirir. Bu sistemden integral işlemi ile $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları hesaplanarak (1.11) denkleminin özel çözümü olan y_h bulunur. $c_1', c_2', \dots, c_n'$ lerden meydana gelen lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' &= 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + \dots + c_n' y_n'' &= 0 \\ \vdots & \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned} \quad (1.24)$$

şeklinde dir. Bu lineer denklem sistemine uygun bir sistemdir. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ler lineer bağımsız olduklarından katsayılar determinanı olan Wronski determinanı,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

o halde (n) denklemden kurulu bu sistemden $c_1', c_2', \dots, c_n'$ çözülebilir. Şimdi (1.24) sisteminden,

$$c_1' = \vartheta_1(x), \quad c_2' = \vartheta_2(x), \dots, \quad c_n' = \vartheta_n(x)$$

bulunmuş olsun. İntegre ederek (T_k keyfi sabitler)

$$c_k = \int \vartheta_k(x) dx + T_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Bu değerleri

$y = \sum_{k=1}^n c_k y_k$ da yerine yazarsak

$$y = \sum_{k=1}^n \left(y_k \cdot \int \vartheta_k(x) dx \right) + \sum T_k y_k$$

bulunur. (1.11) denkleminin genel çözümü,

$$y = \sum y_k F_k(x) + T_1 y_1 + \dots + T_n y_n \quad \text{veya}$$

$\sum y_k F_k(x) = \emptyset(x)$ ise denkleminin genel çözümü,

$$y = \emptyset(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k y_k$$

olur. Burada $\emptyset(x)$ ikinci taraflı denklemin özel çözümü,

$$\sum_{k=1}^n T_k y_k$$

ise , ikinci tarafsız denklemin “*genel çözümü*” veya “*tamamlayıcı fonksiyonu*” denir.

Görülüyor ki ikinci tarafsız denklemin integrasyonu yapılabilirse ikinci taraflı denklemin de integrasyonu yapılabilir. Birinci tarafı aynı olan,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = f_1(x) \quad (1.25)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = f_2(x) \quad (1.26)$$

denklemlerini göz önüne alırsak (1.25) denklemin bir çözümü y_1 ve (1.26) inci denklemin bir çözümü y_2 ise $y_1 + y_2$ de

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

denkleminin bir çözümü olur. Bunu göstermek için y_1 ve y_2 çözümlerinin (1.25) ve (1.26) denklemini sağladığını yazmak ve bunları taraf tarafa toplamak suretiyle $y_1 + y_2$ nin bu denklemi sağladığı görülür. Bu husus ikinci taraflı lineer bir denklemin özel çözümünü ararken kullanılır. Üçüncü mertebeden lineer bir denklem,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_2 \frac{dy}{dx} + P_3 y = f(x)$$

şeklindedir. y_1, y_2, y_3 ikinci tarafsız denklemin çözümleri ise c_1', c_2', c_3' arasındaki lineer denklem sistemi,

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0$$

$$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = f(x)$$

şeklindedir. İkinci mertebeden lineer bir denklem,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = f(x) \text{ şeklindedir.}$$

y_1 ve y_2 ikinci tarafsız denklemin çözümleri ise c_1' ve c_2' arasındaki lineer denklem sistemi,

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

şeklindedir.

1.9. İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir kısmi türevli denklem (K.T.D) $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen u fonksiyonu ve onun sonlu sayıdaki kısmi türevlerinin oluşturduğu bir bağıntıdır.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k \dots \partial x_n^k}) = 0$$

denkleminde en yüksek kısmi türev basamağı k dır. Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerine göre denklem 1.dereceden ise denkleme “*Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem*” denir. Eğer denklem lineer değilse “*Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem*” denir.

Tanım 1.9.1. Bir kısmi türevli denklem, en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise ve katsayılar bilinmeyen fonksiyonla onun düşük dereceden türevlerini içeriyorsa bu denkleme “*Kuazi Lineer*” denir.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) =$$

$$A(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{xx} + B(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{yy}$$

ikinci dereceden Kuazi Lineer Denklemdir.

1.10. Periyodik Sınır Şartı

2.mertebeden adi türevli $A(x).y'' + B(x)y' + C(x)y \equiv D(x)$ lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $x \in [a, b]$ için A, B, C, D fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. Eğer denkleme periyodik sınır şartı denilen,

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

şartları eklenirse denkleme “*periyodik sınır şartı problemi*” denir (Allan, 2002).

Örnek 1.10.1. Periyodik sınır şartları altında aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$u_t(x, t) = k.u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

Çözüm: Problemin çözümünü $u = X(x)T(t)$ şeklinde arayalım.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

$$T'(t) + \lambda.k.T(t) = 0$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 kt} \sin nx$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 kt} \sin nx \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \cdot ds$$

Örnek 1.10.2. Periyodik sınır şartları altında aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$u_t(x, t) = k \cdot u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(2\pi - x), & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Çözüm: Probleminin çözümünü $u = X(x)T(t)$ şeklinde arayalım.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad X(0) = 0 \quad X'(\pi) = 0$$

$$u(x, 0) = F(x), \quad 0 < x < 2\pi$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-n^2 kt}{4}} \sin \frac{nx}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin \frac{nx}{2} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{2} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} e^{\frac{-(2n-1)^2 kt}{4}} \sin \frac{(2n-1)x}{2}$$

1.11. İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Denklemlerin Kanonik Forma İndirgenmesi

$A = A(x, y)$ $B = B(x, y)$ $C = C(x, y)$ olmak üzere ikinci türeve göre doğrusal

$$Ar + 2Bs + Ct + f(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1.27)$$

$$u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t, \quad u_x = p, \quad u_y = q$$

denklemini göz önüne alınsın. (1.27) de x, y bağımsız değişkenleri yerine,

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y) \quad \mu = \mu(x, y) \quad z = z(\varepsilon, \mu) \quad (1.28)$$

olmak üzere ε ve μ bağımsız değişkenleri ele alınsın. $\varepsilon(x, y)$ ve $\mu(x, y)$ fonksiyonları ikinci basamağa kadar sürekli türetilebilir olsunlar ve

$$\frac{\partial(\varepsilon, \mu)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y \\ \mu_x & \mu_y \end{vmatrix} \neq 0$$

gerçeklensin. Buradaki amaç (1.27) denklemini daha kolay integre edilebilen bir denkleme dönüştürmektir. Bu dönüşümde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial \mu} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial \mu} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial \mu} \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right\} + \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}$$

olur. Bu dönüşüm uygulandığında (1.19) denklemini,

$$\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} + 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial \mu} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} + g\left(\varepsilon, \mu, z \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial z}{\partial \mu}\right) = 0 \quad (1.29)$$

denklemine dönüşür. Burada,

$$\alpha = \alpha(\varepsilon, \mu) = A \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2$$

$$\beta = \beta(\varepsilon, \mu) = A \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + C \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \quad (1.30)$$

(1.29) bağıntısından ε ve μ için uygun formları ayırt ederek hiperbolik, eliptik ve parabolik diferansiyel denklem için kanonik formlar çıkartılabilir.

Tanım 1.11.1. (Hiperbolik Denklem)

$B^2 - AC > 0$ olsun. (1.27) denklemi $u(x, y) = c_1$, $\vartheta(x, y) = c_2$ gerçel farklı karakteristik çiftine sahiptir. (x, y) noktasında karakteristik doğrultular,

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

denklemleri ile verilir. $u(x, y) = c_1$ üzerinde $\frac{dy}{dx}$ karakteristik doğrusu,

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

dir. Bu karakteristik boyunca,

$$A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + C \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (1.31)$$

olur. Benzer biçimde $\vartheta(x, y) = c_2$ karakteristiği boyunca,

$$A \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (1.32)$$

olur. Bu halde,

$$\varepsilon = u(x, y) , \mu = \vartheta(x, y)$$

olarak alınırsa (1.30), (1.31), (1.32) den $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta \neq 0$ olduğu anlaşılır.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \neq \frac{\partial \mu}{\partial x} : \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

ve Jakobiye,

$$\frac{\partial(\varepsilon, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

dir. Buradan (1.29) denklemi,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon \partial \mu} = -\frac{1}{2\beta} g\left(\varepsilon, \mu, z \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial z}{\partial \mu}\right) \quad (1.33)$$

biçimine indirgenir. (1.33) denklemi ikinci basamaktan hiperbolik kısmi türevli denklemin kanonik formudur.

Tanım 1.11.2. (Eliptik Denklem)

Her zaman $B^2 - AC < 0$ olduğundan karakteristik denklemler gerçel değildir. Böylece $u(x, y) = c_1, \vartheta(x, y) = c_2$ eğrileri gerçel değildir. Karakteristik doğrular,

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

denklemi ile verilir. Yani bu doğrultular,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{B + i\sqrt{AC - B^2}}{A}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = \frac{B - i\sqrt{AC - B^2}}{A}$$

biçimindedir. Böylece karmaşık karakteristiklerin herhangi bir (x,y) noktasındaki karakteristik doğrultuları, karmaşık eşlenektir. Bu diferansiyel denklemlerin ilki $\emptyset$ ve ω gerçel fonksiyonları olmak üzere $y_1 = \emptyset(x) + i\omega(x)$ biçiminde bir çözüme sahip ise ikinci denklem,

$y_2 = \emptyset(x) - i\omega(x)$ biçiminde bir çözüme sahiptir. Böylece $u(x,y), \vartheta(x,y)$ fonksiyonları karmaşık eşlenik olmak zorundadır.

$$u = \varepsilon(x, y) + i\mu(x, y)$$

$$u = \varepsilon(x, y) - i\mu(x, y)$$

olarak seçilirse $u(x,y) = c_1$ karakteristiği üzerinde geçerli olan,

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

denklemini,

$$A \left(-\frac{\varepsilon x + i\mu x}{\varepsilon y + i\mu y} \right)^2 - 2B \left(-\frac{\varepsilon x + i\mu x}{\varepsilon y + i\mu y} \right) + C = 0$$

$$A \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + i \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + 2B \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + i \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + i \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + i \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 = 0$$

denklemine indirgenir. Buradan gerçel ve sanal kısımlar eşitlenirse,

$$A \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + C \left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 = A \left(\frac{d\mu}{dx} \right)^2 + 2B \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + C \left(\frac{d\mu}{dy} \right)^2$$

$$A \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + C \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = 0$$

bulunur. $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$ dır. Böylece (1.19) denklemi,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\alpha} g \left(\varepsilon, \mu, z, \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) \quad (1.34)$$

denkleme indirgenir. (1.34) ikinci basamaktan eliptik kısmi türevli diferansiyel denklemin kanonik formudur.

Tanım 1.11.3. (Parabolik Denklem)

$B^2 - AC = 0$ olduğundan sadece bir tane karakteristik aile vardır. $u(x, y) = c$ olsun. $\varepsilon = u$ alınırsa $\frac{\partial(\varepsilon, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$ olmak üzere μ seçilir. $\mu = y$ olsun. Bu durumda (1.30) dan,

$$\alpha = A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + C \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0$$

$$\beta = B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \alpha = 0$$

$$2BC \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = -AC \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$\beta^2 = B^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2BC \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$= (B^2 - AC) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$= 0, \quad \beta = 0$$

olur. (1.20) den $\gamma = c$ elde edilir. O halde $\alpha = \beta = 0, \gamma = c$ kullanılırsa (1.29) denklemi,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\gamma} g \left(\varepsilon, \mu, z \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) \quad (1.35)$$

denkleme indirgenir. Bu denklem ikinci basamaktan parabolik kısmi türevli denklemin uygun kanonik formudur. Böylece karakteristik doğrultular, diferansiyel denklemin türünü belirtmeye yarar. Karakteristik doğrultuların integrallerini de karakteristik eğrileri tanımlar. Karakteristik eğrilerden, denklemi kanonik forma indirgemedi yararlanır. Kanonik forma indirgeme ise denklemin kolay çözümünü sağlar.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada,

$\forall (x, t) \in D := \{(x, t) | -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$ olmak üzere aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_x); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_x < \infty)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T)$$

başlangıç ve periyodik sınır değer (karışık) problemin çözümünün varlık ve tekliğini $\mathcal{B}$ Banach uzayında inceliyoruz.

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[-\pi, \pi]$ aralığında, $f(x, t, u)$, $D \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x, t)$ ise aranan (çözüm) fonksiyondur.

Problemin çözümü değişken katsayılı Fourier serisi olarak bilinen,

$$u(x, t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{cn}(t) \cos nx + u_{sn}(t) \sin nx]$$

şeklinde aranır. Bilinmeyen $u_0(t)$, $u_{cn}(t)$ ve $u_{sn}(t)$ katsayılarını belirlemek için bulunan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemler sistemi için başlangıç değer problemi bilinen (Lagrange-sabitlerin değişimi) yöntemlerle çözülmektedir. Elde edilen çözümün de art arda yaklaşımlar metodu kullanılarak varlığı ve tekliği gösterilmektedir.

3. BULGULAR

Bu kısımda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_x); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_x < +\infty) \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (3.2)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.3)$$

Yarı lineer hiperbolik denklem için periyodik sınır şartlı karışık probleminin önce zayıf çözümünü tanımlayalım. (3.1) denklemini $v(x, t)$ ile çarpıp integral alalım.

$$\int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} [u_{tt} - a^2 u_{xx} - f(x, t, u_x)] v(x, t) dx dt = 0 \quad (3.4)$$

$$v(x, T) = v_t(x, T) = 0; v(0, t) = v(2\pi, t); v_x(-\pi, t) = v_x(\pi, t)$$

(3.4) ifadesinde kısmi integrasyon alıp sınır şartlarını uygularsak,

$$\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dt = -v(x, 0) \psi(x) + v_t(x, 0) \varphi(x) + \int_0^T u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt$$

olur. Böylece,

$$\int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx dt = \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dt + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} dx - \int_{-\pi}^{\pi} v(x, 0) dx$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx = \int_{-\pi}^{\pi} u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (3.5)$$

(3.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} [u_{tt} - a^2 u_{xx} - f(x, t, u_x)] v(x, t) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} [u(v_{tt} - a^2 v_{xx}) - f(x, t, u_x) v] dx dt \\
&+ \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) v_t(x, 0) - \psi(x) v(x, 0)] dx = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.1. $\bar{D} = \{(x, t) | -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T < \infty\}$ bölgesinde sürekli, x 'e ve t 'ye göre (denklemin içerdiği mertebeden) sürekli kısmi türevlere sahip ve $v(x, T) = v_t(x, T) = 0$, $v(-\pi, t) = v(\pi, t)$, $v_x(-\pi, t) = v_x(\pi, t)$ şartlarını sağlayan $v(x, t)$ fonksiyonuna test fonksiyonu denir.

Tanım 3.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için (3.5) eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{D})$ fonksiyonuna (3.1), (3.2), (3.3) probleminin ‘zayıf genelleştirilmiş çözümü’ denir (Chandirov, 1970).

Şimdi (3.1), (3.2), (3.3) probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyelim. Çözümü,

$$u(x, t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{cn}(t) \cos nx + u_{sn}(t) \sin nx] \quad (3.6)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_0(t)$, $u_{cn}(t)$ ve $u_{sn}(t)$ bilinmeyen katsayılardır (Fourier katsayıları). Biçimsel olarak (3.6) ile verilen $u(x, t)$ fonksiyonunu (3.1) denkleminde yazalım.

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(u_{cn}''(t) + a^2 n^2 u_{cn}(t)) \cos nx + (u_{sn}''(t) + a^2 n^2 u_{sn}(t)) \sin nx] = \\
& f(x, t, \sum_{n=1}^{\infty} [-nu_{cn}(t) \sin nx + nu_{sn}(t) \cos nx]).
\end{aligned}$$

Her iki tarafı $1, \cos kx, \sin kx$, $k = 1, 2, \dots$ ile çarpıp $[-\pi, \pi]$ aralığında integral alıp, ortogonallikten dolayı $k \neq n$ için integrallerin sıfır olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} u_0''(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) d\xi \\ u_{cn}''(t) + a^2 n^2 u_{cn}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \cos n\xi d\xi \\ u_{sn}''(t) + a^2 n^2 u_{sn}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \sin n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

sonsuz diferansiyel denklemler sistemi elde edilir. (3.2) başlangıç şartlarını göz önüne alırsak (3.7) sisteminin başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \varphi_0, & u_0'(0) &= \psi_0 \\ u_{cn}(0) &= \varphi_{cn}, & u_{cn}'(0) &= \psi_{cn} \\ u_{sn}(0) &= \varphi_{sn}, & u_{sn}'(0) &= \psi_{sn}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur. Burada $\mathcal{A}u(\xi, t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [u_{ck}(t) \cos k\xi + u_{sk}(t) \sin k\xi]$ ve dolayısıyla $\mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [-ku_{ck}(t) \sin k\xi + ku_{sk}(t) \cos k\xi]$ olarak alındı. (3.7) sistemindeki $f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t))$ fonksiyonu (3.8) sisteminin Fourier katsayıları olduğu aşikârdır.

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) d\xi \\ f_{cn}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \cos n\xi d\xi \\ f_{sn}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \sin n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \\ \varphi_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) d\xi, & \varphi_{cn} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \cos n\xi d\xi, \\ \varphi_{sn} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \\ \psi_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\xi) d\xi, & \psi_{cn} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\xi) \cos n\xi d\xi, \end{aligned}$$

$$\psi_{sn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\xi) \sin n\xi d\xi, n = 1, 2, \dots$$

Bu durumda (3,8) başlangıç şartlı (3.7) problemini aşağıdaki şekilde ele alabiliriz.

$$u_0''(t) = f_0(t); u_0(0) = \varphi_0, u_0'(0) = \psi_0$$

$$u_{cn}''(t) + (an)^2 u_{cn}(t) = f_{cn}(t); u_{cn}(0) = \varphi_{cn}, u_{cn}'(0) = \psi_{cn}$$

$$u_{sn}''(t) + (an)^2 u_{sn}(t) = f_{sn}(t); u_{sn}(0) = \varphi_{sn}, u_{sn}'(0) = \psi_{sn}, n = 1, 2, \dots$$

İkinci basamaktan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemlerden oluşan başlangıç değer problemi elde edilir. Bu sistemi sabitlerin değişimi yöntemiyle çözersek,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) f_0(\tau) d\tau \\ u_{cn}(t) &= \varphi_{cn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an} \int_0^t f_{cn}(\tau) \sin an(t - \tau) d\tau \\ u_{sn}(t) &= \varphi_{sn} \cos ant + \frac{\psi_{sn}}{an} \sin ant + \frac{1}{an} \int_0^t f_{sn}(\tau) \sin an(t - \tau) d\tau \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada $f_0(\tau)$, $f_{cn}(\tau)$ ve $f_{sn}(\tau)$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \varphi_0 + \psi_0 t + \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) d\xi d\tau \\ u_{cn}(t) &= \varphi_{cn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant \\ &+ \frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \sin an(t - \tau) \cos n\xi d\xi d\tau \\ u_{sn}(t) &= \varphi_{sn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant \\ &+ \frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, t)) \sin an(t - \tau) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$ çözümü elde edilir. Çözümün varlığını ve tekliğini incelemek için,

$\{\bar{u}(t)\} := \{\frac{u_0(t)}{2}, u_{c1}(t), u_{s1}(t), \dots, u_{cn}(t), u_{sn}(t), \dots\}$, fonksiyon dizilerinden,

$$\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |u_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [\max_{t \in [0, T]} |u_{cn}(t)| + \max_{t \in [0, T]} |u_{sn}(t)|] < +\infty$$

eşitsizliğini sağlayanların kümesini $\mathcal{B}$ ile gösterip, normu da

$$\|\bar{u}(t)\|_{\mathcal{B}} := \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |u_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [\max_{t \in [0, T]} |u_{cn}(t)| + \max_{t \in [0, T]} |u_{sn}(t)|] < +\infty$$

alalım. Kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{B}$ bir Banach uzayıdır (Edwards, 1994). (3.9) sisteminin $\mathcal{B}$ de çözüm olduğunu incelemek için art arda yaklaşımlar metodunu kullanacağız. Yaklaşım bağıntılarını,

$$\begin{aligned} u_0^{(k)}(t) &= u_0^{(0)}(t) + \\ &\frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f\left(\xi, \tau, \sum_{m=1}^{\infty} (-mu_{cm}^{(k-1)}(t) \sin m\xi + mu_{sm}^{(k-1)}(t) \cos m\xi)\right) d\xi d\tau \\ u_0^{(0)}(t) &= \varphi_0 + \psi_0 t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{cn}^{(k)}(t) &= u_{cn}^{(0)}(t) + \\ &\frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \sum_{m=1}^{\infty} (-mu_{cn}^{(k-1)}(t) \sin m\xi \\ &+ mu_{sn}^{(k-1)}(t) \cos m\xi) \cos n\xi \sin an(t - \tau) d\xi d\tau \\ u_{cn}^{(0)}(t) &= \varphi_{cn} \cos ant + \frac{\psi_{cn}}{an} \sin ant, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{sn}^{(k)}(t) &= u_{sn}^{(0)}(t) + \\ &\frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \sum_{m=1}^{\infty} (-mu_{cn}^{(k-1)}(t) \sin m\xi \\ &+ mu_{sn}^{(k-1)}(t) \cos m\xi) \sin n\xi \sin an(t - \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

$$u_{sn}^{(0)}(t) = \varphi_{sn} \cos ant + \frac{\psi_{sn}}{an} \sin ant, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde alalım.

$$\mathcal{A}u^{(k)}(\xi, t) := \frac{u_0^{(k)}(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{cn}^{(k)}(t) \cos n\xi + u_{sn}^{(k)}(t) \sin n\xi \right)$$

alalım. Buradan,

$$\mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(-nu_{cn}^{(k)}(t) \sin n\xi + nu_{sn}^{(k)}(t) \cos n\xi \right)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{A}u^{(k)}(\xi, t)| \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} |u_0^{(k)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_{cn}^{(k)}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |u_{sn}^{(k)}(t)| \\ & = \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}}, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, t)| \leq \\ & \sum_{n=1}^{\infty} [\max_{0 \leq t \leq T} |nu_{cn}^{(k)}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |nu_{sn}^{(k)}(t)|] = \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}} < +\infty, \\ & -\pi \leq \xi \leq \pi, \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ olduğunu farz edelim.

Kâfi büyük n 'ler için $\|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}}, \quad t \in [0, T]$ olduğu açıktır.

Diğer yandan,

$$\left\{ \frac{1}{2} u_0^{(k)}(t), u_{c1}^{(k)}(t), u_{s1}^{(k)}(t), \dots, u_{cn}^{(k)}(t), u_{sn}^{(k)}(t), \dots \right\} := \{\bar{u}^{(k)}(t)\}$$

ile gösterelim. Sistemin önce $\max_{0 \leq t \leq T} |\bar{u}^{(k)}(t)| < \infty$ sağladığını yani $\bar{u}^{(k)}(t) \in \mathcal{B}$ olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} |u_0^{(0)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |u_{sn}^{(0)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{2} (|\varphi_0| + |\psi_0|T) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{cn}| + \left| \frac{\psi_{cn}}{an} \right| + |\varphi_{sn}| + \left| \frac{\psi_{sn}}{an} \right| \right) \\
\|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \frac{1}{2} (|\varphi_0| + |\psi_0|T) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{cn}| + \left| \frac{\psi_{cn}}{an} \right| + |\varphi_{sn}| + \left| \frac{\psi_{sn}}{an} \right| \right) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

(3.10) eşitsizliğinde $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları seri yakınsak olacak şekilde tanımlanır. Böylece $\max_{0 \leq t \leq T} |\bar{u}^{(0)}(t)| < +\infty$ yani $\bar{u}^{(0)}(t) \in \mathcal{B}$ olur.

Şimdi $k = 1, 2, \dots$ için eşitsizliklere bakalım.

$$\begin{aligned}
u_0^{(1)}(t) &= u_0^{(0)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi d\tau \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|u_0^{(1)}(t)| &\leq |u_0^{(0)}(t)| + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] d\xi d\tau \right| \\
&+ \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Sağ tarafa τ 'ya göre Cauchy eşitsizliği uygulayalım.

$$\leq |u_0^{(0)}(t)| + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (t-\tau)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bu sefer ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliği uygularsak (fonksiyonlardan birini 1 olarak alınmaktadır.)

$$\leq |u_0^{(0)}(t)| + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ |u_0^{(1)}(t)| \leq |u_0^{(0)}(t)| + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{2\pi} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\ + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{2\pi} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}$$

Lipschitz şartını uygularsak,

$$|u_0^{(1)}(t)| \leq |u_0^{(0)}(t)| + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
& |u_0^{(1)}(t)| \leq |u_0^{(0)}(t)| \\
& + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Benzer yolla $u_{cn}^{(1)}(t)$ 'yi değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
u_{cn}^{(1)}(t) &= u_{cn}^{(0)}(t) + \frac{1}{an\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \sum_{m=1}^{\infty} (-mu_{cm}^{(0)}(\tau) \sin m\xi + mu_{sm}^{(0)}(\tau) \cos m\xi)) \\
&\times \sin an(t - \tau) \cos n\xi d\xi d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_{cn}^{(1)}(t)| &\leq |u_{cn}^{(0)}(t)| + \\
&\frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \sin an(t - \tau) d\tau \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] \cos n\xi d\xi \right| + \\
&\frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \sin an(t - \tau) d\tau \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi d\xi \right|
\end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\leq |u_{cn}^{(0)}(t)| + \frac{1}{an\pi} \left(\int_0^t \sin^2(t - \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\left(\int_0^t [(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi d\xi]^2 d\tau \right)^{1/2} + \\
&\frac{1}{an\pi} \left(\int_0^t \sin^2 an(t - \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq |u_{cn}^{(0)}(t)| + \frac{\sqrt{T}}{an\pi} \left(\int_0^t \left[\int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{T}}{an\pi} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Böylece $n = 1, 2, \dots$ üzerinden toplam alırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \\ &\frac{\sqrt{T}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Sağ tarafa Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Toplam ile integral alma işleminin yer değiştirebilir olduğunu var sayıp, ayrıca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

olduğunu göz önünde bulundurursak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \\
& \frac{\sqrt{T}}{a} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| \\
& + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\
& + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Lipschitz şartını uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\
& + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$t \in [0, T]$ aralığında maksimum alalım,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t)| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_B + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(1)}(t)| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.11), (3.12), (3.13) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{|u_0^{(1)}(t)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|u_{cn}^{(1)}(t)| + |u_{sn}^{(1)}(t)|) \leq \frac{|u_0^{(0)}(t)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|u_{cn}^{(0)}(t)| + |u_{sn}^{(0)}(t)|) \\
& + \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan t 'ye göre maksimum alırsak

$$\begin{aligned}
& \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \left(\sqrt{\frac{T^3}{6\pi}} + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \\
& \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}) \\
& \leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \left(\sqrt{\frac{T^3}{6\pi}} + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \left(1 + \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \right) \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \\
& + \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} < +\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer yolla,

$$\begin{aligned}
& \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \\
& + \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}) < +\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarımla, k için önermenin doğru olduğu gösterilebilir (ardışık yaklaşımlar için tümevarım ispatı verildi).

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \\ &+ \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) < +\infty \end{aligned}$$

Şimdi ardışık yaklaşımlar için sırasıyla,

$$\left| u_0^{(k)}(t) - u_0^{(k-1)}(t) \right|, \left| u_{cn}^{(k)}(t) - u_{cn}^{(k-1)}(t) \right|, \left| u_{sn}^{(k)}(t) - u_{sn}^{(k-1)}(t) \right|, \quad k = 1, 2, \dots$$

farklarını değerlendirelim.

$$\begin{aligned} \left| u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t) \right| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi d\tau \right| \\ &+ \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right| \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini uygulayıp maksimize edelim,

$$\begin{aligned} \left| u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t) \right| &\leq \left(\int_0^t (t - \tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sağ taraftaki integralleri hesaplayıp bu sefer ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım,

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} + \\ \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}.$$

Lipschitz şartını kullanırsak,

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left[\left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Sonuç olarak,

$$\left| u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t) \right| \\ \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) \quad (3.14)$$

elde edilir. Şimdi diğer değerlendirmelere bakalım,

$$\left| u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t) \right| \leq \frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) \cos n\xi d\xi d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{an} \left(\left| \int_0^t \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] \cos n\xi \, d\xi d\tau \right| \right) \\ + \frac{1}{an} \left(\left| \int_0^t \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi d\tau \right| \right).$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini uygulayıp maksimize edelim.

$$\left| u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t) \right| \\ \leq \frac{\sqrt{T}}{an} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right)^{1/2} \\ + \frac{\sqrt{T}}{an} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$n = 1, 2, \dots$ üzerinden toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t) \right| \\ \leq \frac{\sqrt{T}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{\sqrt{T}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2}$$

$$+ \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi)^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Eşitsizliğin sağ tarafında toplamla integralin değişebilir olduğunu varsayıp (gerekli şartlardan sonra belirtilecek) Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t)| \\ & \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 \, d\xi \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) \, d\xi \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lipschitz şartını uygulayalım.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t)| \\ & \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left[\left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_B + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right]. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t)| \leq \\
& \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(1)}(t) - u_{sn}^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.14), (3.15) ve (3.16) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayalım,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t)| + |u_{sn}^{(1)}(t) - u_{sn}^{(0)}(t)| \right] \\
& \leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) = B_T
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Burada $0 \leq B_T < +\infty$ olduğu açıktır. O halde (3.17) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{2} |u_0^{(1)}(t) - u_0^{(0)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|u_{cn}^{(1)}(t) - u_{cn}^{(0)}(t)| + |u_{sn}^{(1)}(t) - u_{sn}^{(0)}(t)| \right] \leq B_T,$$

(3.17) eşitsizliğinde t üzerinden maksimum alarak,

$$\|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq B_T. \tag{3.18}$$

bulunur.

Şimdi $|u_0^{(2)}(t) - u_0^{(1)}(t)|$ farkını değerlendirelim.

$$|u_0^{(2)}(t) - u_0^{(1)}(t)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))) d\xi d\tau \right|.$$

Sırasıyla τ ve ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliği ardından Lipschitz şartını uygularsak,

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^t (t - \tau)^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_B \end{aligned}$$

Buradan, (3.18) eşitsizliğini de göz önüne alırsak,

$$|u_0^{(2)}(t) - u_0^{(1)}(t)| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} B_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)}. \quad (3.19)$$

Şimdi $|u_{cn}^{(2)}(t) - u_{cn}^{(1)}(t)|$ ve $|u_{sn}^{(2)}(t) - u_{sn}^{(1)}(t)|$ farklarını değerlendirelim.

$$\begin{aligned} &|u_{cn}^{(2)}(t) - u_{cn}^{(1)}(t)| \\ &= \frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))) \cos n\xi d\xi d\tau \right| \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliği alalım.

$$\leq \frac{\sqrt{T}}{an} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))] \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2}$$

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(2)}(t) - u_{cn}^{(1)}(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))) \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2}.$$

Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))]^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lipschitz şartından,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} [b(\xi, \tau)(\mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \mathcal{A}u_{\xi}^{(0)}(\xi, \tau))]^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(2)}(t) - u_{cn}^{(1)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}}. \quad (3.20)$$

Benzer yolla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(2)}(t) - u_{sn}^{(1)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \quad (3.21)$$

olur. (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_0^{(2)}(t) - u_0^{(1)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} (|u_{cn}^{(2)}(t) - u_{cn}^{(1)}(t)| + |u_{sn}^{(2)}(t) - u_{sn}^{(1)}(t)|) \\ & \leq \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)}. \end{aligned}$$

t üzerinden maksimum alırsak,

$$\|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.22)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & |u_0^{(3)}(t) - u_0^{(2)}(t)| \\ & \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Lipschitz uygulayalım.

$$\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau) - \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)\|_{\mathcal{B}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte (3.22) eşitsizliğini dikkate alıp gereken işlemi yapalım,

$$\begin{aligned}
&|u_0^{(3)}(t) - u_0^{(2)}(t)| \\
&\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) B_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} = T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left[B_T \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}}\right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$|u_0^{(3)}(t) - u_0^{(2)}(t)| \leq T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left[B_T \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}}\right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
&|u_{cn}^{(3)}(t) - u_{cn}^{(2)}(t)| \\
&\leq \frac{\sqrt{T}}{an} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

n 'ye göre toplam alıp Hölder, Bessel ve Lipschitz eşitsizliklerini uygularsak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(3)}(t) - u_{cn}^{(2)}(t)| \leq \\
&\frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau)(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(1)}(\xi, \tau)) \right)^{1/2} d\xi d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(3.22) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(3)}(t) - u_{cn}^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\| \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \\
&\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(3)}(t) - u_{cn}^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) \|b(x, t)\|_{L(D)}^2. \quad (3.24)$$

Benzer şekilde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(3)}(t) - u_{sn}^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) \|b(x, t)\|_{L(D)}^2 \quad (3.25)$$

(3.23), (3.24) ve (3.25) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} |u_0^{(3)}(t) - u_0^{(2)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [|u_{cn}^{(3)}(t) - u_{cn}^{(2)}(t)| + |u_{sn}^{(3)}(t) - u_{sn}^{(2)}(t)|] \\
&\leq \left[\frac{T}{2} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{T}{6\pi} B_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right)^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2$$

elde edilir. t üzerinden maksimum alarak,

$$\|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\|_B \leq B_T \left[\sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2 \quad (3.26)$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer yolla,

$$\begin{aligned} |u_0^{(4)}(t) - u_0^{(3)}(t)| &\leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\| \|b(x, t)\|_{L_2(D)}. \end{aligned}$$

(3.26) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$|u_0^{(4)}(t) - u_0^{(3)}(t)| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3. \quad (3.27)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} |u_{cn}^{(4)}(t) - u_{cn}^{(3)}(t)| &\leq \\ &\frac{\sqrt{T}}{an} \int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(3)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(2)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi d\xi d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

toplam alıp gerekli eşitsizlikleri uyguladıktan sonra,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(4)}(t) - u_{cn}^{(3)}(t)| &\leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\| \|b(x, t)\|_{L_2(D)}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.26) eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(4)}(t) - u_{cn}^{(3)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3 \quad (3.28)$$

ve benzer şekilde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(4)}(t) - u_{sn}^{(3)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3. \quad (3.29)$$

(3.27), (3.28) ve (3.29) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} |u_0^{(4)}(t) - u_0^{(3)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|u_{cn}^{(4)}(t) - u_{cn}^{(3)}(t)| + |u_{sn}^{(4)}(t) - u_{sn}^{(3)}(t)| \right] \\
&\leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^2 \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki kat sayıyı düzenleyip, t üzerinden maksimum alırsak,

$$\|\bar{u}^{(4)}(t) - \bar{u}^{(3)}(t)\|_B \leq B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^3 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3$$

elde edilir. Tümevarım hipotezi olarak her k doğal sayısı için doğru olsun,

$$\|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)\|_B \leq B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^{k-1} \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^{k-1}$$

$k + 1$ için,

$$|u_0^{(k+1)}(t) - u_0^{(k)}(t)| \leq \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{cn}^{(k+1)}(t) - u_{cn}^{(k)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{sn}^{(k+1)}(t) - u_{sn}^{(k)}(t)| \leq \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Taraf tarafa toplayıp t üzerinden maksimum alalım.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_0^{(k+1)}(t) - u_0^{(k)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [|u_{cn}^{(k+1)}(t) - u_{cn}^{(k)}(t)| + |u_{sn}^{(k+1)}(t) - u_{sn}^{(k)}(t)|] \\ & \leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T^3}{3\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^{k-1} + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^{k-1} \right) x \\ & \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^k \end{aligned}$$

$$\|\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)\|_B \leq B_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right]^k \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. Böylece her k doğal sayısı için önerme doğrudur.

$$\begin{aligned} & \text{Sonuç olarak, } b(x, t) \in L_2(D), f(x, t, 0) \in L_2(D), |f(x, t, u_x) - f(x, t, v_x)| \leq \\ & b(x, t) \cdot |u_x(x, t) - v_x(x, t)|, \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)} < 1 \text{ ve } \varphi(x), \psi(x) \quad (3.10) \end{aligned}$$

şartını sağladığında genel terimi,

$$\bar{u}^{(k)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{i=1}^k (\bar{u}^{(i)}(t) - \bar{u}^{(i-1)}(t)) \text{ olan,}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} u_0^{(k)}(t), u_{c1}^{(k)}(t), u_{s1}^{(k)}(t), \dots, u_{cn}^{(k)}(t), u_{sn}^{(k)}(t), \dots \right\} := \{ \bar{u}^{(k)}(t) \}$$

dizisi $\mathcal{B}$ Banach uzayında düzgün yakınsaktır. Şimdi de,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}(t) := \bar{u}(t) := \left\{ \frac{1}{2} u_0(t), u_{c1}(t), u_{s1}(t), \dots, u_{cn}(t), u_{sn}(t), \dots \right\}$$

olsun. $\bar{u}(t)$ 'nin (3.9) sistemini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| u_0^{(k+1)}(t) - u_0(t) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) d\xi d\tau \right| \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini kullanalım,

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diğer değerlendirmelere bakalım,

$$\begin{aligned} & \left| u_{cn}^{(k+1)}(t) - u_{cn}(t) \right| = \\ & \frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \sin an(t - \tau) \cos n\xi d\xi d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{an} \left(\int_0^t \sin^2(t - \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{an} \sqrt{T} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned} & \left| u_{sn}^{(k+1)}(t) - u_{sn}(t) \right| \leq \\ & \frac{1}{an} \sqrt{T} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp, taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| u_0^{(k+1)}(t) - u_0(t) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| u_{cn}^{(k+1)}(t) - u_{cn}(t) \right| + \left| u_{sn}^{(k+1)}(t) - u_{sn}(t) \right| \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\sqrt{T}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & + \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğini uygulayalım,

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & + \frac{\sqrt{T}}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Toplam ve integralleri deęiřip Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Birinci integralde tekrar Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lipschitz şartından,

$$\leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left(\mathcal{A}u_{\xi}^{(k)}(\xi, \tau) - \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(T + \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(\tau) - \bar{u}(\tau)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tümevarım hipotezi gereği $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}(t)\| = 0$ olduğundan $\bar{u}(t)$ (3.9) sistemini sağlar. Çözümün tekliğini gösterelim.

$$\bar{v}(t) = \left\{ \frac{v_0(t)}{2}, v_{c1}(t), v_{s1}(t), \dots, v_{cn}(t), v_{sn}(t), \dots \right\}$$

(3.9) sisteminin bir diğer çözümü olsun.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_0(t) - v_0(t)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_{\xi}(\xi, \tau))) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t (t - \tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_{\xi}(\xi, \tau))) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} |u_0(t) - v_0(t)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_{\xi}(\xi, \tau))) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\xi, \tau) |\mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau) - \mathcal{A}v_{\xi}(\xi, \tau)| d\xi \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$|u_{cn}(t) - v_{cn}(t)|$$

$$= \frac{1}{an\pi} \left| \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_{\xi}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_{\xi}(\xi, \tau))) \sin n(t - \tau) \cos n\xi d\xi d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{an} \left(\int_0^t \sin^2 an(t - \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_\xi(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_\xi(\xi, \tau))) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \\
& |u_{cn}(t) - v_{cn}(t)| \\
& \leq \frac{1}{an} \sqrt{T} \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_\xi(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_\xi(\xi, \tau))) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
& |u_{sn}(t) - v_{sn}(t)| \leq \frac{1}{an} \sqrt{T} \\
& \left(\int_0^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_\xi(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_\xi(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp Hölder eşitsizliği uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| \leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right) \left(\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\
& |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 \leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right)^2 \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Burada Grönwall eşitsizliğini uygularsak,

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 \leq 0 \times \exp \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0,$$

elde edilir. Böylece $\max_{0 \leq t \leq \tau} |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 = 0 \Rightarrow \bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ bulunur. Yani çözüm tektir. Böylece aşağıdaki teoremleri elde etmiş olduk.

Teorem 3.1. Aşağıdaki şartların sağlandığını farz edelim,

- a. $f(x, t, u_x)$ bütün bağımsız değişkenlerine göre $\bar{D} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde sürekli,
- b. $|f(x, t, u_x) - f(x, t, v_x)| \leq b(x, t)|u_x - v_x|$, $b(x, t) \in L_2(D)$, $b(x, t) \geq 0$ ve
$$\left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{6\pi}} \right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)} < 1,$$
- c. $f(x, t, 0) \in L_2(D)$,
- d. $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, $\varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi)$, $\varphi(x) \in C^1[-\pi, \pi]$,
 $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$; $\psi(x) \in C[-\pi, \pi]$.

Bu durumda (3.9) sistemi $\mathcal{B}$ Banach uzayında tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.2. Teorem 3.1.'in şartları gerçekleşsin. Bu durumda (3.1)- (3.3) probleminin tek bir zayıf genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm katsayı fonksiyonları $D = \{(x, t) | -\pi < x < \pi, 0 < t < T < +\infty\}$ bölgesinde sürekli olan düzgün yakınsak (3.6) serisi ile verilir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada kuazi lineer hiperbolik başlangıç değer ve periyodik sınır değer şartlı $\forall (x, t) \in D := \{(x, t) | -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$ olmak üzere aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_x); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_x < \infty)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T) f \in \bar{D}x(-\infty, \infty)$$

(ve Lipschitz şartını sağlar) probleminin (zayıf) genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Genel olarak lineer olmayan kısmi türevli denklemler için bir genel çözüm vermek imkânsız olduğundan lineer, yarı lineer veya kuazi lineer denklemler uygulamada öne çıkmaktadır. Bu tür denklemler çeşitli başlangıç ve sınır şartlarında farklı yöntemler uygulayarak pek çok araştırmacının inceleme konusu olmuştur ancak Fourier yöntemiyle periyodik sınır şartlı problemler nispeten daha az araştırılmıştır.

5. ÖNERİLER

Burada elde ettiğimiz sonuçlar ve yaklaşımlar için aranan $u(x, t)$ fonksiyonu ve bilinen $f(x, t, u_x)$ fonksiyonu üzerine konulan şartlar çok özel olabilir. Daha hafif şartlar altında problemin çözümünün varlığının ve tekliğini araştırmak da mümkün olabilir.

Fourier metodu kuazi lineer ve doğrusal olmayan parabolik, hiperbolik veya daha yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için periyodik sınır şartlı karışık problemlerin çözümüne de uygulanabilir. Daha güçlü genelleştirilmiş çözüm tanımlanıp problemin varlığı ve tekliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Allan, K., 2002.** Hilbet spaces, Boundary Value Problem and Orthonal Polinoms. Birkhauser, 1st Edition, ISBN: 3-7643-6701-6, 352 p.
- Bouziani, A. and Mesloub, S., 2002.** Mixed Problem with a Weighted Integral Condition for a Parabolic Equation with the Bessel Operator. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 15(3), 277-286.
- Brown, J. and Churchill, R., 2001.** Fourier Series and Boundary Value Problems. Mr Graw Hill, 6th Edition, 17-18.
- Chandirov, G.I., 1970.** On Mixed Problem for a Class of Quasilinear Hiporbolic Equation. Ph.D. Thesis, Tbilisi, Georgia, 96 p.
- Çağlayan, M. ve Çelebi, O., 2010.** Kısmi Diferansiyel Denklemler. Dora Yayınları, Bursa, ISBN: 978-605-4118-75-5, 268 s.
- Dernek, N., 2005.** Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler ve Çözümlü Problemler. Nobel Yayınları, 9-10.
- Edwards, R.E., 1994.** Functional Analysis, Theory and Applications. Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-68143-2, 783 p.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A. and Can, M., 2001.** Yüksek Matematik 2. Cilt Çok Değişkenli Fonksiyonlar Analizi (Ekonomik Baskı). Literatür Yayınları, 925-929.
- Halilov, H. and Çiftçi İ., 2009.** Fourier Method for Quasilinear Pseudo Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition. International Journal of Pure and Applied Matematics, 52(5), 717-727.
- Karadeniz, A., 2000.** Yüksek Matematik Cilt II. Çağlayan Yayınları, 8. Baskı, 76-78.
- Lavrenyuk, S.P. and Ptashnyk, M.B., 1999.** On Certain Nonlinear Pseudoparabolic Variational Inequalities without Initial Conditions Ukrainian Mathematics Journal. 51(3), 34-46.
- Mocan, R., 1977.** Diferansiyel Denklemler Diferansiyel Denklem Sistemleri. İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, 135-141.
- Özdeğer, A. ve Özdeğer, N., 1994.** Çözümlü Analiz Problemleri Cilt II. İTÜ Yayınları, İstanbul, 317-340.
- Özer, M., 2005.** Matematik Analiz IV (Teori ve Uygulamaları). Nobel Yayınları, 138-149.

Ronald B.G. and John W.L., 1988. Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations. Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-68889-5, 562 p.

Saban, G., 1981. Analiz Dersleri II. İstanbul Üniversitesi Yayınları, 363 s.

Spielgel, M.R., 1975. Çözümlü Matematik Problemleri Analiz. Çağlayan Yayınları, Demiray, H. ve Sümer, M. (Ed.), 573-574.

Spielgel, M.R., 2006. İleri Matematik Teori ve Problemleri. Nobel Akademik Yayınları, Hacısalıhoğlu, H. (Ed.), 386 s.

Tikhanov, A.N. and Samarskii, A.A., 1990. Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-66428-8, 784 p.

Tuncer, T., 1969. Alıştırmalarla Diferansiyel Denklemler. Matbaa Teknisyenleri Yayınevi, İstanbul, 187 s.

William E.B. and Richard C.D., 1977. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley and Sons, New York, 582 p.

ÖZGEÇMİŞ

Melike SATILMIŞ, 24/03/1992 tarihinde İstanbul’da doğdu. İlköğretimini 2005 yılında Bağcılar ilçesinde Yıldıztepe İlköğretim Okulu’nda ve Ortaöğretimini 2009 yılında Bağcılar ilçesinde Bağcılar Lisesi’nde tamamladı. 12/09/2009 tarihinde başladığı lisans eğitimini 28/01/2014 tarihinde Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. 2016 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. Bağcılar Otocenter MTAL de 2017 yılı itibari ile başladığı Matematik Öğretmeni görevini halen sürdürmektedir. Orta düzeyde İngilizce bilmektedir.