TEMMUZ 2019 Yüksek Lisans Tezi-Matematik YAĞMUR TAŞDEMİR

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KONİK İKİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İKİ NORMLU UZAYLAR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAĞMUR TAŞDEMİR

TEMMUZ 2019

ESNEK KONİK İKİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İKİ NORMLU UZAYLAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK

Yağmur TAŞDEMİR

Temmuz 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI ADI

Tezin Başlığı : Esnek Konik İki Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri ve İki Normlu Uzaylar

Öğrencinin Adı Soyadı: Yağmur TAŞDEMİR

Sınav Tarihi : 31.07.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK	....
Dr. Öğr. Üyesi Ali KARAKUŞ	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Yağmur TAŞDEMİR

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS IN SOFT CONE TWO METRIC SPACES AND TWO NORMED SPACES

TAŞDEMİR, Yağmur
M.Sc.Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Ass. Prof. Dr. Sabri BİRLİK
July 2019
60 pages

In this study, a new approach was brought the theory of metric space with the help of cone. In this study, ıt was used from the article of Huang and Zhang " Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings'' published in 2007. In addition, cone two metric spaces are defined by using the concepts of two metric spaces, and results related to this concept are discussed and proved. Afterward, the effect of cone concept on soft sets is contextualized. New theorems and results by defining soft cone metric and soft cone two metric concepts are obtained. In addition, normed spaces are examined in this space. Definition and theorems of cone normed space, soft cone normed space, cone two normed space, and soft cone two normed space are given. Finally, the fixed point theorems on all these spaces are examined. New theories and results related to these theorems have been proved.

Key Words: Cone Metric, Cone 2-Metric, Soft Cone, Cone 2-Norm, Fixed Point Theorems

ÖZET

ESNEK KONİK İKİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İKİ NORMLU UZAYLAR

TAŞDEMİR, Yağmur
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Temmuz 2019
60 sayfa

Bu tez çalışmasında metrik uzaylar teorisine konik yardımı ile yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Bu çalışmada "Huang ve Zhang" ın 2007 de yayınlamış olduğu "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings" makalesinden yararlanılmıştır. Ayrıca 2-metrik uzaylar kavramlarından yararlanılarak konik 2 metrik uzaylar tanımlanmış, bu kavram ile ilgili teorem ve sonuçlar ele alınıp ispatlanmıştır. Daha sonra esnek kümeler üzerinde konik kavramı ele alınmıştır. Esnek konik metrik ve esnek konik 2 metrik kavramları tanımlanarak yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak bu uzaylardaki normlu uzaylar incelenmiştir. Konik normlu uzay, esnek konik normlu uzay, konik 2 normlu uzay ve esnek konik 2 normlu uzay tanım ve teoremleri verilmiştir. Son olarak ise tüm bu uzaylar üzerindeki sabit nokta teoremleri ele alınıp incelenmiştir. Bu teoremlerle ilgili yeni teorem ve sonuçlar ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Konik Metrik, Konik 2-Metrik, Esnek Konik, Konik 2-Norm, Sabit Nokta Teoremleri

"Canum aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda desteklerini benden esirgemeyen kıymetli eşim Mehmet Ali TAŞDEMİR, çalışma süresince beni hep destekleyen ve bana güvenen değerli ablam Ayşe KARAKOÇ, babam Mustafa KARAKOÇ, annem Emine KARAKOÇ, kardeşim Gülçin KARAKOÇ, eşimin ailesi ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince bilgilerini benden esirgemeyen ve beni hep destekleyen değerli hocalarım Arş. Gör. Dr. Erkan AĞYÜZ ve Arş. Gör. Nurbige TURAN ZABUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\subset$	Alt Kümesidir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\ni$	Öyleki
$\exists$	En az bir
$\forall$	Her
$\boldsymbol{A^c}$	A kümesinin tümleyeni
$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$	Metrik Uzay
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	Metrik, $\boldsymbol{x}$ ile $\boldsymbol{y}$ arasındaki uzaklık
$\boldsymbol{P}$	Konik
$\mathbb{E}$	Reel Banach Uzayı
$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\rho})$	Konik Metrik Uzay
$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	Konik metrik, $\boldsymbol{x}$ ile $\boldsymbol{y}$ arasındaki uzaklık
$\boldsymbol{supA}$	A nın en küçük üst sınırı (supremum)
$\boldsymbol{infA}$	A nın en büyük alt sınırı (infimum)
$\boldsymbol{intP}$	P nin içi
$\{\boldsymbol{x_n}\}$	Dizi
$\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}$	$\{\boldsymbol{x_n}\}$ dizisi $\boldsymbol{x}$ e yakınsar
$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$	T, X den X e bir dönüşüm
$\|\,.\,\|$	Norm

$(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$	Normlu Uzay
$\mathbf{0}$	Sıfır Vektörü
$\boldsymbol{C}_{\mathbb{R}}^{\boldsymbol{m}}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$	$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ aralığında $\boldsymbol{m}$. Dereceden türevi sürekli, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar
$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{U})$	Esnek kümelerin kümesi
$\widetilde{\boldsymbol{d}}$	Esnek metrik uzay
$\|\cdot,\cdot\|$	İki norm

BÖLÜM I
GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Amacı

Matematiğin evrensel gelişimi birçok çalışma yöntemlerinden etkilenmekle birlikte çoğu yerde yetersiz kalmıştır. Örneğin analiz için düşünecek olursak kümelerin cebirsel özellikleri analizin gelişimi için yetersiz kalmıştır. Bununla birlikte metrik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur.

Reel ve kompleks sayılar kümesinde birçok netice bu sayıların cebirsel özelliklerine bağlı oldukları gibi analizde ise kompleks ve reel sayıların cebirsel yapısına bağlı değildir. Örneğin; $\mathrm{P(z)} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinomunu ele alacak olursak cebirsel olarak ifade edebiliriz. Fakat aynı şekilde analizde bulunan limit ve süreklilik kavramlarını cebirsel olarak ifade edemeyiz. Bunları topolojik olarak ifade edebiliriz. Çünkü bunlar topolojik kavramlardır. Limit ve süreklilik reel sayılar kümesindeki tek ve iki boyutlu uzaydaki topolojiye göre tarif edilir. Bu tariflerde esas olan nokta ise bu uzaylardaki iki nokta arasındaki uzaklık kavramına dayanır. Bu nedenle kompleks ve reel sayılar teorisindeki birçok sonucu elde etmemizi sağlayan uzaklık kavramını genelleştirmeyi veya uzaklık kavramını herhangi soyut bir kümenin elamanlarına uygulamayı düşündüğümüzde karşımıza metrik kavramı çıkmış olur.

Metrik kavramı 1906 yılında Maurice Fréchet tarafından ilk defa tanımlanmıştır.[1]. Böylece topolojiye geçiş sağlanmıştır. Maurice Fréchet tarafından yayımlanan 1926 yılındaki bir çalışmasında ise lineer metrik uzayları tanımlamıştır [2]. Bununla birlikte metrik uzaylarla ilgili detaylı çalışmalar yapılmaya başlanmış ve uygulama alanları incelenmiştir.

Daha sonra ise 1910 yılında Brouwer tarafından normlu lineer uzaylarda sabit nokta çalışmaları başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ kapalı birim yuvar üzerinden kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ispatlamıştır [3]. Bunun arkasından 1930 da Schauder, Brouwer'in teoremini, $\mathbb{R}^n$ uzayı yerine herhangi bir normlu lineer uzay alarak aşağıdaki şekilde genişletmiştir [4].

" X normlu lineer uzayı, $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$ kapalı ve konveks bir alt kümesi ve f dönüşümü $f: C \rightarrow C$ tanımlansın. Bu durumda f dönüşümü, C kümesi içinde bir sabit noktaya sahiptir. "

Daha sonra 1922 yılında ise Banach'ın büzülme dönüşümü ile metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ispatlanmaya başlamıştır[5].

Tüm bu çalışmaların sonrasında sabit nokta teorisinin uygulanabileceği daha kapsamlı bir uzayın olup olmadığı sorusu akla gelmiştir. Bununla birlikte 2007 yılında Huang ve Zhang sabit noktayı incelemek için metrik uzayların tamamen yeterli olmadığını ve metrik uzaylardan daha kapsamlı bir uzayın olabileceğini saptamışlardır. Bu sorunun üstesinden gelmek için de konik metrik uzay kavramının tanımını vermişlerdir [6]. Ayrıca çalışmalarında konik metrik uzaylarda yakınsaklık, tamlık tanımını verip büzülebilir dönüşümlerle ilgili bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 \text{ ve } P = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\} \text{ ve } X = \mathbb{R}$$

alarak $T: X \rightarrow X$ e bir dönüşüm tanımlamışlardır. Bu dönüşüm konik metrik uzayda büzülebilir olduğu halde öklid metrik uzayında büzülebilir değildir.

Ayrıca $K < 1$ olmak üzere K normal sabitine sahip hiç bir P normal koniğinin olmadığını ve her bir $k > 1$ reel sayısı için $K > k$ olacak şekilde K normal sabitine sahip normal koniklerin olduğunu göstermişlerdir [7].

Ayrıca verilen bazı sonuçları P koniğinin normallik şartını kaldırarak, normal olmayan konikler için genelleştirmişlerdir[7]. Abbas ve Rhoades, Huang ve Zhang'ın çalışmalarında verilen bazı sabit nokta teoremlerini kendi çalışmalarındaki konik metrik uzaylarda ispatlamışlardır [3,6]. Türkoğlu ve Abuloha konik metrik uzay topolojisiyle ilgili bazı topolojik özellikleri ve sabit nokta teoremlerini vermişlerdir [9]. Konik metrik uzaylarda küme değerli büzülme dönüşümü tanımı ilk kez Wardowski tarafından verilmiştir [10]. Rezapour da konik metrik uzaylardaki en iyi yaklaşımların ayırıcı niteliği hakkında bazı sonuçlar vermiştir [11].

Bu Yüksek Lisans tez çalışmasında yukarıda adı geçen yazarlar tarafından verilen tanım, lemma, teorem ve sonuçlar ilişkilendirilerek aktarılmıştır. Buradaki tanımlar daha detaylı bir şekilde incelenmiş yapılan çalışmalar karşılaştırılmıştır. Ayrıca okuyucuya konu hakkında daha somut bilgi verebilmek için bu yazarların vermiş olduğu örnekler ayrıntılı incelenmiş bununla birlikte farklı örnek ve çözümleri üzerinde durulmuştur. Böylece daha sonraki zamanlarda konu hakkında yapılacak yeni çalışmalarda bu çalışmanın destekleyici olması amaçlanmıştır.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER VE YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde metrik uzaylar tanıtılıp, bu uzaylarda yakınsak dizi ve Cauchy dizisinin tanımı verilecektir. İkinci olarak vektör uzay kavramı tanımlanıp, bu uzay üzerindeki norm tanımı verilecektir. Daha sonra Banach uzayı tanımlanacaktır.

2.1. Metrik Uzaylar

2.1.1 Tanım: X kümesi boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, d dönüşümü $d: X \times X \to \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

$\mathrm{M}_1)$ $d(x,y) \geq 0$
$\mathrm{M}_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$\mathrm{M}_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$
$\mathrm{M}_4)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını gerçekliyorsa d dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *metriktir* denir. Üzerinde d metriği tanımlı olan X kümesinede *metrik uzay* denir ve (X,d) ile gösterilir.

Metrik tanımındaki M_2 koşulunun gerçekleşmemesi durumunda M_2 koşulu yerine

$$\boldsymbol{M_2}'\textbf{)}\ \forall\, x \in X \text{ için } d(x,x) = 0$$

koşulu alınırsa, M_1, M_2', M_3 ve M_4 koşullarını gerçekleyen d fonksiyonuna *yarı(pseudo) metrik*, üzerinde tanımlı olduğu uzaya da *yarı(pseudo) metrik uzay* denir[12].

2.1.1 Örnek: $X \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall\, x, y \in X$ için $d: X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu şekilde tanımlanan metriğe *ayrık metrik* denir. Üzerinde tanımlı olduğu uzaya ise *ayrık metrik uzay* denir.

Şimdi yukarıda tanımlanmış olan ayrık metrik uzayın metrik koşullarını gerçekleştirdiğini gösterelim:

Verilen d fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa ilk üç koşulun sağlandığı rahatlıkla görülebilir. O halde son koşulun gerçekleştiğini gösterelim:

Eğer $x = y$ ise $d(x,y) = 0$ olur ve buradan $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ eşitsizliği gerçekleşir. Eğer $x \neq y$ ise $x \neq z$ ya da $y \neq z$ durumlarından en az biri gerçekleşeceğinden $d(x,z) + d(z,y)$ ifadesinin değeri 1 ya da 2 olur. Fakat $d(x,y) = 1$ dir. Yani $1 \geq 1$ veya $2 \geq 1$ olur ve bu durumda üçgen eşitsizliği sağlanmış olur.

Bu örnek boştan farklı her bir kümenin bir metrik uzay olarak düşünülebileceğini göstermektedir.

2.1.2 Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan d fonksiyonu $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $d(x,y) = |x - y|$ biçiminde tanımlı olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe *mutlak değer metriği, Euclid metriği, adi metrik* veya *alışılmış metrik* denir. Üzerinde tanımlı olan uzaya da *Euclid uzayı* ya da *alışılmış gerçel uzay* denir.

Şimdi yukarıda tanımlanmış olan Euclid uzayının metrik koşullarını gerçekleştirdiğini gösterelim:

Verilen d fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa:
$a, b \in \mathbb{R}$ ise bu iki nokta arasındaki uzaklık $|a-b|$ olarak tanımlanır.

Mutlak değer tanımından ise $|a-b| \geq 0$ dır. Bu durumda M_1 koşulu gerçekleştiği görülür. Ayrıca,

$$|a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

olur ki bu da M_2 koşulunun gerçekleştiğini gösterir. Diğer yandan

$$|a-b| = |(-1)(b-a)| = |-1||b-a| = |b-a|$$

olduğundan M_3 koşulu da gerçekleşmiş olur. Son olarak

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$$

dir. Böylece son koşul olan üçgen eşitsizliği de gerçekleşmiş olur.

Yukarıdaki metrik tanımında tanım kümemizi karmaşık sayılar üzerinde alabiliriz. Örneğin $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe benzer şekilde, herhangi bir $\omega, z \in \mathbb{C}$ için

$$|\omega| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \omega = x + iy \quad , x, y \in \mathbb{R}$$

olmak üzere $\mathbb{C}$ üzerinde

$$d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} \ , \ \ d(z, \omega) = |z - w|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. $(\mathbb{C}, d)$ metrik uzayına da *alışılmış karmaşık metrik uzay* denir.

***2.1.3 Örnek*:** $\mathbb{R}^2$ üzerinde $x = (x_1, x_2)$ ve y= (y_1, y_2) olmak üzere,

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonunu dikkate alalım. d fonksiyonunun tanımına dikkat edilirse $d(x, y)$ değeri, düzlemdeki x ve y noktaları arasındaki Euclid uzaklığa eşit olarak tanımlanmıştır. Şimdi d fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösterelim:

$(x_1 - y_1)^2 \geq 0$ ve $(x_2 - y_2)^2 \geq 0$ olduğundan bunların toplamları da

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \geq 0$$

olur. Ve dolayısıyla $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$ dır. Yani $d(x, y) \geq 0$ ve böylece de, d fonksiyonu metrik koşullarından birincisinin gerçeklendiğini gösterir.

Şimdi ikinci koşulun gerçeklendiğini gösterelim:

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 = 0 \text{ ve } (x_2 - y_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0 \text{ ve } x_2 - y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Yani d fonksiyonu ikinci metrik koşulunu da gerçeklemiş oldu.

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y, x)$$

Eşitliklerinden d fonksiyonunun üçüncü metrik koşulunu sağlamış olduğu görülür. Son göstermemiz gereken eşitsizlik,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

yani,

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliği gösterirken basitlik olması için $x_i - z_i = r_i$ ve $z_i - y_i = s_i$ olarak alınırsa

$$x_i - y_i = r_i + z_i + s_i - z_i = r_i + s_i$$

olur. Dolayısıyla göstermemiz gereken eşitsizlik,

$$\sqrt{(r_1+s_1)^2+(r_2+s_2)^2} \leq \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2}+\sqrt{{s_1}^2+{s_2}^2}$$

haline dönüşür. Bu eşitsizliğin her iki yanının karesi alındıktan sonra gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$r_1s_1+r_2s_2 \leq \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2}+\sqrt{{s_1}^2+{s_2}^2}$$

Yani toplam sembolü ile ifade edecek olursak,

$$\left(\sum_{i=1}^{2} r_is_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{2} {r_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} {s_i}^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir. $(\mathbb{R}^2, d)$ metrik uzayına da alışılmış metrik uzay denir.

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış metrik, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genelleştirilebilir:

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir ve $(\mathbb{R}^n, d)$ metrik uzayına da alışılmış metrik uzay denir. (d fonksiyonunun metrik olduğunu gösterirken üçgen eşitsizliği için yukarıdaki alışılmış metrikte 2 yerine n almak yeterlidir.)

2.1.2 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, (x_n), X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa(x_n) dizisi x_0 noktasına *yakınsıyor* denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

veya

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

2.1.3 Tanım: (X, d) metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X de bir *Cauchy dizisi* denir.

2.1.4 Tanım: Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise (X, d) uzayına *tam metrik uzay* denir.

2.2. Vektör Uzaylar

2.2.1 Tanım: $V \neq \emptyset$, üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle yani Reel sayılarla çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V \text{ için } x + y \in V$$

$$r \in R \text{ ve } x \in V \text{ için } rx \in V$$

şeklinde tanımlı olsun. V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall a, b \in R$ için

V1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ [birleşme özelliği]

V2) $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir $0 \in V$ vardır. [birim eleman]

V3) $x + x^{-1} = x^{-1} + x = 0$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in V$ vardır. [ters elaman]

V4) $x + y = y + x$ [değişme özelliği]

V5) $(a + b)x = ax + bx$, $a(x + y) = ax + ay$ [çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği]

V6) $(ab)x = a(bx)$ [çarpma işleminin birleşme özelliği]

V7) $1 \in R$ için $1x = x$ [çarpmanın birim elemanı]

şartları sağlanıyorsa V ye R üzerinde bir *vektör uzayı* denir. Burada $0 \in V$ sıfır vektörüdür.

2.3. Normlu Vektör Uzaylar

Bu kısımda normlu uzayları tanımlayacağız. Üzerlerinde çalışacağımız metrik uzaylar, aynı zamanda doğrusal uzaylardır. Genellikle de bu uzayların üzerindeki metrikler, üzerlerindeki çok daha basit fonksiyonlar olan normlardan faydalanılarak elde edilir.

2.3.1. Tanım: X, F cismi ($F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerinde bir doğrusal uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

$$\rho = \|.\|: X \to \mathbb{R}\,, \rho(x) = \|x\|$$

fonksiyonu

N1. $\|x\| \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$

N4.$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını gerçekliyor ise $\| \,.\, \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* ve $(X, \| \,.\, \|)$ çiftine ise *normlu uzay* denir. Bazen normlu uzay yerine *normlu doğrusal uzay* ya da *normlu vektör uzayı* denir.

Metrik uzay tanımına dikkat edilirse X herhangi boş olmayan bir küme olarak alınmıştı. Normlu uzay tanımında ise X kümesinin doğrusal uzay olması şarttır. Metrik ile norm arasındaki ilk ayrım bu özelliktir.

Norm fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ doğrusal uzaylardaki bir vektörün boyu kavramının herhangi herhangi X doğrusal uzayına genellemesinden başka bir şey değildir.

2.3.2. Tanım: $(X, \| \,.\, \|)$ normlu uzayı verilsin. Eğer d fonksiyonu

$$d: X \times X \to \mathbb{R}\,, d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanırsa d fonksiyonu X üzerinde bir metrik ve dolayısıyla (X, d) bir metrik uzay olur. $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan metriğe ise $\| \,.\, \|$ *normunun belirlediği metrik* denir. Böyle bir durumda bazen (X, d) ye *normlu metrik uzay* denir.

***2.3.1 Örnek*:** $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde

$$\| \,.\, \|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \|x\| = |x|\,,$$

$$\|\,.\,\|: C \to \mathbb{R}\,, \|z\| = |z|\,,$$

fonksiyonları dikkate alınırsa, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ birer normlu uzaydır. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerindeki bu normlara *alışılmış norm* denir. dikkat edilirse bu normun $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerine indirgeyeceği metrik, daha önce alışılmış metrikler dediğimiz

$$d(x,y) = \|x-y\| = |x-y|$$
$$d(z,w) = \|z-w\| = |z-w|$$

mutlak değer metrikleridir.

2.3.2 Örnek: $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ üzerinde, $x \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{\,|x_i| : i = 1,2,\dots,n\}$$

biçiminde tanımlanan $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ ve $\|x\|_\infty$ birer normdur ve dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ bu normlar ile birer normlu uzaydır.

Bu normlardan $\|x\|_1$ fonksiyonunun norm olduğunu gösterelim: x, $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ nin herhangi bir öğesi olmak üzere her bir $i = 1,2,\dots,n$ için $|x_i| \geq 0$ olduğundan bunların toplamları da negatif olamaz. Yani $\|x\|_1 \geq 0$ dır. Böylece normun birinci koşulu gerçeklenmiş olur.

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow \text{Her } i = 1,2,\dots,n \text{ için } |x_i| = 0$$
$$\Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,0,\dots,0) \Leftrightarrow x = 0$$

Dolayısıyla normun ikinci koşulu da gerçeklenir. Şimdi üçüncü koşulu gösterelim:

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$$

dir. Son olarak ise dördüncü koşul;

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

olup normun tüm koşulları sağlanır. Yani $\|x\|_1$ fonksiyonu normdur.

2.3.3 Tanım: $(X, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına *yakınsıyor* denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ya da $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ifadelerinden biri ile gösterilir.

2.3.4 Tanım: $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) bu normlu uzay içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

2.3.5 Tanım: Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

2.4. Esnek Metrik Uzaylar

2.4.1 Tanım: f fonksiyonu, $f: E \to P(U)$ ya tanımlı ve U ile E boştan farklı kümeler olsun. Bu küme değerli fonksiyona U ve E üzerinde bir *esnek küme* denir. Bu dönüşüm ile bir f esnek kümesini

$$f = \{(e, f(e): e \in E\}$$

biçiminde ikililer kümesi şeklinde yazabiliriz. (Molodtsov, 1999).

Bu çalışma süresince tüm esnek kümelerin kümesini $S_E(U)$ olarak göstereceğiz.

2.4.2 Tanım: f bir dönüşüm ve $f \in S_E(U)$ olsun. Bir $e \in E$ elamanı için $f(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $f(e') = \emptyset$ ise f esnek kümesine $S_E(U)$ da bir *esnek nokta* denir ve $\boldsymbol{e_f}$ ile gösterilir. (Zorlutuna vd, 2011).

2.4.3 Tanım: Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\left|a_{k_i} - a_{k_j}\right| \leq \left|a_{k_i} - a_{k_s}\right| + \left|a_{k_s} - a_{k_j}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe *esnek üçgen eşitsizliği* denir.

2.4.4 Tanım: E nin boş kümeden farklı bir X alt kümesini ele alalım. X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler $S_X(U)$ olsun. $f: X \to P(U)$ birebir bir fonksiyon olsun. f_i, f_j ve f_s dönüşümleri $S_X(U)$ nun elemanları ve $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \tilde{\in} f$ olmak üzere,

i. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) \geq 0$

ii. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = 0 \Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$

iii. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}\right)$

iv. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) \leq \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}\right) + \tilde{d}\left(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}\right)$

özelliklerini sağlayan bir $\tilde{d}: f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümüne f esnek kümesi üzerinde tanımlı bir *esnek metrik* denir ve $(f, \tilde{d})$ ikilisine ise bir *esnek metrik uzay* denir.
E ve U kümeleri sayılabilir sonsuz elemanlı kümeler olduklarını kabul edelim.

2.4.5 Örnek: Her $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için

$$\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \begin{cases} 0, & a_{k_i} = a_{k_j} \\ 1, & a_{k_i} \neq a_{k_j} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tilde{d}$ esnek fonksiyonu f üzerinde bir esnek metrik belirtir. Bu $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayına ise *esnek ayrık metrik uzay* denir.

2.4.6 Tanım: Her $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve her $k \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$\tilde{d}_{|.|}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \left|a_{k_i} - a_{k_j}\right|$$

ile tanımlı $\tilde{d}_{|.|}$, f esnek kümesi üzerinde bir esnek metrik belirtir. Bu $(f, \tilde{d}_{|.|})$ metrik uzayına ise *esnek alışılmış metrik uzay* denir.

2.4.7 Tanım: Her $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve her $k \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$\tilde{d}_{\infty}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = max_{k=1,2,\ldots,n}\left|a_{k_i} - a_{k_j}\right|$$

ile tanımlı $\tilde{d}_\infty$ esnek metriği ile f esnek kümesi bir esnek metrik uzay belirtir. $\tilde{d}_\infty$ ile tanımlanan bu esnek metrik uzaya f üzerinde *düzgün esnek metrik uzay* adı verilir.

Esnek ayrık bir metrik uzayda esnek boştan farklı her alt kümesi esnek sınırlıdır.

2.4.8 Önerme: Bir $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayının herhangi bir g esnek alt kümesinin esnek sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $g \tilde{\subseteq} h$ olacak biçimde bir h esnek kapalı yuvarının var olmasıdır.

2.5. Sabit Nokta Teoremleri

2.5.1 Tanım: X kümesi boştan farklı küme olmak üzere $T : X \to X$ üzerine tanımlanan bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her elemanı kendine eşleştiriyorsa yani $T(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa, x_0 noktasına T dönüşümünün X kümesi üzerinde bir *sabit noktası* denir.

$T : X \to X$ dönüşümünün bir veya birden fazla sabit noktası olacağı gibi hiç sabit noktası da olmayabilir. Buna örnek olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

2.5.1 Örnek: X kümesi $X = [0, \infty)$ aralığında tanımlı ve $T : X \to X$ üzerine bir dönüşüm olsun. $x \in X$, $T(x) = \frac{x}{3}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ noktası bu dönüşümün bir tek sabit noktasıdır.

Çözüm: $X = [0, \infty)$ kümesi içinden $x_0 = 0$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_0) = T(0) = \frac{0}{3} = 0 = x_0$$

olur. Yani $x_0 = 0$ noktası bu dönüşümün sabit noktası olur.

2.5.2 Örnek: $X = [0, \infty)$ ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $T(x) = x^2$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $x_0 = 0, x_1 = 1$ bu dönüşümün iki sabit noktasıdır.

Çözüm: $X = [0, \infty)$ kümesi içinden $x_0 = 0$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_0) = T(0) = 0^2 = 0 = x_0$$

olur. Yani $x_0 = 0$ noktası bu dönüşümün sabit noktası olur.

Diğer yandan $X = [0,\infty)$ kümesi içinden $x_1 = 1$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_1) = T(1) = 1^2 = 1 = x_1$$

olur. Yani $x_1 = 1$ noktası bu dönüşümün diğer sabit noktası olur. Yani buradaki $X = [0,\infty)$ kümesinde tanımlı olan T dönüşümün iki sabit noktası vardır.

2.5.3 Örnek: $X = (-\infty,\infty)$ ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $T(x) = x^3$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $x_0 = 0, x_1 = 1$ ve $x_2 = -1$ bu dönüşümün üç sabit noktasıdır.

Çözüm: $X = (-\infty,\infty)$ kümesi içinden $x_0 = 0$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_0) = T(0) = 0^3 = 0 = x_0$$

olur. Yani $x_0 = 0$ noktası bu dönüşümün sabit noktası olur.

$X = (-\infty,\infty)$ kümesi içinden $x_1 = -1$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_0) = T(-1) = (-1)^3 = -1 = x_1$$

olur. Yani $x_1 = -1$ noktası bu dönüşümün ikinci sabit noktası olur.

Son olarak $X = (-\infty,\infty)$ kümesi içinden $x_2 = 1$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_2) = T(1) = 1^3 = 1 = x_2$$

olur. Yani $x_2 = 1$ noktası bu dönüşümün üçüncü sabit noktası olur.

Bu durumda $X = (-\infty,\infty)$ kümesinde tanımlı olan T dönüşümün üç sabit noktası vardır.

2.5.4 Örnek: $X = [0,\infty)$ ve $T : X \to X$ üzerine bir dönüşüm olsun.

$$x \in X, \qquad T(x) = x^2 + k\,, k > 0$$

olsun. Bu durumda T dönüşümünün $[0,\infty)$ da bir sabit noktası vardır.

Çözüm: $X = [0,\infty)$ kümesi içinden $x_0 = 0$ olarak alalım. Bu durumda

$$T(x_0) = T(0) = 0^2 + k = 0 + k = k \neq x_0$$

olup $x_0 = 0$ noktası bu dönüşümün sabit noktası değildir. Fakat $X = [0,\infty)$ kümesi içinden $x_0 = \frac{1}{2} \in [0,\infty)$ alırsak x_0 bu T dönüşümünün sabit noktasıdır.

2.5.1 Teorem: $T: [a,b] \to [a,b]$ ye tanımlı sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T(x) = x$ denkleminin $[a,b]$ aralığı içinde en az bir kökü vardır [13].

BÖLÜM III

KONİK METRİK UZAYLAR VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Konik Tanımı ve Özellikleri

3.1.1 Tanım: E uzayı reel Banach uzayı ve P, E kümesinin bir alt kümesi olmak üzere

(P1) $P \neq \emptyset$ ve $P \neq \{\mathbf{0}\}$ için P kümesi kapalıdır.

(P2) $,b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in P$ ise $a\,x + b\,y \in P$ dir.

(P3) $x \in P$ ve $-x \in P$ ise $x = \mathbf{0}$

koşullarını sağlıyorsa P kümesine bir *konik* denir [7].

$R^+ = [0, \infty)$ olmak üzere $x, y \in R$ için " $\leq$ " bağıntısı

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in R^+$$

şeklinde bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir. O halde Banach uzaylarında R^+ yerine geçebilecek uygun bir alt küme tanımlanabilirse bu uzaylarda sıralama yapılabilir. R^2 de koordinatları negatif olmayan vektörleri pozitif vektörler olarak adlandırabiliriz. Bu tip vektörler geometrik olarak R^2 de bir konik oluştururlar [14].

3.1.2 Tanım: E reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ konik olsun. $\forall\lambda \geq 0$ için $\lambda P \subseteq P$ ve $P \cap (-P) = \{0\}$ olacak şekilde kapalı ve konveks bir P kümesidir. Verilen bir P koniği için E Banach uzayı üzerindeki " $\leq$ " bağıntısı E üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu durumda $\forall x, y \in E$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

dir. Burada $x \leq y$ fakat $x \neq y$ dir. Ayrıca P^0 boş kümeden farklı olmak üzere $y - x \in P^0$ ise $x < y$ dir. P^0, P kümesinin içini kastetmektedir.

3.1.1 Lemma: E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik ve λ > 0 reel sayı olsun. Bu durumda;

(i) $P^0 + P^0 \subset P^0$

(ii) $\lambda P^0 \subset P^0$.

P koniği yardımıyla yapılan sıralama kısmi sıralama bağıntısı olmasına rağmen ℝ üzerindeki tam sıralama bağıntısının bir çok özelliğine sahiptir. Yani

i. $\forall x \in E$ için $x \leq x$

ii. $\forall x, y, z \in E$ için $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

iii. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ için $x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$

iv. $x, y \in P$ ve $a, b \in R^+$ ise $ax + by \in P$

özellikleri vardır [14].

3.1.3 Tanım: E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. $Her\ x, y \in E$ için en az bir $K > 0$ sayısı var öyle ki $0 \leq x \leq y$ iken $x \leq K\, y$ oluyorsa P koniğine *normal konik* denir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan en küçük K pozitif sayısına P normal koniğinin *normal sabiti* denir [7].

Örnek: $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ olsun. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ kümesi $\mathbb{E}$ üzerinde bir koniktir. Ve P koniği normal sabiti $K = 1$ olan $\mathbb{R}^2$ de normal bir konidir.

3.1.4 Tanım: Eğer üstten sınırlı ve artan her dizi yakınsak ise P koniğine *düzgün konik* yada *regüler konik* denir. Yani $y \in E$ için (x_n) dizisi

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y$$

ise $x_0 \in E$ vardır öyle ki

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olur. Buna denk olarak alttan sınırlı ve azalan her dizi yakınsak ise P ye *regüler konik* denir [7].

Örnek: $E = c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \ x_n \to 0, (n \to \infty)\}$ olsun ve P ise aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$P = \{(x_n) \in E: \forall n \in N \ için \ x_n \geq 0\}.$$

Bu durumda P, E üzerinde regüler koniktir.

3.1.2 Lemma: Her düzgün konik normaldir [8].

İspat: Kabul edelim ki P normal olmayan düzgün konik olsun. $\forall \ n \geq 1$ için $s_n, t_n \in P$ olmak üzere $t_n - s_n \in P$ alalım. P normal olmadığından $\forall n \ \geq 1$ için

$$s_n \leq t_n \Rightarrow n^2\|t_n\| \leq \|s_n\|$$

yazılabilir. Burada $\forall \ n \geq 1$ için

$$x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}, y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$$

olarak alalım. P bir konik olduğundan koniğin ikinci şartı gereği

$$y_n - x_n = \frac{t_n - s_n}{\|t_n\|} \in P$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\|y_n\| = 1$ ve $\|x_n\| = \frac{s_n}{\|t_n\|} \geq n^2$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\|$$

Yakınsak ve P kapalı olduğundan bir $y \in P$ vardır. Normlu yakınsak her seri yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\| = y$$

dir. Diğer taraftan

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{x_2}{2^2} \leq x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^2} \leq x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^2} + \frac{x_4}{4^2} \leq \cdots \leq y$$

olup P düzgün konik olduğundan her üstten sınırlı ve artan dizi yakınsaktır. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$$

yakınsaktır. Yakınsak her seride genel terimin limiti sıfıra gittiğinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} x_n = 0$$

olur. Norm fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \|x_n\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} x_n \right\| = 0$$

olup $\|x_n\| \geq n^2$ bulunur. Bu bir çelişki olup P düzgün koniği normaldir. O halde her düzgün konik normaldir.

Not: Her regüler konik normaldir. Fakat bununu tersi doğru değildir. Yani her normal konik regüler olmayabilir.

Örnek: $E = C([0,1])$ olmak üzere E üzerinde $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ normu verilsin ve $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ olsun. f, E üzerinde normal bir koniktir. Fakat regüler konik değildir. Bunu göstermek için $f, g \in E$ alalım.

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$$

dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0,1]$ için $f_n(t) = 1 - t^n$ olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi verilsin. $\{f_n\}$, artan ve üstten sınırlı olmasına rağmen E üzerinde yakınsak değildir.

3.1.3. Lemma: Normal sabiti $K < 1$ olan hiç bir normal konik yoktur [8].

İspat: P, $K < 1$ normal sabitine sahip bir konik olsun. Sıfırdan farklı $x \in P$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekildeki ε değerleri için $K < 1 - \varepsilon$ olsun. $(1-\varepsilon)x \leq \Rightarrow (1-\varepsilon)\|x\| \leq K\|x\|$ olup bu bir çelişkidir. Yani bu durumda $K \geq 1$ olmalıdır. O halde $K < 1$ olan hiçbir normal sabiti yoktur.

Örnek: $E = l_1 = \left\{\{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty\right\}$ ve $P = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E : x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^+\}$ olmak üzere P, $K = 1$ normal sabitli bir koniktir.

Çözüm: Öncelikle P nin bir konik olduğunu gösterelim. P kapalı bir kümedir.

(i) $(x_n)_{n\geq 1} = (0,0,\ldots,0) = \mathbf{0} \in P$ dir. Buradan $P \neq \emptyset$ olur.

$(x_n)_{n\geq 1} = (1,1,\ldots,1) \in P$ alırsak $P \neq \{\mathbf{0}\}$ olur.

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ ve $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in P$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $y_n \geq 0 \Rightarrow ax_n \geq 0$ ve $by_n \geq 0$ dır. Buradan $ax_n + by_n \geq 0 \Rightarrow a(x_n)_{n\geq 1} + b(y_n)_{n\geq 1} \in P$ olur ki bu durumda $ax + by \in P$ bulunur.

(iii) $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $-x = (-x_n)_{n\geq 1} \in P$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $-x_n \geq 0$ ise $x_n = 0$ ve $x = 0$ dır.

Böylece P nin konik olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi ise P nin $K = 1$ normal sabiti ile bir normal konik olduğunu gösterelim:
$0 \leq x \leq y$ olacak şekilde $x = (x_n)_{n\geq 1}$,$y = (y_n)_{n\geq 1} \in E$ alalım. Bu durumda $y - x \in P$ dir. O halde

$$y_n - x_n \geq 0 \Rightarrow x_n \leq y_n \Rightarrow |x_n| \leq |y_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1$$
$$\Rightarrow \|x\|_1 \leq K\|y\|_1$$

yani $K = 1$ olur. O halde P, $K = 1$ normal sabitli bir normal koniktir.

3.2. Konik Metrik Uzaylar

3.2.1. Tanım: X boştan farklı bir küme ve E bir reel Banach uzayı olsun. Eğer $d: X \times X \to E$ dönüşümü;

i. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlarsa d dönüşümüne X üzerinde *konik metriktir* denir ve (X, d) ikilisine ise *konik metrik uzay* denir.

3.2.2. Tanım: (X, d) bir konik metrik uzay, (x_n) ise X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $0 < c$ şeklindeki $\forall\, c \in E$ için $n > m$ iken $d(x_n, x) < c$ olacak şekilde bir $m \in N$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir.$n \to \infty$ için $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [15].

3.2.3. Sonuç: (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Her bir $c \in E$ de $0 < c$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in P^\circ$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yani $x < c$ dir [7].

İspat: $0 < c$ ve $c \in E$ olduğundan $c \in P^\circ$ dir. $\{x \in X: \|x - c\| < \delta\} \subset P^\circ$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ bulabiliriz. Şimdi $\|x\| < \delta$ ise $\|c - x - c\| = \|-x\| = \|x\| < \delta$ olur. Buradan $\|(c - x) - c\| < \delta$ olur ki bu da $c - x \in P^\circ$ olduğunu gösterir.

3.2.4. Sonuç: (X, d) bir konik metrik uzay P, normal sabit K ile normal konik (x_n), X içinde bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin X içinde yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to \mathbf{0}$ olmasıdır [7].

İspat:

$(\Rightarrow)$ (x_n) dizisi X içinde $x \in X$ e yakınsak olsun. Yani $x_n \to x$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $0 < c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $c \in E$ alalım. Bu durumda $\forall n > N$ için $d(x_n, x) < c$ olacak şekilde $\exists\, N \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $n > N$ iken $\|d(x_n, x)\| < K\|c\| < \varepsilon$ olur. Bu ise $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to 0$ olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$ $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to 0$ olsun. Bu durumda $0 < c$ ve $c \in E$ için $\|x\| < \delta$ iken $c - x \in P^\circ$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bu δ için de $\forall\, n \in \mathbb{R}$ için $\|d(x_n, x)\| < c$ olacak şekilde $N \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle (x_n) dizisi x noktasına yakınsar.

3.2.5. Sonuç: (X, d) konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik, (x_n), X de bir dizi olsun. $(x_n) \to x$ ve $(x_n) \to y$ ise $x = y$ dir. Yani (x_n) dizisinin limiti tektir [7].

İspat: $0 < c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ olsun. (x_n) yakınsak olduğundan $\forall n > N$ için $d(x_n, x) < c$ ve $d(x_n, y) < c$ olacak şekilde $\exists\, N \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2c$$

olur. Böylece $\|d(x,y)\| \leq 2K\|c\| \to 0$ olur. O halde $d(x,y) = 0$ olur. Sonuç olarak $x = y$ olur. Bu ise (x_n) dizisinin limitinin tek olduğunu gösterir.

3.2.6. Tanım: (X,d) bir konik metrik uzay ve (x_n) ise X de bir dizi olsun. Eğer $0 < c$ şeklindeki her $c \in E$ için $n,m > N \Rightarrow d(x_n,x_m) < c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X de bir *Cauchy dizisi* denir [16].

3.2.7. Tanım: Bir (X,d) konik metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsarsa (X,d) ikilisine *tam konik metrik uzay* denir.

3.2.8. Sonuç: (X,d) bir konik metrik uzay ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. (x_n), X içinde x noktasına yakınsıyorsa (x_n), X de bir Cauchy dizidir. Yani konik metrik uzaylarda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir [7].

İspat: $0 < c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ alalım. O zaman $\forall n,m > N$ için $d(x_n,x) < \frac{c}{2}$ ve $d(x_m,x) < \frac{c}{2}$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x_m,x) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir. O halde (x_n), (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizidir.

3.2.9. Tanım: (X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ ve $x_n \to x$ olsun. A'daki (x_n) dizisi için $x \in A$ ise A ya *dizisel kapalı* denir.

3.2.10. Tanım: (X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall\, x,y \in A$ için $d(x,y) \leq c$ ve $0 < c$ olacak şekilde $\exists\, c \in E$ varsa A ya *üstten sınırlı küme* denir. Yani $\delta(A) = sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ varsa A ya *sınırlı küme* denir. Eğer supremumu yoksa A ya *sınırsız küme* denir.

BÖLÜM IV

ESNEK KONİK KÜMELER VE ESNEK KONİK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde esnek küme ve esnek metrik tanımlarından sonra esnek konik kümeler ve esnek konik metrik uzaylar tanımı verilecektir. Bu tanımlardan hareketle E reel Banach uzayı seçilip, P de onun alt kümesi seçilip hareket edilecek ve konik tanımı esnek konik tanımı üzerine uygulanacaktır. Ayrıca bu tez çalışmasında kullanılacak olan esnek konik küme ve esnek konik metrik uzay kavramı verilecektir.

4.1. Esnek Kümeler ve Esnek Metrik Uzaylar

4.1.1 Tanım: E başlangıç evreni ve A ise paremetreler kümesi olmak üzere E ve A boştan farklı iki küme olsun. $P(E)$, E kümesinin kuvvet kümesi olsun. Eğer f dönüşümü

$$f: A \to P(E)$$

ise bu dönüşüme E ve A üzerinde bir *esnek küme* denir. Buna göre f esnek kümesini

$$f = \{(a, f(a): a \in A\}$$

biçiminde ikililer kümesi olarak yazılabilir [17].

Bu çalışma boyunca E başlangıç evrenini, A paremetreler kümesini, $P(E)$ E kümesinin kuvvet kümesi ve $S_A(E)$ ise E evrenseli ve A paremetre kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesini belirtecektir.

Not: Görüntüsü boş küme olan elemanlar esnek küme içinde gösterilmez.

4.1.2 Tanım: Her $a \in A$ için $f(a) = \emptyset$ oluyorsa yani görüntüsü boş küme oluyorsa f esnek kümesine *boş esnek küme* denir ve Φ ile gösterilir [18].

4.1.3 Tanım: Her $a \in A$ için $f(a) = E$ oluyorsa f esnek kümesine *evrensel esnek küme* denir ve E_A ile gösterilir [18].

4.1.4 Tanım: $f,\ g \in S_A(E)$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $f(a) \subseteq g(a)$ ise f esnek kümesine g esnek kümesinin *alt esnek kümesi* denir ve $f \tilde{\subseteq} g$ şeklinde gösterilir [18].

4.1.5 Tanım: $f, g \in S_A(E)$ olsun.

a. $f \tilde{\cup} g = \{f(a) \cup g(a): a \in A\}$ kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek birleşimi denir.

b. $f \tilde{\cap} g = \{f(a) \cap g(a): a \in A\}$ kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek kesişimi denir.

c. $f \tilde{\setminus} g = \{f(a) \setminus g(a): a \in A\}$ kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek farkı denir.

d. $f^{\tilde{c}} = \{f(a)^c: a \in A\}$ kümesine f esnek kümesinin esnek tümleyeni denir. Esnek küme tümleyeni tanımında her $a \in A$ için $f(a)^c = E\setminus f(a)$ dır. Ayrıca $(f^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = f$ ve $\Phi^{\tilde{c}} = E_A$ dır. [18]

4.1.6 Tanım: $f \in S_A(E)$ olsun. En az bir $a \in A$ için $f(a) \neq \emptyset$ ve her $a' \in A\setminus\{a\}$ için $f(a') = \emptyset$ ise f esnek kümesine $S_A(E)$ de bir esnek nokta denir ve a_f ile gösterilir [19].

4.1.7. Tanım: $g \in S_A(E)$ ve a_f $S_A(E)$ de bir esnek nokta olsun. Her $a \in A$ için $f(a) \subseteq g(a)$ ise a_f esnek noktası g esnek kümesine esnek aittir denir ve $a_f \tilde{\in} g$ şeklinde gösterilir [19].

4.1.8 Tanım: $\emptyset \neq X \subseteq A,\ f \in S_X(\mathrm{E})$ ve $f: X \to P(E)$ dönüşümü birebir bir fonksiyon olsun. $f_i, f_j, f_s \in S_X(\mathrm{E})$ ve $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \tilde{\in} f$ olmak üzere f esnek küme üzerinde tanımlı $\tilde{d}$ *esnek metriği* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:

$$\tilde{d}: f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

i. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) \geq 0$

ii. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = 0 \Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$

iii. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}\right)$

iv. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) \leq \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}\right) + \tilde{d}\left(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}\right)$.

Eğer $\tilde{d}$, f fonksiyonu üzerinde bir esnek metrik ise bu durumda $(f, \tilde{d})$ ikilisine ise *esnek metrik uzay* denir.

Not: Esnek metrik uzay aksiyomlarından (i) aksiyomu, metrik aksiyomlarında olduğu gibi diğer üç aksiyomun sonucudur. Çünkü $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ise her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \tilde{\in} f$ için,

$$0 = \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{i_{f_i}}\right) \leq \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) + \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}\right) = 2\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right)$$

olur ki buradan $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) \geq 0$ bulunur. Bu nedenle $\tilde{d}$ nin esnek metric olduğu gösterilirken (i) aksiyomu gösterilmeyebilir. Bu aksiyomlarda (iii) aksiyomuna özel olarak esnek simetri, (iv) aksiyomuna ise esnek üçgen eşitsizliği denir.

4.1.9 Tanım: $\tilde{d}: f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ve her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için

$$\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \begin{cases} 0, & e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}} \\ 1, & e_{i_{f_i}} \neq e_{j_{f_j}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{d}$ esnek fonksiyonu f üzerinde bir metrik oluşturur. $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayına ise *esnek ayrık metrik uzay* denir.

4.1.10 Tanım: $\tilde{d}: f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ve her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{d}_{|.|}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \left|e_{i_{f_i}} - e_{j_{f_j}}\right|$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{d}_{|.|}$ esnek fonksiyonu f üzerinde bir metrik belirtir. $(f, \tilde{d}_{|.|})$ esnek metrik uzayına ise *esnek alışılmış metrik uzay* denir.

4.1.11 Tanım: K ve A paremetreler kümesi E evrenseli üzerinde bir vektör uzayı olsun. (F, A), E üzerinde esnek bir küme olsun. (F, A), K üzerinde esnek vektör uzayıdır veya E nin esnek doğrusal uzayıdır ancak ve ancak her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$, E nin alt vektör uzayıdır. (F, A) nın esnek elemanı, esnek vektörüdür. Benzer şekilde K esnek skaleri için (K, A) esnek kümedir.

$(F_1, A), (F_2, A), \dots, (F_n, A)$, E üzerinde n tane esnek küme olsun. $(F, A) = (F_1, A) + (F_2, A) + \dots + (F_n, A)$, E üzerinde esnek kümelerin toplamı olarak yazılabilir. Burada $F(\lambda)$, her $\lambda \in A$ için

$$F(\lambda) = \{x_1, x_2, \dots, x_n : x_i \in F_i(\lambda), i = 1,2, \dots, n\}$$

şeklinde tanımlıdır. $\alpha \in K$ skaleri ve (F, A), E üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda $(\alpha F, A)$, E üzerinde esnek kümedir ve her $\lambda \in A$ için

$$\alpha F(\lambda) = \{\alpha x : x \in F(\lambda)\}$$

dır.x, esnek E vektör uzayı üzerinde esnek vektör olsun. $\mathbf{0}$, E nin sıfır elemanı olmak üzere Her $\lambda \in A$ için $\tilde{x}(\lambda) = \mathbf{0}$ esnek sıfır vektördür. Bu esnek sıfır vektörü $\mathbf{0}$ ile gösterilir.

$\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ esnek vektör ve $\tilde{\alpha}$ esnek bir skaler olsun. Bu durumda her $\lambda \in A$ için esnek vektör toplamı ve esnek skaler çarpımı

i. $(\tilde{x} + \tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) + \tilde{y}(\lambda)$
ii. $(\tilde{\alpha}.\tilde{x})(\lambda) = \tilde{\alpha}.\tilde{x}(\lambda)$

dır. Açıkça görülür ki esnek vektör toplamı ve esnek skaler çarpımı (F, A) nın esnek vektörleridir. Aynı zamanda her $\tilde{\alpha} \in E$ ve her $\tilde{k} \in K$ için $\bar{0}.\tilde{\alpha} = \theta$, $-\bar{1}.\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{k}.\theta = \theta$ dır. $\tilde{k}.\tilde{\alpha} = \theta$ ise ya $\tilde{k} = \bar{0}$ yada $\tilde{\alpha} = \theta$ dır.

4.1.12 Tanım: $\tilde{E}$, esnek vektör uzayı olsun. $\|.\| : S_E(\tilde{E}) \to \mathbb{R}(A)$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa $\tilde{E}$ esnek vektör uzayı üzerinde esnek norm belirtir:

(N1) her $\tilde{x} \in \tilde{E}$ için $\|\tilde{x}\| \geqq \bar{0}$

(N2) $\|\tilde{x}\| = \bar{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$

(N3) her $\tilde{x} \in \tilde{E}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}\|$

(N4) her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$ için $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$.

$(\tilde{E}, \|.\|)$ ikilisine *esnek normlu uzay* denir. Bu esnek normlu uzay A üzerinde esnek normlu lineer uzaydır ve bu uzay $(\tilde{E}, \|.\|, A)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $\mathbb{R}(A)$ tüm esnek reel sayıların kümesi olsun. $\|.\|: \mathbb{R}(A) \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü $\tilde{x}$, $\mathbb{R}(A)$ nın esnek elamanı olmak üzere $\|\tilde{x}\| = |\tilde{x}|$ şeklinde tanımlansın. Burada $|\tilde{x}|$ esnek sayı modüllerini gösterir. Buradan $\|.\|$ dönüşümü $\mathbb{R}(A)$ üzerinde esnek normdur ve $(\mathbb{R}(A), \|.\|, A)$ ise esnek normlu lineer uzaydır.

4.2. Esnek Konik ve Esnek Konik Metrik Uzaylar

4.2.1. Tanım: $(\tilde{E}, \|.\|, A)$ esnek reel Banach uzayı ve $(P, A) \in S(\tilde{E})$ yani (P, A) esnek $\tilde{E}$ kümesinin alt kümesi olsun. (P, A) *esnek koniktir*.$\Leftrightarrow$

i.$(P, A) \neq \emptyset$ ve $(P, A) \neq S_S(\{\mathbf{0}\})$ ise (P, A)kapalıdır.

ii.$\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}(A)^*$ ve $\tilde{x}, \tilde{y} \in (P, A)$ için $\tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{y} \ \tilde{\in} \ (P, A)$ dır.

iii.$\tilde{x} \ \tilde{\in} \ (P, A)$ ve $\widetilde{-x} \ \tilde{\in} \ (P, A)$ ise $\tilde{x} = \mathbf{0}$ dır.

$(P, A) \in S(\tilde{E})$ esnek koniği sıralama bağıntısını sağlar.

$$\tilde{x} \lesssim \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{y} - \tilde{x} \in (P, A) \text{ dır.}$$

4.2.2. Tanım: $\tilde{E}$ esnek reel Banach uzayı üzerinde tanımlı (P, A)koniği için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a. (P, A) koniği normaldir:

Esnek reel $\tilde{\alpha} \gtrsim \tilde{0}$ ve $\tilde{x}, \tilde{y} \ \tilde{\in} \ \tilde{E}$ için $\tilde{0} \lesssim \tilde{x} \lesssim \tilde{y}$ ise $\|\tilde{x}\| \lesssim \tilde{\alpha}\|\tilde{y}\|$ dir. Burada $\tilde{\alpha}$, (P, A) üzerinde esnek sabit elemandır.

b. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \ \tilde{\in} \ \tilde{E}$ için supremumu varsa en küçüktür.

c. $\tilde{E}$ esnek kümesinin en küçük değeri varsa bu değer supremumdur.

d. $\imath nt(P, A) \neq \mathbf{0}$ ise (P, A) kümesi tamdır.

e. $\tilde{E}$ esnek kümesi üzerindeki esnek elemanlar sınırlıdır.

$\{\widetilde{x_n}\} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek elemanı ve $\widetilde{x_1} \tilde{\leqq} \widetilde{x_2} \tilde{\leqq} \ldots \tilde{\leqq} \widetilde{x_n} \tilde{\in} \tilde{E}$ olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{E}$ için $\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{x_n} - \tilde{x}\| = \tilde{0}$ dır.

Örnek: A sınırlı parametreler kümesi ve $\mathbb{R}(A)$ ise esnek reel sayıların kümesi olsun. $\mathbb{R}^n(A) = \mathbb{R}(A) \times \mathbb{R}(A) \times \ldots \times \mathbb{R}(A)$, esnek Banach uzayıdır.

Çözüm: $\tilde{E} = \mathbb{R}^n(A)$ seçilirse

$$(P, A) = S_S\{(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \ldots, \widetilde{x_n}) : \tilde{x_\iota} \tilde{\geqq} \tilde{0}, her\ i = 1,2, \ldots, n\}$$

şeklindedir. Burada (P, A) ikilisi esnek koniktir. Bu esnek konik normal ve sınırlıdır. Aynı zamanda (P, A) esnek koniği $\tilde{E}$ esnek reel Banach uzayı üzerinde tamdır ($\iota nt(P, A) \neq \mathbf{0}$). Son olarak ise (P, A) esnek koniği sıralama bağıntısını sağlar.

4.2.3. Tanım: $\tilde{X}$ boştan farklı esnek bir küme ve $\tilde{E}$ bir esnek reel Banach uzayı olsun. Eğer $d: S_E(\tilde{X}) \times S_E(\tilde{X}) \to S_E(\tilde{E})$ dönüşümü

i.Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\geqq} \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

ii.Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$, (simetri)

iii.Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\leqq} d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(z, \tilde{y})$, (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlarsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde *esnek konik metriktir* denir ve $(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{A})$ ya ise *esnek konik metrik uzay* denir.

Esnek konik metirk uzay genellleştirilmiş esnek metrik uzaydır.

Örnek: A sonlu bir küme olsun. $\tilde{E} = R^2(A)$, $(P, A) = S_S\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\in} \tilde{E} : \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\geqq} \tilde{0}\}$ şeklinde tanımlansın. $\tilde{X} = R(A)$ ve $d: \tilde{X} \times \tilde{X} \to \tilde{E}$, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = (|\tilde{x} - \tilde{y}|, \tilde{\alpha}|\tilde{x} - \tilde{y}|)$ dönüşümü için $\tilde{\alpha} \tilde{\geqq} \tilde{0}$ esnek sabittir. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzaydır.

Çözüm:

i.Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \tilde{\geqq} 0$ için

$$\mathbf{0} \tilde{\leqq} d(\tilde{x}, \tilde{y}) = (|\tilde{x} - \tilde{y}|, \tilde{\alpha}|\tilde{x} - \tilde{y}|) = (0,0)$$

$$|\tilde{x}-\tilde{y}|=0 \rightarrow \tilde{x}-\tilde{y}=0 \rightarrow \tilde{x}=\tilde{y}$$

ii. Her $\tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$ dir.

$$d(\tilde{x},\tilde{y})=(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\tilde{\alpha}|\tilde{x}-\tilde{y}|)=(|(-1)(\tilde{y}-\tilde{x})|,\tilde{\alpha}|(-1)(\tilde{y}-\tilde{x})|)$$
$$=(|\tilde{y}-\tilde{x}|,\tilde{\alpha}|\tilde{y}-\tilde{x}|)=d(\tilde{y},\tilde{x})$$

iii. Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leqq} d(\tilde{x},\tilde{z})+d(z,\tilde{y})$ dir.

$$d(\tilde{x},\tilde{z})+d(z,\tilde{y})=(|\tilde{x}-\tilde{z}|,\tilde{\alpha}|\tilde{x}-\tilde{z}|)+(|\tilde{z}-\tilde{y}|,\tilde{\alpha}|\tilde{z}-\tilde{y}|)$$
$$=(|\tilde{x}-\tilde{z}|+|\tilde{z}-\tilde{y}|\,,\tilde{\alpha}(|\tilde{x}-\tilde{z}|+|\tilde{z}-\tilde{y}|))$$
$$\tilde{\geqq}(|\tilde{x}-y|+\tilde{\alpha}|\tilde{x}-\tilde{y}|)=d(\tilde{x},\tilde{y})$$

dir. bu durumda d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde esnek konik metriktir.

Örnek: A sonlu parametrelerin kümesi olsun. $\{d_\lambda : \lambda \in A\}$ kümesi $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerinde esnek konik metrik uzaydır.

Çözüm: her $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$, her $\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda) \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$$d: S_E(\tilde{X}) \times S_E(\tilde{X}) \rightarrow S_E(\tilde{E})$$
$$d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$$

olarak seçildiğinde d_λ indisler kümesi $\tilde{X}$ üzerinde esnek konik metriktir. Gösterelim:

i.her $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$, her $\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda) \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$$\mathbf{0} \tilde{\leqq} d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=\mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{x}(\lambda)=\tilde{y}(\lambda) \Leftrightarrow \tilde{x}=\tilde{y}$$

ii.her $\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda) \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=d_\lambda(\tilde{y}(\lambda),\tilde{x}(\lambda))=d(\tilde{y},\tilde{x})(\lambda)$ dır.

iii. Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$$[d(\tilde{x},\tilde{z})+d(z,\tilde{y})](\lambda)=d(\tilde{x},\tilde{z})(\lambda)+d(\tilde{z},\tilde{y})(\lambda)$$
$$=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{z}(\lambda))+d_\lambda(\tilde{z}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$$
$$\tilde{\geqq} d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)$$

dir. Yani $d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leqq} d(\tilde{x},\tilde{z})+d(z,\tilde{y})$ bulunur. Bu durumda d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde esnek konik metrik belirtir.

4.2.4. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay olsun. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisi $\tilde{X}$ de bir esnek eleman olsun. Her $0 \tilde{<} \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve her $n > N$ doğal sayısı için $d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \tilde{<} \tilde{c}$ olacak şekilde bir esnek c sabiti vardır. Öyle ki $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek dizisi $\tilde{x}$ esnek elemanına *yakınsar*. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x} \text{ dir veya } n \to \infty \text{ için } \widetilde{x_n} \to \tilde{x} \text{ dir.}$$

4.2.5. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay, α esnek sabit ve (P, A) normal esnek konik olsun. $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek dizisi, $\tilde{X}$ in esnek elemanı olsun.

$$n \to \infty \text{ için } \{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x} \Leftrightarrow d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \to \mathbf{0} \text{ dır.}$$

İspat: $(\Rightarrow) n \to \infty$ için $\{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x}$ olsun. $\tilde{\delta} \tilde{>} \tilde{0}, \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}, 0 \tilde{\leq} \tilde{c}$ ve $\tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olsun. Her $n \in N$ doğal sayısı için $n > N$ ise $(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \tilde{\leq} \tilde{c}$ dir. bu durumda $n > N$ için

$$\|d(\widetilde{x_n}, \tilde{x})\| \tilde{\leq} \alpha\|c\| \tilde{<} \tilde{\delta}$$

dir. Yani $n \to \infty$ için $d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ dır.

$(\Leftarrow) n \to \infty$ için $d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ olsun. $\tilde{0} \tilde{\leq} \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve $\tilde{\delta} \tilde{>} \tilde{0}$ için
$\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ ise $\tilde{c} - \tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ dır. Her $n \in N$ doğal sayısı için $n > N$ ise

$$\|d(\widetilde{x_n}, \tilde{x})\| \tilde{<} \tilde{\delta}$$

olacak şekilde $\tilde{\delta} \tilde{>} \tilde{0}$ vardır. Bu durumda $\|d(\widetilde{x_n}, \tilde{x})\| \tilde{<} \tilde{c}$ dir. Yani sonuç olarak $n \to \infty$ için $\{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x}$ dir.

4.2.6. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay olsun. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisi $\tilde{X}$ de bir esnek eleman olsun. Her $0 \tilde{<} \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve her $n, m > N$ doğal sayıları için

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m})\| \tilde{\leq} \tilde{c}$$

dir. Bu durumda $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisi $\tilde{X}$ esnek konik metrik uzayında bir *Cauchy dizisi* belirtir.

4.2.7. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek konik metrik uzayında her esnek konik $\{\widetilde{x_n}\}$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ *tam esnek konik metrik uzaydır*.

4.2.8. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek konik kümesi üzerindeki her dizi Cauchy dizisidir.

İspat: $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisi $\tilde{X}$ in esnek elemanı ve $n \to \infty$ için $\{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x}$ olsun. Her $\tilde{0} \lneqq \tilde{c} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{E}$, her $n, m > N$ doğal sayıları için

$$d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \leq \frac{\tilde{c}}{2} \quad \text{ve} \quad d(\widetilde{x_m}, \tilde{x}) \leq \frac{\tilde{c}}{2}$$

$$d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) \leq d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) + (\widetilde{x_m}, \tilde{x}) = \frac{\tilde{c}}{2} + \frac{\tilde{c}}{2} = c \leq 2c$$

olup $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisi Cauchy dizisidir.

BÖLÜM V

SABİT NOKTA TEOREMLERİ

5.1. Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde konik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz.

5.1.1 Teorem: (X, d) bir tam konik metrik uzay ve P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü ise aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(Tx, Ty) \leq k.d(x, y), \text{ her } x, y \in X,\ k \in [0,1)$$

O zaman T, X de sabit tek bir noktaya sabittir ve $\forall x \in X$ için $(T^n x)$ bu sabit noktaya yakınsar [7].

İspat: $x_0 \in X$ olsun. (x_n) dizisini

$$x_1 = Tx_0$$
$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0$$
$$x_3 = Tx_2 = TTx_1 = TT^2 x_0 = T^3 x_0$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$$
$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots$$
$$\leq k^n d(x_1, x_0)$$

buluruz.

Böylece $\forall n > m$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m)$$
$$\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0)$$

olur. Buradan da

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$$

elde ederiz. Bu ise $d(x_n, x_m) \to 0 \,; (n, m \to \infty)$ olmasını gerektirir. Yani (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır.

Buradan

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)$$

ve P normal konik olduğundan

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0$$

olur. Yani $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ dır. Bu ise $Tx^* = x^*$ demektir. O halde x^* bir sabit noktadır.

Şimdi y^*, T de başka bir sabit nokta olsun. Bu durumda

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*)$$

olur. Buradan $\|d(x^*, y^*)\| = 0$ ve $x^* = y^*$ bulunur. Yani sonuç olarak T nin sabit noktası tektir.

5.1.2 Sonuç: (X, d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. $0 < c$ olacak şekilde bir $c \in E$ ve $x_0 \in X$ için $B(x_0, c) = \{x \in X : d(x_o, x) \leq c\}$ verilsin. $T: X \to X$ dönüşümü ise aşağıda bulunan daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall\, x, y \in B(x_0, c), k \in [0,1) \text{ ve } d(Tx_0, x_0) \leq (1-k)c.$$

Bu durumda T, $B(x_0, c)$ de tek bir noktaya sahiptir [7].

İspat: Öncelikle $B(x_0, c)$ nin tam olduğunu gösterelim. (x_n), $B(x_0, c)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n), X te de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x \in X$ için $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olur.

$$d(x_0, x) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, x) \leq d(x_n, x) + c \; x_n \to x \;\; ; \;\; (n \to \infty)$$

olduğundan $d(x_n, x) \to 0$ dır. Böylece $d(x_0, x) \leq c$ ve $x \in B(x_0, c)$ dir. Yani (x_n), $B(x_0, c)$ de yakınsak bir dizidir. Bu ise $B(x_0, c)$ nin tam konik metrik uzay olduğunu gösterir.

Şimdi ise $\forall\, x \in B(x_0, c)$ için $T\,x \; \in B(x_0, c)$ olduğunu ispatlayalım. $\forall\, x \in B(x_0, c)$ için

$$d(x_0, Tx) \leq d(Tx_0, x_0) + d(Tx_0, Tx) \leq (1-k)c + kd(x_0, x) \leq (1-k)c + kc$$
$$= c$$

bulunur. Bu nedenle $Tx \; \in B(x_0, c)$ dir. Bu ise $T_{I B(x_0,c)}: B(x_0, c) \to B(x_0, c)$ daraltma dönüşümüdür. Teorem 5.1.1 den dolayı T, $B(x_0, c)$ de tek bir sabit noktaya sahiptir.

5.1.3 Sonuç: (X, d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. Bir $n \in N$ için $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(T^n x, T^n y) \leq \; kd(x, y),$$

her $x, y \in X$, $k \in [0,1)$ bir sabit. Böylece T, X' de tek bir sabit noktaya sahiptir [7].

İspat: Sabit nokta teoreminden dolayı T^n, x^* tek bir sabit noktasına sahiptir. $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$, böylece Tx^* da bir sabit nokta olur. Yani $Tx^* = x^*$ olup x^* bir sabit noktadır. T nin sabit noktası T^n inde sabit noktası olduğundan T nin sabit noktası tektir.

5.2. Esnek Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde esnek konik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz.

5.2.1. Tanım: $(\widetilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay ve $T: (\widetilde{X}, d, A) \to (\widetilde{X}, d, A)$ bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ esnek elemanı için

$$T\widetilde{x_0} = \widetilde{x_0}$$

ise $\widetilde{x_0}$ T dönüşümünün *esnek sabit elemanıdır*.

5.2.2. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay ve $T: (\widetilde{X}, d, A) \to (\widetilde{X}, d, A)$ bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ için $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisinde $\widetilde{x_0}$ esnek elemanlarını alırsak

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x_1} = T\widetilde{x_0}\\
&\widetilde{x_2} = T\widetilde{x_1} = T^2\widetilde{x_0}\\
&\widetilde{x_3} = T\widetilde{x_2} = TT\widetilde{x_1} = TT^2\widetilde{x_0} = T^3\widetilde{x_0}\\
&.\\
&.\\
&.\\
&\widetilde{x_n} = T\widetilde{x_{n-1}} = T^n\widetilde{x_0}
\end{aligned}$$

şeklinde $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisini yineleme metodu ile oluşturabiliriz.

5.2.3. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzay ve $T: (\widetilde{X}, d, A) \to (\widetilde{X}, d, A)$ bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{0} \lneqq \tilde{k} \lesssim \tilde{1}$ olacak şekilde $\tilde{k}$ pozitif esnek reel sayısı için

$$d(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \lneqq \tilde{k}.d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

dir. bu durumda T, $\tilde{X}$ de sabit esnek tek bir noktaya sahiptir.

5.2.4. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzay ve $T: (\widetilde{X}, d, A) \to (\widetilde{X}, d, A)$ bir esnek konik dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $\tilde{X}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir ve her $\tilde{x} \widetilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı için $\{T^n\tilde{x}\}$ bu esnek konik olan sabit noktaya sahiptir.

İspat: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzay ve

$$T: (\tilde{X}, d, A) \to (\tilde{X}, d, A)$$

bir daraltma dönüşümü olsun. $\tilde{0} \lneqq \tilde{t} \lneqq \tilde{1}$ pozitif esnek reel $\tilde{t}$ sayısı ve $\widetilde{x_0} \widetilde{\in} \tilde{X}$, $n \geq 1$ için yineleme metodunu uygularsak $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek dizisini

$$\widetilde{x_1} = T\widetilde{x_0}$$
$$\widetilde{x_2} = T\widetilde{x_1} = T^2\widetilde{x_0}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\widetilde{x_{n+1}} = T\widetilde{x_n} = T^{n+1}\widetilde{x_0}$$

$$d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x_n}) \precsim d(T\widetilde{x_n}, T\widetilde{x_{n-1}}) \precsim t\,.\,d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_{n-1}}) \precsim \ldots \precsim t^n.\,d(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_0})$$

olur. Bu durumda her $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) &\precsim d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_{n-1}}) + d(\widetilde{x_{n-1}}, \widetilde{x_{n-2}}) + \cdots + d(\widetilde{x_{m+1}}, \widetilde{x_m}) \\ &\precsim (t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t^m).\,d(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_0}) \\ &\precsim \frac{t^m}{1-t}\, d(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_0}) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m})\| \precsim \frac{t^m}{1-t}\|d(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_0})\|$$

elde edilir. $(n, m \to \infty)$ için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) \to 0$ olmasını gerektirir. Yani her $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisini yakınsaktır. Bu durumda $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek konik Cauchy dizisidir. $\tilde{X}$ tam olduğundan $\widetilde{x_n} \to \widetilde{x^*}$ olacak şekilde $\widetilde{x^*} \tilde{\in} \tilde{X}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} d(T\widetilde{x^*}, x^*) &\precsim d(T\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(T\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*}) \\ &\precsim t.\,[d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*})] \\ &\precsim d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*}) \\ &\precsim \frac{\tilde{t}}{2} + \frac{\tilde{t}}{2} = \tilde{t} \end{aligned}$$

dir. Yani (P, A) kapalı ve $-d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*}) \tilde{\in} (P, A)$ olduğunda $d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*}) \tilde{\in} (P, A)$dır. Buradan $\|d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*})\| = \mathbf{0}$ dır. Bu durumda $T\widetilde{x^*} = \widetilde{x^*}$ dır. O halde $\widetilde{x^*}$ bir esnek konik sabit noktadır.

Şimdi $\widetilde{x^*}$ esnek konik sabit noktanın tek olduğunu ispatlayalım. $\widetilde{y^*}$, T nin başka bir esnek konik sabit noktası olsun. Bu durumda

$$d(\widetilde{x^*},\widetilde{y^*}) = d(T\widetilde{x^*},T\widetilde{y^*}) \lesseqqgtr t.d(\widetilde{x^*},\widetilde{y^*})$$

olur. Buradan

$\|d(\widetilde{x^*},\widetilde{y^*})\| = \mathbf{0}$ olduğundan $\widetilde{x^*} = \widetilde{y^*}$ bulunur. Yani sonuç olarak T nin esnek konik sabit noktası tektir.

5.2.5. Sonuç: $(\tilde{X},d,A)$ tam esnek konik metrik uzay olsun. $0 \lneqq \tilde{c}$ ve $\widetilde{x_0} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $B(\widetilde{x_0},c) = \{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}: d(\widetilde{x_0},\tilde{x}) \leqq \tilde{c}\}$ yuvarı ve $(P,A) = S_S(B(\widetilde{x_0},\tilde{c})$ esnek kümesi verilsin. $T:(\tilde{X},d,A) \to (\tilde{X},d,A)$ dönüşümü aşağıda verilen daraltma şartlarını sağlasın.

Her $\tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} (P,A)$ ve $\tilde{0} \leqq \tilde{t} \lneqq \tilde{1}$ esnek sabiti için

$$d(T\tilde{x},T\tilde{y}) \leqq t.d(\tilde{x},\tilde{y}) \text{ ve } d(T\widetilde{x_0},\widetilde{x_0}) \leqq (\tilde{1}-\tilde{t}).\tilde{c}$$

dir. Bu durumda T, $B(\widetilde{x_0},\tilde{c})$ yuvarında tek bir esnek konik noktaya sahiptir.

İspat: (P,A) tam ve her $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ için $T\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ olsun. Burada $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek konik dizisi (P,A) da Cauchy dizisi olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x}$ ise $\tilde{X}$ esnek konik kümesi tamdır.

$$d(\widetilde{x_0},\tilde{x}) \leqq d(\widetilde{x_0},\widetilde{x_n}) + d(\widetilde{x_n},\tilde{x}) \leqq d(\widetilde{x_n},\tilde{x}) + \tilde{c}$$

$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x}$ için $d(\widetilde{x_n},\tilde{x}) \to \mathbf{0}$ olduğundan $d(\widetilde{x_0},\tilde{x}) \leqq \tilde{c}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ dır. Böylece (P,A) esnek konik kümesi tamdır. Her $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ için

$$d(\widetilde{x_0},T\tilde{x}) \leqq d(T\widetilde{x_0},\widetilde{x_0}) + d(T\widetilde{x_0},\tilde{x}) \leqq (\tilde{1}-\tilde{t}).\tilde{c} + \tilde{t}.\tilde{c} = \tilde{c}$$

Yani $T\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ dır. Bu durumda T, $B(\widetilde{x_0},\tilde{c})$ yuvarında tek bir esnek konik noktaya sahiptir.

BÖLÜM VI

İKİ METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDAKİ KONİKLİK VE ESNEKLİK

6.1. İki Metrik Uzaylar ve Esnek İki Metrik Uzaylar

6.1.1. Tanım: X kümesi boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, d dönüşümü $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ ve $\forall x, y, z, t \in X$ için

M$_1$) $d(x, y, z) \neq \mathbf{0}$

M$_2$) $\forall x, y, z \in X$ için en az iki nokta eşit ise $d(x, y, z) = \mathbf{0}$

M$_3$) Simetri

$$d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, z, x) = d(y, x, z) = d(z, x, y) = d(z, y, x)$$

M$_4$) Dikdörtgen eşitsizliği

$$d(x, y, z) \leq d(x, y, t) + d(y, z, t) + d(z, x, t)$$

koşullarını gerçekliyorsa d dönüşümüne X kümesi üzerinde *2-metriktir* denir. Üzerinde d metriği tanımlı olan X kümesinede *2-metrik uzay* denir ve (X, d) ile gösterilir.

6.1.2. Tanım: E nin boş kümeden farklı bir X alt kümesini ele alalım. X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler $S_X(U)$ olsun. $f: X \to P(U)$ birebir bir fonksiyon olsun. f_i, f_j, f_s ve f_g dönüşümleri $S_X(U)$ nun elemanları ve $e_{i_{f_i}}$, $e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}, e_{g_{f_g}} \,\tilde{\in}\, f$ olmak üzere,

i. $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}\right) \geq 0$

ii. en az iki noktası eşit ise $\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}\right) = 0$

iii. esnek simetri

$$\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}\right) = \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}\right) = \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}, e_{i_{f_i}}\right) = \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}\right) = \tilde{d}\left(e_{s_{f_s}}, e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\right) = \tilde{d}\left(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}\right)$$

iv. esnek dikdörtgen eşitsizliği

$$\tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}\right) \lesseqqgtr \tilde{d}\left(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{g_{f_g}}\right) + \tilde{d}\left(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}, e_{g_{f_g}}\right) + \tilde{d}\left(e_{s_{f_s}}, e_{i_{f_i}}, e_{g_{f_g}}\right)$$

özelliklerini sağlayan bir $\tilde{d}: f \times f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümüne f esnek kümesi üzerinde tanımlı bir *esnek 2-metrik* denir ve $(f, \tilde{d})$ ikilisine ise bir *esnek 2-metrik uzay* denir.

E ve U kümeleri sayılabilir sonsuz elemanlı kümeler olduklarını kabul edelim.

6.1.3. Tanım: X boştan farklı bir küme ve E bir reel Banach uzayı olsun. Eğer $d: X \times X \times X \to E$ dönüşümü;

i. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y, z) \neq \mathbf{0}$

ii. Her $x, y, z \in X$ için en az iki nokta eşit ise $d(x, y, z) = \mathbf{0}$

iii. Simetri

$d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, z, x) = d(y, x, z) = d(z, x, y) = d(z, y, x)$

iv. Dikdörtgen eşitsizliği

$d(x, y, z) \leq d(x, y, t) + d(y, z, t) + d(z, x, t)$

şartlarını sağlarsa d dönüşümüne X üzerinde *konik 2-metriktir* denir ve (X, d) ikilisine ise *konik 2-metrik uzay* denir.

6.1.4. Tanım: (X, d) bir konik 2-metrik uzay, $x \in X$ için (x_n) ve (x_m) ise X de bir dizi olsun. Eğer $0 < c$ şeklindeki $\forall\, c \in E$ için $n, m > k$ iken $d(x_n, x_m, x) < c$ olacak şekilde bir $k \in N$ varsa (x_n) ve (x_m) dizileri yakınsaktır denir.

$$n \to \infty\ , m \to \infty \text{ için } x_n \to x, x_m \to x \text{ ya da } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ve } \lim_{m\to\infty} x_m = x$$

şeklinde gösterilir.

6.1.5. Sonuç: (X, d) bir konik 2-metrik uzay olsun. Her bir $c \in E$ de $0 < c$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in P°$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yani $x < c$ dir.

İspat: $0 < c$ ve $c \in E$ olduğundan $c \in P°$ dir. $\{x \in X: \|x - c\| < \delta\} \subset P°$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ bulabiliriz. Şimdi $\|x\| < \delta$ ise $\|c - x - c\| = \|-x\| = \|x\| < \delta$ olur. Buradan $\|(c - x) - c\| < \delta$ olur ki bu da $c - x \in P°$ olduğunu gösterir.

6.1.6. Sonuç: (X, d) bir konik 2-metrik uzay P, normal sabit K ile normal konik (x_n), X içinde bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin X içinde yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$, $m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m, x) \to \mathbf{0}$ olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ (x_n) ve (x_m) dizisi X içinde $x \in X$ e yakınsak olsun. Yani $x_n \to x$ ve $x_m \to x$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $0 < c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $c \in E$ alalım. Bu durumda $\forall n, m > N$ için $d(x_n, x_m, x) < c$ olacak şekilde $\exists\, N \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $n, m > N$ iken $\|d(x_n, x_m, x)\| < K\|c\| < \varepsilon$ olur. Bu ise $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m, x) \to \mathbf{0}$ olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$ $n \to \infty$ iken $d(x_n, x_m, x) \to \mathbf{0}$ olsun. Bu durumda $0 < c$ ve $c \in E$ için $\|x\| < \delta$ iken $c - x \in P°$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bu δ için de $\forall\, n, m \in \mathbb{R}$ için $\|d(x_n, x_m, x)\| < c$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle (x_n) ve (x_m) dizisi x noktasına yakınsar.

6.1.7. Tanım: (X, d) bir konik 2-metrik uzay ve (x_n), (x_m) ise X de bir dizi olsun. Eğer $0 < c$ şeklindeki her $c \in E$ için $n, m, k > N \Rightarrow d(x_n, x_m, x_k) < c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) ve (x_m) dizisine X de bir ***Cauchy dizisi*** denir.

6.1.8. Tanım: Bir (X, d) konik 2-metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsarsa (X, d) ikilisine *tam konik 2-metrik uzay* denir.

6.1.9. Sonuç: (X,d) bir konik 2-metrik uzay ve (x_n), (x_m) X içinde bir dizi olsun. (x_n) ve (x_m) X içinde x noktasına yakınsıyorsa (x_n) ve (x_m) X de bir Cauchy dizidir. Yani konik metrik uzaylarda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat: $0 < c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ alalım. O zaman $\forall n, m, k > N$ için $d(x_n, x_m, x) < \frac{c}{3}$, $d(x_m, x_k, x) < \frac{c}{3}$, $d(x_k, x_n, x) < \frac{c}{3}$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$d(x_n, x_m, x_k) \leq d(x_n, x_m, x) + d(x_m, x_k, x) + d(x_k, x_n, x) = \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c$$

elde edilir. O halde $(x_n), (x_m)$ e (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

6.1.10. Tanım: (X,d) bir konik 2-metrik uzay ve $A \subset X$ ve $x_n, x_m \to x$ olsun. A'daki (x_n), (x_m) dizisi için $x \in A$ ise A ya *dizisel kapalı* denir.

6.1.11. Tanım: (X,d) bir konik 2-metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall\, x, y, z \in A$ için $d(x,y,z) \leq c$ ve $0 < c$ olacak şekilde $\exists\, c \in E$ varsa A ya *üstten sınırlı küme* denir. Yani $\delta(A) = sup\{d(x,y,z): x,y,z \in A\}$ varsa A ya *sınırlı küme* denir. Eğer supremumu yoksa A ya *sınırsız küme* denir.

6.2. Esnek Konik 2-Metrik Uzaylar

6.2.1. Tanım: $\tilde{X}$ boştan farklı esnek bir küme ve $\tilde{E}$ bir esnek reel Banach uzayı olsun. Eğer $d: S_E(\tilde{X}) \times S_E(\tilde{X}) \times S_E(\tilde{X}) \to S_E(\tilde{E})$ dönüşümü

i. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq \mathbf{0}$

ii. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için en az iki nokta eşit ise $d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{0}$

iii. Simetri

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) = d(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{z}, \tilde{y}, \tilde{x})$$

iv. Dikdörtgen eşitsizliği

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) + d(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{t})$$

şartlarını sağlarsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde *esnek konik 2-metriktir* denir ve $(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{A})$ ya ise *esnek konik 2-metrik uzay* denir.

Esnek konik 2-metrik uzay genellleştirilmiş esnek 2-metrik uzaydır.

Örnek: A sonlu bir küme olsun. $\tilde{E} = R^2(A)$, $(P, A) = S_S\{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\in} \tilde{E} : \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \gneqq \tilde{0}\}$ şeklinde tanımlansın. $\tilde{X} = R(A)$ ve $d: \tilde{X} \times \tilde{X} \times \tilde{X} \to \tilde{E}$,

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (|\tilde{x} - \tilde{y}| + |\tilde{y} - \tilde{z}|, \tilde{\alpha}[|\tilde{x} - \tilde{y}| + |\tilde{y} - \tilde{z}|])$$

dönüşümü için $\tilde{\alpha} \gneqq \tilde{0}$ esnek sabittir. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik metrik uzaydır.

Çözüm:

i. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \gneqq 0$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq \mathbf{0}$

ii. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \gneqq 0$ için $\tilde{x} = \tilde{y}$ ise

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (|\tilde{x} - \tilde{y}| + |\tilde{y} - \tilde{z}|, \tilde{\alpha}[|\tilde{x} - \tilde{y}| + |\tilde{y} - \tilde{z}|]) = (0,0,0)$$

iii. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) = d(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{z}, \tilde{y}, \tilde{x})$$

iv. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) + d(\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{t})$

dir. Bu durumda d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde esnek konik 2-metriktir.

6.2.2. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay olsun. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\{\widetilde{x_n}\}, \{\widetilde{x_m}\}$ dizisi $\tilde{X}$ de bir esnek eleman olsun. Her $0 \tilde{<} \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve her $n, m > N$ doğal sayısı için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) \tilde{<} \tilde{c}$ olacak şekilde bir esnek c sabiti vardır. Öyle ki $\{\widetilde{x_n}\}$ ve $\{\widetilde{x_m}\}$ esnek dizisi $\tilde{x}$ esnek elemanına yakınsar. Yani
$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x}$, $\lim_{m\to\infty} \widetilde{x_m} = \tilde{x}$ dir veya $n, m \to \infty$ için $\widetilde{x_n} \to \tilde{x}, \widetilde{x_m} \to \tilde{x}$ dir.

6.2.3. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay, α esnek sabit ve (P, A) normal esnek konik olsun. $\{\widetilde{x_n}\}$, $\{\widetilde{x_m}\}$ esnek dizisi, $\tilde{X}$ in esnek elemanı olsun.
$n, m \to \infty$ için $\widetilde{\{x_n\}} \to \tilde{x}, \widetilde{\{x_m\}} \to \tilde{x} \iff d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ dır.

İspat: $(\Rightarrow) n, m \to \infty$ için $\widetilde{\{x_n\}} \to \tilde{x}$ ve $\widetilde{\{x_m\}} \to \tilde{x}$ olsun. $\tilde{\delta} \tilde{>} \tilde{0}, \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}, 0 \tilde{\leqq} \tilde{c}$ ve $\tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olsun. Her $n, m \in N$ doğal sayısı için $n, m > N$ ise $(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}\ ) \tilde{\leqq} \tilde{c}$ dir. Bu durumda $n, m > N$ için

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}\ )\| \tilde{\leqq} \alpha\|c\| \tilde{<} \tilde{\delta}$$

dir. Yani $n \to \infty$ için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ dır.

$(\Leftarrow) n, m \to \infty$ için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ olsun. $\tilde{0} \lneqq \tilde{c} \,\tilde{\in}\, \tilde{E}$ ve $\tilde{\delta} \gtrsim \tilde{0}$ için $\|\tilde{x}\| \lesssim \tilde{\delta}$ ise $\tilde{c} - \tilde{x} \,\tilde{\in}\, (P, A)$ dır. Her $n, m \in N$ doğal sayısı için $n, m > N$ ise

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x})\| \lesssim \tilde{\delta}$$

olacak şekilde $\tilde{\delta} \gtrsim \tilde{0}$ vardır. Bu durumda

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x})\| \lesssim \tilde{c}$$

dir. Yani sonuç olarak $n, m \to \infty$ için $\{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x}$ ve $\{\widetilde{x_m}\} \to \tilde{x}$ dir.

6.2.4. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay olsun. Her $\tilde{x} \,\tilde{\in}\, \tilde{X}$ için $\{\widetilde{x_n}\}$,$\{\widetilde{x_m}\}$ dizisi $\tilde{X}$ de bir esnek eleman olsun. Her $0 \lesssim \tilde{c} \,\tilde{\in}\, \tilde{E}$ ve her $n, m, k > N$ doğal sayıları için

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \widetilde{x_k})\| \lneqq \tilde{c}$$

dir. Bu durumda $\{\widetilde{x_n}\}$, $\{\widetilde{x_m}\}$ dizisi $\tilde{X}$ esnek konik 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi belirtir.

6.2.5. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek konik 2-metrik uzayında her esnek konik $\{\widetilde{x_n}\}, \{\widetilde{x_m}\}$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzaydır.

6.2.6. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik 2-metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek konik kümesi üzerindeki her dizi Cauchy dizisidir.

İspat: $\{\widetilde{x_n}\}$,$\{\widetilde{x_m}\}$ dizisi $\tilde{X}$ in esnek elemanı ve $n, m \to \infty$ için $\{\widetilde{x_n}\} \to \tilde{x}, \{\widetilde{x_m}\} \to x$ olsun. Her $\tilde{0} \lneqq \tilde{c} \,\tilde{\in}\, \tilde{E}$, her $n, m, k > N$ doğal sayıları için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) < \frac{\tilde{c}}{3}$, $d(\widetilde{x_m}, \widetilde{x_k}, \tilde{x}) < \frac{\tilde{c}}{3}$, $d(\widetilde{x_k}, \widetilde{x_n}, \tilde{x}) < \frac{\tilde{c}}{3}$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \widetilde{x_k}) \leq d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \tilde{x}) + d(\widetilde{x_m}, \widetilde{x_k}, \tilde{x}) + d(\widetilde{x_k}, \widetilde{x_n}, \tilde{x}) = \frac{\tilde{c}}{3} + \frac{\tilde{c}}{3} + \frac{\tilde{c}}{3} = \tilde{c}$$

elde edilir. O halde $\{\widetilde{x_n}\},\{\widetilde{x_m}\}$ dizisi (X,d) 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

6.3. Konik 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

6.3.1. Teorem: (X,d) bir tam konik 2-metrik uzay ve P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. $T: X\times X\times X \to X$ dönüşümü ise aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

Her $x,y,z \in X$, $k\in[0,1)$ için

$$d(Tx,Ty,Tz) \le k.d(x,y,z)$$

o zaman T, X de sabit tek bir noktaya sabittir ve $\forall x\in X$ için $(T^n x)$ bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. (x_n) dizisini

$$x_1 = Tx_0$$
$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0$$
$$x_3 = Tx_2 = TTx_1 = TT^2x_0 = T^3x_0$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$
$$x_{n+2} = Tx_{n+1} = T^{n+2}x_0$$

$$d(x_{n+2},x_{n+1},x_n) = d(Tx_{n+1},Tx_n,Tx_{n-1}) \le kd(x_{n+1},x_n,x_{n-1})$$
$$\le k^2d(x_n,x_{n-1},x_{n-2}) \le \cdots \le k^n d(x_2,x_1,x_0)$$

buluruz. Böylece $\forall n,m > t$ için

$$d(x_n,x_m,x_t) \le d(x_{n+1},x_n,x_{n-1}) + d(x_n,x_{n-1},x_{n-2}) + \cdots + d(x_{t+2},x_{t+1},x_t)$$
$$\le (k^{n-1}+k^{n-2}+\cdots+k^m)d(x_{2,}x_1,x_0) \le \frac{k^m}{1-k}d(x_2,x_1,x_0)$$

olur. Buradan da

$$\|d(x_n,x_m,x_t)\| \le \frac{k^m}{1-k}K\|d(x_2,x_1,x_0)\|$$

elde ederiz. Bu ise $d(x_n,x_{m,},x_t) \to 0$; $(n,m,t\to\infty)$ olmasını gerektirir. Yani (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to x^*$, $x_m \to x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır. Buradan

$$d(Tx^*, Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx_m, Tx^*) + d(Tx_n, Tx_m, x^*)$$
$$\leq kd(x_n, x_m, x^*) + d(x_{n+1}, x_{m+1}, x^*)$$

ve P normal konik olduğundan

$$\|d(Tx^*, Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x_m, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x_{m+1}, x^*)\|) \to 0$$

olur. Yani $\|d(Tx^*, Tx^*, x^*)\| = 0$ dır. Bu ise $Tx^* = x^*$ demektir. O halde x^* bir sabit noktadır.

6.3.2. Sonuç: (X, d) bir tam konik 2-metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. $0 < c$ olacak şekilde bir $C \in E$ ve $x_0, y_0 \in X$ için $B(x_0, y_0, c) = \{x \in X : d(x_o, y_0, x) \leq c\}$ verilsin. $T: X \times X \times X \to X$ dönüşümü ise aşağıda bulunan daraltma şartlarını sağlasın.

$d(Tx, Ty, Tz) \leq kd(x, y, z), \forall\, x, y, z \in B(x_0, y_0, c), k \in [0,1)$ ve

$d(Tx_0, Ty_0, x_0) \leq (1-k)c.$

Bu durumda T, $B(x_0, y_0, c)$ de tek bir noktaya sahiptir.

İspat: Öncelikle $B(x_0, y_0, c)$ nin tam olduğunu gösterelim. (x_n, y_n), $B(x_0, y_0, c)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n, y_n), X te de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x \in X$ için $n \to \infty$ iken $(x_n, y_n) \to x$ olur.

$$d(x_0, y_0, x) \leq d(x_n, y_n, x_0) + d(x_n, y_n, x) \leq d(x_n, y_n, x) + c\ ; (x_n, y_n) \to x; (n \to \infty)$$

olduğundan $d(x_n, y_n, x) \to 0$ dır. Böylece $d(x_0, y_0, x) \leq c$ ve $x \in B(x_0, y_0, c)$ dir. Yani (x_n, y_n), $B(x_0, y_0, c)$ de yakınsak bir dizidir. Bu ise $B(x_0, y_0, c)$ nin tam konik 2-metrik uzay olduğunu gösterir.

Şimdi ise $\forall\, x \in B(x_0, y_0, c)$ için $T\,x \in B(x_0, y_0, c)$ olduğunu ispatlayalım.

$\forall\, x \in B(x_0, y_0, c)$ için

$$d(x_0, y_0, Tx) \leq d(Tx_0, Ty_0, x_0) + d(Tx_0, Ty_0, Tx) \leq (1-k)c + kd(x_0, y_0, x)$$
$$\leq (1-k)c + kc = c$$

bulunur. Bu nedenle $Tx \in B(x_0, y_0, c)$ dir. Bu ise $T: B(x_0, y_0, c) \to B(x_0, y_0, c)$ daraltma dönüşümüdür. Ve bu T dönüşümü, $B(x_0, y_0, c)$ de tek bir sabit noktaya sahiptir.

6.3.3. Sonuç: (X, d) bir tam konik 2-metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. Bir $n \in N$ için $T : X \times X \times X \to X$ dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(T^n x, T^n y, T^n z) \leq kd(x, y, z),$$

her $x, y, z \in X$, $k \in [0,1)$ bir sabit. Böylece T, X' de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sabit nokta teoreminden dolayı T^n, x^* tek bir sabit noktasına sahiptir. $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$, böylece Tx^* da bir sabit nokta olur. Yani $Tx^* = x^*$ olup x^* bir sabit noktadır. T nin sabit noktası T^n inde sabit noktası olduğundan T nin sabit noktası tektir.

6.4. Esnek Konik 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

6.4.1. Tanım: $(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})$ esnek konik 2-metrik uzay ve

$$T: (\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \times (\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \to (\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})$$

bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\widetilde{\mathrm{x}_0} \in \widetilde{\mathrm{X}}$ esnek elemanı için

$$T\widetilde{\mathrm{x}_0} = \widetilde{\mathrm{x}_0}$$

ise $\widetilde{\mathrm{x}_0}$, T dönüşümünün esnek sabit elemanıdır.

6.4.2. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay ve

$$T: \left(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A} \times (\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})\right) \to (\widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})$$

bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\widetilde{\mathrm{x}_0} \in \widetilde{\mathrm{X}}$ için $\{\widetilde{\mathrm{x}_n}\}$ dizisinde $\widetilde{\mathrm{x}_0}$ esnek elemanlarını alırsak

$$\widetilde{x_1} = T\widetilde{x_0}$$
$$\widetilde{x_2} = T\widetilde{x_1} = T^2\widetilde{x_0}$$
$$\widetilde{x_3} = T\widetilde{x_2} = TT\widetilde{x_1} = TT^2\widetilde{x_0} = T^3\widetilde{x_0}$$
.

.

.

$$\widetilde{x_n} = T\widetilde{x_{n-1}} = T^n\widetilde{x_0}$$

şeklinde $\{\widetilde{\mathrm{x_n}}\}$ dizisini yineleme metodu ile oluşturabiliriz.

6.4.3. Tanım: $(\tilde{X}, d, A)$ esnek konik 2-metrik uzay ve

$$T: (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \times (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \rightarrow (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})$$

bir esnek konik dönüşüm olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{0} \lesseqgtr \tilde{k} \lessapprox \tilde{1}$ olacak şekilde $\tilde{k}$ pozitif esnek reel sayısı için

$$d(T\tilde{x}, T\tilde{y}, T\tilde{z}) \lesseqgtr \tilde{k}.d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

dir. Bu durumda T, $\tilde{X}$ de sabit esnek tek bir noktaya sahiptir.

6.4.4. Teorem: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik 2-metrik uzay ve

$$T: (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \times (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \rightarrow (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A})$$

bir esnek konik dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $\tilde{X}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir ve her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı için $\{T^n\tilde{x}\}$ esnek konik olan sabit noktaya sahiptir.

İspat: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzay ve

$$T: (\tilde{X}, d, A) \times (\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d}, \mathrm{A}) \rightarrow (\tilde{X}, d, A)$$

Bir daraltma dönüşümü olsun. $\tilde{0} \lesseqgtr \tilde{t} \lesseqgtr \tilde{1}$ pozitif esnek reel $\tilde{t}$ sayısı ve $\widetilde{x_0} \tilde{\in} \tilde{X}, n \geq 1$ için yineleme metodunu uygularsak $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek dizisini

$$\widetilde{x_1} = T\widetilde{x_0}$$

$$\widetilde{x_2} = T\widetilde{x_1} = T^2\widetilde{x_0}$$

.

.

.

$$\widetilde{x_{n+1}} = T\widetilde{x_n} = T^{n+1}\widetilde{x_0}$$

$$\widetilde{x_{n+2}} = T\widetilde{x_{n+1}} = T^{n+2}\widetilde{x_0}$$

$$d(\widetilde{x_{n+2}}, \widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x_n}) \lesseqqgtr d(T\widetilde{x_{n+1}}, T\widetilde{x_n}, T\widetilde{x_{n-1}}) \lesseqqgtr t\,.\,d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x_n}, \widetilde{x_{n-1}}) \lesseqqgtr \ldots \lesseqqgtr t^n.\,d(\widetilde{x_2}, \widetilde{x_1}, \widetilde{x_0})$$

olur. Bu durumda her $n, m > t$ için

$$\begin{aligned} d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \widetilde{x_t}) &\lesseqqgtr d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x_n}, \widetilde{x_{n-1}}) + d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_{n-1}}, \widetilde{x_{n-2}}) + \cdots + d(\widetilde{x_{t+2}}, \widetilde{x_{t+1}}, \widetilde{x_t}) \\ &\lesseqqgtr (t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t^m).\,d(\widetilde{x_2}, \widetilde{x_1}, \widetilde{x_0}) \\ &\lesseqqgtr \tfrac{t^m}{1-t}\, d(\widetilde{x_2}, \widetilde{x_1}, \widetilde{x_0}) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \widetilde{x_t})\| \lesseqqgtr \frac{t^m}{1-t} \|d(\widetilde{x_2}, \widetilde{x_1}, \widetilde{x_0})\|$$

elde edilir. $(n, m, t \to \infty)$ için $d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}, \widetilde{x_t}) \to 0$ olmasını gerektirir. Yani her $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisini yakınsaktır. Bu durumda $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek konik Cauchy dizisidir. $\tilde{X}$ tam olduğundan $\widetilde{x_n} \to \widetilde{x^*}$ olacak şekilde $\widetilde{x^*} \tilde{\in} \tilde{X}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} d(T\widetilde{x^*}, x^*) &\lesseqqgtr d(T\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(T\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*}) \\ &\lesseqqgtr t.\,[d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*})] \\ &\lesseqqgtr d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x^*}) + d(\widetilde{x_{n+1}}, \widetilde{x^*}) \\ &\lesseqqgtr \tfrac{\tilde{t}}{2} + \tfrac{\tilde{t}}{2} = \tilde{t} \end{aligned}$$

dir. Yani (P, A) kapalı ve $-d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*}) \tilde{\in} (P, A)$ olduğunda $d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*}) \tilde{\in} (P, A)$dır. Buradan $\|d(T\widetilde{x^*}, \widetilde{x^*})\| = \mathbf{0}$ dır. Bu durumda $T\widetilde{x^*} = \widetilde{x^*}$ dır. O halde $\widetilde{x^*}$ bir esnek konik sabit noktadır.

Şimdi $\widetilde{x^*}$ esnek konik sabit noktanın tek olduğunu ispatlayalım. $\widetilde{y^*}$, T nin başka bir esnek konik sabit noktası olsun. Bu durumda

$$d(\widetilde{x^*}, \widetilde{y^*}) = d(T\widetilde{x^*}, T\widetilde{y^*}) \tilde{\leq} t.d(\widetilde{x^*}, \widetilde{y^*})$$

olur. Buradan

$$\|d(\widetilde{x^*}, \widetilde{y^*})\| = \mathbf{0}$$

olduğundan $\widetilde{x^*} = \widetilde{y^*}$ bulunur. Yani sonuç olarak T nin esnek konik sabit noktası tektir.

6.4.5. Sonuç: $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek konik metrik uzay olsun. $0 \tilde{\leq} \tilde{c}$ ve $\widetilde{x_0} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $B(\widetilde{x_0}, c) = \{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}: d(\widetilde{x_0}, \tilde{x}) \tilde{\leq} \tilde{c}\}$ yuvarı ve $(P, A) = S_S(B(\widetilde{x_0}, \tilde{c})$ esnek kümesi verilsin. $T: (\tilde{X}, d, A) \to (\tilde{X}, d, A)$ dönüşümü aşağıda verilen daraltma şartlarını sağlasın.

Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} (P, A)$ ve $\tilde{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{\leq} \tilde{1}$ esnek sabiti için

$$d(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \tilde{\leq} t.d(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ ve } d(T\widetilde{x_0}, \widetilde{x_0}) \tilde{\leq} (\tilde{1} - \tilde{t}).\tilde{c}$$

dir. Bu durumda T, $B(\widetilde{x_0}, \tilde{c})$ yuvarında tek bir esnek konik noktaya sahiptir.

İspat: (P, A) tam ve her $\tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ için $T\tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ olsun. Burada $\{\widetilde{x_n}\}$ esnek konik dizisi (P, A) da Cauchy dizisi olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x}$ ise $\tilde{X}$ esnek konik kümesi tamdır.

$$d(\widetilde{x_0}, \tilde{x}) \tilde{\leq} d(\widetilde{x_0}, \widetilde{x_n}) + d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \tilde{\leq} d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) + \tilde{c}$$

$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = \tilde{x}$ için $d(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \to \mathbf{0}$ olduğundan $d(\widetilde{x_0}, \tilde{x}) \tilde{\leq} \tilde{c}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ dır. Böylece (P, A) esnek konik kümesi tamdır. Her $\tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ için

$$d(\widetilde{x_0}, T\tilde{x}) \tilde{\leq} d(T\widetilde{x_0}, \widetilde{x_0}) + d(T\widetilde{x_0}, \tilde{x}) \tilde{\leq} (\tilde{1} - \tilde{t}).\tilde{c} + \tilde{t}.\tilde{c} = \tilde{c}$$

Yani $T\tilde{x} \tilde{\in} (P, A)$ dır. Bu durumda T, $B(\widetilde{x_0}, \tilde{c})$ yuvarında tek bir esnek konik noktaya sahiptir.

BÖLÜM VII

KONİK NORMLU UZAYLAR, KONİK 2-NORMU UZAYLAR, ESNEK KONİK NORMLU UZAYLAR VE ESNEK KONİK 2-NORMLU UZAYLAR

7.1. Konik Normlu Uzaylar

7.1.1. Tanım: X kümesi R cismi üzerinde bir vektör uzayı ve E reel Banach uzayı olsun. $\|.\|_c : X \to E$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \in R$ için

i. $\|x\|_c > \mathbf{0}$

ii. $\|x\|_c = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

iii. $\|\alpha . x\|_c = |\alpha| . \|x\|_c$

iv. $\|x + y\|_c \leq \|x\|_c + \|y\|_c$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|_c$ dönüşümü X üzerinde *konik norm* oluşturur. $(X, \|.\|_c)$ iklisine ise *konik normlu uzay* denir [20].

7.1.2. Örnek: $E = l_1$ de $P = \{(x_n) \in E : \forall\, n \in N\ için\ x_n \geq 0\}$ konisi verilsin. $(X, \|.\|_c)$ normlu uzayında her $x \in X$ için

$$\|x\|_c = \left\{\frac{\|x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_c : X \to E$ dönüşümü bir konik normdur. $(X, \|.\|_c)$ ikilisi ise konik normlu uzaydır.

Çözüm: Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in R$ cismi için

i. $\|x\|_c = \left\{\frac{\|x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1} > \mathbf{0}$ dır.

ii. $\|x\|_c = \left\{\frac{\|x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|x\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

iii. $\|\alpha . x\|_c = \left\{\frac{\|\alpha . x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1} = \left\{\frac{|\alpha| . \|x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1} = |\alpha| . \left\{\frac{\|x\|}{2^n}\right\}_{n \geq 1} = |\alpha| . \|x\|_c$

iv. $\|x+y\|_c = \left\{\frac{\|x+y\|}{2^n}\right\}_{n\geq 1} \leq \left\{\frac{\|x\|}{2^n}\right\}_{n\geq 1} + \left\{\frac{\|y\|}{2^n}\right\}_{n\geq 1} = \|x\|_c + \|y\|_c$

dir. Bu durumda $\|.\|_c : X \to E$ dönüşümü bir konik norm olduğu gösterilmiştir.

7.1.3. Önerme: Her konik normlu uzay, bir konik metrik uzaydır. Aynı zamanda her $x, y \in X$ için

$$d: X \times X \to E$$

dönüşümü

$$d(x,y) = \|x-y\|_c$$

şeklinde tanımlandığında konik normlu uzay belirtir.

İspat: Her $x, y \in X$ için

i. $d(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|x-y\|_c = \mathbf{0} \Leftrightarrow x-y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x,y) = \|x-y\|_c = \|-(y-x)\|_c = |-1|.\|y-x\|_c = \|y-x\|_c = d(y,x)$

iii. $d(x,y) = \|x-y\|_c = \|x-z+z-y\|_c \leq \|x-z\|_c + \|z-y\|_c$
$= d(x,z) + d(z,y)$

olup, ispat tamamlanmış olur.

Not: Konik normlu uzaylarda yakınsaklık, normdan indirgenmiş konik metrik ile tanımlanır.

Örneğin; her $c > 0$ için n_0 vardır öyle ki her $n > n_0$ için $d(x_n, x) = \|x_n - x\| < c$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsaktır. Yani

$x_n \to x \Leftrightarrow n \to \infty$ için $\|d(x_n, x)\| = \|\|x_n - x\|_c\| \to \mathbf{0}$ dır [7].

7.1.4. Tanım: $(X, \|.\|_c)$ konik normlu uzay ve $x_n \in X$ olsun. Her $c > 0$ için en az bir n_0 vardır öyle ki her $n, m > n_0$ için

$$d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_c < c$$

ise $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir.

$$\lim_{m,n\to\infty} \|d(x_n, x_m)\| = \lim_{m,n\to\infty} \|\|x_n - x_m\|_c\| = 0..$$

7.1.5. Tanım: $(X, \|.\|_c)$konik normlu uzay olsun. X içindeki her Cauchy dizisi bir noktaya yakınsak ise $(X, \|.\|_c)$ konik normlu uzayına *konik Banach uzayı* denir.

7.1.6. Örnek: $E = R^2, (E, \|.\|_c)$ olmak üzere

$$P = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha, \beta > 0$ ise

$$\|(x, y)\|_c = (\alpha|x|, \beta|y|)$$

ile tanımlı E üzerindeki $\|.\|_c$ dönüşümü konik normlu uzaydır ve konik Banach uzayıdır.

Çözüm:

i. $\|(x, y)\|_c = (\alpha|x|, \beta|y|) > 0$

ii. $\|(x, y)\|_c = 0 \Leftrightarrow (\alpha|x|, \beta|y|) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha|x| = 0$ ve $\beta|y| = 0$ dır. Buradan $x = 0$ ve $y = 0$ olup $(x, y) = (0,0)$ bulunur.

iii. $\|\lambda(x, y)\|_c = \|(\lambda x, \lambda y)\|_c = (|\lambda\alpha x|, |\lambda\beta y|) = |\lambda|(\alpha|x|, \beta|y|) = |\lambda|\|(x, y)\|_c$

iv. $\|(x, y) + (z, w)\|_c = \|x + z, y + w\|_c = (\alpha|x + z|, \beta|y + w|)$

$$\leq (\alpha|x| + \alpha|z|, \beta|y| + \beta|w|) = (\alpha|x|, \beta|y|) + (\alpha|z|, \beta|w|)$$
$$= \|(x, y)\|_c + \|(z, w)\|_c$$

olup $\|.\|_c$ dönüşümü konik normlu uzaydır.

Şimdi bu dönüşümün konik Banach uzayı olduğunu gösterelim:

$z_n = (x_n, y_n) \in R^2$ de bir Cauchy dizisi olsun.

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\|z_n - z_m\|_c\| = \lim_{n,m\to\infty} \|\|x_n - x_m, y_n - y_m\|_c\|$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} \|(\alpha|x_n - x_m|, \beta|y_n - y_m|)\|$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \sqrt{\alpha^2|x_n - x_m|^2 + \beta^2|y_n - y_m|^2} = 0$$

dır. O halde $n, m \to \infty$ için $|x_n - x_m| \to 0$, $|y_n - y_m| \to 0$ bulunur. Bu durumda R^2 cisiminde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri Cauchy dizileridir. R tam olduğundan $|x_n - x| \to 0$ ve $|y_n - y| \to 0$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Yani konik normlu uzaylarda

$\lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|_c = 0$ dır. Yani $z_n \to z$ ye yakınsar. Bu durumda $(E, \|.\|_c)$ tamdır ve bu dönüşüm konik Banach uzayıdır.

7.2. Konik 2-Normlu Uzaylar

7.2.1. Tanım: $\|.,.\|: X \times X \to R$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. Eğer $\|.,.\|$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in R$ için

i. $\|x, y\| \geq \mathbf{0}$ dır. Eğer $\|x, y\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow x\ ve\ y\ lineer\ bağımlıdır.$

ii. $\|x, y\| = \|y, x\|$

iii. $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\|$

iv. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

koşullarını sağlarsa $\|.,.\|$ dönüşümü *2-Normdur*. $(X, \|.,.\|)$ ikilisine ise *2-Normlu uzay* denir.

7.2.2. Tanım: E Banach uzayı ve P ise E üzerinde bir konik olsun.

$$\|.,.\|: X \times X \to (E, P, \|.\|)$$

dönüşümü her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in R$ için

i. $\|x, y\|_c \geq \mathbf{0}$ dır. Eğer $\|x, y\|_c = \mathbf{0} \Leftrightarrow x\ ve\ y\ lineer\ bağımlıdır.$

ii. $\|x, y\|_c = \|y, x\|_c$

iii. $\|\alpha x, y\|_c = |\alpha|\|x, y\|_c$

iv. $\|x, y + z\|_c \leq \|x, y\|_c + \|x, z\|_c$

koşullarını sağlarsa X e *konik 2-norm*, $(X, \|.,.\|_c)$ ikilisine ise *konik 2-normlu uzay* denir.

7.2.3. Teorem: l_2, 2-normlu uzay ve $\|.,.\|_c: l_2 \times l_2 \to (R^n, P, \|.\|)$ dönüşümü

$$\|x, y\|_c = \sum_{k=1}^{n} e_k \|x, y\|_{l_2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda l_2 uzayı konik 2-normlu uzaydır.

İspat: Her $x, y \in l_2$ ve $\alpha \in R$ için

i. $\|x, y\|_c = \sum_{k=1}^{n} e_k \|x, y\|_{l_2} \geq \mathbf{0}$

ii. $\|x,y\|_c = \sum_{k=1}^{n} e_k \|x,y\|_{l_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|x,y\|_{l_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x\ ve\ y\ lineer\ bağımlıdır.$

iii. $\|x,y\|_c = \sum_{k=1}^{n} e_k \|x,y\|_{l_2} = \sum_{k=1}^{n} e_k \|y,x\|_{l_2} = \|y,x\|_c$

iv. $\|x,y+z\|_c = \sum_{k=1}^{n} e_k \|x,y+z\|_{l_2} \leq \sum_{k=1}^{n} e_k \left(\|x,y\|_{l_2} + \|x,z\|_{l_2}\right)$

$= \|x,y\|_c + \|x,z\|_c$

dir. Bu durumda konik 2-normlu uzayın tüm şartlarını sağlamış olur. Bundan dolayı l_2 uzayı konik 2-normlu uzaydır.

7.3. Esnek Konik Normlu Uzay

7.3.1. Tanım: $\tilde{X}$ esnek kümesi $R(A)$ cismi üzerinde bir esnek vektör uzayı ve $\tilde{E}$ reel Banach uzayı olsun. $\|.\|_c : S_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to R(A)$ dönüşümü her $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \in R(A)$ için

- **i.** $\|\tilde{x}\|_c > \tilde{\mathbf{0}}$
- **ii.** $\|\tilde{x}\|_c = \tilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{\mathbf{0}}$
- **iii.** $\|\widetilde{\alpha.x}\|_c = |\tilde{\alpha}|.\|\tilde{x}\|_c$
- **iv.** $\|\widetilde{x+y}\|_c \leq \|\tilde{x}\|_c + \|\tilde{y}\|_c$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|_c$ dönüşümü $\tilde{E}$ üzerinde *esnek konik norm* oluşturur. $(\tilde{E}, \|.\|_c)$ ikilisine ise *esnek konik normlu uzay* denir.

7.3.2. Örnek: $\tilde{E} = l_1$ de $\tilde{P} = \{(\widetilde{x_n}) \in E : \forall n \in N\ için\ \widetilde{x_n} \geq 0\}$ esnek konisi verilsin. $(\tilde{X}, \|.\|_c)$ normlu uzayında her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için

$$\|\tilde{x}\|_c = \left\{\frac{\|\tilde{x}\|}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_c : \tilde{X} \to \tilde{E}$ dönüşümü bir esnek konik normdur. $(\tilde{X}, \|.\|_c)$ ikilisi ise esnek konik normlu uzay oluşturur.

7.3.3. Önerme: Her esnek konik normlu uzay, bir esnek konik metrik uzaydır. Aynı zamanda her $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$d : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \tilde{E}$$

dönüşümü

$$d(\tilde{x},\tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_c$$

şeklinde tanımlandığında esnek konik normlu uzay belirtir.

İspat: Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

i. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_c = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x} - \tilde{y} = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

ii. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_c = \|-(\tilde{y} - \tilde{x})\|_c = |-1|.\|\tilde{y} - \tilde{x}\|_c = d(\tilde{y}, \tilde{x})$

iii. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_c = \|\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z} - \tilde{y}\|_c \leq \|\tilde{x} - \tilde{z}\|_c + \|\tilde{z} - \tilde{y}\|_c$

$$= d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y})$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

7.3.4. Tanım: $(\tilde{X}, \|.\|_c)$ esnek konik normlu uzay ve $\widetilde{x_n} \in \tilde{X}$ olsun. Her $\tilde{c} > 0$ için en az bir $\widetilde{n_0}$ vardır öyle ki her $\tilde{n}, \tilde{m} \geq \widetilde{n_0}$ için

$$d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) = \|\widetilde{x_n} - \widetilde{x_m}\|_c < \tilde{c}$$

ise $\{\widetilde{x_n}\}$ dizisine $\tilde{X}$ içinde bir *esnek Cauchy dizisi* denir.

$$\lim_{n,m\to\infty} \|d(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m})\| = \lim_{n,m\to\infty} \|\|\widetilde{x_n} - \widetilde{x_m}\|_c\| = \tilde{0}\ .$$

7.3.5. Tanım: $(\tilde{X}, \|.\|_c)$ esnek konik normlu uzay olsun. $\tilde{X}$ içindeki her esnek Cauchy dizisi bir noktaya yakınsak ise $(\tilde{X}, \|.\|_c)$ esnek konik normlu uzayına *esnek konik Banach uzayı* denir.

7.3.6. Örnek: $\tilde{E} = R^2$, $(\tilde{E}, \|.\|_c)$ olmak üzere

$$\tilde{P} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{E} : \tilde{x} \geq 0, \tilde{y} \geq 0\}$$

şeklinde tanımlansın. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > \tilde{0}$ ise

$$\|\tilde{x}, \tilde{y}\|_c = (\tilde{\alpha}|\tilde{x}|, \tilde{\beta}|\tilde{y}|)$$

ile tanımlı $\tilde{E}$ üzerindeki $\|.\|_c$ dönüşümü esnek konik normlu uzaydır ve esnek konik Banach uzayıdır.

7.4. Esnek Konik 2-Normlu Uzay

7.4.1. Tanım: $\tilde{X}$ boştan farklı esnek küme ve $\tilde{E}$ reel Banach uzayı olsun. Eğer

$$\|.,.\|: S_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \times S_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to S_{\tilde{E}}(\tilde{E})$$

ile tanımlanan bir dönüşüm olsun. Eğer $\|.,.\|$ dönüşümü her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \in R$ için

i. $\|\tilde{x},\tilde{y}\| \geq \widetilde{\mathbf{0}}$ dır. Eğer $\|\tilde{x},\tilde{y}\| = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x}\ ve\ \tilde{y}\ lineer\ bağımlıdır.$

ii. $\|\tilde{x},\tilde{y}\| = \|\tilde{y},\tilde{x}\|$

iii. $\|\tilde{x},\alpha\tilde{y}\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x},\tilde{y}\|$

iv. $\|\tilde{x},\tilde{y}+\tilde{z}\| \leq \|\tilde{x},\tilde{y}\| + \|\tilde{x},\tilde{z}\|$

koşullarını sağlarsa $\|.,.\|$ dönüşümü *esnek 2-Normdur*. $(\tilde{X},\|.,.\|)$ ikilisine ise *esnek 2-Normlu uzay* denir.

7.4.2. Tanım: $\tilde{E}$ esnek Banach uzayı ve $\tilde{P}$ ise $\tilde{E}$ üzerinde bir esnek konik olsun.

$$\|.,.\|: S_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \times S_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to (\tilde{E},\tilde{P},\|.\|)$$

dönüşümü her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{\alpha} \in R$ için

i. $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c \geq \widetilde{\mathbf{0}}$ dır. Eğer $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x}\ ve\ \tilde{y}\ lineer\ bağımlıdır.$

ii. $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \|y,\tilde{x}\|_c$

iii. $\|\tilde{\alpha}\tilde{x},\tilde{y}\|_c = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c$

iv. $\|\tilde{x},\tilde{y}+\tilde{z}\|_c \leq \|\tilde{x},\tilde{y}\|_c + \|\tilde{x},\tilde{z}\|_c$

koşullarını sağlarsa $\tilde{X}$ e *esnek konik 2-norm*, $(\tilde{X},\|.,.\|_c)$ ikilisine ise *esnek konik 2-normlu uzay* denir.

7.4.3. Teorem: $\widetilde{l_2}$, esnek 2-normlu uzay ve $\|.,.\|_c: S_{\tilde{E}}(\widetilde{l_2}) \times S_{\tilde{E}}(\widetilde{l_2}) \to (R^n,\tilde{P},\|.\|)$ dönüşümü

$$\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\widetilde{l_2}$ uzayı esnek konik 2-normlu uzaydır.

İspat: Her $\tilde{x},\tilde{y} \in \widetilde{l_2}$ ve $\tilde{\alpha} \in R$ için

i. $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}} \geq \widetilde{\mathbf{0}}$

ii. $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}} = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}} = \widetilde{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \tilde{x}\ ve\ \tilde{y}\ lineer\ bağımlıdır.$

iii. $\|\tilde{x},\tilde{y}\|_c = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{y},\tilde{x}\|_{\widetilde{l_2}} = \|\tilde{y},\tilde{x}\|_c$

iv. $\|\tilde{x},\tilde{y}+\tilde{z}\|_c = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\|\tilde{x},\tilde{y}+\tilde{z}\|_{\widetilde{l_2}} \leq \sum_{k=1}^{n} \widetilde{e_k}\left(\|\tilde{x},\tilde{y}\|_{\widetilde{l_2}} + \|\tilde{x},\tilde{z}\|_{\widetilde{l_2}}\right)$

$$= \|\tilde{x},\tilde{y}\|_c + \|\tilde{x},\tilde{z}\|_c$$

dir. Bu durumda esnek konik 2-normlu uzayın tüm şartlarını sağlamış olur. Bundan dolayı $\widetilde{l_2}$ uzayı esnek konik 2-normlu uzaydır.

SONUÇ

Giriş bölümünde, metrik uzaylar, sabit nokta teoremleri, konik kavramı ve konik metrik uzayların incelenme süreci ve bu alanda yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu süreçte konik metrik uzayların gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde ise diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde koniklik kavramı, konik metrik uzayların tanım ve teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm esnek kümeler üzerindeki metrik ve konik kavramı ele alınmıştır. Daha sonra ise esnek metrik uzay genelleştirilerek esnek konik metrik uzay tanımı verilmiştir. Ayrıca esnek metrik uzaylarda sağlanan teorem ve sonuçlar, esnek konik metrik uzaylarda sağlandığı incelenmiştir.

Beşinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım konik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerin incelemesinden oluşmaktadır. İkinci kısım ise esnek konik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerinin ispatından oluşmaktadır.

Altıncı bölümde metrik uzayların genelleştirilmiş hali olan iki metrik uzaylar kavramı ele alınmıştır. İki metrik uzaylar üzerindeki konik ve esnek konik kavramı verilmiştir. Bu uzaylardaki teoremler ispatlanmıştır. Son olarak ise konik iki metrik uzay ve esnek konik iki metrik uzaylar üzerindeki sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Yedinci bölümde konik normlu uzaylar ele alınmıştır. Bu uzaylar genelleştirilerek konik iki normlu uzaylar, esnek konik normlu uzaylar ve esnek konik iki normlu uzayların tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Fréchet, M.. (1906). Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel, *Rendic. Circ. Mat. Palemo,* **22**, 1-74.

[2] Fréchet, M.. (1926). Les Espaces Abstrait Topologiquement Affine, *Acta Math.,* **47**, 25-52.

[3] Abbas, M., Rhoades, B.E.. (2009). Fixed and Periodic Point Results in Cone Metric Spaces, *Applied Mathematics Letters*, **22(4)**, 511-515.

[4] Brouwer, L. E. J... (1910). Uber Abbildung Von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.,* **71**, 97-115.

[5] Schauder, J.. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalramen, *Studia Math.,* **2**, 171-180.

[6] Banach, S... (1922). Sur Les Oprations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Applications Aux Equations Integrales, *Fund. Math.,* **3**, 133-181.

[7] Huang, L. G., Zhang, X.. (2007). Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings, *J. Math. Anal. Appl.,* **332**, 1468-1476.

[8] Rezapour, Sh., Hamlbarani, R. (2008). Some Notes on The Paper “Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings”, *J. Math. Anal. Appl.,* **345**, 719-724.

[9] Türkoğlu, D., Abuloha, M.. (2010). Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems in Diametrically Contractive Mappings, *Acta Math. Sinica English Series,* **5**, 9.

[10] Wardowski, D.. (2009). Endpoint and Fixed Points of Set-Valued Contractions in Cone Metric Spaces, *Nonlinear Analysis,* **71**, 512-516.

[11] Rezapour, Sh.. (2007). Best Approximations in Cone Metric Spaces, *Mathematica Moravica,* **11**, 85-88.

[12] Turgut Başkan, Osman Bizim, İsmail Naci Cangül. (2006). *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş*. Nobel Yayın, Ankara.

[13] Soykan, Y.. (2008). *Normlu Uzaylar - Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın, Ankara.

[14] Musayev, B., Alp, M..(2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Kütahya.

[15] Assadi, M.and Soleimani, H.. (2012). Examples in Cone Metric Spaces: A Survey, *Middle-East Journal of Scientific Research*., **11 (12),** 1636-1640.

[16] Abbas, M.. (2008). Fixed and Periodic Point Results in Cone Metric Spaces, *Appl. Math.Lett*., 511–515.

[17] D. Molodtsov. (1999). Soft Set Theory–First Results, *Comput. Math. Appl.*, **37 (4)**, 19–31.

[18] P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy. (2003). Soft Set Theory, *Comput. Math. Appl.,* **45 (4)**, 555–562.

[19] Zorlutuna, I., and Akdaş, M., and Min, W.K., and Atmaca, S.. (2011). Remarks on Soft Topological Spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, **3(2)**, 171-185.

[20] Zabrejko, P.P. (1997). K-metric and K-normed Linear Spaces: Survey, *Collect. Math.* ***48*****(4-6)**, 825–859.

[21] İlker Şahin. (2009). Konik Metrik Uzaylarda Dönüşümlerin Sabit Noktaları, *Trakya Üniversitesi Doktora Tezi*.

[22] Sadjidon, Mahmud Yunus, Sunarsini. (2016). Construction of Some Orthogonalities in Cone 2-Normed Space, *Pure Mathematical Sciences,* **5(1)**, 59-64.