



SMARANDACHE EĞRİLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Damla ZEYBEK

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

Bu tez çalışması 17.FEN.BİL.12 numaralı proje ile BAP tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SMARANDACHE EĞRİLERİ ÜZERİNE

Damla ZEYBEK

Danışman
Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Damla ZEYBEK tarafından hazırlanan “Smarandache Eğrileri Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT
Ordu Üni., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üni., Afyon M.Y.O

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üni., Afyon M.Y.O

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahimEROL
Enstitü Müdürü

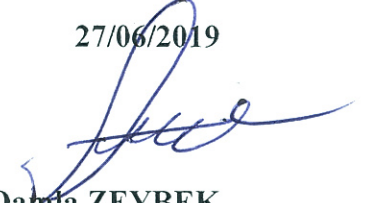
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2019


Damla ZEYBEK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SMARANDACHE EĞRİLERİ ÜZERİNE

Damla ZEYBEK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, giriş kısmına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-Boyutlu Minkowski uzayında timelike bir eğrinin involüt eğrileri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, timelike bir eğrinin involütü eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen null olmayan Smarandache eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması evolüt eğrisinin Frenet vektörleri eğrilik ve burulmasına bağlı olarak hesaplanmıştır. Son olarak bu eğriler ile ilgili örnekler verilmiştir.

2019, vi + 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Involüt-Evolüt eğrileri, Smarandache eğrileri, Minkowski uzayı, Frenet elemanları

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON SMARANDACHE CURVES

Damla ZEYBEK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür KALKAN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter, introduction part has been presented.

In the second chapter, definitions and theorems which are necessary for 3-dimensional Minkowski space are given.

In the third chapter, basic definitions and theorems of involute curves of the timelike curve are given.

In the fourth chapter, Frenet vectors, curvature and torsion of non-null Smarandache curves are calculated according to the timelike evolute curve, when the Frenet vectors and unit Darboux vector of involute curve are taken as the position vectors. Finally, illustrative examples related to there curves are given.

2019, v + 74 pages

Keywords: Involute- Evolute curves, Smarandache curves, Minkowski space, Frenet invariants.

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans eğitimim boyunca, benden bilgisini, tecrübesini yardımlarını, desteğini ve anlayışını esirgemeyen, bıkmadan yorulmadan benimle çalışan, karşılaştığım sorunlara çözüm bulan, hayatımda çok özel yeri olan, bana her yönden çok şey katan, hakkını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim, danışmandan çok daha fazlası olan çok değerli hocam Doç. Dr. Özgür KALKAN'a,

Çalışmayı gerçekleştirmemde yönlendirmeleri ile yardımcı olan Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerini paylaşarak yolumu aydınlatan çok değerli Arş. Gör. Dr. Tane VERGİLİ' ye,

Çalışmam boyunca yardım ve desteklerini esirgemeyen, motive eden, her anımda bana umut veren çok değerli arkadaşlarım; Buse ERALP, Rabia ENDİRCE, Maide TEKİN, Mustafa UZUNOĞLU, Halil USLU, Şükrü LÜLE ve ismini sayamadığım çok değerli tüm arkadaşlarıma,

Ayrıca varlıklarıyla güç kazandığım, bugünlere gelmeme her türlü destek olan, bana güvenen; babam Doğan ZEYBEK, annem Şengül ZEYBEK ve kardeşim Burcu ZEYBEK'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Afyon Kocatepe Üniversitesi BAP 17.FEN.BİL.12 numaralı Bilimsel Araştırma projesiyle desteklenmiştir.

Damla ZEYBEK
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Minkowski Uzayı	3
3 TİMEİKE EĞRİLERİN İNVOLÜT EĞRİLERİ	12
3.1 Timelike Eğrilerin İnvolut Eğrilerinin Temel Özellikleri	12
4 MİNKOWSKİ 3-UZAYDA TİMEİKE EĞRİLERİN İNVOLÜT EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE NULL OLMAYAN SMARANDACHE EĞRİLERİ	19
4.1 T^*N^* Smarandache Eğrisi	19
4.2 N^*B^* Smarandache Eğrisi	27
4.3 T^*B^* Smarandache Eğrisi	34
4.4 $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi	42
4.5 N^*C^* Smarandache Eğrisi	52
5 TARTIŞMA ve SONUÇ	69
6 KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

R^3	3-Boyutlu Öklid Uzayı
R_1^3	3-Boyutlu Minkowski Uzayı
W	Darboux vektörü
$\ , \ $	Norm fonksiyonu
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
T	Teğet vektör
N	Aslinormal vektör
B	Binormal vektör
C	Birim Darboux vektörü
κ	Eğrilik
τ	Burulma
β_1	$T^* N^*$ Smarandache Eğrisi
β_2	$N^* B^*$ Smarandache Eğrisi
β_3	$T^* B^*$ Smarandache Eğrisi
β_4	$T^* N^* B^*$ Smarandache Eğrisi
β_5	$N^* C^*$ Smarandache Eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 Darboux Vektörü	9
Şekil 4.1 α^* involüt eğrisine ait T^*N^* - Smarandache eğrisi	65
Şekil 4.2 α^* involüt eğrisine ait N^*B^* - Smarandache eğrisi	65
Şekil 4.3 α^* involüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi	65
Şekil 4.4 α^* involüt eğrisine ait T^*B^* - Smarandache eğrisi	66
Şekil 4.5 α^* involüt eğrisine ait N^*C^* - Smarandache eğrisi	66
Şekil 4.6 γ^* involüt eğrisine ait T^*N^* - Smarandache eğrisi	67
Şekil 4.7 γ^* involüt eğrisine ait N^*B^* - Smarandache eğrisi	67
Şekil 4.8 γ^* involüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi	68
Şekil 4.9 γ^* involüt eğrisine ait T^*B^* - Smarandache eğrisi	68
Şekil 4.10 γ^* involüt eğrisine ait N^*C^* - Smarandache eğrisi	68

1 GİRİŞ

Eğri kavramı diferansiyel geometrinin temel konularından birisidir. Özellikle üzerinde en çok çalışma yapılan eğriler İnvölüt-Evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileridir. İnvölüt eğri kavramı optik çalışmaları sırasında daha doğru ölçüm yapmaya çalışırken Huygens (1658) tarafından keşfedilmiştir. İnvölüt-Evolüt eğrilerin özelliği her noktasında teğet vektörleri ortogonal olan eğrilerdir. Millman ve Perker (1977) ve Hacısalihoğlu (1983), klasik geometride bu eğriler ile ilgili iyi bilinen temel teorem ve problemlere açıklık getirmişlerdir. İnvölüt-Evolüt eğrileri üzerine yapılan çalışmalar sadece Öklid uzayında sınırlı kalmamış Minkowski uzayı, Galileo uzayı, Heisenberg uzayı ve dual uzay gibi birçok uzayda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve pek çok yeni karakterizasyon elde edilmiştir.

Bu eğrinin Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adı verilir. Bu vektör

$$T' = W \times T, \quad N' = W \times N \quad \text{ve} \quad B' = W \times B$$

bağıntısını sağlar. Burada gerekli işlemler W vektörü

$$W = \tau T + \kappa B = N \times N'$$

şeklinde ifade edilir. Burada κ ve τ sırasıyla eğrilik ve burulmasıdır.

Bu kapsamda İnvölüt-Evolüt eğrilerinin Frenet çatıları arasındaki bağıntılar evolüt eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki açı θ olmak üzere farklı bir yaklaşımla elde edilmiş ve eğri çiftine ait bazı karakterizasyonlar bulunmuştur (Bilici and Çalışkan 2002). Bunun yanında Bilici ve Çalışkan (2009, 2011), 3-Boyutlu Minkowski uzayında timelike binormalli spacelike bir eğrinin involüt eğrilerini, diğer bir çalışmada ise timelike bir eğrinin involüt eğrilerini incelemişlerdir. 3-Boyutlu Minkowski uzayında spacelike binormalli spacelike bir eğrinin evolüt eğrileri Bükçü ve Karacan (2007) tarafından araştırılmıştır.

Turgut ve Yılmaz (2008), Minkowski uzay-zamanda konum vektörü başka bir eğrinin Frenet vektörleri tarafından oluşturulan yeni eğriyi Smarandache eğrisi olarak adlandırmışlar ve R_1^4 de bu eğrilerden TB_2 Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. Daha sonraki yıllarda bu eğriler değişik uzaylarda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Şenyurt ve Çalışkan (2015), Frenet çatısına göre Mannheim eğri çiftlerinin N^*C^* Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Benzer olarak diğer bir çalışmada ise Şenyurt vd.(2016), Frenet çatısına göre Bertrand eğri çiftlerinin N^*C^* Smarandache eğrilerini araştırmışlardır. Gürses vd. (2016), 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike, timelike ve null eğrilerin TN-Smarandache eğrilerinin Frenet vektörlerini, eğrilik ve burulmasını hesaplamışlardır.

Bu tez çalışmasında 3-Boyutlu Minkowski uzayında α^* eğrisi α timelike eğrisinin involütü olmak üzere, α^* involüt eğrisinin T^*, N^*, B^* Frenet vektörleri ile C^* birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında bu vektörler tarafından oluşturulan, null olmayan,

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

Smarandache eğrileri tanımlanmış ve elde edilen bu eğrilerin causal karakteri belirlenerek Frenet vektörleri, eğrilikleri ve torsiyonları(burulmaları) α evolüt eğrisinin Frenet aparatlarına bağlı olarak ifade edilmiştir. Son olarak bu eğriler ile ilgili örnekler verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Minkowski Uzayı

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle: V \times V \longrightarrow R$$

bir simetrik bilinear form olsun.

- (i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- (ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- (iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,
- (iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif yarı-tanımlı,
- (v) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere, aksi halde dejeneredir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. $\langle, \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik lineer form ve W , V nin herhangi bir altuzayı olsun. $\langle, \rangle$ nin W üzerinde kısıtlaması $\langle, \rangle|_W$, negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik lineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir ve üzerinde bir skalar çarpım tanımlı olan V reel vektör uzayına skalar çarpım uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4. V skalar çarpım uzayının indeksi $\nu = 1$ ve boyutu $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Minkowski vektör uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5. R^3 , 3-boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $\forall u, v \in R^3$ ve $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in R_1^3$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: R^3 \times R^3 \longrightarrow R$$

$$(u, v) \longrightarrow \langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

(i) Simetrik,

(ii) Bilineer,

(iii) non-dejenere ($\forall u \in R^3$ için $\langle u^T, u^T \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$) dır.

R^3 üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir ve $R_1^3 = \{R^3, \langle, \rangle\}$ ikilisine de 3-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6. $\forall u \in R_1^3$ için

(i) $\langle u, u \rangle < 0$ ise u timelike vektör (zaman benzeri),

(ii) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u spacelike vektör (uzay benzeri),

(iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ise u null vektör (ışık benzeri)

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7. $u, v \in R_1^3$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir. Eğer u timelike vektör ise bu durumda v spacelike vektördür (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8. $\forall u \in R_1^3$ için u'nun normu

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9. $\forall u \in R_1^3$ için

(i) $\|u\| > 0$,

(ii) $\|u\| = -1$ ise u vektörüne birim timelike vektör,

(iii) $\|u\| = 1$ ise u vektörüne birim spacelike vektör,

(iv) u bir timelike vektör ise $\|u\|^2 = -\langle u, u \rangle$,

(v) u bir spacelike vektör ise $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$

dır (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.10. $u, v \in R_1^3$ için

(i) $u, v \in R_1^3$ pozitif (negatif) timelike vektörler ise bu durumda

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cosh \theta,$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. Bu θ açısına u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

(ii) $u, v \in R_1^3$ de spacelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\langle u, v \rangle = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

eşitsizliği vardır. Eğer u ve v nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta,$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu açiya u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir.

(iii) $u, v \in R_1^3$ de spacelike vektörler olsunlar. Eğer u ve v nin gerdiği düzlem timelike ise

$$|\langle u, v \rangle| > \|u\| \|v\|$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cosh\theta,$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. Bu açiya u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir.

(iv) $u \in R_1^3$ spacelike ve $v \in R_1^3$ pozitif timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \sinh\theta,$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ sayısı vardır. Bu açiya u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir

(Ratcliffe 1994).

Tanım 2.1.11. R_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (dış çarpım) denir ve $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere

$$u \times v = \det \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

vektörel çarpımı

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = -e_2$$

dir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.12. $\forall u, v, w \in R_1^3$ için

- (i) $\langle u \times v, w \rangle = -\det(u, v, w)$,
- (ii) $(u \times v) \times w = -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u$,
- (iii) $\langle u \times v, u \rangle = 0$ ve $\langle u \times v, v \rangle = 0$,
- (iv) $\langle u \times v, u \times v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$

dır (Turgut 1995).

Teorem 2.1.13. $\forall u, v \in R_1^3$ için

- (i) u ve v spacelike ise $u \times v$ bir timelike vektördür.
 - (ii) u spacelike ve v timelike ise $u \times v$ spacelike bir vektördür.
 - (iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \times v$ null vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \times v$ spacelike vektördür.
 - (iv) u ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.
 - (v) u timelike ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.
 - (vi) u ve v timelike vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür
- (Turgut 1995).

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \subset R \longrightarrow R_1^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona R_1^3 de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.15. $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere;

- (i) $\langle T, T \rangle > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

- (ii) $\langle T, T \rangle < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
 (iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.16. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi denir. $a, b \in I$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$\int_a^b \|\alpha'\| dt$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.17. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.18. $\alpha = \alpha(s)$ regüler birim hızlı bir eğri ve Frenet vektörleri T, N ve B olsun.

(i) α timelike ise T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = T'(s)/\kappa(s), \quad B(s) = -(T \times N)(s),$$

$$T' = \kappa N, \quad N(s) = \kappa T - \tau B, \quad B' = \tau N,$$

$$\kappa(s) = \sqrt{|\langle T'(s), T'(s) \rangle|}, \quad (2.1.1)$$

$$\tau(s) = (\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \|\alpha' \times \alpha''\|^2)(s),$$

$$T \times N = -B, \quad N \times B = T, \quad B \times T = -N$$

dir (Woestijne 1990).

(ii) α spacelike binormalli bir spacelike eğri ise T spacelike, N timelike ve B spacelike olur. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel

arpımları sırasıyla

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s), & N(s) &= T'(s)/\kappa(s), & B(s) &= -(T \times N)(s), \\
T' &= \kappa N, & N' &= \kappa T + \tau B, & B' &= \tau N, \\
\kappa(s) &= \sqrt{|< T'(s), T'(s) >|},
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

$$\tau(s) = -(< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' > / \|\alpha' \times \alpha''\|^2)(s),$$

$$T \times N = -B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = N$$

dir (Woestijne 1990).

(iii) α timelike binormalli bir spacelike eğri ise T ve N spacelike ve B timelike olur. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpım sırasıyla

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s), & N(s) &= T'(s)/\kappa(s), & B(s) &= (T \times N)(s), \\
T' &= \kappa N, & N' &= -\kappa T + \tau B, & B' &= \tau N, \\
\kappa(s) &= \sqrt{|< T'(s), T'(s) >|},
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\tau(s) = (< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' > / \|\alpha' \times \alpha''\|^2)(s),$$

$$T \times N = B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = -N$$

dir (Woestijne 1990).

Tanım 2.1.19. Bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki T, N, B Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux(ani dönme)

ekseni denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B = N \times N'$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir (Şekil 1). B ile W arasındaki açı φ ile gösterilirse,

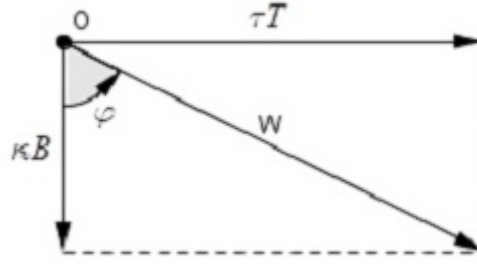
$$\kappa = \|W\| \cos \varphi,$$

$$\tau = \|W\| \sin \varphi$$

dır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \sin \varphi T + \cos \varphi B$$

bulunur (Hacısalıhoğlu 1983).



Şekil 2.1 Darboux Vektörü

Tanım 2.1.20. $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$, regüler birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin her noktasında bir $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı vardır ve Darboux vektörleri aşağıdaki gibidir:

(i) α, R_1^3 de bir timelike eğri olsun. Bu durumda Darboux vektörü

$$W = \tau T - \kappa B \quad (2.1.4)$$

dir.

(i.1) Eğer W spacelike vektör ise ($|\kappa| > |\tau|$) dır. Bu durumda B ile W arasındaki Lorentzian timelike açı ϕ ve birim Darboux vektörü C ile gösterilirse

$$\kappa = \|W\| \cosh \phi, \quad (2.1.5)$$

$$\tau = \|W\| \sinh \phi$$

ve

$$C = \sinh\phi T - \cosh\phi B. \quad (2.1.6)$$

dir.

(i.2) Eğer W timelike vektör ise $\|W\|^2 = -(\kappa^2 - \tau^2)$ olur. Bu durumda C birim Darboux vektörü

$$\kappa = \|W\| \sinh\phi, \quad (2.1.7)$$

$$\tau = \|W\| \cosh\phi$$

ve

$$C = \cosh\phi T - \sinh\phi B. \quad (2.1.8)$$

dir.

(ii) α, R_1^3 de spacelike binormalli bir spacelike eğri ise Darboux vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B \quad (2.1.9)$$

dir. Burada $\|W\| = \sqrt{|\kappa^2 + \tau^2|}$ olacağından $\langle W, W \rangle > 0$ olur. W spacelike vektördür. B ile W arasındaki Lorentzian spacelike ϕ ve birim Darboux vektörü C ile gösterilirse

$$\kappa = \|W\| \cosh\phi, \quad (2.1.10)$$

$$\tau = \|W\| \sinh\phi$$

ve

$$C = -\sin\phi T + \cos\phi B. \quad (2.1.11)$$

dir.

(iii) α, R_1^3 de timelike binormalli bir spacelike eğri ise bu durumda Darboux vektörü

$$W = \tau T - \kappa B \quad (2.1.12)$$

dir.

(iii.1) Eğer W spacelike vektör ise $\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$ olur. $-B$ ile W arasındaki Lorentzian timelike ϕ ve birim Darboux vektörü C ile gösterilirse

$$\kappa = \|W\| \sinh \phi, \quad (2.1.13)$$

$$\tau = \|W\| \cosh \phi$$

ve

$$C = \cosh \phi T - \sinh \phi B. \quad (2.1.14)$$

dir.

(iii.2) Eğer W timelike vektör ise $\|W\|^2 = -(\tau^2 - \kappa^2)$ olur. Bu durumda

$$\kappa = \|W\| \cosh \phi, \quad (2.1.15)$$

$$\tau = \|W\| \sinh \phi$$

ve

$$C = \sinh \phi T - \cosh \phi B. \quad (2.1.16)$$

dir (Bilici and Çalışkan 2011).

3 TİMELİKE EĞRİLERİN İNVLÖT EĞRİLERİ

3.1 Timelike Eğrilerin İnvolüt Eğrilerinin Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1. Birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

ise α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü denir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 3.1.2. Birim hızlı $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

ise α eğrisine α^* eğrisinin bir evolütü denir (Sabuncuoğlu 2006).

Lemma 3.1.3. $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisinin involütü $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi ise $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c - s|, \quad c = \text{sabit}, \quad \forall s \in I$$

dır (Hacısalıhoğlu 1983).

İspat İnvolüt eğri tanımından $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s)$ şeklinde verilebilir. Buradan türev alınırsa

$$(\alpha^*)'(s) = (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s)$$

bulunur. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olduğundan

$$\langle (\alpha^*)'(s), T(s) \rangle = 0$$

olur. Burada $(\alpha^*)'(s)$ yerine yukarıdaki eşiti yazılırsa

$$1 + \lambda'(s) = 0$$

ve buradan

$$\lambda(s) = -s + c$$

elde edilir.

Tanım 3.1.4. α, R_1^3 de birim hızlı timelike eğri olsun. Bu durumda α^* involüt eğrisi spacelike olur. α eğrisinin Frenet vektörleri T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. α^* eğrisinin Frenet vektörleri için

- (i) T^* ve N^* spacelike vektörler ve B^* timelike vektördür.
- (ii) T^* ve B^* spacelike vektörler ve N^* timelike vektördür. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= -1 & \langle T^*, T^* \rangle &= +1, \\ \langle N, N \rangle &= +1 & \langle N^*, N^* \rangle &= \pm 1 = \varepsilon_0, \\ \langle B, B \rangle &= +1 & \langle B^*, B^* \rangle &= \pm 1 = \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dır (Bilici and Çalışkan 2011).

Lemma 3.1.5. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin involütü olsun. α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* , α eğrisinin eğrilikleri de κ ve τ ise bu eğrilikler arasında

$$(\kappa^*)^2 = \frac{\epsilon_o(\tau^2 - \kappa^2)}{(c - s)^2 \kappa^2} \quad \tau^* = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{|c - s| \kappa |\kappa^2 - \tau^2|} \tag{3.1.2}$$

bağıntıları vardır (Bilici and Çalışkan 2011).

Teorem 3.1.6. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin bir involütü ve Frenet çatıları sırasıyla $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri arasında

(i) W spacelike bir vektör ($|\kappa| > |\tau|$) ise

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

(ii) Eğer W timelike bir vektör ($|\kappa| < |\tau|$) ise

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

bağıntıları vardır (Bilici and Çalışkan 2011).

İspat (i) α^* eğrisi, α eğrisinin involütü ise

$$\alpha^* = \alpha(s) + \lambda T(s), \quad \lambda = c - s, \quad \alpha' = T \quad (c = \text{sabit}) \quad (3.1.5)$$

yazılabilir. α ve α^* eğrilerinin yay parametreleri s ve s^* olmak üzere iki tarafında s parametresine göre türevi alınır ve Frenet formüllerinden $T' = \kappa N$ olduğu dikkate alınır

$$(\alpha^*)' = \frac{d\alpha^*}{ds} = \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = T^* \frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa N$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa$$

olur. O halde

$$T^* = N \quad (3.1.6)$$

elde edilir. $(\alpha^*)'$ tekrar türevi alınır ve $(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$(\alpha^*)'' = \lambda\kappa^2 T + (\lambda\kappa' - \kappa)N - \lambda\kappa\tau B,$$

$$(\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' = -\lambda^2\kappa^2\tau T + \lambda^2\kappa^3 B$$

olur. Norm hesaplanırsa

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = \lambda^2\kappa^2\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}$$

bulunur. (2.1.4) bağıntısından

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = \lambda^2\kappa^2 \|W\|$$

olur. Buradan B^* binormal vektörü

$$B^* = \frac{1}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|} ((\alpha^*)' \times (\alpha^*)''), \quad (3.1.7)$$

$$B^* = -\frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. W spacelike vektör olduğundan (2.1.5) ve (2.1.14) eşitliklerinden

$$B^* = -\sinh\theta T + \cosh\theta B. \quad (3.1.8)$$

elde edilir, $N^* = B^* \times T^*$ olduğundan

$$N^* = -\cosh\theta T + \sinh\theta B \quad (3.1.9)$$

dir. (3.1.6) , (3.1.8) ve (3.1.9) denklemleri matris formunda ifade edilirse (3.1.3) denklemini elde edilir.

(ii) (i) nin ispatına benzer olarak yapılır.

Sonuç 3.1.7. α^* eğrisi, α timelike eğrisinin involütü olsun.

(i) W spacelike vektör ($|\kappa| > |\tau|$) ise

$$\{T \text{ timelike}, N \text{ spacelike}, B \text{ spacelike}\}$$

ve

$$\{T^* \text{ spacelike}, N^* \text{ timelike}, B^* \text{ spacelike}\}$$

(ii) W timelike bir vektör ($|\kappa| < |\tau|$) ise

$$\{T \text{ timelike}, N \text{ spacelike}, B \text{ spacelike}\}$$

ve

$$\{T^* \text{ spacelike}, N^* \text{ spacelike}, B^* \text{ timelike}\}$$

biçimindedir (Bilici and Çalışkan 2011).

Teorem 3.1.8. α^* spacelike eğrisi, α timelike eğrisinin involütü olsun. α ve α^* eğrilerinin Darboux vektörleri sırasıyla W ve W^* ise

$$(i) \quad |\kappa| > |\tau| \text{ ise } W^* = \frac{1}{\kappa |c-s|} (-\theta' N - W) \quad (3.1.10)$$

$$(ii) \quad |\kappa| < |\tau| \text{ ise } W^* = \frac{1}{\kappa |c-s|} (-\theta' N + W)$$

dir (Bilici and Çalışkan 2011).

İspat (i) (2.1.9) eşitliğinden α^* eğrisinin Darboux vektörü

$$W^* = -\tau^* T^* + \kappa^* B^* \quad (3.1.11)$$

şeklindedir. (3.1.2) ve (3.1.3) ifadesi (3.1.11) de kullanılırsa

$$W^* = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\kappa |c-s| (\kappa^2 - \tau^2)} N + \sqrt{\frac{|\kappa^2 - \tau^2|}{\kappa^2 (c-s)^2}} (-\sinh \theta T + \cosh \theta B), \quad (3.1.12)$$

$$W^* = \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \tau^2}{\kappa |c-s| (\kappa^2 - \tau^2)} N + \frac{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}}{\kappa |c-s|} (-\sinh \theta T + \cosh \theta B)$$

bulunur. (3.1.12) denkleminde (2.1.5) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{\kappa |c-s|} (-\theta' N - \tau T - \kappa B) \\ W^* &= \frac{1}{\kappa |c-s|} (-\theta' N - W) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

elde edilir.

(ii) (i) nin ispatına benzer olarak yapılır.

Sonuç 3.1.9. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin involütü olsun. Eğer α evolüt eğrisi bir helis eğrisi ise α^* ve α eğrilerinin Darboux vektörleri arasında

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad |\kappa| > |\tau| \text{ ise } W^* &= -\frac{1}{\kappa |c-s|} W, \\ \text{(ii)} \quad |\kappa| < |\tau| \text{ ise } W^* &= \frac{1}{\kappa |c-s|} W \end{aligned}$$

bağıntıları vardır (Bilici and Çalışkan 2011).

İspat (i) α evolüt eğrisi bir helis eğrisi ise

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tanh \theta = \text{sabit}$$

dir. Bu takdirde

$$\theta' = 0 \quad (3.1.14)$$

olacaktır. (3.1.14) denklemini Teorem (3.1.7)(i) de yerine yazılırsa

$$W^* = -\frac{1}{\kappa |c-s|} W$$

elde edilir.

(ii) (i)'nin ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 3.1.10. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin involütü ve birim Darboux vektörleri sırasıyla C^* ve C olsun. Bu vektörler arasında

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad |\kappa| > |\tau| \text{ ise } C^* &= -\frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}N + \frac{|\kappa^2 - \tau^2|}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}C, \\ \text{(ii)} \quad |\kappa| < |\tau| \text{ ise } C^* &= -\frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}N + \frac{|\tau^2 - \kappa^2|}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}C \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

bağıntıları vardır (Bilici and Çalışkan 2011).

İspat (i) B^* binormal vektörü ile W^* Darboux vektörü arasındaki Lorentzian açı θ^* olmak üzere (2.1.11) eşitliğinden spacelike binormali spacelike eğrinin birim Darboux vektörü

$$C^* = -\sin\theta^*T^* + \cos\theta^*B^* \quad (3.1.16)$$

olacaktır. α^* eğrisinin eğrilik ve burulması (2.1.10) eşitliğinden

$$\kappa^* = \|W^*\| \cos\theta^*, \quad \tau^* = \|W^*\| \sin\theta^* \quad (3.1.17)$$

şeklindedir. (3.1.2) ve (3.1.10) eşitlikleri (3.1.17) eşitliğinde kullanılırsa

$$\sin\theta^* = \frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}, \quad \cos\theta^* = \frac{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}} \quad (3.1.18)$$

elde edilir. (3.1.18) de verilen eşitlikler (3.1.16) da yerine yazılırsa

$$C^* = -\frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}N + \frac{|\kappa^2 - \tau^2|}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}C$$

elde edilir.

(ii) (i) nin ispatına benzer olarak yapılır.

4 MINKOWSKİ 3-UZAYDA TİMEİKE EĞRİLERİN İNVLÜT EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE NULL OLMAYAN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin bir involütü olmak üzere, konum vektörü involüt eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan null olmayan regüler Smarandache eğrileri,

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{ Smarandache eğrisi}$$

şeklinde gösterilecek ve bu eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulmaları evolüt eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edilecektir.

4.1 T^*N^* Smarandache Eğrisi

Tanım 4.1.1. Herhangi bir eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut and Yılmaz 2008).

Tanım 4.1.2. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, birim hızlı α timelike eğrisinin involütü ve $\alpha^*(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad (4.1.1)$$

şeklindedir. Burada T^* ve N^* 'ın yerine (3.1.3) ve (3.1.4) den karşılıkları yazılırsa $\beta_1(s)$ eğrisi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cosh\theta T + N + \sinh\theta B) \quad (4.1.2)$$

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sinh\theta T + N - \cosh\theta B) \quad (4.1.3)$$

olur.

Teorem 4.1.3. (4.1.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_1} , N_{β_1} ve B_{β_1} ile gösterilirse

$$\begin{aligned} T_{\beta_1} &= \frac{(-\theta' \sinh\theta + \kappa)T - \|W\| N + (\theta' \cosh\theta - \tau)B}{|\theta'|}, \\ N_{\beta_1} &= \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}}, \\ B_{\beta_1} &= \varepsilon_{T_{\beta_1}} \varepsilon_{N_{\beta_1}} \left[\begin{aligned} &\frac{(-\|W\| \omega_3 - (\theta' \cosh\theta - \tau)\omega_2)T}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}} \\ &- \frac{((\theta' \cosh\theta - \tau)\omega_1 + (\theta' \sinh\theta - \kappa)\omega_3)N}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}} \\ &- \frac{(\|W\| \omega_1 - (\theta' \sinh\theta - \kappa)\omega_2)B}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}}, \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= (-\theta'' \sinh\theta - \theta'^2 \cosh\theta + \kappa' - \kappa \|W\|) |\theta'| - |\theta'|' (-\theta' \sinh\theta + \kappa), \\ \omega_2 &= (\|W\|^2 - \|W\|') |\theta'| + |\theta'|' \|W\|, \\ \omega_3 &= (\theta'' \cosh\theta + \theta'^2 \sinh\theta - \tau' + \tau \|W\|) |\theta'| - |\theta'|' (\theta' \cosh\theta - \tau), \end{aligned} \right.$$

$\varepsilon_{T_{\beta_1}} = \langle T_{\beta_1}, T_{\beta_1} \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_{N_{\beta_1}} = \langle N_{\beta_1}, N_{\beta_1} \rangle = \pm 1$ dir.

İspat: (4.1.2) bağıntısı ile verilen β_1 eğrisinin s_{β_1} yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'_1 = T_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((-\theta' \sinh \theta + \kappa)T - \|W\| N + (\theta' \cosh \theta - \tau)B) \quad (4.1.4)$$

ve

$$\langle \beta'_1, \beta'_1 \rangle = \frac{\theta'^2}{2} \quad (4.1.5)$$

bulunur. Bu durumda $\frac{\theta'^2}{2} > 0$ olduğundan β_1 spacelike eğri olacaktır. $\exists \theta' \in R$ için $\frac{\theta'^2}{2} \neq 1$ olduğundan β_1 eğrisi s ye göre yay parametrelidir. Fakat β_1 eğrisini s_{β_1} e göre yay parametrelidir kabul edeceğiz. Bu durumda (4.1.4) ifadesinin normu alınır

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{|\theta'|}{\sqrt{2}} \quad (4.1.6)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (4.1.4) ifadesinde yerine yazılırsa β_1 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{(-\theta' \sinh \theta + \kappa)T - \|W\| N + (\theta' \cosh \theta - \tau)B}{|\theta'|} \quad (4.1.7)$$

şeklinde olur. (4.1.7) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\begin{cases} \omega_1 = (-\theta'' \sinh \theta - \theta'^2 \cosh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|) |\theta'| - |\theta'|' (-\theta' \sinh \theta + \kappa), \\ \omega_2 = (\|W\|^2 - \|W\|') |\theta'| + |\theta'|' \|W\|, \\ \omega_3 = (\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \tau' + \tau \|W\|) |\theta'| - |\theta'|' (\theta' \cosh \theta - \tau) \end{cases} \quad (4.1.8)$$

olmak üzere $T'_{\beta_1}(s)$ türevinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B)}{|\theta'|^3} \quad (4.1.9)$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin aslinormali N_{β_1} ile gösterilirse (4.1.9) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|} = \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}}, \quad (4.1.10)$$

şeklindedir. $B_{\beta_1} = \varepsilon_{T_{\beta_1}} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (T_{\beta_1} \times N_{\beta_1})$ olduğundan B_{β_1} binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_1 = \varepsilon_{T_{\beta_1}} \varepsilon_{N_{\beta_1}} \left[\begin{array}{c} \frac{(-\|W\| w_3 - (\theta' \cosh \theta - \tau) \omega_2) T}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}} \\ - \frac{((\theta' \cosh \theta - \tau) \omega_1 + (\theta' \sinh \theta - \kappa) \omega_3) N}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}} \\ - \frac{(\|W\| \omega_1 - (\theta' \sinh \theta - \kappa) \omega_2) B}{|\theta'| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}}, \end{array} \right] \quad (4.1.11)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.4. (4.1.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ_{β_1} ve τ_{β_1} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{|\theta'|^3} \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)},$$

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (\tilde{w}_1 \Omega_1 + \tilde{w}_2 \Omega_2 + \tilde{w}_3 \Omega_3)}{-\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_1 = -\|W\| (\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \tau' + \tau \|W\|) - (\theta' \cosh \theta - \tau) (\|W\|^2 - \|W\|'), \\ \tilde{w}_2 = (-\theta' \sinh \theta + \kappa) \theta'' \cosh \theta + (\theta'^2 \sinh \theta - \tau' + \tau \|W\|) \\ \quad - (\theta' \cosh \theta - \tau) (-\theta'' \sinh \theta - \theta'^2 \cosh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|), \\ \tilde{w}_3 = -\|W\| (-\theta'' \sinh \theta - \theta'^2 \cosh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|) + (\theta' \sinh \theta - \kappa) (\|W\|^2 - \|W\|') \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = -\theta''' \sinh\theta - 3\theta'' \theta' \cosh\theta - \theta'^3 \sinh\theta + \kappa'' + \kappa' \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \Omega_2 = -\theta'^2 \|W\| + \kappa\kappa' - \tau\tau' + \|W\|^3 + 2\|W\| \|W\|' - \|W\|'', \\ \Omega_3 = \theta''' \cosh\theta + 3\theta'' \theta' \sinh\theta - \theta'^3 \cosh\theta + \tau'' + \tau' \|W\| - \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dir.

İspat: (4.1.9) bağıntısından κ_{β_1} eğriliği

$$\kappa_{\beta_1} = \|T'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{2}}{|\theta'|^3} \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}$$

şeklinde bulunur. $\beta'_1, \beta''_1, \beta'''_1$ değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_1 = -\|W\| (\theta'' \cosh\theta + \theta'^2 \sinh\theta - \tau' + \tau \|W\|) \\ \quad - (\theta' \cosh\theta - \tau)(\|W\|^2 - \|W\|'), \\ \tilde{w}_2 = (-\theta' \sinh\theta + \kappa)\theta'' \cosh\theta + (\theta'^2 \sinh\theta - \tau' + \tau \|W\|) \\ \quad - (\theta' \cosh\theta - \tau)(-\theta'' \sinh\theta - \theta'^2 \cosh\theta + \kappa' - \kappa \|W\|), \\ \tilde{w}_3 = -\|W\| (-\theta'' \sinh\theta - \theta'^2 \cosh\theta + \kappa' - \kappa \|W\|) \\ \quad + (\theta' \sinh\theta - \kappa)(\|W\|^2 - \|W\|') \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

olmak üzere

$$\beta'_1 \times \beta''_1 = \frac{\tilde{w}_1 T + \tilde{w}_2 N + \tilde{w}_3 B}{2}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = -\theta''' \sinh\theta - 3\theta''\theta' \cosh\theta - \theta'^3 \sinh\theta + \kappa'' + \kappa' \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \Omega_2 = -\theta'^2 \|W\| + \kappa\kappa' - \tau\tau' + \|W\|^3 + 2\|W\| \|W\|' - \|W\|'', \\ \Omega_3 = \theta''' \cosh\theta + 3\theta''\theta' \sinh\theta - \theta'^3 \cosh\theta + \tau'' + \tau' \|W\| - \tau \|W\|^2 \end{array} \right. \quad (4.1.13)$$

olmak üzere

$$\beta_1''' = \frac{\Omega_1 T + \Omega_2 N + \Omega_3 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda β_1 eğrisinin burulması τ_{β_1} ile gösterilirse

$$\tau_{\beta_1} = \varepsilon_{N_{\beta_1}} \frac{\langle \beta_1' \times \beta_1'', \beta_1''' \rangle}{\|\beta_1' \times \beta_1''\|^2}, \quad (4.1.14)$$

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\tilde{w}_1 \Omega_1 + \tilde{w}_2 \Omega_2 + \tilde{w}_3 \Omega_3)}{-\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1.5. (4.1.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_1} , N_{β_1} ve B_{β_1} ile gösterilirse

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{(\theta' \cosh\theta + \kappa)T - \|W\| N - (\theta' \sinh\theta + \tau)B}{\sqrt{|2|W|^2 - \theta'^2|}},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\wedge_1 T + \wedge_2 N + \wedge_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\wedge_1^2 + \wedge_2^2 + \wedge_3^2)}},$$

$$B_1 = \varepsilon_{T_{\beta_1}} \varepsilon_{N_{\beta_1}} \left[\begin{array}{c} \frac{(-\|W\| \wedge_3 + (\theta' \sinh \theta + \tau) \wedge_2) T}{\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|} \sqrt{-\wedge_1^2 + \wedge_2^2 + \wedge_3^2}} \\ \\ - \frac{((\theta' \sinh \theta + \tau) \wedge_1 + (\theta' \cosh \theta + \kappa) \wedge_3) N}{\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|} \sqrt{-\wedge_1^2 + \wedge_2^2 + \wedge_3^2}} \\ \\ - \frac{(\|W\| \wedge_1 + (\theta' \cosh \theta + \kappa) \wedge_2) B}{\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|} \sqrt{-\wedge_1^2 + \wedge_2^2 + \wedge_3^2}}, \end{array} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \wedge_1 = (\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|)(\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|}) \\ \quad - (\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|})' (\theta' \cosh \theta + \kappa), \\ \wedge_2 = (-\|W\|^2 - \|W\|')(\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|}) \\ \quad + (\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|})' \|W\| \\ \wedge_3 = (-\theta''' \sinh \theta + (\theta'^2 \cosh \theta + \tau' + \tau \|W\|)\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|}) \\ \quad + (\sqrt{|2\|W\|^2 - \theta'^2|})' (\theta' \sinh \theta + \tau) \end{array} \right.$$

dir.

Sonuç 4.1.6. (4.1.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilikleri κ_{β_1}

ve τ_{β_1} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2 \varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2)}}{\left| 2 \|W\|^2 - \theta'^2 \right|^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Lambda}_2 \tilde{\Omega}_2 + \tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Omega}_3)}{-\tilde{\Lambda}_1^2 + \tilde{\Lambda}_2^2 + \tilde{\Lambda}_3^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Lambda}_1 = \|W\| (\theta'' \sinh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \tau' + \tau \|W\|) \\ \quad - (\theta' \sinh \theta + \tau) (\|W\|^2 + \|W\|'), \\ \tilde{\Lambda}_2 = (\theta' \sinh \theta + \tau) (\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|) \\ \quad - (\theta' \cosh \theta + \kappa) (\theta'' \sinh \theta + \theta'^2 \cosh \theta + \tau' - \tau \|W\|), \\ \tilde{\Lambda}_3 = -\|W\| (\theta'' \cosh \theta + (\theta'^2 \sinh \theta + \kappa' - \kappa \|W\|) \\ \quad + (\theta' \cosh \theta + \kappa) (\|W\|^2 + \|W\|')) \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_1 = \theta''' \cosh \theta + 3\theta''' \theta' \sinh \theta + \theta'^3 \cosh \theta + \kappa'' \\ \quad - 2\kappa \|W\|' - \kappa' \|W\| - \kappa \|W\|^2, \\ \tilde{\Omega}_2 = -\theta'^2 \|W\| + \kappa \kappa' - \tau \tau' + \|W\|^3 - 2\|W\| \|W\|' - \|W\|'' \\ \tilde{\Omega}_3 = -\theta''' \sinh \theta - 3\theta'' \theta' \cosh \theta - \theta'^3 \sinh \theta - \tau'' + 2\tau \|W\|' \\ \quad + \tau' \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dir.

Sonuç 4.1.7. (4.1.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisi spacelike bir eğridir.

Sonuç 4.1.8. (4.1.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisi spacelike veya timelike bir eğridir.

4.2 N^*B^* Smarandache Eğrisi

Tanım 4.2.1. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, birim hızlı α timelike eğrisinin involütü ve $\alpha^*(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad (4.2.1)$$

şeklindedir. Burada N^* ve B^* ' in yerine (3.1.3) ve (3.1.4) den karşılıkları yazılırsa β_2 eğrisi

$$\beta_2(s) = \frac{-(\sinh\theta + \cosh\theta)T + (\sinh\theta + \cosh\theta)B}{\sqrt{2}} \quad (4.2.2)$$

$$\beta_2(s) = \frac{(\sinh\theta - \cosh\theta)T + (\sinh\theta - \cosh\theta)B}{\sqrt{2}} \quad (4.2.3)$$

olur.

Teorem 4.2.2. (4.2.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_2} , N_{β_2} ve B_{β_2} ile gösterilirse

$$T_{\beta_2(s)} = \frac{-\theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)T - \|W\| N + \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)B}{\|W\|}$$

$$N_{\beta_2} = \frac{\delta_1 T + \delta_2 N + \delta_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}}$$

$$B_2 = \varepsilon_{T_{\beta_2}} \varepsilon_{N_{\beta_2}} \begin{bmatrix} \frac{(-\|W\| \delta_3 - \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)\delta_2)T}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \\ -\frac{(\theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)(\delta_1 + \delta_3))N}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \\ -\frac{(\|W\| \delta_1 - \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)\delta_2)B}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \delta_1 = -((\theta'^2 + \theta'')(\cosh\theta + \sinh\theta) + \|W\| \kappa) \|W\| + \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta) \|W\|' \\ \delta_2 = -\theta' \|W\|^2 \\ \delta_3 = ((\theta'' + \theta'^2)(\cosh\theta + \sinh\theta) + \|W\| \tau) \|W\| - \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta) \|W\|' , \end{cases}$$

$\varepsilon_{T_{\beta_2}} = \langle T_{\beta_2}, T_{\beta_2} \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_{N_{\beta_2}} = \langle N_{\beta_2}, N_{\beta_2} \rangle = \pm 1$ dir.

İspat: (4.2.2) bağıntısı ile verilen β_2 eğrisinin s_{β_2} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \beta_2'(s) &= T_{\beta_2} \frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)T - \|W\| N \\ &\quad + \theta'(\cosh\theta + \sinh\theta)B \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ve

$$\langle \beta_2', \beta_2' \rangle = \frac{\|W\|^2}{2} \tag{4.2.5}$$

bulunur. Bu durumda $\frac{\|W\|^2}{2} > 0$ olduğundan β_2 spacelike bir eğri olacaktır. $\exists \|W\| \in R$ için $\frac{\|W\|^2}{2} \neq 1$ olduğundan β_2 eğrisi s'ye göre yay parametrelili değildir. Fakat β_2 eğrisini s_{β_2} ' e göre yay parametrelili kabul edeceğiz. Bu durumda (4.2.4) ifadesinin normu alınır

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{\|W\|}{\sqrt{2}} \quad (4.2.6)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (4.2.4) ifadesinde yerine yazılırsa β_2 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\theta'(cosh\theta + sinh\theta)T - \|W\| N + \theta'(cosh\theta + sinh\theta)B}{\|W\|} \quad (4.2.7)$$

şeklindedir. (4.2.7) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = -((\theta'^2 + \theta'')(cosh\theta + sinh\theta) + \|W\| \kappa) \|W\| \\ \quad + \theta'(cosh\theta + sinh\theta) \|W\|', \\ \delta_2 = -\theta' \|W\|^2 \\ \delta_3 = ((\theta'' + \theta'^2)(cosh\theta + sinh\theta) + \|W\| \tau) \|W\| \\ \quad - \theta'(cosh\theta + sinh\theta) \|W\|' \end{array} \right. \quad (4.2.8)$$

olmak üzere $T'_{\beta_2}(s)$ türevinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_2(s)} = \frac{\sqrt{2}}{\|W\|^3} (\delta_1 T + \delta_2 N + \delta_3 B) \quad (4.2.9)$$

şeklinde bulunur. β_2 eğrisinin aslinormali N_{β_2} ile gösterilirse (4.2.9) bağıntısından

$$N_{\beta_2} = \frac{T'_{\beta_2}}{\|T'_{\beta_2}\|} = \frac{\delta_1 T + \delta_2 N + \delta_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}}, \quad (4.2.10)$$

şeklindedir. $B_{\beta_2} = \varepsilon_{T_{\beta_2}} \varepsilon_{N_{\beta_2}} (T_{\beta_2} \times N_{\beta_2})$ olduğundan B_{β_2} binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_2 = \varepsilon_{T_{\beta_2}} \varepsilon_{N_{\beta_2}} \begin{bmatrix} \frac{(-\|W\| \delta_3 - \theta' (\cosh \theta + \sinh \theta) \delta_2) T}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \\ \frac{(\theta' (\cosh \theta + \sinh \theta) (\delta_1 + \delta_3)) N}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \\ \frac{(\|W\| \delta_1 - \theta' (\cosh \theta + \sinh \theta) \delta_2) B}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}} \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.3. (4.2.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ_{β_2} ve τ_{β_2} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}}{\|W\|^3} \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}$$

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\tilde{\delta}_1 \psi_1 + \tilde{\delta}_2 \psi_2 + \tilde{\delta}_3 \psi_3)}{-\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_3}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \tilde{\delta}_1 = (\cosh \theta + \sinh \theta) (\theta'' \|W\| - \theta' \|W\|') + \tau \|W\|^2, \\ \tilde{\delta}_2 = \theta' \|W\| (\cosh \theta + \sinh \theta) (\kappa + \tau), \\ \tilde{\delta}_3 = (\cosh \theta + \sinh \theta) (-\theta'' \|W\| - \theta' \|W\|') + \kappa \|W\|^2 \end{cases}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = -(\cosh\theta + \sinh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3) \\ -\kappa' \|W\| - 2\kappa \|W\|' - \theta'\kappa \|W\| \\ \psi_2 = -2\theta' \|W\| - \theta'^2 \| \| - \theta' \|W\|' - \|W\|'' - \|W\|^3 \\ \psi_3 = (\cosh\theta + \sinh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3 + \tau' \|W\| \\ + 2\tau \|W\|' + \theta'\tau \|W\|) \end{array} \right.$$

dir.

İspat: (4.2.9) bağıntısından κ_{β_2} eğriliği

$$\kappa_{\beta_2} = \|T'_{\beta_2}\| = \frac{\sqrt{2}}{\|W\|^3} \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_1}}(-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}$$

şeklinde bulunur. β_2', β_2'' ve β_2''' değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılır

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\zeta}_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta' \|W\|') - \tau \|W\|^2 \\ \tilde{\zeta}_2 = \theta' \|W\| (\cosh\theta - \sinh\theta)(\kappa + \tau) \\ \tilde{\zeta}_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta' \|W\|') + \kappa \|W\|^2 \end{array} \right. \quad (4.2.12)$$

olmak üzere

$$\beta_2' \times \beta_2'' = \frac{\tilde{\zeta}_1 T + \tilde{\zeta}_2 N + \tilde{\zeta}_3 B}{2}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta''' - 3\theta'\theta'' + \theta'^3) - \kappa' \|W\| \\ \quad - 2\kappa \|W\|' + \theta'\kappa \|W\|, \\ \xi_2 = 2\theta'' \|W\| - \theta'^2 \|W\| + \theta' \|W\|' \\ \quad - \|W\|'' + \|W\|^3, \\ \xi_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta''' - 3\theta'\theta'' + \theta'^3) \\ \quad + \tau' \|W\| + 2\tau \|W\|' - \theta'\tau \|W\| \end{array} \right. \quad (4.2.13)$$

olmak üzere

$$\beta_2''' = \frac{\xi_1 T + \xi_2 N + \xi_3 B}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Bu durumda β_2 eğrisinin burulması τ_{β_2} ,

$$\tau_{\beta_2} = \varepsilon_{N_{\beta_2}} \frac{\langle \beta_2' \times \beta_2'', \beta_2''' \rangle}{\|\beta_2' \times \beta_2''\|^2},$$

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (-\tilde{\zeta}_1 \xi_1 + \tilde{\zeta}_2 \xi_2 + \tilde{\zeta}_3 \xi_3)}{-\tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}_3}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.2.4. (4.2.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_2} , N_{β_2} ve B_{β_2} ile gösterilirse

$$T_{\beta_2} = \frac{\theta'(cosh\theta - sinh\theta)T - \|W\| N + \theta'(cosh\theta - sinh\theta)B}{\|W\|},$$

$$N_{\beta_2} = \frac{\zeta_1 T + \zeta_2 N + \zeta_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}},$$

$$B_2 = \varepsilon_{T_{\beta_2}} \varepsilon_{N_{\beta_2}} \left[\begin{array}{c} \frac{-(\|W\| \zeta_3 - \zeta_2 \theta'(cosh\theta - sinh\theta))T}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}} \\ + \frac{(\theta'(cosh\theta - sinh\theta)(\zeta_3 - \zeta_1))N}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}} \\ - \frac{(\theta'(cosh\theta - sinh\theta)\zeta_2 - \|W\| \zeta_1)B}{\|W\| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_2}}(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}} \end{array} \right]$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = ((\theta'' - \theta'^2)(cosh\theta - sinh\theta) - \|W\| \kappa) \|W\| - \|W\|' \theta'(cosh\theta - sinh\theta), \\ \zeta_2 = \theta' \|W\|^2, \\ \zeta_3 = ((\theta'' - \theta'^2)(cosh\theta - sinh\theta) + \|W\| \tau) \|W\| - \|W\|' \theta'(cosh\theta - sinh\theta) \end{array} \right.$$

dir.

Sonuç 4.2.5. (4.2.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilikleri κ_{β_2}

ve τ_{β_2} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_2}} (-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}{\|W\|^3},$$

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_1}} (\tilde{\zeta}_1 \xi_1 + \tilde{\zeta}_2 \xi_2 + \tilde{\zeta}_3 \xi_3)}{-\tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}_3}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_1 = (\cosh\theta - s, nh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta' \|W\|') - \tau \|W\|^2 \\ \tilde{\zeta}_2 = \theta' \|W\| (\cosh\theta - \sinh\theta)(\kappa + \tau) \\ \tilde{\zeta}_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta' \|W\|') + \kappa \|W\|^2 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \xi_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta''' - 3\theta'\theta'' + \theta'^3) - \kappa \|W\| - 2\kappa \|W\|' + \theta'\kappa \|W\| \\ \xi_2 = 2\theta'' \|W\| - \theta'^2 \|W\| + \theta' \|W\|' + \|W\|'' + \|W\|^3 \\ \xi_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta'^3 - 3\theta'\theta'' + \theta'^3) + \tau' \|W\| + 2\tau \|W\|' - \theta'\tau \|W\| \end{cases}$$

dır.

Sonuç 4.2.6. (4.2.2) ve (4.2.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrileri spacelike eğrilerdir.

4.3 T^*B^* Smarandache Eğrisi

Tanım 4.3.1. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, birim hızlı α timelike eğrisinin involütü ve $\alpha^*(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad (4.3.1)$$

şeklindedir. Burada T^* ve B^* in yerine (3.1.3) ve (3.1.4) 'den karşılıkları yazılırsa β_3 eğrisi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sinh\theta T + N + cosh\theta B) \quad (4.3.2)$$

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cosh\theta T + N + sinh\theta B) \quad (4.3.3)$$

olur.

Teorem 4.3.2. (4.3.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_3} , N_{β_3} ve B_{β_3} ile gösterilirse

$$T_{\beta_3(s)} = \frac{(\kappa - \theta' cosh\theta)T + (\theta' sinh\theta - \tau)B}{|\theta' - \|W\||},$$

$$N_{\beta_3} = \frac{\phi_1 T + \phi_2 N + \phi_3 B}{\sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}},$$

$$B_3 = \left[\begin{array}{c} \frac{((\theta' sinh\theta - \tau)\phi_2)T}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \\ + \frac{((\theta' cosh\theta - \kappa)\phi_3 + (\theta' sinh\theta - \tau)\phi_1)N}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \\ - \frac{((\theta' cosh\theta - \kappa)\phi_2)B}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \end{array} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = (-\theta'' \cosh\theta - \theta'^2 \sinh\theta + \kappa') |\theta' - \|W\|| + |\theta' - \|W\||' (\theta' \cosh\theta - \kappa), \\ \phi_2 = (-\theta' \|W\| + \|W\|^2) |\theta' - \|W\||, \\ \phi_3 = (\theta'' \sinh\theta + \theta'^2 \cosh\theta - \tau') |\theta' - \|W\|| - |\theta' - \|W\||' (\theta' \sinh\theta - \tau), \end{array} \right.$$

$\varepsilon_{T_{\beta_3}} = \langle T_{\beta_3}, T_{\beta_3} \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_{N_{\beta_3}} = \langle N_{\beta_3}, N_{\beta_3} \rangle = \pm 1$ dir.

İspat: (4.3.2) bağıntısı ile verilen β_3 eğrisinin s_{β_3} yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta_3'(s) = T_{\beta_3} \frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{(\kappa - \theta' \cosh\theta)T + (\theta' \sinh\theta - \tau)B}{\sqrt{2}} \quad (4.3.4)$$

ve

$$\langle \beta_3', \beta_3' \rangle = \frac{-(\theta' - \|W\|)^2}{2} \quad (4.3.5)$$

bulunur. Bu durumda $\frac{-(\theta' - \|W\|)^2}{2} < 0$ olduğundan β_3 timelike bir eğri olacaktır.

$\exists \theta' \in R$ için $\frac{\theta'^2}{2} \neq 1$ olduğundan β_3 eğrisi s ye göre yay parametrelidir. Fakat s_{β_3} e göre yay parametrelidir kabul edeceğiz. Bu durumda (4.3.4) ifadesinin normu alınır

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{|\theta' - \|W\||}{\sqrt{2}} \quad (4.3.6)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (4.3.4) ifadesinde yerine yazılırsa β_3 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = \frac{(\kappa - \theta' \cosh\theta)T + (\theta' \sinh\theta - \tau)B}{|\theta' - \|W\||} \quad (4.3.7)$$

şeklinde olur. (4.3.8) ifadesinin tekrar türevi alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = (-\theta'' \cosh \theta - \theta'^2 \sinh \theta + \kappa') |\theta' - \|W\|| \\ \quad + |\theta' - \|W\||' (\theta' \cosh \theta - \kappa), \\ \phi_2 = (-\theta' \|W\| + \|W\|^2) |\theta' - \|W\||, \\ \phi_3 = (\theta'' \sinh \theta + \theta'^2 \cosh \theta - \tau') |\theta' - \|W\|| \\ \quad - |\theta' - \|W\||' (\theta' \sinh \theta - \tau) \end{array} \right. \quad (4.3.8)$$

olmak üzere $T'_{\beta_3}(s)$ türevinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2(\phi_1 T + \phi_2 N + \phi_3 B)}}{|\theta' - \|W\||^3} \quad (4.3.9)$$

şeklinde bulunur. β_3 eğrisinin aslinormali N_{β_3} ile gösterilirse (4.3.9) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|} = \frac{\phi_1 T + \phi_2 N + \phi_3 B}{\sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}}, \quad (4.3.10)$$

elde edilir. $B_{\beta_3} = -(T_{\beta_3} \times N_{\beta_3})$ olduğundan B_{β_3} binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{-(\theta' \sinh \theta - \tau) \phi_2 T}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \\ - \frac{((\theta' \cosh \theta - \kappa) \phi_3 + (\theta' \sinh \theta - \tau) \phi_1) N}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \\ + \frac{((\theta' \cosh \theta - \kappa) \phi_2) B}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.3.3. (4.3.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ_{β_3} ve τ_{β_3} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}}{|\theta' - \|W\||^3},$$

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} (-\tilde{\psi}_1 \bar{w}_1 + \tilde{\psi}_2 \bar{w}_2 + \tilde{\psi}_3 \bar{w}_3)}{-\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2 + \tilde{\psi}_3^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_1 = (\tau - \theta' \sinh \theta)(\|W\|^2 - \theta' \|W\|), \\ \tilde{\phi}_2 = (-\theta' \cosh \theta + \kappa)(\theta'' \sinh \theta + \theta'^2 \cosh \theta - \tau') + (\theta' \sinh \theta - \tau)(\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \kappa') \\ \tilde{\phi}_3 = (\theta' \cosh \theta - \kappa)(\|W\|^2 - \theta' \|W\|), \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_1 = -(\theta''' + \theta'^3) \cosh \theta - 3\theta' \theta'' \sinh \theta + \kappa'' - \theta' \kappa \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \bar{w}_2 = -2\theta'' \|W\| - \theta' \|W\|' + 2 \|W\| \|W\|' + \kappa \kappa' - \tau \tau', \\ \bar{w}_3 = (\theta''' + \theta'^3) \sinh \theta + 3\theta'' \theta' \cosh \theta - \tau'' + \theta' \tau \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dır.

İspat: (4.3.2) bağıntısından κ_{β_3} eğriliği

$$\kappa_{\beta_3} = \|T'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{2} \sqrt{-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}}{|\theta' - \|W\||^3}$$

şeklinde bulunur. $\beta'_3, \beta''_3, \beta'''_3$ değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_1 = (\tau - \theta' \sinh \theta)(\|W\|^2 - \theta' \|W\|), \\ \tilde{\phi}_2 = (-\theta' \cosh \theta + \kappa)(\theta'' \sinh \theta + \theta'^2 \cosh \theta - \tau') \\ \quad + (\theta' \sinh \theta - \tau)(\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \kappa') \\ \tilde{\phi}_3 = (\theta' \cosh \theta - \kappa)(\|W\|^2 - \theta' \|W\|), \end{array} \right. \quad (4.3.12)$$

olmak üzere

$$\beta'_3 \wedge \beta''_3 = \frac{\tilde{\phi}_1 T + \tilde{\phi}_2 N + \tilde{\phi}_3 B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_1 = -(\theta''' + \theta'^3) \cosh \theta - 3\theta' \theta'' \sinh \theta + \kappa'' - \theta' \kappa \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \bar{w}_2 = -2\theta'' \|W\| - \theta' \|W\|' + 2 \|W\| \|W\|' + \kappa \kappa' - \tau \tau', \\ \bar{w}_3 = (\theta''' + \theta'^3) \sinh \theta + 3\theta'' \theta' \cosh \theta - \tau'' + \theta' \tau \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{array} \right. \quad (4.3.13)$$

olmak üzere

$$\beta_3''' = \frac{\bar{w}_1 T + \bar{w}_2 N + \bar{w}_3 B}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Bu durumda β_3 eğrisinin burulması τ_{β_3}

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\langle \beta_3' \times \beta_3'', \beta_3''' \rangle}{\|\beta_3' \times \beta_3''\|^2}, \quad (4.3.14)$$

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} (-\tilde{\psi}_1 \bar{w}_1 + \tilde{\psi}_2 \bar{w}_2 + \tilde{\psi}_3 \bar{w}_3)}{-\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2 + \tilde{\psi}_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.3.4. (4.3.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_3} , N_{β_3} ve B_{β_3} ile gösterilirse

$$T_{\beta_3(s)} = \frac{(-\theta' \sinh \theta + \kappa)T + (\theta' \cosh \theta - \tau)B}{|\theta' - \|W\||},$$

$$N_{\beta_3} = \frac{v_1 T + v_2 N + v_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_3}} (-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}},$$

$$B_3 = \varepsilon_{N_{\beta_3}} \begin{bmatrix} \frac{(-\theta' \cosh \theta + \tau) v_2 T}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_3}}(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}} \\ - \frac{((\theta' \sinh \theta - \kappa) v_3 + (\theta' \cosh \theta - \tau) v_1) N}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_3}}(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}} \\ - \frac{((-\theta' \sinh \theta + \kappa) v_2) B}{|\theta' - \|W\|| \sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_3}}(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} v_1 = (-\theta'' \sinh \theta - \theta'^2 \cosh \theta + \kappa') |\theta' - \|W\|| + |\theta' - \|W\||' (\theta' \sinh \theta + \kappa), \\ v_2 = (\theta' \|W\| - \|W\|^2) |\theta' - \|W\||, \\ v_3 = (\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \tau') |\theta' - \|W\|| - (|\theta' - \|W\||)' (\theta' \cosh \theta - \tau) \end{cases}$$

dır.

Sonuç 4.3.5. (4.3.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilikleri κ_{β_3} ve τ_{β_3} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2 \varepsilon_{N_{\beta_3}}(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}{|\theta' - \|W\||^3},$$

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_{N_{\beta_3}}(-\overline{v_1} \pi_1 + \overline{v_2} \pi_2 + \overline{v_3} \pi_3)}{-\overline{v_1}^2 + \overline{v_2}^2 + \overline{v_3}^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 = (-\theta' \cosh \theta - \tau)(\|W\| \theta' - \|W\|^2), \\ \bar{v}_2 = (\kappa - \theta' \sinh \theta)(\theta'' \cosh \theta + \theta'^2 \sinh \theta - \tau') \\ \quad - (\theta' \cosh \theta - \tau)(\kappa' - \theta'' \sinh \theta - \theta'^2 \cosh \theta) \\ \bar{v}_3 = (\theta' \sinh \theta - \kappa)(\|W\| \theta' - \|W\|^2) \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = -(\theta''' + \theta'^3) \sinh \theta - 3\theta' \theta'' \cosh \theta + \kappa'' + \kappa \theta' \|W\| \\ \quad + \kappa \theta' \|W\| - \kappa \|W\|^2 \\ \pi_2 = 2\theta'' \|W\| + \theta' \|W\|' - 2 \|W\| \|W\|' \kappa \kappa' - \tau \tau' \\ \pi_3 = (\theta''' + \theta'^3) \cosh \theta + 3\theta'' \theta' \sinh \theta \\ \quad - \tau'' + \tau \theta' \|W\| - \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dır.

Sonuç 4.3.6. (4.3.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisi timelike bir eğridir.

Sonuç 4.3.7. (4.3.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisi spacelike bir eğridir.

4.4 $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

Tanım 4.4.1. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, birim hızlı α timelike eğrisinin involütü ve $\alpha^*(s)$ eğrisinin Frenet çatısı T^*, N^*, B^* olsun. Bu durumda

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad (4.4.1)$$

şeklindedir. Burada T^* , N^* ve B^* 'in yerine (3.1.3) ve (3.1.4) 'den karşılıkları yazılırsa β_4 eğrisi

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}[-(\sinh\theta + \cosh\theta)T + N + (\sinh\theta + \cosh\theta)B], \quad (4.4.2)$$

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\sinh\theta - \cosh\theta)T + N + (\sinh\theta - \cosh\theta)B] \quad (4.4.3)$$

olur.

Teorem 4.4.2. (4.4.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_4} , N_{β_4} ve B_{β_4} ile gösterilirse

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{(\kappa - \theta'(\sinh\theta + \cosh\theta))T - \|W\| N}{\sqrt{2|\theta'| \|W\|}} + \frac{(\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau)B}{\sqrt{2|\theta'| \|W\|}},$$

$$N_{\beta_4} = \frac{\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}},$$

$$B_4 = \varepsilon_{T_{\beta_4}} \varepsilon_{N_{\beta_4}} \left[\begin{aligned} & \frac{-(\|W\| \rho_3 + (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau)\rho_2)T}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \\ & + \frac{(\rho_1 \tau - \rho_3 \kappa - (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta))(\rho_1 + \rho_3))N}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \\ & + \frac{(\rho_2(\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \kappa) - \rho_1 \|W\|)B}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \end{aligned} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = (-(\theta'' + \theta'^2)(\sinh\theta + \cosh\theta) + \kappa' - \kappa \|W\|)\sqrt{|\theta'| \|W\|} \\ \quad + (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) + \kappa)(\sqrt{|\theta'| \|W\|})', \\ \rho_2 = (-\theta' \|W\| + \|W\|^2 - \|W\|')\sqrt{|\theta'| \|W\|} + \|W\|(\sqrt{|\theta'| \|W\|})', \\ \rho_3 = ((\theta'' + \theta'^2)(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau' + \tau \|W\|)\sqrt{|\theta'| \|W\|} \\ \quad - (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau)(\sqrt{|\theta'| \|W\|})' \end{array} \right.$$

$\varepsilon_{T_{\beta_4}} = \langle T_{\beta_4}, T_{\beta_4} \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_{N_{\beta_4}} = \langle N_{\beta_4}, N_{\beta_4} \rangle = \pm 1$ dir.

İspat: (4.4.2) bağıntısı ile verilen β_4 eğrisinin s_{β_4} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \beta_4' = T_{\beta_4} \frac{ds_{\beta_4}}{ds} &= \frac{(\kappa - \theta'(\sinh\theta + \cosh\theta))T - \|W\| N}{\sqrt{3}} \\ &+ \frac{(\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau)B}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

ve

$$\langle \beta_4', \beta_4' \rangle = \frac{2\theta' \|W\|}{3} \quad (4.4.5)$$

bulunur. Bu durumda $\theta' \|W\| > 0$ ve $\theta' \|W\| < 0$ koşulları altında β_4 eğrisinin kausal karakterlerine bağlı olarak iki durum vardır. $\exists \theta', \|W\| \in R$ için $\frac{2\theta' \|W\|}{3} \neq 1$ olduğundan β_4 eğrisi s'ye göre yay parametrelidir. Fakat s_{β_4} eğrisini yay parametrelidir kabul edeceğiz. Bu durumda (4.4.4) ifadesinin normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2|\theta'| \|W\|}{3}} \quad (4.4.6)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (4.4.4) ifadesinde yerine yazılırsa β_4 eğrisinin

teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{(\kappa - \theta'(sinh\theta + cosh\theta))T - \|W\| N}{\sqrt{2|\theta'| \|W\|}} + \frac{(\theta'(sinh\theta + cosh\theta) - \tau)B}{\sqrt{2|\theta'| \|W\|}} \quad (4.4.7)$$

şeklinde bulunur. (4.4.7) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = (-(\theta'' + \theta'^2)(sinh\theta + cosh\theta) + \kappa' - \kappa \|W\|)\sqrt{|\theta'| \|W\|} \\ \quad + (\theta'(sinh\theta + cosh\theta) + \kappa)(\sqrt{|\theta'| \|W\|})', \\ \rho_2 = (-\theta' \|W\| + \|W\|^2 - \|W\|')\sqrt{|\theta'| \|W\|} + \|W\| (\sqrt{|\theta'| \|W\|})', \\ \rho_3 = ((\theta'' + \theta'^2)(sinh\theta + cosh\theta) - \tau' + \tau \|W\|)\sqrt{|\theta'| \|W\|} \\ \quad - (\theta'(sinh\theta + cosh\theta) - \tau)(\sqrt{|\theta'| \|W\|})' \end{array} \right.$$

olmak üzere $T'_{\beta_4}(s)$ türevinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}(\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B)}{2(|\theta'| \|W\|)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4.8)$$

olur. β_4 eğrisinin aslinormali N_{β_4} ile gösterilirse (4.1.4) bağıntısından

$$N_{\beta_4} = \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|} \frac{\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}}, \quad (4.4.9)$$

elde edilir. $B_{\beta_4} = \varepsilon_{T_{\beta_4}} \varepsilon_{N_{\beta_4}}(T_{\beta_4} \times N_{\beta_4})$ olduğundan B_{β_4} binormal vektörünün evolüt

eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_4 = \varepsilon_{T_{\beta_4}} \varepsilon_{N_{\beta_4}} \left[\begin{aligned} & \frac{-(\|W\| \rho_3 + (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \tau)\rho_2)T}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \\ & + \frac{(\rho_1\tau - \rho_3\kappa - (\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta))(\rho_1 + \rho_3))N}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \\ & + \frac{(\rho_2(\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta) - \kappa) - \rho_1 \|W\|)B}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}} |\theta'| \|W\| (-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}} \end{aligned} \right] \quad (4.4.10)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.4.3. (4.4.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ_{β_4} ve τ_4 ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}}{2(|\theta'| \|W\|)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_4 = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_{N_{\beta_4}}(\tilde{\rho}_1\gamma_1 - \tilde{\rho}_2\gamma_2 - \tilde{\rho}_3\gamma_3)}{-\tilde{\rho}_1^2 + \tilde{\rho}_2^2 + \rho_3^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= (\sinh\theta + \cosh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta'(\|W\|' - \|W\|^2)) - \tau\theta' \|W\| \\ &\quad - \tau \|W\|' + \tau' \|W\|, \\ \tilde{\rho}_2 &= -\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta)(\kappa' - \tau' + \|W\|(\tau - \kappa)) + (\theta'' + \theta'^2) \|W\|, \\ &\quad - \kappa\tau' - \tau\kappa' + 2\kappa\tau \|W\|, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_3 = (\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta'' \|W\| + \theta'(\|W\|^2 - \|W\|')) + \kappa\theta' \|W\| \\ + \kappa \|W\|' + \kappa' \|W\| \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = -(\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3) + \kappa'' - \kappa' \|W\| \\ - 2\kappa \|W\|' - \theta' \kappa \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \gamma_2 = (\theta'' + (\theta')^2)(-\|W\| + \|W\| \|W\|' - \|W\|^3) - \|W\|'' \\ - \|W\| (2 \|W\|' - \theta'') - \theta' \|W\|', \\ \gamma_3 = -(\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3) - \tau'' + \tau' \|W\| \\ + 2\tau \|W\|' + \theta' \tau \|W\| - \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dır.

İspat: (4.4.2) bağıntısından κ_{β_4} eğriliği

$$\kappa_{\beta_4} = \|T'_{\beta_4}\| = \frac{\sqrt{3\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}}{2(|\theta'| \|W\|)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.4.11)$$

şeklinde bulunur. $\beta'_4, \beta''_4, \beta'''_4$ değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_1 = (\sinh\theta + \cosh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta'(\|W\|' - \|W\|^2)) - \tau\theta' \|W\| \\ - \tau \|W\|' + \tau' \|W\|, \end{array} \right. \quad (4.4.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_2 = -\theta'(\sinh\theta + \cosh\theta)(\kappa' - \tau' + \|W\|(\tau - \kappa)) + (\theta'' + \theta'^2)\|W\|, \\ \\ -\kappa\tau' - \tau\kappa' + 2\kappa\tau\|W\|, \\ \\ \tilde{\rho}_3 = (\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta''\|W\| + \theta'(\|W\|^2 - \|W\|')) + \kappa\theta'\|W\| \\ \\ +\kappa\|W\|' + \kappa'\|W\| \end{array} \right.$$

olmak üzere

$$\beta_4' \times \beta_4'' = \frac{\tilde{\rho}_1 T + \tilde{\rho}_2 N + \tilde{\rho}_3 B}{2}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = -(\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3) + \kappa'' - \kappa'\|W\| \\ \\ -2\kappa\|W\|' - \theta'\kappa\|W\| + \kappa\|W\|^2, \\ \\ \gamma_2 = (\theta'' + (\theta')^2)(-\|W\| + \|W\|\|W\|' - \|W\|^3) - \|W\|'' \\ \\ -\|W\|(2\|W\|' - \theta'') - \theta'\|W\|', \\ \\ \gamma_3 = -(\sinh\theta + \cosh\theta)(\theta''' + 3\theta'\theta'' + \theta'^3) - \tau'' + \tau'\|W\| \\ \\ +2\tau\|W\|' + \theta'\tau\|W\| - \tau\|W\|^2 \end{array} \right. \quad (4.4.13)$$

olmak üzere

$$\beta_4''' = \frac{\gamma_1 T + \gamma_2 N + \gamma_3 B}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Bu durumda β_4 eğrisinin burulması τ_{β_4} ile gösterilirse

$$\tau_{\beta_4} = \varepsilon_{N_{\beta_4}} \frac{\langle \beta_4' \times \beta_4'', \beta_4''' \rangle}{\|\beta_4' \times \beta_4''\|^2}, \quad (4.4.14)$$

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\tilde{\rho}_1\gamma_1 + \tilde{\rho}_2\gamma_2 + \tilde{\rho}_3\gamma_3)}{-\tilde{\rho}_1^2 + \tilde{\rho}_2^2 + \tilde{\rho}_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.4.4. (4.4.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_4} , N_{β_4} ve B_{β_4} ile gösterilirse

$$T_{\beta_4} = \frac{(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa)T - \|W\| N + (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau)B}{\sqrt{2\|W\|^2 - \theta' \|W\|}}$$

$$N_{\beta_4} = \frac{\vartheta_1 T + \vartheta_2 N + \vartheta_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2)}},$$

$$B_4 = \varepsilon_{T_{\beta_4}} \varepsilon_{N_{\beta_4}} \left[\begin{aligned} & - \frac{(\|W\| \vartheta_3 + (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau)\vartheta_2)T}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}}\|W\|^2 - \theta' \|W\|}(-\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2)} \\ & + \frac{(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta)(\vartheta_3 - \vartheta_1) + \vartheta_3\kappa + \vartheta_1\tau)N}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}}\|W\|^2 - \theta' \|W\|}(-\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2)} \\ & - \frac{(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa)\vartheta_2 + \|W\| \vartheta_1)B}{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_4}}\|W\|^2 - \theta' \|W\|}(-\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2)} \end{aligned} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1 = ((\theta'' - \theta'^2)(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa' - \kappa \|W\|) \sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \\ \quad - (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa) \left(\sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \right)', \\ \vartheta_2 = (\theta' \|W\| - \|W\|^2 - \|W\|') \sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \\ \quad + \|W\| \left(\sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \right)', \\ \vartheta_3 = ((\theta'' - (\theta')^2)(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau' + \tau \|W\|) \sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \\ \quad - (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau) \left(\sqrt{\|W\|^2 - \theta' \|W\|} \right)' \end{array} \right.$$

dir.

Sonuç 4.4.5. (4.4.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilikleri κ_{β_4} ve τ_{β_4} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\bar{\vartheta}_1^2 + \bar{\vartheta}_2^2 + \bar{\vartheta}_3^2)}}{2\|\|W\|^2 - \theta' \|W\|\|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_{N_{\beta_4}}(-\tilde{\vartheta}_1\Gamma_1 + \tilde{\vartheta}_2\Gamma_2 + \tilde{\vartheta}_3\Gamma_3)}{-\bar{\vartheta}_1^2 + \bar{\vartheta}_2^2 + \bar{\vartheta}_3^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\vartheta}_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta'(\|W\|^2 + \|W\|')) \\ \\ + \tau(\theta' \|W\| - 2\|W\|^2 - \|W\|') + \tau' \|W\|, \\ \\ \tilde{\vartheta}_2 = \theta'(\cosh\theta - \sinh\theta)(-\kappa' - \tau' + \|W\|(\kappa + \tau)) \\ \\ + (\theta'' - \theta'^2) \|W\| - \kappa\tau' + \tau\kappa', \\ \\ \tilde{\vartheta}_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(-\theta'' \|W\| + \theta'(\|W\|^2 + \|W\|')) \\ \\ + \kappa(-\theta' \|W\| + \|W\|' + 2\|W\|^2) - \kappa' \|W\| \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta''' - 3\theta'\theta'' - \theta'^3) + \kappa'' - \kappa' \|W\| \\ \\ - 2\kappa \|W\|' + \theta' \kappa \|W\| - \kappa \|W\|^2, \\ \\ \Gamma_2 = (\theta'' - \theta'^2)(\|W\| - \|W\| \|W\|' + \|W\|^3) + \theta' \|W\|' \\ \\ + \|W\|(\theta'' - 2\|W\|') + \|W\|'', \\ \\ \Gamma_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)(\theta''' - 3\theta'\theta'' - \theta'^3) - \tau'' + \tau' \|W\| \\ \\ + 2\tau \|W\|' - \theta' \tau \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{array} \right.$$

dır.

Sonuç 4.4.6. (4.4.2) ve (4.4.3) bağıntıları şeklinde verilen Smarandache eğrileri spacelike veya timelike eğrilerdir.

4.5 N^*C^* Smarandache Eğrisi

Tanım 4.5.1. $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin involütü olsun. Bu takdirde konum vektörü involüt eğrisinin N^* aslinormali ve C^* Darboux vektörü tarafından oluşturulan null olmayan regüler N^*C^* Smarandache eğrisi

$$\beta_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad (4.5.1)$$

şeklindedir. Burada (3.1.3), (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.15) 'den karşılıkları yazılırsa β_5 eğrisi

$$a = \frac{|\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}|}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}} \quad , \quad b = \frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}}$$

olmak üzere

$$\beta_5(s) = \frac{(-\cosh\theta + a\sinh\theta)T - bN + (\sinh\theta - a\cosh\theta)B}{\sqrt{2}} \quad (4.5.2)$$

ve

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}}{\sqrt{|\theta'^2 - \tau^2 + \kappa^2|}} \quad , \quad \bar{b} = \frac{\theta'}{\sqrt{|\theta'^2 - \tau^2 + \kappa^2|}}$$

olmak üzere

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sinh\theta + \bar{a}\cosh\theta)T + \bar{b}N - (\bar{a}\sinh\theta + \cosh\theta)]B \quad (4.5.3)$$

olur.

Teorem 4.5.2. (4.5.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_5} , N_{β_5} ve B_{β_5} ile gösterilirse

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{((a' - \theta')\sinh\theta + a\theta'\cosh\theta - b\kappa)T}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\|W\| + b')N}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}} \\
& + \frac{((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau)B}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}},
\end{aligned}$$

$$N_{\beta_5} = \frac{\bar{\eta}_1 T + \bar{\eta}_2 N + \bar{\eta}_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)}},$$

$$B_{\beta_5} = \left[\begin{aligned} & \frac{-\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} ((b' + \|W\|)\bar{\eta}_3 + ((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau)\bar{\eta}_2)T}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} |(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)} \\ & - \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} (((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau)\bar{\eta}_1 + ((\theta' - a')\sinh\theta - a\theta'\cosh\theta + b\kappa)\bar{\eta}_3)N}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} |(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)} \\ & - \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} (((a' - \theta')\sinh\theta + a\theta'\cosh\theta - b\kappa)\bar{\eta}_2 + (b' + \|W\|)\bar{\eta}_1)B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} |(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)}, \end{aligned} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = ((a'' + a\theta'^2 - \theta'')sinh\theta + (2a'\theta' + a\theta'' - \theta'^2)cosh\theta - 2b'\kappa - b\kappa' - \kappa \|W\|) \\ \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\ - ((a' - \theta')sinh\theta + a\theta' cosh\theta - b\kappa) \\ \cdot \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \\ \eta_2 = (a\theta' \|W\| - b \|W\|^2 - b'' + \|W\|') \\ \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\ + (b' + \|W\|) \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \\ \eta_3 = ((\theta'' - a'' - a(\theta')^2)cosh\theta + (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'')sinh\theta + 2b'\tau + b\tau' + \tau \|W\|) \\ \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\ - ((\theta' - a')cosh\theta - a\theta' sinh\theta + b\tau) \\ \cdot \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{T_{\beta_5}} = \langle T_{\beta_5}, T_{\beta_5} \rangle = \pm 1 \text{ ve } \varepsilon_{N_{\beta_5}} = \langle N_{\beta_5}, N_{\beta_5} \rangle = \pm 1 \text{ dir.}$$

İspat: Bu eğrinin s_{β_5} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \beta_5' = T_{\beta_5} \frac{ds_{\beta_5}}{ds} &= \frac{((- \theta' + a')sinh\theta + a\theta' cosh\theta - b\kappa)T - (\|W\| + b')N}{\sqrt{2}} \\ &+ \frac{((\theta' - a')cosh\theta - a\theta' sinh\theta + b\tau)B}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

ve

$$\langle \beta'_5, \beta'_5 \rangle = \frac{(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2}{2} \quad (4.5.5)$$

bulunur. Bu durumda $\langle \beta'_5, \beta'_5 \rangle > 0$ ve $\langle \beta'_5, \beta'_5 \rangle < 0$ koşulları altında β_5 eğrisinin kausal karakterlerine bağlı olarak iki durum vardır. $\exists a, b, \theta', a', b', \|W\| \in R$ için $\langle \beta'_1, \beta'_1 \rangle \neq 1$ olduğundan β_5 eğrisi s'ye göre yay parametrelili değildir. Fakat β_5 eğrisini s_{β_5} 'e göre yay parametrelili kabul edeceğiz. (4.5.4) ifadesinin normu alınır

$$\frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}}{\sqrt{2}} \quad (4.5.6)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (4.5.4) ifadesinde yerine yazılırsa β_5 eğrisinin, evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} T_{\beta_5}(s) &= \frac{(a\theta' \cosh\theta - (\theta' - a') \sinh\theta - b\kappa)T}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}} \\ &\quad - \frac{(\|W\| + b')N}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}} \\ &\quad + \frac{((\theta' - a') \cosh\theta - a\theta' \sinh\theta + b\tau)B}{\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|}} \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

şeklinde bulunur. (4.5.7) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\left\{ \begin{aligned}
&\eta_1 = ((a'' + a\theta'^2 - \theta'')\sinh\theta + (2a'\theta' + a\theta'' - \theta'^2)\cosh\theta - 2b'\kappa - b\kappa' - \kappa\|W\|) \\
&\quad \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\
&\quad - ((a' - \theta')\sinh\theta + a\theta'\cosh\theta - b\kappa) \\
&\quad \cdot \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \\
&\eta_2 = (a\theta'\|W\| - b\|W\|^2 - b'' + \|W\|') \\
&\quad \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\
&\quad + (b' + \|W\|) \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \\
\end{aligned} \right. \tag{4.5.8}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
&\eta_3 = ((\theta'' - a'' - a(\theta')^2)\cosh\theta + (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'')\sinh\theta + 2b'\tau + b\tau' + \tau\|W\|) \\
&\quad \cdot \sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \\
&\quad - ((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau) \\
&\quad \cdot \left(\sqrt{|(\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|} \right)', \\
\end{aligned} \right.$$

olmak üzere $T'_{\beta_5}(s)$ türevinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}(\eta_1 T + \eta_2 N + \eta_3 B)}{\left| (\theta' - a')^2 - b^2\|W\|^2 + a\theta'(2b\|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2 \right|^{\frac{3}{2}}} \tag{4.5.9}$$

şeklinde bulunur. (4.5.9) bağıntısı kullanılarak β_5 eğrisinin aslinormali N_{β_5} ile göste-

rilirse

$$N_{\beta_5} = \frac{T'_{\beta_5}}{\|T'_{\beta_1}\|} = \frac{(\eta_1 T + \eta_2 N + \eta_3 B)}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)}}, \quad (4.5.10)$$

şeklindedir. $B_{\beta_5} = \varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} (T_{\beta_5} \times N_{\beta_5})$ olduğundan β_5 eğrisinin binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_5} = \left[\begin{array}{l} \frac{-\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} ((b' + \|W\|)\bar{\eta}_3 + ((\theta' - a') \cosh \theta - a\theta' \sinh \theta + b\tau)\bar{\eta}_2)T}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} \left| (\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta' (2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2 \right| (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)}} \\ \\ \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} (((\theta' - a') \cosh \theta - a\theta' \sinh \theta + b\tau)\bar{\eta}_1 + ((\theta' - a') \sinh \theta - a\theta' \cosh \theta + b\kappa)\bar{\eta}_3)N}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} \left| (\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta' (2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2 \right| (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)}} \\ \\ \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} (((a' - \theta') \sinh \theta + a\theta' \cosh \theta - b\kappa)\bar{\eta}_2 + (b' + \|W\|)\bar{\eta}_1)B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}} \left| (\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta' (2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2 \right| (-\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2)}}, \end{array} \right] \quad (4.5.11)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.5.3. (4.5.2) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $\kappa_{\beta_5}, \tau_{\beta_5}$ ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)}}{\left| (\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta' (2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2 \right|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\tilde{\eta}_4\epsilon_1 + \tilde{\eta}_5\epsilon_2 + \tilde{\eta}_6\epsilon_3)}{-\tilde{\eta}_4^2 + \tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\eta}_6^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_1 = (a'' + a\theta'^2 - \theta'')\sinh\theta + (a\theta'' + 2a'\theta' - \theta'^2)\cosh\theta \\ \\ -2b'\kappa - b\kappa' + \kappa \|W\|, \\ \\ \tilde{\eta}_2 = a\theta' \|W\| + b \|W\|^2 - b'' - \|W\|', \\ \\ \tilde{\eta}_3 = (\theta'' - a'' - a\theta'^2)\cosh\theta + (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'')\sinh\theta \\ \\ +2b'\tau + b\tau' - \tau \|W\|, \\ \\ \tilde{\eta}_4 = -\tilde{\eta}_3(b' + \|W\|) - \tilde{\eta}_2((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau), \\ \\ \tilde{\eta}_5 = \tilde{\eta}_3(a\theta'\cosh\theta + (a' - \theta')\sinh\theta - b\kappa) \\ \\ -\tilde{\eta}_1((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau), \\ \\ \tilde{\eta}_6 = -\tilde{\eta}_3(b' + \|W\|) - \tilde{\eta}_2((a' - \theta')\sinh\theta + a\theta'\cosh\theta - b\kappa), \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \tilde{\eta}_1' + a\theta'\kappa \|W\| + b\kappa \|W\|^2 - b''\kappa - \kappa \|W\|', \\ \\ \epsilon_2 = \tilde{\eta}_2' - (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'') \|W\| - 2b' \|W\|^2 + b(\tau\tau' - \kappa\kappa') + \|W\|^3, \\ \\ \epsilon_3 = \tilde{\eta}_3' - a\theta'\tau \|W\| - b\tau \|W\|^2 + b''\tau + \tau \|W\|' \end{array} \right.$$

dir.

İspat: (4.5.2) bağıntısından κ_{β_5} eğriliği

$$\kappa_{\beta_5} = \|T'_{\beta_5}\| = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)}}{|(\theta' - a')^2 - b^2 \|W\|^2 + a\theta'(2b \|W\| - a\theta') + (\|W\| + b')^2|^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde bulunur. Burada $\beta'_5, \beta''_5, \beta'''_5$ değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_1 = (a'' + a\theta'^2 - \theta'')\sinh\theta + (a\theta'' + 2a'\theta' - \theta'^2)\cosh\theta \\ \\ -2b'\kappa - b\kappa' + \kappa \|W\|, \\ \tilde{\eta}_2 = a\theta' \|W\| + b \|W\|^2 - b'' - \|W\|', \\ \tilde{\eta}_3 = (\theta'' - a'' - a\theta'^2)\cosh\theta + (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'')\sinh\theta \\ \\ +2b'\tau + b\tau' - \tau \|W\|, \\ \tilde{\eta}_4 = -\tilde{\eta}_3(b' + \|W\|) - \tilde{\eta}_2((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau), \\ \tilde{\eta}_5 = \tilde{\eta}_3(a\theta'\cosh\theta + (a' - \theta')\sinh\theta - b\kappa) \\ \\ -\tilde{\eta}_1((\theta' - a')\cosh\theta - a\theta'\sinh\theta + b\tau), \\ \tilde{\eta}_6 = -\tilde{\eta}_3(b' + \|W\|) - \tilde{\eta}_2((a' - \theta')\sinh\theta + a\theta'\cosh\theta - b\kappa), \end{array} \right. \quad (4.5.12)$$

olmak üzere

$$\beta'_5 \times \beta''_5 = \frac{\tilde{\eta}_4 T + \tilde{\eta}_5 N + \tilde{\eta}_6 B}{2}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \tilde{\eta}_1' + a\theta' \kappa \|W\| + b\kappa \|W\|^2 - b''\kappa - \kappa \|W\|' , \\ \epsilon_2 = \tilde{\eta}_2' - (\theta'^2 - 2a'\theta' - a\theta'') \|W\| - 2b' \|W\|^2 + b(\tau\tau' - \kappa\kappa') + \|W\|^3 , \\ \epsilon_3 = \tilde{\eta}_3' - a\theta'\tau \|W\| - b\tau \|W\|^2 + b''\tau + \tau \|W\|' \end{array} \right. \quad (4.5.13)$$

olmak üzere

$$\beta_5''' = \frac{\epsilon_1 T + \epsilon_2 N + \epsilon_3 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda β_5 eğrisinin burulması evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_5} = \varepsilon_{N_{\beta_5}} \frac{\langle \beta_5' \times \beta_5'', \beta_5''' \rangle}{\|\beta_5' \times \beta_5''\|^2} \quad (4.5.14)$$

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\tilde{\eta}_4\epsilon_1 + \tilde{\eta}_5\epsilon_2 + \tilde{\eta}_6\epsilon_3)}{-\tilde{\eta}_4^2 + \tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\eta}_6^2}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.5.4. (4.5.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{β_5} , N_{β_5} ve B_{β_5} ile gösterilirse

$$T_{\beta_5} = \frac{(\bar{a}'\theta' \sinh\theta + (\bar{a}' + \theta') \cosh\theta + \bar{b}\kappa)T}{\sqrt{|\bar{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \bar{a}')^2 + \bar{a}\theta'(2\bar{b}\|W\| + \bar{a}\theta') + (\bar{b}' - \|W\|)^2|}}$$

$$+ \frac{(\vec{b}' - \|W\|)N}{\sqrt{\left| \vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2 \right|}}$$

$$N_{\beta_5} = \frac{\varkappa_1 T + \varkappa_2 N + \varkappa_3 B}{\sqrt{\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2)}},$$

$$B_{\beta_5} = \left[\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} ((\vec{b}' - \|W\|)\varkappa_3 + (\vec{a}\theta' \cosh\theta + (\theta' + \vec{a}') \sinh\theta + \vec{b}\tau)\varkappa_2)T}{\sqrt{\left| \varepsilon_{N_{\beta_5}}(\vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2)(-\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2) \right|}} \\ & + \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} ((\vec{a}\theta' \cosh\theta + (\theta' + \vec{a}') \sinh\theta + \vec{b}\tau)\varkappa_1 + (\vec{a}\theta' \sinh\theta + (\theta' + \vec{a}') \cosh\theta + \vec{b}\kappa)\varkappa_3)N}{\sqrt{\left| \varepsilon_{N_{\beta_5}}(\vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2)(-\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2) \right|}} \\ & - \frac{\varepsilon_{T_{\beta_5}} \varepsilon_{N_{\beta_5}} ((\vec{a}\theta' \sinh\theta + (\vec{a}' + \theta') \cosh\theta + \vec{b}\kappa)\varkappa_2 - (\vec{b}' - \|W\|)\varkappa_1)B}{\sqrt{\left| \varepsilon_{N_{\beta_5}}(\vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2)(-\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2) \right|}} \end{aligned} \right]$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{aligned} & \varkappa_1 = ((\theta'' + \vec{a}'' + \vec{a}\theta'^2) \cosh\theta + (\vec{a}\theta'' + 2\vec{a}'\theta' + \theta'^2) \sinh\theta + 2\vec{b}'\kappa + b\kappa' - \kappa\|W\| \\ & \cdot \sqrt{\left| \vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2 \right|} \\ & - (\vec{a}\theta' \sinh\theta + (\theta' + \vec{a}') \cosh\theta + \vec{b}\kappa) \\ & \cdot \left(\sqrt{\left| \vec{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \vec{a}')^2 + \vec{a}\theta'(2\vec{b}\|W\| + \vec{a}\theta') + (\vec{b}' - \|W\|)^2 \right|} \right)', \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varkappa_2 = (-\bar{a}\theta' \|W\| - \bar{b} \|W\|^2 + \bar{b}'' - \|W\|') \\ \cdot \sqrt{|\bar{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \bar{a}')^2 + \bar{a}\theta'(2\bar{b} \|W\| + \bar{a}\theta') + (\bar{b}' - \|W\|)^2|} \\ - (b' - \|W\|) \\ \cdot \left(\sqrt{|\bar{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \bar{a}')^2 + \bar{a}\theta'(2\bar{b} \|W\| + \bar{a}\theta') + (\bar{b}' - \|W\|)^2(\bar{b}' - \|W\|)} \right)', \\ \varkappa_3 = -(\theta'' + \bar{a}'' + \bar{a}\theta'^2) \sinh\theta - (\bar{a}\theta'' + \theta'^2 + 2\bar{a}'\theta') \cosh\theta - 2\bar{b}'\tau - \bar{b}\tau' + \tau \|W\| \\ \cdot \sqrt{|\bar{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \bar{a}')^2 + \bar{a}\theta'(2\bar{b} \|W\| + \bar{a}\theta') + (\bar{b}' - \|W\|)^2|} \end{array} \right.$$

dır.

Sonuç 4.5.5. (4.5.3) bağıntısı şeklinde verilen Smarandache eğrisinin eğrilikleri κ_{β_5} ve τ_{β_5} ile gösterilirse

$$\kappa_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2)}}{\left| \bar{b}^2 \|W\|^2 - (\theta' + \bar{a}')^2 + \bar{a}\theta'(2\bar{b} \|W\| + \bar{a}\theta') + (\bar{b}' - \|W\|)^2 \right|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_5 = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{N_{\beta_5}}(-\tilde{\varkappa}_4\varepsilon_1 + \tilde{\varkappa}_5\varepsilon_2 + \tilde{\varkappa}_6\varepsilon_3)}}{-\tilde{\varkappa}_4^2 + \tilde{\varkappa}_5^2 + \tilde{\varkappa}_6^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varkappa}_1 = (\bar{a}'' + \bar{a}\theta'^2 + \theta'') \cosh\theta + (2\bar{a}'\theta' + \bar{a}\theta'' + \theta'^2) \sinh\theta + 2\bar{b}'\kappa + \bar{b}\kappa' - \kappa \|W\|, \\ \tilde{\varkappa}_2 = -\bar{a}\theta' \|W\| - \bar{b} \|W\|^2 + \bar{b}'' - \|W\|', \\ \tilde{\varkappa}_3 = -(\theta'' + \bar{a}'' + \bar{a}\theta'^2) \sinh\theta - (\bar{a}\theta'' + \theta'^2 + 2\bar{a}'\theta') \cosh\theta - 2\bar{b}'\tau - \bar{b}\tau' + \tau \|W\|, \\ \tilde{\varkappa}_4 = \tilde{\varkappa}_3(\bar{b}' - \|W\|) + \tilde{\varkappa}_2(\bar{a}\theta' \cosh\theta + (\theta' + \bar{a}') \sinh\theta + \bar{b}\tau), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varkappa}_5 = \tilde{\varkappa}_3((\bar{a}' + \theta')\cosh\theta + \bar{a}\theta' \sinh\theta + \bar{b}\kappa) + \tilde{\kappa}_1(\bar{a}\theta' \cosh\theta + (\theta' + \bar{a}')\sinh\theta + \bar{b}\tau), \\ \tilde{\varkappa}_6 = \tilde{\varkappa}_1(\bar{b}' - \|W\|) - \tilde{\varkappa}_2(\bar{a}\theta' \sinh\theta + (\theta' + \bar{a}')\cosh\theta + \bar{b}\kappa) \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \tilde{\varkappa}_1' - \bar{a}\theta' \kappa \|W\| - \bar{b}\kappa \|W\|^2 + \bar{b}'' \kappa - \kappa \|W\|', \\ \varepsilon_2 = \tilde{\varkappa}_2' - (\bar{a}\theta'' + \theta'^2 + 2\bar{a}'\theta') \|W\| + 2\bar{b}' \|W\|^2 + \bar{b}(\kappa\kappa' - \tau\tau') + \|W\|^3, \\ \varepsilon_3 = \tilde{\varkappa}_3' + \bar{a}\theta' \tau \|W\| + \bar{b}\tau \|W\|^2 - \tau\bar{b}'' + \tau \|W\|' \end{array} \right.$$

dır.

Sonuç 4.5.6. (4.5.2) ve (4.5.3) bağıntıları şeklinde verilen Smarandache eğrileri spacelike veya timelike eğrilerdir.

Örnek 4.1 $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ eğrisi timelike bir evolüt eğrisidir. Bu eğrinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$T(s) = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} s, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cos s \right),$$

$$N(s) = (0, -\cos s, -\sin s),$$

$$B(s) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cos s \right),$$

$$C(s) = (-1, 0, 0),$$

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \quad \tau(s) = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu eğriye ait involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^* = \alpha(s) + (c - s)T(s)$$

şeklinde olduğundan $\alpha(s)$ ve $T(s)$ değerleri yerine yazılırsa involüt eğrisinin denklemi

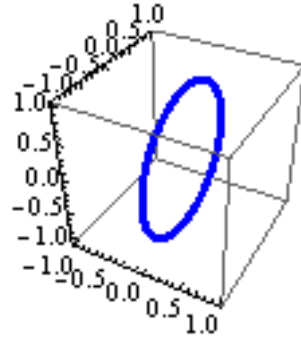
$$\alpha^* = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} s + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} |c - s|, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} |c - s| \sin s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} |c - s| \cos s \right)$$

olur. $\alpha^*(s)$ involüt eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve burulması

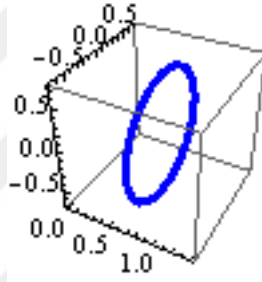
$$T^*(s) = (0, -\cos s, -\sin s), \quad N^*(s) = (0, \sin s, -\cos s)$$

$$B^*(s) = (1, 0, 0), \quad C^*(s) = (1, 0, 0), \quad \kappa^*(s) = 1, \quad \tau^*(s) = 0$$

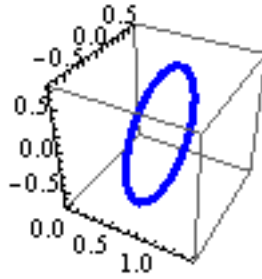
şeklinde bulunur. İnvolut eğrisine ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



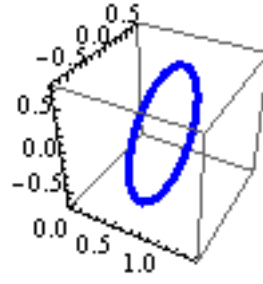
Şekil 4.1 α^* involüt eğrisine ait T^*N^* - Smarandache eğrisi



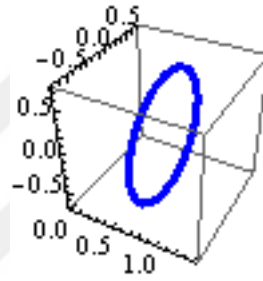
Şekil 4.2 α^* involüt eğrisine ait N^*B^* - Smarandache eğrisi



Şekil 4.3 α^* involüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi



Şekil 4.4 α^* involüt eğrisine ait T^*B^* - Smarandache eğrisi



Şekil 4.5 α^* involüt eğrisine ait N^*C^* - Smarandache eğrisi

Örnek 4.2 $\gamma(s) = \left(2\sinh\frac{s}{\sqrt{3}}, 2\cosh\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ eğrisi timelike bir evolüt eğrisidir. Bu eğrinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$T(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$N(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right),$$

$$B(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

$$C(s) = (0, 0, -1),$$

$$\kappa(s) = \frac{2}{3}, \quad \tau(s) = \frac{1}{3}$$

şeklinde bulunur. Bu eğriye ait involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^* = \alpha(s) + (c - s)T(s)$$

şeklinde olduğundan $\alpha(s)$ ve $T(s)$ değerleri yerine yazılırsa involüt eğrisinin denklemi

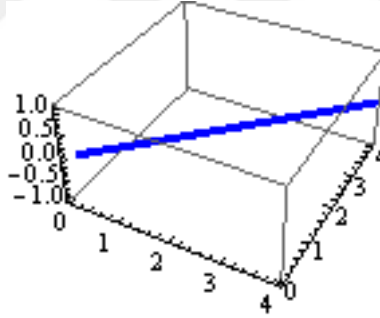
$$\gamma^*(s) = \left(2\sinh\frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}|c-s|\cosh\frac{s}{\sqrt{3}}, 2\cosh\frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}|c-s|\sinh\frac{s}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}|c-s| \right)$$

olur. γ^* involüt eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve burulması

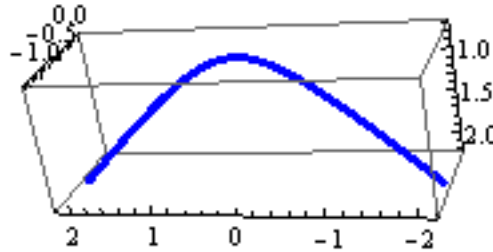
$$T^*(s) = \left(\sinh\frac{s}{\sqrt{3}}, \cosh\frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right), \quad N^*(s) = \left(\cosh\frac{s}{\sqrt{3}}, \sinh\frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

$$B^*(s) = (0, 0, -1), \quad C^*(s) = (0, 0, 1), \quad \kappa^*(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ve } \tau^*(s) = 0$$

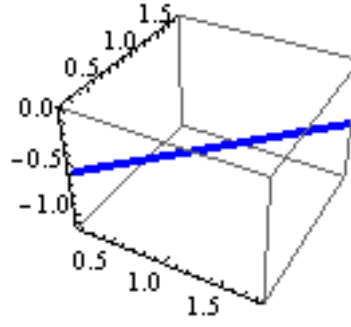
şeklinde bulunur. İnvölüt eğrisine ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



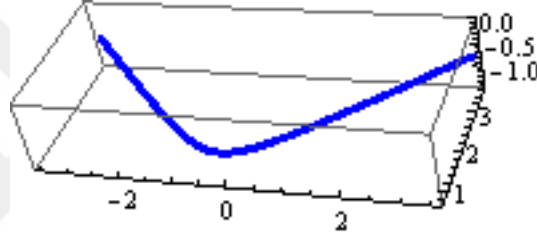
Şekil 4.6 γ^* involüt eğrisine ait T^*N^* - Smarandache eğrisi



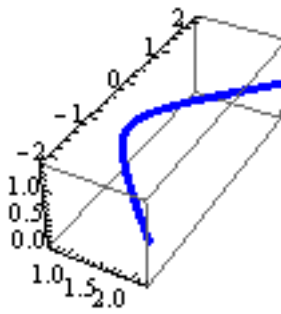
Şekil 4.7 γ^* involüt eğrisine ait N^*B^* - Smarandache eğrisi



Şekil 4.8 γ^* involüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi



Şekil 4.9 γ^* involüt eğrisine ait T^*B^* - Smarandache eğrisi



Şekil 4.10 γ^* involüt eğrisine ait N^*C^* - Smarandache eğrisi

5 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında $\alpha^* : I \longrightarrow R_1^3$ eğrisi $\alpha : I \longrightarrow R_1^3$ timelike eğrisinin bir involütü olarak alındığında konum vektörü, α^* involüt eğrisinin Frenet vektörleri tarafından çizilen null olmayan regüler Smarandache eğrileri

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{ Smararandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{ Smararandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{ Smararandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{ Smararandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{ Smararandache eğrisi}$$

şeklinde verilerek α^* eğrisinin $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet vektörleri ve C^* birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları α evolüt eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edilmiştir. Benzer şekilde bu çalışma 3- boyutlu Minkowski uzayında (α, α^*) Bertrand eğri çifti ve (α, α^*) Mannheim eğri çifti içinde yapılabilir.

6 KAYNAKLAR

- Bektaş, Ö. and Yüce, S. (2016). Special smarandache curves in R_1^3 . *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, **65(2)**: 143-160.
- Bilici, M. and Çalışkan, M. (2002). Some characterizations for the pair of involute -evolute curves in Euclidean space. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, **21E(2)**: 289-294.
- Bilici, M. and Çalışkan, M. (2009). On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space. *International Mathematical Forum*, **4(31)**: 1497 - 1509.
- Bilici, M. and Çalışkan, M. (2011). Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-space. *International Journal of contemporary mathematical sciences*, **6(41)**: 2019 - 2030.
- Bükcü, B. and Karacan, M.K. (2007). On the involute and evolute curves of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space. *International Journal of Mathematical Sciences*, **2(5)**: 221-232.
- Duggal K, L. and Bejancu A. (1996). Lightlike submanifolds of semi riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers.
- Fenchel, W. (1951). On the differential geometry of closed space Curves . *Bulletin of American Mathematical Society*, **57**: 44 - 54.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). Differansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. **(7)**: Malatya.

- Huygens, C. (1673). Horologium oscillatorium. In *Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (Paris AF Muguet)*; Iowa State University Press: Ames, IA, USA, 1986.
- Kalkan Ö., Öztürk H. ve Zeybek D. (2018) . On T^*N^* Smarandache curves of involute curve according to Frenet frame in Minkowski 3 -space, 16th International Geometry Sym July 4-7, Manisa Celal Bayar University, Manisa, Turkey.
- Kühnel W. (2006). Differential Geometry: Curves-Surfaces -Manifolds. Providence RI, USA, The American Mathematical Society.
- Lopez, R. (2014). Differential geometry of curves and surface in Lorentz- Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, **7(1)**:, 44-107.
- Millman, R.S. and Parker, G.D. (1977). Elements of Differential Geometry. Prentice -Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265.
- O'Neill B. (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London.
- O'Neill B. (1996). Elementary Differential Geometry. Academic Press Inc. New York, 411p.
- Önder M. and Uğurlu H.H. (2013) . Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces, *Ainshams Engineering Journal*, **4**: , 502-513.
- Ratcliffe, J. G. (1994). Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736p.

- Sabuncuoğlu, A. (2006) . Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Sivas S. (2014). Involute-Evolute Eğrilerine ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üni Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Şenyurt, S. ve Sivas, S. (2013) . Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama, *Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg.*, **3**: Sayı:1, 46 - 60.
- Şenyurt, S.and Çalışkan A. (2015) . N^*C^* Smarandache Curves of Mannheim Curve Couple According to Frenet Frame. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **1**: 1-13.
- Şenyurt, S., Çalışkan A. and Çelik Ü. (2016) . N^*C^* Smarandache curves of bert rand curves pair according to Frenet frame. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **1**: 1-7.
- Şenyurt, S., Altun Y. and Cevahir C. (2019) . N^*C^* Smarandache curves according to Sabban frame relonging to Mannheim curves pair. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statics*, **68(1)**: 500-513.
- Şenyurt, S., Altun Y., and Cevahir C. (2020). N^*C^* Smarandache curves of spherical indicatrix of the Bertrand curves pair. *Boletim da Sociedade Paranaensed Mathematics*, **38(2)**: 27-39.
- Thorpe, J.A. (1979) . Elemantary Topics In Differential Geometry. Springer- Verlag, New York, Heidelberg-Berlin (245p) .

- Turgut A. (1995) . 3 -Boyutlu Minkowski Uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler. Doktora Tezi , Gazi Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, (96s.)
- Turgut, M. and Yılmaz S. (2008) . Smarandache curves in Minkowski spacetime, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **3**: 51-55.
- Uğurlu H.H. (1997) . On the Geometry of timelike surfaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1.* , **46**: 211-223.
- Woestijne, V.D.I. (1990). Minimal Surfaces of the 3-Dimensional Minkowski Space, *Proc. Congres Geometrie Differentielle Et Applications, Avignon (30 Mays 1988)*. *Word Scientific Publishing Singapore*, 344-369.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Damla ZEYBEK

Doğum Yeri ve Tarihi : Afyon, 19/04/1993

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon / e-posta) : damlazeybek433@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mehmet Çakmak Anadolu Lisesi, (2007-2011)

Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, (2011-2016)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : İstanbul Kampüs Ortaokulu (2018 - ...)

Yayınları (SCI ve diğer)

- 1) Kalkan, B. Ö., Öztürk, H., and Zeybek, D. (2019). N^*C^* Smarandache Curves of İnvolute- Evolute Curves According to Frenet Frame in R_1^3 . *Academic Journal of Science*, **08(02)**:, 253-266 .
- 2) Kalkan, B. Ö., Öztürk, H., and Zeybek, D. (2019). 3 Boyutlu Minkowski uzayında İnvolute - Evolute Eğrilerinin $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrileri, *AKU Journal of Science and Engineering*, **19**:, 71-78 .
- 3) Kalkan, B. Ö., Zeybek, D. (2019). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında İnvolute ve Evolute Eğrilerinin T^*B^* ve N^*B^* Smarandache Eğrileri, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, **8(2)**:, 472-483.