



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY  
PROBLEMLERİNİN NÜMERİK  
İNTEGRASYONUNDA ADIM GENİŞLİĞİ  
STRATEJİLERİ**

**Andak Niyaz HOŞDAVRAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Ağustos - 2019**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Andak Niyaz HOŞDAVRAN tarafından hazırlanan “İkinci Mertebeden Cauchy Problemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Stratejileri” adlı tez çalışması 23/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Ali Osman ÇIBIKDİKEN

#### Danışman

Prof. Dr. Kemâl AYDIN

#### Üye

Prof. Dr. Haydar BULGAK

### İmza

.....  
A. O. ÇIBIKDİKEN

.....  
K. AYDIN

.....  
A. Bulgak

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Andak Niyaz HOŞDAVRAN

23.08.2019



## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİNİN NÜMERİK İNTEGRASYONUNDA ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ

Andak Niyaz HOŞDAVRAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kemâl AYDIN

2019, viii+40 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Kemâl AYDIN

Prof. Dr. Haydar BULGAK

Dr. Öğr. Üyesi Ali Osman ÇIBIKDİKEN

Bu çalışmada ikinci mertebeden Cauchy problemi ele alınmıştır. Çelik Kızılkın (2004) deki tezinden esinlenerek, Picard teoremi tabanlı adım genişliği ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejileri geliştirilmiştir. İkinci mertebeden Cauchy problemi için Chang ve Gnepp (1984) de verilen Runge - Kutta - Nyström yönteminin hata analizini yapılmıştır. Bu hata analizini dikkate alarak ikinci mertebeden Cauchy probleminin sayısal integrasyonu için adım genişliği stratejisi geliştirdik. Ayrıca Picard teoremini temel alan adım genişliği stratejisini ikinci mertebeden Cauchy problemine de uyguladık. Sonuçlar sayısal örnekler ile desteklenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hata Analizi, Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi, Picard Teoremi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi, Runge – Kutta – Nyström Metodu

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**STEP SIZE STRATEGIES IN NUMERIC INTEGRATION OF SECOND ORDER  
CAUCHY PROBLEMS**

**Andak Niyaz HOŞDAVRAN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY**

**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Prof. Dr. Kemâl AYDIN**

**2019, viii+40 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Kemâl AYDIN**

**Prof.Dr. Haydar BULGAK**

**Asst. Prof. Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN**

In this study, second order Cauchy problem is discussed. Çelik Kızılkın (2004) inspired the Picard theorem-based step size and error analysis-based step size strategies. For the second order Cauchy problem, the error analysis of the Runge - Kutta - Nyström method given in Chang and Gnepp (1984) was performed. Taking this error analysis into account, we developed a step size strategy for the numerical integration of the second order Cauchy problem. We also applied the step size strategy based on the Picard theorem to the second order Cauchy problem. The results are supported by numerical examples.

**Keywords:** Error Analysis, Error Analysis Based Stepsize Selection, Picard Theorem Based Stepsize Selection, Runge - Kutta - Nyström Method

## ÖNSÖZ

İkinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda adım genişliği stratejileri üzerine yaptığım bu çalışma sırasında başta hayatım boyunca her anlamda desteklerini esirgemeyen ailem ve eşim olmak üzere, lisansüstü eğitimim boyunca bana karşı daima olumlu tutumu ve bilimsel bir çalışma yapılırken dikkat edilmesi gereken temel hususlar konusunda vermiş olduğu bilgiler, gerek mesai saatleri içerisinde gerekse mesai saatleri dışarısında sürekli ilgi ve alakasından dolayı Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı ve öğretim üyesi Prof. Dr. Kemâl Aydın'a ve çalışma boyunca tecrübesinden yararlandığım Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN'a en samimi şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Andak Niyaz HOŞDAVRAN  
KONYA – 2019

## İÇİNDEKİLER

|   |      |
|---|------|
| ÖZET .....  | iv   |
| ABSTRACT .....  | v    |
| ÖNSÖZ.....  | vi   |
| İÇİNDEKİLER.....  | vii  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....  | viii |
| 1. GİRİŞ.....   | 1    |
| 1.1. Literatür Özeti.....   | 1    |
| 1.2. Problemin Tanımı .....   | 5    |
| 1.3. Tezin Yapısı .....   | 5    |
| 2. BİRİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİ İÇİN ADIM GENİŞLİĞİ SEÇİMİ ..... | 6    |
| 2.1. Lipschitz Şartı .....  | 6    |
| 2.2. Picard Teoremi.....  | 7    |
| 2.3. Lokal Hata .....   | 7    |
| 2.4. Adım Genişliği Stratejileri .....                                    | 7    |
| 3. İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİ İÇİN ADIM GENİŞLİĞİ SEÇİMİ .....  | 12   |
| 3.1. Lipschitz Şartı .....  | 12   |
| 3.2. Lokal Hata .....   | 13   |
| 3.3. Runge – Kutta – Nyström Metodu ve Lokal Hata Analizi .....           | 14   |
| 3.4. Picard Teoremi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi.....                    | 17   |
| 3.5. Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi.....                      | 22   |
| 4. NÜMERİK ÖRNEKLER .....   | 28   |
| 5. SONUÇLAR .....   | 37   |
| ÖZGEÇMİŞ.....   | 40   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$x'$  : Birinci mertebeden türev

$x''$  : İkinci mertebeden türev

$\hat{x}_n$  : Runge – Kutta – Nyström Metodunda  $x'_n$  yerine kullanılan değer

$t_n$  : Grid noktası

$h_n$  : n. Adım genişliği

$x(t_n)$  : Cauchy probleminin tam çözümünün  $t_n$  noktasındaki değeri

$x'(t_n)$  : Cauchy probleminin türevinin tam çözümünün  $t_n$  noktasındaki değeri

$x_n$  : Cauchy probleminin  $t_n$  noktasındaki nümerik metot kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değeri

$LE_n$  : n. adımda oluşan lokal hata

### Kısaltmalar

RKN: Runge – Kutta – Nyström

## 1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler Fizik, Matematik ve Mühendislik gibi birçok alanda kullanılır. Diferensiyel denklemler, günlük hayatı matematik diline çevirmemize yardımcı olur. Bu ise yapılan işleri daha düzgün yapmak ve kontrolünü sağlamak açısından önemlidir. Günlük hayattan bir problemi matematik diline çevirdiğimizde bu problemin çözümü için birçok yol vardır. Sıklıkla kullanılan yöntem nümerik yöntemlerdir. Nümerik yöntemleri kullanmamızın genel amacı analitik olarak çözemediğimiz diferensiyel denklemleri (örneğin Van Der Pol denklemi) yaklaşık olarak çözmemize olanak sağlar. Bazen çok yakın sonuçlar elde etsekte, bazende istediğimiz sonuçları elde edemeyiz. Burada hata kavramı karşımıza çıkar. Hata, bir problemin gerçek çözümü ile nümerik çözümü arasındaki farktır. Bu fark ne kadar küçük olursa o kadar güzel sonuçlar elde etmiş oluruz.

Nümerik yöntemlerde hesaplama yapılırken genellikle sabit adım genişliği kullanılır. Bazı yöntemlerle yapılan çözümler, gerçek çözüme yakın olsa bile seçilen sabit adım genişliğinden dolayı hesaplama zaman alabilir. Çünkü yapılan nümerik çözümün, gerçek çözüme yakın olması için küçük adım genişliği seçilmelidir. Dolayısıyla adımlar biraz daha büyük seçilse bu sefer gerçek çözümden uzaklaşmış olur. Burada karşımıza değişken adım genişliği kavramı çıkıyor. Değişken adım genişliği nümerik hesaplama yaparken her bir adım değişken adım genişlikleri seçerek çözümler elde etmek anlamına gelir. Bu adımları literatürlerde verilen birçok adım genişliği stratejileri ile hesaplamak mümkün. Bu stratejilerden sıklıkla kullanılanı hataya bağlı olanlardır.

### 1.1. Literatür Özeti

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

şeklindeki ifadelere birinci mertebeden başlangıç değerli Cauchy problemi denir. Bazı Cauchy problemlerini nümerik yöntemlerle çözmek mümkündür. Birçok nümerik yöntem olmakla beraber en bilinenleri Euler, Runge – Kutta yöntemleridir. Bu yöntemlere ve bunlara benzer bir çok yönteme nümerik analiz ve sayısal analiz kitaplarında bulunabilir (Edward ve Penny, 2008; Scheid, 1988). Bir Cauchy problemini çözmeden önce verilen aralıkta Cauchy probleminin çözümü var mı?, varsa tek mi?

kavramları karşımıza çıkar. Kaynaklarda geçen Lipschitz koşulu ve Picard teoremi kavramları tanıtılmıştır (Gear, 1971; Burden, 2010; Güngör, 2010; Halilov 2003). Bu kavramlar  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  bölgesi üzerinde, çözümün varlığını ve tekliğini garanti eden kavramlardır. Kullanacağımız yöntemi belirledikten ve varlık - teklik garanti edildikten sonra bir sorun karşımıza çıkar; nümerik metotlar iteratif olduklarından (1.1) Cauchy probleminin çözümünün hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlamasına rağmen nümerik metot kullanılması ile elde edilen çözüm problemin tam çözümü yerine kullanılacak kadar yakın olmayabilir. Bu nedenle nümerik metotlarla hesaplama yapılırken adım genişliği seçimi öne çıkmaktadır. Literatür çalışmalarının çoğunda sabit adım genişliği seçilerek hesaplama yapılmıştır. Fakat sabit adım genişliği seçildiğinde yaklaşık çözümün tam çözümden uzaklaşmaması için adım genişliğinin çok küçük seçilmesi gerekmektedir. Bu ise pratik değildir. Adım genişliği, ele alınan diferensiyel denklemin tam çözümünün değişiminin hızlı olduğu bölgelerde küçük, değişiminin yavaş olduğu bölgelerde ise daha büyük seçilmelidir (Çelik Kızıllan, 2004; Çelik Kızıllan, 2009).

Yukarıdaki sebeplerden dolayı literatürlerde değişken adım genişliği kavramı olarak bilinen kavram karşımıza çıkar. Bununla alakalı onlarca yöntem, teknik, strateji olmakla beraber biz bazılarını kısaca özetlemeye çalışacağız.

Çelik Kızıllan ve Aydın (2005) te ikinci mertebeden Runge – Kutta metodu için hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi elde etmişlerdir. Verilen stratejiye bağlı olarak her bir adımda problemin yapısına göre sabit adım genişliği veya değişken adım genişliği tespit eden ve nümerik çözüm hesaplayan iki algoritma vermişlerdir.

Shampine ve ark. (1996) da  $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq T$  Cauchy probleminin nümerik integrasyonunda Euler metodu için  $\tau$  - kullanıcının belirleyeceği

hata seviyesi,  $\xi = \min_{[a,b]} |y''(x)| > 0$  ve  $H = \sqrt{\frac{2\tau}{\xi}}$  olmak üzere adım genişliğini;

$$h_n \approx \sqrt{\frac{\xi}{|y''(x_n)|}} H \quad (1.2)$$

şeklinde verilmiştir.

Yukarda verdiğimiz stratejiler yöntemlerden elde edilen hata analizi içeriyor ya da kullanıcının belirlediği bir hataya göre adım genişliği seçimi yapan stratejilerdir. Şimdi de belirlenen bazı şartlarla kabaca hesaplanan bazı adım genişliklerini verelim

bunlar uygulamaları hakkında fazla fikir sahibi olmadığımız iki stratejidir (Rice ve Do, 1995).

Bailey tarafından önerilen bir yöntem aşağıdaki gibidir,

$y_n$  nümerik çözümler olsun.  $\Delta_y = |y(t_{n+1}) - y(t_n)|$  hesaplamamız için farkı gereklidir.  $h$  için aşağıdaki koşullar geçerlidir.  $\Delta_y$  nin  $i$ .nci bileşeni için;

- Eğer  $\frac{\Delta_{y_i}}{y_i} < 0.01$  ise, adım büyüklüğü ikiye katlanır,
- Eğer  $\frac{\Delta_{y_i}}{y_i} > 0.1$  ise, adım büyüklüğü yarıya iner,
- Aksi takdirde, eski adım genişliği korunur.

Bu yöntem herhangi bir nümerik integrasyon için geçerlidir.

Michelsen  $O(h^3)$  kesme hatası ile üçüncü mertebeden bir metot kullanarak  $e_{n+1} = y_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) - y_{n+1}(h)$  olmak üzere  $y_{n+1} = y_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{7}e_{n+1}$  elde edilmiştir.  $y_{n+1}(h)$  ve  $y_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right)$ ,  $t_{n+1}$  noktasında nümerik metotla elde edilen ve  $t = t_{n+1}$  noktasında gerçek çözüme daha yakın olan bir tahmindir. Verilen  $\varepsilon$  toleransı için  $q = \max_i \left| \frac{e_{n+1}}{\varepsilon} \right|$  tanımlanmıştır. Eğer  $q > 1$  ise  $q < 1$  oluncaya kadar  $t_n$  adımındaki işlemler  $h$  adım genişliği yerine  $h/2$  alınarak tekrarlanır.  $q < 1$  olduğunda adım genişliğini  $h_{n+1} = h_n \min \left[ (4q)^{-\frac{1}{4}}, 3 \right]$  şeklinde verilmiştir.

Bunlar birinci mertebeden Cauchy problemleri için uygulanabilecek yöntemlerdir.

Şimdide Çelik Kızılkın (2009) doktora tezinde bahsettiği ve sistemlere uyguladığı adım genişliklerinden ve uygulama makalelerinden bahsedelim.

Çelik Kızılkın (2009) doktora tezinde  $X'(t) = AX(t)$  ve  $X'(t) = AX(t) + \varphi(t, X)$  denklem sistemlerinin  $[t_0, T]$  aralığındaki nümerik integrasyonunda her bir adımda oluşan lokal hata kullanıcının belirlediği hata seviyesinden küçük olacak şekilde adım genişliği belirleyen stratejiler elde etmiştir. Bu stratejilere göre seçilen adım genişlikleri ile nümerik çözüm hesaplayan algoritmalar vermiştir. Bunlardan biri şöyledir;

$$\beta_{i-1} = \max_{1 \leq j \leq N} \{b_j + |y_{(i-1)j}|\} \text{ ve } \hat{h}_i \leq \frac{1}{\|A\|} \left( \frac{2\delta_L}{\beta_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

olarak belirlenip hesaplanabilir.

Çelik Kızılkın ve Aydın (2011) lineer diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejileri elde etmişlerdir. Verilen stratejilere uygun olarak adım genişlikleri ve nümerik çözümler hesaplayan algoritmalar vermişlerdir.

Çelik Kızılkın ve ark. (2016) bazı SIR salgın hastalık modelleri için değişken adım genişliği stratejisinin etkinliğini incelediler. SIR modeli ve onun modifikasyonlarına gerçek veriler kullanarak değişken adım genişliği stratejisini uyguladılar.

Şimdi bazı ikinci mertebeden başlangıç değerli Cauchy problemleri için verilmiş stratejileri inceleyelim.

Ramos ve Aguiar (2006) de

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (1.4)$$

başlangıç değer problemi için k- adım Störmer- Cowell metodunun değişken adım genişlikli versiyonu elde edilmiş ve  $LE(\bar{x}_n, h_{n+1})$  lokal hata,  $\rho < 1$  (safety factor), TOL verilen hata seviyesi olmak üzere optimal adım genişliği

$$h_{n+1}^* = \rho h_{n+1} \left( \frac{TOL}{\|LE(\bar{x}_n, h_{n+1})\|} \right)^{1/k+2} \quad (1.5)$$

şeklinde verilmiştir. İterasyonun ilk adımında adım genişliğinin nasıl seçileceği hakkında bir bilgi verilmemiştir.

Ramos ve Aguiar (2007) de,

$$y''(t) - 2gy'(t) + (g^2 + w^2)y(t) = f(t, y(t)) \quad (1.6)$$

problemi için Panowsky ve Richardson'ın vermiş oldukları sabit adım genişlikli Chebyshev metodu, değişken adım genişlikli olarak yeniden düzenlenmiştir. Verilen metodun  $LE_n(y(t), h)$  lokal kesme hatasının normu istenilen hata seviyesinden küçük kalacak şekilde adım genişliğini

$$\bar{h} \approx \begin{cases} \nu h \left( \frac{TOL}{\|LE_n(y(t), h)\|} \right)^{1/(n+4)}, & n \text{ tek} \\ \nu h \left( \frac{TOL}{\|LE_n(y(t), h)\|} \right)^{1/(n+3)}, & n \text{ çift} \end{cases} \quad (1.7)$$

şeklinde vermişlerdir.  $\nu$  (safety factor) bir çarpandır.

Görüldüğü gibi birçok strateji ve yöntem birinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda kullanılabilir. Bizim öncelikli amacımız ikinci mertebeden başlangıç değerli Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda bu stratejilerden ağırlıklı olarak Picard Teoremi tabanlı ya da Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejileri incelenip sonuç elde edilmeye çalışılmıştır.

## 1.2. Problemin Tanımı

Nümerik metotlar iteratif olduklarından (1.1) Cauchy probleminin çözümünün hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlamasına rağmen nümerik metot kullanılması ile elde edilen çözüm problemin tam çözümü yerine kullanılacak kadar yakın olmayabilir. Bu nedenle nümerik metotlarla hesaplama yapılırken adım genişliği seçimi öne çıkmaktadır. Literatür çalışmalarının çoğunda sabit adım genişliği seçilerek hesaplama yapılmıştır. Fakat sabit adım genişliği seçildiğinde yaklaşık çözümün tam çözümden uzaklaşmaması için adım genişliğinin çok küçük seçilmesi gerekmektedir. Bu ise pratik değildir. Adım genişliği, ele alınan diferensiyel denklemin tam çözümünün değişiminin hızlı olduğu bölgelerde küçük, değişiminin yavaş olduğu bölgelerde ise daha büyük seçilmelidir (Çelik Kızıllan, 2004; Çelik Kızıllan, 2009).

## 1.3. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

1. Bölümde literatür özeti ve problemin tanımı verilmiştir.
2. Bölümde Çelik Kızıllan (2004) de tezinde uyguladığı ve bu tez çalışmasında ağırlıklı esinlendiğimiz birinci mertebeden Cauchy Problemlerinin nümerik integrasyonunda adım genişliği stratejisi verilmiştir.
3. Bölümde ikinci mertebeden  $x'' = f(t, x)$ ,  $x'(t_0) = x'_0$ ,  $x(t_0) = x_0$  Cauchy probleminin çözümünde kullanılan Runge - Kutta – Nyström metodu ve hata analizi verilerek, nümerik integrasyonlarda kullanılan Picard teoremi tabanlı ve hata analizi tabanlı adım genişliğinden stratejileri elde ettik.
4. Bölümde, 3. Bölümde verdiğimiz stratejileri uyguladığımız nümerik örnekler verilmiştir.
5. Bölümde ise tezde elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

## 2. BİRİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİ İÇİN ADIM GENİŞLİĞİ SEÇİMİ

Çelik Kızıllan (2004) tezinde birinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda kullanılan Picard Teoremi tabanlı ve hata analizi tabanlı adım genişliğini elde etmiştir. Burda elde ettiği stratejileri Euler ve Runge – Kutta metotlarına uygulamıştır. Elde edilen stratejiler sadece bu iki metot için değil diğer metotlar içinde uygulanabilir. Bu bölümde bu stratejilere yer vereceğiz.

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

$D = \{(t, x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}$  bölgesi üzerinde, başlangıç değerli Cauchy problemini ele alacağız. Aşağıda diferensiyel denklemlerin varlık ve tekliğinin tespitinde kullanılan temel kavramların tanımını vereceğiz.

### 2.1. Lipschitz Şartı

$D = \{(t, x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}$  bölgesinde  $(t, x_1), (t, x_2) \in D$  olmak üzere

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir  $L > 0$  sabiti varsa  $f(t, x)$  fonksiyonu  $D \subset \mathbb{R}^2$  kümesi üzerinde  $x$  değişkenine göre Lipschitz şartını sağlar (Çelik Kızıllan, 2004; Gear, 1971; Burden, 2010).

$f(t, x)$  türevlenebilme gerekliliği yoktur. Fakat öyleyse o zaman Lipschitz koşulunu  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq L$  garanti eder. Tersine eğer  $f$ ,  $x$  e göre türevlenebilir ve  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq L$  ise  $f$  Lipschitz koşulunu sağlar (Gear, 1971; Burden, 2010; Çelik Kızıllan, 2004).

## 2.2. Picard Teoremi

$D = \{(t, x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}$  konveks bölgesi üzerinde (2.1) Cauchy problemini ele alalım. Eğer  $f(t, x)$ ,  $D$  bölgesi üzerinde sürekli ve bu bölgede Lipschitz şartını sağlıyorsa bu takdirde  $(t_0, x_0)$  noktasını içine alan bir alt bölgede (2.1) Cauchy probleminin çözümü var ve tektir. Bu bölge

$$\max_{(\zeta, \tau) \in D} |f(\zeta, \tau)| \leq M, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad (2.3)$$

olmak üzere  $D_0 = \{(t, x) : |t - t_0| < h, |x - x_0| < b\}$  dir (Güngör, 2010; Halilov, 2003; Çelik Kızıllıkan, 2004).

## 2.3. Lokal Hata

$t_{n-1}$  noktasında nümerik metotla elde edilen yaklaşık çözüm  $y_{n-1}$  ile gösterilsin.  $y_{n-1}$  çözümünün gerçek çözümden ne kadar uzak olduğunu kontrol etmek için  $z(t)$  fonksiyonu tanımlansın.  $[t_{n-1}, t_n]$  aralığında (2.1) Cauchy probleminin çözümü  $z(t)$  olsun.  $z(t)$ ;

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z) \\ z(t_{n-1}) &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde alınsın. Lokal hata  $LE_n$  ile gösterilir.  $t_n$  noktasındaki lokal hata, nümerik metotla elde edilen  $y_n$  çözümü ile  $z(t_n)$  çözümü arasındaki farktır.  $LE_n = y_n - z(t_n)$  şeklinde gösterilir (Çelik Kızıllıkan, 2004; Shampine, 1996).

## 2.4. Adım Genişliği Stratejileri

1) Picard teoremi adım genişliği stratejisi: (2.1) Cauchy probleminin  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  bölgesi üzerinde çözümü var ve tek olmak üzere adım genişliği Picard teoremindeki ;

$$\max_{(\zeta, \tau) \in D} |f(\zeta, \tau)| \leq M \text{ ve } h_n = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (2.5)$$

ile verilmiştir.

2) Hata analizi tabanlı adım genişliği seçimi ve lokal hataya göre adım genişliği seçimi lokal hata için Euler metodunda hatanın üst sınırı ile  $\delta_L$  den küçük olacak şekilde adım genişliği aşağıdaki şekilde seçilir.

$$\begin{aligned} |LE_n| &\leq \max_{t_{n-1} \leq \tau \leq t_n} \left| \frac{1}{2} z''(\tau) \right| h_n^2 < \delta_L \\ \Rightarrow h_n^2 &< \frac{2\delta_L}{\max_{t_{n-1} \leq \tau \leq t_n} |z''(\tau)|} \\ \Rightarrow h_n &< \left( \frac{2\delta_L}{\max_{t_{n-1} \leq \tau \leq t_n} |z''(\tau)|} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aynı tez çalışmasında yukarıda verilen değişken adım genişliği stratejileri kullanarak hem adım genişliklerini hemde Cauchy probleminin yaklaşık çözümü hesap eden algoritmalar verilmiştir.

Runge- Kutta yönteminin lokal hata analizi sonucu elde edilen adım genişliği;

$$|LE_n| \leq \frac{h_i^3}{12} \max_{\tau \in [t_{n-1}, t_n]} \left| (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)(\tau) \right| \quad (2.7)$$

eşitsizliğinden

$$\max_{\tau \in [t_{n-1}, t_n]} \left| (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)(\tau) \right| \leq M_{t_i} \quad (2.8)$$

olmak üzere adım genişliği

$$h_n \leq \left( \frac{12\delta_L}{M_{t_i}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

şeklinde seçilir. Eğer  $[t_0, T]$  aralığında,

$$\max_{\tau \in [t_{n-1}, t_n]} \left| (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)(\tau) \right| \leq M, \quad M \geq \max_t \{M_{t_n}\} \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir M sayısı alınırsa,

$$h_n \leq \left( \frac{12\delta_L}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.11)$$

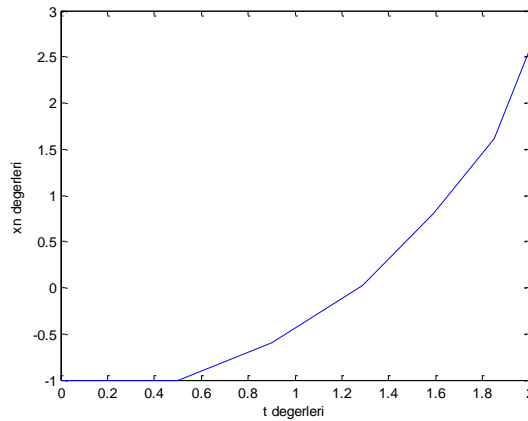
adım genişliği olacaktır (Çelik Kızıllıkan, 2004; Çelik Kızıllıkan ve Aydın, 2005).

**Örnek 2.1:**  $D = \{(t, x) : |t| \leq 2, |x+1| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde  $f(t, x) = 2t$ ,  $x(0) = -1$  Cauchy problemini Picard teoremi tabanlı adım genişliği seçimi ve Euler metodu yardımıyla çözelim.

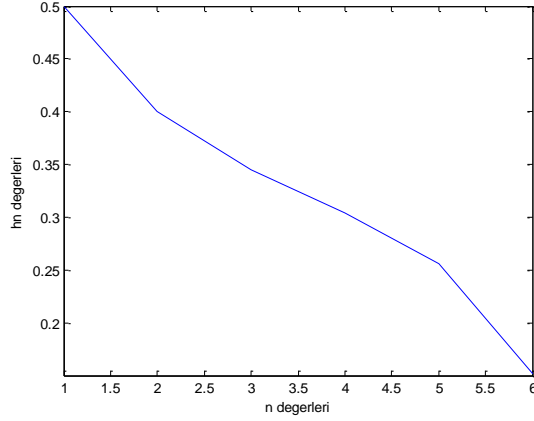
**Çözüm:** Tanımda verilen stratejiler kullanılarak ve gerekli işlemler sırayla yapılarak elde edilen çözümler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

**Çizelge 2.1.** Örnek 2.1 Picard teoremi tabanlı adım genişliği seçimi çözümleri

| $n$ | $h_n$  | $t_n$  | $x_n$   |
|-----|--------|--------|---------|
| 0   |        | 0      | -1      |
| 1   | 0.5    | 0.5    | -1      |
| 2   | 0.4    | 0.9    | -0.6    |
| 3   | 0.3448 | 1.2884 | 0.02064 |
| 4   | 0.3041 | 1.5925 | 0.8042  |
| 5   | 0.2559 | 1.8484 | 1.6192  |
| 6   | 0.1516 | 2      | 2.5796  |



**Şekil 2.1.** Örnek 2.1 Picard teoremi tabanlı adım genişliği seçimi ile  $x_n$  çözümüne ait grafik



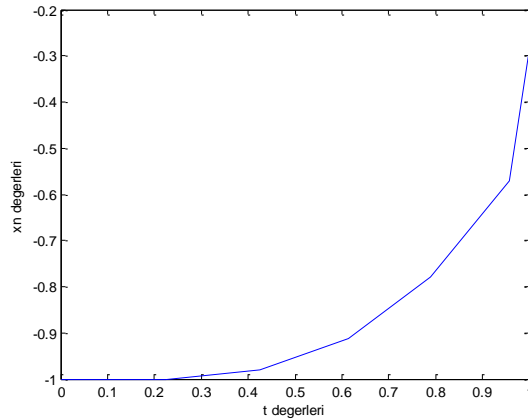
Şekil 2.2. Örnek 2.1 Picard teoremi tabanlı adım genişliği seçimi ile  $h_n$  çözümüne ait grafik

**Örnek 2.2:**  $D = \{(t, x) : |t| \leq 1, |x+1| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde  $f(t, x) = 2t^2$ ,  $x(0) = -1$  Cauchy problemini lokal hataya göre adım genişliği seçimi ve Euler metodu yardımıyla çözelim.

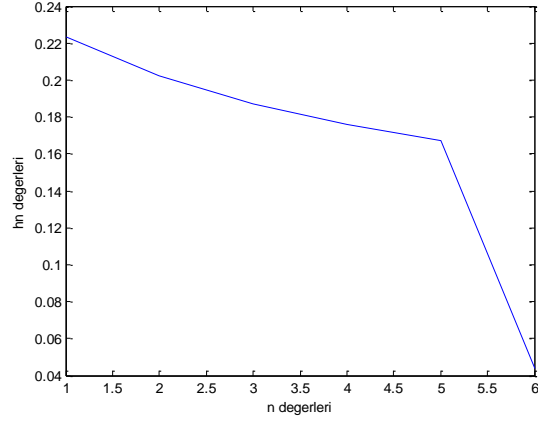
**Çözüm:** Tanımda verilen stratejiler kullanılarak ve gerekli işlemler sırayla yapılarak elde edilen çözümler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. Örnek 2.2 Euler metoduna ait lokal hataya bağlı adım genişliği ile çözümü

| $n$ | $h_n$  | $t_n$  | $x_n$    |
|-----|--------|--------|----------|
| 0   | -      | 0      | -1       |
| 1   | 0.2236 | 0.2236 | -1       |
| 2   | 0.2021 | 0.4257 | -0.97979 |
| 3   | 0.1873 | 0.613  | -0.9119  |
| 4   | 0.1761 | 0.7891 | -0.7796  |
| 5   | 0.1672 | 0.9563 | -0.5714  |
| 6   | 0.0437 | 1      | -0.2789  |



Şekil 2.3. Örnek 2.2 Euler metoduna ait lokal hataya bağlı adım genişliği ile  $x_n$  çözümüne ait grafik



**Şekil 2.4.** Örnek 2.2 Euler metoduna ait lokal hataya bağlı adım genişliği ile  $h_n$  çözümüne ait grafik



### 3. İKİNCİ MERTEBEDEN CAUCHY PROBLEMLERİ İÇİN ADIM GENİŞLİĞİ SEÇİMİ

$D = \{(t, x) : |t - t_0| < T, |x - x_0| < b\}$  bölgesi üzerinde

$$x'' = f(t, x), x'(t_0) = x'_0, x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

ikinci mertebeden Cauchy problemi kullanılacaktır. İkinci mertebeden diferensiyel denklemler kolaylıkla birinci mertebeden sistemlere dönüştürülebildiği için varlık ve teklikle ilgili tanımlar sistemlerde verilmiştir.

#### 3.1. Lipschitz Şartı

Diferensiyel denklem sistemleri için Lipschitz tanımı kullanılacaktır. Bilindiği gibi denklem sisteminin derecesi 2 alınırsa ikinci mertebeden Cauchy problemi için sağlayacaktır.

$$X(x_j(t)), X_0 = (x_{j0}); x_{j0} = x_j(t_0), \quad (3.2)$$

$$F(t, X) = (f_j); f_j = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.3)$$

ve  $F \in C^m([t_0, T] \times \mathbb{R}^N), X(t), X_0, b = (b_j) \in \mathbb{R}^N$  olmak üzere

$$D = \{(t, X) : t \in [t_0, T], |x_j - x_{j0}| \leq b_j\}$$

bölgesi üzerinde

$$X'(t) = F(t, X), X(t_0) = X_0 \quad (3.4)$$

Cauchy problemini ele alalım.

Herhangi  $(t, X_1), (t, X_2) \in D$  için,

$$\|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leq L\|X_1 - X_2\| \quad (3.5)$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa,  $F(t, X(t))$  vektör fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar denir,  $L$  sayısına da Lipschitz sabiti denir. Eğer  $F(t, X)$  fonksiyonu  $D$  bölgesi üzerinde Lipschitz şartını sağlarsa bu bölgede (3.4) Cauchy probleminin bir tek  $X(t)$  çözümü vardır (Gear, 1971; Shampine ve ark., 1996; Çelik Kızıllan, 2009).

### 3.1.1 Tanım

Her  $(t, y, y'), (t, x, x') \in D$  için

$$|f(t, y, y') - f(t, x, x')| \leq K(y - x) + L(y' - x') \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir negatif olmayan  $K$  ve  $L$  sabitleri mevcut ise  $f$  fonksiyonu  $D$  bölgesinde Lipschitz şartını sağlar denir.  $K$  ve  $L$  Lipschitz sabitleridir (Mermerkaya, 2009).

### 3.2. Lokal Hata

$Z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_i(t))^T$  vektör fonksiyonu (3.4) Cauchy probleminin  $[t_{i-1}, t_i]$  aralığındaki çözümü ve  $Y_i = (y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{iN})^T$  i. adımda nümerik metotla elde edilen çözüm vektörü olmak üzere

$$Z'(t) = F(t, Z), Z(t_{i-1}) = Y_{i-1} \quad (3.7)$$

Cauchy problemini oluşturalım.  $[t_{i-1}, t_i]$  aralığındaki lokal hata vektörü,

$$LE_i = Y_i - Z(t_i) = \begin{pmatrix} y_{i1} - z_1(t_i) \\ y_{i2} - z_2(t_i) \\ \dots \\ y_{iN} - z_N(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LE_{i1} \\ LE_{i2} \\ \dots \\ LE_{iN} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlıdır.  $\|LE_i\|$  değerine de  $[t_{i-1}, t_i]$  aralığındaki lokal hata denir (Loan, 2000; Çelik Kızıllan, 2009).

### 3.3. Runge – Kutta – Nyström Metodu ve Lokal Hata Analizi

Runge – Kutta metodunun bir çok çeşidi vardır. Chang ve Gnepp (1984) de bahsettikleri Runge – Kutta – Nyström metodunu ele alacağız. Aşağıda,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, x_n) \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}x'_n + \frac{h^2k_1}{8}\right) \\
 k_3 &= f\left(t_n + h, x_n + hx'_n + \frac{h^2k_2}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$k_1, k_2, k_3$  değerleri kullanılarak  $x_{n+1}$  ve  $x'_{n+1}$  değerleri,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h\hat{x}_n + \frac{h^2}{6}(k_1 + 2k_2) \\
 \hat{x}_{n+1} &= \hat{x}_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak vermiştir. Bu metod ikinci mertebeden türevi içermeyen Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda kullanılır (Chang ve Gnepp, 1984).

**Not:** Herhangi bir karışıklığı önlemek için  $x'_n = \hat{x}_n$  olarak kabul edilmiştir.

#### 3.3.1. Runge – Kutta – Nyström metodunun lokal hata analizi

$[t_{n-1}, t_n)$  aralığında  $z(t)$  fonksiyonu için üçüncü mertebeden Taylor açılımı;

$$z(t_n) = z(t_{n-1}) + z'(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2!}z''(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})^2 + \frac{1}{3!}z'''(\tau)(t_n - t_{n-1})^3 \tag{3.11}$$

$\tau \in (t_{n-1}, t_n)$  olur.  $t_n - t_{n-1} = h_n$  olarak yerine yazılırsa,

$$z(t_n) = z(t_{n-1}) + z'(t_{n-1})(h_n) + \frac{1}{2!}z''(t_{n-1})(h_n)^2 + \frac{1}{3!}z'''(\tau)(h_n)^3 \tag{3.12}$$

elde ederiz.  $[t_{n-1}, t_n)$  aralığında  $z(t)$  fonksiyonu için;

$$\begin{aligned} z(t_{n-1}) &= x_{n-1} \\ z'(t_{n-1}) &= x'_{n-1} \\ z''(t_{n-1}) &= f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ z'''(t_{n-1}) &= f_t(t_{n-1}, x_{n-1}) + f(t_{n-1}, x_{n-1})f_x(t_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (3.12) denkleminde yerine yazılırsa;

$$z(t_n) = x_{n-1} + (h_n)x'_{n-1} + \frac{(h_n)^2}{2} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} (f_t(\tau, x_{n-1}) + f(\tau, x_{n-1})f_x(\tau, x_{n-1})) \quad (3.14)$$

olarak bulunur. Runge – Kutta – Nyström metodundaki değerlerinde taylor açılımını yapalım.

$$k_1 = f(t_{n-1}, x_{n-1}) \quad (3.15)$$

olur.  $k_2$  eşitliğinin taylor açılımı için,

$$k_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{h_n}{2}, x_{n-1} + \frac{h_n}{2}x'_{n-1} + \frac{h_n^2 k_1}{8}\right) \quad (3.16)$$

$\alpha = \frac{h_n}{2}$  ve  $\beta = \frac{h_n}{2}x'_{n-1} + \frac{h_n^2 k_1}{8}$  olarak yazılıp fonksiyonda yerine koyulursa,

$$k_2 = f(t_{n-1} + \alpha, x_{n-1} + \beta) = f(t_{n-1}, x_{n-1}) + (\alpha f_t(\tau, x_{n-1}) + \beta f_x(\tau, x_{n-1})) \quad (3.17)$$

elde edilir.  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri (3.17) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{h_n}{2}, x_{n-1} + \frac{h_n}{2}x'_{n-1} + \frac{h_n^2 k_1}{8}\right) \\ &= f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \left(\frac{h_n}{2} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2}x'_{n-1} + \frac{h_n^2 k_1}{8} f_x(\tau, x_{n-1})\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Düzenlemeye devam edilirse,

$$k_2 = f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^2 k_1}{8} f_x(\tau, x_{n-1}) \quad (3.19)$$

olur. (3.15), (3.19) da yerine yazılırsa;

$$k_2 = f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^2}{8} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \quad (3.20)$$

olarak elde edilir.  $x_n$  değeri,

$$x_n = x_{n-1} + h_n x'_{n-1} + \frac{h_n^2}{6} (k_1 + 2k_2) \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.20) de bulunan değerler (3.21) de yerine yazılırsa;

$$x_n = x_{n-1} + h_n x'_{n-1} + \frac{h_n^2}{6} \left( f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 2 \left( f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^2}{8} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \right) \right) \quad (3.22)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$x_n = x_{n-1} + h_n x'_{n-1} + \frac{(h_n)^2}{2} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^4}{24} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \quad (3.23)$$

elde edilir. Böylelikle  $LE_n = x_n - z(t_n)$  lokal hatası değerler yerine yazılarak bulunabilir.  $LE_n = x_n - z(t_n)$  için (3.14) ve (3.23) da bulduğumuz değerleri yerine yazalım.

$$LE_n = \left[ x_{n-1} + h_n x'_{n-1} + \frac{(h_n)^2}{2} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^4}{24} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \right] - \left[ x_{n-1} + (h_n) x'_{n-1} + \frac{(h_n)^2}{2} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} f_t(\tau, x_{n-1}) + \frac{(h_n)^3}{6} f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \right] \quad (3.24)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapırsa;

$$LE_n = \frac{(h_n)^3}{6} x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - \frac{(h_n)^3}{6} f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) + \frac{h_n^4}{24} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \quad (3.25)$$

istenen hatayı bulmak için;

$$|LE_n| = \left| \frac{(h_n)^3}{6} (x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) + \frac{h_n^4}{24} f(t_{n-1}, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1}) \right|, \quad \tau \in (t_{n-1}, t_n) \quad (3.26)$$

elde edilir.

### 3.4. Picard Teoremi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi

Çelik Kızıllıkan (2004) de tezinde bahsettiği Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi örnek alınarak elde edilmiştir.  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  bölgesi üzerinde (3.1) Cauchy problemini ele alalım.  $f(t, x)$  fonksiyonu için Picard teoremi şartlarını sağladığını kabul edelim. (3.1) Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu bölge  $D_0 = \{(t, x) : |t - t_0| \leq \hat{h}_1, |x - x_0| \leq b\}$  olsun.  $[t_{n-1}, t_n)$  aralığında (3.1) Cauchy probleminin çözümü  $z(t)$  olmak üzere; kullanılan herhangi bir nümerik metodun ilk adımda  $h_1$  adım genişliği,

$$\max_{(\beta, \tau) \in D} |f(\beta, \tau)| \leq M_1, \quad \hat{h}_1 = \min \left\{ a, \frac{b}{M_1} \right\} \quad (3.27)$$

olmak üzere Picard teoremindeki  $\hat{h}_1 = h_1$  parametresi seçilerek  $(t_1, x_1)$  noktası hesap edilir ve  $D_1 = \{(t, z): |t - t_1| \leq a, |z - x_1| \leq b\}$  bölgesi üzerinde,

$$z'' = f(t, z), \quad z'(t_1) = x'_1, \quad z(t_1) = x_1 \quad (3.28)$$

Cauchy problemi göz önüne alınır. Picard teoremi gereği (3.28) Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu

$$D_{01} = \{(t, z): |t - t_1| \leq \hat{h}_2, |z - x_1| \leq b\}$$

bölgesi elde edilir.  $\hat{h}_2$  adım genişliği  $h_2$  alınarak  $(t_2, y_2)$  noktası hesaplanır. İşleme bu şekilde devam edilirse n. adımda

$$D_{n-1} = \{(t, x): |t - t_{n-1}| \leq a, |x_n - x_{n-1}| \leq b\}$$

bölgesi üzerinde,

$$z'' = f(t, z), \quad z'(t_{n-1}) = x'_{n-1}, \quad z(t_{n-1}) = x_{n-1} \quad (3.29)$$

Cauchy problemine ulaşılır. Picard teoremi gereği bu problemin çözümünün var ve tek olduğu bölge  $D_{0n} = \{(t, z): |t - t_{n-1}| \leq \hat{h}_n, |z - x_{n-1}| \leq b\}$  ve adım genişliği

$$\max_{(\beta, \tau) \in D} |f(\beta, \tau)| \leq M_n, \quad \hat{h}_n = \min \left\{ a, \frac{b}{M_n} \right\} \quad (3.30)$$

dir. Adım genişliği  $\hat{h}_n = h_n$  seçilerek işlem yapılır.

### 3.4.1. Adım genişliği kontrolü ve Kontrol algoritması

$h^*$ , kullanıcının belirlediği istenildiği kadar küçük bir parametre olmak üzere,  $h^*$  pratik adım genişliği parametresi kullanıcı tarafından belirlenmezse, kullanılan bilgisayarın formatına uygun pozitif en küçük bilgisayar sayısı olarak seçilir. Ancak bu durumda adım genişlikleri çok küçük bulunabileceğinden çözüm beklenmedik bir şekilde hareket edebilir. Dolayısıyla  $h^*$ , kullanıcı tarafından problemin yapısına uygun olarak seçilmelidir (Çelik Kızılkın, 2009).

### 3.4.2. Kontrol algoritması: (Algoritma – 1)

$k$ ; adım sayısı,  $\hat{h}_k$ ; ele alınan adım genişliği seçiminde hesaplanan adım genişliği ve  $h^*$ , pratik adım genişliği olmak üzere adım genişliği kontrolü aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathbf{K: 1.} \sum_{i=1}^{k-1} h_i + \hat{h}_k \leq a \text{ ise;}$$

$$\mathbf{1.1.} \hat{h}_k > h^* \text{ ise } h_k = \hat{h}_k \text{ alınır.}$$

$$\mathbf{1.2.} \hat{h}_k < h^* \text{ ise } h_k = 0 \text{ alınır ve işlem sona erer.}$$

$$\mathbf{2.} \sum_{i=1}^{k-1} h_i + \hat{h}_k > a \text{ ise } \hat{h}_k = a - \sum_{i=1}^{k-1} h_i \text{ alınır.}$$

$$\mathbf{2.1.} \hat{h}_k > h^* \text{ ise } h_k = \hat{h}_k \text{ alınır.}$$

$$\mathbf{2.2.} \hat{h}_k < h^* \text{ ise } h_k = 0 \text{ alınır ve işlem sona erer.}$$

(Algoritma - 1 Çelik Kızıllıkan, 2004 tezinden alınmıştır.)

### 3.4.3. Picard Teoremi tabanlı adım genişliği algoritması: (Algoritma – 2)

**Adım 0:** (Giriş Elemanları):  $a$ ,  $b$  ve  $h^*$  sayıları girilir. ( $a$  ve  $b$ ,  $D$  bölgesinde verilen sayılar,  $h^*$  algoritma-1 verilen pratik adım genişliği )

**Adım 1:**  $M_1$  sayısı hesaplanır. ((3.30) da  $n=1$  alarak elde edilen değer)

$$\mathbf{1.1.} \hat{h}_1 \text{ sayısı hesaplanır.}$$

$$\mathbf{1.2.} K\text{- kontrolü yapılır.}$$

$$\mathbf{1.3.} t_1 = t_0 + h_1 \text{ ve } x_1, \hat{x}_1 \text{ hesaplanır.}$$

**Adım k:**  $M_k$  sayısı hesaplanır.

$$\mathbf{k.1.} \hat{h}_k \text{ sayısı hesaplanır.}$$

$$\mathbf{k.2.} K\text{- kontrolü yapılır.}$$

$$\mathbf{k.3.} t_{k+1} = t_k + h_k \text{ ve } x_k, \hat{x}_k \text{ hesaplanır.}$$

Bu algoritmayı durduran adım  $K$ - kontrol adımıdır. Kontrol adımında;

$$\sum_{k=1}^N h_k = a$$

veya  $h_N < h^*$  olduğunda işlem durur.

**Örnek 3.1:**  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 1, |x - x_0| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde;

$f(t, x) = x''(t) = 4x$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge- Kutta- Nyström metodu kullanarak çözelim.

**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = e^{2t}$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Picard teoremi tabanlı adım genişliği ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.

**Adım 0:** (Giriş Elemanları):  $a = 1, b = 2$  ve  $h^* = 10^{-6}$

**Adım 1:**  $M_1 = 12$

$$1.1. \hat{h}_1 = \min \left\{ 2, \frac{2}{12} \right\} = 0,166667$$

1.2. K- kontrolü yapılır.

$$1.3. t_1 = t_0 + h_1 = 0,166667$$

$$x_1 = 1,395576 \quad \hat{x}_1 = 2,791237997$$

**Adım 2:**  $M_2 = 15,49833$

$$2.1. \hat{h}_2 = \min \left\{ 2, \frac{2}{15,49833} \right\} = 0,14725$$

2.2. K- kontrolü yapılır.

$$2.3. t_2 = t_1 + h_2 = 0,313917$$

$$x_2 = 1,873548388 \quad \hat{x}_2 = 3,747099052$$

benzer şekilde devam edilirse;

**Adım 10:**  $M_{10} = 34,9387$

$$10.1. \hat{h}_{10} = \min \left\{ 2, \frac{2}{34,9387} \right\} = 0,057243109$$

10.2. K- kontrolü yapılır.

$$10.3. t_{10} = t_9 + h_{10} = 1,01059838 > 1 \text{ olduğundan}$$

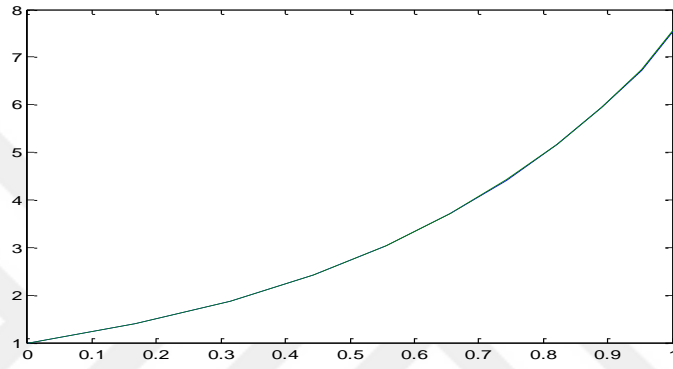
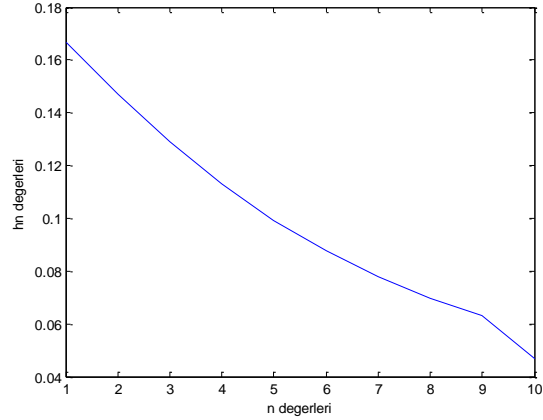
$$h_{10} = 1,01059 - 1 = 0,046645$$

$$x_{10} = 7,551577699$$

$$\hat{x}_{10} = 15,10324728$$

**Çizelge 3.1.** Örnek 3.1 Algoritma – 2 ile çözümünün sonuçları

| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$    | $x_n$       | $ x(t_n) - x_n $ |
|-----|----------|----------|-------------|-------------|------------------|
| 0   |          | 0        | -           | 1           | -                |
| 1   | 0,166667 | 0,166667 | 1,395612425 | 1,395576    | 0,00036293       |
| 2   | 0,14725  | 0,313917 | 1,873548388 | 1,874583    | 0,00062999       |
| 3   | 0,129046 | 0,442963 | 2,42523018  | 2,426568    | 0,0013377        |
| 4   | 0,112954 | 0,555918 | 3,039931839 | 3,041613    | 0,0016809        |
| 5   | 0,099175 | 0,655092 | 3,706856913 | 3,708913    | 0,002056         |
| 6   | 0,087582 | 0,742675 | 4,416506592 | 4,418963    | 0,0024566        |
| 7   | 0,077894 | 0,820569 | 5,161036439 | 5,163914    | 0,0028773        |
| 8   | 0,069794 | 0,890363 | 5,934162603 | 5,937477    | 0,0033143        |
| 9   | 0,062992 | 0,953355 | 6,730911292 | 6,734676    | 0,0037646        |
| 10  | 0,046645 | 1        | 7,547351896 | 7,551577699 | 0,00423          |

**Şekil 3.1.** Örnek 3.1 Algoritma – 2 ile  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılmasını gösteren grafik**Şekil 3.2.** Örnek 3.1 Algoritma – 2 ile  $h_n$  gösteren grafik

### 3.5. Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Seçimi

(3.26) da yapılan Runge – Kutta – Nyström metodunun hata analizini kullanarak bir  $h$  adım genişliği elde ettik.

$$|LE_n| = \left| \frac{(h_n)^3}{6} (x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) + \frac{(h_n)^4}{24} (f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) \right|, \tau \in [t_{n-1}, t_n] \quad (3.31)$$

$0 \leq h_n \leq 1$  olduğunda,

$$|LE_n| = \left| \frac{(h_n)^3}{6} (x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) + \frac{(h_n)^3}{24} (f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) \right|, \tau \in [t_{n-1}, t_n] \quad (3.32)$$

elde edilir.

$$|LE_n| \leq \sup_{\tau \in (t_{n-1}, t_n)} \left| \frac{(h_n)^3}{6} (x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) + \frac{(h_n)^3}{24} (f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) \right|, \tau \in [t_{n-1}, t_n] \quad (3.33)$$

bu ifade  $\delta_L$  küçük olduğundan,

$$|LE_n| \leq \frac{(h_n)^3}{6} \sup_{\tau \in (t_{n-1}, t_n)} \left| x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - \frac{3}{4} (f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) \right| \leq \delta_L \quad (3.34)$$

elde edilir.  $M_n = \sup_{\tau \in (t_{n-1}, t_n)} \left| x'_{n-1} f_x(\tau, x_{n-1}) - \frac{3}{4} (f(\tau, x_{n-1}) f_x(\tau, x_{n-1})) \right|$  yerine yazılırsa,

$$|LE_n| \leq \frac{(h_n)^3}{6} \cdot M_n \leq \delta_L \quad (3.35)$$

olur.

$h_n$  yalnız bırakılarak eşitlik,

$$h_n \leq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \delta_L}{M_n}} \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir.

### 3.5.1. Hata analizi tabanlı adım genişliği algoritması: (Algoritma – 3)

**Adım 0.** Giriş Elemanları  $(a, b, \delta_L, h^*)$  ( $a$  ve  $b$ ,  $D$  bölgesinde verilmiş pozitif sayılar,  $\delta_L$  dışarıdan girilen istenilen hata seviyesi,  $h^*$  algoritma – 1 de verdiğimiz pratik adım genişliğidir.)

#### Adım 1.

$$1.1. \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \left( x'_0 f_x(t, x_0) - \frac{3}{4} f(t, x_0) f_x(t, x_0) \right) \right| \leq M_1$$

$$h_1 \leq \sqrt[3]{\frac{6\delta_L}{M_1}}$$

$$1.2. t_1 = t_0 + h_1 \text{ ve K- kontrol}$$

$$1.3. x_1 \text{ ve } \hat{x}_1$$

...

#### Adım k.

$$k.1. \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \left| \left( x'_{k-1} f_x(t, x_{k-1}) - \frac{3}{4} f(t, x_{k-1}) f_x(t, x_{k-1}) \right) \right| \leq M_k$$

$$h_k \leq \sqrt[3]{\frac{6\delta_L}{M_k}}$$

$$k.2. t_k = t_{k-1} + h_k \text{ ve K- kontrol}$$

$$k.3. x_k \text{ ve } \hat{x}_k$$

**Örnek 3.2:**  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 1, |x - x_0| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde,

$f(t, x) = x''(t) = 4x$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge- Kutta- Nyström metodu kullanarak çözelim.

**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = e^{2t}$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.  $\delta_L = 0,01$  ve  $\delta_L = 0,1$  için elde edilen sonuçlar çizelgededir.

**Adım 0:**  $a = 1, b = 2, \delta_L = 0,01, h^* = 10^{-6}$

**Adım 1:**

$$1.1. \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \left( x'_0 f_x(t, x_0) - \frac{3}{4} f(t, x_0) f_x(t, x_0) \right) \right| \leq M_1 = 4$$

$$h_1 \leq \sqrt[3]{\frac{6\delta_L}{M_1}} = 0,246621$$

$$1.2. \quad t_1 = t_0 + h_1 = 0,246621$$

$$1.3. \quad x_1 = 1,6373527$$

$$\hat{x}_1 = 3,27531355$$

**Adım2 :**

$$2.1. \quad \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left| \left( x'_1 f_x(t, x_1) - \frac{3}{4} f(t, x_1) f_x(t, x_1) \right) \right| \leq M_2 = 6,546978$$

$$h_2 \leq \sqrt[3]{\frac{6\delta_L}{M_2}} = 0,209268$$

$$2.2. \quad t_2 = t_1 + h_2 = 0,45589$$

$$2.3. \quad x_2 = 2,4882865$$

$$\hat{x}_2 = 4,97741138$$

Benzer şekilde devam edilirse,

**Adım6 :**

$$6.1. \quad \sup_{t \in [t_5, t_6]} \left| \left( x'_5 f_x(t, x_5) - \frac{3}{4} f(t, x_5) f_x(t, x_5) \right) \right| \leq M_6 = 26,4114$$

$$h_6 \leq \sqrt[3]{\frac{6\delta_L}{M_6}} = 0,135656$$

$$6.2. \quad t_6 = t_5 + h_6 = 1,07956 > 1 \text{ olduğu için algoritma } - 1 \text{ gereği}$$

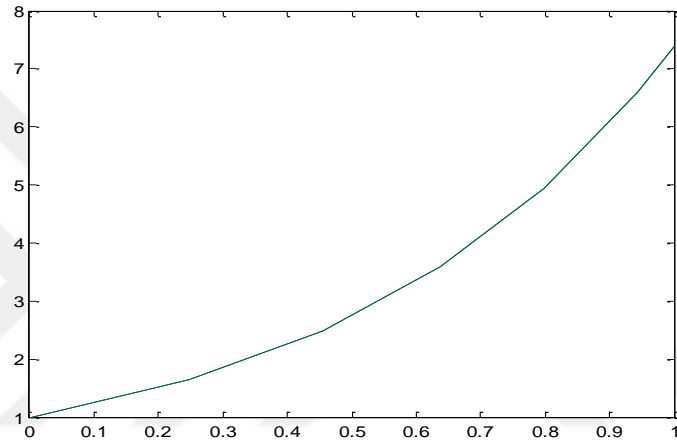
$h_6 = 1 - 0,943902 = 0,056098$  olarak belirlenir.

$$6.3. \quad x_6 = 7,3878846$$

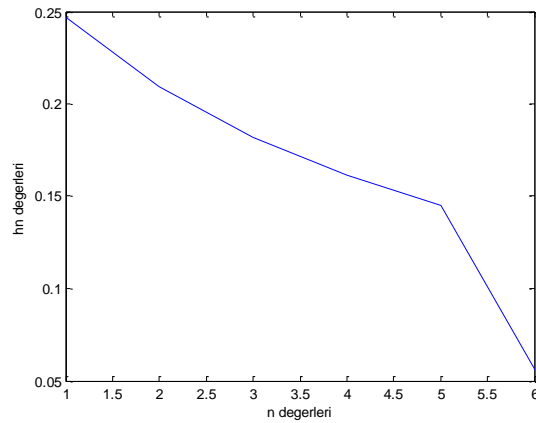
$$\hat{x}_6 = 14,776576$$

**Çizelge 3.2.** Örnek 3.2  $\delta_L = 0,01$  için Algoritma-3 çözümleri

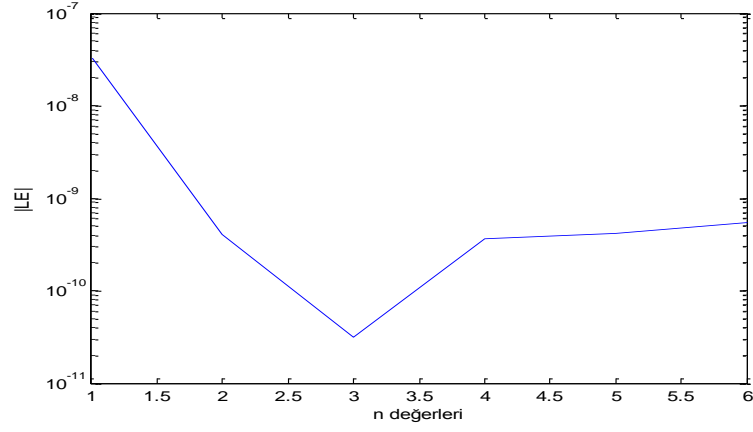
| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$   | $x_n$     | $ LE_n $          |
|-----|----------|----------|------------|-----------|-------------------|
| 0   |          | 0        | 1          | 1         |                   |
| 1   | 0,246621 | 0,246621 | 1,63761746 | 1,6373527 | 0,000000033148108 |
| 2   | 0,209268 | 0,45589  | 2,48874615 | 2,4882865 | 0,000000000410955 |
| 3   | 0,182017 | 0,637907 | 3,58161355 | 3,580967  | 0,000000000031480 |
| 4   | 0,161213 | 0,79912  | 4,94432183 | 4,9434693 | 0,000000000359973 |
| 5   | 0,144782 | 0,943902 | 6,60484245 | 6,6037509 | 0,000000000416017 |
| 6   | 0,056098 | 1        | 7,3890561  | 7,3878846 | 0,000000000546930 |



**Şekil 3.3.** Örnek 3.2  $\delta_L = 0,01$  için Algoritma - 3  $x_n$  nümerik çözümleri ile  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılmasını gösteren grafik



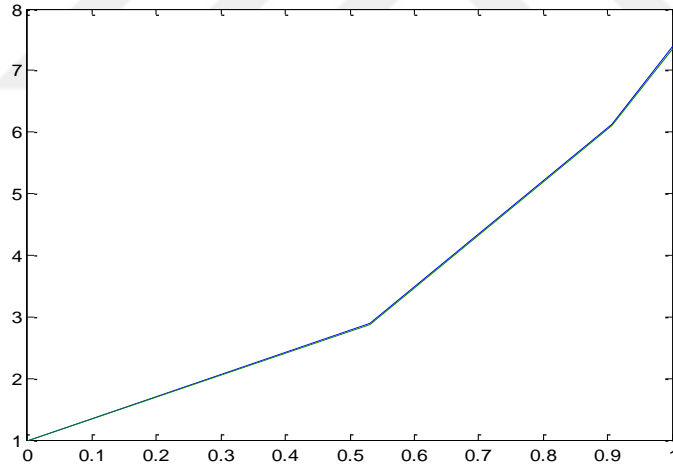
**Şekil 3.4.** Örnek 3.2  $\delta_L = 0,01$  Algoritma – 3 için,  $h_n$  değerlerinin grafiği



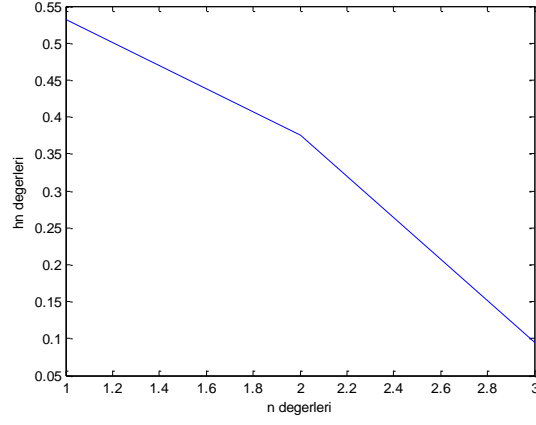
Şekil 3.5. Örnek 3.2  $\delta_L = 0,01$  için Algorithm 3  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

Çizelge 3.3. Örnek 3.2  $\delta_L = 0,1$  için Algorithm 3 çözümleri

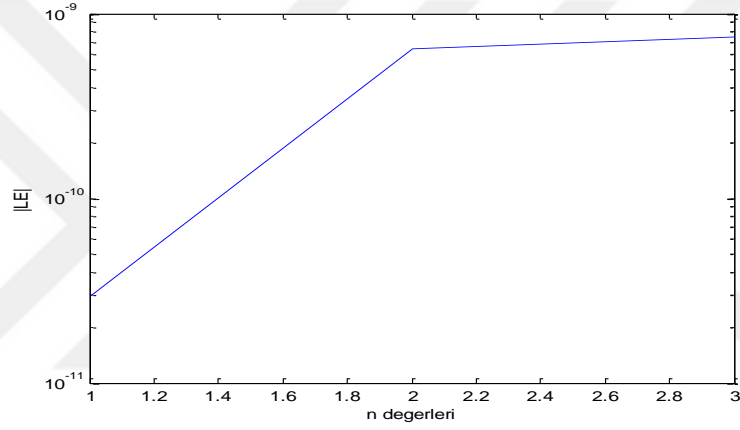
| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$   | $x_n$     | $ LE_n $          |
|-----|----------|----------|------------|-----------|-------------------|
| 0   |          | 0        | 1          | 1         |                   |
| 1   | 0,531329 | 0,531329 | 2,89405482 | 2,8804131 | 0,000000000029641 |
| 2   | 0,374661 | 0,90599  | 6,1225565  | 6,0988014 | 0,000000000648922 |
| 3   | 0,09401  | 1        | 7,3890561  | 7,3629818 | 0,000000000753577 |



Şekil 3.6. Örnek 3.2  $\delta_L = 0,1$  için Algorithm 3 ile  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılması gösteren grafik



Şekil 3.7. Örnek 3.2  $\delta_L = 0,1$  için, Algoritma – 3 ile  $h_n$  değerlerinin grafiği



Şekil 3.8. Örnek 3.2  $\delta_L = 0,1$  için Algoritma – 3 ile  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

**Not:** Yukarıdaki örneklerde çözdüğümüz diferensiyel denklemler literatürde test denklemleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerin genel halleri;  $x'' = k^2x$  veya  $x'' = -k^2x$  dir.

#### 4. NÜMERİK ÖRNEKLER

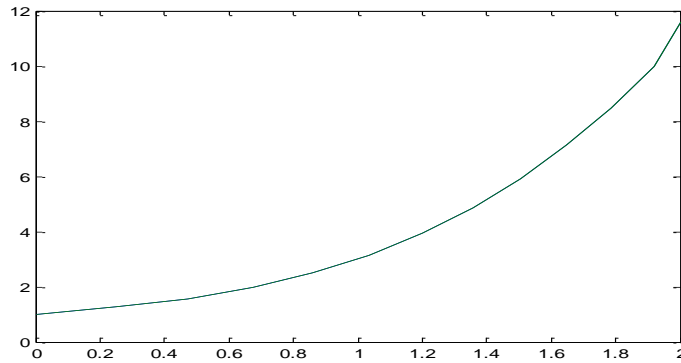
**Örnek 4.1:**  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 2, |x - x_0| \leq 3\}$  bölgesi üzerinde,

$f(t, x) = x''(t) = 6t$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge- Kutta- Nyström metodu kullanarak çözelim.

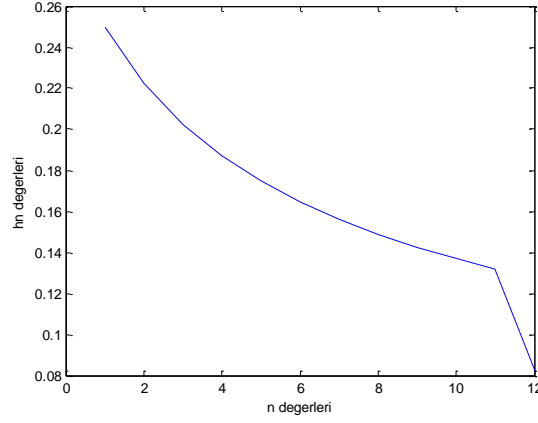
**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = t^3 + t + 1$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Picard teoremi tabanlı adım genişliği ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.

**Çizelge 4.1.** Örnek 4.1 Algoritma – 2 ile elde edilen çözümleri

| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$    | $x_n$       | $ x(t_n) - x_n $ |
|-----|----------|----------|-------------|-------------|------------------|
| 0   |          | 0        | 1           | 1           |                  |
| 1   | 0,25     | 0,25     | 1,265625    | 1,265625    | 0                |
| 2   | 0,222222 | 0,472222 | 1,577524863 | 1,577524863 | 0                |
| 3   | 0,202247 | 0,674469 | 1,981291612 | 1,981291612 | 0                |
| 4   | 0,186953 | 0,861422 | 2,50063959  | 2,50063959  | 0                |
| 5   | 0,174738 | 1,036161 | 3,148612679 | 3,148612679 | 0                |
| 6   | 0,164682 | 1,200842 | 3,932483708 | 3,932483708 | 0                |
| 7   | 0,156209 | 1,357051 | 4,856180375 | 4,856180375 | 0                |
| 8   | 0,14894  | 1,505991 | 5,921595415 | 5,921595415 | 0                |
| 9   | 0,142613 | 1,648604 | 7,129340955 | 7,129340955 | 0                |
| 10  | 0,137039 | 1,785643 | 8,479204646 | 8,479204646 | 0                |
| 11  | 0,132078 | 1,917721 | 9,970436227 | 9,970436227 | 0                |
| 12  | 0,082279 | 2        | 11,60193312 | 11,60193312 | 0                |



**Şekil 4.1.** Örnek 4.1 Algoritma – 2 ile elde edilen  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılmasını gösteren grafik



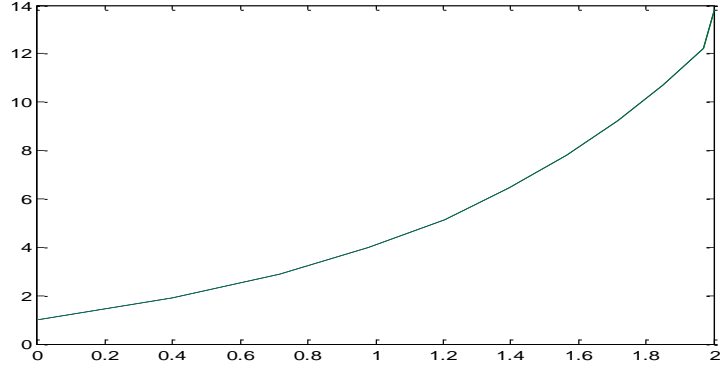
Şekil 4.2. Örnek 4.1 Algoritma – 2 ile elde edilen  $h_n$  çözümleri gösteren grafik

**Örnek 4.2:**  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 2, |x - x_0| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde,  $f(t, x) = x''(t) = x + t$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge- Kutta- Nyström metodu kullanarak çözelim.

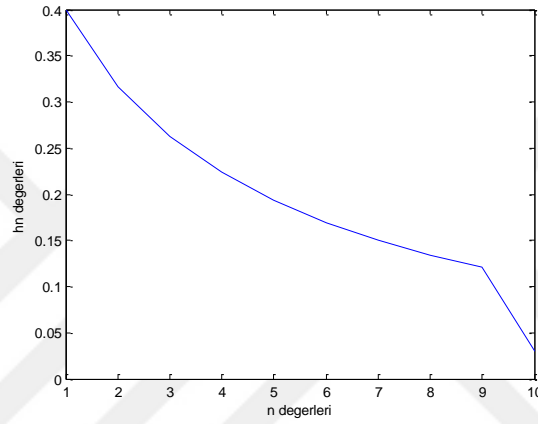
**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = -e^{-t} + 2e^t - t$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Picard teoremi tabanlı adım genişliği ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.

Çizelge 4.2. Örnek 4.2 Algoritma – 2 ile elde edilen çözümleri

| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$ | $x_n$      | $ x(t_n) - x_n $ |
|-----|----------|----------|----------|------------|------------------|
| 0   |          | 0        | 1        | 1          |                  |
| 1   | 0,4      | 0,4      | 1,913329 | 1,91306667 | 0,00000389202    |
| 2   | 0,316803 | 0,716803 | 2,890638 | 2,89026295 | 0,000070438      |
| 3   | 0,262913 | 0,979717 | 3,972269 | 3,97181196 | 0,000165447      |
| 4   | 0,223426 | 1,203142 | 5,15774  | 5,15720727 | 0,000267794      |
| 5   | 0,193044 | 1,396186 | 6,4358   | 6,43518881 | 0,000373284      |
| 6   | 0,169042 | 1,565228 | 7,793262 | 7,7925694  | 0,000480423      |
| 7   | 0,149725 | 1,714953 | 9,217906 | 9,21712686 | 0,000588647      |
| 8   | 0,13394  | 1,848893 | 10,69926 | 10,6983931 | 0,000697725      |
| 9   | 0,120866 | 1,969759 | 12,22864 | 12,2276818 | 0,00080755       |
| 10  | 0,030241 | 2        | 13,79893 | 13,7978692 | 0,000918062      |



Şekil 4.3. Örnek 4.2 Algoritma – 2 ile elde edilen  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılmasını gösteren grafik



Şekil 4.4. Örnek 4.2 Algoritma – 2 ile elde edilen  $h_n$  çözümleri gösteren grafik

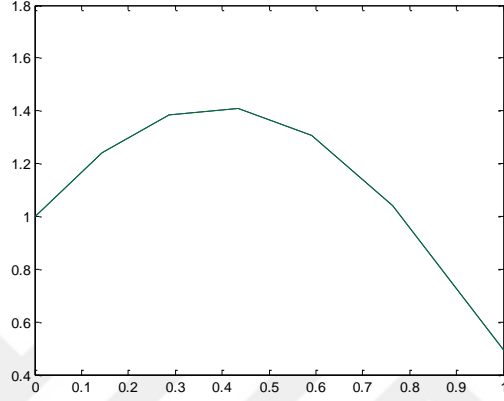
**Örnek 4.3:**  $D = \{(t, x): |t - t_0| \leq 1, |x - x_0| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde,

$f(t, x) = x''(t) = -4x$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge – Kutta – Nyström metodu kullanarak çözelim.

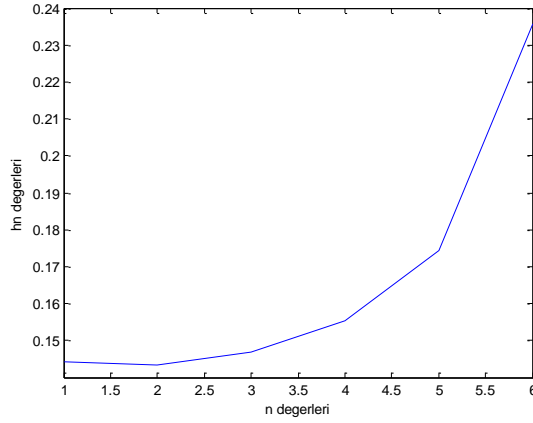
**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.  $\delta_L = 0,01$  ve  $\delta_L = 0,1$  için elde edilen sonuçlar çizelgededir.

**Çizelge 4.3.** Örnek 4.3,  $\delta_L = 0,01$  için Algoritma – 3 ile elde edilen çözümleri

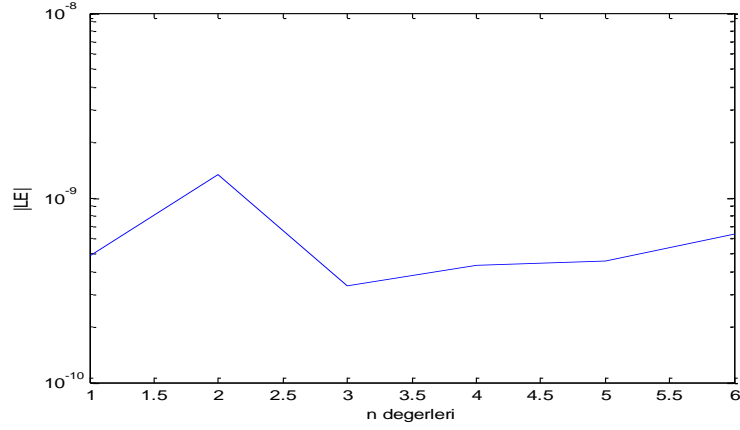
| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$   | $x_n$     | $ LE_n $        |
|-----|----------|----------|------------|-----------|-----------------|
| 0   |          | 0        |            | 1         |                 |
| 1   | 0,144225 | 0,144225 | 1,2431525  | 1,2431367 | 0,0000000004855 |
| 2   | 0,143484 | 0,287709 | 1,38315051 | 1,3831244 | 0,0000000013429 |
| 3   | 0,146826 | 0,434535 | 1,40926591 | 1,4092359 | 0,0000000003328 |
| 4   | 0,155474 | 0,59001  | 1,30552038 | 1,3054959 | 0,0000000004318 |
| 5   | 0,174374 | 0,764384 | 1,04113312 | 1,0411362 | 0,0000000004531 |
| 6   | 0,235616 | 1        | 0,49315059 | 0,4933497 | 0,0000000006394 |



**Şekil 4.5.** Örnek 4.3,  $\delta_L = 0,01$  için Algoritma -3 ile elde edilen  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılması gösteren grafik



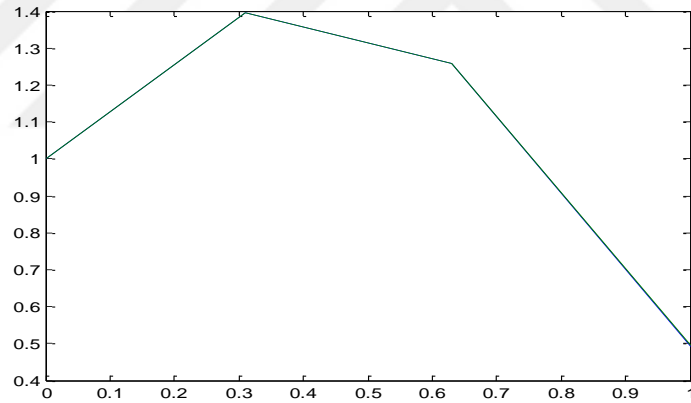
**Şekil 4.6.** Örnek 4.3  $\delta_L = 0,01$  için Algoritma – 3 ile elde edilen  $h_n$  değerlerinin grafiği



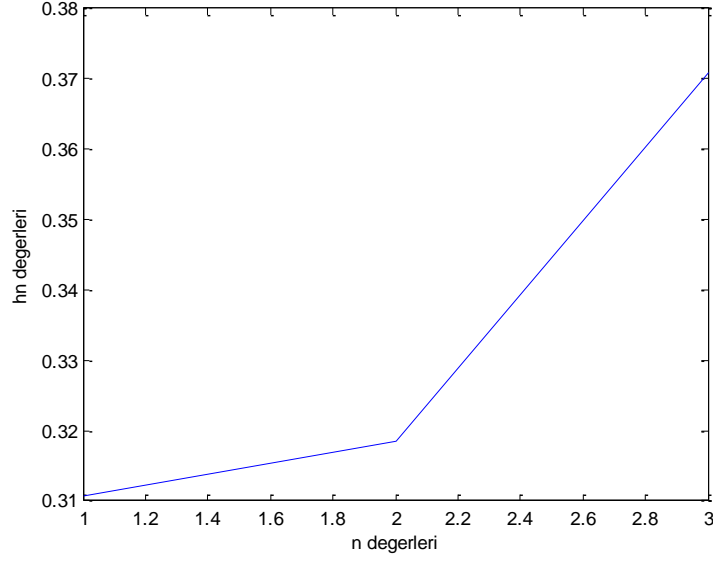
Şekil 4.7. Örnek 4.3  $\delta_L = 0,01$  için Algorithm – 3 ile elde edilen  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

Çizelge 4.4. Örnek 4.3  $\delta_L = 0,1$  için, Algorithm – 3 ile elde edilen çözümleri

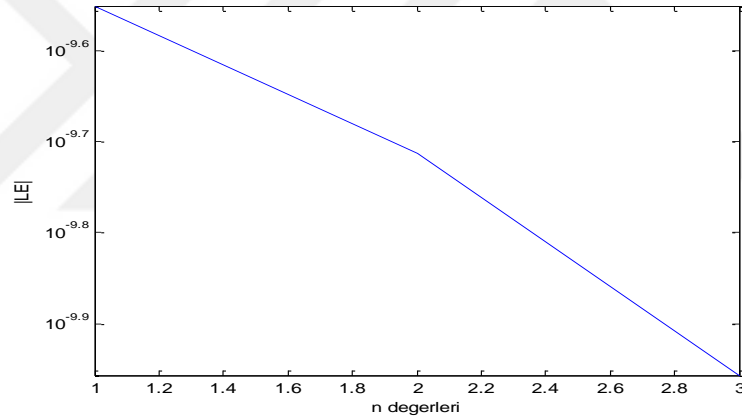
| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$   | $x_n$     | $ LE_n $        |
|-----|----------|----------|------------|-----------|-----------------|
| 0   |          | 0        | 1          | 1         |                 |
| 1   | 0,310723 | 0,310723 | 1,39524897 | 1,3945631 | 0,0000000002816 |
| 2   | 0,318443 | 0,629167 | 1,25898278 | 1,2582884 | 0,0000000001938 |
| 3   | 0,370833 | 1        | 0,49315059 | 0,4941264 | 0,0000000001104 |



Şekil 4.8. Örnek 4.3  $\delta_L = 0,1$  için Algorithm – 3 ile elde edilen  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılmasını gösteren grafik



Şekil 4.9. Örnek 4.3  $\delta_L = 0,1$  için Algoritma – 3 ile elde edilen  $h_n$  değerlerinin grafiği



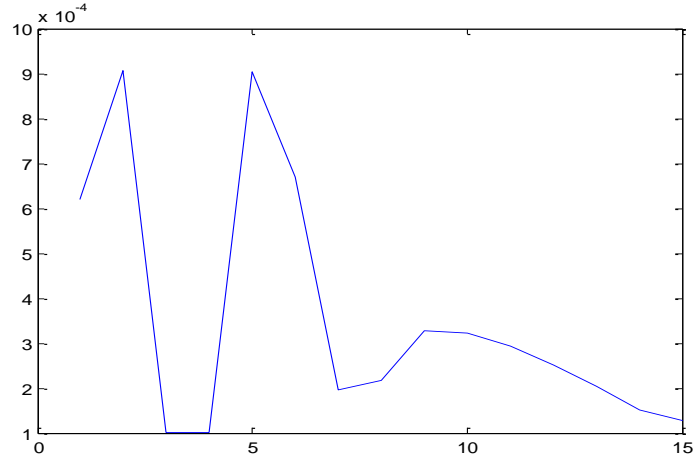
Şekil 4.10. Örnek 4.3  $\delta_L = 0,1$  için Algoritma – 3 ile elde edilen  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

**Örnek 4.4:**  $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 2, |x - x_0| \leq 2\}$  bölgesi üzerinde,

$f(t, x) = x''(t) = -3x - 4e^t \sin 2t$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $x(0) = 1$  Cauchy probleminin çözümünü Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve Runge- Kutta- Nyström metodu kullanarak çözelim.

**Çözüm:** Gerçek çözüm,  $x(t) = e^t \cos 2t$  olarak bulunur. Aşağıdaki çizelgede Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ve RKN kullanılarak elde edilen veriler verilmiştir.  $\delta_L = 0,01$ ,  $\delta_L = 0,1$  için elde edilen sonuçlar çizelgedir.

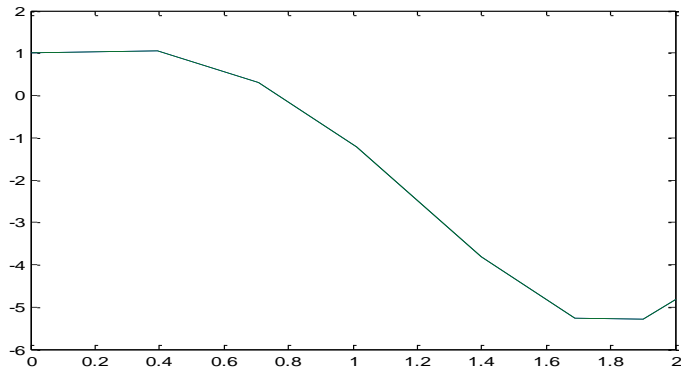




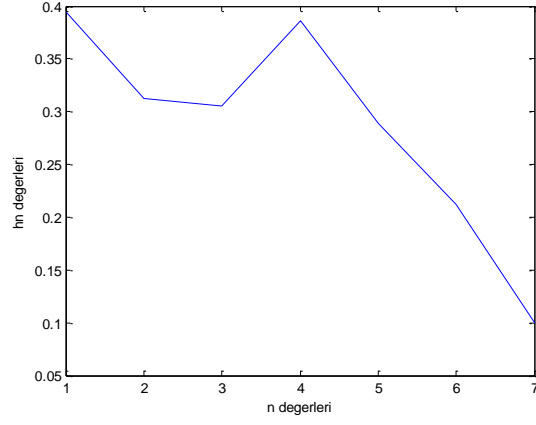
Şekil 4.13. Örnek 4.4  $\delta_L = 0,01$  için Algorithm 3 ile elde edilen  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

Çizelge 4.6. Örnek 4.4  $\delta_L = 0,1$  için, Algorithm 3 ile elde edilen çözümleri

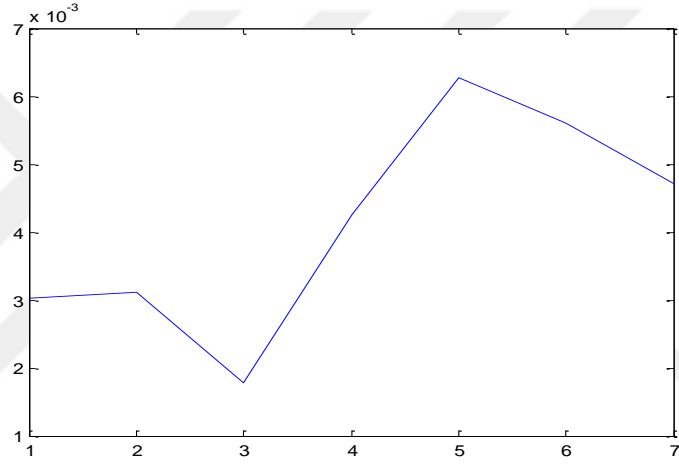
| $n$ | $h_n$    | $t_n$    | $x(t_n)$    | $x_n$      | $ LE_n $    |
|-----|----------|----------|-------------|------------|-------------|
| 0   |          | 0        | 1           | 1          |             |
| 1   | 0,394805 | 0,394805 | 1,04498464  | 1,0419592  | 0,003025484 |
| 2   | 0,312592 | 0,707396 | 0,31520302  | 0,312097   | 0,003106012 |
| 3   | 0,305326 | 1,012722 | -1,20900559 | -1,2107809 | 0,00177526  |
| 4   | 0,385716 | 1,398438 | -3,81067771 | -3,8064301 | 0,004247579 |
| 5   | 0,289229 | 1,687666 | -5,25981971 | -5,2535416 | 0,006278145 |
| 6   | 0,21254  | 1,900206 | -5,28772949 | -5,2821314 | 0,005598077 |
| 7   | 0,099794 | 2        | -4,82980938 | -4,8251051 | 0,004704234 |



Şekil 4.14. Örnek 4.4  $\delta_L = 0,1$  için Algorithm 3 ile elde edilen  $x_n$  nümerik çözümleri ve  $x(t_n)$  gerçek çözümlerinin karşılaştırılması gösteren grafik



Şekil 4.15. Örnek 4.4  $\delta_L = 0,1$  için Algoritma – 3 ile elde edilen  $h_n$  değerlerinin grafiği



Şekil 4.16. Örnek 4.4  $\delta_L = 0,1$  için Algoritma – 3 ile elde edilen  $|LE_n|$  değerlerinin grafiği

**Not:** Örnek 4.4 ün analitik çözümü Chang ve Gnepp (1984) de verilmiştir.

**Not:** Bu tez çalışmasında grafikler MATLAB kullanarak çizilmiştir.

## 5. SONUÇLAR

Bir Cauchy probleminin çözümünü aramadan önce varlık ve tekliği ile ilgili araştırma yapmak gerekir. Bu çalışmada birinci ve ikinci mertebeden Cauchy problemleri ele alındığı için bu problemlerle ilgili varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Literatürlerde genellikle birinci mertebeden Cauchy problemlerinin ve birinci mertebeden sistemlerin varlık ve teklik teoremlerine sıklıkla rastlanıyor. Ancak ikinci mertebeden ve tüm yüksek mertebeden Cauchy problemlerinin varlık ve tekliği ile ilgili çok az kaynak mevcuttur. Bunun için yüksek mertebeden diferensiyel denklemler kolaylıkla birinci mertebeden sistemlere dönüştürebildiği için sistemlerle ilgili verilen varlık ve teklik teoremleri kullanılmıştır.

Bu çalışmada, Picard teoremi tabanlı adım genişliği ile verilen strateji temel alınarak benzer yolla ikinci mertebeden türevi içermeyen Cauchy problemi için uygulanabildiğini gördük.

$x'' = f(t, x)$ ,  $x'(t_0) = x'_0$ ,  $x(t_0) = x_0$  ikinci mertebeden bir Cauchy problemi kullanıldığı için bu tür denklemlerin çözümünde kullanılan bir metot olan Runge – Kutta – Nyström metodu kullanılmıştır. Ayrıca bu metodun lokal hata analizi Taylor seri açılımı ile yapıldıktan sonra değişken adım genişliğinde kullanılan  $h_n$  adım genişliği elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Burden, R. L. and Faires, D. J., 2010, Numerical Analysis, *Brooks/Cole Cengage Learning*, Ninth Edition, Boston, USA.
- Chang, S. H. and Gnepp, P. C., 1984, A direct method for the numerical solution of  $y''=f(x,y)$ , *Calcolo Journal*, 369-377.
- Çelik Kızıllkan, G., 2004, Başlangıç Değer Problemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Tespiti, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Çelik Kızıllkan, G., 2009, Diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonunda adım genişliği stratejileri, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Çelik Kızıllkan, G. ve Aydın, K., 2005, Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi, *S. Ü. Fen Ed. Fak. Fen Dergisi*, vol.25, 79-86.
- Çelik Kızıllkan, G., Duman, A. ve Aydın, K., 2016, Bazı SIR Salgın Hastalık Modellerinin Değişken Adım Genişliği Stratejisi ile Analizi, *Karaelmas Fen ve Müh. Dergisi*, vol.6, 203-210.
- Çelik Kızıllkan, G. ve Aydın, K., 2011, Lineer Sistemler İçin Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejileri, *SDU Journal of Science (E-Journal)*, 6 (2), 149-159.
- Edwards, C. H. and Penney D. E., 2008, Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, (çeviri ed.) Akın, Ö., *Palme Yayıncılık*, Ankara.
- Gear, W., 1971, Numerical initial value problems in ordinary differential equations, *Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs*, s. 4-5, New Jersey.
- Güngör, F., 2010, Diferansiyel Denklemler, *İTÜ Vakfı Yayınları*, 978-975-7463, İstanbul, 17-7.
- Halilov, H., 2003, Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebirin Elemanları, 975-8431-98-6, *Literatür Yayıncılık*, İstanbul.
- Loan, C. F., 2000, Introduction to Scientific Computing, *Prentice- Hall*, London.
- Mermerkaya, B., 2009, İki Nokta Sınır - Değer Problemlerinin Varlık Teoremleri, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.
- Ramos, H. and Vigo-Aguiar, J., 2006, Variable stepsize implementation of multistep methods for  $y'' = f(x, y, y')$ , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 192, 114-131.

- Ramos, H. and Vigo-Aguiar, J., 2007, Variable stepsize Chebyshev- type methods for the integration of second order I.V.P.' s, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204, 102-113.
- Rice, G. and Do, D., 1995, Applied mathematics and modelling for chemical engineers, *John Wiley and Sons*, Canada.
- Shampine, L.F., Allen, R.C. and Pruess, S., 1996, Fundamentals of Numerical Computing, *John Wiley&Sons*, INC, New York.
- Scheid, F., 1988, Nümerik Analiz, (çeviri ed.) Hacısalıhoğlu, H. H. ve Köksal, A., *Nobel Yayın Dağıtım Ltd. Őti*, s.l.



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Andak Niyaz Hoşdavran  
**Uyruğu** : Türkiye Cumhuriyeti  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Meram 21.11.1990  
**e-mail** : [andakniyaz@gmail.com](mailto:andakniyaz@gmail.com)

### EĞİTİM

| Derece        | Adı, İlçe, İl                                      | Bitirme Yılı |
|---------------|--|--------------|
| Lise          | : Selçuklu Lisesi,                                 | 2009         |
| Üniversite    | : Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik      | 2015         |
| Yüksek Lisans | : Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Ens. Matematik |              |
| Doktora       | :  |              |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl       | Kurum              | Görevi   |
|-----------|--------------------|----------|
| 2018-2019 | Selçuklu IMKB MTAL | Öğretmen |

### UZMANLIK ALANI

### YABANCI DİLLER

### BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

### YAYINLAR

Hoşdavran, A.N., Çelik Kızıllan, G., Çıbıkdiken, A.O., Aydın, K., Variable Step Size Strategy for Numerical Solutions of Differential Equations  $x'' = f(t,x)$ , *International Conference on Mathematics and Mathematics Education 2019 (ICMME 2019)*, 11-13 July 2019, Selçuk University, Konya, Turkey.