



**MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN VE LİSE ÖĞRENCİLERİNİN
PROBLEM ÇÖZME SÜREÇLERİNDE ANAHTAR NOKTA
BELİRLEME DURUMLARININ İNCELENMESİ**

Nur Şebnem Bakır

DOKTORA TEZİ

**MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS, 2019

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 6 (altı) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Nur Şebnem
Soyadı : Bakır
Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
İmza :
Teslim tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Matematik Öğretmenlerinin ve Lise Öğrencilerinin Problem Çözme Süreçlerinde Anahtar Nokta Belirleme Durumlarının İncelenmesi

İngilizce Adı : Investigating Mathematics Teachers and High School Students' Key Point Determination Status in Problem Solving Process

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı : Nur Şebnem Bakır

İmza :

JÜRİ ONAY SAYFASI

Nur Şebnem Bakır tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmenlerinin ve Lise Öğrencilerinin Problem Çözme Süreçlerinde Anahtar Nokta Belirleme Durumlarının İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik ABD, Ankara Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Hüseyin AKKUŞ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Hacettepe Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/08/2019

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olması için yeterli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Selma YEL

Eğitim Bilimleri Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Araştırmanın planlanmasında ve yürütülmesinde fikirleriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, bana her konuda rehberlik eden, saygı ve sevgi duyduğum, emeklerini ödeyemeyeceğim tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ahmet ARIKAN' a teşekkürlerimi sunuyorum. Tezin çeşitli aşamalarında değerli görüş ve düşüncelerinden faydalandığım, çalışma ile ilgili olarak eksik noktaları görmemde ve bunları gidermemde, bana büyük katkıda bulunan hocalarım Sayın Prof. Dr. Ziya ARGÜN' e ve Sayın Doç. Dr. Hüseyin AKKUŞ' a, önemli yorum ve değerlendirmeleri ile katkıda bulunan jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU' na, ve Sayın Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR' e teşekkürlerimi sunuyorum. Çalışmaya gönüllü olarak katılan, emek ve zaman harcayan matematik öğretmenlerine ve öğrencilere katkılarından dolayı teşekkür ederim. En ümitsiz olduğum zamanlarda beni cesaretlendiren arkadaşım Arş. Gör. Dr. İlknur Gülşen TURGUT' a desteği için çok teşekkür ediyorum. Bu sürecin başından itibaren bana en büyük gücü veren, aldığım her kararda yanımda olan ve emeklerinin karşılığını asla ödeyemeyeceğim sevgili annem Hava BAKIR' a ve babam Mustafa BAKIR' a, her zaman desteğini hissettiğim sevgili kardeşim Dr. Mesut BAKIR' a içtenlikle çok teşekkür ediyorum.

**MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN ve LİSE ÖĞRENCİLERİNİN
PROBLEM ÇÖZME SÜREÇLERİNDE ANAHTAR NOKTA
BELİRLEME DURUMLARININ İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)**

**Nur Şebnem Bakır
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos, 2019**

ÖZ

Bu tez çalışmasında matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumlarını incelemek amaçlanmıştır. Araştırmanın katılımcılarını beş matematik öğretmeni ve on lise öğrencisi oluşturmaktadır. Veri toplama araçları yarı yapılandırılmış görüşmeler, öğretmenlerin ve öğrencilerin çalışma kâğıtları, araştırmacının gözlem notları olmuştur. Bu çalışmada veri analizi için durum çalışmasının ve gömülü teorinin teknikleri kullanılmıştır. Uygulamanın ilk kısmında öğretmenlere problemler içeren çalışma kâğıtları sunulmuştur. Çalışmada yer alan problemler Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi (ÖSYM) tarafından hazırlanmış olan üniversiteye giriş sınav sorularından seçilmiş olan matematiksel problemlerdir. Bu çalışmada anahtar nokta kavramı; bireyin bir matematiksel problemin çözüm sürecini tamamlayabilmesi için yapılacak görevler içinde çözüm için en kritik olan bilgi, beceri veya strateji ile ilişkili olan matematiksel bir fikir anlamında kullanılmıştır. Öğretmenler ile görüşmeler yapılmadan önce problemlerin çözümü için en kritik olan anahtar noktalar araştırmacı tarafından belirlenmiştir. Öğretmenler çalışma kâğıtlarında yer alan problemleri çözdükten sonra, öğretmenlerden anahtar noktaları belirlemeleri istenmiştir. Amaç anahtar noktaları belirlemek olduğundan, isteyen öğretmenler ile çözümler paylaşılmıştır. Uygulamanın ikinci kısmında öğrencilere problemler içeren çalışma kâğıtları sunulmuştur. Problem çözme sürecini tamamlayan öğrencilerden anahtar noktaları belirlemeleri istenmiştir. Problem çözme sürecinde güçlük yaşayan öğrencilerle ise öğretmenlerinin belirlediği anahtar noktalar paylaşılmıştır. Bu şekilde bu süreci tamamlayan öğrencilerden de anahtar noktaları belirlemeleri istenmiştir. Bu görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Görüşmelerden elde edilen veriler ise gömülü teorinin tekniklerine göre analiz edilmiştir.

Öğretmenlerin ve öğrencilerin anahtar nokta belirleme durumları arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koymak amacıyla iki uygulamadan gelen veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda öğretmenlerin problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumları ortaya konmuştur. Katılımcı öğretmenlerin belirledikleri anahtar noktalar incelendiğinde bazı aynı anahtar noktalar problem çözme sürecinde en kritik olarak belirlenmiştir. Lise öğrencilerinin problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumları ortaya konmuştur. Öğrencilerin problem çözme sürecinde güçlük yaşadığı bazı durumlarda öğretmenlerin belirlediği anahtar noktalar katkı sağlamıştır. Bazı durumlarda ise öğrenci çözüm sürecinde ilerlemek için başka bir öğrencinin belirlediği anahtar noktaya ihtiyaç duymuştur. Öğretmenlerin ve öğrencilerin problem çözme sürecinde anahtar nokta belirleme durumlarında benzerliklerin ve farklılıkların olduğu durumlar olmuştur. Öğrencilerin anahtar noktalardan yararlandıklarında problem çözme performanslarının arttığı gözlemlenmiştir. Öğretmenlerin düşüncesi de problem çözme süreçlerinde anahtar noktaları belirleme durumlarının öğrencilerin problem çözme performanslarına katkısı olduğunu yönündedir.

Anahtar Kelimeler : Alt anahtar nokta, anahtar nokta, gömülü teori, lise öğrencileri, matematik öğretmenleri, matematiksel problem çözme
Sayfa Adedi : 318
Danışman : Prof. Dr. Ahmet Arıkan

INVESTIGATING MATHEMATICS TEACHER and HIGH SCHOOL STUDENTS' KEY POINT DETERMINATION STATUS in PROBLEM SOLVING PROCESS

(Ph.D Thesis)

Nur Şebnem Bakır

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

August, 2019

ABSTRACT

In this thesis, it is aimed to examine the key points of mathematics teachers and students in problem solving processes. The participants of the study were five mathematics teachers and ten high school students. For the tools of collected data; semi-structured interviews, teachers' and students' worksheets, and researcher's observation notes were used. In this study, techniques of case study and embedded theory are used for data analysis. In the first part of the application, worksheets including problems were presented to the teachers. The problems in the study were the mathematical problems chosen from the university entrance exam questions prepared by OSYM. In this study, the key point concept; It is used in the sense of a mathematical idea which is related to knowledge, skill or strategy which is the most critical for the solution of the tasks to be done in order for the individual to complete the solution process of a mathematical problem. Before the interviews with teachers, the most critical points for solving the problems were determined by the researcher. After the teachers solved the problems in the worksheets, they were asked to identify the key points. Since the aim is to identify the key points, the solutions were shared with some teachers. In the second part of the application, worksheets containing problems were presented to the students. The students who completed the problem solving process were asked to identify the key points. The key points identified by the teachers were shared with the students who had difficulty in problem solving process. In this way, the students who completed the

problem solving process were asked to identify the key points, either. These interviews were recorded with a voice recorder. The data, obtained from the interviews, were analyzed according to the techniques of grounded theory. In order to reveal similarities and differences between teachers and students' key point determination, the data from two applications were analyzed with descriptive analysis method. As a result of the research, key point determination of teachers in problem solving processes were revealed. When the key points identified by the participating teachers were examined, some of the same key points were identified as the most critical in the problem solving process. The key points in the problem solving process of high school students were revealed. Key points identified by the teachers contributed in some cases in which students had difficulties in problem solving process. In some cases, in order to proceed that with the solution processes, one of the students needed the key point that another student had set. There have been similarities and differences in teachers 'and students' problem-solving process in determining key points. It was observed that the problem solving performance of the students increased when they benefited from the key points. Teachers' opinion is that determining the key points in the problem solving process contributes to the problem solving performance of the students.

Keywords : Sub-key point, key point, grounded theory, high school students, mathematics teachers, mathematical problem solving.

Page Number : 318

Supervisor : Prof. Dr. Ahmet Arıkan

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZ	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER	ix
TABLolar LİSTESİ	xiv
ŞEKİLLER LİSTESİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xxvii
BÖLÜM I	1
GİRİŞ.....	1
1.1.Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Problemi.....	6
1.3. Alt Problemler	6
1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi	6
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları	9
1.7. Tanımlar.....	10
BÖLÜM II.....	11

KURAMSAL ÇERÇEVE	11
2.1. Bilişsel Yaklaşımlar ve Problem Çözme	11
2.2. Üstbiliş	12
2.3. Üstbiliş ve Problem Çözme	14
2.4. Anahtar nokta ve Alt Anahtar Nokta	15
2.5. İlgili Araştırmalar	20
BÖLÜM III	25
YÖNTEM	25
3.1. Araştırmanın Modeli	25
3.2. Katılımcılar	26
3.3. Katılımcıları Seçimi	26
3.4. Katılımcılar ile İlgili Kişisel Bilgiler	28
3.5. Pilot Uygulama	31
3.6. Veri Toplama Süreci	32
3.7. Veri Toplama Aracı	35
3.8. Verilerin Analizi	63
3.9. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlilik	67
BÖLÜM IV	69
BULGULAR VE YORUM	69
4.1. Birinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum	69
4.1.1. Polinomlar ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum	69
4.1.1.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Polinomlar ile İlgili Problemi</i> <i>Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	71
4.1.2. Maksimum-Minimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum	86
4.1.2.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Maksimum-Minimum ile İlgili</i> <i>Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	87

4.1.3. Trigonometri ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum ...	101
4.1.3.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Trigonometri ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	102
4.1.4. Bölünebilme ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	115
4.1.4.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Bölünebilme ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	116
4.1.5. Olasılık ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	127
4.1.5.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Olasılık ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	128
4.1.6. Kombinasyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	138
4.1.6.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Kombinasyon ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	139
4.1.7. Modüler Aritmetik ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	145
4.1.7.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Modüler Aritmetik ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	146
4.1.8. Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	156
4.1.8.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	157
4.1.9. Maksimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	168
4.1.9.1. <i>Matematik Öğretmenlerinin Maksimum ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	169
4.2. İkinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	180
4.2.1. Polinomlar ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum	180
4.2.1.1. <i>Lise Öğrencilerinin Polinomlar ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	181
4.2.2. Maksimum-Minimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	193
4.2.2.1. <i>Lise Öğrencilerinin Maksimum-Minimum ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	193

4.2.3. Trigonometri ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum ...	203
4.2.3.1. <i>Lise Öğrencilerinin Trigonometri ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	203
4.2.4. Bölünebilme ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	211
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Bölünebilme ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	211
4.2.5. Olasılık ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	219
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Olasılık ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	219
4.2.6. Kombinasyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	228
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Kombinasyon ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	228
4.2.7. Modüler Aritmetik ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	236
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Modüler Aritmetik ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	236
4.2.8. Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	244
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	244
4.2.9. Maksimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	251
4.2.4.1. <i>Lise Öğrencilerinin Maksimum ile İlgili Problem Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri</i>	251
4.3. Üçüncü Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	257
4.3.1. Polinomlar ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum	257
4.3.2. Maksimum-Minimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	262
4.3.3. Trigonometri ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum ...	263
4.3.4. Bölünebilme ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	265
4.3.5. Olasılık ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	266

4.3.6. Kombinasyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	268
4.3.7. Modüler Aritmetik ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	270
4.3.8. Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	272
4.3.9. Maksimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	278
BÖLÜM V	281
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	281
5.1. Birinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler	281
5.2. İkinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler	284
5.3. Üçüncü Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler	287
KAYNAKLAR.....	290
EKLER.....	297
Ek- 1 Araştırma İzin Belgesi.....	298
Ek-2 Görüşme Formu	300
Ek- 3 Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktalar	302

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1. Öğrencilerin Bilgileri.....	30
Tablo 3.2. Problemlerin Ait olduğu Sınav Bilgileri	34
Tablo 3.3. Problem Bilgileri.....	50
Tablo 3.4. Problem ve Katılımcı Öğrenci Eşleşmesi.....	50
Tablo 3.5. Polinomlar ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde Belirlenen AN'ler ve AAN'ler	53
Tablo 3.6. Veri Analizinde Yapılan Kodlamalar	64
Tablo 3.7. Katılımcı Teyidi.....	68

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.	Araştırma deseni	27
Şekil 3.2.	Oturumların yapıldığı yer.....	34
Şekil 3.3.	Araştırmacının polinomlar ile ilgili problem çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	66
Şekil 4.1.	Polinomlar ile ilgili problem.	71
Şekil 4.2.	Polinomlar ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	71
Şekil 4.3.	Kök olduğunu anlama kategorisinin alt kategorilerinin ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi.....	72
Şekil 4.4.	M1'in "kökleri adlandırma" boyutuna ait çözümü	73
Şekil 4.5.	M1'in "bağlaca göre yorumlama" boyutuna ait çözümü.....	74
Şekil 4.6.	"Polinomu çarpan cinsinden yazma" kategorisinin alt kategorileri ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi	75
Şekil 4.7.	M1 öğretmenin "kök çarpan ilişkisini bilme" alt kategorisine ait çözümü.....	75
Şekil 4.8.	M5'in "kök çarpan ilişkisini bilme" alt kategorisine ait çözümü	77
Şekil 4.9.	M1'in "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	77
Şekil 4.10.	M1'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" kategorisine ait çözümü.....	78
Şekil 4.11.	M3'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	79
Şekil 4.12.	M5'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	79
Şekil 4.13.	Kök katsayı ilişkisini kullanma kategorisinin alt kategorileri ve boyutların eksen üzerinde gösterimi	80
Şekil 4.14.	M3'ün "kök katsayı ilişkisini kullanma" kategorisine ait çözümü	80
Şekil 4.15.	M4'ün "kök katsayı ilişkisini kullanma" kategorisine ait çözümü	81
Şekil 4.16.	Kökü yerine yazmayı düşünme kategorisinin alt kategorilerinin eksen üzerinde gösterimi.....	82
Şekil 4.17.	M4'ün "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	82

Şekil 4.18.	M5'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü	84
Şekil 4.19.	Matematik öğretmenlerinin polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler ve boyutların eksen üzerinde gösterimi	85
Şekil 4.20.	Maksimum-minimum ile ilgili problem.....	86
Şekil 4.21.	Maksimum-minimum ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	86
Şekil 4.22.	"uzunluğu adlandırma" kategorisinin alt kategorilerinin eksen üzerinde gösterimi.....	87
Şekil 4.23.	M1'in "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü.....	87
Şekil 4.24.	M2'nin "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü.....	88
Şekil 4.25.	M3'ün "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisi çözümü	88
Şekil 4.26.	M3'ün "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü.....	89
Şekil 4.27.	M4'ün "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	89
Şekil 4.28.	M5'in "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	89
Şekil 4.29.	"alanı ifade etme" kategorisinin alt kategorileri ve boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	90
Şekil 4.30.	M1'in "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü.....	90
Şekil 4.31.	M2'nin "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü.....	91
Şekil 4.32.	M3'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	91
Şekil 4.33.	M4'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	91
Şekil 4.34.	"alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisinin boyutlarının eksen üzerinde gösterimi.....	92
Şekil 4.35.	AN'nin farklı çözüm yollarına ayrıldığı durum.....	92
Şekil 4.36.	M1'in "geniş büyük ilişkisini kurma" alt boyutuna ait çözümü	94
Şekil 4.37.	M1'in "tepe noktası kavramını bilme" alt boyutuna ait çözümü	95
Şekil 4.38.	"tepe noktası kavramını bilme" alt boyutunun boyutlarının eksen üzerinde gösterimi.....	95
Şekil 4.39.	M1'in "tepe noktasını elde etme" alt boyutuna ait çözümü.....	96
Şekil 4.40.	M1'in "türev alma" alt boyutuna ait çözümü.....	97
Şekil 4.41.	M1'in "geniş maksimum ilişkisinin kurma" alt boyutuna ait çözümü	97
Şekil 4.42.	M1'in "türev yardımıyla düşünme" kategorisi ile ilişkilendirme yapması.....	97
Şekil 4.43.	M1'in "kare gibi düşünme" boyutuna ait çözümü	98
Şekil 4.44.	M1'in "değişimi izleme" alt boyutuna ait çözümü	98
Şekil 4.45.	M5'in "değişimi izleme" alt boyutuna ait çözümü	99

Şekil 4.46.	Matematik öğretmenlerinin maksimum problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi.....	100
Şekil 4.47.	Trigonometri ile ilgili problem	101
Şekil 4.48.	Trigonometri ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	102
Şekil 4.49.	M3 öğretmenin “dik üçgen oluşturma” kategorisine ait çözümü	103
Şekil 4.50.	M5’in öğretmenin “dik üçgen oluşturma kategorisine ait çözümü.....	103
Şekil 4.51.	M2’in “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisine ait çözümü	104
Şekil 4.52.	M1’in “dik indirme” alt kategorisine ait çözümü	104
Şekil 4.53.	M4’ün “kenar uzunluklarını elde etme” alt kategorisine ait çözümü	107
Şekil 4.54.	M3’ün “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü	107
Şekil 4.55.	M4’ün “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü	107
Şekil 4.56.	M5’in “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü.....	108
Şekil 4.57.	M1’in “tanjantı istenen açı ile diğer açıları ilişki kurma” kategorisi çözümü	108
Şekil 4.58.	AN’nin farklı çözüm yollarına ayrıldığı durum.....	109
Şekil 4.59.	M3’ün “iki açının farkı biçiminde yazma” alt kategorisine ait çözümü.....	109
Şekil 4.60.	M1’in “tanjantın fark formülünü bilme” boyutuna ait çözümü	110
Şekil 4.61.	M5’in “tanjantın toplam formülünü bilme” boyutuna ait çözümü	110
Şekil 4.62.	M2’nin “toplamlarını 90° bulma” alt kategorisine ait çözümü.....	111
Şekil 4.63.	M2’nin “tümler açıları kullanma” boyutuna ait çözümü	111
Şekil 4.64.	M4’ün “sinüs teoremini kullanma” alt kategorisi ne ait çözümü.....	113
Şekil 4.65.	Matematik öğretmenlerinin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	114
Şekil 4.66.	Bölünebilme ile ilgili problem	115
Şekil 4.67.	Bölünebilme ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	115
Şekil 4.68.	“belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisine ait alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	116
Şekil 4.69.	M1’in “belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisine ait çözümü	116
Şekil 4.70.	M2’nin “tek sayı biçiminde yazma” boyutuna ait çözümü.....	117
Şekil 4.71.	M5’in “tek sayıyı genel biçimde yazma” boyutuna ait çözümü	118
Şekil 4.72.	M1’in “birler basamağını bulma” alt boyutuna ait çözümü.....	118
Şekil 4.73.	M4’ün “birler basamağını bulma” alt boyutuna ait çözümü.....	119
Şekil 4.74.	M5’in “birler basamağını bulma” alt boyutuna ait çözümü.....	119

Şekil 4.75. M5'in "birler basamağını bulma" alt boyutu ile "tek sayıların özelliğini kullanma" boyutu arasında ilişki kurması.....	120
Şekil 4.76. "denklem kurma" kategorisinin alt kategorilerinin ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi.....	120
Şekil 4.77. M1'in "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	120
Şekil 4.78. M2'nin "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	121
Şekil 4.79. M3'ün "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	121
Şekil 4.80. M4'ün "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	121
Şekil 4.81. M5'in "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	121
Şekil 4.82. M2'nin "çarpan kat ilişkisini kurma" boyutuna ait çözümü.....	122
Şekil 4.83. M1'in "çarpan bölen ilişkisini kurma" alt kategorisine ait çözümü.....	122
Şekil 4.84. M1'in boyutların oluşmasına ait çözümü.....	123
Şekil 4.85. M5'in "5 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü.....	123
Şekil 4.86. M1'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü.....	124
Şekil 4.87. M5'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü.....	124
Şekil 4.88. M2'nin "çözümleme yapma" alt kategorisine ait çözümü.....	124
Şekil 4.89. Matematik öğretmenlerinin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	126
Şekil 4.90. Olasılık ile ilgili problem.....	127
Şekil 4.91. Olasılık ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	127
Şekil 4.92. M1'in "verileri belirleme" kategorisine ait çözümü.....	128
Şekil 4.93. M3'ün "verileri düzenleme" alt kategorisine ait çözümü.....	128
Şekil 4.94. M4'ün "verileri düzenleme" alt kategorisine ait çözümü.....	129
Şekil 4.95. M5'in "verileri adlandırma" alt kategorisine ait çözümü.....	130
Şekil 4.96. M5'in "en az bir ifadesini anlama" boyutuna ait çözümü.....	130
Şekil 4.97. M1'in "iki bilinmeyen kullanma" boyutuna ait çözümü.....	131
Şekil 4.98. M2 öğretmenin "ikiden fazla bilinmeyen kullanma" boyutuna ait çözümü ...	131
Şekil 4.99. M2'nin "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	132
Şekil 4.100 M1'in "mantıklı değer verme" kategorisine ait çözümü.....	133
Şekil 4.101. M3'ün "mantıklı değer verme" kategorisine ait çözümü.....	134
Şekil 4.102. M5'in "mantıklı değer verme" kategorisine ait çözümü.....	134
Şekil 4.103. M4'ün "tahminde bulunma" alt kategorisine ait çözümü.....	134
Şekil 4.104. M2'nin "değerlendirme yapma" kategorisine ait çözümü.....	135
Şekil 4.105. M3'ün "değerlendirme yapma" alt kategorisine ait çözümü.....	135

Şekil 4.106.	M4'ün “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü.....	135
Şekil 4.107.	M5'in “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü.....	136
Şekil 4.108.	Matematik öğretmenlerinin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	137
Şekil 4.109.	Kombinasyon ile ilgili problem.....	138
Şekil 4.110.	Kombinasyon problemi ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	138
Şekil 4.111.	M1'in “kesişime odaklanma” kategorisine ait çözümü.....	139
Şekil 4.112.	M5'in “kesişimi ayırma” alt kategorisine ait çözümü	140
Şekil 4.113.	M2'nin “kesişimde olan bölgeden seçme” boyutuna ait çözümü.....	140
Şekil 4.114.	M1'in “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutuna ait çözümü.....	141
Şekil 4.115.	M4'ün “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutuna ait çözümü.....	141
Şekil 4.116.	M3'ün “seçenekleri kontrol etme” alt boyutuna ait çözümü.....	142
Şekil 4.117.	M2'nin “kesişimde olmayan bölgeden seçme” boyutuna ait çözümü.....	142
Şekil 4.118.	M4'ün “kesişimi ayırmama” alt kategorisine ait çözümü	143
Şekil 4.119.	Matematik öğretmenlerinin kombinasyon problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi	144
Şekil 4.120.	Modüler aritmetik ile ilgili problem	145
Şekil 4.121.	Modüler aritmetik ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	145
Şekil 4.122.	M1'in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü	146
Şekil 4.123.	M3'ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü.....	146
Şekil 4.124.	M4'ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü.....	146
Şekil 4.125.	M5'in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü	146
Şekil 4.126.	M1'in “ortak çarpan parantezine alma” alt kategorisine ait çözümü	147
Şekil 4.127.	M1'in “genelden özele ilişki kurma” boyutuna ait çözümü	147
Şekil 4.128.	M1'in “örneklendirme” alt boyutuna ait çözümü.....	148
Şekil 4.129.	M1'in “genelleme” kategorisine ait çözümü	148
Şekil 4.130.	M5'in “genel biçimde yazma” boyutuna ait çözümü	149
Şekil 4.131.	M2'nin “modüler toplama” boyutuna ait çözümü.....	151
Şekil 4.132.	M4'ün “modüler toplama” boyutuna ait çözümü	151
Şekil 4.133.	M2'nin “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü	151
Şekil 4.134.	M3'ün “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü	151

Şekil 4.135.	M4'ün “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü	152
Şekil 4.136.	M5'in “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü.....	152
Şekil 4.137.	M1'in “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü	152
Şekil 4.138.	M2'nin “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü	153
Şekil 4.139.	M3'ün “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü	153
Şekil 4.140.	M4 öğretmenin “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü.....	153
Şekil 4.141.	M5'in “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü	153
Şekil 4.142.	Matematik öğretmenlerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	155
Şekil 4.143.	Polinom fonksiyon ile ilgili problem.....	156
Şekil 4.144.	Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategori ve alt kategorileri	156
Şekil 4.145.	M5'in “çift fonksiyon tanımını kullanma” alt kategorisine ait çözümü	157
Şekil 4.146.	M1'in “çift fonksiyon olduğunu anlama” boyutuna ait çözümü	158
Şekil 4.147.	M2'nin “çift fonksiyon olduğunu anlama” boyutuna ait çözümü	158
Şekil 4.148.	M3'ün “çift fonksiyon olduğunu anlama” boyutuna ait çözümü	158
Şekil 4.149.	M4 'ün “ $P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma” boyutuna ait çözümü.....	158
Şekil 4.150.	M1'in “dört denklem elde etme” alt boyutuna ait çözümü	159
Şekil 4.151.	M1'in “kökleri elde etme” alt boyutuna ait çözümü	159
Şekil 4.152.	M2'nin “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü	160
Şekil 4.153.	M3'ün “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü	160
Şekil 4.154.	M4'ün “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü	160
Şekil 4.155.	M5'in “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü	160
Şekil 4.156.	M2'nin “iki denklem elde etme” boyutuna ait çözümü.....	161
Şekil 4.157.	M3'ün “iki denklem elde etme” boyutuna ait çözümü.....	161
Şekil 4.158.	M4'ün “iki denklem elde etme” kategorisine ait çözümü	161
Şekil 4.159.	M5'in “iki denklem elde etme” boyutuna ait çözümü.....	162
Şekil 4.160.	M2'nin “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü.....	162
Şekil 4.161.	M3'ün “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü.....	162
Şekil 4.162.	M4 öğretmenin “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü.....	163
Şekil 4.163.	M5'in “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü	163
Şekil 4.164.	M1'in “baş katsayıyı yerleştirme” alt kategorisine ait çözümü.....	163
Şekil 4.165.	M1'in “polinomu genel biçimde yazma” alt kategorisine ait çözümü	164
Şekil 4.166.	M4'ün “polinomu genel biçimde yazma” alt kategorisine ait çözümü	164

Şekil 4.167.	M1'in "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	164
Şekil 4.168.	M5'in "polinomu çarpan cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	165
Şekil 4.169.	Matematik öğretmenlerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	167
Şekil 4.170.	Maksimum ile ilgili problem	168
Şekil 4.171.	Maksimum ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	168
Şekil 4.172.	M1'in "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	169
Şekil 4.173.	M2'nin "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	169
Şekil 4.174.	M3'ün "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	169
Şekil 4.175.	M4'ün "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	170
Şekil 4.176.	M5 öğretmenin "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü	170
Şekil 4.177.	M1'in "gelir hesaplamayı bilme" alt kategorisine ait çözümü	170
Şekil 4.178.	M3'ün "adlandırma yapma" alt kategorisine ait çözümü	171
Şekil 4.179.	M4'ün "adlandırma yapma" alt kategorisine ait çözümü	172
Şekil 4.180.	M4'ün "adlandırma yapma" alt kategorisine ait çözümü	172
Şekil 4.181.	M5'in "adlandırma yapma" alt kategorisine ait çözümü	172
Şekil 4.182.	M1'in "en fazla maksimum ilişkisini kurma" boyutuna ait çözümü	173
Şekil 4.183.	M4'ün "en fazla maksimum ilişkisi kurma" boyutuna ait çözümü	174
Şekil 4.184.	M5'in "en fazla maksimum ilişkisini kurma" boyutuna ait çözümü	174
Şekil 4.185.	M1'in "türev alma" boyutuna ait çözümü	174
Şekil 4.186.	M2'nin "türev alma" boyutuna ait çözümü	175
Şekil 4.187.	M3'ün "türev alma" boyutuna ait çözümü	175
Şekil 4.188.	M4'ün "türev alma" boyutuna ait çözümü	175
Şekil 4.189.	M5'in "türev alma" boyutuna ait çözümü	176
Şekil 4.190.	M1'in "en fazla en büyük ilişkisini kurma" boyutuna ait çözümü	176
Şekil 4.191.	M2'nin "tepe noktası kavramını anlama" boyutuna ait çözümü	177
Şekil 4.192.	M1'in "mantıklı değer verme" alt kategorisine ait çözümü	177
Şekil 4.193.	M4'ün "mantıklı değer verme" alt kategorisine ait çözümü	178

Şekil 4.194.	Matematik öğretmenlerinin maksimum problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi	179
Şekil 4.195.	Polinomlar ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	180
Şekil 4.196.	S1'in "ortak olan kökleri tespit etme" alt kategorisine ait çözümü	182
Şekil 4.197.	S3'ün "ortak kökleri tespit etme" alt kategorisine ait çözümü	183
Şekil 4.198.	S2'nin "kökü çarpan biçiminde yazma" alt kategorisine ait çözümü	184
Şekil 4.199.	S1'in "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	185
Şekil 4.200.	S1'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	185
Şekil 4.201.	S2'nin "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü	185
Şekil 4.202.	S5'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü	186
Şekil 4.203.	S1'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü	186
Şekil 4.204.	S2'nin "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü	186
Şekil 4.205.	S2'nin "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	187
Şekil 4.206.	S3'ün "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	187
Şekil 4.207.	S4'ün "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	188
Şekil 4.208.	S4'ün "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	188
Şekil 4.209.	S5'in "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	188
Şekil 4.210.	S3'ün "kökleri toplamını bulma" alt kategorisine ait çözümü	189
Şekil 4.211.	S4'ün "kökler toplamını bulma" alt kategorisine ait çözümü	190
Şekil 4.212.	S5'in "kökler toplamını bulma" alt kategorisine ait çözümü	190
Şekil 4.213.	S3'ün "kökler çarpımını bulma" alt kategorisine ait çözümü	191
Şekil 4.214.	S5'in "kökleri elde etme" alt kategorisine ait çözümü	191
Şekil 4.215.	Öğrencilerin polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	192
Şekil 4.216.	Maksimum-minimum ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme süreçlerine ait kategoriler ve alt kategorileri	193
Şekil 4.217.	S1'in "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	194
Şekil 4.218.	S2'nin "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	194
Şekil 4.219.	S4'ün "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	194
Şekil 4.220.	S5'in "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	195
Şekil 4.221.	S2'nin "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	195

Şekil 4.222.	S3'ün "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	195
Şekil 4.223.	S4'ün "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	196
Şekil 4.224.	S1'in "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	196
Şekil 4.225.	S2'nin "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	197
Şekil 4.226.	S3'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	197
Şekil 4.227.	S3'ün "tepe noktasını elde etme" alt boyutuna ait çözümü	198
Şekil 4.228.	S1'in "türev alma" alt boyutuna ait çözümü	199
Şekil 4.229.	S4'ün "türev alma" alt boyutuna ait çözümü	199
Şekil 4.230.	S2'nin "alanı iki değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	200
Şekil 4.231.	S3'ün "mantıklı değer verme" boyutuna ait çözümü	200
Şekil 4.232.	Lise öğrencilerinin maksimum-minimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	202
Şekil 4.233.	Trigonometri ile ilgili problem ile öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	203
Şekil 4.234.	S4'ün "dikdörtgene tamamlama" alt kategorisine ait çözümü	204
Şekil 4.235.	S1'in "açıları adlandırma" alt kategorisine ait çözümü	205
Şekil 4.236.	Ö2'nin "açıları adlandırma" alt kategorisine ait çözümü	205
Şekil 4.237.	S3'ün "kenar uzunluklarını elde etme" alt kategorisine ait çözümü	206
Şekil 4.238.	Ö2'nin "trigonometrik oranları elde etme" alt kategorisine ait çözümü	206
Şekil 4.239.	S4'ün "Toplamlarını 90° bulma" alt kategorisine ait çözümü	207
Şekil 4.240.	S4'ün "tümleyen açılar kullanma" boyutuna ait çözümü	207
Şekil 4.241.	Ö2'nin "iki açının farkı biçiminde yazma" boyutu çözümü	207
Şekil 4.242.	S3'ün "tanjantın toplam formülünü bilme" boyutuna ait çözümü	208
Şekil 4.243.	S4'ün "toplam formülünü bilme" boyutuna ait çözümü	208
Şekil 4.244.	Ö2'nin "tanjantın fark formülünü bilme" boyutuna ait çözümü	209
Şekil 4.245.	Ö5'in "tanjantın fark formülünü bilme" boyutuna ait çözümü	209
Şekil 4.246.	Öğrencilerin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	210
Şekil 4.247.	Bölünebilme ile ilgili problem ile öğrencilerin anahtar nokta belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	211
Şekil 4.248.	S4'ün "birler basamağını bulma" boyutuna ait çözümü	212
Şekil 4.249.	Ö2'nin "tek sayıyı genel biçimde ifade etme" alt kategorisine ait çözümü	212

Şekil 4.250.	S3'ün "tek sayıyı genel biçimde ifade etme" alt kategorisine ait çözümü ...	213
Şekil 4.251.	S1'in "denklem kurma" kategorisine ait çözümü	213
Şekil 4.252.	S3'ün "denklem kurma" kategorisine ait çözümü	213
Şekil 4.253.	Ö2'nin "çarpan kat ilişkisini kurma" alt kategorisine ait çözümü.....	213
Şekil 4.254.	S3'ün "çarpan kat ilişkisini kurma" alt kategorisine ait çözümü	214
Şekil 4.255.	T5'in "çarpan bölen ilişkisini kurma" alt kategorisine ait çözümü	215
Şekil 4.256.	S1'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü	216
Şekil 4.257.	S4'ün "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü	216
Şekil 4.258.	Ö2'nin "çözümleme yapma" alt kategorisine ait çözümü	216
Şekil 4.259.	Öğrencilerin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	218
Şekil 4.260.	Olasılık ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	219
Şekil 4.261.	S2'nin "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	219
Şekil 4.262.	S3'ün "denklem kurma" kategorisine ait çözümü.....	220
Şekil 4.263.	S1'in "verileri adlandırma" alt kategorisine ait çözümü	220
Şekil 4.264.	S2'nin "verileri adlandırma" alt kategorisine ait çözümü	221
Şekil 4.265.	S5'in "verileri adlandırma" alt kategorisine ait çözümü	222
Şekil 4.266.	S3'ün "olasılığı bulma" boyutuna ait çözümü.....	223
Şekil 4.267.	S2'nin "olasılıkta çarpma kuralını bilme" boyutuna ait çözümü	223
Şekil 4.268.	S1'in "denklemleri en az bilinmeyen kullanarak yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	223
Şekil 4.269.	S1'in "tahminde bulunma" alt kategorisine ait çözümü	224
Şekil 4.270.	S4'ün "tahminde bulunma" alt kategorisine ait çözümü	225
Şekil 4.271.	S2'nin "değerlendirme yapma" alt kategorisine ait çözümü	225
Şekil 4.272.	S5'in "değerlendirme yapma" alt kategorisine ait çözümü	226
Şekil 4.273.	Öğrencilerin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi	227
Şekil 4.274.	Kombinasyon ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	228
Şekil 4.275.	S1'in "kesişim ayrı düşünme" alt kategorisine ait çözümü	229
Şekil 4.276.	S3'ün "kesişimde olan bölgeyi hesaplama" boyutuna ait çözümü.....	230
Şekil 4.277.	S2'nin "kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama" boyutuna ait çözümü.....	232
Şekil 4.278.	S5'in "kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama" boyutuna ait çözümü.....	232
Şekil 4.279.	S4'ün "kesişimi paylaşırma" boyutuna ait çözümü.....	233

Şekil 4.280.	Lise öğrencilerinin kombinasyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	235
Şekil 4.281.	Modüler aritmetik ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	236
Şekil 4.282.	Ö5'in "denklem kurma" kategorisine ait çözümü	237
Şekil 4.283.	S1'in "ortak çarpan parantezine alma" alt kategorisi ne ait çözümü	237
Şekil 4.284.	S1'in "genel biçimde yazma" boyutuna ait çözümü	238
Şekil 4.285.	S4'ün "genel biçimde yazma" boyutuna ait çözümü.....	238
Şekil 4.286.	S1'in "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü.....	239
Şekil 4.287.	S3'ün "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü.....	239
Şekil 4.288.	S4'ün "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü.....	239
Şekil 4.289.	S3'ün "modüler aritmetik bilme" alt kategorisine ait çözümü	239
Şekil 4.290.	Ö2'nin "modüler toplama bilme" boyutu çözüm	240
Şekil 4.291.	S1'in "modüler çarpma bilme" boyutuna ait çözümü	240
Şekil 4.292.	Ö2'nin "modüler çarpma bilme" boyutuna ait çözümü.....	241
Şekil 4.293.	S3'ün "modüler çarpma bilme" boyutuna ait çözümü	241
Şekil 4.294.	S4'ün "modüler çarpma bilme" boyutuna ait çözümü	241
Şekil 4.295.	S5'in "modüler çarpma bilme" boyutuna ait çözümü	241
Şekil 4.296.	Lise öğrencilerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi.....	243
Şekil 4.297.	Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri.....	244
Şekil 4.298.	S3'ün "çift fonksiyon olduğunu anlama" kategorisine ait çözümü.....	245
Şekil 4.299.	S2'nin "çift fonksiyon tanımını kullanma" alt kategorisine ait çözümü	245
Şekil 4.300.	S5'in "tek dereceli terimleri yok etme" alt kategorisine ait çözümü.....	245
Şekil 4.301.	Ö1'in "kök olduğunu anlama" kategorisine ait çözümü	246
Şekil 4.302.	S5'in "kökü yerine yazma" alt kategorisine ait çözümü	247
Şekil 4.303.	Ö4'ün "polinomu elde etme" kategorisine ait çözümü	248
Şekil 4.304.	S5'in "polinomu elde etme" kategorisine ait çözümü	248
Şekil 4.305.	S5'in "polinomu genel biçimde yazma" alt kategorisine ait çözümü	249
Şekil 4.306.	Ö1'in "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	249
Şekil 4.307.	S3'ün "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü.....	249

Şekil 4.308.	Lise öğrencilerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorileri	250
Şekil 4.309.	Maksimum ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri	251
Şekil 4.310.	S3'ün "Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	252
Şekil 4.311.	Ö4'ün "Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisine ait çözümü.....	252
Şekil 4.312.	Ö4'ün "gelir hesaplamayı bilme" alt kategorisine ait çözümü.....	252
Şekil 4.313.	Ö1'in "parabol olarak düşünme" alt kategorisine ait çözümü.....	253
Şekil 4.314.	S2'nin "parabol olarak düşünme" alt kategorisine ait çözümü	254
Şekil 4.315.	Ö4'ün "parabol olarak düşünme" alt kategorisine ait çözümü.....	254
Şekil 4.316.	S3'ün "türev yardımıyla düşünme" alt kategorisine ait çözümü.....	255
Şekil 4.317.	Lise öğrencilerinin maksimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi	256

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

AN	Anahtar Nokta
AAN	Alt Anahtar Nokta
AYN	Ayrışma Noktası
ADN	Akran Destek Noktası
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
ÖSYM	Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi
YGS	Yükseköğretime Geçiş Sınavı
LYS	Lisans Yerleştirme Sınavı
TYT	Temel Yeterlilik Testi
AYT	Alan Yeterlilik Testi
ÖSS	Öğrenci Seçme Sınavı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde; problem durumu, araştırmanın problemi, alt problemler, araştırmanın amacı ve önemi, araştırmanın sınırlılıkları, tanımlar başlıkları yer almaktadır.

1.1. Problem durumu

Matematik eğitimcilerinin birçoğu öğrencilerin problem çözme becerilerinin geliştirilmesinin öğretimin temel amacı olduğunu düşünmektedir (Lester, 2013). Bu amaca ulaşmak için araştırmacılar öğretmenler ve öğrenciler için gerekli bilgi ve becerileri daha detaylı araştırmaya yönelmiştir. Problem çözme hem matematiğin öğrenilmesinin bir sonucu hem de matematiğin öğrenildiği yol olmalıdır (DiMatteo & Lester, 2010). Hangi yaklaşımın veya yaklaşımların kombinasyonları kullanıldığı fark etmeksizin öğrencinin öğrenmesini etkileyen faktörlere odaklanan bir araştırmaya ihtiyaç vardır (Lester, 2013).

Problem çözme sürecinde başarısızlık genellikle en etkili yöntemi seçememekten, analiz edememekten, problemin amacını anlamada ve problem çözme sürecinde yapılan matematiksel işlemleri izleme, kontrol etme ve düzenlemedeki eksiklikten kaynaklanmaktadır (Victor, 2004). Matematik eğitiminde problem çözme konusunda yapılan uluslararası araştırmalar, öğrencilerin birden fazla adım gerektiren problemlerde başarılı performans gösteremediklerini, problem çözme sürecini planlamada ve uygulamada zorlandıklarını göstermiştir (Kramarski, 2008).

Eğitimin amaçlarından birisi başarılı problem çözücü bireyler yetiştirmektir. Başarılı problem çözücü olmak için bireyin problemleri nasıl çözeceğini bilmesi, çeşitli temsilleri kullanma becerisine ve probleme ilişkin güçlü içerik bilgisine sahip olması, çıkarım

kalıplarını nasıl tanıyacağı ve yapılandırılacağı konusunda sağlam bir anlayış geliştirmede deneyime sahip olması gerekmektedir (Lester, 2013).

Bu çalışmada “anahtar nokta” (AN) kavramı problemin çözümünde öğrencilere yardımcı olabilecek en kritik matematiksel fikir olarak tanımlanmıştır. Bir fikrin AN olması için; fikrin problemin çözümünde yaptığı görevler içinde olmazsa olmaz olması gerekir. AN’nin bireyi problem çözmede hedefe götürebilmesi, bireyin sebepsiz ve gereksiz işlem yapmasını önleyebilmesi, problem çözmede deneyimin sonucu olarak ortaya çıkabilme durumlarının değişebilmesi, yapıların incelenmesi, bağlantı kurulması gibi bilişsel eylemler sonucu problemin çözümünü inşa etmede bireye yardım edebilmesini sağlayabilecek temel matematiksel fikirler olabilmesi özelliklerini taşıması gerektiği anlaşılabılır. AN’ler matematiksel bir problemin çözümü için en temel matematiksel tanımlar, teoremler gibi çözümün inşası için en gerekli matematiksel araçlar ile ilgili olabileceği gibi problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında sahip olunması gereken en kritik matematiksel beceriler veya problem çözmede kullanılması gereken, olmazsa olmaz olan stratejiler ile bağlantılı matematiksel fikirlerdir. Problem çözme sürecinde öğrenmenin yolu problem çözümünde gerekli temel kavramları içselleştirmek olduğu göz önüne alındığında AN belirleme durumlarının buna katkı sağlayabileceği söylenebilir.

AN’ler problemin çözümünün inşası için olmazsa olmaz olan matematiksel fikirlerdir. Alt anahtar nokta/noktaları (AAN) ise AN ile ilişkili fikirler olarak tanımlayabiliriz. AAN’lerin belirlenmesi ile öğrenciler kavram ve fikirleri daha iyi anlayabilir ve bunları matematiksel problemleri çözmek için kullanabilir. AAN’ler ile detaylandırılmış AN’ler ile öğrenciler birbiri ile bağlantılı organize olmuş içeriği anlamlı bir şekilde öğrenebilir. Başka bir deyişle öğrenciler AN’ler yardımıyla matematiksel problemleri çözebilir, problemi çözmek için gerekli bilgileri öğrenebilir. Değişen sınav sistemi ile birlikte öğrencilerin problem çözmede başarılı olmalarına AN’lerin belirlenmesinin ve çalışmalarda göz önüne alınmasının katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

AN kavramını animasyon oluşturma kilit noktası olan “anahtar kareler” ile de modelleyebiliriz. Tüm video ve animasyon hazırlama programlarında hareket oluşturma kilit noktası olan bu anahtar kareler zaman çizelgesi üzerinde bir değişikliğin olduğu noktalardır. Yeni bir içeriğin eklenmesi veya animasyonun değişmesi gibi durumlar bu anahtar karelerde gerçekleşir. Anahtar karelerin arasında yer alan karelerde ise değişiklik tanımlanmaz, bir değişiklik tanımlanır ise o kare artık bir anahtar kareye dönüşmüş olur.

Anahtar karelerin arasında yer alan diğer kareler ise bilgisayar tarafından doldurulur. Bu şekilde hareket sağlanır. Yani anahtar kareler animasyon oluşturma'nın en temel noktalarıdır. Problem çözme sürecinde de AN'ler çözümün inşası için en gerekli noktalardır. Problem çözümünü inşa eden bir bireyin AN'ler dışındaki noktaları yakalayabileceği ve çözümü oluşturabileceği düşünülmektedir.

AN'ler, problemin çözümünde öğrencilere yardımcı olabilecek minimum sayıdaki temel fikirlerdir. Problemin çözümünde yardımcı olabilecek olmazsa olmaz olan bu fikirlerin minimum olarak belirtilmesi durumu; bireyin bilgisi ve deneyimi sonucu AN ihtiyacı olma durumunun bireylere göre farklılık gösterebileceğidir. Literatüre bakıldığında problem çözmede öğrencilerin gerekli bilgiyi organize etmede, kullanmada ve öğrenmede bireysel farklar olduğuna işaret etmektedir. Bu bireysel farklılıkları yansıtan bilişsel süreçlerin üstbiliş ile ilişkili olduğu ifade edilmektedir (Swanson, 1992). Üstbiliş, bireylerin kendi öğrenmelerinin sorumluluğunu almasına izin verir. Üstbiliş, problem çözme süreci boyunca uygun bilgi ve stratejilerin kullanılması için önemlidir (Pugalee, 2001). Öğrencilerin çeşitli bilişsel ve üstbilişsel süreçleri ihmal etmelerinden dolayı problem çözme görevlerinde zorlanmaktadır (Grizzle-Martin, 2014).

Problem çözme yeni matematiksel fikirler ve beceriler için bir araç olarak hizmet edebilir (NCTM, 2000). Problem çözme sürecinde öğrenciler matematiksel bilgileri, matematiksel becerileri, çeşitli problem çözme stratejilerini kullanma ve anlama ihtiyacı hissedebilir. Problem çözme sürecinde en kritik olan matematiksel bilgi, beceri ve stratejiler ile ilgili olabilecek olan AN'lerin belirlenmesi ile önemli matematiksel fikirlere dikkat çekilebilir. Problem çözme stratejileri, analiz, sentez ve değerlendirme için üstbilişsel becerileri gerektirmektedir (Gick, 2013) Üstbiliş genel olarak iki boyutta ele alınmaktadır. Biliş bilgisi (üstbilişsel bilgi) ve bilişin düzenlenmesi (üstbilişsel kontrol süreçleri) olarak temel bir ayrım yapılmıştır. Üstbilişsel bilgi, bireylerin kendi bilişleri ya da genel olarak bilişleri hakkında ne bildiklerini belirtmektedir. Bilişin düzenlenmesi, birinin düşünmesini veya öğrenmesini kontrol etmeye yardımcı olan üstbilişsel etkinlikleri ifade etmektedir. Literatürde bilişin düzenlenmesi ile ilgili üç beceri üzerinde durulduğu görülmektedir. Planlama (strateji seçimi ve kaynakların tahsisi), izleme (anlama ve görev performansının farkındalığı) ve değerlendirme (öğrenmenin ürünlerini ve düzenleyici süreçlerini değerlendirme) (Moshman, 2018). Üstbilişsel bilgi ise kişi, görev ve strateji olmak üzere üç etkenin etkileşimi ile oluşmaktadır (Flavell, 1979). Örneğin, öğrenci (kişi) karmaşık metinleri (görev) okuma konusunda güçlüğü olduğunu ve sonuç olarak bilimsel bir

makaleyi tamamen okumak için daha fazla çaba sarf etmesi gerektiğini (strateji) düşünebilir. Tersine, başka bir öğrenci okuma etkinliğini olumlu yönde değerlendirebilir, böylece aynı makaleyi okumak için daha az çaba harcayabilir (Schraw & Moshman, 1995). Örneğin, bir matematiksel problemin çözümü için öğrencinin belirleyeceği strateji seçimi kişi, görev ve strateji değişkenlerinin etkileşimi ile oluşturulmuş üstbilişsel bilgiye örnek olarak verilebilir. Üstbilişsel bilginin ele alınan başka bir sınıflamasında önemli bir diğer bileşeni koşullu bilgidir. Koşullu bilgi, belirli bir üstbilişsel stratejinin ne zaman ve ne amaçla uygulanması gerektiği hakkında duruma dayalı bilgilerle ilgilidir (Veenman, 2011). Koşullu bilgi bireylerin matematiksel bir problemin çözümünde stratejileri amaçlarına uygun bir şekilde seçmeleri ve etkili kullanmalarına yardımcı olabilir. Problem çözme süreçlerinde AN'ler çeşitli matematiksel bilgi (tanım, teorem vb.), beceri ve stratejiler ile bağlantılı, birbirinden bağımsız olacak şekilde belirlenen matematiksel fikirlerdir. Dolayısıyla problem çözme süreçlerinde AN belirleme durumlarının üstbiliş ile ilişkili olduğu söylenebilir. AN belirleme durumlarının üstbiliş olan ilişkisi göz önüne alındığında öğrencilerin başarılı birer problem çözücü olmalarına katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Problem çözme etkinlikleri, öğrencilerin üstbilişini geliştirmek için ideal fırsatlardır çünkü başarılı problem çözücüleri genellikle farkında olan düşünürlerdir. Üstün üstbiliş becerilere sahip öğrenciler daha iyi problem çözücüleridir. Problem çözme stratejilerini analiz etmeleri ve bunları yansıtmaya becerisi, öğrencilerin üstbilişsel becerilerini ortaya çıkarmaktadır (Panaoura, Philippou, & Christou, 2003). Öğrencilerin kendi öğrenme süreçlerini izleyip kontrol edebildiği durumlarda problem çözme sürecinde başarılarının artacağı ifade edilmiştir (Grant, 2014). Problem çözme sürecinde AN'lerin belirlenmesinin problem çözme performansını olumlu yönde etkileyebileceği düşünülmektedir.

Öğrencilerde üstbilişi geliştirme açısından öğretmenler rehberlik etmelidir. Problem çözme sürecinde AN'lerin belirlenmesi ile matematik öğretmenleri üstbilişsel deneyim kazanacaktır. Bu tür becerileri öğrencilerinde geliştirmek isteyen öğretmenlerin sahip olduğu üstbilişsel gereklilikleri araştıran çalışmaların olmadığını belirtilmiştir (Coles, 2013). Öğrencilerin problem çözme sürecindeki başarılı olmalarına yardım etmek öğretmenin sorumluluğundadır. Dolayısıyla böyle bir üstbilişsel deneyimin öğrencilere nasıl kazandırılacağı konusunda öğretmenlere rehberlik yapmak önem kazanmaktadır. Öğrencilerin üstbilişsel olarak gelişmesi için öğretmenlerin kendilerini üstbilişsel olarak

sürece yansıtması önemlidir. Çünkü öğretmenler öğrenme için önemine inanırlarsa ancak başkalarının değişimine yardımcı olacaktır (Larkin, 2010).

Literatürde öğrencilerin matematiksel problem çözmelerini etkileyen güçlüklerle bakıldığında bazı durumlar dikkat çekmektedir. Öğrencilerin matematiksel problemi okumada ve anlamada zorluk yaşadıkları, problemdeki hangi önemli bilgilerin ne olduğunu anlayamadıkları dolayısıyla buna göre de bilgileri düzenleyemedikleri ifade edilmiştir (Phonapichat, Wongwanich, & Sujiva, 2014). Problem çözme sürecinde zihinlerinde “düşünmeye nasıl başlamalıyım”, “düşünmeye nereden başlamalıyım”, “düşünmeye nasıl başlamalıyım” gibi sorular olan öğrenciler için belirlenen AN’ler ile öğrencilerin bu güçlükleri aşmalarına yardımcı olabilir. AN ve AAN’lerin belirlenmesi ile içsel bir bütünlük içinde öğrenci nasıl düşüneceğini bilebilir. Problem çözme süreçlerinde AN’lerin belirlenmesi ile öğrencilerin problem çözme sürecinde kullanacakları önemli bilgileri birbiriyle ilişkili ve bağlantılı olarak düzenlemesine yardım etmede katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu şekilde öğrenciler problem çözmede başarılı olabilirler. Çünkü başarılı öğrenciler çoğu bilgiyi öğrenirken aynı zamanda da kendiliğinden düzenlemektedirler (Niederhauser, 2008).

Ulusal çalışmalar incelendiğinde bu tezde yer alan AN kavramı ile benzer olan “anahtar nokta ve fikirler” üzerine bir tek çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmada anahtar nokta ve fikirlerin matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma performanslarına katkıda bulunduğu belirtilmiştir (Karaoğlu, 2010). Literatür gözden geçirildiğinde “anahtar fikir” kavramı ise ilk kez “uygun mantıksal geçerlikle birlikte formal ispata dönüştürülebilen buluşsal düşünce” olarak tanımlanmıştır (Raman, 2003). Fakat bu çalışmada yer alan “anahtar fikir” kavramı ile bu tezde göz önüne alınan “anahtar nokta” kavramı arasında farklılıklar olduğu görülmüştür. Raman (2003) çalışmasında adı geçen “anahtar fikir” kavramı üzerine yapılmış olan ulusal bir tek çalışmaya rastlanmıştır. Çetin (2017) çalışmasında anahtar fikri, ispatı oluşturan ve tamamlanmasına ilişkin bir his veren parça olarak tanımlanmıştır. Bu tezde yer alan AN kavramı ile farklılıkları bulunmaktadır. Yapılan bu çalışmalarda “anahtar fikir” kavramı ispatı oluşturan temel bileşenler ile çözümü tamamlayabilmesi, arada kalan boşlukları doldurabilmesi için gerekli fikirler olarak tanımlanmıştır. Bu anahtar fikirler sayesinde ispatın öğrenci için anlamlı olabileceği ve öğrenciye doğruluğu hakkında ikna hissi verebileceği belirtilmiştir. Bizim çalışmamızda ise öğrencilerin bir matematiksel problemi çözmede AN’ler dışında kalan dışındaki noktaları yakalayabileceği ve çözümü oluşturabileceği düşünülmektedir.

Öğrencilerin problem çözme performanslarının artırılması gerekmektedir. Problem çözme matematik programlarının tamamlayıcı bir parçasıdır (Howland, 2001). Problem çözme süreçlerinde AN ve AAN'lerin belirlenmesi yaklaşımı öğrencilerin performanslarına olumlu yönde katkı sağlaması beklenen bir uygulamadır.

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN belirleme durumunu incelemektir.

Buradan hareketle araştırmanın problemi aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

1.2. Araştırmanın Problemi

Bu araştırmada aşağıdaki soruya cevap aranmaktadır.

“Matematik öğretmenlerinin ve lise öğrencilerinin problem çözme süreçlerinde AN'leri belirleme durumları nasıldır?”

1.3. Alt Problemler

Araştırmada problem cümlesine bağlı olarak aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır.

1. Matematik öğretmenlerinin problem çözme sürecinde AN'leri belirleme durumları nasıldır?
2. Lise öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN'leri belirleme durumları nasıldır?
3. Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözmede AN'leri belirleme durumları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?

1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Problem çözme matematik öğretiminin ve programlarının odak noktası olarak vurgulanmaktadır (Lesh & Zawojewski, 2007; Lester & Kehle, 2003; NCTM, 2000). Matematik eğitimi bağlamında problem çözme konusunda yapılan uluslararası araştırmalar, öğrencilerin birden fazla adım gerektiren problemlerde iyi performans göstermediklerini, problem çözme sürecini planlamada ve uygulamada zorlandıklarını göstermektedir (Kramarski, 2008). Oysa öğrenciler derslerde birçok problem durumuyla karşılaşmaktadır. Biliş öğrenme veya problem çözmede olmazsa olmaz bir unsurdur, bu

süreçte ise üstbiliş var olan bilişi en iyi şekilde kullanmayı sağlayan bir ek kuvvettir. Bilişin içeriğinden farklı olarak üstbiliş bilişten beslenir ve bilişsel eylemleri etkili kullanmak için yollar aramaktadır. Bir başka ifadeyle, üstbiliş öğrenme kapasitesini arttıran bir unsur olarak karşımıza çıkmaktadır (Blake & Spance, 1990; Hartman, 1998; Ellefson, vd., 2002). Bu bağlamda öğrencilerin performanslarını artırıcı uygulamalar geliştirmek önemli olmaktadır. Buradan hareketle bu araştırmada problem çözmeye yönelik bir uygulamaya yer verilmiştir. AN'ler problem çözme sürecinde en gerekli matematiksel bilgi, beceri ve stratejiler ile bağlantılı olan ve bilişsel eylemler sonucu ortaya çıkan birbirinden bağımsız matematiksel fikirlerdir. Bu uygulama, problem çözme sürecinde AN'ler ve AN'leri destekleyen AAN'lerin belirlenmesidir.

Öğretmenler, her bir problemin arkasındaki ilkeleri öğretmekten ziyade, ders kitaplarında verilen problemlere odaklanmaktadır (Phonapichat, Wongwanich, & Sujiva, 2014). Öğretmenlerin, derste hedeflenen ilkeleri öğrencilerin nasıl yorumlayacağı ve sınıf içinde yapılan öğretim uygulamalarını nasıl öğreneceği konusunda etkisi olduğu düşünülmektedir. Çünkü araştırmalar, öğrencilerin yorumlamalar yapmalarında yardımcı olan dikkatlice planlanmış ve yapılandırılmış aktivitelerden daha fazla yararlandıklarını ortaya koymaktadır (Mayer, 2004). Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin problem çözme süreçlerinde AN'leri belirleme durumlarının incelenmesi önemli olmaktadır.

Problem çözme sürecinde AN'lerin belirlenmesi ile öğrenciler hangi matematiksel fikirlere ihtiyaç duyduğunu ve nasıl çözülmesi gerektiğini belirleyerek öğrencileri problem çözmeye teşvik edecektir. Problem çözme süreçlerinde en kritik noktalar olan AN'lerin belirlenmesi durumları yaklaşımı da bireyin öğrenmeleri ile farkındalığına dayanan üstbilişsel kavramı ile ilgili olduğu düşünülebilir. Çünkü AN'ler problem çözme sürecinde en gerekli matematiksel bilgiler, beceriler ve stratejileri içeren matematiksel fikirler olduğundan çeşitli bilişsel etkinliklerin en etkili kullanıldığı koşullar hakkında öğrencilerin bilgisini ifade eden üstbiliş kavramı ile ilişkili olduğu söylenebilir. Literatürde üstbiliş kavramının bileşeni olan üstbilişsel bilginin tanıcı bilgi, koşullu bilgi ve işlemsel bilgi olmak üzere üç faktörden oluştuğu görülmektedir (Panaoura, Philippou & Christou, 2003). Üstbilişsel bilginin bir boyutu olan koşullu bilgi, bir bilginin, becerinin veya stratejinin ne zaman kullanacağı, bir stratejinin veya yöntemin niçin işlevsel olduğu ve hangi şartlar altında işe yarayacağı hakkındaki her türlü bilgiyi kapsamaktadır (Deseote, 2001; Pierce 2003; Scraw & Moshman, 1995). Kısaca herhangi zihinsel bir olayın ya da durumun niçin gerçekleştirildiğini ve zamanı hakkındaki bilgiyi açıklamaktadır (Panaoura, Philippou &

Christou, 2003). Örneğin, bir öğrencinin matematiksel bir problemin çözümünde kullanması gereken stratejileri ortaya koyarken sergileyeceği bilgiler onun üstbilişsel koşullu bilgileridir. Üstbilişsel bilginin bir diğer boyutu olan işlemsel bilgi, süreçteki zihinsel eylemlerin nasıl işe yarayabileceği hakkındaki bilgileri içermektedir (Deseote, 2001; Panaoura, Philippou & Christou, 2003; Pierce, 2003; Scraw & Moshman, 1995). Problemden istenene ulaşmak için gerekli becerilerin ve matematiksel kavramların nasıl kullanılabileceği ve yapılması gereken işlemlerin nasıl uygulanacağı hakkındaki bilgidir. Örneğin bir matematiksel problemi çözmede kullanılması gereken stratejilerin ne zaman ve niçin kullanacağına ilişkin açıklamaları koşullu bilgilerini gösterirken, problemi çözmede söz konusu stratejileri nasıl uygulayabileceğine ilişkin açıklamaları ise onun işlemsel bilgilerini gösterir. Öğrenciler bilgileri kodlarken yaptıkları bilişsel işlemlerin ne kadar çok farkında olurlarsa öğrendiklerini anlama ve kullanma ihtimalleri artabilir. Matematiksel performansın, üstbilişsel stratejilerin uygulanmasıyla anlamlı ve pozitif bir şekilde etkilendiği belirtilmektedir (Grizzle-Martin, 2014). Dolayısıyla öğrencilerin problem çözme süreçlerinde AN'leri belirleme durumlarının ortaya konması önemli olmaktadır.

Yapılan bir araştırmada öğrencilerin öğrenme stratejilerini izleme ve düzenleme fırsatına sahip olduklarında daha iyi performans gösterdikleri ifade edilmiştir (G.Camahalan, 2006). Eğitimin temel amacı öğrencilere planlama, bilgiyi uygulama, izleme, düzenleme ve yansıtma gibi süreçlerden nasıl yararlanacaklarını öğretmektir (Azevedo, 2009). Problem çözme konusunda başarılı olan öğrenciler genellikle kendileri de farkında olan düşünürler olduklarından, problem çözme aktiviteleri, öğrencinin üstbilişinin geliştirilmesi için ideal fırsatlar sunar. Bu öğrenciler gelişmiş üstbilişsel becerilerini, problem çözme stratejilerini analiz etme ve düşünme süreçlerini yansıtma becerileriyle göstermektedir (Panaoura, Philippou, & Christou, 2003). Problem çözme süreçlerinde AN'lerin belirleme durumları ile öğrenciler problem çözme sürecinde kendini izleme fırsatı bulabilecekleri düşünülmektedir. Dolayısıyla problem çözme süreçlerinde öğrencilerin AN belirleme durumlarının incelenmesi önemli olmaktadır.

Öğretmenler dersin ana noktalarını göstermek, açıklamak ve detaylandırmak için çok fazla ayrıntı vermektedir. Birkaç detay öğrencilerin ne çalıştıklarını anlamını kavramasında oldukça etkili olabilir. Ancak öğrenciler çok fazla ayrıntı ile karşı karşıya geldiğinde, öğrenciler neye odaklanmaları konusunda genel bir yargıya varamazlar. Bundan dolayı öğrencilere yardım etmek için asıl ve gereksiz bilgileri ayıklamak önemli olmaktadır

(Ormrod, 2012). Dolayısıyla problem çözme süreçlerinde matematik öğretmenlerinin AN belirleme durumlarının incelenmesi önemli olmaktadır.

Öğretmenler öğrencilerin problemlerde geçen "anahtar kelimeleri" ezberlemelerine neden olmaları muhtemeldir (Phonapichat, Wongwanich, & Sujiva, 2014). Problem çözmede AAN'ler ile desteklenmiş AN'ler sayesinde bir öğrencinin en gerekli matematiksel fikirleri ifade edebileceği, örneklendirebileceği, detaylandırabileceği ve yorumlayabileceği düşünülmektedir. Hem sınıfta hem de araştırmalarda öğretmenin rolüne odaklanmaya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin problem çözme süreçlerinde AN'leri belirleme durumlarının incelenmesi önemli olmaktadır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmada matematik öğretmenlerine ve lise öğrencilerine problemleri çözdükten sonra AN'leri belirlemeleri amacıyla görüşmeler yapılmıştır. Araştırmacı problem çözme sürecinde öğretmenlerin AN'leri belirlemelerine yardımcı olabilecek sorular sormuştur. Katılımcı matematik öğretmenleri ve öğrencilerinden bazıları AN'leri belirleme gerekçelerinin yanı sıra bazı noktaları AN olarak belirlememe gerekçelerinden de bahsetmiştir. Katılımcı öğretmenlerin ve öğrencilerin AN belirleme durumlarında bu gerekçelerden bahsedilmediği durumlar da olmuştur. Dolayısıyla bu konuda yapılacak diğer çalışmalarda katılımcıların AN'leri belirleme ve belirlememe gerekçeleri üzerinde durulabilir.

Araştırmanın veri toplama aracında yer alan problemler ÖSYM tarafından hazırlanan üniversiteye giriş sınavında sorulan matematiksel problemlerdir. Bu durumda matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin AN belirleme durumları seçilmiş olan ÖSYM tarafından hazırlanmış üniversiteye giriş sınavında sorulan problemler ile sınırlıdır. Dolayısıyla bu konuda yapılacak diğer çalışmalarda farklı sınav türlerinde sorulmuş problemler üzerinde çalışılabilir.

Çalışmada aynı katılımcı öğrencilerin olmasına özen gösterilmiştir. Bazı problemlerde öğretmenlerin belirlediği farklı öğrencilerle görüşülmesinin nedenlerinden biri öğrencilerin matematik programına göre problemle ilgili kazanıma sahip olmamasıdır. Bir diğer neden ise iki ayrı oturumda yapılan görüşmelerin farklı eğitim-öğretim yılında olması nedeniyle öğrencilerin mezun olması veya okuldan ayrılmasıdır. Bu nedenlerle bu problemlerde

öğretmenlerin belirlediği diğer öğrenciler ile görüşülmüştür. Dolayısıyla bu konuda yapılacak diğer çalışmalarda katılımcı öğrencilerin seçiminde bu sınırlılık göz önünde bulundurulabilir.

1.6. Tanımlar

Araştırmada sıkça geçen bazı tanımlar aşağıda ifade edilen anlamlarıyla kullanılmıştır.

- a. Anahtar nokta: Matematiksel problemin çözümünde yaptığı görevler içinde en kritik veya çözüm için “olmazsa olmaz” olan, matematiksel kavramları ve yapıları inceleme, matematiksel kavramlar ve yapılar arasında bağlantı kurma vb. gibi bilişsel eylemler yoluyla problemin çözümünü inşa etmede bireye yardım eden matematiksel bir fikirdir. AN’ler problem çözmede en gerekli matematiksel araçlar (tanım, teorem vb.), problemin çözümünde kullanılacak en kritik stratejiler ve bireyin sahip olması gereken olmazsa olmaz olan matematiksel beceriler ile bağlantılı olan matematiksel fikirlerdir (Araştırmacı tarafından tanımlanmıştır).
- b. Alt anahtar nokta: Bir AN’yi oluşturan bileşen veya bileşenlerdeki temel fikirlere de (kavramlara, teorilere, bağıntılara, becerilere vb.) AAN denir (Araştırmacı tarafından tanımlanmıştır).
- c. Üstbiliş: Bireyin kendi düşüncesinin farkında olması, bireyin kavramların içeriğinin farkında olması, bireyin bilişsel süreçleri planlaması, bilişsel süreçlerini aktif olarak izlemesi ve bireyin bilişsel süreçlerini daha fazla öğrenmeyle ilişkili olarak düzenlemesidir (Hennessey, 1999).

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde; çalışmanın temelini oluşturan teoriksel yapılardan bahsedilmiştir. Çalışmada yer alan AN kavramının tanımına, bileşenlerine ve ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

2.1. Bilişsel Yaklaşımlar ve Problem çözme

İnsan hafızasının kapasite ve zaman kısıtları düşünüldüğünde, öğrencilere önemli bilgileri seçmelerinde yardımcı olmalarının yolu, neyin önemli olup neyin önemli olmadığını söylemektir ve önemli noktaları defalarca tekrar etmektir (Schraw, 2006). Çalışmada tanımlanan AN'ler problem çözme süreçlerinde en önemli, gerekli noktalardır. Öğrencilerin problemdeki en önemli bilgilerin belirlenmesi ile öğrenciler problem çözme süreçlerini düzenleyebilirler. AN'lerin derslerde veya eğitim materyallerinde kullanılması ile öğretmenler öğrencilerin önemli bilgileri seçmesine ve düzenlemesine rehberlik etmesinde yardımcı olabilir.

Öğrenciler için ilginç ve anlamlı olan problemleri çözmek, matematiksel bilgi birikimlerini kullanmalarına olanak sağladığından öğrencileri kendi düşünceleri ve etkinlikleri üzerinde derinlemesine düşünmeye teşvik edecektir. Bu şekilde öğrenciler sadece doğru cevapları değil aynı zamanda belirli bir durumda bir yaklaşımın neden faydalı olabileceğinin veya olamayacağının sebeplerini arayabilirler (Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009). Çalışmada öğretmenlerden problem çözme süreçlerinde doğru cevaplar istenmemiştir. Katılımcı öğretmenlerin istemesi halinde çözümler kendileri ile paylaşılmıştır. Benzer şekilde öğrencilerin de doğru sonuca ulaşma durumundan ziyade süreç boyunca hangi bilgileri neden kullandığının üzerinde durulmuştur.

Problem çözmenin anlamlı olabilmesi için öğrenciler problem çözme etkinlikleri üzerine düşünmesi teşvik edilmelidir. Böylece öğrenciler problem çözme süreçlerinde sadece doğru cevapları değil belli bir durumda bilgi ve stratejilerin neden faydalı olabileceğinin veya neden olamayacağının sebeplerini arayabilirler. Çünkü problem çözmede başarı, büyük ölçüde öğrencinin sahip olduğu matematiksel bilgi ve becerileri kullanmasına bağlıdır (Cowan, 2006). AN'ler problem çözme sürecinde öğrencileri öğrenilecek bilgilerin anlamına odaklayabilir. AAN'ler ile öğrenilecek olan bilgilerin yüzeysel yönlerine odaklanmak yerine ilişkilendirme yapabileceği, detaylı bir şekilde kodlama yapılması sağlanabileceği düşünülmektedir.

Belirli bir öğrenme görevinin nasıl ele alınacağını planlanması, izlenmesi ve görevi tamamlamaya yönelik ilerlemenin değerlendirilmesi gibi faaliyetler bilişselliğin ötesindedir (Flavell, 1979). Bilişsel becerilerin başarılı eğitimde kilit bir faktör olması nedeniyle, bilişsel kontrol yoluyla öğrenmeyi iyileştirmek için bilişsel sürecin ötesine geçen faaliyeti tanımlamak önemlidir (Avargil, Lavi, & Dori, 2018).

2.2. Üstbiliş

Üstbiliş, temel olarak biliş hakkında bilgi demektir. Bireylerin sadece bilişsel süreçlerini değil aynı zamanda duygularını ve motivasyonlarının farkında olmasını ve kontrolünü ifade etmektedir. Üstbiliş, ikinci dereceden bilişi ifade etmektedir. İkinci dereceden biliş ile düşünce hakkında düşünce, bilgi hakkında bilgi veya eylemler hakkında yansımalar anlatılmak istenmektedir. Eğer biliş algılama, anlama, hatırlamayı gerektiriyorsa, üstbiliş bireyin kendi algılaması, anlaması, hatırlaması hakkında düşünmesini içermektedir. (Papaleontiou-Louca, 2003).

Literatürün gözden geçirildiğinde, öğrenci öğrenmelerinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynayan üstbilişin iki boyutu olduğu belirtilmiştir (Handel, Artelt, & Weinert, 2013). Üstbiliş, üstbilişsel bilgi ve bilişin düzenlenmesi olarak iki bileşenden oluşmaktadır. Üstbilişsel bilgi bireyin bilişi ile bildiklerini kapsamaktadır. Bilişin düzenlenmesi ise bilişin nasıl düzenleneceğini ifade etmektedir. Üstbilişsel bilgi olarak bilinen ilk boyut, öğrencinin öğrenmesine yardım etmek için bilişsel stratejilerini nasıl, ne zaman ve nerede kullanabileceğini bilgisidir (Breed, Mentz, & Westhuizen, 2014). Bu bileşen tanıtıcı bilgi, işlemsel bilgi ve koşullu bilgi olmak üzere üç alt boyuta ayrılmıştır. Tanıtıcı bilgi bireyin kendisi hakkındaki bilgisini, hangi faktörlerin performansını etkilediğini bilmesini

içermektedir. Bireyin belleğinin sınırını bilmesi ve bir görev için bu bilgiyi dikkate alarak plan yapmasını içermektedir. İşlemsel bilgi bireyin bir görev ile ilgili stratejiler hakkındaki bilgisini içermektedir. Bir görev için stratejileri nasıl etkili kullanacağını bilmesini içermektedir. Koşullu bilgi bireyin görev ile ilgili stratejiyi ne zaman ve neden kullanacağını bilmesini içermektedir. Tanıtıcı bilgi, birey, görev ve stratejiler hakkındaki bilgileri ifade ederken; işlemsel bilgi, bir stratejinin nasıl uygulanacağı hakkında bilgi anlamına gelir; koşullu bilgi ise belirli stratejilerin belirli zamanlarda ne zaman ve neden yararlı olduğu konusundaki bilgileri ifade etmektedir (Lee & Schmitt, 2014). Üstbilişsel düzenleme olarak bilinen ikinci boyut, öğrencilerin öğrenmelerini kolaylaştırmak için uğraştığı fiili faaliyetleri ifade eder (Young & Fry, 2008). Bu boyut, öğrencilerin belirli bir bilişsel görevi çözmek için stratejiler geliştirmek için düşünmelerini ve düşünme süreçlerini içermektedir (Bonner, 2013) ve öğrenme sürecinin etkinliğini sağlamada önemli olduğuna inanılan üç üst düzey düşünme becerisinden oluşmaktadır. Bu üç alt boyut ise planlama, izleme ve değerlendirmedir (Tavakoli, 2014). Eğitim bağlamında planlama, öğrencilerin uygun stratejiler ve bilişsel kaynaklar seçerek belirli bir bilişsel görevi planlama çabalarını içerir. İzleme, öğrencilerin bilişsel bir görevle ilgili ilerlemeleri ile ilgili farkındalıklarını ve kendi performanslarını belirleyebilme becerilerini içerir. Değerlendirme, öğrencilerin sonuca bir göz atma ve öğrenme çıktılarının öğrenme hedefleriyle ne ölçüde uyum sağladığının yanı sıra düzenleme süreçlerinin etkililiğini belirleme çabasını da içerir (Young & Fry, 2008).

Dolayısıyla üstbilişin, bireyin bilişi hakkında bilgisi, bireyin planlama, izleme ve değerlendirme gibi belirli üstbilişsel becerilere ihtiyaç duyan kendi sistematik bilişsel faaliyetlerini düzenlemesi anlamına geldiği sonucuna varılabilir.

Bir öğrencinin, öğretmeni bir problemi nasıl çözdüğünü açıklarken sadece zor olacağını düşündüğü noktaları not alması üst biliş bilgisini göstermektedir. Bireyin kendi bilişi ile ilgili farkındalığı üstbilişi işaret etmektedir. Üstbiliş, bilişsel süreç farkındalığını ifade ettiğinden problem çözme süreçlerinde en kritik noktalar olan AN'leri belirleme yaklaşımına en uygun düşünme yaklaşımı olarak düşünülebilir.

Üstbilişin içeriğinde transfer ve problem çözmeye yardımcı olan anahtar kavramlar, ilkeler ve stratejik bilgiler bulunmaktadır. Bu nedenle, öğretim tasarlanırken içerik temel kavram ve ilkelere, süreç ise öğrencinin öğrenmeyi öğrenmesine odaklanmalıdır (Ülgen, 2001). Buradan hareketle bu araştırmada problem çözmeye yönelik alternatif bir uygulama olan

AN'lerin belirlenmesi ile öğrencilerin üstbilişlerinin gelişimini destekleyeceği düşünülmektedir.

2.3. Üstbiliş ve Problem Çözme

Üstbiliş, bireyin düşüncelerini ve fikirlerini nasıl yeniden üretebileceğini ve analiz edeceğini, analizlerine dayanan sonuçları nasıl değerlendireceğini ve öğrendikleriyle neleri nasıl uygulayacağını bilmeyi içerir. Bir problemi çözmek için, öğrenciler bilişin nasıl çalıştığını, öğrenme ve problem çözme gibi önemli bilişsel görevleri nasıl gerçekleştirdiklerini anlamak zorundadırlar (Noushad, 2007).

Problem çözme faaliyetleri üstbilişsel stratejiler geliştirmek için olanak sağlamaktadır. Öğretmenlerin öğrencilerin görevlerini nasıl yerine getirdiklerine odaklanması gerekmektedir. Hedefler öğrencilerle birlikte oluşturulmalı ve değerlendirilmeli, böylece düşünme süreçlerini anlama ve aktarmanın öğrenmeyi geliştirdiğini keşfetmeleri gerekmektedir. Bir problem çözücünün ne kadar deneyim veya bilgiye sahip olduğuna bakılmaksızın, eldeki problemin tanımlanması, çözmek için stratejilerin yaratıcı bir şekilde uygulanması gerektirdiğinden her yeni problem durumu problem çözümü için bir şekilde tektir (Papaleontiou-Louca, 2003).

Öğrenciler üstbilişsel beceriler yardımıyla problemi tanımlayabilir, uygulanabilir çözüm stratejileri seçebilir, seçtiği stratejinin çözümde ne kadar etkili olduğunu izleyebilir (Vaidya, 1999).

Üstbiliş, matematiksel problem çözme sürecinde özel bir önem taşımaktadır. Problem çözücülerin matematiksel problem çözmenin ilk aşamasında, problemin uygun bir temsilini oluşturmaya çalışırken tahmin anlamında üstbilişin aracı olduğunu varsaymaktadır. Matematiksel problem çözmenin son aşaması için, hesaplama sonuçlarının kontrol edilmesi gerektiğinde değerlendirme anlamında üstbilişin önemini vurgulamaktadır (Verschaffel, 1999).

Üstbilişsel beceriler öğrencinin bir görevin zorluğunu belirlemesi, kendi anlamasını etkili bir şekilde izlemesi, yani bir şeyi tam olarak anlamadığında fark etmesi, planlaması, performansını izlemesi, öğrenilecek olan materyale hâkim olacak kadar çalıştığını belirlemesi, sistematik olarak uygun stratejilerin seçilmesi ve ilgili tüm bilgilerin kullanılmasıdır (Hartman, 2001a).

Problem çözme sürecinde birey, hem bilişsel yeteneklerini hem de analiz, sentez ve değerlendirme gibi üstbilişsel etkinlikleri ve pratik becerileri kullanmalıdır (Kafadar, 2012). Problem çözme, üç ana koşul gerektirir: Birincisi, problemi ve hedefe doğru yönlendiren davranışı düşünmek, sonra istenen hedefe ulaşmada yardımcı olabilecek bir teori veya strateji aramak ve nihayetinde bu teorileri ya da stratejileri denemek. Bu aşamada, problemin türüne göre alt hedefler belirlenmeli, sonra problem çözülmeli ve hedefe ulaşılmalıdır (Kafadar, 2012).

Üstbilişsel düşünme bilişsel süreç farkındalığı ve anlayışını ifade etmektedir. Bir problemin çözümünde temel olacak kavramların ne olduğu, akıl yürütmede kullanılacak bilginin ne olduğu, çözüme ulaşmada nasıl akıl yürütebileceğini öğrenmek için ne tür bilgilere ihtiyacın olduğu gibi soruların cevabı problemin çözümünde AN'leri bulmamızda yardımcı olabilmektedir. Bu durumda kişi problem çözmede hangi bilgilere ihtiyacı olduğunu belirlemek için bilinçli bir standart geliştirebilir. O halde kişinin problem çözme sürecinde AN belirleme durumları üstbilişsel bir bakış açısıyla yorumlanabilir. AN belirleme durumları ile öğretmenler sadece öğrencinin hangi bilgileri edindiğini kontrol etmekle kalmaz, ne zaman, nerede ve nasıl bu bilgiyi kullandığını da değerlendirebilir.

Bireyde problem çözme becerisi kazandırılmak isteniyorsa öncelikle problem çözme sürecinin öğrenci tarafından nasıl yürütüleceği öğretilmeli ve bunu uygulamasına fırsat verilmelidir. Bu hedefe ulaşmak için öğrencinin mümkün olduğu kadar farklı problem durumlarıyla karşılaştırılması ve çözüm sürecinin öğrenci tarafından gerçekleştirilmesi gerekir. Çalışmada öğretmenlerin ve öğrencilerin problem çözümünü inşa etmede en önemli noktalar hakkında bilgi sahibi olmaları ve bu noktaları problem çözmede düzenlemeleri, kontrol edebilmeleri önemli olmaktadır.

Çalışmada yer alan AN, AAN tanımları araştırmacı tarafından yapılmıştır. Tanımlar ile ilgili uzman görüşleri alınmıştır.

2.4. Anahtar Nokta ve Alt Anahtar Nokta

Bu çalışmada AN kavramı; “matematiksel problemin çözümünde yaptığı görevler içinde en kritik veya çözüm için “olmazsa olmaz” olan, matematiksel kavramları ve yapıları inceleme, matematiksel kavramlar ve yapılar arasında bağlantı kurma vb. gibi bilişsel

yaklaşımlar yoluyla problem çözümünü inşa etmede bireye yardım eden bir matematiksel fikir anlamında kullanılacaktır.

AN'ler matematiksel bir problemin çözümünde kullanılabilecek en kritik becerileri, bilgileri ve stratejileri içeren matematiksel fikirlerdir. Bir problemin çözümünde AN'ler belirlenirken birbirinden bağımsız olacak şekilde belirlenmelidir. Bu şekilde birey AN'ler yardımıyla problem çözme sürecinin her aşamasında çözümü tamamlayabilmesi için gerekli diğer bilgiler AN'ler ile üretilebilir. Başka bir deyişle birey AN'ler dışında kalan matematiksel problemin çözümü ile ilgili diğer kısımları kendisi yazabilir.

AN'ler, problemin çözülmesi sürecinde bilinmesi ve kullanılması gereken, problem çözme sürecinde bireye yardım eden minimum sayıdaki temel fikirlerdir. Burada AN olma vasıflarından biri bu tür noktaların sayısının bireyin bilgisi, becerisi ve deneyimlerine göre minimum sayıda olmasıdır. Başka bir ifadeyle, bir AN bireyi tek başına problemin çözümüne ulaştırmayabilir, ancak problemin çözümünü inşa etme yolunda vazgeçilmezdir. AN'ler problemi çözme yolu kararlaştırıldıktan sonra belirirler. Çözüm yolu değiştirilirse bu AN'ler değişebilir.

Bu kavramın anlaşılması için köprü inşası benzeşiminden faydalanabiliriz. Önce hangi çeşit köprünün amaca hizmet edeceğini araştırılır. Daha sonra amaca en uygun olanında karar verilir. Temel unsurlar yapılacak köprünün çeşidine bağlı olarak değişir. Bu noktada artık köprü ve köprünün yapısı ortaya çıkmıştır. Örneğin bu bir asma köprü olacaksa, iki yakaya ikişer tane bunları birbirine bağlayan halatlar da dâhil olmak üzere kaldırmaları gereken ağırlık ve yüke uygun toplamda dört adet direk inşa edilir. Bu direkler olmazsa köprü inşa edilemez. Keza ağırlığı bu direklere asmada kullanılan halatlar olmazsa köprü yine inşa edilemez. Ama direkleri oluşturmada kullanılacak beton veya metallerin, halatlar için kullanılan materyallerin cinsi istenen köprünün inşasında “olmazsa olmaz” lardan değildir. Yani direk ve halatlar köprünün inşasında temel noktalar, kullanılan materyallerin cinsi temel noktalardan değildir.

Bir problemin çözümünde gerekli olan kitabi bilgiler AN'leri yakalamak için yeterli olmayabilir. Temel kavramları formüle eden ders kitaplarının belirtilen ihtiyacı karşılayabileceği düşünebilir. Bu durumda AN kavramının önemli bir farkı göz ardı edilmiş olur. AN'nin bireyi problemin çözümüne ulaştırabilmesi için, bireyin anahtar noktayı oluşturan bileşenlerin; yani kavramların, fikirlerin, terimlerin bu AN ile uyum sağladığını bilmesi ve soru sorulduğunda da onları açıklayabilmesi gerekmektedir. İşte bir

AN'yi oluşturan bileşen veya bileşenlerdeki temel fikirlere de (kavramlara, teorilere, bağıntılara vb.) alt anahtar nokta (AAN) adı verilecektir. AN'nin, bireyin bilgisi ve deneyimine bağlı olarak, problemin çözümünü inşa etmede bireylere göre farklı olabilme özelliği bireyin sahip olduğu AAN'ler ile ilişkilidir.

AN problemin çözümü ile “verilenler (hipotez)” arasındaki bağlantı noktasıdır. Problem çözme sürecinde AAN'ler ise, bağlantı noktalarını oluşturan veya oluşmasını sağlayan ifadeler olarak tanımlanabilir. Bu yüzden AN'ler olmadan problemin çözümüne ulaşamayacağını fakat AAN'ler olmadan ise problem çözme sürecinin uygun sürdürülemeyeceği şeklinde düşünebilir. AN'leri belirleme alışkanlığına sahip bir birey; problemle ilgili neler sorabileceği, problemi daha küçük parçalara nasıl ayırabileceği, çözüm için hangi AAN'lerden yararlanacağı hakkında deneyim sahibidir ve böylece problem çözme becerisi daha güçlüdür. Bu alışkanlığa sahip birisi yapılanlarla veya olup bitenlerle ilgili farkındalığı daha ileri seviyede olması doğaldır.

AN problemin çözümünde yardımcı olabilecek öz fikirlerdir. AAN'ler ise bu anahtar noktanın neden doğru olduğuna dair fikirler sağlar. AAN'leri bilen bir kimse, bu fikirler sayesinde AN'nin çözüme yardımcı olabileceğine ikna olabilir. Böylelikle problemin çözümünü gerçekleştirmek için birlikte tam bir destek sağlarlar. Birey bu sayede problemin çözüm yolunu anlayabilir ve gerekçeleri ile birlikte çözümü geliştirebilir. Alt anahtar noktalar anahtar noktanın birey tarafından anlamlandırılması ve çözümü üretebilmesi için gerekli ipuçlarıdır. Bu şekilde birey çözümün diğer kısımlarını kendisi yazabilir ve sonuca ulaşabilir.

Problemlerin çözümü ile ilgili açıklamalar genellikle kısa ve basit olduğu için açıklamaları kavrayamayan öğrenciler başarısız olmaktadır. Bu yüzden birkaç denemeden sonra öğrenciler problemi çözmekten vazgeçmekte ve belirli tip problemleri hiçbir zaman çözemeyeceklerine inanmaktadır (Brady, 1991). Çalışmada AN'leri detaylandırmak için AAN'lere yer verilmiştir. AAN'ler yardımı ile AN'ler ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır. Amaç bireyin AN'leri yorumlayabilmesi ve yeni problem durumlarına uygulayabilmesidir. AN'lerin amacı ezberleyerek öğrenme değildir. Matematiksel problemleri çözmeye öğrenciler süreci ezberlemeye çalışmamalıdır. Problem çözme sürecine odaklanmak, süreci ve mantığını anlamaya çalışmak uzun vadede daha iyi sonuçlar getirecektir (Santos-Trigo & Machín, 2013).

Problemlerin çözümüne başlamadan önce onu destekleyen AN'leri bilmek ve anlamak önemlidir. AN'lerin belirlenmesi ile sadece belirli bir problemin çözülmesi amaçlanmamıştır. Problem aracılığı ile gündeme gelen öğrenme hedeflerinin ortaya çıkarılması da amaçlanmıştır. Öğrenciler AN'leri ve onu destekleyen AAN'leri gerçekten anlamaya çalışırlarsa önceden edindikleri varsa yanlış kanıları değişebilir. Böylelikle öğrenciler sunulan bilgiyi gerçekten anlamaya çalışırlarsa, eğitim anlamlı öğrenmeyi destekleyecek, detaylı bir şekilde ele alınmayan pek çok konu yerine birkaç önemli düşünceye odaklanıldığında yanlış kanıların değişimini teşvik edecektir (Linn, 2008).

Öğrencilerin problem çözme performansını artırmak için alternatif bir uygulama olan AN'lerin belirlenmesi öğretmenler tarafından sistematik bir şekilde organize edilmiş bir şekilde sağlandığında etkisi artabilir. Böyle bir yaklaşım üzerinden problem çözme öğrenimi hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin üstbilişsel düşünme becerilerinin gelişimini destekleyebilir. Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin AN'leri belirleme durumları kullandıkları bilişsel eylemlerin farkındalığına ve kontrolüne sahip olmalarını gerektirdiğinden, anahtar nokta belirleme durumunun üstbilişsel beceri ve etkinlikleri içerdiği söylenebilir.

Araştırmacıların çoğu matematiksel problemleri çözmeye başarılı ve başarısız olmayı bilişsel ve üstbilişsel düşünme düzeylerine bağlamaktadır. Matematiksel problem çözmeye güçlük yaşayan öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarında çeşitli bilişsel ve üstbilişsel stratejileri kullanmadığı ifade edilmiştir (Wilson & Clarke, 2004). Araştırmacılar bir üstbilişsel süreç olan üstbilişsel kontrol sürecinin problem çözmeye karar verme sürecini büyük ölçüde etkileyen en kritik üstbilişsel düşünme davranışı olduğuna dikkat çekmektedir (Carlson & Bloom, 2005). Üstbilişsel kontrol bilişsel aktivitelerin planlanması, izlenmesi ve değerlendirilmesidir. Birey problem çözme sürecinde yaptığı bilişsel girişimleri planlaması, izlemesini ve değerlendirmesi ile AN'leri belirleyebilir. Öğrencilerin kendi bilişsel girişimlerini düzenlemesini (planlama, izleme, değerlendirme) destekleyerek öğrencilerin üstbilişsel gelişimine olanak sağlayan öğretmenlerin kullanabilecekleri bir dizi strateji olduğu belirtilmiştir (Papaleontiou-Louca, 2003). AN belirleme durumlarının da bu duruma katkı sağlayacak bir yaklaşım olarak düşünülebilir.

Problemin çözüm sürecinde belirlenen AN'ler dayandıkları teoremler ile matematiksel problemlerin çözümü için geniş bir çerçeve sunduğu söylenebilir. Araştırmacı test tekniği için pratik çözümler geliştiren yayınları incelemiştir. Bu yayınlarda temel kural ve

formüller adı altında polinomlar ile ilgili hangi noktalara değinildiğine bakılmıştır. Bu amaçla oluşturulan kitapların her bir başlık altında o başlıkla ilgili olan tanım ve kuralları bir araya getirme odaklı olduğu söylenebilir. Problemlerin çözümü için gerekli olan matematiksel fikirlerin gelişmesi açısından bu tür kitapların eksik kaldığı söylenebilir. ÖSYM tarafından hazırlanan problemler göz önüne alındığında formül gerektiren sorular yerine formüllerin problemin soru kökünde yer aldığı günlük hayatla ilişkilendirilmiş problemlerin yer aldığı görülmüştür. Bu araştırmada ÖSYM tarafından hazırlanan üniversiteye giriş sınavı sorularından seçilmiş olan matematiksel problemler üzerinde çalışılmıştır. Problem çözmede AN'ler matematiksel yapısının nereye dayandırıldığının belirtilmesi ile öğrenciye anlamlı bir öğrenme sunabilir ve ilişkili olduğu diğer yapılarla birlikte verilmesi ile öğrenciler ÖSYM'nin hazırladığı problemlere bakış açısı geliştirebilir.

AN tanımı gereği problem çözme sürecinde olmazsa olmaz fikirlerdir. Sınav sistemine hazırlık bünyesinde üretilen temel kuralları içeren kitaplarda ise öğrencilerin elinin altında tüm konularla ilgili öz anlatımlar sunma amacı taşıdığı söylenebilir. Eğitimciler birçok öğrencinin gerekli formülleri öğrenebildiğini ve bunları sınırlı sayıda ders kitabı ve test durumlarına uygulayabildiklerini; ancak yeni sorunlarla karşılaştıklarında ilgili kavramları ve kavramsal ilişkileri anlamamış olmaktan çok uzak olduklarını ifade etmiştir (Glaserfeld, 1995). Öğrenciler problem çözümlerinde formülü hatırlamaktan ziyade problemin çözümünde kullanacağı matematiksel fikirlerle bağlantı kurmakta zorlanabilmektedir. Dolayısıyla AN'lerin AAN'ler ile desteklenerek bu bağlantıların kurulabilmesi hedeflenmiştir.

Problem çözme ilgili anahtar bilgiyi elde etmeyi gerektirir. Her türlü akıl yürütmede bir kısım fikir ya da kavram kullanılırken bir kısmı ise kullanılmaz. Bu kavramlar bir kimsenin akıl yürütmesinde kullandığı teoriler, prensipler, aksiyomlar, kurallardır. Kavramlarda ya da görüşlerdeki herhangi bir sorun akıl yürütmedeki bir problemin olası bir sebebi olabilir. Problemi anlamada ve çözmede gerekli olan en önemli kavram ve fikirlerin bir birleşimi olan AN'yi şekillendiren AAN'ler anlaşılmadan o AN tam olarak anlaşılmayabilir. Çünkü tüm AN'ler mantıksal olarak bir bilgi temeli gerektirir. Dolayısıyla herhangi bir AN'nin işaret ettiği AAN'lerin anlaşılması önemli olmaktadır.

Öğrencilerin matematik başarısını etkilemede önemli bulunan faktörler arasında problem çözme becerileri ve üstbilişsel bilgi ve beceriler ile ilgili farkındalık vardır. Problem çözme, her problem çözücüye özgü ve yeni olan bir duruma uygun bir çözüm bulmayı

içeren önemli bir beceridir. Belirli bir probleme çözüm bulmak için, problem çözücünün analiz etme, yorumlama, akıl yürütme, tahmin etme, değerlendirme ve yansıtma gibi çeşitli üst düzey düşünme becerilerini benimsemesi gerekmektedir. Problem çözme, öğrencilerin bildikleri ile üzerinde çalıştığı öğrenme görevi arasında ilişki kurması için öğrenmenin transfer edilmesine yardımcı olacak uygun fırsatlar sağlamaktadır (Esan, 2015).

Üstbilişsel bilgi, öğrencinin nasıl öğrendiği hakkında bilgisini, öğrencinin kendisi için en etkili olan prosedür ve stratejiler hakkında ne bildiğini ve çeşitli bilişsel faaliyetlerin hangi durumlarda kullanılmasının en etkili olduğu koşullar hakkında öğrencinin bildiklerini ifade etmektedir (Hassan & Rahman, 2017). Dolayısıyla öğrencinin bilgisi, becerisi, deneyimi doğrultusunda problem çözme sürecinde AN'ler tek başına çözüme ulaştırmayabilir.

Üstbiliş ile ilgili yapılan çalışmalar bilgiye sadece sahip olmaktansa onu stratejik kullanmanın öğrenmeyi artırdığını göstermektedir. Öğretmenler stratejilerin nasıl, ne zaman ve neden kullanıldığı hususunda öğrencilere model olabilir. Strateji kullanımında tek model öğretmenler değildir. Benzer şekilde öğrenciler de birbiri için model olabilirler.

Araştırmada matematik öğretmenlerinin ve onların öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN'leri belirlemeleri istenmiştir. Araştırmacı yapılan oturumlarda öğretmenlerin belirledikleri AN'leri, öğrenciler problem çözme sürecinde güçlük yaşadığı zaman kendileri ile paylaşmıştır. Bu durumlarda bazen öğretmenlerinin belirlediği AN yerine bir diğer katılımcı öğrencinin belirlediği AN öğrencinin bu güçlüğü aşmasına neden olabilmektedir. Öğretmenin belirlediği AN'ler çözümü inşa etmesinde yeterli olmamıştır. Katılımcı bilgisi, becerisi ve deneyimi gereği çözüme ulaşmak için öğretmenin belirlediği AN'ler dışında bir AN'ye daha ihtiyaç duymuştur.

2.5. İlgili Çalışmalar

Bu bölümde araştırmanın konusuyla ilgili, problem çözme, üstbiliş ve AN ile ilgili yapılmış araştırmalara yer verilmiştir.

Literatürde öğrencilerin matematiksel problem çözme becerilerinin geliştirilmesi ile ilgili uluslararası bir çalışma ve matematik öğretmen adaylarının üstbilişsel davranışlarını etkilemek için tasarlanan eğitim durumlarının etkilerinin incelenmesi ile ilgili ulusal bir çalışma yer almaktadır. Her iki çalışmanın bu çalışma ile dolaylı olarak ilgili olduğu söylenebilir.

Hanegem (2017) yaptığı çalışmada ortaokul öğrencilerinin matematiksel problem çözme becerilerinin nasıl geliştirilebileceğini incelemiştir. Araştırmada problem çözme modeli geliştirme, problem çözmede öğrencilere öğretmen rehberliğinin rolü üzerinde odaklanılmıştır. Araştırmada dokuz haftalık 36 ders planı hazırlanmıştır. Bu dersler beş, altı, yedi, sekizinci sınıf öğrencilerine üç öğretmen tarafından uygulanmıştır. Uygulama sonunda 121 öğrenciye ön test-son test uygulanmıştır. Bunun dışında her hafta dört öğrenci grubuyla öğrencilerin problem çözme süreçlerinin farkındalıkları hakkında görüşmeler yapılmıştır. Araştırmada öğrencilerin problem çözme becerileri ve problem çözme sürecindeki farkındalıklarının geliştiği gözlemlenmiştir. Gerçek yaşam problemleri, öğretmen rehberliğini geliştirmeye odaklanan, iyi uygulanan çok boyutlu bir yaklaşım olarak öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirdiği belirtilmiştir.

Demircioğlu (2008) yaptığı çalışmada üstbilişsel davranışları yani üstbilişsel bilgi ve becerileri artırmaya yönelik tasarlanan eğitim durumlarını uygulamıştır ve bu eğitim durumlarının matematik öğretmen adaylarının üstbilişsel davranışlarına olan etkilerini incelemiştir. Çalışmanın katılımcılarını altı matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmada nitel araştırma dizaynı olan durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmanın verileri, katılımcıların yazma oturumlarında teslim ettikleri araçlardan, araştırmacı günlüğünden, video-kamera görüntülerinden, katılımcılarla yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Katılımcıların böyle bir süreci yaşamalarının kendilerini tanımalarına, üstbilişsel davranışlarının artmasına ve her şeyden önemlisi farkındalıklarının artmasına katkı sağladığı belirtilmiştir.

Araştırmada geçen AN kavramı ile ilgili çalışmalar ile ilgili literatür incelemesi yapılmıştır. Literatürde “anahtar fikir” kavramı geçen sınırlı sayıda uluslararası çalışma olduğu görülmüştür. Bu çalışmalarda geçen “anahtar fikir” kavramı tanımının bizim çalışmamızdan farklı olarak tanımlanmıştır. Türkiye’de “anahtar fikir” kavramı ile ilgili bir doktora tezi çalışması bulunmaktadır. Çetin (2017) tez çalışmasında yer alan “anahtar fikir” kavramı bu tezde göz önüne alınan AN kavramından farklıdır. Anahtar fikir, ispatı oluşturan ve tamamlanmasına ilişkin bir his veren parça olarak tanımlanmıştır (Çetin, 2017). Ulusal çalışmalar incelendiğinde bu tezde göz önüne alınan AN kavramı ile benzer olan bir tek çalışmaya rastlanmıştır. Yapılmış olan ulusal ve uluslararası çalışmalarda üniversite öğrencilerinin ispatlama performanslarına odaklanıldığı görülmüştür.

Karaoğlu (2010) çalışmasında anahtar nokta ve fikir kavramını “bir teoremin ispatının, bir problemin çözümünün üzerine inşa edildiği nokta ve fikirler” olarak tanımlamaktadır. Yapılan çalışmada öğretmen adaylarına anahtar nokta ve fikirler hazır olarak verilmiştir. Matematik öğretmen adaylarının verilen anahtar nokta ve fikirler yardımıyla ispatı hangi aşamaya getirebildiğine bakılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirleri kullandıklarında; teoremi ispatlamak için daha istekli davrandıkları gözlemlenmiştir. Araştırmada öğretmen adayları matematik derslerine ispatların anahtar nokta ve fikirler üzerine vurgu yapılarak öğretilmesinin, ispat yapma performanslarını arttıracığı yönünde görüş bildirmiştir. Bu çalışmada geçen “anahtar nokta ve fikir” kavramı ile çalışmamızda geçen AN kavramı ile benzerlikler taşımaktadır.

Raman (2003) çalışmasında profesörlerin, öğretici asistanların ve üniversite öğrencilerinin ispata bakış açılarını incelemiştir. Katılımcıların zihinsel süreçlerine odaklanarak bir ispatın doğruluğuna neden inandıklarını incelemiştir. Anahtar fikir kavramını uygun mantıksal geçerlikle birlikte formal ispata dönüştürülebilen buluşsal fikir olarak tanımlanmıştır. Anahtar fikir hem anlama, hem de ikna hissi vererek bir iddianın neden doğru olduğunu gösteren fikir olarak ifade edilmiştir. Çalışmada anahtar fikir ispatlama performanslarına katkı sağlayan alternatif bir metot olarak kullanmamıştır. Katılımcılardan; profesörlerin ve öğretici asistanların, ispat yaparken anahtar fikirlere başvurduklarını ortaya koymuştur. Bu anahtar fikirlere başvuranların, yaptıkları ispatların geçerli olduğuna inandıklarını belirlemiştir. İnsanların anahtar fikir olmadan ispat yapamayacakları ifade edilmiştir.

Raman ve Weber (2006) çalışmasında öğrencilerin ispat üretmelerine ve anlamalarına yardımcı olmak için anahtar fikrin nasıl kullanılacağını incelemiştir. Eğitimcilerin önerdiği dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin geometrik ilişkilerle ilgili sezgilerini geliştirmesine ve tahmin yapmalarına yardımcı olsa da sezgisel keşiften formal ispatla ilişki kurmada az bir rehberlik sağlamakta olduğunu belirtilmiştir. Bunun için çalışmada izlenecek adımlar şu şekilde belirtilmiştir; öğrencilerin belirli bir geometrik durumla ilgili geliştirdikleri sezgilerinin türlerinin aydınlatılması, öğrencilerden üretmeleri istenen ispatların formal ispatlarının tanımlanması ve son olarak da ilk iki adımının anahtar fikir kavramıyla nasıl birbirine bağlı olduğunun gösterilmesidir. Öğrencilere sınıf içinde ispatlamaları için geometrik bir görev sunulmuştur. Yapılan çalışmada anahtar fikir kavramının ispatın yapısını öne çıkarmaya izin verdiğini, detayları geri plana alarak ispatta gerçek konunun ne olduğuna dikkat çektiği belirtilmiştir.

Raman ve Zandieh (2009) çalışmasında odak noktasının ispat sürecindeki anahtar fikirler olduğu belirtilmiştir. Katılımcıları üniversitede geometri dersindeki 28 öğrenci oluşturmaktadır. Bu çalışmanın verilerini ise öğrencilerin ispat üzerine tartışmalarının kaydedildiği videolar, öğrencilerin yazılı çalışmaları, araştırmacının notları oluşturmaktadır. Bu öğrencilerden Brandon adlı öğrencinin ispata ilişkin notları izlenerek anahtar fikrin ispatla ilgili tartışmalardaki rolü gözlenmiştir. Anahtar fikrin çift doğası olduğu belirtilmiştir. Bunlardan birisi pozitif olan tarafı kişinin anahtar fikrinin olması, savunma için soru sorulması tartışmayı açarak ispat üretimini ilerletebildiği belirtilmiştir. Negatif tarafı ise kanıtının doğru olduğu inancı kişinin tartışmalara kapalı olmasına yol açarak ispat üretimini bitirebildiği olarak ifade edilmiştir.

Raman vd. (2009) çalışmasında üniversite öğrencilerinin ispat üretiminde kolaylaştıran ve güçlük yaşatan durumların neler olduğuna dair bir araştırma ve geliştirme projesi yapılmıştır. Proje araştırma ve geliştirme olarak iki bileşenden oluşmaktadır. Projenin amacı öğrencilerin ispat yapmalarını, öğrenmelerini geliştirmektir. Bu amaçla üniversite öğrencilerinin ispat yapmaya çalışırken, ispata başlarken, bazen başarırken, bu süreçteki matematiksel tartışmalar içeren videoları kullanılmıştır. Bu pedagojik videoların oluşturulması projenin geliştirme kısmını oluşturmaktadır. 2 matematik eğitimcisi ve 3 matematikçinin içinde bulunduğu araştırma grubunun amacı ise öğrencilerin ispata giriş dersinin öğretimini geliştirmektir. Videolar öğretmenlerin mesleki gelişimleri için bir araçtır çünkü bu videolar sayesinde öğrencilerin ispat yaparken yaşadığı zorluklar ve öğrenci düşünceleri hakkında daha iyi bir anlayışa sahip olmaları sağlanmıştır. Ayrıca videolar çoğu öğrencinin güçlük yaşadığı durumları vurguladığından öğrencilerde sınıf içi tartışmalarla kendi matematiksel düşüncelerinin farkına varabilmelerine yardımcı olacağı düşünülmüştür. Araştırmada “öğrencileri ispat yaparken fırsatlar oluşturarak bir ileri aşamaya taşıyan kritik anlar nelerdir” ve “bu anların doğası nedir” sorularına cevap aranmıştır. Çalışmanın sonunda ispat üretiminde kritik rol oynayan ilk anın anahtar fikir edinme anı olduğu ifade edilmiştir. Bu anahtar fikrin kişiye “ben buna inanıyorum” hissi verdiği belirtilmiştir.

Çetin (2017) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının cebir alanında matematiksel ispat yaparken önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini incelemiştir. Çalışmanın katılımcılarını 5 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Bu çalışmanın verilerini ise ispat tamamlama formunun uygulandığı yarı yapılandırılmış görüşmelerin kaydedildiği videolar, öğretmen adaylarının yazılı çalışmaları, araştırmacının araştırma süresince

tuttuğu g nl ğu oluşturmaktadır. Yapılan çalışmada anahtar fikirlerin  ğretmen adaylarının sezgisel olarak ispata anlamalarını, ispata yönelik olumlu bir tutum geliştirmelerini, ispata başlamalarını, cebirsel işlemlerini yapmalarını ve ispata tamamlamalarını kolaylaştırdığı fakat kavramsal bilgi düzeyi yetersiz  ğretmen adaylarının daha derinlerdeki yanlış öğrenmelerini ya da bilgi eksikliklerini ortaya çıkarma olanağı sunduğu belirtilmiştir.



BÖLÜM III

ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ

Bu bölümde araştırmanın modeli, katılımcılar, katılımcıların seçimi, katılımcılar ile ilgili kişisel bilgiler, pilot uygulama, veri toplama aracı, veri toplama süreci, toplanan verilerin analizi ve katılımcı teyidinden bahsedilecektir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözmede AN belirleme durumlarının incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Yapılan çalışmada verilerin analizinde nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ve gömülü (grounded) teorisinin teknikleri kullanılmıştır.

Bu araştırma üç kısımda yürütülmüştür. Araştırmada önce matematik öğretmenlerinden problem çözme sürecinde anahtar noktaları belirlemeleri istenmiştir. Araştırmanın bu bölümü iki aşamada yapılmıştır. İlk aşamada 7 problem ile görüşme yapılmıştır. İkinci aşamada ise 2 problem ile ilgili görüşme yapılmıştır. Bunun nedeni ilk görüşmeler yapıldıktan sonra yapılan üniversiteye giriş sınav sorularından ikisinin de çalışmaya dâhil edilmesidir. Her bir matematik öğretmeni ile görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelerin analizinde gömülü teorisinin teknikleri kullanılmıştır.

Araştırmanın ikinci kısmında matematik öğretmenlerinin öğrencilerinden problem çözme sürecinde AN'leri belirlemeleri istenmiştir. Araştırmanın bu bölümü iki aşamada yapılmıştır. İlk aşamada 7 problem ile görüşme yapılmıştır. İkinci aşamada ise 2 problem ile ilgili görüşme yapılmıştır. Problem çözme sürecinde öğrencilerden istendiği takdirde öğretmenlerin belirledikleri AN'ler sunulmuştur. Her bir öğretmenin öğrencisi ile

görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelerin analizinde gömülü teorelin teknikleri kullanılmıştır.

Araştırmanın üçüncü kısmında ise matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin AN belirleme durumları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konmaya çalışılmıştır. Araştırmanın bu bölümünde öğretmenler ve öğrenciler ile yapılan görüşmelerden elde edilen veriler durum çalışmasının analiz tekniği olan betimsel analiz yöntemine göre analiz edilmiştir.

Araştırmanın deseni Şekil 3.1’deki gibidir

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmasının nedeni literatürde araştırmanın olgusu olan AN kavramı ile ilgili çok az bilgi bulunmaktadır. Araştırma probleminde geçen AN kavramının keşfedilmesi için en uygun yöntemin nitel araştırma olabileceği düşünülmüştür. Bu çalışmada verilerin analizinde nitel araştırma yöntemi kullanılarak matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözme süreçlerinde AN belirleme durumları incelenerek literatüre katkıda bulunulmaya çalışılmıştır.

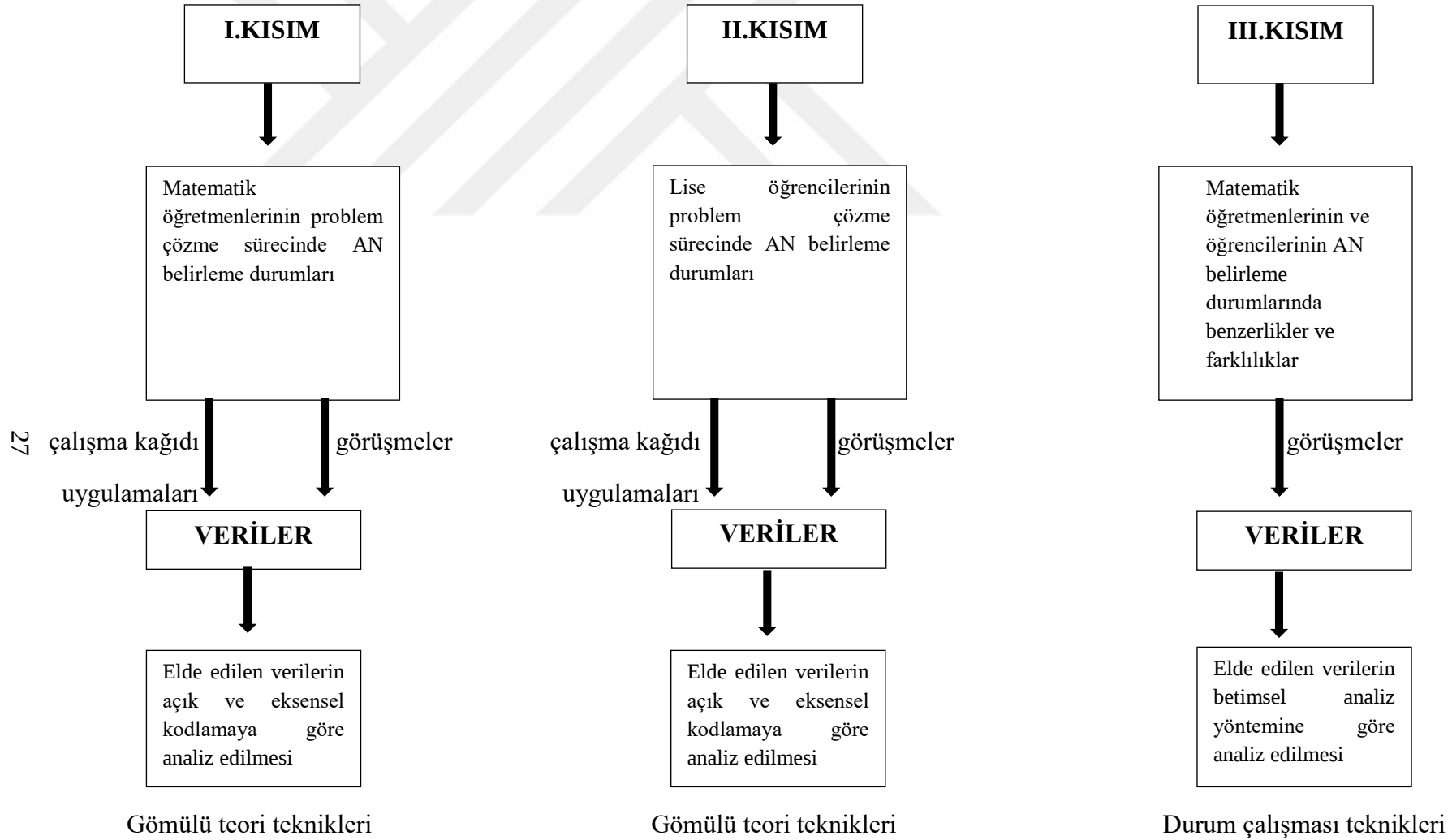
3.2. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını 2017-2018 eğitim öğretim yılı Nisan, Mayıs ve Haziran ayları ve 2018-2019 eğitim öğretim yılı Eylül ile Ekim ayları döneminde, Ankara’da sınavla öğrenci alan nitelikli bir Anadolu Lisesinde görev yapan beş matematik öğretmeni ve bu okulda öğrenimine devam eden on öğrenci oluşturmaktadır.

3.3. Katılımcıların Seçimi

Nitel araştırmalarda amaçlı örnekleme yöntemlerinden birisi olan “kolay ulaşılabilir durum örnekleme” yöntemine göre belirlenen yedi matematik öğretmeni ile görüşmeler yapılmıştır. Öğretmenlerin akademik bilgileri, görev yaptığı süreler, halen devam ettiği öğrenim kurumu olup olmadığı, yayın bilgileri gibi bilgileri istenmiştir. Bu oturumlardan ve elde edilen bilgilerden sonra çalışmaya katılan beş matematik öğretmeni belirlenmiştir.

.



Şekil 3.1. Araştırma deseni

Bu aşamadan sonra nitel araştırmalarda amaçlı örnekleme yöntemlerinden birisi olan “ölçüt örnekleme” yöntemine göre öğrenciler belirlenmiştir. Bunun için matematik öğretmenin gözlemlerine göre seçilme, akademik ortalaması yüksek olma gibi ölçütler dikkate alınmıştır. Bu ölçütlere göre her bir matematik öğretmeni için üçer öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Daha sonra yapılan görüşmeler neticesinde kendini ifade edebilme, çalışmaya katkıları daha fazla olması ve bireysel özelliklerinden dolayı katılımcılar on öğrenci ile sınırlı tutulmuştur.

3.4. Katılımcılar ile İlgili Kişisel Bilgiler

Çalışmanın amacı ve yöntemi dikkate alındığında, öğretmenlerin ve öğrencilerin öncelikle süreç boyunca oturumlara katılmaya istekli olmalarına özen gösterilmiştir. Bu nedenle öğretmenlerin ve öğrencilerin çalışmaya gönüllü katılmaları bu çalışma için önemlidir.

Çalışmaya katılan öğretmenlere ve öğrencilere isimlerinin deşifre edilemeyeceği ve her aşamada etik kurallara uyulacağı ifade edilmiştir. Çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuş, her bir öğretmene ve öğrenciye araştırmacı tarafından bir kod verilmiştir. Öğretmenler M1, M2, M3, M4 ve M5 isimleri ile kodlanmıştır. Kod isimler verilirken herhangi bir alfabetik sıralama göz önünde bulundurulmamıştır. Matematik öğretmeni olmaları nedeniyle M harfi ile kodlanmıştır. Katılımcılar sadece kadın ya da sadece erkek öğretmenlerden oluşmamaktadır. Öğretmenler aynı okulda görev yapmalarına rağmen yapılan görüşmeler ile ilgili herhangi bir görüş alış verişinde bulunmamıştır. Görüşme kayıtları incelendiğinde bu durumun yaşanmadığı anlaşılmıştır. Öğretmenlerin kendi düşüncelerini problem çözme süreçlerine yansıttıkları söylenebilir.

Araştırmanın katılımcılarını beş matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Katılımcıların belirli bir yaş seviyesinde, belli bir matematik birikimine sahip ve kendini geliştirmeye istekli olmaları bu çalışma için önemlidir. Çalışmanın amacına ulaşmak için birinci oturumda 2018 yılı öncesinde sorulmuş olan matematiksel problemler ile ilgili 5 matematik öğretmeni ile görüşülmüştür. İkinci oturumda 2018 yılında yapılan Alan Yeterlilik Testleri (AYT) sınavında sorulan iki problem için katılımcı olan 5 matematik öğretmeni ile görüşülmüştür.

Araştırmanın katılımcıları sınavla öğrenci alan bir Anadolu lisesinde görev yapmaktadır. Katılımcılar Anadolu Liseleri Öğretmen Seçme Sınavında başarılı olmuştur ve yazılı

sınava göre atanmıştır. Okulda görev yapan diğer iki matematik öğretmeni ile pilot çalışma yapılmıştır.

Araştırmanın katılımcısı olan beş matematik öğretmeni Ankara'nın köklü üniversitelerinden mezun olmuştur. Katılımcıların görev yaptıkları süreler 16 ile 32 yıl arasında değişmektedir. Katılımcı öğretmenlerin araştırmanın yürütüldüğü bu okulda görev yaptıkları süre ise 9 ile 13 yıl arasında değişmektedir. Katılımcı öğretmenlerden ikisi MEB onaylı matematik ders kitaplarının yazılmasında görev almıştır. Ayrıca katılımcı öğretmenlerden birisi hariç diğer tüm öğretmenler özel yayınevlerine çeşitli sınavlara hazırlık matematik kitapları oluşturmuştur veya katkıda bulunmuştur. Katılımcıların mezun olduğu üniversitelerin isimleri ve katılımcı öğretmenler ile ilgili ayrıntılı bilgiler çalışmanın etiği açısından gizli tutulmuştur.

Araştırmanın katılımcılarını on öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğrencilere araştırmacı tarafından bir kod verilmiştir. Kod isimler verilirken herhangi bir alfabetik sıralama göz önünde bulundurulmamıştır. Öğrenci olmaları nedeniyle Ö harfi ile kodlanmıştır. Bir öğretmenin iki öğrencisi ile görüşme yapılması durumunda ise öğrenci kelimesinin İngilizce karşılığı “student” olması nedeniyle diğer öğrenci S harfi ile kodlanmıştır. Katılımcı öğretmenin üçüncü öğrencisi olması durumunda ise öğrenci kelimesinin eş anlamlısı olan “talebe” kelimesi nedeniyle T harfi ile kodlanmıştır. M1 öğretmenin öğrencilerine S1 ve Ö1, M2 öğretmenin öğrencilerine S2 ve Ö2, M3 öğretmenin öğrencisine S3, M4 öğretmenin öğrencisine S4 ve Ö4, M5 öğretmenin öğrencilerine S5, Ö5 ve T5 kod isimleri verilmiştir. Görüşme sorularını üniversiteye giriş sınavında sorulan problemler oluşturduğundan görüşülen öğrenciler 9., 10., 11. ve 12.sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Eğer öğretmenin 12.sınıf öğrencisi yoksa problemlerde yoklanan kazanımlara sahip farklı sınıf seviyelerindeki öğrencileri ile görüşülmüştür. Veri toplama süreci 2017-2018 eğitim öğretim yılının Nisan ayında başlamıştır. Haziran ayının ortalarına kadar devam eden veri toplama sürecinde M1 öğretmenin öğrencisi S1, M2 öğretmenin öğrencisi S2, Ö2, M3 öğretmenin öğrencisi S3, M4 öğretmenin öğrencisi S4 ve M5 öğretmenin öğrencisi S4, Ö5, T5 ile 7 matematik problemi ile ilgili görüşme yapılmıştır. 2018 yılında yapılan üniversiteye giriş sınavı sonrasında 2 problem daha görüşme sorularına eklenmiştir. Bu nedenle M1 öğretmenin öğrencisi S1 okuldan mezun olduğu için Ö1 ile görüşülmüştür. Aynı şekilde M2 öğretmenin öğrencisi Ö2 mezun olduğu için görüşülmemiştir. M4 öğretmenin öğrencisi S4 okuldan mezun olmuştur.

Dolayısıyla 2018 problemleri Ö4 ile görüşülmüştür. Son olarak M5 öğretmenin öğrencisi Ö5 başka bir okula kayıt yaptırarak okuldan ayrılmıştır.

İlk olarak birinci oturumda her bir matematik öğretmeni için kendilerinin belirlediği akademik başarısı yüksek olan her sınıf düzeyinde toplam 24 öğrenci ile problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumlarını incelemek amacıyla mülakat yapılmıştır. Araştırmacı her öğrencinin sınıf düzeyine göre MEB'in hazırladığı programa uygun olacak şekilde problemler ile görüşme yapılmıştır. 12. Sınıf öğrencileri ile birinci oturumda bulunan toplam 7 problem ile ilgili görüşme yapılırken ara sınıflarda bulunan öğrenciler için problemler kazanımlarla sınırlı tutulmuştur. Yapılan mülakatlar sonucunda 10 öğrencinin katılımcı olmasına karar verilmiştir. Öğrencilerin çalışmaya katkılarının daha fazla olması nedeni çalışmada katılımcı olmalarında en önemli ölçüt olmuştur. Örneğin okulu derece ile bitiren üç öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Okul birincisi ile yapılan görüşmelerin çalışmaya katkısı olamayacağı düşünülmüştür. Okul ikincisi olan S4 ve okul üçüncüsü olan Ö2'nin katılımcı olmasına karar verilmiştir.

Bu öğrencilerin matematik dersi ortalamaları varsa okul dereceleri, sınıf düzeyleri ve matematik öğretmenleri aşağıdaki Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1

Öğrencilerin Bilgileri

Katılımcı öğrenciler	Sınıf düzeyi	Okul Derecesi (varsa) / Matematik dersi ortalaması (Yazılı sınavların ve öğretmenlerin verdiği performans puanlarının ortalaması)	Matematik öğretmeni
S1	12.sınıf (2017-2018) Mezun olmuştur.	Matematik dersi ortalaması 98,63	M1
Ö1	10.sınıf (2017-2018) 11.sınıf (2018-2019)	Matematik dersi ortalaması 89,45 Matematik dersi ortalaması 89,88	M1
S2	10.sınıf (2017-2018) 11.sınıf (2018-2019)	Matematik dersi ortalaması 100 Matematik dersi ortalaması 100	M2
Ö2	12.sınıf (2017-2018) Mezun olmuştur.	Okul üçüncüsü ortalaması 93,23 Matematik dersi ortalaması 99,88	M2

S3	11.sınıf (2017-2018)	Matematik dersi ortalaması 98,88	M3
	12.sınıf (2018-2019)	Matematik dersi ortalaması 99,38	
S4	12.sınıf (2017-2018)	Okul ikincisi ortalaması 93,50	M4
	Mezun olmuştur.	Matematik dersi ortalaması 97,13	
Ö4	10.sınıf (2017-2018)	Matematik dersi ortalaması 95,75	M4
	11.sınıf (2018-2019)	Matematik dersi ortalaması 95,88	
S5	10.sınıf (2017-2018)	Matematik dersi ortalaması 99,38	M5
	11.sınıf (2018-2019)	Matematik dersi ortalaması 99,63	
Ö5	11.sınıf (2017-2018)	Matematik dersi ortalaması 96,50	M5
	Okuldan ayrılmıştır.		
T5	9.sınıf (2017-2018)	Matematik dersi ortalaması 100	M5

Tablodan da görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğrencilerin tamamı üstün başarılı öğrencilerdir.

3.5. Pilot Uygulama

Araştırmanın amacına hizmet etmeyecek ön durumları belirlemek amaçlarıyla pilot çalışma yapılmıştır. Araştırma süresince iki pilot uygulama yapılmıştır. Araştırmanın ilk pilot uygulaması 2017-2018 eğitim öğretim yılı ekim, kasım aylarında ikinci pilot uygulaması ise 2017-2018 eğitim öğretim yılı ocak, şubat aylarında yapılmıştır. Her iki pilot uygulamada iki matematik öğretmeni ve onların belirlediği iki öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Katılımcılar iki pilot uygulamada da değişmemiştir.

Araştırmanın ilk pilot uygulaması katılımcı olmayan iki matematik öğretmeni ve iki öğrenci ile yapılmıştır. İlk olarak daha önceden araştırmacı tarafından AN'leri araştırmacı tarafından belirlenen tanımlar ve ispatlar matematik öğretmenlerine gösterilmiş ve fikirleri alınmıştır. Matematik öğretmenleri ispatlamada öğrencilerin zorluk yaşayacaklarını söylemiştir. Ayrıca öğrencilerin tanımdan ziyade örnek üzerinden anladıklarını ifade etmiştir. Pilot uygulamada mülakat yapılan öğretmenlerden birisi "*Öğrencinin hatırlaması için örnek üstünde göstermek daha etkilidir.*" açıklamasını yapmıştır. Pilot uygulamada öğrencilerle yapılan mülakatlarda öğrencilerin ispatlamada zorluk yaşadıkları görülmüştür.

Bunun üzerine danışman öğretim üyesi tarafından çalışmaya katkısı fazla olacağı düşünülerek asıl çalışmada yapılacak mülakatlarda matematiksel problemler olmasına karar verilmiştir. Daha sonra yapılan ikinci pilot uygulamada ortaöğretim programına uygunluğu, niteliği, çalışmanın amacına uygunluğu açısından üniversiteye giriş sınavında sorulan problemlerden seçilmiş 10 tane problem ile mülakatlar yapılmıştır. İlk pilot uygulamaya katılan 2 öğretmen ve 2 öğrenciden çözüm sürecinde AN'leri belirlemeleri istenmiştir. Veriler gözden geçirilmiş, çalışmanın amacına katkısı olabileceği düşünülerek veri toplama aracı ÖSYM'nin hazırladığı seçilmiş problemlerden oluşan görüşme formu oluşturulmuştur. Dolayısıyla hem öğretmenlerle hem de öğrencilerle yapılan birinci pilot çalışma ile veri toplama aracında üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan problemler olmasına karar verilmiştir. Asıl çalışmada ispatların yer almamasına karar verilmiştir. Yapılan ikinci pilot çalışma ile problemlerin hangi kazanımlar ile ilgili olmasına karar verildiği söylenebilir. Problemler bir seçme sınavında sorulmuş problemler olduğundan belli bir sürede çözülmesi gerektiğinden pilot çalışmada elde edilen veriler gözden geçirilerek belirlenebilecek AN sayısı sınırlı olmakla beraber asıl çalışmada yer alan problemlerin AN sayısının çok az olmamasına dikkat edilmiştir. Ayrıca yapılan pilot çalışma ile öğretmenlerin ve öğrencilerin problem çözme sürecinde AN olarak belirlediği noktaların tespiti amacıyla hazırlanan görüşme sorularının sondalarının hazırlanmasına olanak sağlamıştır.

3.6. Veri Toplama Süreci

Veri toplama 2017-2018 eğitim-öğretim yılı nisan, mayıs ve haziran ayları ve 2018-2019 eğitim-öğretim yılı eylül ve kasım ayları arasında devam etmiştir. 5 öğretmen ve 10 öğrenci ile yapılan oturumlar katılımcıların müsait oldukları zamanlarda onlarla önceden belirlenen yer ve saatte yapılmıştır.

Çalışmada ilk olarak 2017 yılı ve öncesi üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan 7 problem ile katılımcı öğretmen ve öğrenciler ile görüşülmüştür. Bu oturumlar 2017-2018 eğitim-öğretim yılı nisan, mayıs ve haziran ayları arasında devam etmiştir. Daha sonra 2018 yılında yapılmış olan üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan 2 problem de görüşmelere dâhil edilmiştir. Bu 2 problem ile ilgili oturumlar 2018-2019 eğitim-öğretim yılı eylül ve kasım ayları arasında devam etmiştir.

Görüşmelerin iki oturumda yapılmasının nedeni çalışmaya sonradan 2 problemin dâhil edilmesidir. Sınav siteminde bazı değişimlerin olduğu göz önüne alınarak çalışmada yer alan problemlere AYT sınavında sorulmuş olan iki problem daha dâhil edilmiştir. 2018 yılında üniversiteye giriş sınavında sorulan iki problemin çalışmaya dâhil edilerek bulguların desteklenmesi, çalışmanın güncel olması amaçlanmıştır.

Üniversite sınavında sorular matematik problemleri göz önüne alındığında özellikle son yıllarda bir değişimin olduğu görülebilir. Öğrencilerden temel matematiksel bilgileri anlamlı bir şekilde öğrenmeleri ve problem çözme süreçlerinde bu bilgileri yorumlayabilmeleri beklenmektedir. Dolayısıyla öğrencilerden formülleri ezberlemeleri beklenmemektedir.

Çalışmada yer alan problemlerin hangi yıl hangi sınavda sorulduğu ile ilgili bilgiler aşağıdaki Tablo 3.2'deki gibidir.

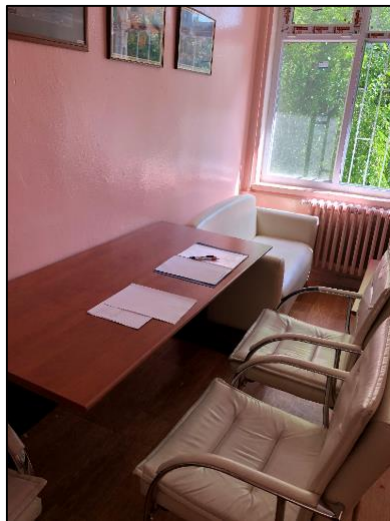
Tablo 3.2

Problemlerin Ait Olduğu Sınav Bilgileri

Problemler	Sınavın adı
1. Problem	2017 LYS
2. Problem	2010 LYS
3. Problem	2006 ÖSS
4. Problem	2007 ÖSS
5. Problem	2011 YGS
6. Problem	2017 LYS
7. Problem	2017 LYS
8. Problem	2018 AYT
9. Problem	2018 AYT

Görüşmede yer alan problemlerin tamamı üniversiteye giriş sınavında sorulan problemlerdir. Bu görüşmelerde araştırmacı katılımcılar ile problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumları ile ilgili görüşmüştür. Araştırmacı oturumlar yapılmadan önce görüşmenin yapılacağı gün ve saat ile ilgili planlama yapmıştır. Kendisi de aynı okulda görev yapan araştırmacı görüşme saatlerini boş olan ders saatleri doğrultusunda katılımcılar ile görüşerek ayarlamıştır. Katılımcılar ile de görüşülerek oturumların yapılacağı yere karar verilmiştir,

Oturumların yapıldığı yer Şekil 3.2'deki gibidir.



Şekil 3.2. Oturumların yapıldığı yer

Oturum okulda sık kullanılmayan bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Veri kaybına neden olmamak için tüm oturum ses kaydına alınmıştır. Katılımcılar sürecin ses kayıt cihazına kayıt edildiğinden haberdar edilmiştir. Hiçbir öğrenci veya öğretmen bundan dolayı tedirginlik duymamıştır.

Çalışmanın katılımcılarına çalışmanın yapılacağı yer ve saatte problemlerin yer aldığı çalışma kâğıtları kendilerine verilmiştir. Katılımcılardan problem çözme sürecinde aklından geçen tüm düşünceleri yazmaları veya söylemeleri istenmiştir. Katılımcılar kendi kalemleri ile veya araştırmacının tedarik ettiği kalemler ile çözümlerini yapmışlardır. Katılımcılardan oturum boyunca silgi kullanmamaları istenmiştir. Ses kayıtları araştırmacı tarafından yazıya dökülmüştür.

Katılımcı öğretmenlerden bazıları çözümü görmek istediklerini söylemiştir. Bunun üzerine çözüm araştırmacı tarafından kendilerine verilmiştir. Buradan anahtar noktaların neler olabileceği hakkında görüş bildirmişlerdir.

Oturumların süreli öğretmen ve öğrencilere göre değişiklik göstermiştir. 7 problem ile ilgili görüşme yapılan birinci oturumlar 50 dakika ile 60 dakika arasında sürmüştür. 2 problem ile ilgili görüşmeler yapılan ikinci oturumlar 10 dakika ile 20 dakika arasında sürmüştür. Öğrenci ve öğretmenlerin bireysel özelliklerine göre değişkenlik göstermiştir.

Veri toplama sürecinden önce okulda uygulama yapmak için Milli Eğitim Müdürlüğünden izin (Ek 1) alınmıştır. Okul müdürüne eğitim ve öğretimi aksatmayacak şekilde uygulama yapılacağı bilgisi verilmiştir. Araştırmanın yapılacağı okulun seçiminde araştırmacının görev yaptığı okul olması, katılımcı öğretmenlerin ve öğrencilerin çalışmaya katılmada gönüllü ve istekli olması, öğretmenlerin alanında tecrübeli ve öğrencilerin başarılı olmasından dolayı araştırmaya katkısı olabilecekleri düşüncesi etkili olmuştur.

3.7. Veri Toplama Aracı

Bu araştırmada nitel veri toplama yöntemleri olan görüşme ve doküman incelemesi bir arada kullanılmıştır. Çalışmada kullanılan problemler üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan ÖSYM tarafından hazırlanan problemlerdir. Mülakat sorularının üniversiteye giriş sınavı sorularından seçilmesinin nedeni uzmanlar tarafından hazırlanmış olması ve soruları kontrol eden bir sistemin olmasıdır. ÖSYM tarafından belirlenen uzmanlar tarafından bilimsel açıdan, anlaşılabilirlik açısından ve ölçme değerlendirme açısından sorular incelenmektedir. Problemler 4 yıllık ortaöğretim matematik kazanım ve becerilerini

ölçecek şekilde tasarlanması katılımcı öğrencilerin problemi nasıl çözecekleri ve çözmek için hangi ön bilgilerin gerekli olduğunu belirlemek açısından önemli bulunmuştur. Mülakat problemlerinin öğrencileri tek yönlü düşünceleri yerine problemin çözümü olabilecek en ideal çözüm yolunu belirlerken analiz ve sentez yapmalarını sağlayacak nitelikte özgün problemler olduğu için üniversiteye giriş sınav sorularından seçilmesine karar verilmiştir. Katılımcı öğretmenlerden M3 mülakat esnasında “Öğrenciler ÖSYM sorularını çözmeliler. En güzel sorular onlar.” diyerek problemler hakkında görüş bildirmiştir. Yine katılımcı öğrencilerden S2, “Ben baya bir soru çözdüm bunlarla ilgili ama. Polinomlarla ilgili aşırı derecede soru çözdüm. 10. Sınıfla ilgili birçok yardımcı kitap çözdüm. Böyle bir soru görmedim” diyerek problem hakkında M3 öğretmenle benzer görüş bildirmiştir. Araştırmanın pilot ve asıl uygulanmasında kullanılan problemler danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir. Asıl çalışmada pilot uygulamadan farklı problemler belirlenmiştir.

Problemler çalışmanın hedefine uygunluğu açısından “ilk akla gelen matematiksel yanıtın dışında farklı çözümlerinin bulunması” özelliği dikkate alınarak seçilmiştir. Çünkü iyi yapılandırılmış problemler, üstbilişsel becerilerin etkin kullanımı için katkıda bulunur (Lee, Teo, & Bergin, 2009).

Mülakatta yer alan problemler ve çözümleri aşağıda belirtilmiştir.

1. Polinomlar ile ilgili problem (LYS, 2017)

a ve b tamsayılar olmak üzere

$$P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$$

$$Q(x) = x^2 - 2ax + b$$

polinomları için

- $P(-4) = 0$
- $Q(-4) \neq 0$

olduğu biliniyor.

$Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre, $b - a$ kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 14

1. Çözüm:

$P(-4) = 0$ ve $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre

$$P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$$

yazılabilir.

$$P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$$

ve

$$P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$$

olduğundan bu durumda

$$x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4) \cdot Q(x)$$

elde edilir.

Burada $Q(x)$ polinomu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b &= (x + 4) \cdot (x^2 - 2ax + b) \\ &= x^3 + (4 - 2a)x^2 + (b - 8a)x + 4b \end{aligned}$$

elde edilir. Polinomların eşitliği tanımından

$$-a = 4 - 2a \text{ ve } b + 2 = b - 8a$$

elde edilir. O halde

$$a = 4 \text{ ve } b = 15$$

dir. Buradan

$$b - a = 11$$

bulunur.

2. Çözüm:

$Q(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 olsun. Bu durumda $P(-4) = 0$ ve $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre $P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 ve -4 olarak bulunur.

$P(x)$ polinomunun kökler toplamı

$$x_1 + x_2 + (-4) = -\frac{-a}{1} = a$$

elde edilir. $Q(x)$ polinomunun kökler toplamı

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2a}{1} = 2a$$

elde edilir. Ve böylece ilk eşitlikte $x_1 + x_2$ yerine $2a$ yazılırsa

$$2a - 4 = a$$

$$a = 4$$

elde edilir. $P(-4) = 0$ verildiği için $P(x)$ polinomunda x yerine -4 yazıp sıfıra eşitlenirse

$$(-4)^3 - a(-4)^2 - (b + 2)(-4) + 4b = 0$$

$$-64 - 16a + 4b + 8 + 4b = 0$$

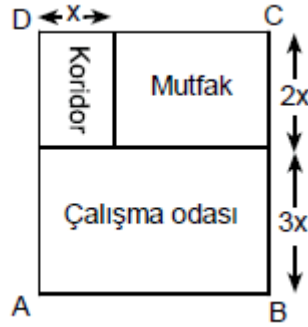
$$-16a + 8b = 56$$

elde edilir. Denklemden $a = 4$ yazılarak $b = 15$ bulunur. O halde

$$b - a = 15 - 4 = 11$$

dir.

2. Maksimum-minimum ile ilgili problem (LYS, 2010)



Koridor, mutfak ve çalışma odasından oluşan bir iş yerinin yukarıda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir. Bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 72 metredir.

Bu iş yerindeki mutfakın en geniş alanlı olması için x kaç metre olmalıdır?

A) 1

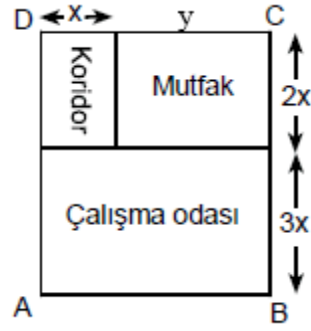
B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Çözüm: Mutfakın bilinmeyen kenar uzunluğuna aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi y diyelim.



Bu durumda $\mathcal{C}(ABCD) = 72$ olduğundan

$$2 \cdot (5x + (x + y)) = 72$$

dir. Buradan

$$6x + y = 36$$

elde edilir. O halde

$$y = 36 - 6x$$

dir.

$$ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y$$

olduğundan bu hesabı yapabilmek için

$$y = 36 - 6x$$

yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} ALAN_{MUTFAK} &= 2x \cdot y = 2x \cdot (36 - 6x) \\ &= 72x - 12x^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamadan sonra iki farklı çözüm yolu tercih edilebilir.

1. Çözüm:

Mutfağın en geniş alanlı olması demek ikinci dereceden polinom fonksiyonun en büyük değeri olan $T(r, k)$ noktasının ordinatını bulmak demektir. En büyük alanı veren apsis noktası istenen x değeridir.

Buradan tepe noktasının apsisi

$$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{72}{2 \cdot (-12)} = 3$$

elde edilir.

2. Çözüm:

Mutfağın an geniş olması fonksiyonun grafiğinin o noktada maksimum değere ulaşması ile mümkündür. Bu noktada eğim sıfırdır. Dolayısıyla türev alınıp sıfıra eşitlenirse maksimum değere ulaştıran x değeri bulunabilir.

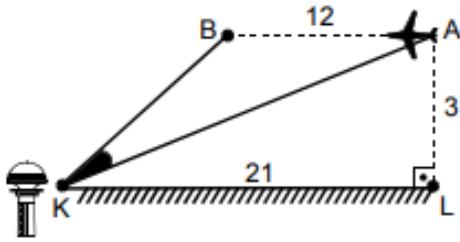
Buradan

$$72 - 24x = 0$$

$$x = 3$$

elde edilir.

3. Trigonometri ile ilgili problem (ÖSS, 2006)



$$AL \perp KL$$

$$BA \parallel KL$$

$$|AL| = 3 \text{ km}$$

$$|BA| = 12 \text{ km}$$

$$|KL| = 21 \text{ km}$$

K noktasındaki kontrol kulesinde bulunan bir görevli, yerden 3 km yükseklikte yere paralel uçan bir uçağın, A noktasından B noktasına kadar 12 km lik hareketini radarla izliyor.

A noktasının yerdeki dik izdüşümü L noktası ve $|KL| = 21 \text{ km}$ olduğuna göre, radarın taradığı $\angle AKB$ açısının tanjantı kaçtır?

A) $\frac{3}{7}$

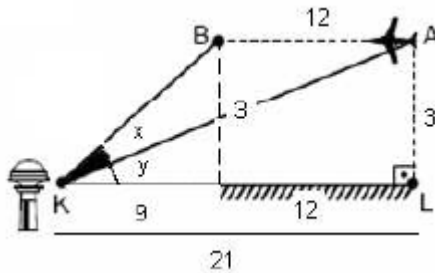
B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{2}{11}$

D) $\frac{3}{13}$

E) $\frac{7}{17}$

Çözüm: Problemin bizden istediği $\tan(\widehat{AKB})$ 'dir. Öncelikle yapılması gereken tanjantı istenen açı ile ilişki kurulabilen açıların adlandırılmasıdır.



Bu durumda $m(\widehat{BKL}) = k$ ve $m(\widehat{AKB}) = y$ olmak üzere $x + y = k$ olduğundan problemin bizden istediği $\tan(\widehat{AKB}) = \tan x = \tan(k - y)$ dir. Adlandırma işlemi yapıldıktan sonra ilişki kurulan açılar içinde yer aldığı dik üçgenlerde kenar uzunlukları yerleştirilerek trigonometrik oranların bulunup bulunamayacağı kontrol edilir. Bu durumda dik üçgenlere bakıldığında

$$\tan k = \frac{1}{3} \text{ ve } \tan y = \frac{1}{7}$$

elde edilir. Tanjantın fark formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned} \tan x = \tan(k - y) &= \frac{\tan k - \tan y}{1 + \tan k \cdot \tan y} \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} \\ &= \frac{\frac{4}{21}}{\frac{22}{21}} \\ &= \frac{4}{22} \\ &= \frac{2}{11} \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Bölünebilme ile ilgili problem (ÖSS, 2007)

Bir tüccar, tanesi 45 TL den belirli sayıda gömlek satın alıyor. Kendisine verilen faturada, ödenen miktarın ilk ve son rakamları silik çıktığı için bu tutarın yalnızca ■92■ biçiminde dört basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor.

Tüccarın tek sayıda gömlek aldığı bilindiğine göre, silik çıkan iki rakamın toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

1. Çözüm:

Gömlek sayısı = $2k + 1$, $k \in N$ olsun. Bu durumda toplam ödediği miktar

$$45 \cdot (2k + 1) = 90k + 45$$

elde edilir. Tüccarın ödediği miktar ■92■ olduğundan

$$90k + 45 = \text{■}92\text{■}$$

dir. Tek sayıda gömlek aldığı için birler basamağı 5 olur. O halde a sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere

$$45.(2k + 1) = 90k + 45 = a925$$

elde edilir. Buradan

$$90k = a880, k \in N$$

olur.

$$9k = a88$$

elde edilir. Bu sayı 9 ile tam bölünebilir demektir. O halde

$$a + 8 + 8 = 9k$$

dır. Buradan

$$16 + a = 9k$$

ve

$$a = 2$$

elde edilir. Bu durumda silik çıkan iki rakamın toplamı

$$2 + 5 = 7$$

dir.

2. Çözüm:

Gömlek sayısına x diyelim. Bu durumda toplam ödediği miktar

$$45.x = \blacksquare 92b \blacksquare$$

elde edilir. Bu sayı 45 ile tam bölünebilir demektir. Bu sayı 45 ile tam bölünebildiğine göre hem 9 hem de 5 ile tam olarak bölünebilir. Bu sayının tek sayı olduğuna ve 5 ile tam bölünebildiği bilindiğine göre birler basamağı 5 olacaktır. Daha sonra $\blacksquare 925$ sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için sayının binler basamağı 2 olmalıdır. O halde silik çıkan iki rakamın toplamı $2 + 5 = 7$ elde edilir.

5. Olasılık ile ilgili problem (YGS, 2011)

Meriç'in elinde kırmızı veya beyaz renklerde toplam 10 top vardır. Meriç bu topları iki torbaya her bir torbada en az bir kırmızı ve bir beyaz top olacak şekilde dağıttıktan sonra şunları söylüyor:

“Birinci torbada 3 kırmızı top vardır. Torbalardan rastgele birer top çekildiğinde topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$ 'dir.”

Buna göre, ikinci torbada kaç beyaz top vardır?

A) 3

B) 5

C) 1

D) 2

E) 4

1. Çözüm:

İki torbada da hem beyaz hem kırmızı top bulunmaktadır. Toplam top sayısı 10 dur. Sadece birinci torbada bulunan kırmızı top sayısı bilinmektedir. İkinci torbada bulunan beyaz top sayısı istenmektedir.

I. torbada bulunan toplam top sayısı x olsun. O halde II. torbada bulunan toplam top sayısı $10 - x$ elde edilir. I. torbada bulunan kırmızı top sayısı 3 tür. II. torbada bulunan kırmızı top sayısı y olsun.

I. torbadan kırmızı top çekme olasılığı $P(K_1) = \frac{3}{x}$ dir. II. torbadan kırmızı top çekme olasılığı ise $P(K_2) = \frac{y}{10-x}$ dir.

I. ve II. torbadan çekilen topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$ dir. Bu durumda

$$P(K_1 \cap K_2) = \frac{3}{x} \cdot \frac{y}{10-x} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$6y = x \cdot (10 - x)$$

elde edilir.

Eğer I. torbadaki top sayısı $x = 6$ ise II. torbadaki top sayısı $10 - x = 10 - 6 = 4$ olur; fakat $y = 4$ olacağından ve bu her iki torbada en az bir beyaz top olması istendiğinden bu durum ile çelişecektir. Dolayısıyla I. torbadaki top sayısı $x = 4$ ise II. torbadaki top sayısı $10 - x = 10 - 4 = 6$ olur; böylece $y = 4$ olduğundan II. torbadaki beyaz top sayısı $6 - 4 = 2$ elde edilir.

2. Çözüm:

Birinci torbada 3 tane kırmızı top vardır. Birinci torbada en az bir beyaz top bulunması gerektiğinden birinci torbada 1 beyaz top olduğunu varsayalım. Bu durumda birinci torbada toplam top sayısı 4 olur.

O halde toplam top sayısı 10 olduğundan ikinci torbada 6 top kalacaktır. Torbalardan rastgele bir top çekildiğinde her ikisinin de kırmızı gelme olasılığı $\frac{1}{2}$ olduğuna göre ikinci torbada bulunan kırmızı top sayısına x dersek

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$x = 4$$

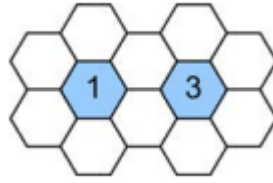
elde edilir. İkinci torbada bulunan kırmızı top sayısı 4'tür. O halde ikinci torbada bulunan beyaz top sayısı

$$6 - 4 = 2$$

elde edilir.

6. Kombinasyon ile ilgili problem (LYS, 2017)

Aşağıda düzgün altıgen şeklindeki hücrelerden oluşturulmuş bir düzenek verilmiştir. Beyaz hücrelerin bazıları turuncu renge boyanacaktır.



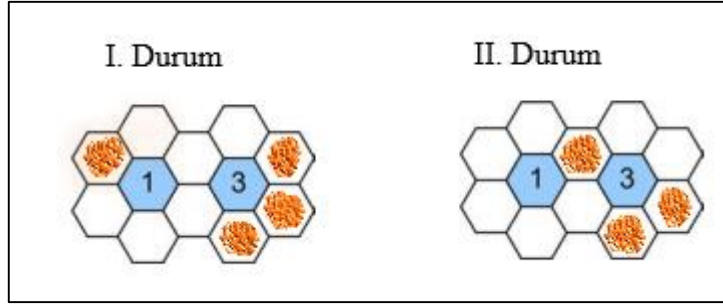
Her bir mavi hücrenin içerisinde yazan sayı, o mavi hücre ile ortak kenarı olan ve turuncuya boyanacak toplam hücre sayısını göstermektedir.

Buna göre, hücreler kaç farklı biçimde boyanabilir?

- A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 E) 36

Çözüm: İçerisinde 1 yazan mavi hücrenin etrafında bir turuncu hücre boyanırken, içerisinde 3 yazan mavi hücrenin etrafında üç tane turuncu hücre boyanmalıdır. Bu durum kaç farklı şekilde olabileceği istenmektedir.

Hücrelerin boyanması ile iki farklı durum vardır. 1 yazan mavi hücre ile 3 yazan mavi hücrenin ortak iki hücresi vardır. Birinci durumda bu hücrelerin boyanmaması ve ikinci durumda boyanması durumu ile iki farklı durum oluşmaktadır. Tüm durumlar bu iki durumun toplanması ile bulunur.



I. Durum: 1 ile 3'ün ortak kenarı olan hücrelerden biri boyanmaması durumunda

Sadece 1 ile ortak kenarı olan 4 hücreden biri boyanacak ve sadece 3 ile ortak kenarı olan 4 hücreden üçü boyanacaktır.

Bu durumda

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16$$

biçim elde edilir.

II. Durum: 1 ile 3'ün ortak kenarı olan hücrelerden biri boyanması durumunda ise

1 ve 3 ile ortak kenarı olan iki hücreden biri boyanacak ve sadece 3 ile ortak kenarı olan 4 hücreden ikisi boyanacaktır.

Bu durumda

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$$

farklı biçim elde edilir. O halde

$$16 + 12 = 28$$

farklı biçimde boyanabileceğini elde ederiz.

7. Modüler Aritmetik ile ilgili problem (2017 LYS)

A sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere,

A bir basamaklı

AA iki basamaklı

AAA üç basamaklı

.

$AA \dots A$ elli basamaklı

sayılarının toplamının 9 ile bölümünden kalan 3'tür.

Buna göre, A 'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm:

A sıfırdan farklı bir rakamdır. A nın alabileceği değerler toplamı istenmektedir. Sayıların toplamının 9 ile bölümünden kalan 3'tür. O halde

$$A + AA + AAA + \dots + AA \dots A = 9k + 3$$

elde edilir. Bir doğal sayının 9 ile tam bölünebilmesi için rakamları toplamının 9 un katı olması gerekir. Dolayısıyla modüler toplama gereği

$$A + 2A + 3A + \dots + 50A \equiv 3 \pmod{9}$$

$$A \cdot (1 + 2 + \dots + 50) \equiv 3 \pmod{9}$$

elde edilir. Buradan

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

toplam formülü kullanılarak

$$A \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} \equiv 3 \pmod{9}$$

elde edilir. Modüler çarpma gereği

$$25 \cdot 51 \cdot A \equiv 3 \pmod{9}$$

$$25 \cdot 51 \cdot A \equiv 3 \pmod{9}$$

$$7 \cdot 6 \cdot A \equiv 3 \pmod{9}$$

$$42 \cdot A \equiv 3 \pmod{9}$$

elde edilir.

$$6 \cdot A \equiv 3 \pmod{9}$$

Bu durumda $A = 2, 5, 8$ olabilir. O halde $2 + 5 + 8 = 15$ elde edilir.

8. Polinom Fonksiyonu ile ilgili problem (AYT, 2018)

Gerçek katsayılı ve baş katsayısı 1 olan 4.dereceden bir $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için

$$P(x) = P(-x)$$

eşitliğini sağlamaktadır.

$$P(2) = P(3) = 0$$

olduğuna göre, $P(1) = ?$

A) 12

B) 18

C) 24

D) 30

E) 36

1. Çözüm:

$P(x)$ polinomu için $P(x) = P(-x)$ olduğundan $P(x)$ çift fonksiyondur. Dolayısıyla tek dereceli terimlerin katsayıları sıfırdır.

$P(x)$ polinomu dördüncü dereceden bir polinom ve başkatsayısı 1 olduğundan

$$P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

şeklinde ifade edilebilir. Tek dereceli terimlerin katsayıları sıfır olduğundan $b = 0$ ve $d = 0$ dır. Bu durumda

$$P(x) = x^4 + cx^2 + e$$

dir.

$P(2) = P(3) = 0$ olduğundan $P(x)$ polinomunda yerine yazılırsa

$$16 + 4c + e = 0$$

$$81 + 9c + e = 0$$

elde edilir. Buradan $c = -13$ dür. c denklemde yerine yazılırsa $e = 36$ dır.

O halde

$$P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

elde edilir. Bu durumda

$$P(1) = 1 - 13 + 36 = 24$$

tür.

2. Çözüm:

$P(x)$, 4. dereceden bir polinom olduğundan dört kökü vardır.

$P(2) = P(3) = 0$ olduğundan $P(x)$ polinomunun iki kökü 2 ve 3 tür.

$$P(x) = P(-x) = 0$$

olduğundan

$$P(-2) = P(-3) = 0$$

elde edilir. O halde $P(x)$ polinomunun dört kökü 2,3, -2 ve -3 tür.

Buradan $P(x)$ polinomunun çarpanlarının $(x - 2)$, $(x + 3)$, $(x - 2)$ ve $(x - 3)$ olduğu görülmektedir.

$P(x)$ polinomunu başkatsayısı 1 olan 4.dereceden bir polinom olduğundan

$$P(x) = (x - 2). (x + 2). (x - 3). (x + 3)$$

olarak ifade edelim. Bu durumda

$$P(1) = (1 - 2). (1 + 2). (1 - 3). (1 + 3)$$

elde edilir.

9. Maksimum ile ilgili problem (AYT, 2018)

Bir internet şirketi en fazla 1000 müşteriye hizmet verebilmekte ve aylık internet ücretini 40 TL olarak belirlediğinde bu sayıya ulaşabilmektedir. Bu şirket aylık internet ücretinde yaptığı her 5 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlemiştir.

Bu şirket, aylık internet ücretinden elde edeceği toplam gelirin en fazla olması için aylık internet ücretini kaç TL olarak belirlemelidir?

- A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm: Şirketin aylık internet ücretinden elde edeceği gelirin en fazla olması istenmektedir. Bu durumda öncelikle toplam geliri elde edelim.

Aylık internet ücretinde yaptığı 5 TL'lik artış sayısına k diyelim. Aylık internet ücreti $40 + 5k$ ve müşteri sayısı $1000 - 50k$ elde edilir.

Buradan toplam geliri

$$Toplam\ gelir = (40 + 5k). (1000 - 50k)$$

olarak ifade edebiliriz.

$$Toplam\ gelir = 4000 - 2000k + 5000k - 250k^2$$

dir. Buradan

1. Çözüm:

Maksimum değer istendiğinden türev alınıp sıfıra eşitlenerek k bulunur.

$$3000 - 500k = 0$$

$$k = 6$$

dır. Aylık internet ücreti ise

$$40 + 5k = 40 + 30 = 70$$

olur.

2. Çözüm:

$$\text{Toplam gelir} = 4000 + 3000k - 250k^2$$

olduğundan, fonksiyonun alabileceği en büyük değer parabolün tepe noktasıdır. Buradan

$$k = -\frac{b}{2a} = -\frac{3000}{(-500)} = 6$$

elde edilir. Aylık internet ücreti ise $40 + 30 = 70$ dir.

Öğrencilerin görüşme sorularına verdikleri yazılı cevaplar ve görüşmeler esnasında alınan video kayıtları düşünme ve zihinsel süreçlerinin fiziksel göstergeleri olarak kullanılacaktır.

Matematik dersi öğretim programının (2015) ölçme ve değerlendirme yaklaşımının tam olarak uygulanabilmesi için öğrenme-öğretme sürecinde gerek biçimlendirme gerekse düzey belirleme amaçlı kullanılacak soruların/görevlerin bilişsel düzeyleri ve hangi zihinsel süreçleri ölçtüğünün ortaya konulması önemli olduğu belirtilmiştir. NTCM (2000) standartlarının, öğrencilerin başarması gereken hedeflerin belirtildiği problemleri içermesi gerektiği vurgulanmıştır. Standartların öğrencilerde geliştirmeyi hedeflerden birisi olan problem çözme becerisi ile matematik öğretim programının ilişkisi aşağıda verilen tablo ile belirtilmiştir. Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (2018) yapılan düzenlemeyle sınıflara göre kazanımlarda yer değişiklikleri olmuştur. Araştırmanın katılımcılarını 9.,10.,11.,12. sınıf düzeyinde öğrenciler ve onların matematik öğretmenleri oluşturmaktadır. Dolayısıyla araştırmanın katılımcıları ile yapılacak görüşmelerde sunulacak problemlerin, öğrencilerin bilişsel düzeylerine ve ölçülmesi gereken hedeflere uygun olacak şekilde olmasına dikkat edilmiştir.

Araştırmanın amacı ile birlikte görüşme soruları matematik programında ilgili olduğu alt öğrenme alanları ve kazanımlarla birlikte Tablo 3.3'de gösterilmiştir.

Tablo 3.3

Problem Bilgileri

Problem	Alt Öğrenme Alanı	Kazanım
1. Problem	Polinomlar	Bir $p(x)$ polinomunun $q(x)$ polinomuna bölümünden kalanı bulur.
2. Problem	İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri	İkinci dereceden denklem ve fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.
3. Problem	Trigonometri	İki açının ölçüleri toplamının ve farkının trigonometrik değerlerine ait formülleri bulur.
4. Problem	Bölünebilme	Tamsayılarda bölünebilme ve özelliklerini açıklar.
5. Problem	Olasılık	Bağımlı ve bağımsız olayları örneklerle açıklar; gerçekleşme olasılıklarını hesaplar.
6. Problem	Kombinasyon	n elemanlı bir kümenin r tane elemanının kaç farklı şekilde seçilebileceğini hesaplar.
7. Problem	Modüler Aritmetik	Modüler aritmetik ile ilgili özellikleri gösterir ve bunları kullanarak uygulamalar yapar.
8. Problem	Polinomlar	Bir $p(x)$ polinomunun $q(x)$ polinomuna bölümünden kalanı bulur.
9. Problem	Türevin Uygulamaları	Maksimum ve minimum problemlerinin modellenmesi ve çözümünde türevi kullanır.

Araştırmanın katılımcıları ile yapılacak görüşmelerde sunulacak problemlerin, öğrencilerin bilişsel düzeylerine ve ölçülmesi gereken hedeflere uygun olacak şekilde olmasına dikkat edilmiştir. Dolayısıyla katılımcı öğrencilerin hangi problem altında bulgularda yer alacağı aşağıda Tablo 3.4’de gösterilmiştir.

Tablo 3.4

Problem ve Katılımcı Öğrenci Eşleşmesi

Problemler	Katılımcı öğrenciler
1. Problem	S1, S2, S3, S4, S5
2. Problem	S1, S2, S3, S4, S5
3. Problem	S1, Ö2, S3, S4, Ö5
4. Problem	S1, Ö2, S3, S4, T5
5. Problem	S1, S2, S3, S4, S5

6. Problem	S1, S2, S3, S4, S5
7. Problem	S1, Ö2, S3, S4, Ö5
8. Problem	S1, S2, S3, S4, S5
9. Problem	Ö1, S2, S3, Ö4, S5

Bu çalışmada katılımcı öğretmenlerin ve öğrencilerin ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışma için yarı yapılandırılmış görüşmenin en uygun metot olduğuna karar verilmiştir. Görüşme formu (Ek 2) hazırlanmıştır. Görüşmeler dört aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar; problemin okunması, problemi çözme ve yüksek sesle düşünme süreci, katılımcı öğretmenin çözümü görmek istediği durumlarda çözümün paylaşılması, katılımcı öğrenci ise çözüme ulaşamadığı durumlarda AN'lerin sunulması ve son olarak da AN'leri belirlemeye yönelik hazırlanmış soruların sorulmasıdır. Aşağıda verilen sorular AN'leri belirlemek amacı ile araştırmacı tarafından katılımcıya yöneltilmiştir.

- Problemin çözmek için gerekli olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için olmazsa olmaz olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için kritik olan bilgiler nelerdir?
- Öğrenciler hangi noktaları bilirlerse problemi çözebilir? (Katılımcı öğretmene)
- Problemi farklı bir yolla daha çözebilir misiniz?

Diyalogun akışına göre bu soruların dışında da sorular yöneltilmiştir. Bu sorular “bunu nasıl yaptın”, “nasıl düşündün”, “ neler düşünüyorsun”, “başka yol mu düşünüyorsun” veya sessiz kaldıkları zaman “ne düşünüyorsun söyler misin” şeklindedir. Katılımcı öğrenciler çözüme devam edemediğini ifade ettikten sonra araştırmacı tarafından AN'ler öğrencilere sunulmuştur.

Oturumlar yapılmadan önce araştırmacı tarafından problemlerin çözümü yapılmış ve AN'leri belirlenmiştir. Veri toplama aracında yer alan problemlerin seçimine karar vermede araştırmacının AN belirleme durumları da etkili olmuştur. ÖSYM tarafından hazırlanan üniversiteye giriş sınav soruları belli bir sürede çözülmesi beklenen problemler için AN sayısının sınırlı sayıda kaldığı söylenebilir. Bu durum farklı türde tasarlanmış problemler için değişebilir. Belirlenen anahtar noktalar ile ilgili uzman görüşleri alınmıştır.

Mülakatta yer alan dokuz problemin anahtar noktalarla desteklenmiş çözüm sürecini içeren tablolar (Ek 3) verilmiştir. Mülakatta yer alan birinci problem olan polinomlar ile ilgili problemin çözüm sürecinde araştırmacının belirlediği anahtar nokta ve alt anahtar noktalar aşağıdaki Tablo 3.5’deki gibidir.

Araştırmacının problem çözmede AN belirlemesinde ölçüt kendisi de matematik öğretmeni olan araştırmacının önceki deneyimleri olmuştur. Araştırmacı öğrencilerin sınav kâğıtlarını detaylı inceleme yapmıştır. Öğrencilere yazılı kâğıtları puanlama sonrasında gösterilerek hataların nedenleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Araştırmacının kendi dersinde yaptığı gözlemler, öğrencilerin çalışma kâğıtları incelenerek zorluklar ve nedenleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Araştırmacı problem çözme süreçlerinde AN’leri belirledikten sonra uzman görüşleri alınmıştır.

Tablo 3.5

Polinomlar ile İlgili Problemin Çözüm Sürecinde Belirlenen AN'ler ve AAN'ler

(LYS, 2017)	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
1. Polinomlar ile ilgili problem		
a ve b tamsayılar olmak üzere $P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$ $Q(x) = x^2 - 2ax + b$ polinomları için • $P(-4) = 0$ • $Q(-4) \neq 0$ olduğu biliniyor. $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre, $b - a$ kaçtır?	1. Problemi anlama: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleridir. -4, $P(x)$ polinomunun köküdür fakat $Q(x)$ polinomunun kökü değildir.	AN 1: $P(x)$ polinomunun köklerinin ve $Q(x)$ polinomunun köklerinin tespit edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da köküdür. AAN 2: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan üçüncü kökü -4 tür. AAN 3: x yerine a alındığında $P(a) = 0$ ise, a'ya $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir. AAN 4: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunun en fazla n tane kökü vardır.

Tablo 3.5 (devam)

Polinomlar ile İlgili Problemin Çözüm Sürecinde Belirlenen AN'ler ve AAN'ler

(LYS, 2017)	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
1. Polinomlar ile ilgili problem	2. Çözüm için plan yapma: $Q(x)$ polinomunun iki kökü x_1, x_2 olsun. Bu durumda $Q(x)$ polinomu ikinci dereceden olduğundan $Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ olarak yazılabilir. $P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 ve -4 olsun. Bu durumda $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x + 4)$ olarak yazılabilir. O halde $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$ şeklinde yazılabilir.	AN 2: Bir $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır. AAN 1: $P(a) = 0$ ise $(x - a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır (MEB, 2018) AAN 2: $P(a) \neq 0$ ise $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ olacak şekilde bir $Q(x)$ polinomu vardır.

Tablo 3.5 (devam)

Polinomlar ile İlgili Problemin Çözüm Sürecinde Belirlenen AN'ler ve AAN'ler

2017 LYS	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
1. Polinomlar ile ilgili problem	3. Planı uygulama: $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$ ve $P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$ olduğundan $x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4) \cdot Q(x)$ elde edilir. Buradan $Q(x)$ polinomu yerine yazılırsa $x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4) \cdot (x^2 - 2ax + b)$ $= x^3 + (4 - 2a)x^2 + (b - 8a)x + 4b$ elde edilir.	AN 3: (Çarpanlara Ayırma Fikri) $P(x) = (x + 4)Q(x)$ biçimde ifade edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2, $a \neq 0$ olmak üzere $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçimindedir. AAN 2: $P(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2, $b \neq 0$ olmak üzere $P(x) = b(x - x_1)(x - x_2)(x + 4)$ biçimindedir. AAN 3: Polinomun baş katsayı 1 olduğu için $a = b = 1$ dir.
	Polinomların eşitliği tanımından $-a = 4 - 2a \text{ ve } b + 2 = b - 8a$ elde edilir. O halde $a = 4 \text{ ve } b = 15$ dir. Buradan $b - a = 11$ bulunur.	AN 4: Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit olan polinomlara eşit polinomlar denir (MEB, 2018).

Tablo 3.5 (devam)

Polinomlar ile İlgili Problemin Çözüm Sürecinde Belirlenen AN'ler ve AAN'ler

2017 LYS	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
1. Polinomlar ile ilgili problem	4. Değerlendirme: Polinomların kökleri ortak olduğundan kökler toplamı veya kökler çarpımı kullanılarak çözüm yapılabilir. $Q(x)$ polinomunun iki kökü x_1, x_2 olsun. Bu durumda $P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 ve -4'tür. O halde $Q(x)$ polinomunun kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c} = 2a$ elde edilir. $P(x)$ polinomunun kökler toplamı $x_1 + x_2 + (-4) = a$ elde edilir. Buradan $2a + (-4) = -\frac{d}{c} = a$ $a = 4$ tür. $P(-4) = 0$ olduğundan $(-4)^3 - a(-4)^2 - (b + 2)(-4) + 4b = 0$ $-64 - 16a + 4b + 8 + 4b = 0$ $-16a + 8b = 56$ elde edilir. Denklemden $a = 4$ yazılarak $b = 15$ bulunur. O halde $b - a = 15 - 4 = 11$ elde edilir.	AN 1: $P(x)$ polinomunun köklerinin ve $Q(x)$ polinomunun köklerinin tespit edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun köküdür. AAN 2: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan üçüncü kökü -4 tür. AAN 3: x yerine a alındığında $P(a) = 0$ ise, a'ya $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir. AAN 4: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunun en fazla n tane kökü vardır. AN 2: (Kök Katsayı İlişkisini Kullanma Fikri) $c \neq 0$ ve $c, d, e \in R$ olmak üzere $cx^2 + dx + e = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c}$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{e}{c}$ olur (MEB, 2018). AAN 1: $Q(x) = 0$ ikinci dereceden denklemdir. AAN 2: $P(x) = 0$ üçüncü dereceden bir denklemdir.

Polinomlar ile ilgili problemin çözüm sürecine bakıldığında araştırmacı farklı iki çözüm yolu için AN'leri belirlemiştir. AN tanımı gereği çözüm yolu değiştiğinde belirlenen AN'ler de değişebilir. Polinomlar ile ilgili problemin ilk çözüm yolu için dört tane AN belirlenmiştir. Diğer çözüm yolu için ise iki tane AN belirlenmiştir. Polinomlar ile ilgili probleminin çözüm süreci göz önüne alındığında iki farklı çözüm yolu için ortak bir AN belirlendiği görülebilir. Bu AN'den sonra problemin çözüm yolu ikiye ayrılmıştır ve bu iki farklı çözüm yolu için farklı AN'ler belirlenmiştir.

Polinomlar ile ilgili problemin çözüm sürecinde belirlenen iki farklı çözüm yolu için AN'lerin içerikleri aşağıda açıklanmıştır.

AN 1: $P(x)$ polinomunun köklerinin ve $Q(x)$ polinomunun köklerinin tespit edilmesi fikri.

AAN 1: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun köküdür.

AAN 2: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan üçüncü kökü -4 tür.

AAN 3: x yerine a alındığında $P(a) = 0$ ise, a 'ya $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir.

AAN 4: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunun en fazla n tane kökü vardır.

AN 1 çözüme başlamada araştırmacı tarafından önemli bir adım olarak belirtilmiştir. AN1 içerik olarak kök olma kavramı ile ilgili durumları temsil etmektedir.

Öğrenciler problemde yer alan $P(-4) = 0$ ifadesini gördüklerinde ilk olarak yerine yazma ve denklem oluşturma eğiliminde olabileceği dolayısıyla -4 , $P(x)$ polinomunun köküdür yorumu geri planda kalabileceği düşünülmüştür. Benzer şekilde $Q(-4) \neq 0$ ifadesini gördüklerinde dahi denklem oluşturma çabası görülmüştür.

Öğrencilerin yaşayabileceği bu güçlüğü nereden ise ikinci dereceden bir polinomla bir kökünün farklı olduğu belirtilmiş olan üçüncü dereceden bir polinomun kök sayılarının aynı olabileceği düşüncesi olabilir. Öğrencilerin ortak olan kökleri ve ortak olmayan kökleri tespit etmelerinde yaşanabilecek güçlükler düşünülerek AN ile ilişkili AAN'ler oluşturulmuştur. Dolayısıyla AN 1 bu koşullar göz önünde tutularak oluşturulmuştur.

AN 2: Bir $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır.

AAN 1: $P(a) = 0$ ise $(x - a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır (MEB, 2018).

AAN 2: $P(a) \neq 0$ ise $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ olacak şekilde tek bir $Q(x)$ polinomu vardır.

Polinomlar ile ilgili probleminin birinci çözüm yolu için belirlenen AN 2 içerik olarak polinomun kökü verildiğinde çarpan polinomunun ne olacağı hakkında fikir yürütme ve bölme işlemi yapmadan kalanı elde etme durumlarını temsil etmektedir. Ayrıca polinomlarla ilgili problemlerde kalanın sıfır olmadığı durumlarda polinomu ifade etmesi istenilen durumlar için gerekli fikri temsil etmektedir.

Bu anahtar noktanın anlaşılması AN ile ilişkili AAN'nin de anlaşılması problemi çözmede önemli bir adım oluşturduğu düşünülmüştür. AN'yi ve ilişkili olduğu AAN'nin anlaşılması ile kavramlar ve fikirler arasında bir bütünlük oluşabilir. Böylelikle öğrenciler anlamlı ve detaylı bir şekilde öğrenebilir.

Öğrenciler AN'yi ve ilişkili olduğu AAN'leri anlayabilmesi için $P(x)$ polinomu için bölüm algoritmasını yazması gereklidir. Bu durumda

$P(x)$ polinomunun $(x - a)$ ile bölümünden bölüm $B(x)$, kalan ise $K(x)$ olduğu düşünülürse

$$P(x) = (x - a).B(x) + K(x), \quad \text{der } K(x) < \text{der } B(x)$$

yazılabilir. Bu bölüm algoritması yazıldığında x yerine a yazılırsa

$$P(a) = K(a)$$

elde edilir. O halde $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır.

$P(a) = 0$ ise $K(a) = 0$ olduğundan

$$P(x) = (x - a).B(x)$$

elde edilir. Bu durumda öğrenci $(x - a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır yorumunu yapabilmelidir. Dolayısıyla AN 2 bu koşullar göz önünde tutularak oluşturulmuştur.

Burada öğrenci $(x - a)$ polinomunun $P(x)$ polinomunun bir çarpanı olduğunu anlayabilmesi, aynı zamanda $B(x)$ polinomunun derecesinin ne olabileceği veya hangi polinom olabileceği hakkında fikir yürütebilir.

$B(x)$ polinomunun $Q(x)$ olabileceği hakkında fikir yürütebilmesi için yani bu bağlantıların kurulabilmesi için bir diğer AN ihtiyacı olabileceği göz önüne alınarak AN 3 oluşturulmuştur.

AN 3: (Çarpanlara Ayırma Fikri) $P(x) = (x + 4)Q(x)$ biçimde ifade edilmesi fikri.

AAN 1: $Q(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2 , $a \neq 0$ olmak üzere

$$Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

biçimindedir.

AAN 2: $P(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2 , $b \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = b(x - x_1)(x - x_2)(x + 4)$$

biçimindedir.

AAN 3: Polinomun baş katsayı 1 olduğu için

$$a = b = 1$$

dir.

Polinomlar ile ilgili problemin çözüm sürecinde AN 3 içerik olarak kökleri verilen polinomu çarpanları cinsinden yazma fikrini temsil etmektedir.

Burada $P(-4) = 0$ verildiği için $P(x)$ polinomunu $(x + 4)$ polinomuna böldüğümüzde bölüm polinomunun $Q(x)$ ve kalanın sıfır olduğunu öğrencinin anlaması gerekmektedir. Yani

$$P(x) = (x + 4)Q(x)$$

eşitliğini yazmaları beklenmektedir. Bu aşamaya gelebilmek için baş katsayısı 1 olan $Q(x)$ polinomunu

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

biçiminde düşünmeleri gerekir. $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleri olduğundan baş katsayısı 1 olan $P(x)$ polinomunu

$$P(x) = (x + 4)(x - x_1)(x - x_2)$$

biçiminde düşünmeleri beklenmektedir. Dolayısıyla buradan da

$$P(x) = (x + 4)Q(x)$$

eşitliği elde edilebilir. Bu nokta problemin çözümünde önemli bir adım olarak belirlenmiştir.

Dolayısıyla AN 3 bu koşullar göz önünde tutularak oluşturulmuştur.

AN 4: Polinom problemi çözme sürecinde AN 4 içerik olarak polinomların eşitliğini uygulama fikrini temsil etmektedir. Araştırmacının bu noktayı anahtar nokta olarak belirlemesinin nedeni polinomda aynı dereceli birden fazla terim olması halinde yaşanan güçlüklerdir. Öğrenci

$$P(x) = (x + 4).Q(x)$$

ifadesinde $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını yerine yazdığında eşitliğin sağ tarafında bulunan çarpımı yaptığında düzenlemede güçlük yaşayabilmektedir.

$$x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4).(x^2 - 2ax + b)$$

$$x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4).(x^2 - 2ax + b)$$

Öğrencilerden beklenen sağ tarafta bulunan polinomun aynı dereceli iki veya daha fazla terimi düzenleyerek katsayılarını paranteze almasıdır.

$$x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = x^3 + (4 - 2a)x^2 + (b - 8a)x + 4b$$

dir. Aynı dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek

$$-a = 4 - 2a \text{ ve } b + 2 = b - 8a$$

sonuca ulaşabilir.

Polinomlar ile ilgili problemlerde polinomların eşitliğinin önemli olduğunu düşünülmüştür. Temel matematiksel kavramların matematiksel tanımlarına, gelişimine, gösterim biçimlerine, kullanımlarına ve öğretim seviyelerine göre incelemelere yer verilen bir çalışmada iki polinom verildiğinde bu polinomların ne zaman eşit olduklarını bilmenin önemli olduğu ifade edilmiştir (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).

AN 4 bu koşullar göz önünde tutularak oluşturulmuştur.

Polinomlar ile ilgili problemin ikinci çözüm yolu ile iki tane anahtar nokta belirlenmiştir.

AN 1 ilk çözüm yolunda açıklanmıştır. AN 2 aşağıdaki gibidir.

AN 2: (Kök Katsayı İlişkisini Kullanma Fikri) $c \neq 0$ ve $c, d, e \in R$ olmak üzere $cx^2 + dx + e = 0$ denkleminin kökleri

$$x_1 \text{ ve } x_2 \text{ ise } x_1 + x_2 = -\frac{d}{c} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{e}{c} \text{ dir.}$$

AAN 1: $Q(x) = 0$ ikinci dereceden denklemdir.

AAN 2: $P(x) = 0$ üçüncü dereceden bir denklemdir.

Polinom problemi çözme sürecinde AN 2 içerik olarak denklemin katsayılarının kullanılarak kökler toplamının elde edilmesi fikrini temsil etmektedir. Öğrencilerin $Q(x) = 0$ ve $P(x) = 0$ cebirsel ifadelerinin denklem olduğunu anlayabilmesi gerekmektedir. Farklı cebirsel ifadelerin hangilerinin denklem hangilerinin denklem olmadığını sınıf içinde yapılan tartışmalarda kararlaştırmanın denklem kavramının öğrencilerin zihinlerinde yapılanmasına katkı sağlayacağı ifade edilmiştir (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).

AN 2 bu koşullar göz önünde tutularak oluşturulmuştur.

ÖSYM'nin hazırladığı üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan son iki yılın polinomlar ile ilgili problemlerinden ikisi çalışmamızda yer almaktadır. Araştırmacı tarafından AN'ler belirlenirken son yıllarda sorulan polinomlar ile ilgili problemler de incelenmiştir. Araştırmacı belirlediği AN'lerin diğer polinom ile ilgili problemlerin çözümünü inşa etmede yeterliliğini de incelemiştir. Önceki yıllarda sorulmuş olan polinomlar ile ilgili problemlerden bazıları ve çözüm sürecinde gerekli AN'ler aşağıdaki gibidir.

- Üçüncü dereceden baş katsayısı 1 olan gerçekte katsayılı $P(x)$ polinomu

$$P(1) = P(3) = P(5) = 7$$

eşitliklerini sağlıyor.

Buna göre, $P(0)$ değeri kaçtır? (LYS, 2016)

- A) -1 B) -4 C) -8 D) 4 E) 8

Polinomlar ile ilgili problemin birinci çözüm yolu için araştırmacı tarafından belirlenen AN 2 ve AN 3 ile problemin çözümü inşa edilebilir.

- Baş katsayısı 1 olan üçüncü dereceden $P(x)$ polinomu $x^2 + 4$ ile kalansız bölünebilmektedir.

$P(2x)$ polinomunun $2x - 3$ ile bölümünden elde edilen kalan 52'dir.

Buna göre $P(2)$ değeri kaçtır? (LYS, 2015)

- A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

Problemin çözümü polinomlar ile ilgili problemin birinci çözüm yolunda araştırmacı tarafından belirlenen AN 2 ve AN 3 kullanılarak problemin çözümü inşa edilebilir.

- $P(x) = x^2 - 2x + n$

$$Q(x) = x^2 + 3x + n$$

polinomları veriliyor.

Bu iki polinom ortak bir köke sahip ve $P(x)$ polinomunun kökleri eşit olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır? (LYS , 2012)

A) -5

B) -3

C) 2

D) 4

E) 5

Problemin çözümü polinomlar ile ilgili problemin ikinci çözüm yolunda araştırmacı tarafından belirlenen AN 1 ve AN 2 kullanılarak problemin çözümü inşa edilebilir.

Temel kuralları içeren kitaplar polinomlarla ilgili bazı problemlerin çözümünde yol gösterebilir. Ama ÖSYM tarafından hazırlanan üniversiteye giriş sınav sorulan problemlerin çözümü için yeterli olmayabilir. Çünkü problemler bir formülün uygulanması gerektiren nitelikte değildir. Öğrencilerin bu problemleri çözmede yaşadığı güçlük temel kuralları hatırlamanın ötesindedir. Araştırmacının yapılan oturumlarda gözlemlediği bu durumlara verebileceği katılımcı öğrenci açıklamasına örneklerden biri ise şöyledir:

“Formülü bilen bir öğrenci bu soruyu garanti çözer diyemeyiz”(S5)

Araştırmacının polinomlar ile ilgili problemi çözme süreçleri göz önüne alındığında herhangi formülü AN olarak belirlemediği görülmektedir. Araştırmacının anahtar nokta belirlemede ölçüt öğrencilerin en temel matematiksel bilgileri, matematiksel becerileri ve stratejileri ne zaman ve nasıl kullanacağı doğrultusunda olmuştur. Öğrenciler problem çözmede gerekli becerileri ne zaman ve nasıl kullanacaklarını bilmede ve kullanmada üstbilişsel bileşenlerden faydalanırlar (Jiang, Ma, & Gao, 2016).

Problem çözme süreçlerinde AN belirleme yaklaşımı en temel matematiksel fikirlerin stratejik kullanılması açısından temel formül ve kuralları içeren kitaplardan problem çözme süreçlerine farklı bir bakış açısı yansıttığını düşünülebilir.

Problem çözme süreçlerinde AN belirleme durumu ile hem araştırmacı hem de matematik öğretmenleri ve öğrenciler de çözümleri değerlendirme fırsatı bulmuştur. Problemlerin çözüm sürecini değerlendirilmesi ile problem çözme becerilerinin ve problemin nasıl çözebileceği ile ilgili anlayışlarının geliştirilebileceği düşünülmektedir. Problem çözme süreçlerinde belli bir amaç doğrultusunda yapılan değerlendirmeler bireyin problem çözme sürecinde derinlemesine düşünmesine izin verebilir (Presley & Harris, 2006).

3.8. Verilerin Analizi

Mülakatlar birebir yapılmış ve ses kayıtları alınmıştır. Kayıtlar araştırmacı tarafından yazıya dökülmüştür. Araştırmada verilerin analizinde gerek duyulduğunda aynen alıntılar ya da yorumlar yapılmıştır.

Verilerin analizi ve değerlendirilmesi bir yıldan fazla bir çalışma dönemini kapsamıştır. Verilerin toplanması ve analizinde ses kayıt cihazı, araştırmacı notları, yazılı dokümanlar gibi araçlardan faydalanılmıştır.

Uygulama sonrasında her öğretmen ve her öğrenci için bilgisayarda ayrı ayrı bir dosya oluşturulmuştur. Süreç içinde elde edilen ses kayıtları araştırmacı tarafından kelime kelime deşifre edilmiştir. Ses kayıtlarının yazıya dökülmesi ile elde edilen veriler her birey için oluşturulan dosya içine yerleştirilmiştir. Katılımcıların çalışma kâğıtları ve araştırmacının tuttuğu notlar da her katılımcı için açılan dosyalara eklenmiştir.

Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin ses kayıtlarının yazıya dökülmesi ve çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ile elde edilen verilerin analizi için gömülü teorinin analiz teknikleri seçilmiştir. İlk olarak her bir katılımcının metin haline getirilen ses kayıtları çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ile birlikte incelenmiştir. Her bir problem ile ilgili çözümler bir araya getirilerek tüm verilerin bir arada olması sağlanmıştır. Kodlama süreci boyunca kategoriler ve onların özellikleri oluşturulmaya ve boyutlara göre kategorilerin nasıl değiştiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Daha sonra her bir problem için matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin çözümleri farklı zamanlarda tekrar tekrar okunarak karşılaştırmalı olarak incelenerek eksensel kodlama ile kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutlar geliştirilmeye çalışılmıştır. Her bir kategori, alt kategori, boyut ve alt boyut ile ne anlatılmak istendiği, neyi temsil ettiğine dair içerik bilgisi oluşturulmuştur. Ayrıca her bir kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutlar için katılımcıların ses kaydı metinlerinden ve çalışma kâğıdı çözümlerinden örnekler verilmiştir.

Katılımcı öğretmenler ile yapılan polinomlar ile ilgili problem ile görüşmelerde problem çözme sürecinde AN'leri belirlemeleri istenmiştir. Katılımcı öğretmenler ile yapılan görüşmelerde problem çözme süreçlerinde AAN'leri belirlemeleri istenmemiştir. Katılımcı öğretmen ve öğrencilerin AAN'leri belirlemelerini sağlayacak görüşme soruları araştırmacı tarafından sorulmamıştır. Veri analizinde yapılan kodlamalar katılımcı öğretmenlerin problem çözme süreçlerinde belirledikleri AN'leri ortaya çıkarmaya yöneliktir. Araştırmacının da detaylı bir şekilde AN belirleme durumunu açıkladığı polinomlar ile

ilgili problem üzerinden yapılan görüşmelerde katılımcı öğretmenlerden gelen verilerinin transkripti ve transkripti dikkate alınarak kodlamanın nasıl olduğu Tablo 3.6’ da verilmiştir.

Tablo 3.6

Verilerin Analizinde Yapılan Kodlamalar

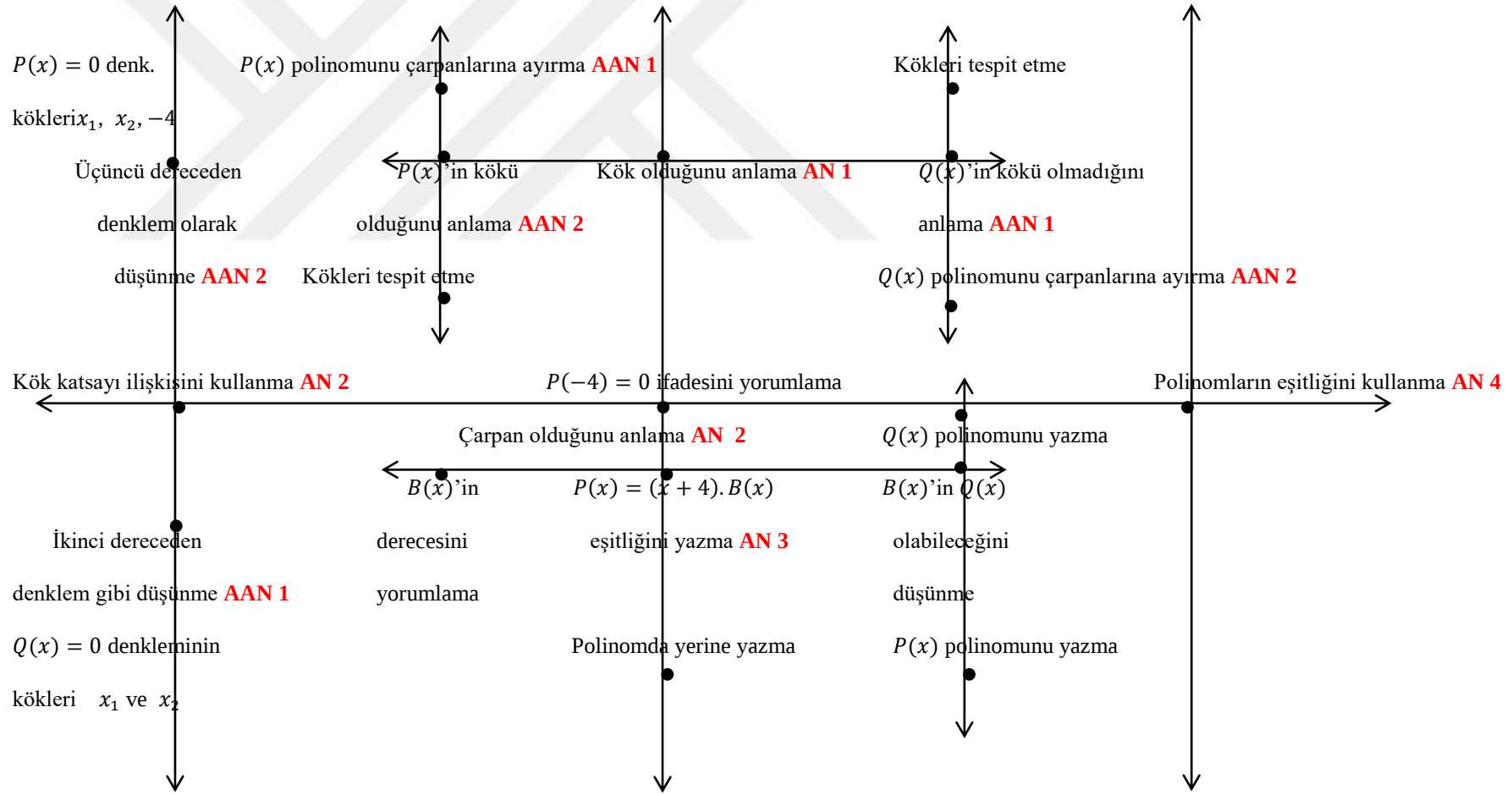
Verilerin transkripti	Veri analizinde yapılan kodlamalar
M1: “Öncelikle kişinin <u>kök kavramının ne demek olduğunu bilmesi gerekiyor</u> . Yani <u>kök nedir</u> diye ona sorarız bir kere. x bir kök ise $P(x) = 0$ olacak $Q(x) = 0$ olacak.”	<u>kök olduğunu anlama</u>
M1: “ $Q(x)$ ’in kökleri 2 tane $P(x)$ ’in de kökleri bu ikisi ve başka bir tane daha var. Yani $P(x)$ ’in kökleri 3 tane. Ama bunu bilmek zorunda değil öğrenci. <u>Sadece $Q(x)$’in $P(x)$’e gittiğini bilmesi gerekir</u> .”	<u>ortak olan kökleri tespit etme</u> <u>ortak olmayan kökü tespit etme</u> <u>bağlaca göre yorumlama</u>
M1: “Ya $Q(x)$ ile $(x + 4)$ ü çarpıp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Ya da $P(x)$ i $(x + 4)$ e bölüp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Burada makul olan ilk seçenektir.”	<u>polinomu diğer polinom cinsinden yazma</u>
M2: “ <u>Baş katsayıları da aynı, öyle de bir sorunumuz yok. a gibi bir katsayı çarpanı da yok. O zaman $(x + 4)$ ile $Q(x)$ i çarpıp $P(x)$ e eşitleyeceğiz</u> . Öğrenciler içinde önemli olan kısım burası.”	<u>baş katsayıyı yerleştirme</u> <u>polinomu diğer polinom cinsinden yazma</u>
M2: “Ama bu tarz olanlarda <u>hemen çarpanı olduğunu düşünmek gerek</u> .”	<u>kök çarpan ilişkisini bilme</u>
M3: “ $P(x)$ polinomunda <u>üç tane kök olduğunu bilmesi gerekir</u> .”	<u>polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme</u>
M3: “Burada <u>üçüncü dereceden denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanmak istiyorum çünkü biliyorum. Kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerini kullanmak istiyorum</u> .”	<u>kök katsayı ilişkisini kullanma</u>
M3: “ $P(x)$ polinomunda <u>üç tane kök olduğunu bilmesi, $(x+4)$ ün $P(x)$ in bir çarpanı olduğunun görülmesi, $Q(x)$ ile $(x+4)$ ün çarpımının $P(x)$ polinomunu verdiğinin görülmesi ve polinom eşitliğinin bilinmesi gereklidir</u> .”	<u>kök çarpan ilişkisini bilme</u> <u>polinomu diğer polinom cinsinden yazma</u> <u>polinomların eşitliğini bilme</u>

Tablo 3.6 (devam)

Verilerin Analizinde Yapılan Kodlamalar

Verilerin transkripti	Veri analizinde yapılan kodlamalar
M4: “Eğer derece iki ise üç ise <u>kökler aynı olduğu zaman kökler toplamı kökler çarpımı üzerinden giderek</u> denklem sistemi oluşturup çözmeye çalışın diyorum çocuklara.”	<u>kök katsayı ilişkisini kullanma</u>
M4: “Çocuklar böyle bir şey verildiği zaman ilk aklınıza şey gelsin. Kökü ise denkleme sağlamak zorunda. Hadi gelin yerine yazalım.”	<u>kökü yerine yazma</u>
M4: “ <u>Kökünün çarpan olduğunu bilmesi ve polinom eşitliği önemlidir. Burada önemli nokta -4 ün $P(x)$ polinomunu sıfırlatan değer olduğu için çocuklara sürekli söylediğimiz şey sıfırlatan değer, polinomun köküdür, çarpanıdır şeklinde. Dolayısıyla hemen onların aklına $(x + 4)$ ün $P(x)$ in bir çarpanı olduğu gelecektir. Bu şekilde düşünerek $Q(x)$ polinomu ile çarparak $P(x)$ polinomuna eşitleyerek polinomların eşitliğinden de yapabilirler.</u> ”	<u>kök olduğunu anlama</u> <u>kök çarpan ilişkisini bilme</u> <u>polinomu diğer polinom cinsinden yazma</u> <u>polinomların eşitliğini bilme”</u>
Verilerin transkripti	Veri analizinde yapılan kodlamalar
M5: “ <u>-4 ün de ortak kök olmadığını anlamak önemliydi.</u> ”	<u>ortak olmayan kökü tespit etme</u>
M5: “ <u>$Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğu için kökler toplamı kökler çarpımından mı gidecek.</u> ”	<u>kök katsayı ilişkisini kullanma</u>
M5: “İşin ilginç tarafı 2016 yılında bu tür bir soru soruldu. Hep şeyi istiyorlar <u>kökü çarpan şeklinde yaz çarpan şeklinde yaz. Polinomların tamamında var bu. Kök olunca yerine yazma çarpanı olduğu gör ve çarpan şeklinde yaz. Çok ilginç yine aynı soruyu sormuşlar. Yerine yazmayı istemiyorlar.</u> ”	<u>kök çarpan ilişkisini bilme</u>
M5: “Çoğu soruda bunu görüyorum. Üçüncü dereceden bir polinomu genel bir şekilde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ istemiyorlar. <u>$P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ şeklinde ifade etmesini istiyorlar. Köklerini çarpanı biçimde yazmaları isteniyor.</u> ”	<u>kök çarpan ilişkisini bilme</u> <u>polinomu kökleri cinsinden yazma</u>
M5: “Daha sonra da <u>polinomların eşitliğini bilmelidir.</u> ”	<u>polinomların eşitliğini bilme</u>

Araştırmacı polinomlar ile ilgili problemin AN’lerini detaylı bir şekilde açıklamıştır. Araştırmacı çözüm sürecini inşa etmede AN’leri kullanmıştır. AN belirleme süreci göz önüne alındığında kategoriler, alt kategoriler, boyutlar ve alt boyutlar arasındaki ilişkiler eksensel şema haline getirilmiştir. Eksensel şema üzerinde her bir kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutlar “nokta (.)” sembolü ile gösterilmiştir. Her bir kodlama ilişkili olduğu eksensel bir şema üzerinde gösterilmiştir. Daha sonra ise ana bir eksen üzerinde birleştirilmiştir. Araştırmacının polinomlar ile ilgili problem çözüm sürecinde anahtar nokta belirleme durumuna ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi aşağıdaki Şekil 3.4 ’deki gibidir.



Şekil 3.3. Araştırmacının polinomlar ile ilgili problem çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

3.9. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik

Bu araştırmada geçerlik ve güvenilirliği sağlamak için aşağıdaki yollar izlenmiştir.

Bu araştırmada veri kaynağı olan katılımcı matematik öğretmenleri ve onların öğrencileri, görüşme yapılan ortam, veri toplama süreci, veri toplama ve analiz yöntemleri ayrıntılı bir şekilde tanımlanmıştır.

Araştırmacı raporunu yazarken süreci detaylı bir şekilde yansıtmaya özen göstermiştir. Araştırmacı her bulguyu veri kaynaklarından doğrudan alıntı yaparak desteklemiştir.

Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında kullanılan sorular danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir.

Araştırmanın amacı matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerin problem çözme sürecinde anahtar nokta belirleme durumlarını ortaya koymak olduğu için katılımcılara yöneltilen görüşme soruları ile problem çözme sürecinde anahtar noktaları belirlemeleri istenmiştir. Katılımcı öğretmen ve öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde elde edilen verilerin araştırmacı tarafından her görüşme sonunda özeti yapılmıştır. Katılımcıların belirlediği anahtar noktalar araştırmacı tarafından not alınmıştır ve katılımcılardan bunların doğruluğuna ilişkin düşüncelerini belirtmeleri istenmiştir. Bu şekilde katılımcılar eklemek istedikleri noktalar varsa bunları ekleme fırsatı bulmuştur.

Araştırmacı ses kayıtlarını metin haline getirip, dokümanları düzenledikten sonra, katılımcıların belirlediği anahtar noktalar ile ilgili bir rapor oluşturmuştur. Araştırmacı katılımcı öğretmenlerle bireysel olarak teyit toplantısı yapmıştır. Araştırmacı okulda bulunan katılımcı öğrenciler ile de bireysel olarak teyit toplantısı yapmıştır. Veri toplama süreci 2017-2018 eğitim öğretim yılının ikinci dönemini ve 2018-2019 eğitim öğretim yılının birinci dönemini kapsadığı için bu süreçte mezun olan veya okuldan ayrılan öğrencilere ise rapor gönderilmiştir. Katılımcılardan bu raporu okuyarak düşüncelerini belirtmesi, sonuçların kendi algılarını yansıtip yansıtmaması ilişkin düşüncelerini belirtmeleri istenmiştir.

Her bir katılımcının anahtar nokta belirleme durumlarına ait kendi ifadeleri ve araştırmacının belirlediği kategoriler rapor olarak katılımcılara sunulmuştur. Katılımcılar onayladıkları durumları paraflamıştır. Katılımcılardan eklemek istedikleri veya çıkarmak istedikleri durumları da belirtmeleri istenmiştir.

Bu şekilde katılımcı öğretmenler ile veri toplama sürecinde ikişer kere ve görüşme sonuçlarının doğruluğunu kontrol ettirmek için de birer kere görüşme yapılmıştır. Katılımcıların ilk görüşmeden itibaren sonuçların yayımlanmasını istememe gibi önyargısı oluşmamıştır. Araştırmacı da katılımcılarla veri toplama sürecinde yaptığı ikişer görüşme ile araştırma bulgularını gözden geçirme imkânı bulmuştur. Yapılan iki ayrı görüşmede yer alan benzer problemler ile elde edilen verilerin gözden geçirilmesi katılımcı teyidi ile birlikte ulaşılan sonuçların gerçeği temsil etmede yeterliliğini belirlemede etkili olduğu söylenebilir.

Katılımcı öğretmenler ile yapılan görüşmelerde verilerin doğruluğu hakkındaki düşüncelerini belirtmeleri istenmiştir. Katılımcı öğretmenler sonuçların doğruluğunu ve tamlığını teyit etmişlerdir. Katılımcı öğretmenlerin verilerin doğruluğu hakkındaki düşünceleri aşağıdaki Tablo 3.7 'deki gibidir.

Tablo 3.7

Katılımcı Teyidi

Katılımcı	Katılımcı teyidi
M1	Problemler ve çözümleri ile ilgi belirlediğim noktalar uygun bir şekilde ifade edilmiştir.
M2	Yukarıda belirtilen soru çözümleri tarafımdan yorumlanmıştır.
M3	Problem soruyla ilgili belirttiğim noktalar benim düşüncelerim.
M4	Benim düşüncelerimi yansıtmak - tadır. Birşey eklemek istemiyorum.
M5	Yukarıda verilen yorumlar bana aittir. Etilerele istediğim değeri yansıtır.

BÖLÜM IV

BULGULAR ve YORUM

Bu bölümde; araştırmada elde edilen verilerin, dördüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda oluşan bulgulara yer verilmiştir.

“Matematik öğretmenlerinin problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumları nasıldır?” olarak ifade edilen birinci alt probleme cevap verebilmek için beş öğretmen ile yapılan oturum ayrı ayrı incelenecektir. “Lise öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumları nasıldır?” olarak ifade edilen ikinci alt probleme cevap verebilmek için her bir öğretmenin öğrencisi ile yapılan her bir oturum ayrı ayrı incelenecektir. “Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözmede AN’leri belirleme durumları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?” olarak ifade edilen üçüncü alt probleme cevap verebilmek için her bir problem için öğretmen ve öğrenci görüşlerine yer verilecektir. Buradaki analizler kişiye özeldir. AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalardan alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

4.1. Birinci Alt Problemi ile İlgili Bulgular ve Yorum:

Araştırmanın birinci probleminde “Matematik öğretmenlerinin problem çözme sürecinde anahtar noktaları belirleme durumları nasıldır?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu probleme ilişkin bulgular için M1, M2, M3, M4 ve M5 matematik öğretmenlerinin her bir problem için anahtar nokta belirleme durumları incelenmeye çalışılmıştır.

Bunun için matematik öğretmenlerine dokuz tane problem verilmiş olup problemi çözmeleri ve çözerken düşündükleri her şeyi yazmaları ve en son aşamada da problemin çözüm sürecinde AN’leri belirlemeleri istenmiştir. Çalışmada ilk olarak 2017 yılı ve öncesi üniversiteye giriş sınavlarında sorulmuş olan 7 problem ile ilgili öğretmenlerle görüşülmüştür. Daha sonra 2018 yılında yapılmış olan üniversiteye giriş sınavında

sorulmuş olan 2 problem de görüşmelere dâhil edilerek bulguların desteklenmesi, çalışmanın güncel olması amaçlanmıştır.

Bu oturuma beş matematik öğretmeni katılmıştır. O ana kadar öğretmenler sadece problemleri çözmeye odaklandıkları için problemin çözümünde AN'leri belirleme durumlarının, problemin çözümünden daha karmaşık olduğunun dile getirildiği anlar olmuştur. Araştırmacının bu oturumlarda gözlemlediği bu durumlara verebileceği örneklerden biri şöyledir:

“Soru çözmek sıkıntı olmuyor. Önemli noktayı söylemek daha zor.” (M2)

Problemin çözümünde önemli noktaları belirleme durumları ile ilgili öğretmen deneyimlerinden araştırmacının yine bu oturumlarda gözlemlediği örneklerden bir diğeri ise şöyledir:

“Öğrenci açısından bakmak güzel bir deneyim. Öğrenci nereden başlayacağını bilmiyor çünkü.” (M4)

Katılımcı öğretmenlerden problem çözme süreçlerinde AN'leri belirlemeleri istenmiştir. Katılımcı öğretmenlerden problem çözme süreçlerinde AAN'leri belirlemeleri istenmemiştir.

Bu aşamada matematik öğretmenlerinin problem çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

4.1.1. Polinomlar ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2017 LYS sınavında sorulmuş olan polinomlar ile ilgili problemin (Şekil 4.1) çözümü görüşmeler yapılmadan önce araştırmacı tarafından yapılmıştır. Ayrıca çözüm sürecinde AN'leri belirlemiştir. Görüşme esnasında çözümü görmek isteyen matematik öğretmenlerine çözüm yolları gösterilmesi amaçlanmıştır. Araştırmaya katılan öğretmenler içerisinde M4 çözümü görmek istemiş fakat çözüm sürecinde alternatif bir yol izlemiştir. M5 ile polinom ile ilgili problemin çözümü paylaşılmıştır.

a ve b tamsayılar olmak üzere

$$P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$$

$$Q(x) = x^2 - 2ax + b$$

polinomları için

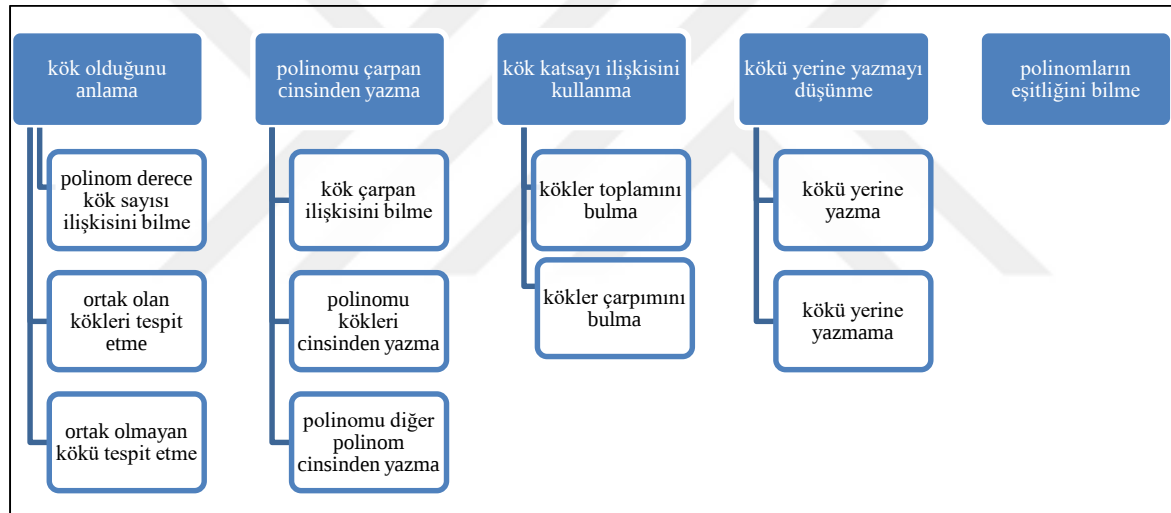
- $P(-4) = 0$
- $Q(-4) \neq 0$

olduğu biliniyor.

$Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre, $b - a$ kaçtır?

Şekil 4.1. Polinomlar ile ilgili problem

Polinomlar ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.2’de verilmiştir.



Şekil 4.2. Polinomlar ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

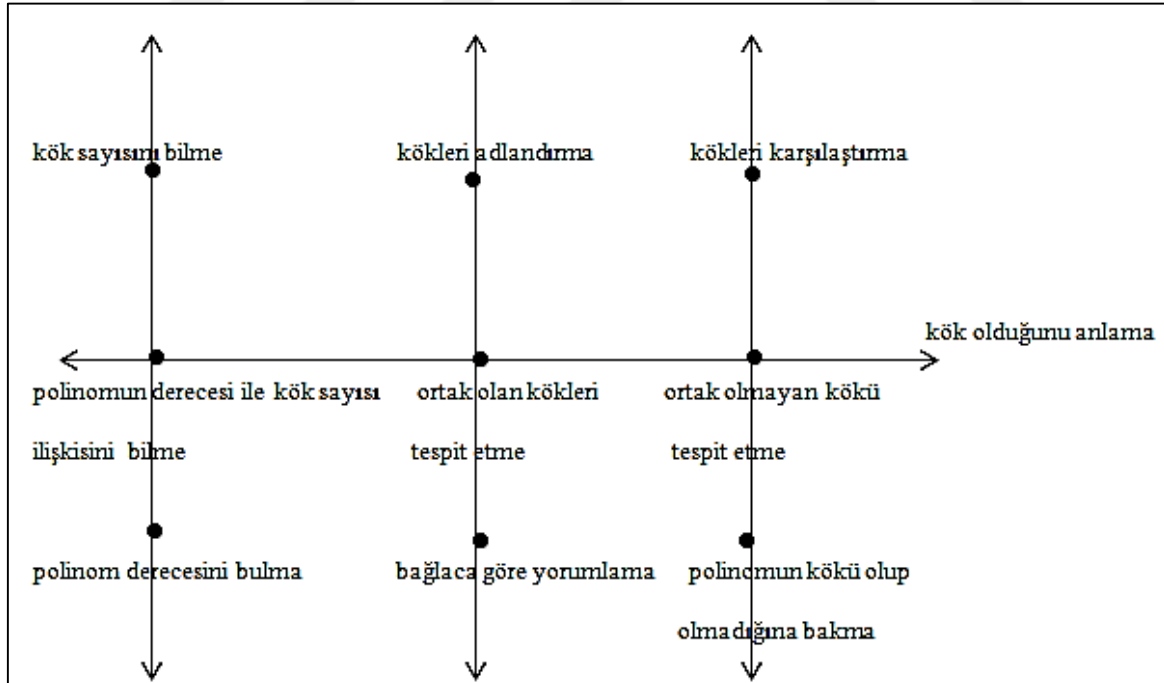
4.1.1.1. Matematik Öğretmenlerinin Polinomlar ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Kök olduğunu anlama: Polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde bir polinomun kökü olduğunu anlama durumlarını temsil etmektedir. Bu kategorinin ortaya çıkmasında, M1’in polinomlar ile ilgili problemlerde öğrencilerin bir polinomun kökü olma kavramını iyi bilmeleri gerektiğini vurgulayan “Öncelikle kişinin kök kavramının ne demek olduğunu bilmesi gerekiyor. Yani kök nedir diye ona sorarız bir kere.” açıklaması neden olmuştur. Bu kategori M1 tarafından anahtar nokta olarak belirlenmiştir.

Problemin çözümünü alternatif bir yoldan yapan M4 ile diğer çözüm yolu paylaşılmıştır. Bu çözüm yolu için AN'leri belirlemeleri istendiğinde M4, “Burada önemli nokta -4 ün $P(x)$ polinomunu sıfırlatan değer olduğu için çocuklara sürekli söylediğimiz şey sıfırlatan değer, polinomun köküdür.” diyerek “kökü olduğunu anlama” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Bu kategori; polinomun derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme, ortak olan kökleri tespit etme, ortak olmayan kökü tespit etme olarak üç alt kategoride incelenmiştir. Polinomun derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme alt kategorisi öğrencilerin polinomun derecesi ile ilişki kurarak kaç tane kökü olabileceği hakkında fikir yürütmesi durumudur. Bir diğer alt kategori olan ortak köklerin tespit edilmesi, iki kökün ortak olduğunun bilinmesi durumunu temsil etmektedir. Her iki polinomunda hangi köklerin ortak olduğunun ifade edilmesi durumu gösteren alt kategoridir. -4 'ün $P(x)$ polinomunun ortak köklerinden farklı olan kökü olduğunun tespit edilmesi ise ortak olmayan kökün tespit edilmesi alt kategorisini oluşturmuştur.

Kök olduğunu anlama kategorisine ait alt kategorilerin ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.3'te belirtilmiştir.



Şekil 4.3. Kök olduğunu anlama kategorisinin alt kategorilerinin ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi

Polinomun derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme: Burada polinomun derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme alt kategorisi problemde yer alan $P(x)$ polinomunun üçüncü dereceden bir

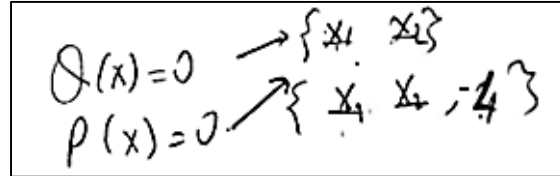
polinom olmasından dolayı üç kökünün olması, $Q(x)$ polinomunun ikinci dereceden olmasından hareketle iki kökünün olması durumunu temsil etmektedir.

M1, “polinomun derecesi ile polinomun kök sayısı ilişkisi bilme” alt kategorisini problemde verilen bilgileri kullanmada önemli bir araç olduğunu düşünmemektedir. M1 bu durumu “ $Q(x)$ ikinci dereceden bir polinom olup iki tane kökü var $P(x)$ üçüncü dereceden olup üç tane kökü var. Ama bunu bilmek zorunda değil öğrenci.” açıklaması ile ifade etmiştir. Bu kategori polinomun derecesini bulma ve polinomun kök sayısını bilme olarak iki boyutta incelenmiştir.

M3, “ $P(x)$ polinomunda üç tane kök olduğunu bilmesi gerekir.” açıklaması ile problem çözme sürecinde çözüme ulaştıracak önemli noktalardan bir tanesi olarak belirlemiştir. Buradan M3’ün bu alt kategoriyi problem çözmede AN olarak belirlediği söylenebilir.

Ortak olan kökleri tespit etme: Polinomlarda hangi köklerin ortak olduğunu tespit edilmesi durumunu temsil etmektedir. M1’in çözümü incelenerek bu alt kategori “kökleri adlandırma” ve “bağlaca göre yorumlama” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

Kökleri adlandırma: $Q(x)$ polinomunun x_1 ve x_2 gibi iki kökü olarak ifade edilmesi ve $P(x)$ polinomun üç kökünün x_1, x_2 ve -4 olarak ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir. M1’in bu boyut ile ilgili çözümü Şekil 4.4’te verilmiştir.


$$\begin{array}{l} Q(x)=0 \rightarrow \{x_1, x_2\} \\ P(x)=0 \rightarrow \{x_1, x_2, -4\} \end{array}$$

Şekil 4.4. M1’in “kökleri adlandırma” boyutuna ait çözümü

M1’in “kökleri adlandırma” boyutu ile ilgili çözümü incelendiğinde “polinom derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme” alt kategorisi ile bağlantı kurulduğu söylenebilir.

Bağlaca göre yorumlama: “ise bağlacı” yardımı ile ortak köklerin yerleştirilmesi durumunu temsil etmektedir.

M1, “Burada diğer önemli nokta $Q(x)$ ’in köklerinin $P(x)$ ’i sağladığını, yani ise bağlacının yönünün önemli olduğudur. Yani Q ’nun olan P ’nindir. $Q(x)$ ’in iki kökü zaten onun da köküdür.” açıklamasıyla Şekil 4.5’ten görüldüğü gibi problemin çözümüne bu noktadan başlamıştır.

$$Q'nun\ olan \Rightarrow P'nindir$$

Şekil 4.5. M1'in "bağlaca göre yorumlama" boyutuna ait çözümü

M1, "Sadece $Q(x)$ 'in $P(x)$ 'e gittiğini bilmesi gerekir." açıklaması ile "bağlaca göre yorumlama" boyutunu problemin çözümünde AN olarak belirlemiştir.

Ortak olmayan kökü tespit etme: -4 'ün $P(x)$ polinomunun, $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan diğer kökü olduğunu bilme durumunu temsil etmektedir. M1 bu durumu " $Q(x)$ in kökleri $P(x)$ in de kökleridir. $Q(x)$ in kökleri 2 tane $P(x)$ in de kökleri bu ikisi ve başka bir tane daha var. Yani $P(x)$ in kökleri 3 tane. Burada dikkat edilmesi gereken nokta bu sağlamayan köktür. Neden birini sağlayıp birini sağlamıyor." açıklaması ile ifade etmiştir. M1, "ortak olmayan kökü tespit etme" alt kategorisini çözüm sürecinde önemli nokta olarak belirlemiştir.

M1'in açıklaması ile birlikte bu alt kategori "kökleri karşılaştırma" ve "polinomun kökü olup olmadığına bakma" olarak iki boyutta ele alınmıştır. Burada M1'in "*Buradaki en önemli nokta $Q(x)$ in kökleri $P(x)$ in de kökleri olması ve $Q(-4) \neq 0$ dir. Yani şöyle diyelim birinin üç çocuğu var birinin iki çocuğu var, çocukların ikisi ortak gibi. Birinin başka bir evladı var. Burada $P(x)$ polinomunun başka bir kökü olduğu gibi.*" açıklaması araştırmacının bu kategoriye ve alt kategorileri belirmesinin bir göstergesidir.

M1'in açıklamasında "polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme" alt kategorisi ile bağlantı açıklamalar olduğu görülmüştür.

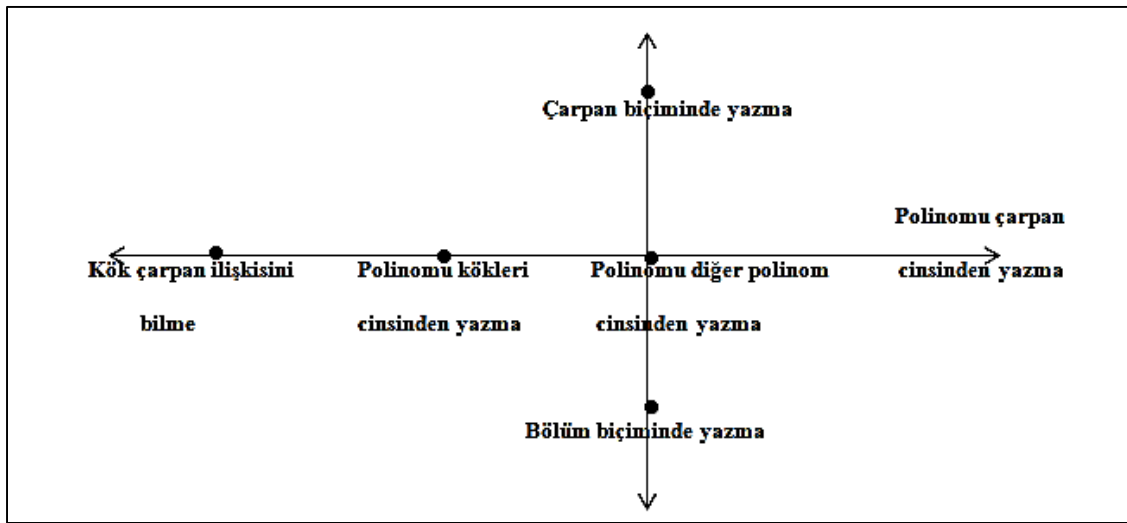
M1 "ise bağlacının" ortak olmayan kökü de vurguladığını "*Q nun olan P nin ise tersten de Q nun olmayan P nin olana bakacağız.*" açıklamasıyla ifade etmiştir. Dolayısıyla M1'in bu açıklaması ile "bağlaca göre yorumlama" boyutunu "ortak olmayan kökü tespit etme" alt kategorisini ilişkilendirdiği söylenebilir.

Buradan M1'in problem çözme sürecinde "kök olduğunu anlama" kategorisini AN olarak belirlemiştir. Alt kategorileri ise birbiriyle bağlantılı AAN'ler olarak çözüme ulaştırmada önemli olarak belirtmiştir. M3 ise "polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme" alt kategorisini problem çözmede anahtar nokta olarak belirlemiş, diğer alt kategorilere ve boyutlara değinmemiştir.

M5 “-4 ün de ortak kök olmadığını anlamak önemliydi.” açıklaması ile bu alt kategoriyi problem çözme sürecinde anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Polinomu çarpan cinsinden yazma: Bu kategori bir polinomun iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazma durumunu temsil etmektedir.

Bu kategori “kök çarpan ilişkisini bilme”, “polinomu kökleri cinsinden yazma”, “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır. Polinomu çarpan cinsinden yazma kategorisine ait alt kategorilerin ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.6’da belirtilmiştir.



Şekil 4.6. “Polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisinin alt kategorileri ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi

Kök çarpan ilişkisini bilme: Bu kategori polinomun kökü verildiğinde polinomun çarpanını ifade edebilme durumunu temsil etmektedir. M1 problemin çözümünde kök olma ile çarpan olma arasındaki ilişkinin önemli bir yere sahip olduğunu belirtmiştir. Tersten düşünmek gerektiğini “*Şu gördüğümüz -4, $P(x)$ in köküdür. O halde $(x + 4)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.*” açıklaması ve Şekil 4.7’de görüldüğü çözümü ile desteklemiştir.

$$(x - x_1) = 0$$

Şekil 4.7. M1 öğretmenin “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisine ait çözümü

M1 “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

M2, “Şimdi o zaman $P(x)$ polinomun $(x + 4)$ çarpanı var.” açıklamasıyla problemin çözümüne başlamıştır. Problemin çözümünden sonra önemli noktaları belirlenmesi istendiğinde ise “Ama bu tarz olanlarda hemen çarpanı olduğunu düşünmek gerek. Verilen birinci veriden $P(-4) = 0$ ifadesinden $P(x)$ polinomunun $(x + 4)$ çarpanı olduğunu gördüm.” açıklamasıyla “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3, “ -4 polinomun kökü olduğu için $(x + 4)$ polinomun bir çarpanı” diyerek çözüme devam etmiştir. Ayrıca M3, “ $(x + 4)$ ün $P(x)$ in bir çarpanı olduğunun görülmesi problem çözümünde kritik nokta” açıklaması ile problem çözümünde “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M4, “ $P(x)$ polinomunu sıfırlatan değer olduğu için çocuklara sürekli söylediğimiz şey sıfırlatan değer, polinomun köküdür, çarpanıdır şeklinde. Dolayısıyla hemen onların aklına $(x + 4)$ ün $P(x)$ in bir çarpanı olduğu gelecektir.” açıklaması ile alternatif çözüm yolunda “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M5, “Bence öğrencinin şeyi bilmesi lazım kökü yerine yazmak değil de verilen kökün mesela çarpanı olduğunu bilmesi lazım.” açıklaması ile problem çözme sürecinde “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M5 daha önce yıllarda sorulan üniversite sınav sorularını incelediğinde polinomlar ile ilgili problemlerde hep aynı noktaya dikkat çekildiğini söylemiştir. Açıklaması şu şekildedir:

“İşin ilginç tarafı 2016 yılında bu tür bir soru soruldu. Hep şeyi istiyorlar kökü çarpan şeklinde yaz çarpan şeklinde yaz. Polinomların tamamında var bu. Kök olunca yerine yazma çarpanı olduğu gör ve çarpan şeklinde yaz. Çok ilginç yine aynı soruyu sormuşlar. Yerine yazmayı istemiyorlar. Çoğu soruda bunu görüyorum. Köklerini çarpanı biçimde yazmaları isteniyor.”

M5, “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisini problem çözme sürecinde önemli olarak belirlediğini çalışma kâğıdına Şekil 4.8’de görüldüğü gibi ifade etmiştir.

$$p(-4) = 0$$

Köklerden birisi -4 ise $P(x)$ polinomunda $(x+4)$ çarpanı olduğu bilinmeli

Şekil 4.8. M5'in "kök çarpan ilişkisini bilme" alt kategorisine ait çözümü

Polinomu kökleri cinsinden yazma: Polinomun köklerini göz önünde bulundurarak polinomu iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması durumunu temsil etmektedir. Polinomun genel olarak tanımlandığı ifadeden farklı olarak çarpanları cinsinden yazılması durumudur.

M1'in bu kategori ile ilgili çözümü Şekil 4.9'da görüldüğü gibidir.

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x + 4)$$

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Şekil 4.9. M1'in "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

M1 problemin çözümünde "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M5, "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisinin önemini dile getirmiştir ve önceki yıllarda çıkmış olan soruları da gözden geçirdiğini belirterek şöyle söylemiştir:

"Üçüncü dereceden bir polinomu genel bir şekilde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ istemiyorlar. $P(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)$ şeklinde ifade etmesini istiyorlar."

M5 polinom problemi çözümünde "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Polinomu diğer polinom cinsinden yazma: Polinomun problemde verilen diğer polinom cinsinden yazma durumunu temsil etmektedir. $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ cinsinden yazılması durumu olarak ele alınmıştır. Problemde birden fazla polinom verildiği durumlarda verilenlere göre polinomlar arasında ilişki kurularak birbiri cinsinden yazılması durumunu ifade etmektedir.

M1, "Diğer kökler için de durum aynıdır. Bu şekilde belirtilirse birazcık daha düşünüp $P(x) = (x + 4).Q(x)$ yazması teşvik edilebilir." açıklaması ile "polinomları kökleri

cinsinden yazma” kategorisi ile bağlantı kurarak “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” kategorisini belirtmiştir. M1’in bu kategori ile ilgili çözümü Şekil 4.10’da görüldüğü gibi belirtilmiştir.

$$P(x) = (x+4) \cdot Q(x)$$

Şekil 4.10. M1’in “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” kategorisine ait çözümü

M2’nin problemin çözümünde önemli olarak gördüğü ikinci nokta ile açıklaması şu şekildedir:

“İkisinin de baş katsayısı 1. Bunun kökleri aynı zamanda bunun kökleri olduğuna göre ve ikisinin de baş katsayısı 1 olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $(x + 4)$ e böldüğümüzde kalan kısmı $Q(x)$ polinomunu vermelidir. Bunun geriye kalan ikinci dereceden kısmı $Q(x)$ olmalıdır. Başkatsayıları da aynı, öyle de bir sorunuz yok. a gibi bir katsayı çarpanı da yok. O zaman $(x + 4)$ ile $Q(x)$ i çarpıp $P(x)$ e eşitleyeceğiz. Öğrenciler için de önemli olan kısım burası.”

M2, “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2’nin “ $P(x)$ polinomunun $(x + 4)$ ’e böldüğümüzde kalan kısmı $Q(x)$ polinomunu vermelidir.” ve M1’in “ $Q(x)$ ile $(x + 4)$ ü çarpıp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Ya da $P(x)$ i $(x + 4)$ e bölüp $P(x)$ e eşitleyeceğiz.” açıklamaları ile “çarpan biçiminde yazma” ve “bölüm biçiminde yazma” boyutları oluşturulmuştur.

M1, “Burada makul olan ilk seçenektir” diyerek çözüme “çarpan biçiminde yazma” boyutu ile devam etmiştir.

M2’nin açıklaması incelendiğinde problem çözme sürecinde ele alınan alt kategoriler arasında bağlantı kurulduğu görülmüştür. M2 bu durumu “Kökleri aynı ise ikinci dereceden kısımları aynı olabilir dedim, baş katsayılarının 1 olduğunu görünce emin oldum.” açıklamasıyla ifade etmiştir. M2, M1’in “polinomu kökleri cinsinden yazma” alt kategorisi ile bağlantı kurarak “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” kategorisinin nasıl oluştuğuna dair açıklamalarda bulunmuştur.

M3 bu durumu “ $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleri olduğu için $(x + 4)$ ile $Q(x)$ polinomunu çarpıp $P(x)$ polinomuna eşitleriz” açıklamalarıyla vurgulamıştır. Buradan Şekil 4.11’de görülen ifadeyi yazmıştır.

$$(x^2 - 2x + 5)(x + 4) = P(x)$$

Şekil 4.11. M3'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisi çözümü

M3, " $Q(x)$ ile $(x + 4)$ ün çarpımının $P(x)$ polinomunu verdiğinin görülmesi gereklidir." açıklaması ile "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" kategorisini polinom problemi çözümünde kritik nokta, öğrenciyi çözüme ulaştıracak önemli nokta olarak belirtmiştir.

Araştırmacı M5'e çözüme bakabileceğini söylemiştir. M5 çözümün ilk kısmına baktıktan sonra şu şekilde devam etmiştir:

"-4, $Q(x)$ polinomunun kökü olmadığı için $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$ yazmak çok mantıklı."

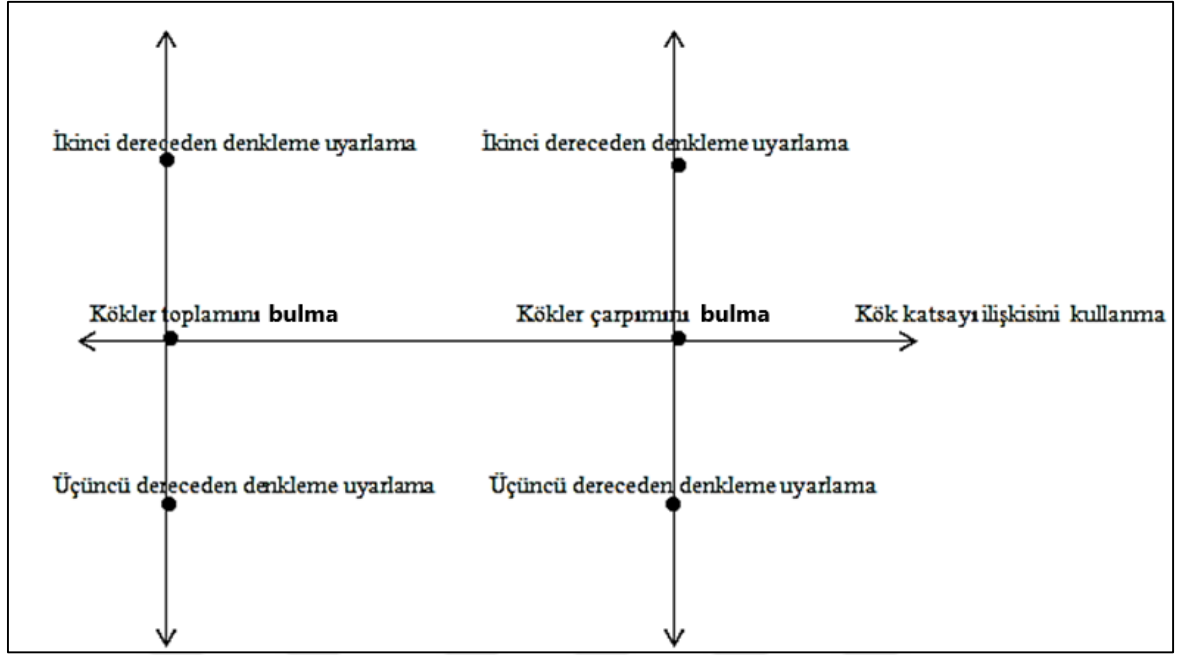
M5 öğretmen Şekil 4.12'de görüldüğü gibi açıklamasında belirttiği durumu yazmıştır.

$$Q(x) \neq 0 \quad Q(x) \text{ in } (x+4) \text{ çarpanı olmalı}$$

Şekil 4.12. M5'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

Kök katsayı ilişkisini kullanma: İkinci ve üçüncü dereceden bir denklemin köklerini bulmadan kökler toplamını ve kökler çarpımını bulma durumunu temsil etmektedir.

Bu kategori "kökler toplamını bulma", "kökler çarpımını bulma" olarak iki alt kategoride ele alınmıştır. Buradan her iki alt kategori "ikinci dereceden denkleme uyarılama" ve "üçüncü dereceden denkleme uyarılama" olarak iki boyutta ele alınmıştır. "Kök katsayı ilişkisini kullanma" kategorisine ait alt kategorilerin ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.13'de belirtilmiştir.



Şekil 4.13. Kök katsayı ilişkisini kullanma kategorisinin alt kategorileri ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

M3 ile yapılan görüşmede problemin çözümünde ilk olarak kök katsayı ilişkisini kullanabileceğini belirtmiştir. Kökler ortak olduğu için kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerinin kullanabileceğini belirtmiştir. M3'ün bu durum ile ilgili açıklaması şöyledir:

“Burada üçüncü dereceden denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanmak istiyorum çünkü biliyorum. Kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerini kullanmak istiyorum.”

M3 açıklamasını yaptıktan sonra çalışma kâğıdına Şekil 4.14'teki gibi yazmıştır.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2a \\ x_1 \cdot x_2 &= b \end{aligned}$$

Şekil 4.14. M3'ün “kök katsayı ilişkisini kullanma” kategorisine ait çözümü

M3 daha sonra bu çözüm yolunu devam ettirmemiştir. Çözüme farklı bir yoldan ilerleme kararı almıştır.

M4 bilinmeyen sayısı birden fazla olduğu durumlarda kökler toplamı ve kökler çarpımı ile çözüme ulaşabildiğini ifade etmiştir. Bu durumu *“İki tane bilinmeyen varsa benim aklıma hemen kökler toplamı, kökler çarpımı gelir.”* açıklaması ile problemin çözümüne başlarken dile getirmiştir.

Problemin çözümünde önemli bir yere sahip olduğunu düşündüğü bu kategori için M4 problemin çözümüne ulaşmak için alt kategorilerden faydalanmıştır. Bu alt kategoriler “kökleri adlandırma”, “kökler toplamını bulma” “kökler çarpımını bulma” durumları olmuştur. Bu alt kategorilerin boyutlarını ise denklemin ikinci ve üçüncü dereceden olmasına göre değişen kurallar oluşturmuştur. M4’ün problemin çözümünde belirlediği anahtar noktaya ait alt kategoriler ve boyutları içeren açıklamaları şöyledir:

“ $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleri. O zaman x_1 ve x_2 aynı. Kökler toplamı $-\frac{b}{a}$ ’dan $2a$ ’dır. Kökler çarpımı b derim. Bunların kökleri aynı olduğuna göre $P(x)$ ’ in kökler toplamını yazsam. $P(x)$ polinomunun kökler toplamı a ’ dır. Üçüncü kökü de biliyorum -4 , buradan a ’yı elde ederim.”

M4’ün çalışma kâğıdına bu kategori ile ilgili yaptığı çözümler Şekil 4.15’de verilmiştir.

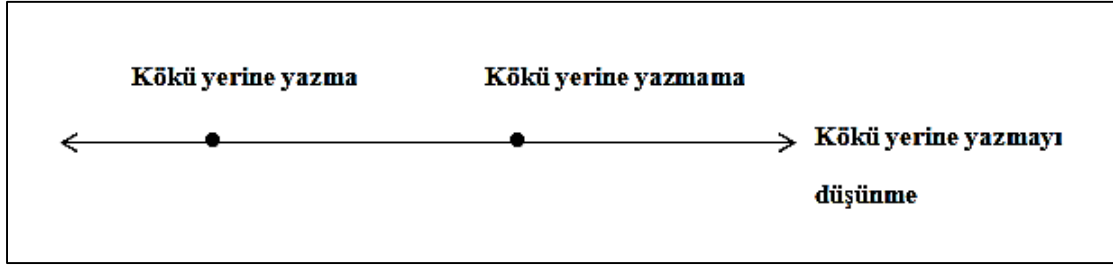
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2a \cdot \quad \quad \quad x_3 = -4 \end{array}$$

Şekil 4.15. M4’ün “kök katsayı ilişkisini kullanma” kategorisine ait çözümü

M4, “Öğrencilerimiz genelde polinomlarda işlem yaparken ikinci dereceden denklemlerde hani kökleri aynı ise veya diğer kökü nedir gibi sorulduğunda ben çocuklara her zaman şunu diyorum. . Eğer derece iki ise üç ise kökler toplamı kökler çarpımı üzerinden giderek denklem sistemi oluşturup çözmeye çalışın diyorum çocuklara.” açıklaması ile polinom problemi çözme sürecinde “kök katsayı ilişkisini kullanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M5, “ $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleri olduğu için kökler toplamı kökler çarpımından mı gidecek.” diyerek çözüm sürecine başlamıştır fakat çözüme devam etmemiştir.

Kökü yerine yazmayı düşünme: $P(x)$ polinomunda $P(a) = 0$ durumda polinomda x yerine a yazılarak sonucun sıfıra eşitlenmesi durumunu düşünmeyi temsil etmektedir. Bu kategori “kökü yerine yazma”, “kökü yerine yazmama” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır. “Kökü yerine yazma” kategorisi problemde verilen polinomda kökün x yerine yazılarak denklemin elde edilmesi durumunu ifade etmektedir. “Kökü yerine yazmayı düşünme” kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.16’da belirtilmiştir.



Şekil 4.16. Kökü yerine yazmayı düşünme kategorisinin alt kategorilerinin eksen üzerinde gösterimi

M1, öğrencilerin $P(-4) = 0$ verildiği zaman çözümde belirlediği önemli noktalardan ilerlemeyebileceklerini, -4 'ün $P(x)$ polinomunun kökü olmasından ziyade test etme yoluna gideceklerini belirterek “Yani burada öğrencinin ilk bakacağı şey yoksa $P(-4) = 0$ olduğu için polinomda x gördüğü yere -4 yazarak 0’a eşitlemektir. Bu onu çıkmaz sokağa ulaştırır. İkisini de sağlıyor olsa buna da ona da yazarak çözüme ulaşılır. Burada $Q(x)$ polinomunda -4 sağlamıyor.” açıklamasıyla desteklemiştir. Buradan M1’in açıklaması “kökü yerine yazmama” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir.

M2 problemde verilen $P(-4) = 0$ ifadesini öğrencilerin farklı bir şekilde yorumlayabileceğine dikkat çekmiştir. Bu durumu örnekleyen ifade ise “Burada birden fazla değişken olduğu için yerine yazma işe yaramayacaktır. Zaten sıfırlıyor. Sıfırlayan bir şey değişken olmasa da bir şeye yaramaz.” açıklamasıdır. Dolayısıyla M2’nin açıklaması “kökü yerine yazmama” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir.

M4 problem çözme sürecinde “kökü yerine yazma” alt kategorisinin b ’yi bulmada gerekli olduğunu belirtmiştir. M4’ün açıklaması şöyledir:

“ $P(-4) = 0$ olduğu için x gördüğüm yere -4 yazsam. Buradan iki bilinmeyenli tek denklem geliyor. İki bilinmeyenli denklemde a yı yerine yazarak b yi elde ederim.”

M4, Şekil 4.17’de görüldüğü üzere çalışma kâğıdına çözümü yazmıştır.

Şekil 4.17. M4’ün “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

M4, “Çocuklar böyle bir şey verildiği zaman ilk aklınıza şey gelsin. Kökü ise denklemi sağlamak zorunda. Hadi gelin yerine yazalım” diyerek “kökü yerine yazma” alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M5’in problemi okuduğu andan sonra “ $P(-4) = 0$ olduğu için polinomda x yerine -4 yazması gerektiğini bilmesi lazım. Oradan mı gideceğiz. Bir kere yerine yazacak bunu buradan bir denklem gelecek.” açıklamasını yapmıştır. M5’in açıklaması “kökü yerine yazmayı düşünme” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M5 daha sonra “Bu soruyu da hiç hatırlamıyorum.” diyerek düşünmeye devam etmiştir. Daha sonra araştırmacı M5’e çözüme bakabileceğini söylemiştir. M5 polinom problemi için farklı bir çözüm yolunu daha mantıklı bulduğunu ifade etmiştir.

Polinomların eşitliğini bilme: İki polinomun eşit olması durumunda aynı dereceli terimlerin katsayıların eşitlenmesi ve gerekli düzenlemelerin yapılması durumunu bilmeyi temsil etmektedir.

M1’in “ $Q(x)$ ile $(x + 4)$ ü çarpıp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Ya da $P(x)$ i $(x + 4)$ e bölüp $P(x)$ e eşitleyeceğiz. Eşitledikten sonra polinom eşitliğini kullanacak” açıklaması “polinomların eşitliğini bilme” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M1, “Eşitledikten sonra polinom eşitliğini kullanacak. Buradan sonra ciddi bir durum söz konusu değil” diyerek “polinomların eşitliğini bilme” kategorisinin problem çözme sürecinde önemli bir nokta olmadığını belirtmiştir.

M2 problemin çözümünde sonuca ulaşmada polinomların eşitliğinin kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Ama bu durumun önemli bir nokta olmadığını öğrencilerin polinomların eşitliğini bildiklerini ifade etmiştir. M2 çözümü tamamlamadan “Daha sonra da polinomların eşitliğini kullanacağız. Aynı dereceli terimler eşitlenerek a ve b bulunur” açıklamasıyla çözüm sürecini tamamlamıştır.

M3, “ $P(x)$ polinomuna eşitlersek polinom eşitliğinden buluruz” açıklaması ile problem çözme sürecini tamamlamıştır.

M4, farklı bir çözüm yolunu seçtiği için bu kategori ile ilgili sadece “Bu şekilde düşünerek $Q(x)$ polinomu ile çarparak $P(x)$ polinomuna eşitleyerek polinomların eşitliğinden de yapabilirler.” açıklamasını yapmıştır.

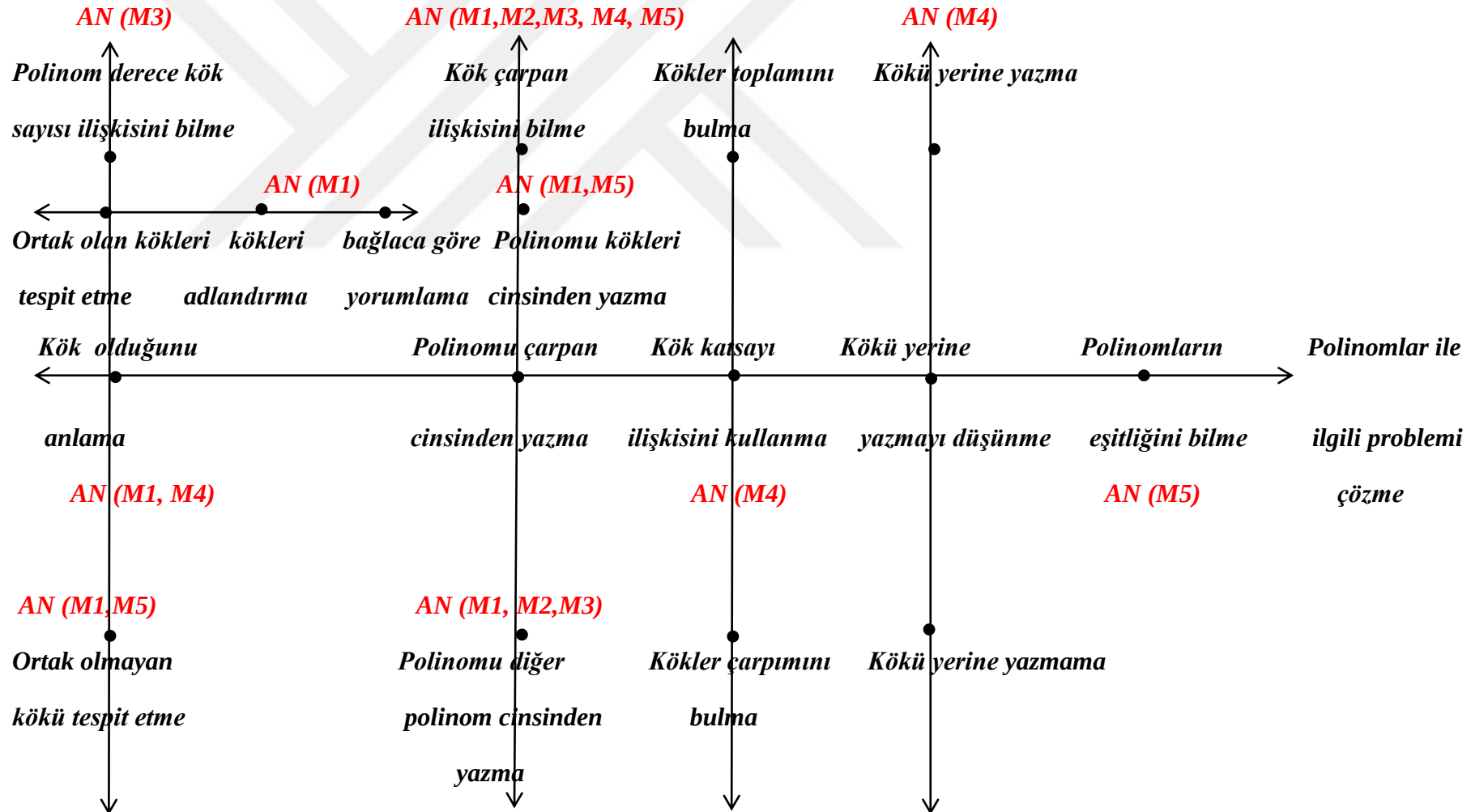
M5, “polinomların eşitliğini bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir ve Şekil 4.18’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu ifade etmiştir.

Polinomların eşitliği bilinmeli.

Şekil 4.18. M5'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü

Polinom problemi çözme süreci incelendiğinde M1, M2, M3, M4, M5 "kök çarpan ilişkisini bilme" kategorisini AN olarak belirlediği görülmüştür. M1, M4 "kök olduğunu anlama" kategorisini ve "bağlaca göre yorumlama" boyutunu AN olarak belirlemiştir. M3 "polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M4 diğer öğretmenlerden farklı olarak "kök katsayı ilişkisini kullanma" ve "kökü yerine yazma" kategorilerini AN olarak belirlemiştir. M5 "polinomların eşitliğini bilme" kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1 ve M5 "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

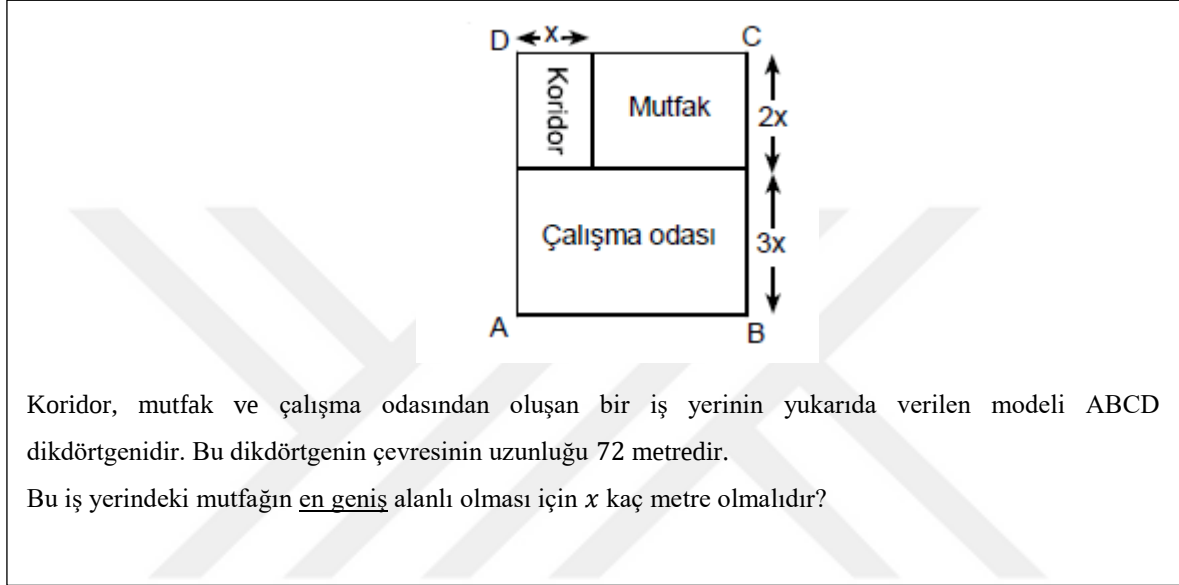
Matematik öğretmenlerinin polinom problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.19'da belirtilmiştir.



Şekil 4.19. Matematik öğretmenlerinin polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

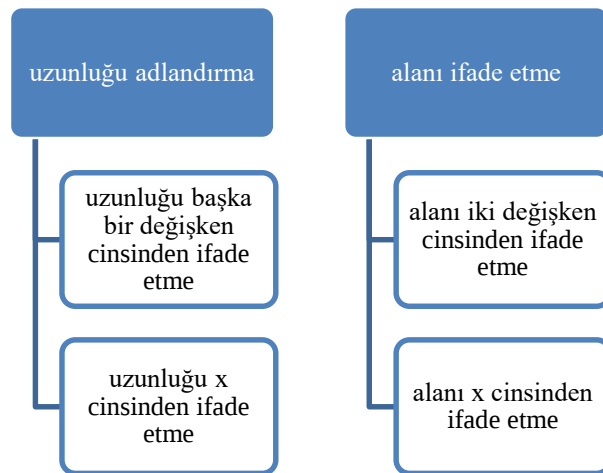
4.1.2. Maksimum-minimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2010 LYS sınavında sorulmuş olan bu problemin çözümü öğretmenlerle görüşme yapılmadan önce araştırmacı tarafından yapılmıştır. Araştırmacı tarafından problemin AN'leri belirlenmiştir. Öğretmenler içerisinde çözümü görmek isteyen öğretmen olmamıştır. Maksimum-minimum ile ilgili problem Şekil 4.20.'de belirtilmiştir.



Şekil 4.20. Maksimum-minimum ile ilgili problem

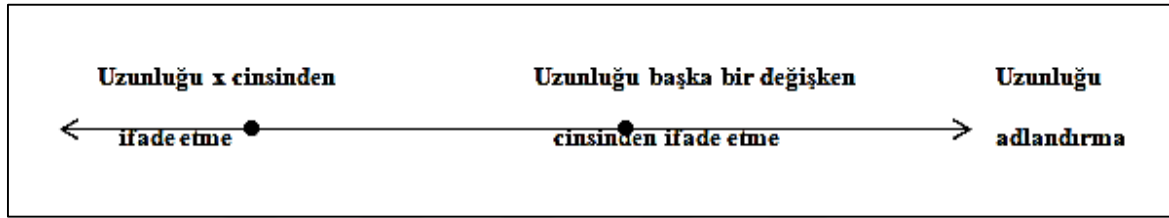
Maksimum-minimum ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.21'de verilmiştir.



Şekil 4.21. Maksimum-minimum ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

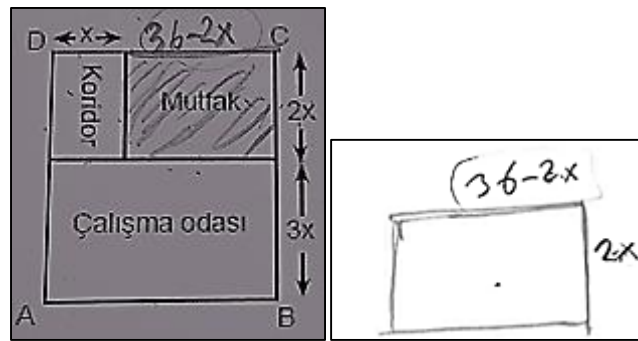
4.1.2.1. Matematik Öğretmenlerinin Maksimum-Minimum ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Uzunluğu adlandırma: Problemden istenilen ifadeyi elde etmek amacıyla verilmeyen soruda diğer verilen bilgiler yardımıyla verilmeyen kenar uzunluğunun değişken yardımıyla adlandırılması durumunu temsil etmektedir. Bu kategori “uzunluğu x cinsinden ifade etme”, “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır. “uzunluğu adlandırma” kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.22’de belirtilmiştir.



Şekil 4.22. “uzunluğu adlandırma” kategorisinin alt kategorilerinin eksen üzerinde gösterimi

M1 problemi okuduktan sonra “Şimdi bu gibi sorularda ilk olarak uzunluğu boş bırakmayacağız. Uzunluklar hakkında az çok bilgimiz olacak.” açıklamasıyla bu tür problemlerde uyguladığı bir durumu vurgulamıştır. M1’in açıklaması “uzunluğu adlandırma” kategorisi ile değerlendirilmiştir. Daha sonra hem soru kâğıdına hem de çalışma kâğıdına dikdörtgenin boş bırakılmış kenarını çevre hesaplamasını yaptıktan sonra Şekil 4.23’te görüldüğü gibi x cinsinden değerini yazmıştır.

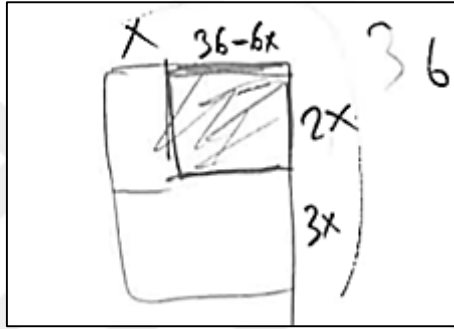


Şekil 4.23. M1’in “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

M1, “Diğer kenarı bilmiyoruz. Buna x ’li bir değer vermemiz lazım. x ’e bağlı bir değer vermemiz lazım ki bir işlem çıkartalım.” diyerek “uzunluğu x cinsinden ifade etme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

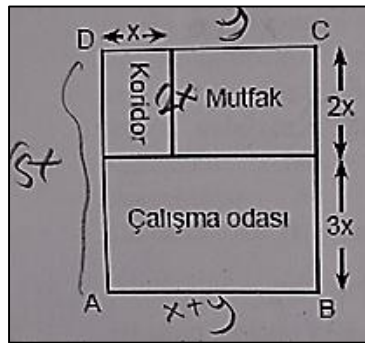
M1, “Bu problemin çözümünde yardımcı olabilecek önemli nokta sorduğu şeye odaklanması, yani öğrenci mutfığa odaklanacak. Mutfakta ne eksik boy eksik onu görecektir.” açıklaması ile “uzunluğu adlandırma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M2 problemin çözüm sürecine bilinmeyen kenar uzunluğunu adlandırma yaparak başlamıştır. Bilinmeyen kenar uzunluğunu x cinsinden ifade etmiştir. M2, “Şimdi bu dikdörtgenin çevresi ne kadarmış 72 metreymiş. Hemen yarı çevreye bakarım. Yarı çevre 36 metreymiş. Mutfığın bilinmeyen kenar uzunluğu $36 - 6x$ 'dir.” diyerek Şekil 4.24'te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisi ile çözüm sürecine başlamıştır.



Şekil 4.24. M2'nin “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

M3, “Mutfığın belli olmayan kenar uzunluğuna y diyelim. Dikdörtgenin bir kenarı $5x$ ise karşı kenara da $5x$ yazalım. Dikdörtgenin diğer kenar uzunluğu ise $x + y$ olur.” diyerek Şekil 4.25'te görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.



Şekil 4.25. M3'ün “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

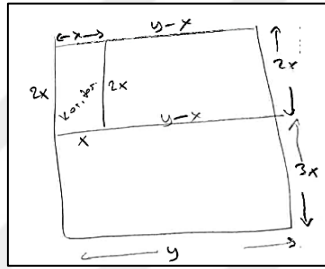
M3, “Burada bilinmeyen kenarın ifade edilmesi önemli.” diyerek bu kategorinin problemin çözüm sürecinde önemli olduğunu belirtmiştir.

M3, “Buradan $12x + 2y = 72$ oldu ve buradan da $6x + y = 36$ ve $y = 36 - 6x$.” diyerek bilinmeyen uzunluğu x cinsinden yazmak amacıyla gerekli işlemleri yapmıştır. M3’ün çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri Şekil 4.26.’da verilmiştir.

Handwritten mathematical work showing the equations $12x + 2y = 72$ and $y = 36 - 6x$.

Şekil 4.26. M3’ün “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

M4, “Buraya y diyelim.” ifadesiyle Şekil 4.27’de görüldüğü gibi problemin çözümüne başlamıştır.



Şekil 4.27. M4’ün “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

Öğretmen diğer öğretmenlerden farklı olarak tamamına y demiştir. Dolayısıyla mutfakın bilinmeyen kenar uzunluğu $y - x$ olmuştur. Öğretmen çevreyi hesaplarken işlem hatası yapmıştır. Araştırmacı bu durumu öğretmen ile paylaşmamıştır. Çalışmanın amacı öğretmenlerin problemin çözünde AN belirleme durumlarının incelenmesi olduğu için akışın bozulması istenmemiştir.

M5 çözüm için yapılacak ilk ve önemli adımın kenara değişken vermek ve daha sonra ortak değişkenle ifade etmek olduğunu söylemiştir. M5 de “Bir değişken vermeliyim. Kenarlara ortak değişken verilmelidir.” açıklamasıyla “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisinin önemine değinmiştir

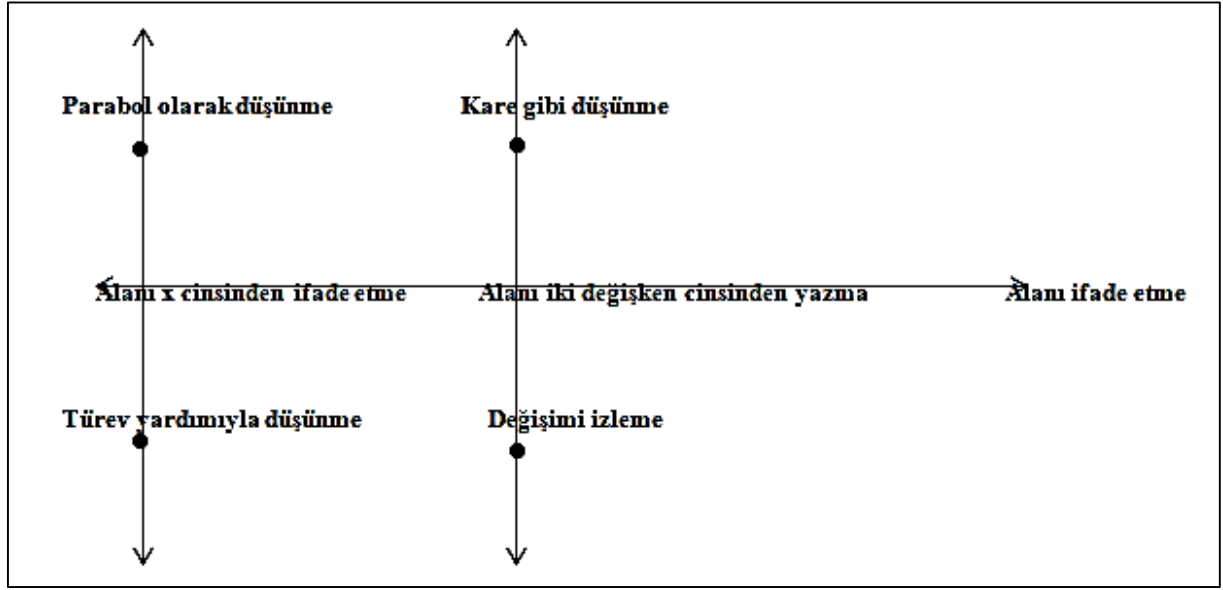
M5, Şekil 4.28’de görüldüğü gibi bilinmeyen uzunluğa y demiştir.



Şekil 4.28. M5’in “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

M5 uzunluğu x cinsinden yazmak için öncelikle kenar uzunluğuna y demiştir. Daha sonra çevreyi kullanarak bunu gerçekleştirebileceğini belirtmiştir.

Alanı ifade etme: Problemden verilen dikdörtgenin alanının ifade edebilme durumlarını temsil etmektedir. Bu kategori “alanı x cinsinden ifade etme”, “alanı iki değişken cinsinden ifade etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır. “alanı ifade etme” kategorisine ait alt kategorilerin ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.29’da belirtilmiştir.



Şekil 4.29. “alanı ifade etme” kategorisinin alt kategorileri ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Alanı x cinsinden ifade etme: Dikdörtgenin alanının x cinsinden ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir.

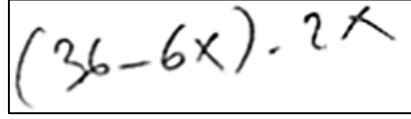
M1, “Bu problemin çözümünde yardımcı olabilecek önemli nokta sorduğu şeye odaklanması, yani öğrenci mutfağın alanına odaklanacak. Mutfakta ne eksik boy eksik onu görecektir alan da istiyor ise çarpmalıyım diyecek. Alanı elde edecek.” açıklaması ile “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisini problemin çözümünde AN olarak belirlemiştir. M1’in “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisi ile ilgili çözümü Şekil 4.30’da verilmiştir.

$$A(x) = 2x \cdot (36 - 2x)$$

$$y = 72x - 4x^2 \quad \checkmark$$

Şekil 4.30. M1’in “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

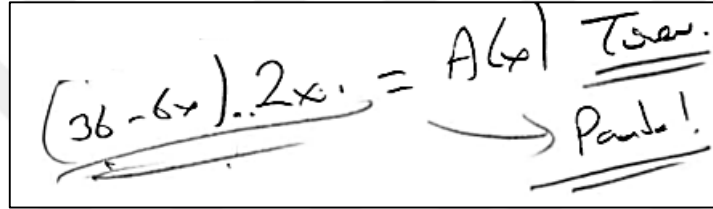
M2 problemde mutfağın alanının x cinsinden ifade edilmesinin çözüm sürecinde AN olduğunu belirtmiştir. M2'nin bu alt kategori ile ilgili çözümü Şekil 4.31'de verilmiştir.


$$(36-6x) \cdot 2x$$

Şekil 4.31. M2'nin "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

M2, "Burada mutfak dikdörtgenin alanını x cinsinden ifade etmesi gerekiyor. Tek değişken cinsinden ifade etmesi gerekiyor." açıklamasını yapmıştır. M2 denklemini tek değişken haline getirmenin bu tür problemlerin çözüm sürecinde AN olduğunu belirtmiştir.

M3, "Alanı tek değişkene getirmesi önemli." diyerek Şekil 4.32'de görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

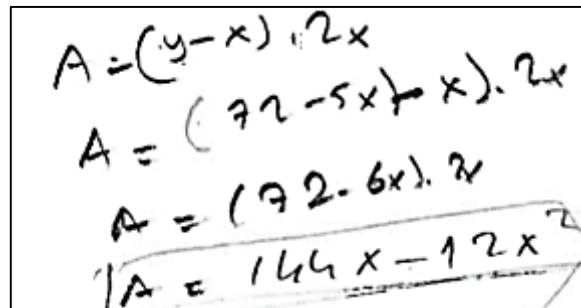

$$(36-6x) \cdot 2x = A(x) \quad \text{Paula!}$$

Şekil 4.32. M3'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

M4 mutfağın alanı ifadesini elde etmeye çalışmıştır. Problemin çözümünde bu aşamayı şu şekilde açıklamıştır:

"Mutfağın en geniş alanlı olması için o zaman burası ne olacaktır. Mutfağın alanı da ne olacaktır. $(y-x) \cdot 2x$ olur. Çevresi verilmiş 72. $y+5x=72$ olur. Tek bilinmeyen y yi yalnız bırakayım. Buradan y yi çekersem. $y=72-5x$ olur. Alan $= (72-6x) \cdot 2x = 144x - 12x^2$ olur."

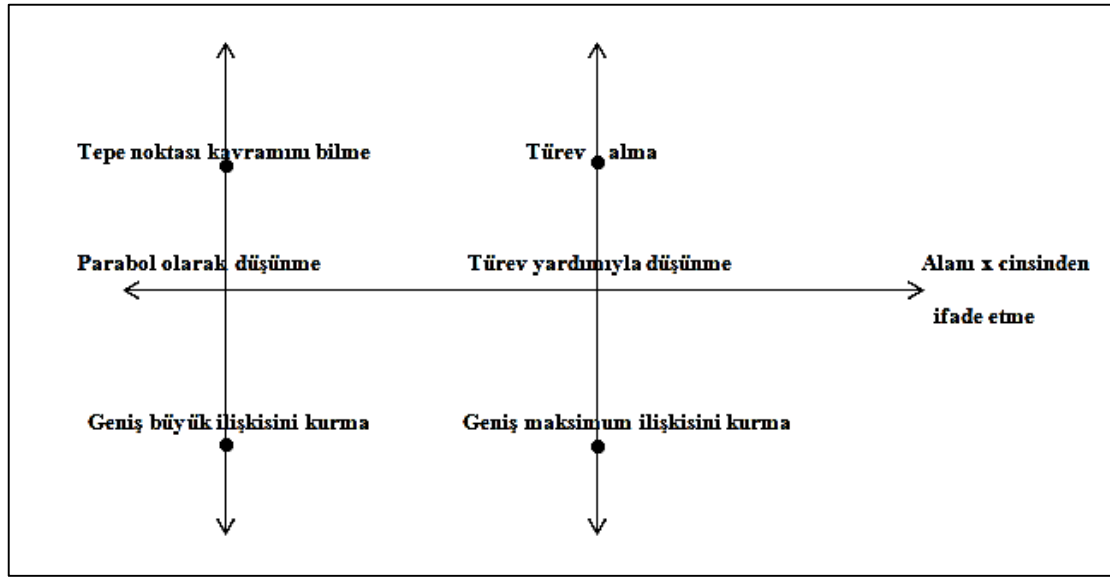
M4 önemli gördüğü bu kategori ile ilgili çalışma kâğıdına Şekil 4.33'de görüldüğü gibi çözümünü yapmıştır.


$$\begin{aligned} A &= (y-x) \cdot 2x \\ A &= (72-5x-x) \cdot 2x \\ A &= (72-6x) \cdot 2x \\ A &= 144x - 12x^2 \end{aligned}$$

Şekil 4.33. M4'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

M5, problemin çözümünde gerekli olduğunu düşündüğü bu adımı “Alanda y yerine $(36 - 6x)$ yazarak alanı bulur.” açıklamasıyla ifade etmiştir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmenlerin hepsi problem çözme sürecinde “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. “alanı x cinsinden ifade etme” kategorisinin “parabol olarak düşünme” ve “türev yardımıyla düşünme” olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.34’te belirtilmiştir.

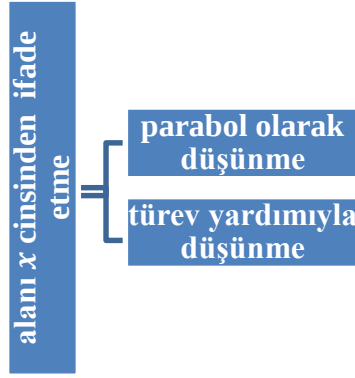


Şekil 4.34. “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisinin boyutlarının eksen üzerinde gösterimi

M1, “Alanı elde edecek ve sınıf düzeyine göre çözüm şekillenecek. Öğrencinin 9,10 ve 11 olmasına göre değişir.” açıklamasıyla bu aşamadan sonra öğrencinin bilgisine göre çözüm yolunun değişebileceğini belirtmiştir. M1, öğrencinin bilgisine veya deneyimine göre yol ayrımına gireceğini belirterek probleme çözüm olabilecek farklı seçenekleri açıklamıştır. Tercih edeceği seçeneğe göre de anahtar noktaların değişebileceğini belirtmiştir. M1’in açıklaması şöyledir.

“Tek bir çözüm yolu olmadığı için illa şunu yapması gerekir diyemeyeceğim bu noktada. Burada şu denklemi yazması önemli oradan hangi yolu seçeceğine kendisi karar verir. Ama bir de öğrencinin pratikliği ve bilgisi de önemli.”

M1 belirlediği AN ile çözüm yolları Şekil 4.35’de belirtilmiştir.



Şekil 4.35. AN'nin farklı çözüm yollarına ayrıldığı durum

M1 alanın ifade edilmesinde sonra problemin çözümünde farklı yolların oluştuğunu öğrencinin bilgisine göre problemi çözebileceğine dair farklı çözüm yolları sunmuştur. Farklı çözüm yolları hakkında bilgi veren açıklaması şöyledir:

“Bunu değerlendirmede kullanacağım bir yol bunu parabol gibi düşünüp tepe noktasını elde etmek, diğer türev alıp bir maksimum alabilirim.”

M1'in açıklaması ile birlikte “alanı x cinsinden yazma” alt kategorisi “parabol olarak düşünme” ve “türev yardımıyla düşünme” olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır.

M2 de M1 gibi AN olarak belirlediği “alanı x cinsinden ifade etme” kategorisinden sonra problemin farklı çözüm yolları için bir çatallanma meydan geldiğini vurgulamıştır. M2, *“Bu problem maksimum minimum problemi. Eğer 10.sınıf bakış açısı ile bakarsak ikinci dereceden fonksiyon ve tepe noktası sorusu.”* açıklamasını yapmıştır.

Parabol olarak düşünme: Alanın x cinsinden ifade edilmesinden sonra bu ifadenin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir. “Parabol olarak düşünme” boyutu “geniş büyük ilişkisini kurma” ve “tepe noktası kavramını bilme” olmak üzere iki alt boyutta ele alınmıştır.

M1, *“Bir öğrenci bu denklemin parabol denklemi olduğunu bilir.”* açıklamasını yapmıştır.

M1, *“Bir maksimum değer söz konusu ise parabol kimliğinden hareket ederek bulabilir.”* açıklamasını yapmıştır.

M2, *“İkinci dereceden fonksiyon olur.”* açıklamasını yapmıştır.

M3, *“Alanın ikinci dereceden fonksiyon denklemi olarak düşünülmesi önemli.”* açıklamasını yapmıştır. M3 problem çözme sürecinde “parabol olarak düşünme” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. M3 “parabol olarak düşünme” kategorisini

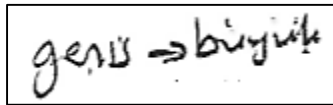
anahtar nokta olarak belirleme nedenini ise “10.sınıflarda problem uygulaması az yaptığımız için akıllarına gelmeyebilir. İkinci dereceden denklemlerde tam kareye tamamlarken hemen uygulamasında sorulduğu zaman yapıyorlar. Ama problem durumlarında göremiyorlar.” açıklaması ile belirtmiştir.

M4 bu problemin başka sınıf düzeylerinde çözilemeyeceğini “10.sınıflara nasıl anlatırım bilmiyorum.” ve “Ama şimdi 10.sınıf çocuğu nasıl çözebilir bunu?” açıklamalarıyla ifade etmiştir. Daha sonra araştırmacı alternatif çözüm yolunu öğretmen ile paylaşmıştır.

M5, “parabol denkleminde tepe noktasını buluyoruz” açıklamasıyla problemin çözümünde bir yol olduğunu 10.sınıf düzeyinde olan bir öğrencinin bu ifadenin ikinci dereceden fonksiyon olduğunu görebilmesinin çok mümkün olmadığını belirtmiştir. Bunu “öğrenci türevden yapabilir. 10. sınıflara türevden anlatamayız. İkinci dereceden fonksiyon olduğunu göremez.” açıklamasıyla vurgulamıştır.

Geniş büyük ilişkisini kurma: Problemde geçen “en geniş” kelimesinin “en büyük” kelimesini çağrıştırması durumunu temsil etmektedir.

M1, “Problemde geçen en geniş kısmı önemlidir. Geniş, büyük kavramlarının eşit olduğudur. Farklı bir şey gibi düşünülmemesi gerekir.” açıklamasını yapmıştır. M1, “Çünkü geniş olduğu zaman alan büyüyecek demektir.” diyerek Şekil 4.36’da görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu yazmıştır.

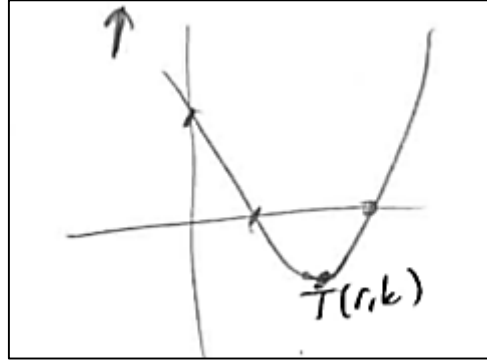


Şekil 4.36. M1’in “geniş büyük ilişkisini kurma” alt boyutuna ait çözümü

Tepe noktası kavramını bilme: İkinci dereceden fonksiyonun tepe noktasını bulacağını bilme durumlarını temsil etmektedir. Problemde istenenin tepe noktası olduğunu anlama ve tepe noktasını elde etme durumlarını temsil etmektedir. “tepe noktası kavramını bilme” alt boyutu “tepe noktası olduğunu anlama” ve “tepe noktasını elde etme” olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

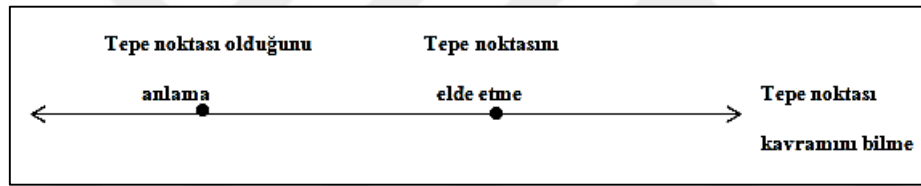
M1, “Öğrenci şunu görmeli, Parabolü verdiğimizde nasıl bizim kimlik bilgilerimiz var ise nasıl bir fili tanıtırken herkes hortumu olduğunu bilir parabol nedir dediğimizde herkesin bildiği bir şey vardır. Parabolün kestiği noktalar, kolun yukarı veya aşağı oluşu, bunlar parabolün kimliğidir, ne olduğudur. Bir de tepe noktası vardır. Bu parabolü parabol yapan şeydir.” açıklamasını yaparak “tepe noktasını kavramını bilme” kategorisini

belirtmiştir. M1'in "tepe noktası kavramını bilme" kategorisi ile ilgili çözümü Şekil 4.37'de verilmiştir.



Şekil 4.37. M1'in "tepe noktası kavramını bilme" alt boyutuna ait çözümü

"Tepe noktası kavramını bilme" alt kategorisine ait boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.38'de belirtilmiştir.



Şekil 4.38. "tepe noktası kavramını bilme" alt boyutunun boyutlarının eksen üzerinde gösterimi

Tepe noktası olduğunu anlama: Parabolün en büyük veya en küçük değerinin tepe noktası ile bulunabileceğini düşünme durumlarını temsil etmektedir.

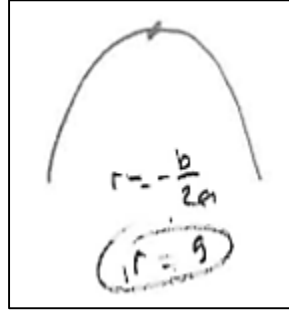
M1, "Bu denklemin en büyük değerinden bahsediyorsak bu ne anlama geliyor bizim için." açıklamasını yapmıştır.

M3, "en büyük değer in tepe noktasını ifade etmesi bilinmesi önemlidir." açıklaması ile "tepe noktası olduğunu anlama" alt boyutunu AN olarak belirlemiştir.

M4 ile alternatif çözüm yolunun paylaşılmasının ardından "parabolün tepe noktasından çözebilir. Zaten veriyoruz bunu. Parabolün durumuna göre tepe noktasının neye karşılık geldiğini söylüyoruz çocuklara" açıklamasını yapmıştır. M4 öğretmen açıklaması ile öğrencilerin "parabol olduğu düşüme" boyutu ile birlikte "tepe noktası olduğunu anlama" alt boyutunu çözüm sürecinde önemli nokta olarak belirlememiştir.

Tepe noktasını elde etme: Tepe noktasının koordinatlarını bulma durumlarını temsil etmektedir.

M1, “Tepe noktasının bir de denklemi vardır” diyerek Şekil 4.39’da görüldüğü üzere çözümü yapmıştır.



Şekil 4.39. M1’in “tepe noktasını elde etme” alt boyutuna ait çözümü

Türev yardımıyla düşünme: Problemin türev problemi olduğunu anlama ve türev alma durumlarını temsil etmektedir. “türev yardımıyla düşünme” boyutu “türev alma” ve “geniş maksimum ilişkisini kurma” olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M2, “Aslında bu bir türev sorusu. Türev bilen bir öğrenci bu problemi o yolla yapacaktır.” açıklamasını yapmıştır. M2 öğretmen problemin türev problemi olduğunu “Çıkan ifade ikinci dereceden bir fonksiyon olmasaydı tepe noktasından yapılamazdı. Türevden yapılırdı.” diyerek vurgulamıştır.

M3 problemin çözümünde türev kullanmanın öncelikli bir yol olduğunu öğrencilerin bu yolu görebileceğini belirtmiştir. M3, “Benim de bu sorularda önceliğim türevden yapmak oluyor.” açıklamasını yapmıştır. M3, “Eğer türev görmemişse parabolde yapar. Ama türev konusunu görmüş bir öğrenci bunu direk oradan yapar.” diyerek “türev yardımıyla düşünme” boyutunu problem çözme sürecinde AN olarak belirlememiştir.

M4, problemin çözümünde türevden yararlanabileceğini problemi ilk okuduğu zaman “Benim hemen aklıma en geniş alanlı olması için türev aklıma gelir.” açıklamasıyla belirtmiştir.

M5, “öğrenci türevden yapabilir.” açıklamasını yapmıştır.

Türev alma: Türev alma kuralları bilme ve uygulama durumlarını ifade etmektedir.

M1 türev bilgisi olan bir öğrencinin bu problemi çözebileceğini belirtmiştir. M1’in çözümü şekil 4.40’da verilmiştir.

$$y' = 72 - 8x$$

$$x = 9$$

Şekil 4.40. M1'in "türev alma" alt boyutuna ait çözümü

M3 öğretmen "Bundan sonra türev alırım ve sıfıra eşitlerim" açıklamasını yapmıştır.

Geniş maksimum ilişkisini kurma: Problemde geçen "en geniş" kelimesinin "maksimum" kelimesini çağrıştırmaları durumunu temsil etmektedir.

M1 "geniş" kelimesinin "büyük" veya "maksimum" olarak düşünmenin problemin çözümünde bir ipucu olabileceğini belirtmiştir. Çözümde olmazsa olmaz olmayan fakat çözüm yolunda ilerleyebilmeyi sağlayabilecek bir durum olarak ifade etmiştir. M1 çalışma kâğıdında bu durumu Şekil 4.41'de görüldüğü gibi yazmıştır.

geniş → maksimum

Şekil 4.41. M1'in "geniş maksimum ilişkisinin kurma" alt boyutuna ait çözümü

M1 öğretmen "Maksimum, minimum, ekstremum, dönüm gibi yedi sekiz kelime var. Bu kelimelerin geçtiği soruların türev sorusu olduğunu bilir" diyerek "geniş maksimum ilişkisini kurma" ve "türev yardımıyla düşünme" kategorisini arasında ilişki kurmuştur. Bu durum Şekil 4.42'de verilmiştir.

Türev (max)
min.
ek.

Şekil 4.42. M1'in "türev yardımıyla düşünme" kategorisi ile ilişkilendirme yapması

M2, "Bu problem maksimum minimum problemi" açıklamasını yapmıştır.

Alanı iki değişken cinsinden yazma: Problemde verilen dikdörtgenin alanı ifadesinin x ve y cinsinden yazılmasıdır. "alanı iki değişken cinsinden yazma" alt kategorisi "kare gibi düşünme" ve "değişimi izleme" olarak iki boyutta ele alınmıştır.

Kare gibi düşünme: Toplamları sabit olan iki doğal sayı birbirine en uzak seçildiğinde çarpımları en küçük değerini alırken birbirine en yakın seçildiğinde çarpımları en büyük değerini alma durumunu temsil etmektedir.

M1'in problemin çözüme sürecinde önerdiği üçüncü yol olan “kare gibi düşünme” boyutu toplamaları sabit olan sayıların çarpımının en büyük olması özelliği öğrencinin parabol veya türev bilgisi olmadığı zaman kullanabileceği bir yol olarak belirtmiştir. M1'in çözümü Şekil 4.43'de görüldüğü üzere verilmiştir.

$$36 - 2x + (2x) = 36$$

Diagram: A square with side length 'a' and a smaller square of side length 'b' attached to one side.

$$a + b = 36$$

$$a \cdot b = 18 \cdot 18 = 324$$

$$x = 9$$

Şekil 4.43. M1'in “kare gibi düşünme” boyutuna ait çözümü

M1, “Bir çözüm daha var o da şu. Normal şartlarda toplamaları sabit olan iki veriden çarpımları ile ilgili bir şey istendiğinde sayılar birbirinden uzaklaşır ise çarpım küçülür yaklaşır ise çarpım büyür. Bunun 18 değerinin 18 olması durumunda da x 'i 9 elde edebiliriz.” diyerek “kare gibi düşünme” boyutunu açıklamıştır.

Değişimi izleme: Çarpımları sabit olan iki doğal sayı; birbirine en uzak seçildiğinde toplamaları en büyük değerini alır, birbirine en yakın seçildiğinde toplamaları en küçük değerini alma durumunu temsil etmektedir.

M1 öğrencinin alan ifadesini x ve y cinsinden yazdığı durum için ise x 'e verdiği değerlere göre y 'deki değişimi izleyerek maksimum değere ulaştığı noktayı tespit edebileceğini belirtmiştir.

Bu durumla ilgili öğretmenin çözümü Şekil 4.44'te verilmiştir.

Şekil 4.44. M1'in “değişimi izleme” alt boyutuna ait çözümü

M5 “değişimi izleme” alt boyutunun problemin çözümünde bir yol olabileceğini ifade etmiştir. Problemden alan ifadesini en büyük yapan verilebilecek x ve y değerlerinin karşılaştırılması ile problemin sonucuna ulaşılabileceğini ifade etmiştir. Bu durumu “Mutfağın en geniş alanlı olması için en fazla olması için değer verecek.” açıklaması ile vurgulamıştır. M5 öğretmenin bu durumu ifade eden çözümleri Şekil 4.45'te verilmiştir.

Kenarlarla ilgili değeri vermediğini, çevre formülünü kullanıp

$$12x + 2y = 72$$

$$6x + y = 36$$

$$6x = 36 - y$$

$$x = 6 - \frac{y}{6}$$

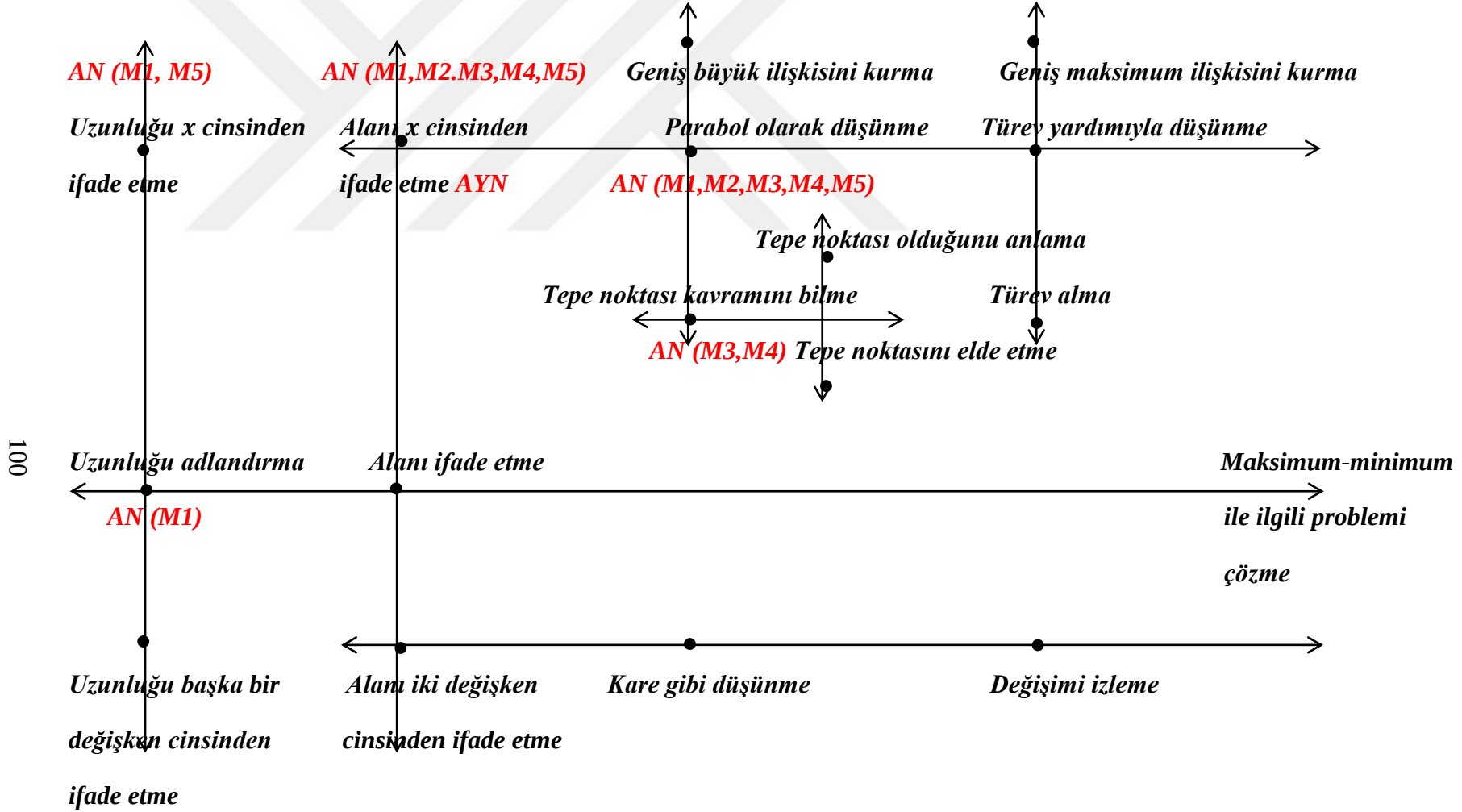
Matematik Alanı = $\frac{2x \cdot y}{2} = 2 \cdot 18 \cdot 3$
 en fazla = $6 \cdot 18 = 108$

$y = 6$	$x = 5$
$y = 12$	$x = 4$
$y = 18$	$x = 3$

Şekil 4.45. M5'in "değişimi izleme" alt boyutuna ait çözümü

M5 y'ye değer verirken "y ye en fazla verebileceğimiz değer nedir" açıklaması ile x değerini elde etmeye çalışmıştır.

Öğretmenlerin hepsi "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. Matematik öğretmenlerin maksimum-minimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.46'da belirtilmiştir.



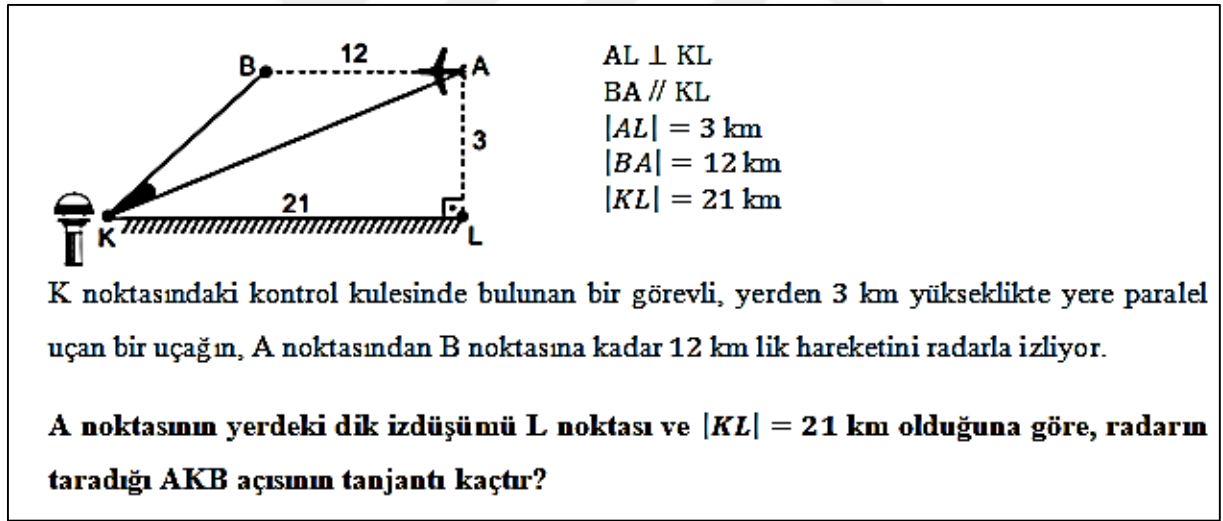
Şekil 4.46. Matematik öğretmenlerinin maksimum problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategorilerin, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.3. Trigonometri ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2006 yılında ÖSS sınavında sorulmuş olan trigonometri ile ilgili probleminin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve AN'leri belirlenmiştir. Araştırmaya katılan matematik öğretmenlerin hiçbiri çözümü görmek istememiştir. Katılımcı öğretmenlerden M1, M2, M3 ve M5 problemin çözüm sürecinde aynı yolu izlemiştir. M4 ise problemin çözümünü farklı bir şekilde yapmıştır.

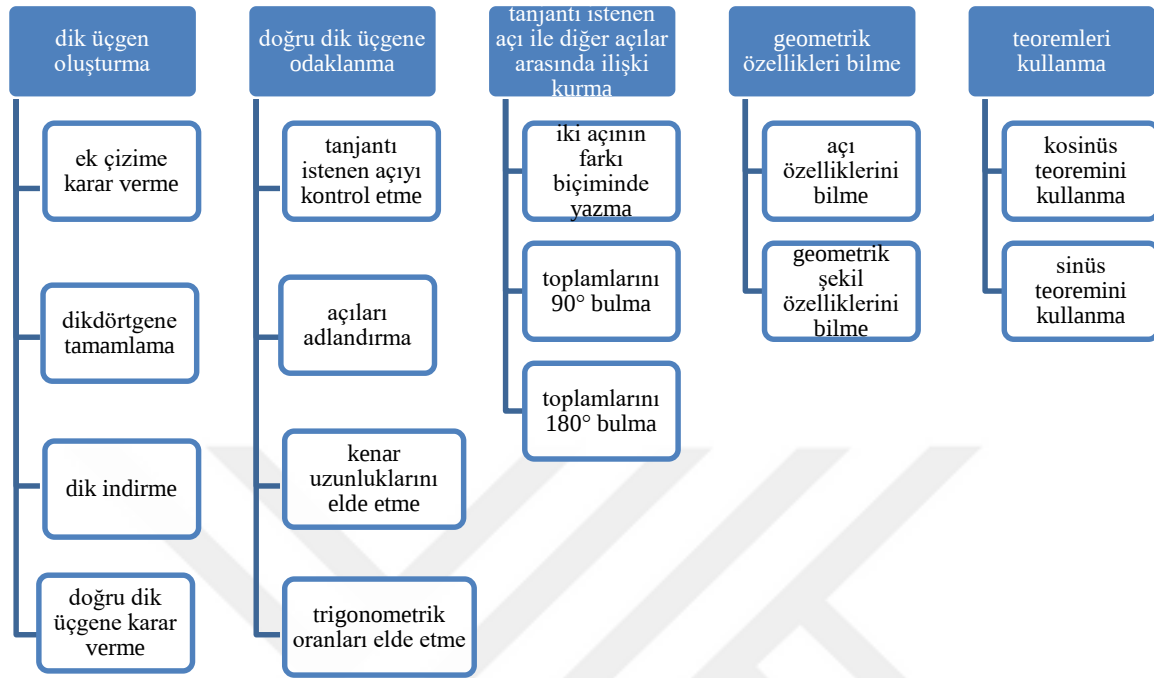
Katılımcı öğretmenlerin tamamı problem çözme sürecinde AN'leri belirlemiştir. Öğretmenlerin çözüm süreci incelendiğinde AN'nin AYN olma durumu ile örnek durumlara da rastlanmıştır. AN'nin AYN olma durumu çözüm sürecinin başında olabildiği gibi bu örnekte olduğu gibi çözümü inşa etmede diğer evrelerde de karşımıza çıkabilir. M1'in AN'nin AYN olması ile ilgili açıklaması ilgili kategoride belirtilmiştir.

Görüşmede yer alan trigonometri ile ilgili problem Şekil 4.47'de verilmiştir.



Şekil 4.47. Trigonometri ile ilgili problem

Trigonometri ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.48'de verilmiştir.



Şekil 4.48. Trigonometri ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

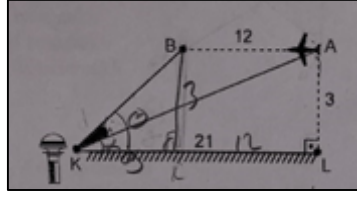
4.1.3.1. Matematik Öğretmenlerinin Trigonometri ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Dik üçgen oluşturma: Tanjantı istenen açı ile bağlantılı olabilecek dik üçgen ya da dik üçgenleri oluşturma durumlarını temsil etmektedir. “Dik üçgen oluşturma” kategorisi “ek çizime karar verme”, “dik indirme”, “dikdörtgene tamamlama”, “doğru dik üçgene karar verme” olarak dört alt kategoride ele alınmıştır.

M1, “Bu açının tanjantını bulması için bize bir kere dik üçgen lazım. En başta temel olarak” açıklamasını yapmıştır. M1 öğretmen bu kategoriye anahtar nokta olarak tanımlamıştır.

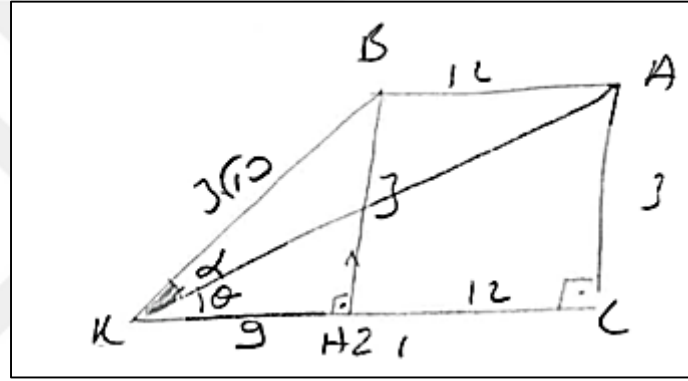
M2, “Bu tür soruları bilinmeyen bir dik üçgen yardımıyla ifade etmek olduğunu düşünüyorum.” açıklamasını yapmıştır. M2 bu kategoriye çözüm sürecinde anahtar nokta olarak belirlemiştir.

M3, “gerekli dik üçgenleri çizmek” açıklamasıyla “dik üçgen oluşturma” kategorisini problem çözme sürecinde anahtar nokta olarak belirlemiştir. M3’ün “dik üçgen oluşturma” kategorisi ile ilgili çözümü Şekil 4.49.’da verilmiştir.



Şekil 4.49. M3 öğretmenin “dik üçgen oluşturma” kategorisine ait çözümü

M5’in “Bir kere o açının tanjantını bulabilmesi için dik üçgene ihtiyacı olduğunu bilmeli. Çocuğun bir dik üçgen oluşturmaya lazım.” açıklaması “dik üçgen oluşturma” kategorisi altında değerlendirilmiştir. M5 öğretmenin “dik üçgen oluşturma” kategorisi ile ilgili çözümü Şekil 4.50.’de verilmiştir.



Şekil 4.50. M5’in öğretmenin “dik üçgen oluşturma” kategorisine ait çözümü

M5 bu kategoriye anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Ek çizime karar verme: Problemin çözümünün yapılabilmesi için şekil üstünde yapabileceği tüm ek çizimleri yapma durumlarını temsil etmektedir. M1, “Bu problem için veya trigonometri problemleri için cevaplayabilirim bu soruyu. Öncelikle açısı istenen değeri bir dik üçgenin içerisinde görebiliyor mu? Burada mümkün olmadı. Yani ek çizim yapmamız istendi.” açıklamasını yapmıştır.

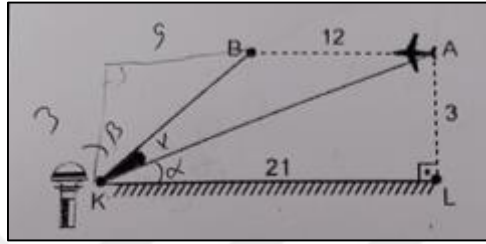
M1 açıklamasını yaptıktan sonra şekil üstünde ek çizimler yapmıştır. Ek çizimi yapma amacını ise tanjantı istenen açı ile bağlantılar kurabileceği bir dik üçgen oluşturmak olduğunu belirtmiştir.

Dikdörtgene tamamlama: Dik yamuğu ek çizim yaparak dikdörtgene tamamlama durumunu temsil etmektedir.

M1 “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisi ile problemin çözümüne devam etme kararı almıştır.

M1, “*Bu tür yamuk sorularında dikdörtgene tamamlamak çoğu zaman fayda sağlar*” açıklamasını yapmıştır.

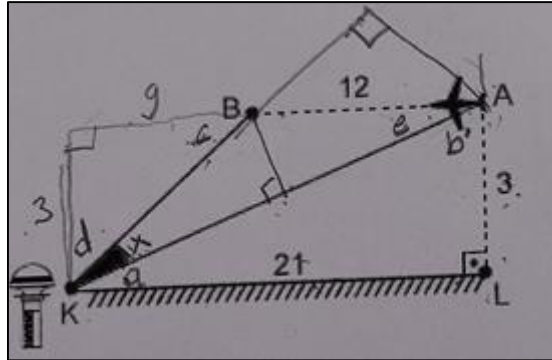
M2 de “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisi ile problemin çözümüne devam etmiştir. M2 öğretmenin “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisi ile yaptığı çözüm Şekil 4.51’de belirtilmiştir.



Şekil 4.51. M2’in “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisine ait çözümü

Dik indirme: Dik üçgen oluşturma amacı ile yapılan çizim durumlarını temsil etmektedir.

M1’in “dik indirme” alt kategorisi ile ilgili çözümü Şekil 4.52’de görüldüğü şekilde verilmiştir.



Şekil 4.52. M1’in “dik indirme” alt kategorisine ait çözümü

M1 üç tane ek çizim yapmıştır. M1’in yaptığı ek çizimler “dik indirme” alt kategorisi altında değerlendirilmiştir.

Doğru dik üçgene karar verme: Tanjantı istenen açı ile ilişki kurulabilen açıların trigonometrik değerleri elde edilebileceği dik üçgeni tespit etme durumlarını temsil etmektedir.

M1, “*Trigonometri sorularında açısı istenen değeri bir dik üçgen içinde göremediği için uzunlukları bilinen üçgenlerden faydalanacak.*” diyerek problem çözümüne önemli gördüğü noktayı açıklamıştır.

M3’ün “*gerekli dik üçgenleri çizmek*” açıklamasında geçen dik üçgen için “gerekli” nitelendirmesi “doğru dik üçgene karar verme” alt kategorisi ile ilişkilendirilmiştir.

Doğru dik üçgene odaklanma: İstenen açının tanjantını bulmak amacı ile bu açı ile ilişkili kurulabilen kenar uzunlukları bulunabilen dik üçgenlere odaklanma durumunu temsil etmektedir. “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisi “açıları adlandırma”, “kenar uzunluklarını elde etme”, “tanjantı istenen açıyı kontrol etme”, “trigonometrik oranları elde etme” olarak dört alt kategoride ele alınmıştır.

M1 üç defa ek çizim yapmıştır. Bu çizimler “dik indirme” kategorisi ile değerlendirmiştir. Burada amacının “*Öncelikle açısı istenen değeri bir dik üçgenin içerisinde görebiliyor mu?*” diyerek “dik üçgen oluşturma” kategorisi ile açıklamıştır. Daha sonra M1 öğretmen “dikdörtgene tamamlama” ile kenar uzunlukları bilinen doğru dik üçgenlere odaklanmıştır. M1 öğretmenin çözümde ilerlediği bu adım “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M1 öğretmen dik üçgenlerin kenar uzunluklarını yerleştirmiştir. Daha sonra bütün açıları adlandırmıştır. Alt kategorilerin oluşmasında M1 öğretmenin bu duruma ışık tutan aşağıdaki açıklaması yol gösterici olmuştur.

“Dik üçgenlerde açılara harf vermelidir. Trigonometri sorularında açısı istenen değeri bir dik üçgen içinde göremediği için uzunlukları bilinen üçgenlerden faydalanacak.”

M1, “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2, “*Bu tür soruları bilinmeyeni bir dik üçgen yardımıyla ifade etmek olduğunu düşünüyorum.*” diyerek problemin çözümünde “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. M2 açıklamasında tanjantı istenen açıyı elde etmede yararlanılabilecek trigonometrik oranları bulunabilen dik üçgeni vurgulamıştır.

M5’in “*tan θ da ΔAKC dik üçgeninde trigonometrik oranlar ile elde edilmeli.*” açıklaması ve “ *ΔBKH dik üçgeninde $\tan(\alpha + \theta)$ toplam fark formülünü uygulayabilmeli.*” açıklaması ile tanjant değeri istenen açı ile ilişki kurduğu açıların trigonometrik değerlerini bulabildiği dik üçgenlere dikkat çekmiştir. Dolayısıyla M5, “doğru dik üçgenlere odaklanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Açıları adlandırma: Şekil üstünde bilinmeyen açı ölçülerinin harflendirme yapılması durumunu temsil etmektedir.

M1, “sonra rastgele açıları harflendirme yapmalıyız” açıklamasını yapmıştır. M1 “dik üçgenlerde açılara harf vermelidir.” diyerek “açıları adlandırma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2 özellikle açıları adlandırma yapmanın önemine değinerek öğrencilerin problemleri yapamamalarında en büyük eksikliğin bu olduğunu düşünmektedir. Doğru dik üçgene odaklanma kategorisi altında ele alınan açıları adlandırma alt kategorisi M2 öğretmen için problemin önemli noktalarından birisidir. M2 öğretmenin problemin çözümünde önemli nokta olmasına dair açıklaması şöyledir:

“Öncelikle öğrenciler geometri sorularında isimlendirmeyi yapmaları gerekmektedir. Bu en önemli noktalardan biridir.”

M2 “açıları adlandırma” kategorisini sadece trigonometri problemi için değil bütün geometri problemi için genelleyerek AN olarak belirlemiştir.

M3, B noktasından KL doğrusuna dik indirip, $m(BKL) = \theta$, $m(\widehat{AKL}) = \alpha$ olarak ifade etmiştir. M3’ün çözümü “açıları adlandırma” kategorisi altında değerlendirilmiştir.

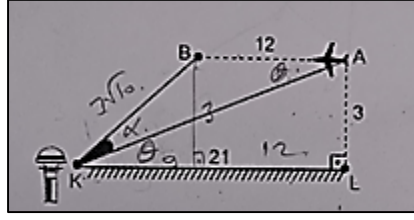
Tanjantı istenen açıyı kontrol etme: Tanjantı istenen açının trigonometrik oranları bulunabilen bir dik üçgen içinde olduğunu kontrol etme durumunu temsil etmektedir.

M1, “Gördüğü bütün dik üçgenlerdeki açılara harf verirse, hedefe ulaşmak için istenen açıya (x olarak gösterdi) bakacağız.” açıklamasını yapmıştır.

M1, bu aşamadan sonra tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında bağlantılar kurmaya çalışmıştır. Bu bağlantıları dik üçgen yardımıyla trigonometrik oranları bulunabilen açıları göz önünde tutarak yapmıştır.

Kenar uzunluklarını elde etme: Dik üçgende bilinmeyen kenar uzunluklarını hesaplama ve yerleştirme durumlarını temsil etmektedir.

M4’ün “ $|AK|$ yı dik üçgen yardımıyla hesaplarız.” açıklaması “kenar uzunluklarını elde etme” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M4’ün “kenar uzunluklarını elde etme” kategorisi ile ilgili yaptığı çözümler Şekil 4.53’te verilmiştir.



Şekil 4.53. M4'ün “kenar uzunluklarını elde etme” alt kategorisine ait çözümü

Trigonometrik değerleri bulma: Dik üçgen yardımıyla açıların trigonometrik oranlarını elde etme durumlarını temsil etmektedir.

M3 dik üçgenler yardımı ile $\tan \theta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ve $\tan \alpha = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ değerlerini elde etmiştir.

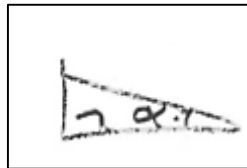
M3'ün çalışma kâğıdına yaptığı çözümler Şekil 4.54'te görülmektedir.

Şekil 4.54. M3'ün “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü

M3, “*tanjant kavramını bilmek*” açıklamasıyla “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

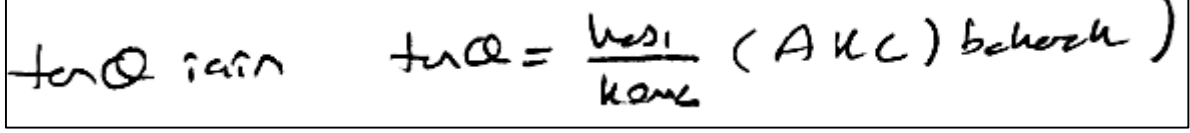
M4'ün “*sin θ neydi. $\frac{3}{|AK|}$ idi*” açıklaması “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir.

M4'ün “*sin α yı bulacağım. Dik üçgen yardımıyla tan α yı yakalamış olacağım*” açıklaması “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisi altında değerlendirilmiştir. Son olarak bu açıklama ile birlikte Şekil 4.55'te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına dik üçgen çizimi yaparak çözümünü tamamlamıştır.



Şekil 4.55. M4'ün “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü

M5'in "*tan θ da dik üçgende trigonometrik oranlar ile elde ediliyor.*" açıklaması "trigonometrik değerleri bulma" kategorisi altında değerlendirilmiştir. M5'in çözümü Şekil 4.56'da görüldüğü gibi verilmiştir.



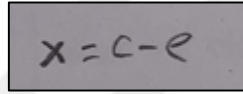
The image shows a handwritten formula in a box: $\tan \theta \text{ için } \tan \theta = \frac{\text{yası}}{\text{kone}} \text{ (AKC) beheren}$. The text is written in a cursive, handwritten style.

Şekil 4.56. M5'in "trigonometrik oranları elde etme" alt kategorisine ait çözümü

Tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma: Tanjantı istenen açı ile dik üçgenler yardımıyla trigonometrik değerleri bulunabilen açılar arasındaki bağıntıların oluşturulmasını temsil etmektedir.

M1'in "*x tek başına bir dik üçgen içine dâhil olamayacağı için bu x'i başka dik üçgenlerdeki açılar yardımıyla ifade edilebilir.*" açıklamasını yapmıştır.

M1 tanjantı istenen açıyı yani x olarak adlandırdığı açıyı Şekil 4.57'de görüldüğü gibi yazmıştır.



The image shows a handwritten equation in a box: $x = C - E$. The text is written in a cursive, handwritten style.

Şekil 4.57. M1'in "tanjantı istenen açı ile diğer açıları ilişki kurma" kategorisine ait çözümü

M1 bu kategorinin problemin çözümünde anahtar bir rol oynadığını belirtmiştir. Bu kategori ile birçok bağlantının kurulabileceğini belirtilmiştir. Bu bağlantılar alt kategori olarak ele alınmıştır. M1 öğretmen bu anahtar noktanın problemin sonucuna ulaştırabilecek farklı çözüm yollarına ayrıldığını belirtmiştir. Örneğin iki açının toplamı biçiminde yazma kategorisini takip eden bir öğrenci problemin çözümünde tanjantın toplam formülünü, iki açının farkı biçiminde yazan bir öğrenci tanjantın fark formülünü kullanabileceğini, toplamlarını 180° veya 90° elde ettiği durumlarda bölgelere göre dönüşüm yapabileceğini söylemiştir.

M1'in "*Üçgende açılar arasındaki ilişkileri de bilmeli. Akrabalık ilişkisi gibi diyelim. Şu açıların toplamı 90° dir veya şu iki açının toplamı diğer açıyı verir, farkı şunu verir, üçgenin iç açıları toplamı 180° bilmelidir.*" açıklaması ile "tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma" kategorisi "iki açının farkı biçiminde yazma", "toplamlarını 90° bulma" "toplamlarını 180° bulma" olarak üç alt kategoride ele alınmıştır. Bu durum Şekil 4.58'de gösterilmiştir.



Şekil 4.58. AN'nin farklı çözüm yollarına ayrıldığı durum

M5'in "Bu açıyı iki açının toplamı veya farkı biçiminde yazalım" açıklaması "tanjantı istenen açının diğer açılarla ilişki kurma" kategorisi ile ilişkilendirilmiştir. M5, "ama toplama ile ama fark ile ya da paralellliği kullanarak bir dik üçgene taşıyabilmeyi bilmeli" açıklaması ile bu kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

İki açının farkı biçiminde yazma: Tanjantı istenen açıyı iki açının farkı biçiminde yazma durumunu temsil etmektedir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde bu açılar trigonometrik oranlarının dik üçgen yardımıyla bulunması gerekliliği aranmıştır. "İki açının farkı biçiminde yazma" alt kategorisi "tanjantın toplam formülünü bilme" ve "tanjantın fark formülünü bilme" olarak iki boyutta ele alınmıştır. Tanjantın toplam ve fark formülünü bilme ve uygulama durumunu ifade etmektedir.

M3, "istenen açı iki tane dik üçgene ait açının farkı cinsinden yazmak önemli" açıklamasıyla tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma kategorisini problemin çözümünde AN olarak belirlemiştir.

M3 istenen açının dik üçgen yardımıyla tanjant değerleri bulunabilen iki açının farkı olarak yazılabildiğini ifade etmiştir. M3'ün çözümü Şekil 4.59'da verilmiştir.

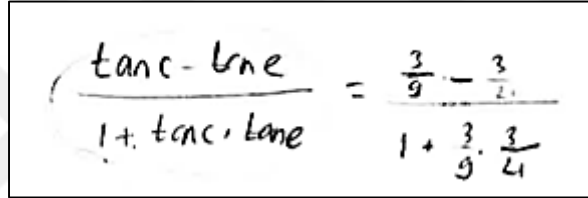
Şekil 4.59. M3'ün "iki açının farkı biçiminde yazma" alt kategorisine ait çözümü

M5, “ $\tan(\alpha + \theta) = \frac{3}{9}$ olduğu biliniyor.” açıklaması ile tanjant değeri istenen açığı iki açının farkı biçiminde düşünmüştür. M5’in bu açıklaması “iki açının farkı biçiminde yazma” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir.

M1 toplam veya fark formüllerinin çözüm için bir anahtar nokta olamayacağını belirtmiştir. M1’in bu durumu ortaya çıkaran açıklaması şöyledir:

“Bu soru için önemli başka nokta yok. Toplam fark formülü artık öğrenci zaten çok fazla örnek çözdüğü için ezberlemiş oluyor. Yani zaten bu formülden kurtulma şansı yok. Bunu ezberlemek ne sağlar. Şöyle diyelim. Üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180° olduğunu da öğrenci ilk başta öğrenci bilmiyordu. Öğrenci 4. sınıfta bunu öğrendikten sonra ancak bu belki 5, 6, 7. sınıfta oturuyor bu bilgi. Aynı şekilde tanjantın toplam ve fark formüllerinin de hemen oturması gerekmiyor. Biraz geç oluyor bu süreç. Araba kullanmak gibi bazıları erken öğreniyor bazıları geç öğreniyor.”

M1 buradan Şekil 4.60’ta görüldüğü gibi tanjantın fark formülünü kullanarak problemin sonucuna ulaşmıştır.

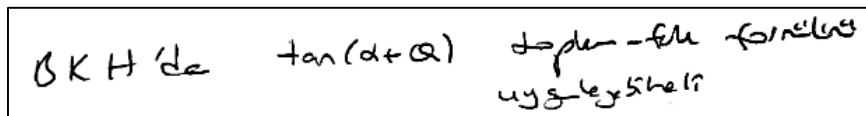

$$\frac{\tan c - \tan e}{1 + \tan c \cdot \tan e} = \frac{\frac{3}{9} - \frac{3}{21}}{1 + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{21}}$$

Şekil 4.60. M1’in “tanjantın fark formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

M2, “Tabi formülleri de bilmesi gerekiyor.” açıklaması ile “tanjantın toplam formülünü bilme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M3, “Daha sonra istenen açının tanjantı formülde yerine yazılarak bulunur.” açıklamasıyla problem çözme sürecini sonlandırmıştır. M3, “tanjantın fark formülünü bilmek önemli” açıklamasıyla “tanjantın fark formülünü bilme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

Son olarak problem çözme sürecinin son aşamasında M5’in “toplam-fark formülünü uygulayabilmeli” açıklaması “tanjantın toplam formülünü bilme” ve “tanjantın fark formülünü bilme” boyutları ile değerlendirilmiştir. M5 çalışma kâğıdına bu durumu Şekil 4.61’de görüldüğü şekilde yazmıştır.

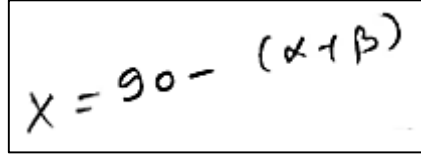


BKH'de $\tan(\alpha + \theta)$ toplam-fark formülü uygulayabilmeli

Şekil 4.61. M5’in “tanjantın toplam formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

Toplamlarını 90° bulma: Tanjantı istenen açı ile trigonometrik oranları bulunabilen açılar toplamalarının 90° elde edilmesi durumunu ifade etmektedir.

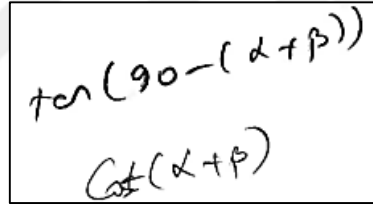
M2, “Burada $x = 90 - (\alpha + \beta)$ denilir” açıklaması “toplamlarını 90° bulma” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M2, Şekil 4.62’de görüldüğü gibi çözümü çalışma kâğıdına yazmıştır.


$$x = 90 - (\alpha + \beta)$$

Şekil 4.62. M2’nin “toplamlarını 90° bulma” alt kategorisine ait çözümü

Tümle açıları kullanma: Tümle açıların trigonometrik oranlarının eşit olma durumunu temsil etmektedir.

M2’nin açıklamanın ardından “dönüşüm uygulanır” diyerek ile Şekil 4.63’te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına çözümünü yazmıştır.


$$\tan(90 - (\alpha + \beta)) = \cot(\alpha + \beta)$$

Şekil 4.63. M2’nin “tümle açıları kullanma” boyutuna ait çözümü

Toplamlarını 180° bulma: Tanjantı istenen açı ile trigonometrik oranları bulunabilen açılar toplamalarının 180° elde edilmesi durumunu temsil etmektedir.

M1’in “Üçgendeki açılar arasındaki ilişkileri de bilmeli. Üçgenin iç açıları toplamı 180° bilmelidir” açıklaması “toplamlarını 180° bulma” kategorisi altında değerlendirilmiştir.

Geometrik özellikleri bilme: Bu kategori ile açılar, üçgenler ve dörtgenler ile ilgili özellikleri bilme durumlarını temsil etmektedir. “açı özelliklerini bilme” ve “şekil özelliklerini bilme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M4’ün “geometri bilgisinin olması lazım” açıklaması ile problemin çözüm sürecinde AN olarak belirlediği “geometrik özellikleri bilme” kategorisi elde edilmiştir.

Açı özelliklerini bilme: Açı ile ilgili özelliklerin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

M4'ün “*paralellikte açıların özellikleri, iç ters açıları yakalaması lazım*” açıklaması “açıların özelliklerini bilme” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir. M4 açıları adlandırma yaptıktan sonra paralellikten açıların eşit olacağını belirtmiştir.

Geometrik şekil özelliklerini bilme: Geometrik şekiller ile ilgili özelliklerin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

M4'ün “*yamuk özellikleri, kare özelliklerini bilmesi lazım*” açıklaması ile de “geometrik şekil özelliklerini bilme” kategorisi oluşmuştur.

Teoremleri kullanma: Teoremleri hangi durumlarda uygulayacağını bilmesini ve uygulamanın doğru yapılma durumlarını temsil etmektedir. “*kosinüs teoremini kullanma*” ve “*sinüs teoremini kullanma*” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M4'ün “*Kosinüs ve sinüs teoremlerini hangi şartlarda kullanacağını bilmesi lazım.*” açıklaması ile “teoremleri kullanma” kategorisi oluşmuştur. Buradan da alt kategori olarak “sinüs teoremini kullanma” ve “kosinüs teoremini kullanma” kategorileri oluşturulmuştur.

Kosinüs teoremini kullanma: Kosinüs teoremini bilme ve uygulama durumunu temsil etmektedir.

M4'ün “*kosinüs teoremini kullanacağım*” açıklaması ile “kosinüs teoremini kullanma” alt kategorisi oluşturulmuştur.

M4 amacını “*sonra α açısının bulunduğu üçgendeki bütün kenar uzunluklarını bulup kosinüs teoremini kullanacağım*” şeklinde ifade etmiştir. M4 bu açıklaması ile “kosinüs teoremini kullanma” ve “kenar uzunluklarını elde etme” kategorileri arasında ilişki kurduğu söylenebilir.

Sinüs teoremini kullanma: Sinüs teoremini bilme ve uygulama durumunu temsil etmektedir.

M4, “*sinüs teoremi de kullanabilir*” açıklamasıyla Şekil 4.64'de görüldüğü gibi teoremi uygulamıştır. Öğretmenin açıklamasına göre “sinüs teoremini kullanma” alt kategorisi oluşturulmuştur.

$$\frac{3\sqrt{10}}{\sin \theta} = \frac{12}{\sin \alpha}$$

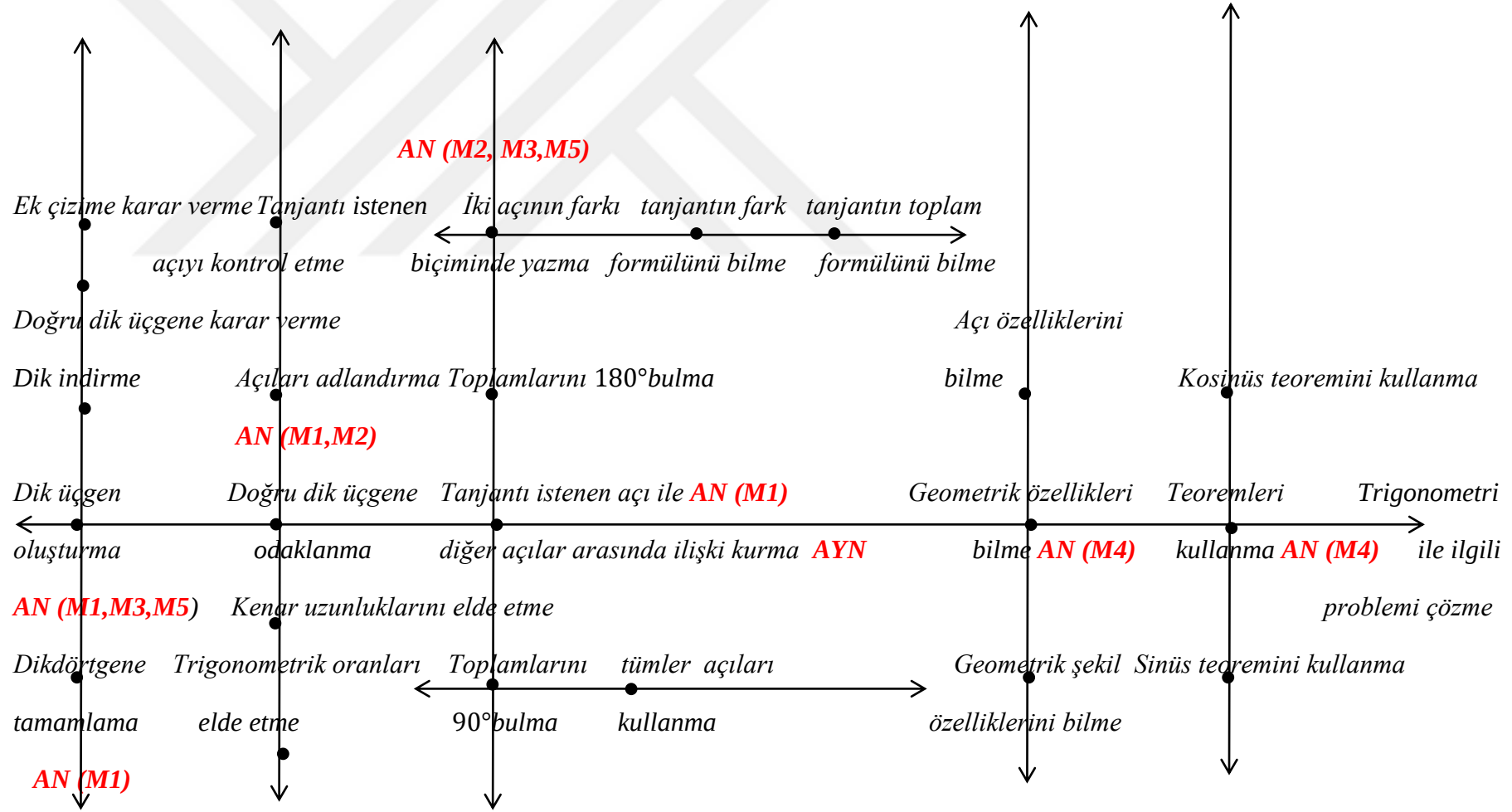
$$\frac{3\sqrt{10}}{\frac{3}{|AK|}} = \frac{12}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \dots$$

Şekil 4.64. M4’ün “sinüs teoremini kullanma” alt kategorisine ait çözümü

M1,M2,M3,M5 problem çözme sürecinde “dik üçgen oluşturma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2 “açıları adlandırma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M5 “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3, M5 “iki açının farkı biçiminde yazma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2, M3, M5 “tanjantın toplam formülünü bilme” ve “tanjantın fark formülünü bilme” kategorilerini AN olarak belirlemiştir. M3 “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1 “doğru dik üçgene karar verme” ve “doğru dik üçgene odaklanma” kategorilerinin AN olarak belirlemiştir. M4 diğer öğretmenlerden farklı bir çözüm yolu tercih etmiştir. Dolayısıyla M4 “geometrik özellikleri bilme” ve “teoremleri kullanma” kategorilerini AN olarak belirlemiştir.

Matematik öğretmenlerinin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.65’te belirtilmiştir.



Şekil 4.65. Matematik öğretmenlerinin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.4. Bölünebilme ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2007 yılında ÖSS sınavında sorulmuş olan bu problemin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve çözüm sürecindeki AN'leri belirlenmiştir. M4 ve M5'e çözümden bazı aşamalar gösterilmiştir. Daha sonra öğretmenler çözüm sürecini tamamlamış ve AN'leri belirlemişlerdir. Bölünebilme ile ilgili problem Şekil 4.66'da verilmiştir.

Bir tüccar, tanesi 45 TL den belirli sayıda gömlek satın alıyor. Kendisine verilen faturada, ödenen miktarın ilk ve son rakamları silik çıktığı için bu tutarın yalnızca ■92■ biçiminde dört basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor.

Tüccarın tek sayıda gömlek aldığı bilindiğine göre, silik çıkan iki rakamın toplamı kaçtır?

Şekil 4.66. Bölünebilme ile ilgili problem

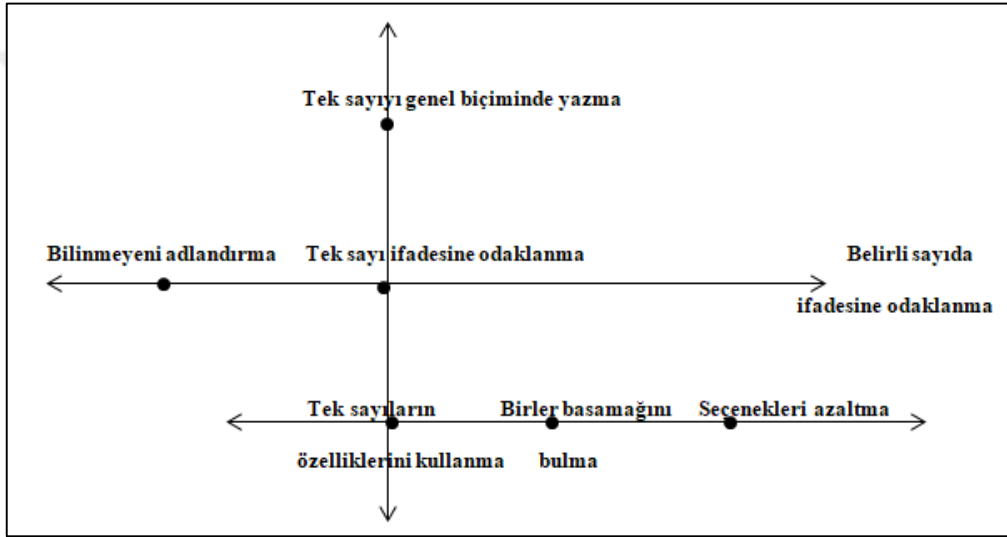
Bölünebilme ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.67'de verilmiştir.



Şekil 4.67. Bölünebilme ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.1.4.1. Matematik Öğretmenlerinin Bölünebilme ile İlgili Problemini Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Belirli sayıda ifadesine odaklanma: Problemden geçen belirli ifadesinin bilinmeyişi işaret ettiğini anlama durumlarını temsil etmektedir. “belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisi “bilinmeyişi adlandırma” ve “tek sayı ifadesine odaklanma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır. “tek sayı ifadesine odaklanma” alt kategorisi “tek sayıyı genel biçimde yazma” ve “tek sayıların özelliklerini kullanma” olarak iki boyutta ele alınmıştır. “Belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisine ait alt kategorileri, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.68’de belirtilmiştir.



Şekil 4.68. “belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisine ait alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

M1 bu tür problemlerde “belirli sayıda” ifadesinin önemli olduğunu söylemiştir. M1 öğretmen “Sayı belli değil. Belirli olan altı çizilmelidir” diyerek Şekil 4.69’da görüldüğü gibi “belirli sayıda” kelimesinin altını çizmiştir. M1’in açıklaması “belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisi ile değerlendirilmiştir.

Bir tüccar, tanesi 45 TL den belirli sayıda gömlek satın alıyor. Kendisine verilen faturada, ödenen miktarın ilk ve son rakamları silik çıktığı için bu tutarın yalnızca .92. biçiminde dört basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor. Tüccarın tek sayıda gömlek aldığı bilindiğine göre, silik çıkan iki rakamın toplamı kaçtır?

4.69. M1’in “belirli sayıda ifadesine odaklanma” kategorisine ait çözümü

Bilinmeyeni adlandırma: Problemde yer alan gömlek sayısını harflendirme yapma durumunu temsil etmektedir.

M1 gömlek sayısını n ile adlandırmıştır.

M2 gömlek sayısını ilk önce x ile adlandırmıştır.

M3 gömlek sayısını y ile adlandırmıştır.

M4 gömlek sayısını a ile adlandırmıştır.

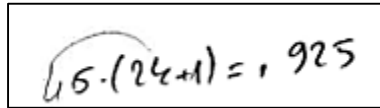
M5 gömlek sayısının A ile adlandırmıştır.

Tek sayı ifadesine odaklanma: Problemde gömlek sayısı ile verilen bilgiye dikkat etme durumunu temsil etmektedir. “Tek sayı ifadesine odaklanma” alt kategorisi “tek sayıyı genel biçiminde yazma”, “tek sayıların özelliğini kullanma” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M2 öğretmenin “*Tek sayının üzerinde durmadık*” açıklaması “tek sayıya odaklanma” kategorisi altında değerlendirilmiştir.

Tek sayıyı genel biçiminde yazma: Tek sayının genel biçimde ifade edilme durumunu temsil etmektedir.

M2’nin gömlek sayısı tek sayı olduğu için x yerine $2k + 1$ yazması “tek sayı biçiminde yazma” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir. M2 öğretmenin “*Burada önemli nokta x tek sayısını ifade etmektir. Yoksa değer vermem gerekirdi*” açıklaması ile “tek sayıyı genel biçiminde yazma” boyutunu problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. M2’nin çözümü Şekil 4.70’te görüldüğü gibidir.


$$65 \cdot (2k+1) = 925$$

Şekil 4.70. M2’nin “tek sayı biçiminde yazma” boyutuna ait çözümü

M5 problemi okuduktan sonra “*Tüccar tek sayıda gömlek aldığına göre öğrenci tek sayının ne olduğunu bilecek. Tek sayı ifadesini bilecek*” açıklamasını yapıp Şekil 4.71’de görüldüğü gibi bunu çalışma kâğıdına yazmıştır. M5’in açıklamasının ilk kısmı “tek sayıya odaklanma” açıklamasının devamı ise “tek sayıyı genel biçiminde yazma” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M5’in bu iki kategori arasında ilişki kurduğu söylenebilir.

$$2n-1 = \text{Tek sayı ifadesini
bileli}$$

Şekil 4.71. M5'in "tek sayıyı genel biçimde yazma" boyutuna ait çözümü

Tek sayı özelliklerini kullanma: Bir tek sayı ile bir tek sayının çarpımının tek sayı olma özelliğini kullanma durumunu temsil etmektedir. "Tek sayı özelliklerini kullanma" boyutu "seçenekleri azaltma" ve "birler basamağını bulma" olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M1'in altını çizdiği bir diğer kelime ise "tek sayıda" ifadesi olmuştur. M1 öğretmenin "*Tek sayı bilgisi önemli*" açıklaması ile "tek sayıların özelliğini kullanma" boyutunu AN olarak belirlemiştir.

M3'in "*45 ile bir tek sayının çarpımının son basamağının tek olduğu bu soruda kritik nokta.*" diyerek "tek sayıların özelliğini kullanma" boyutunu AN olarak belirlemiştir.

M4'ün "*Gömlek sayısı tek olduğuna göre tek ile tek sayının çarpımı tek olur.*" açıklamasını yapmıştır.

M5, "*Öncelikle öğrenci tek sayı tek sayı çarpıldığında birler basamağı tek sayı olduğunu bilecek.*" açıklamasını yapmıştır.

Seçenekleri azaltma: Problem çözümünde sayının birler basamağında olabilecek değerleri eleme durumunu temsil etmektedir.

M1 tek sayı bilgisinin önemli olmasını vurgulayan "*Noktalı yerlerdeki seçenekleri elemeye yardımcı olacak.*" açıklaması ise "seçenekleri azaltma" alt boyutu ile değerlendirilmiştir.

M4, "*O halde birler basamağı 0 da olabilir 5 de olabilir.*" açıklaması "seçenekleri daraltma" boyutu ile ilişkilendirilmiştir.

Birler basamağını bulma: Problemden sorulan dört basamaklı sayının birler basamağındaki rakamı tek sayı özelliğini kullanarak elde etme durumunu temsil etmektedir.

M1 Şekil 4.72'de görüldüğü üzere çalışma kâğıdına sayıyı yazarak birler basamağını elde etmiştir.

9925

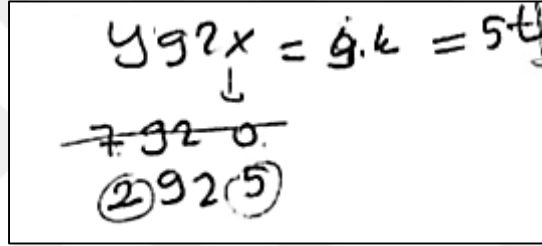
Şekil 4.72. M1'in "birler basamağını bulma" alt boyutuna ait çözümü

M2'nin “Tek sayıda gömlek aldığı için birler basamağı 5 olur” açıklaması “birler basamağını bulma” boyutu ile değerlendirilmiştir.

M3'ün “tek sayı olduğuna göre birler basamağı 5'tir” açıklaması “birler basamağını bulma” alt boyutu ile değerlendirilmiştir.

M3'ün “45 ile tek bir sayının çarpımının son basamağını 5 olduğu bu soruda kritik noktadır” açıklaması ile “birler basamağını bulma” alt boyutunun problemin çözüm sürecinde AN olarak belirlediğini ifade etmiştir.

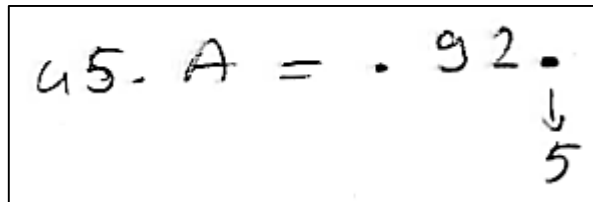
M4'ün “Gömlek sayısı tek olduğuna göre tek ile tek sayının çarpımı tek olur birler basamağı 5 olur” açıklaması “birler basamağını bulma” alt boyutu ile değerlendirilmiştir. M4 öğretmeni problemin çözümünde “birler basamağını bulma” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir. M4 öğretmeni Şekil 4.73'te görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.


$$45 \times x = 920 = 54$$
$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 20 \\ \hline 900 \\ 180 \\ \hline 920 \end{array}$$
$$(20) \times (5) = 100$$

Şekil 4.73. M4'ün “birler basamağını bulma” alt boyutuna ait çözümü

M5'in “5 ile bir tek sayı çarpıldığı zaman birler basamağı 5 olur” açıklaması “birler basamağını bulma” alt boyutu ile değerlendirmiştir. M5 problem çözme sürecinde bu alt boyutu anahtar nokta olarak belirlenmiştir.

M5'in birler basamağını 5 olarak elde ettiği durum Şekil 4.74'te görüldüğü gibi belirtilmiştir.


$$45 \cdot A = 920$$
$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 20 \\ \hline 900 \\ 180 \\ \hline 920 \end{array}$$
$$\downarrow$$
$$5$$

Şekil 4.74. M5'in “birler basamağını bulma” alt boyutuna ait çözümü

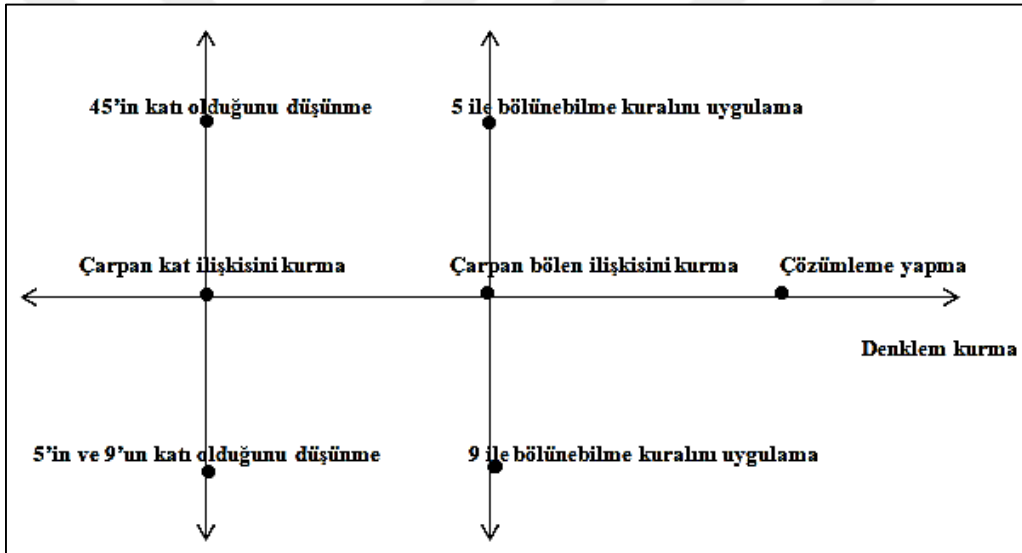
M5 “birler basamağını bulma” alt boyutu ile “tek sayıların özelliğini kullanma” boyutu arasında Şekil 4.75'te görüldüğü gibi ilişki kurulduğu söylenebilir.

↓
Tek olduğu olduğundan birler basamağını bulmalı

Şekil 4.75. M5'in "birler basamağını bulma" alt boyutu ile "tek sayıların özelliğini kullanma" boyutu arasında ilişki kurması

Denklem kurma: Faturada ödenen ücretin, gömlek sayısı ve her bir gömleğin fiyatının çarpımı ile elde etme durumunu temsil etmektedir. "denklem kurma" kategorisi "çarpan kat ilişkisini kurma", "çarpan bölen ilişkisini kurma" ve "çözümleme yapma" olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

"Denklem kurma" kategorisine ait alt kategorilerin ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.76'da belirtilmiştir.



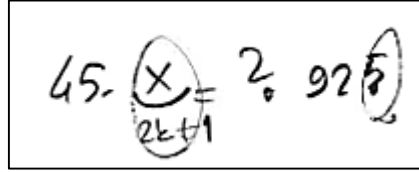
Şekil 4.76. "denklem kurma" kategorisinin alt kategorilerinin ve boyutlarının eksen üzerinde gösterimi

M1 problemi okuduğu andan itibaren denklemi oluşturmaya başlamıştır. Her bir verilenle beraber Şekil 4.77'de görüldüğü gibi denklemi tamamlamıştır. M1'in yaptığı çözümler "denkleme kurma" kategorisi ile değerlendirilmiştir.

$$\begin{array}{l} \text{fiyat} \cdot \text{Birim} \\ 4,5 \cdot n = 926 \\ \downarrow \\ \text{Tek} \end{array}$$

Şekil 4.77. M1'in "denklem kurma" kategorisine ait çözümü

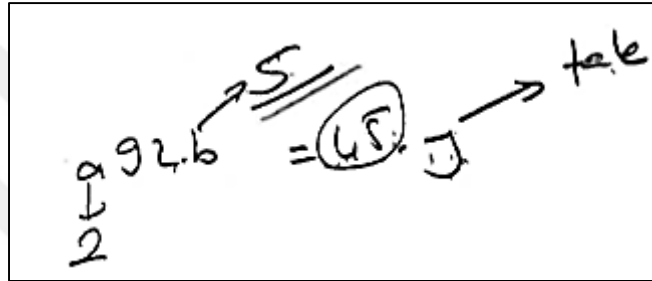
M2 gömlek sayısını x olarak adlandırdıktan sonra denklemi yazmıştır. Daha sonra Şekil 4.78’de görüldüğü gibi denklemde x yerine $2k + 1$ yazmıştır.



$$45 \cdot \underset{2k+1}{\textcircled{x}} = 2 \cdot 925$$

Şekil 4.78. M2’nin “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

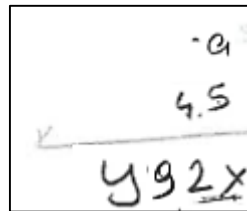
M3 Şekil 4.79’da görüldüğü gibi denklemi kurmuştur. Buradan birler basamağına 5 rakamını yerleştirmiştir.



$$925 = 45 \cdot 205 \rightarrow \text{tek}$$

Şekil 4.79. M3’ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

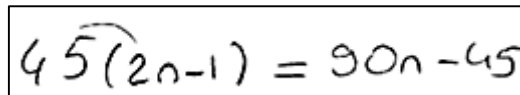
M4 çalışma kâğıdına Şekil 4.80’de görüldüğü gibi a ile 45 sayısının çarpımlarının $y92x$ olmasını yazmıştır.



$$\begin{array}{r} a \\ \times 45 \\ \hline y92x \end{array}$$

Şekil 4.80. M4’ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

M5 Şekil 4.81’de görüldüğü üzere denklemi kurmuştur. Bu durum “denklem kurma” kategorisi ile değerlendirilmiştir.



$$45(2n-1) = 90n-45$$

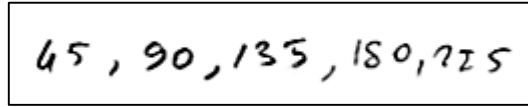
Şekil 4.81. M5’in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Çarpan kat ilişkisini kurma: İki tam sayının çarpımı şeklinde verilen bir sayının çarpanların katı olma durumunu temsil etmektedir. “çarpan kat ilişkisini kurma” alt

kategorisi “45’in katı olduğunu düşünme” ve “5’in ve 9’un katı olduğunu düşünme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

45’in katı olduğunu düşünme: Sayının 45’in katı olan dört basamaklı bir sayı olduğunu düşünme durumunu temsil etmektedir.

M2 problemi okuduktan sonra “45 in katları şeklinde gider. 45, 90, ...” açıklaması ile “çarpan kat ilişkisini kurma” kategorisi oluşmuştur. M2 açıklamasını yaparken Şekil 4.82’de görüldüğü gibi 45’in katlarını çalışma kâğıdına yazmıştır.



45, 90, 135, 180, 225

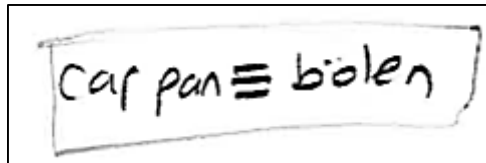
Şekil 4.82. M2’nin “çarpan kat ilişkisini kurma” boyutuna ait çözümü

5’in ve 9’un katı olduğunu düşünme: Sayının 45’in katı ise hem 5’in hem de 9’un katı olduğunu düşünme durumunu temsil etmektedir.

M4’ün “O zaman ne olacak 45 in katları olacak” açıklaması “çarpan kat ilişkisini kurma” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M4 daha sonra “Bu sayı 9 un katı ve 5 in katı olacak.” açıklamasını yapmıştır. M4’ün açıklaması ile birlikte çözümü incelendiğinde bölünebilme kuralları ile çözümü tamamladığı görülmüştür.

Çarpan bölen ilişkisini kurma: İki tam sayının çarpımı şeklinde verilen bir sayının çarpanlardan birine tam bölünebilme durumunu temsil etmektedir. “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisi “5 ile bölünebilme kuralını uygulama” ve “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M1, “Burada önemli olan çarpan kavramı ile bölen kavramının aynı olduğunu bilmesi” açıklaması ile “çarpan ve bölen ilişkisini kurma” kategorisi oluşturulmuştur. M1 problem çözme sürecinde önemli olduğunu düşündüğü bu durumu Şekil 4.83’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.

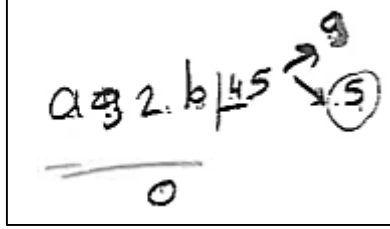


Çarpan $\equiv$ bölen

Şekil 4.83. M1’in “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisine ait çözümü

M1, “a92b sayısı 45 in katı ise 45 ile tam bölünebilir demesi lazım.” açıklamasından ardından M1, “Bölünebilme sorusuna dönüştü” vurgusu ile “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisini problemin çözümünde AN olarak belirlemiştir.

M1 bu durumu Şekil 4.84’te görüldüğü üzere belirtmiştir.



Şekil 4.84. M1’in boyutların oluşmasına ait çözümü

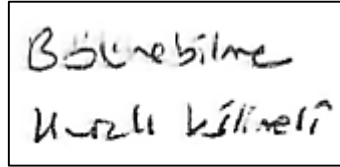
M3, “45 ile bölünebilme kuralı bu soruda kritik noktadır” açıklaması ile “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisini bu problemin çözüm sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M4, “ama 45 ile bölünebiliyor demek en önemli nokta. Bunu düşünmek en önemlisi” diyerek “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisini bu problemin çözüm sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M5, “Bir sayı ile 45 i çarpıyorsun bunu buluyorsun o zaman bu sayı 45 ile tam bölünür demesi lazım. Çarpan bölen ilişkisi” açıklamasıyla “çarpan bölen ilişkisi kurma” alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

5 ile bölünebilme kuralını uygulama: Bir tamsayının 5 ile tam bölünebilme kuralının uygulanması durumunu temsil etmektedir.

M5 “5 ile bölünebilme kuralını uygulama” boyutunu Şekil 4.85’de görüldüğü gibi problem çözmede AN olarak belirlemiştir.



Şekil 4.85. M5’in “5 ile bölünebilme kuralını uygulama” boyutuna ait çözümü

9 ile bölünebilme kuralını uygulama: Bir tam sayının 9 ile tam bölünebilme kuralını uygulama durumunu temsil etmektedir.

M1’in Şekil 4.86’da görüldüğü gibi “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” boyutunu çözümü verilmiştir.

$$9 + 9 + 2 + 5 = 9K$$

↓
(2)

Şekil 4.86. M1'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü

M4 birler basamağını 5 ise binler basamağının 2 olacağını ifade etmiştir. Bu şekilde "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutunu kullanarak problemin çözümünü tamamlamıştır.

M5, AN olarak belirlediği bu boyut ile ilgili "Bu sayı 9 ile tam bölünebildiğine göre diğer rakam 2 olur." açıklamasını yapmıştır. M5 öğretmenin bu kategori ile çözümü Şekil 4.87'de verilmiştir.

$$45.A = .92.$$

↓ ↓
9 5 2 5

Şekil 4.87. M5'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü

Çözümleme yapma: Verilen sayının basamak değerlerinin toplanması şeklinde yazılması durumunu temsil etmektedir.

M2'nin "çözümleme yapma" alt kategorisi çözümü Şekil 4.88'de belirtilmiştir.

$$45.(24+1) = 1.925$$

$$902 + 45 = 947$$

$$947 = 1000 + 447$$

$$947 = 1000 + 447$$

$$947 = 1000 + 447$$

$$947 = 1000 + 447$$

(7)

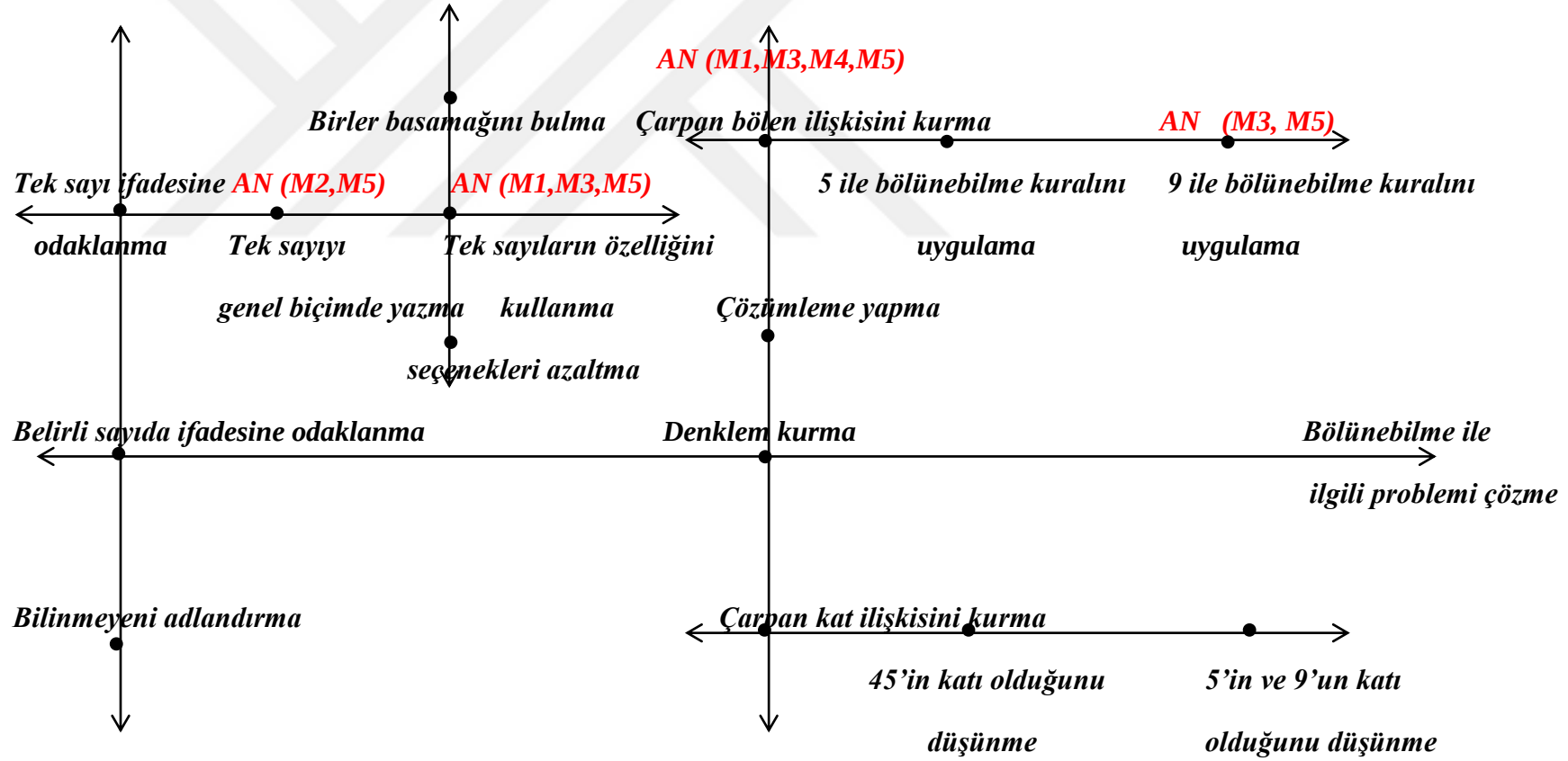
Şekil 4.88. M2'nin "çözümleme yapma" alt kategorisine ait çözümü

M2 ve M5 bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde "tek sayıyı genel biçimde yazma" boyutunu AN olarak belirlemiştir. M1, M3, M4 ve M5 "çarpan bölen ilişkisini kurma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3, M5 "5 ile bölünebilme kurallarını uygulama" ve "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutlarını AN olarak belirlemiştir.

M1, M3 ve M5 öğretmenler “tek sayıların özelliğini kullanma” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir.

Matematik öğretmenlerinin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.89’da belirtilmiştir.





Şekil 4.89. Matematik öğretmenlerinin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.5. Olasılık ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2011 YGS sınavında sorulmuş olan olasılık probleminin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve çözüm sürecindeki AN'ler belirlenmiştir. M4 oturuma başladıktan sonra çözümü görmek istemiştir.

Görüşmede yer alan olasılık ile ilgili problem Şekil 4.90'daki gibidir.

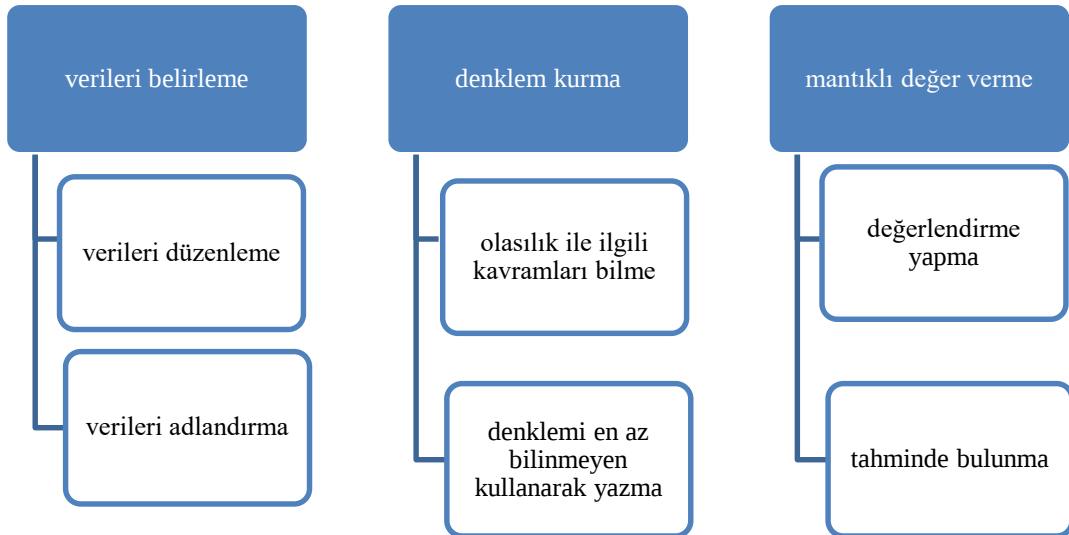
Meriç'in elinde kırmızı veya beyaz renklere toplam 10 top vardır. Meriç bu topları iki torbaya her bir torbada en az bir kırmızı ve bir beyaz top olacak şekilde dağıttıktan sonra şunları söylüyor:

“Birinci torbada 3 kırmızı top vardır. Torbalardan rastgele birer top çekildiğinde topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$ 'dir.”

Buna göre, ikinci torbada kaç beyaz top vardır?

Şekil 4.90. Olasılık ile ilgili problem

Olasılık ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.91'de verilmiştir.

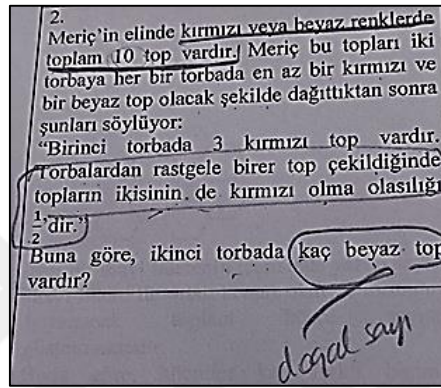


Şekil 4.91. Olasılık ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.1.5.1. Matematik Öğretmenlerinin Olasılık ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Verileri belirleme: Problemde verilen bilgilerin farkında olunması durumunu temsil etmektedir. “Verileri belirleme” kategorisi “verileri düzenleme” ve “verileri adlandırma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M1, problem çözme sürecinde verilen bilgilerin Şekil 4.92’de görüldüğü gibi altını çizerek başlamıştır. Bu durum “verileri belirleme” kategorisi ile değerlendirilmiştir.

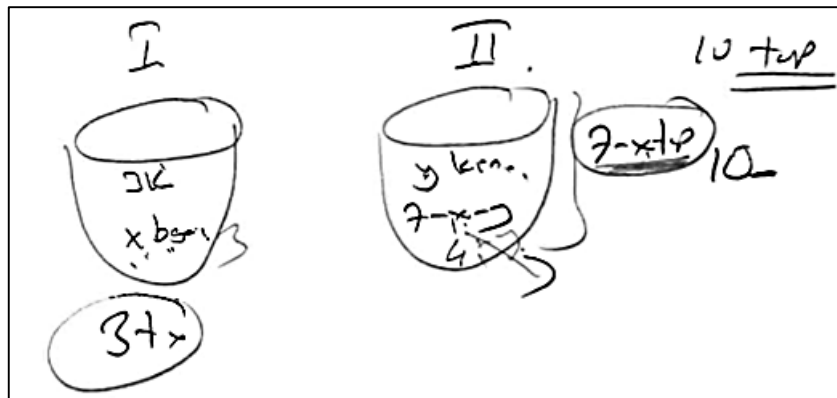


Şekil 4.92. M1’in “verileri belirleme” kategorisine ait çözümü

Verileri düzenleme: Problemde yer alan verilerin düzenlenmesi durumlarını temsil etmektedir.

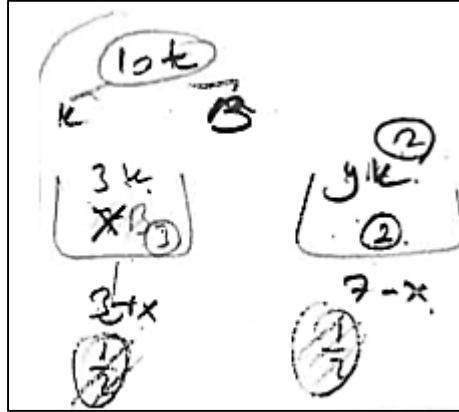
M1, “İki tane torbamız var. Birinci torba ve ikinci torba şeklinde” açıklaması ile verileri düzenlemiştir.

M3 problemi okudukça çalışma kâğıdına Şekil 4.93’de görüldüğü gibi düzenlemeler yapmıştır.



Şekil 4.93. M3'ün “verileri düzenleme” alt kategorisine ait çözümü

M4'ün “verileri düzenleme” alt kategorisi ile çözümleri Şekil 4.94’de verilmiştir.



Şekil 4.94. M4'ün “verileri düzenleme” alt kategorisine ait çözümü

Verileri adlandırma: Bilinmeyenlerin adlandırılması durumunu temsil etmektedir. “verileri adlandırma” alt kategorisi “en az bir ifadesini bilme”, “iki bilinmeyen kullanma” ve “ikiden fazla bilinmeyen kullanma” olarak üç boyutta ele alınmıştır.

M1 birinci torbada bulunan beyaz top sayısını x olarak adlandırmıştır. Toplam top sayısı 10 olduğu için ikinci torbada $7 - x$ top bulunduğunu ifade etmiştir ve “İkinci torbada kırmızı top sayısını bilmiyoruz. İki torbada da en az bir beyaz en az bir kırmızı top olduğundan ikinci torbadaki kırmızı sayısına r diyelim. Bilinen sayısı az.” açıklamasını sürdürmüştür. M1’in problem çözme sürecinde “verileri adlandırma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1’in “verileri adlandırma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak değerlendirmesi ile ilgili açıklaması ise şöyledir.

“Soruda sadece tek bir bilgi verilmiş. Başka verilen bir şey yok. Diğerlerinin verilmediği yerde hepsine değişken vereceğiz. Üçgenlerde olduğu gibi, hemen bir şey yapamıyor olsan bile değer verilmesi gerekir. Değişkenleri verip toplamın 10 olmasını değerlendireceğiz.”

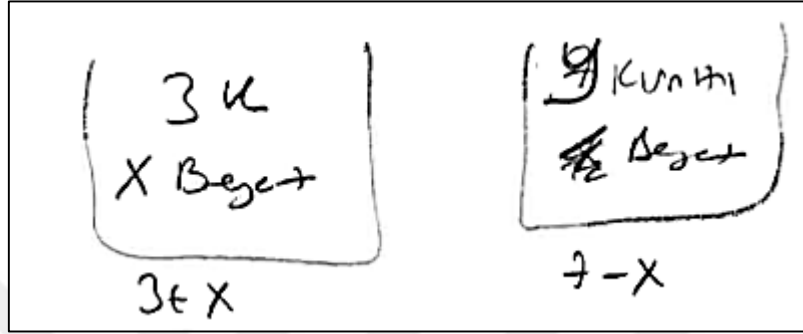
M1 trigonometri probleminde de “açıları adlandırma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M2, “Torbalaradaki diğer topları değişken cinsinden ifade etmeli” açıklamasıyla vurguladığı “verileri adlandırma” kategorisini “Bu problem için önemli gördüğüm hassas noktalardan birisi bu” diyerek problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M3 birinci torbada bulunan beyaz top sayısını x , ikinci torbadaki kırmızı top sayısını y olarak adlandırmıştır.

M4, “Bir defa beyaz top sayısının ikinci torbada kırmızı top sayısının bilinmesi lazım diye düşünüyorum. Bilmiyorsak x beyaz olsun diyelim. O halde $3 + x$ top olur birinci torbada. İkinci torbada $7 - x$ top var. Kırmızı sayısının bilmiyoruz y olsun. İşte burada bunu yazmayı bilmesi lazım. Bildiği zaman sıkıntı yok.” açıklaması ile “verileri adlandırma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M5, “Çocuk değişken vermeyi bilmeli” diyerek Şekil 4.95’teki çözümü yapmıştır.



Şekil 4.95. M5’in “verileri adlandırma” alt kategorisine ait çözümü

En az bir ifadesini anlama: En az bir niceleyicisinin anlamını bilme durumunu temsil etmektedir.

M4, “burada beyaz sayısı belli değil. O zaman burada en az bir beyaz olacağı için bir beyaz top olmuş olsa” açıklaması ile bu boyutu vurgulamıştır.

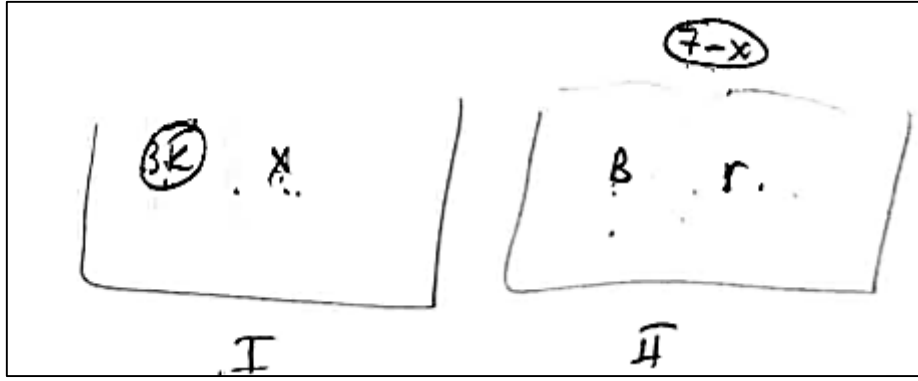
M5, “İki torba var. Birinci torbada 3 kırmızı top var. İkisinde de mutlaka kırmızı ve beyaz top var” diyerek verileri adlandırma yaparken Şekil 4.96’da görüldüğü gibi bu durumu belirtmiştir.

Beyaz'ın mutlaka
olduğu (en az bir tane)
bilinmeli.

Şekil 4.96. M5’in “en az bir ifadesini anlama” boyutuna ait çözümü

İki bilinmeyen kullanma: Problemden verilen top sayılarının iki bilinmeyen ile ifade edilmesi durumunu ifade etmektedir.

M1’in çözümü incelendiğinde x ve r bilinmeyenlerini kullanarak Şekil 4.97’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına çözümünü yapmıştır.

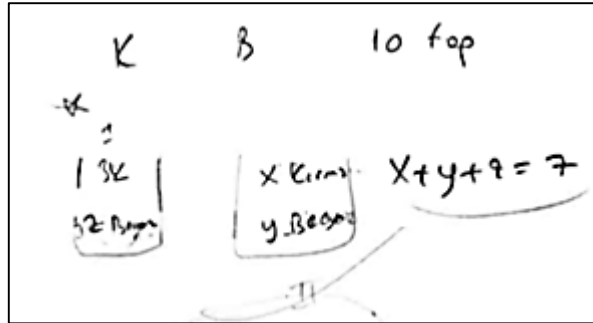


Şekil 4.97. M1’in “iki bilinmeyen kullanma” boyutuna ait çözümü

M3’ün çözümü incelendiğinde x ve y bilinmeyenlerini kullandığı görülmüştür. M3 “Problemin çözümünde yardımcı olabilecek önemli nokta iki değişkene bağlı olarak ifade edilmesi” açıklaması ile “iki bilinmeyen kullanma” kategorisi ilişkilendirilmiştir. M3’ün açıklamasında geçen önemli nokta ifadesi ile bu kategori problem çözüm sürecinde öğretmenin belirlediği AN olarak alınmıştır.

İkiden fazla bilinmeyen kullanma: Problemden verilen toplam sayılarının ikiden fazla bilinmeyen ile ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir.

M2’nin çözümü incelendiğinde x , y ve z bilinmeyenlerini kullandığı görülmüştür. M2 problem çözme sürecine Şekil 4.98’de görüldüğü gibi çözüm ile başlamıştır.



Şekil 4.98. M2 öğretmenin “ikiden fazla bilinmeyen kullanma” boyutuna ait çözümü

Denklem kurma: Problemlerle ilgili verileri kullanarak çözüm için gerekli denklemin elde edilmesi durumunu temsil etmektedir. “denklem kurma” kategorisi “olasılık ile ilgili kuralları bilme” ve “denklemleri en az bilinmeyen kullanarak yazma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M2, “Zor soru ama. Denklemi kurma aşaması önemli.” diyerek Şekil 4.99’da görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.

$$\frac{3}{3+2} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2}$$

Şekil 4.99. M2'nin “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Olasılık ile ilgili kavramları bilme: Olasılık ile ilgili kural ve ifadelerin bilinmesi durumunu temsil etmektedir. “olasılık ile ilgili kavramları bilme” alt kategorisi “olasılıkta çarpım kuralını bilme”, “olasılık bulma” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M1 öğretmen daha sonra problemin soru kökünde geçen “*torbalardan rastgele birer top çekildiğinde topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$* ” ifadesini okuduktan sonra “*Birinci torbada 3 kırmızı olduğuna göre 6 top vardır.*” açıklamasını yapmıştır. Daha sonra hata olduğunu düşünmüştür ve “*Ben şöyle dersem pardon, ikisinin de olma olasılığı $\frac{1}{2}$* ” açıklamasını yapmıştır. M1 öğretmen problem çözme sürecinde önemli bulduğu bu alt kategoriyi AN olarak belirlemiştir. Bu durumu aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

“Burada önemli olan torbalardan rastgele birer top çekildiğinde cümlesinin iyi anlaşılması gerekiyor. Burada ayrı ayrı ikisinin de olasılıklarının $\frac{1}{2}$ olduğu anlaşılabilir.”

Dolayısıyla M1 yaptığı bu açıklama “olasılıkla ilgili kavramları bilme” alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M4 olasılıkta geçen temel kavramların bilinmesi gerektiğini söylemiştir. Denklemi kurmak için bu kategorinin önemli bir nokta olduğunu ifade etmiştir. Aksi halde yanlış anlaşılmaya yol açabileceğini belirtmiştir. Bu durum “olasılık ile ilgili kavramları bilme” kategorisi ile ilişkilendirilmiştir. M4 öğretmenin açıklaması şöyledir:

“İki farklı durum olduğu için torbalardan birinden çekilen ama hangi torbadan çekildiği bilinmediği için öncelikle $\frac{1}{2}$ olasılık olduğunu bilecek. Ona gerek yok. Şimdi öğrenci ilk olarak bunu bilecek. Çünkü birinci torbadan çekiyor. İkinci torbadan çekiyor. Bazı sorular oluyor hangi torbadan çektiği belli olmuyor. Ben bir an öyle algıladım.”

Olasılıkta çarpım kuralını bilme: Olasılıkta çarpım kuralını bilme durumunu temsil etmektedir.

M3'ün “*çarpım kuralına göre olasılık yazılır*” açıklamasını yapmıştır.

M5, “*Olasılıkta çarpım kuralını bilmeli*” açıklamasını yapmıştır. M5 bu kategoriyi problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

Olasılık bulma: Bir olayın olma olasılığı durumunu ifade edebilme durumunu temsil etmektedir.

M5, “*Olasılığın tanımını bilmeli*” açıklamasını yapmıştır.

Denklemleri en az bilinmeyen kullanarak yazma: Denklem oluşturulduktan sonra yapılan düzenlemeler ile bilinmeyen sayısının azaltılması durumunu temsil etmektedir.

M2 denklemi oluşturduktan sonra “*O halde ikinci torbada x kırmızı olsun. Bize neyi soruyor. İkinci torbada kaç beyaz olduğunu. O halde ikinci torbada y tane beyaz olsun. Çok değişken oluyor bu seferde.*” açıklamasını yapmıştır. Daha sonra denklem üzerinde düzenlemeler yaparak problemin sonucuna ulaştığı görülmüştür. M2 “denklemleri en az bilinmeyen kullanarak yazma” kategorisini problemin çözümünde AN olarak belirlediğini ifade etmiştir.

M5, “*Çocuk ortak değişken vermeyi bilmeli*” açıklamasını yapmıştır.

Mantıklı değer verme: Bilinmeyen yerine belirli ölçütler çerçevesinde sayı verme durumunu temsil etmektedir.

M1, “*Son cümlelerin iyi anlaşılıyor olması gerekir. Sonuç doğal sayı çıkacağı için o kısmı düşünmelidir. Top sayısı doğal sayı olduğu için değer vermek mantıklıdır.*” açıklaması “mantıklı değer verme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. M1’in çözümü Şekil 4.100’de verilmiştir.

$$\begin{array}{l} r \geq 1 \\ B \geq 1 \\ x \geq 1 \end{array} \quad r = \frac{(3+x)(7-x)}{6}$$

Şekil 4.100. M1’in “mantıklı değer verme” kategorisine ait çözümü

M2’nin “*Bir kere şeye dikkat etmeli. Değişkenlerin birden büyük doğal sayı olma koşuluna uyararak değer vermeli. Bire eşit ya da birden büyük doğal sayı olma koşuluna dikkat etmeli. x, y, z değişkenlerinin büyük eşit 1 olması önemli.*” açıklaması ile “mantıklı değer verme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M3’ün bu kategori ile çözümü Şekil 4.101’deki gibidir.

$$6-7 = (3+1) \cdot (7-1)$$

(3) (3)

Şekil 4.101. M3'ün "mantıklı değer verme" kategorisine ait çözümü

M5'in "Top sayısının doğal sayı olduğunu bilmeli bu şekilde deneme yapabilmeli" açıklaması "mantıksal değer verme" kategorisi ile ilişkilendirilmiştir. M5 bu durumu Şekil 4.102'de görüldüğü üzere belirtmiştir.

top sayısı doğal sayı
olduğunu bilmeli.

Şekil 4.102. M5'in "mantıklı değer verme" kategorisine ait çözümü

Tahminde bulunma: Olasılığı kullanarak tahmin yapma durumlarını temsil etmektedir.

M4, "burada beyaz sayısı belli değil. O zaman burada en az bir beyaz olacağı için bir beyaz top olmuş olsa" açıklaması ile diğer öğretmenlerden farklı olarak çözümün ilk aşamasında değer verme yoluna gitmiştir. Bu durum problemin çözüm yolunda "mantıklı değer verme" kategorisinin bir alt kategorisi olarak "tahminde bulunma" kategorisi ile ilişkilendirilmiştir. M4, Şekil 4.103'te görüldüğü gibi problemin sonucuna ulaşmıştır. M4, "Öğrenci top sayısının doğal sayı olduğu için denemek aklına gelebilir. Doğal sayı olduğunu düşünüp değer verebilir" açıklaması ile öğrencilerin belli ölçütlerinden faydalananarak bu yolu tercih edebileceklerini ifade etmiştir.

$\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}$
$\underbrace{\hspace{1cm}}$	$\underbrace{\hspace{1cm}}$
(4)	(6)

Şekil 4.103. M4'ün "tahminde bulunma" alt kategorisine ait çözümü

Değerlendirme yapma: Bilinmeyen ne olacağına karar verme durumunu temsil etmektedir.

M2, “Burada tamsayı olmak zorunda olduğu için değer verilir. Şöyle bir şey yapsak bunun tam bölünme durumundan gitsek $z = 1$ verirse sağladığını görürüz.” diyerek Şekil 4.104.’te görüldüğü üzere “değerlendirme yapma” kategorisi çözümünü yapmıştır.

$$6y/4 = (7-2)(3+2)$$

Şekil 4.104. M2’nin “değerlendirme yapma” kategorisine ait çözümü

M3’ün “İfadenin çift sayı olması için $x = 1$ ve $x = 3$ olabilir. İkinci torbada beyaz kalmadığı için $x, 3$ olamaz. $x = 1$ iken oluyor” açıklaması ve Şekil 4.105’te yaptığı çözümler dikkate alınmıştır. Ayrıca M3’ün “çıkabilecek iki farklı değer değerlendirilir, eleme yapılır” açıklaması “değerlendirme yapma” alt kategorisi ile ilişkilendirilmiştir.

$$x = 1$$

Şekil 4.105. M3’ün “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü

M4 “ $x = 1$ verirse ikinci torbada 2 beyaz top olmuş olur” açıklamasıyla problem çözümünü tamamlamıştır. M4’ün bu açıklaması “değerlendirme yapma” alt kategorisi altında değerlendirilmiştir.

M4’ün çözümü Şekil 4.106’daki gibidir.

$$6y = (3+x)(7-x)$$

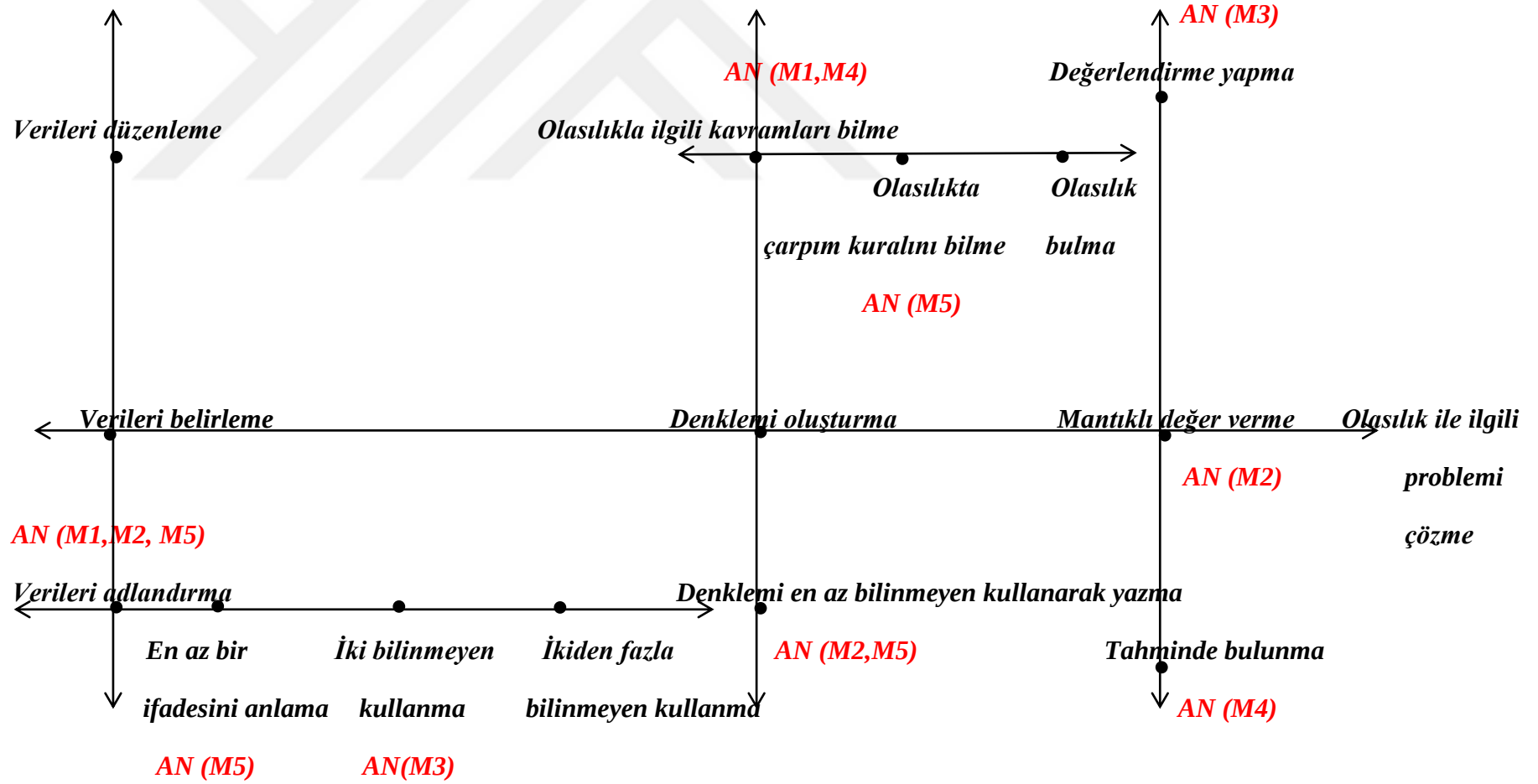
Şekil 4.106. M4’ün “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü

M5'in yaptığı çözüm Şekil 4.107'deki gibidir.

$$6y = (3+x)(7-x)$$
$$x=3 \quad y=4 \quad x=2 \text{ 55 kuzer}$$
$$\boxed{x=1 \quad y=4}$$

Şekil 4.107. M5'in “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü

M1, M2 ve M5 olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde “verileri adlandırma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3 “iki bilinmeyen kullanma” boyutunu AN olarak belirlemiştir. M5 “en az bir ifadesini anlama” boyutunu anahtar nokta olarak belirlemiştir. M1 ve M4 “olasılıkla ilgili kavramları bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2 ve M5 “denklemleri en az bilinmeyen kullanarak yazma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2 ve M5 “mantıklı değer verme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M5 “olasılıkta çarpma kuralını bilme” ve “olasılık bulma” boyutlarını da AN olarak belirlemiştir. M4 diğer öğretmenlerden farklı bir çözüm yolunu tercih etmiştir ve “tahminde bulunma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Matematik öğretmenlerinin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.108.'de belirtilmiştir.

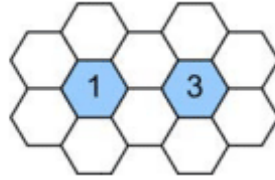


Şekil 4.108. Matematik öğretmenlerinin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.6. Kombinasyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2017 LYS sınavında sorulmuş olan kombinasyon ile ilgili problemin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve problem çözme sürecinde AN'leri belirlenmiştir. M4 öğretmen problemin çözümüne başladıktan sonra çözümü görmek istemiştir. M5 öğretmen çözüm üzerinden görüşlerini belirtmek istemiştir. Kombinasyon ile ilgili problem Şekil 4.109'daki gibidir.

Aşağıda düzgün altıgen şeklindeki hücrelerden oluşturulmuş bir düzenek verilmiştir. Beyaz hücrelerin bazıları turuncu renge boyanacaktır.



Her bir mavi hücrenin içerisinde yazan sayı, o mavi hücre ile ortak kenarı olan ve turuncuya boyanacak toplam hücre sayısını göstermektedir.

Buna göre, hücreler kaç farklı biçimde boyanabilir?

Şekil 4.109. Kombinasyon ile ilgili problem

Kombinasyon ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.110'da belirtilmiştir.



Şekil 4.110. Kombinasyon problemi ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

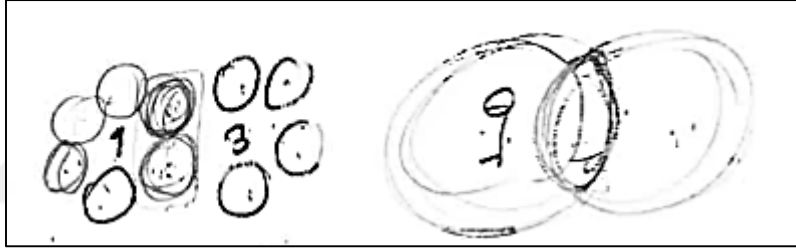
4.1.6.1. Matematik Öğretmenlerinin Kombinasyon ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Kesişime odaklanma: Kesişimde olan bölgenin fark edilmesi durumunu temsil etmektedir. “kesişime odaklanma” kategorisi “kesişimi ayrı düşünme” ve “kesişimi ayırmama” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M1, “Burada öğrencinin bilmesi gereken ikisinin de de olan hücrelerin etkileyici olduğudur. Her iki taraf için de etkileyici olduğunun kesişim kısmını fark etmesi lazım.” açıklamasını yapmıştır. M1 bu tür problemlerin önceki yıllarda da sorulduğunu çözüm sürecinde dikkat edilmesi gerekenin hep aynı nokta olduğunu belirtmiştir. M1, “İkisinde de olan belirleyicidir. Kesişimi fark etmesi lazım.” açıklamasını yapmıştır.

M1 “kesişime odaklanma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M1’in “kesişime odaklanma” kategorisi çözümü Şekil 4.111’deki gibidir.



Şekil 4.111. M1’in “kesişime odaklanma” kategorisine ait çözümü

M4’ün “Ortakakilere dikkat etmemişim” açıklaması “kesişime odaklanma” kategorisi ile değerlendirilmiştir.

M5’in “Ortak yerden kaynaklanan iki farklı durum olduğunu sezmeli” açıklaması “kesişime odaklanma” kategorisini vurgulamıştır.

Kesişimi ayrı düşünme: Ortak olan ve olmayan bölgelerde bulunan hücrelerin seçiminin birbirinden bağımsız düşünülmesi durumunu temsil etmektedir. “Kesişimi ayrı düşünme kategorisi” alt kategorisi “kesişimde olan bölgeden seçme” ve “kesişimde olmayan bölgeden seçme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M1, “Burada öğrenci dört tane hücre boyayacağım diye düşünmemeli. Çünkü eğer öyle düşünürse yanlış olur.” açıklaması ile problem çözüm sürecinde “kesişimi ayrı düşünme” kategorisinin anahtar bir rol oynadığını ifade etmiştir. M1 “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2, “Burada dikkat edilmesi gereken ortadaki hücrelerle diğerlerini ayırması gerekiyor.” açıklamasıyla “kesişimi ayrı düşünme” kategorisi ilişkilendirilmiştir. Ayrıca M2 bu kategoriyi problem çözme sürecinde AN olarak belirlediğini “Bence kritik nokta bu. Çünkü hitap ettikleri kombinasyonlar farklı” açıklamasıyla ifade etmiştir. M2 ise M1 gibi “Bu mantar olayı” açıklaması ile benzer problemler olduğunu belirtmiştir. Ayrıca M2, “1’in 3 ile ortak olduğu kenarlarla ortak olmadığı kenarları ayrı düşünmesi stratejik bir olay zaten” açıklamasıyla bu tür kombinasyon ile ilgili problemlerin çözüm sürecinde “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisinin AN olduğunu ifade etmiştir.

M3, “Öğrenci burada mutlaka ortak olanları ayrı düşünmeli, burada önemli nokta burası.” açıklaması “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M4, “Burada önemli olan ilk etapta benim hemen düşünmediğim olay burayı seçtiğim zaman burayı seçmeme olayını ayrı düşünmesi birinci önemli nokta o” açıklaması ile bu alt kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

M5, “iki farklı durumun ayrı incelenmesi gerektiğini bilmesi gerekir.” açıklaması ile “kesişimi ayırma” alt kategorisini problem çözümünde AN olarak belirleyerek Şekil 4.112’de görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \binom{4}{2}$$

Şekil 4.112. M5’in “kesişimi ayırma” alt kategorisine ait çözümü

Kesişimde olan bölgeden seçme: Kesişimde yer alan hücrelerin seçime dâhil edilmesi durumunu temsil etmektedir. “kesişimde olan bölgeden seçme” boyutu “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” ve “seçenekleri kontrol etme” olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M2 kesişimde yer alan iki hücreden her biri için ayrı bir seçim yapmıştır. M2 bu iki hücreden bir tanesini seçtiğini kabul ederek toplamda üç hücre seçimi yapması gerektiği söyleyerek Şekil 4.113’teki çözümü yapmıştır.

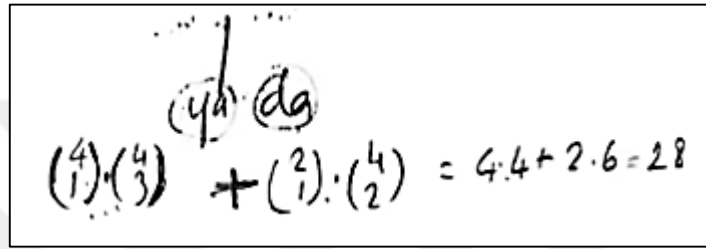
$$1 \cdot \binom{4}{2} + 1 \cdot \binom{4}{2}$$

Şekil 4.113. M2’nin “kesişimde olan bölgeden seçme” boyutuna ait çözümü

M3, “Burayı bilir ise öğrenci yazar hepsini” açıklamasıyla problemin çözüm sürecinde kesişimde olan bölgeden seçim yapmanın öneminde değinmiştir.

Kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme: Kombinasyon problemlerinde yer alan temel kavramların bilinmesi durumunu temsil etmektedir. Kombinasyonu neden ve nasıl uygulayacağını bilme durumlarını temsil etmektedir.

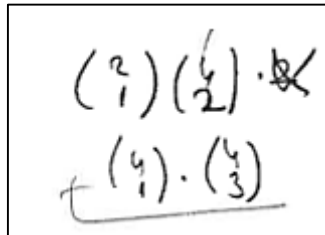
M1, “Burada ya da’lı bir durum var. Dolayısıyla ya da’lı bir durum söz konusu olduğu için seçenekleri toplayacağım.” açıklamasını yapmıştır. M1’in çözümü Şekil 4.114’teki gibidir.


$$\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} + \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 28$$

Şekil 4.114. M1’in “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutuna ait çözümü

M4, “ayrı durumlarda kaç farklı seçenek olduğunun yazılması, ayrı olaylarda toplama olduğunun bilinmesi gerekir” açıklaması ile ve “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutunun problem çözme sürecinde önemli olduğunu belirtmiştir. M4, “Kesişimdeki peteklerin ayrı düşünülmesi gerektiği gibi bu ayrı durumlarda kaç farklı seçenek olduğunun yazılması, ayrı olaylarda toplama olduğunun bilinmesi gerekir.” diyerek “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir.

M4 problem çözümünde kesişimde olan bölgeyi ayrı yazması gerektiğini gördükten sonra kesişimde yer alan iki hücreden bir tane seçmiş olmasına rağmen ifadeyi Şekil 4.115’te görüldüğü gibi 2 ile çarpmıştır. Daha sonra araştırmacı tarafından kendisine sorulduğu zaman zaten seçmiş olduğunu ifade etmiştir.


$$\cancel{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2}} + \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3}$$

Şekil 4.115. M4’ün “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutuna ait çözümü

M5, “Öğrenci burada bir kere kombinasyon olduğunu anlamalı, seçme olduğu için tanımını bilmeli” açıklaması “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutu altında değerlendirilmiştir. M5’in “Ayrık olayların, ayrı durumların toplanması gerektiğini bilmesi gerekir.” açıklaması ile “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M5 problem çözme sürecinde bu durumun kritik bir rol oynadığını düşünmüştür.

Seçenekleri kontrol etme: Yapılan seçimlerin koşullara uygun olduğunun kontrol edilmesi durumunu temsil etmektedir. Problemde verilen ölçütler doğrultusunda seçimlerin kontrol edilmesi durumunu temsil etmektedir.

M3 problemde verilen koşulları çalışma kâğıdına Şekil 4.116’da görüldüğü gibi yazarak çözümünü kontrol etmiştir.

$$\begin{array}{cc} 3.K & 4.K \\ 1.B & 2.B \\ \hline \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} & + \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} \\ \hline \end{array}$$

Şekil 4.116. M3’ün “seçenekleri kontrol etme” alt boyutuna ait çözümü

M4, “o zaman ortadaki iki taneden seçersek sıkıntı olabilir. O kural bozulmuş olacak. İki tanesi seçilirse o kuralımız sağlamamış oluyor” açıklamasını yapmıştır.

Kesişimde olmayan bölgeden seçme: Kesişimde yer almayan hücrelerden üç hücrenin seçilmesi durumunu temsil etmektedir.

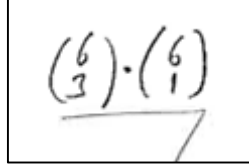
M2’nin ilk olarak kesişimde olmayan bölgeden seçim yaparak Şekil 4.117’de görüldüğü gibi çözümünü tamamlamıştır.

$$\begin{array}{c} 4 \cdot \binom{4}{3} + 1 \cdot \binom{4}{2} + 1 \cdot \binom{4}{2} \\ 16 + 6 + 6 \\ 28 \\ \hline \end{array}$$

Şekil 4.117. M2’nin “kesişimde olmayan bölgeden seçme” boyutuna ait çözümü

Kesişimi ayırmama: Kesişimde olan bölgede bulunan hücreleri diğerlerinden ayırmadan seçim yapma durumlarını temsil etmektedir.

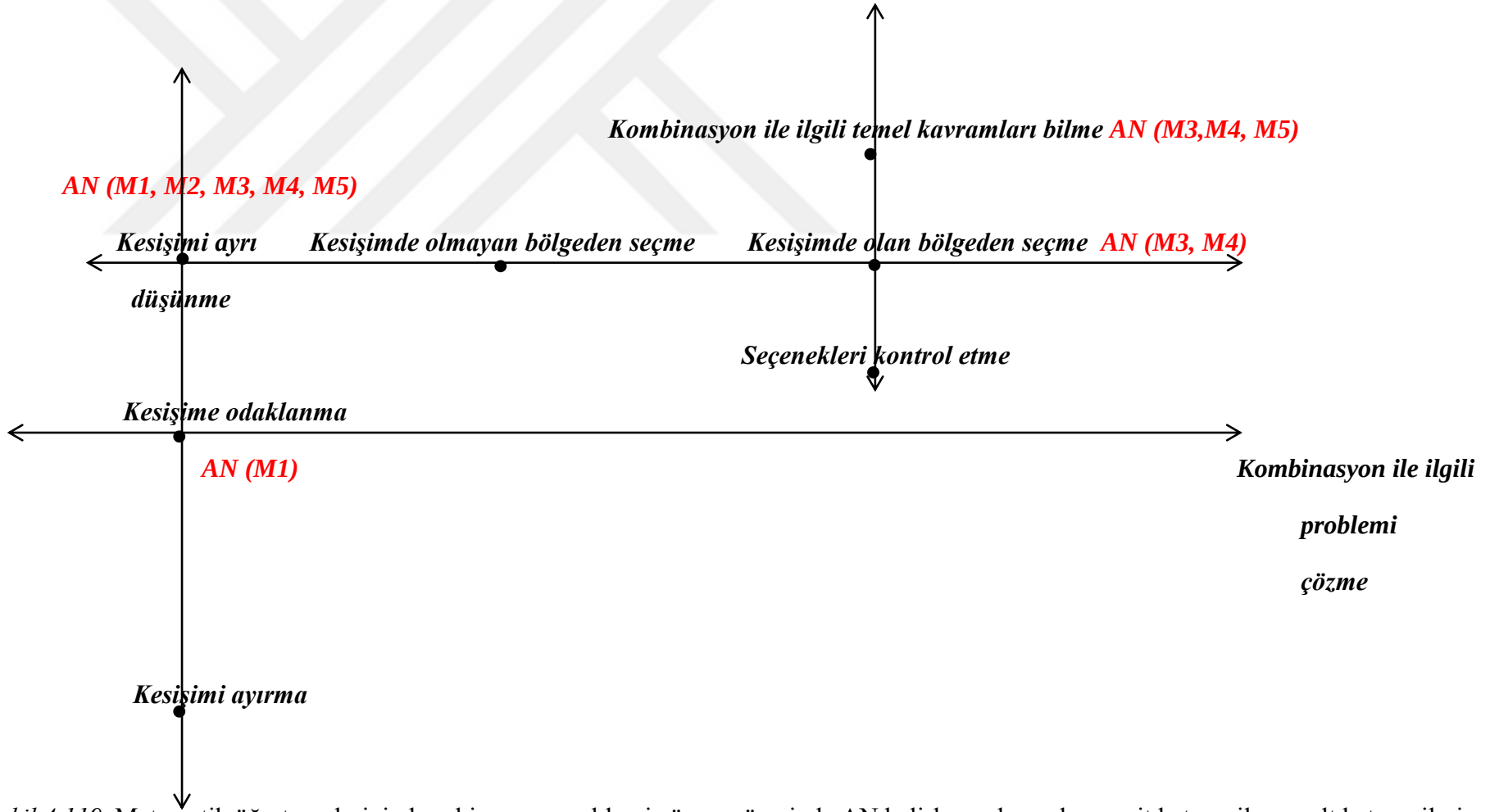
M4'ün “kesişimi ayırmama” alt kategorisi çözümü Şekil 4.118’de verilmiştir.


$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{1}}{7}$$

Şekil 4.118. M4'ün “kesişimi ayırmama” alt kategorisine ait çözümü

M1 kombinasyon problemi çözme sürecinde “kesişime odaklanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2, M3, M4 ve M5 “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3 ve M4 “kesişimde olan bölgeden seçme” boyutu AN olarak belirlemiştir. M3 ve M4 “kesişimde olmayan bölgeden seçme” boyutunu AN olarak belirlemiştir. M3, M4 ve M5 “kombinasyon ile ilgili temel kavramları bilme” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir.

Matematik öğretmenlerinin kombinasyon problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.119’daki gibidir.



Şekil 4.119. Matematik öğretmenlerinin kombinasyon problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi

4.1.7. Modüler Aritmetik ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2017 yılında YGS sınavında sorulmuş olan modüler aritmetik ile ilgili problemin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve problem çözme sürecindeki AN'leri belirlenmiştir. Öğretmenler çözümü görmek istememiştir. Modüler aritmetik ile ilgili problem Şekil 4.120'deki gibidir.

A sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere,

A bir basamaklı

AA iki basamaklı

AAA üç basamaklı

.

.

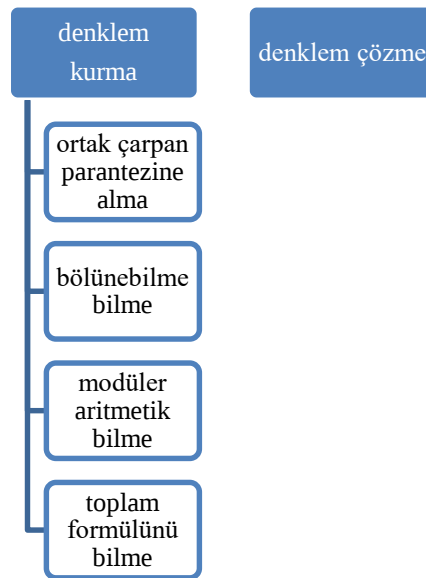
.

$AA \dots A$ elli basamaklı

sayılarının toplamının 9 ile bölümünden kalan 3'tür. Buna göre, A 'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Şekil 4.120. Modüler aritmetik ile ilgili problem

Modüler aritmetik ile ilgili problem ile yapılan görüşmede AN belirleme süreçlerine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.121'deki gibidir.

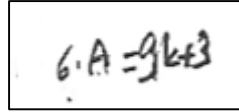


Şekil 4.121. Modüler aritmetik ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.1.7.1. Matematik öğretmenlerinin Modüler Aritmetik ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Denklem kurma: Problemde verilen bilgilere göre A rakamını elde etmek için denklem oluşturma durumlarını temsil etmektedir. “denklem kurma” kategorisi “ortak paranteze alma”, “bölünebilme bilme”, “modüler aritmetik bilme” ve “toplam formülünü bilme” olarak dört alt kategoride ele alınmıştır.

M1’in “denklem kurma” kategorisi çözümü Şekil 4.122’deki gibidir.


$$6.A = 9k + 3$$

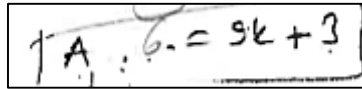
Şekil 4.122. M1’in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

M3’ün “denklem kurma” kategorisi çözümü Şekil 4.123’deki gibidir.


$$A. 6 = 9k + 3$$

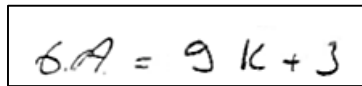
Şekil 4.123. M3’ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

M4’ün “denkleme kurma” kategorisi çözümü Şekil 4.124.’deki gibidir.


$$1 A . 6 = 9k + 3$$

Şekil 4.124. M4’ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

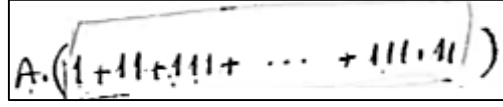
M5’in “denklem kurma” kategorisi çözümü Şekil 4.125’deki gibidir.


$$6.A = 9k + 3$$

Şekil 4.125. M5’in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Ortak çarpan parantezine alma: Toplam ifadesini A parantezine alma durumlarını temsil etmektedir. “ortak çarpan parantezine alma” alt kategorisi “genelden özele ilişki kurma”, “çözümleme yapma” ve “benzerlere odaklanma” olarak üç boyutta ele alınmıştır.

M1, “Daha sonra bütünüyle bu ifadeyi A parantezine alacaktır” açıklamasında belirttiği gibi ifadeyi Şekil 4.126’da görüldüğü gibi A parantezine almıştır.



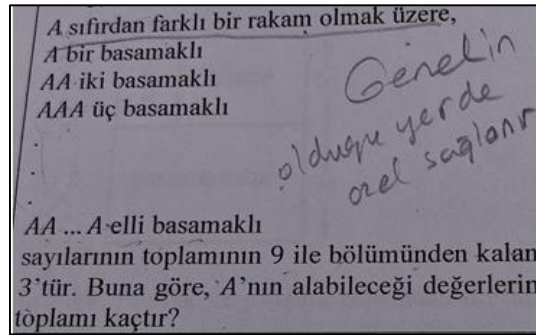
$$A \cdot (1 + 11 + 111 + \dots + 111 \dots 111)$$

Şekil 4.126. M1'in "ortak çarpan parantezine alma" alt kategorisine ait çözümü

Genelden özele ilişkisini kurma: Genelle özel arasındaki ilişkiyi ortaya koyma durumlarını temsil etmektedir. "genelden özele ilişki kurma" boyutu "genelleme" ve "örneklendirme" olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M1'in "Bu gibi şeylerde zaten sıfırdan farklı bir rakam dendiğinde burada şu mantığı görmesi lazım. Genelinde olduğu yerde özel sağlanır." açıklaması "genelden özele ilişki kurma" kategorisi ile değerlendirilmiştir. M1 "genelden özele ilişki kurma" kategorisinin bu tür problemleri çözme sürecinde önemli bir nokta olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla bu kategori M1 tarafından problem çözme sürecinde AN olarak belirlenmiştir. Devamında M1, "Burada dikkat etmesi gereken şey bir kere problemi çözmesi için kısıtlı bir süre var. ÖSYM kendisinden amaçsızca işlem yapmasını istemediğini bilmesi gerekiyor." açıklamasını yapmıştır. M1'in bu açıklaması problem çözme sürecinde bireyin sebepsiz ve gereksiz işlem yapmasını önleyebilmesi açısından AN tanımı ile uyumu açısından anlamlı bulunmuştur.

M1 problemi okuduktan sonra Şekil 4.127'de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına "genelinde olduğu yerde özel sağlanır." yazmıştır.



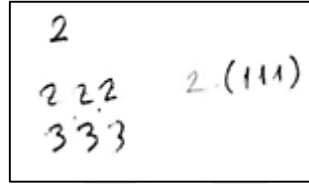
Şekil 4.127. M1'in "genelden özele ilişki kurma" boyutuna ait çözümü

Örneklendirme: Düşünceleri somutlaştırmak amacıyla örnek verme durumlarını temsil etmektedir.

M1 bazı özel değerler için deneme yoluna gidilebileceğini, koşullar sağlandığı takdirde bunu bütün toplama uygulanabileceğini belirtmiştir. M1'in açıklaması şöyledir:

“A, 1 olursa ne olur, 2 olursa ne olur, 3 yazarsam ne olur diyerek hepsinin AA ifadesinin 11 sayısının katı olduğunu görebilir. Bu gibi şeylerde zaten sıfırdan farklı bir rakam dendiğinde burada şu mantığı görmesi lazım. Genelini olduğu yerde özel sağlanır. Yani mantık olarak. A sayısı için yazdığında 1 için 2 için 3 için de sağlayabilir şeklinde düşünebilir.”

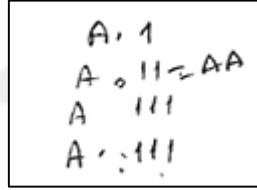
M1 çalışma kâğıdının bir bölümüne bazı özel değerler için durumu kontrol etmesi Şekil 4.128’de verilmiştir.



Şekil 4.128. M1’in “örneklendirme” alt boyutuna ait çözümü

Genelleme: Genel ifadeler oluşturma durumlarını ifade etmektedir.

M1 Şekil 4.129’da görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.



Şekil 4.129. M1’in “genelleme” kategorisine ait çözümü

M1, Şekil 4.129’da yaptığı işlemler için “222 veya 333 gibi sayıları 2.111 ve 3.111 olarak yazabilmemizden hareket ettim” açıklamasını yapmıştır. M1’in açıklaması ile “örneklendirme” kategorisi ile “genelleme” kategorisi arasında ilişki kurduğu söylenebilir.

Çözümleme yapma: Sayıyı rakamlarının basamak değerleri toplamı biçiminde yazma durumunu temsil etmektedir.

M3 öğretmen “çözümlemeden de yapılabilir” açıklaması ile “çözümleme yapma” kategorisi ilişkilendirilmiştir.

Benzerlere odaklanma: Benzer olan cebirsel ifadelere dikkat etme durumunu temsil etmektedir.

M1, “Burada önemli olan toplamı yazdıktan sonra benzerlerden yola çıkmaktır. Yani A, AA, AAA bunların hepsi bize bir şey ifade etmesi lazım.” açıklaması “benzerlere odaklanma” kategorisi ile ilişkilendirilmiştir.

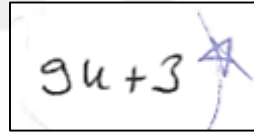
M2, “Şimdi $A + AA + AAA + \dots + A \dots A$ şeklinde gidiyor” açıklamasını yapmıştır.

Bölünebilme bilme: Bölme ve bölünebilme ile ilgili kural ve uygulamaları bilme durumlarını temsil etmektedir.

M1, “Bu toplamın 9 ile bölümünden kalana bakma telaşındayız. Parantez içindeki ifadenin 9 ile bölümünden kalanı bulabilirsem A ile ilgili fikir yürütebilirim. A üzerinden yorum yapabilirim.” açıklamasını yapmıştır.

Genel biçimde yazma: 9 ile bölümünden kalanı 3 veren sayıyı genel biçimde ifade etme durumunu temsil etmektedir.

M5 bu tür problemlerde öğrencilerin 9 ile bölümünden kalanı ifade etmekte zorlandıklarını söylemiştir. M5, “Bir de 9 ile bölümünden kalanın ifade edilmesini bilecek. Örneğin 9 ile bölümünden kalan 3 ise $9k + 3$ yazmalı.” açıklamasını yapmıştır ve Şekil 4.130’da görüldüğü gibi çözüme devam etmiştir.



The image shows a handwritten mathematical expression $9k+3$ in blue ink, with a small star symbol drawn to the right of the expression. The entire content is enclosed within a rectangular box.

Şekil 4.130. M5’in “genel biçimde yazma” boyutuna ait çözümü

9 ile bölünebilme kuralını uygulama: 9 ile bölünebilme kuralını uygulama durumunu temsil etmektedir.

M2, “Burada rakamları toplamına bakmak gerekiyor.” açıklaması ile “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” kategorisini M2, “Önemli noktalardan birisi 9 ile bölünebilme kuralını uygulamak.” açıklaması ile ifade etmiştir.

M3, “9 ile bölümünden kalan soruluyorsa direk kaç tane A var ona bakalım” açıklaması ile “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” boyutu ile ilişkilendirilmiştir.

M4, “Sayıların toplamının 9 ile bölümünden kalan verilmiş. Şimdi öğrenci 9 ile bölünebilme kuralını bilecek.” açıklamasında bu durumu ifade etmiştir. M4, “O zaman sayıların rakamları toplamına bakarsak burada 1 tane A var. Burada 2 tane A oldu.

Burada 3 tane A oldu. Sonra burada da 50 tane A olduğunu bilecek” açıklamasını yapmıştır.

M5, “*Öğrenci 9 ile bölünebilme kuralını bilecek öncelikle*” açıklamasını yapmıştır.

Modüler aritmetik bilme: Modüler aritmetik ile ilgili tanım ve özellikler ile ilgili durumları temsil etmektedir. “Modüler aritmetik bilme” alt kategorisi “modüler toplama bilme” ve “modüler çarpma bilme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M1’in “*Ama öğrencinin modüler aritmetik bilgisi varsa farklı şekillerde dahi düşünebilir.*” açıklaması ile anahtar noktanın problem çözme sürecinde sonuca ulaştırmada bireye yardım edebilmesini sağlayacak temel fikirler olabilmesi özelliğini vurgulamıştır. Aynı şekilde M1’in “*Modüler aritmetik bilgisi varsa eğer bir yol tıkanıldığında başka bir yol bulabilir. Gazoz açacağı yoksa kaşıkla açmak gibi diyebilirim.*” açıklaması ile AN’nin bireyi problem çözmede hedefe götürebilmesi özelliğinin vurgulandığı söylenebilir.

M2, “*Modüler aritmetiği bilmese soruyu yapar ama deneme yanılma yoluyla yapar. O zaman da zorlanır açıkçası. Eksik bir kök bulabilir.*” açıklaması ile “modüler aritmetiği bilme” kategorisinin problemin çözümünde önemli bir nokta olduğunu ifade etmiştir.

M3’ün “*Ayrıca mod mantığı ile çözüme ilerledim. Modüler aritmetiğin mantığının bilinmesi gerekir.*” açıklaması “modüler aritmetiği bilme” kategorisi altında değerlendirilmiştir. Aynı zamanda bu açıklamayla birlikte M3 problemin çözüm süreci AN olarak belirlediğini ifade etmiştir.

Modüler toplama bilme: Modüler toplama özelliğinin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

M1 ifadenin 9 ile bölümünden kalanı bulmaya çalıştığını; bunun için de modüler aritmetik kullanacağını ifade etmiştir. M1, “*Bunun 9 ile bölümünden kalan 1, bunun 9 ile bölümünden kalan 2, bunun 9 ile bölümünden kalan 3 ve en sondaki kısmın 9 ile bölümünden kalan 50’dir.*” açıklaması ile “modüler toplama bilme” boyutu oluşturulmuştur.

M2, “*Sonuçta bunları topladığımızda da rakamları toplamına bakacağım. O zaman sayıların rakamları toplamına bakarım*” açıklaması ile birlikte Şekil 4.131’de verilen çözümü yapmıştır.

$$A + 2A + 3A + \dots + 50A$$

Şekil 4.131. M2'nin "modüler toplama" boyutuna ait çözümü

M4'ün "modüler toplama" kategorisi çözümü Şekil 4.132'de verilmiştir.

$$1.A + 2.A + 3.A + \dots + 50A$$

Şekil 4.132. M4'ün "modüler toplama" boyutuna ait çözümü

Modüler çarpma bilme: Modüler çarpma özelliğinin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

M2'nin "modüler çarpma" boyutu çözümü Şekil 4.133'deki gibidir.

$$\begin{array}{r} 25 \\ A \cdot 51 \\ \hline 2 \end{array} \equiv 3 \pmod{9}$$

$$6A \equiv 3 \pmod{9}$$

Şekil 4.133. M2'nin "modüler çarpma" boyutuna ait çözümü

M3'ün "modüler çarpma" boyutu çözümü Şekil 4.134'deki gibidir.

$$\begin{array}{r} A \cdot 25 \cdot 51 \\ A \cdot 7 \cdot 6 \end{array} = 56 + 3$$

Şekil 4.134. M3'ün "modüler çarpma" boyutuna ait çözümü

M4 bu problemde olmasa bile sayıların daha büyük olduğu durumlarda modüler aritmetik kullanmanın süre açısından öğrenciye avantaj sağlayacağını söylemiştir. Buna ek olarak M4 "A. 25.51 ifadesinde olduğu gibi eğer 3 veya 5 tane sayı çarpım durumundaysa her birinin 9 ile bölümünden kalanların çarpımı sayıların çarpımından 9 ile bölümünden kalana eşit olacaktır." açıklamasını yapmıştır. M4 "modüler çarpma bilme" kategorisinin bu tür problemlerin çözme sürecinde önemli olduğunu söylemiştir.

M4'ün çözümü Şekil 4.135'deki gibidir.

Şekil 4.135. M4'ün “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü

M5 bu tür problemlerde modüler aritmetik mantığını bilmesi gerektiğini ifade etmiştir. M5, “Öğrenci burada modüler aritmetik kullanır ama belki onu kullandığını anlamaz. Çarpım yapmadan kalanlar üzerinden işlem yapmayı bilmeli” açıklaması ile “modüler çarpma bilme” boyutunun problemin çözümünde anahtar nokta olduğunu ifade etmiştir. M5 bu durumu Şekil 4.136’da görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.

Şekil 4.136. M5’in “modüler çarpma” boyutuna ait çözümü

Toplam formülünü bilme: 1’den n’ye kadar ardışık sayıların toplam formülünün bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

M1, “Burada 1 den 50’ye kadar olan sayıların toplamı formülünün ezbere kaçtığını düşünüyorum.” açıklamasında belirttiği gibi AN olamayacağını bu tür bilgilerin öğrenciler tarafından bilindiğini ama problem çözmede sonuca ulaştırmadığını belirtmiştir.

M1’in çözümü Şekil 4.137’deki gibidir.

Şekil 4.137. M1’in “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü

M2, “Bir A, iki A, üç A, elli A’nın toplamına bakacağım” diyerek Şekil 4.138’deki gibidir.

$$A + 2A + 3A + \dots + 50A = A \cdot \frac{50 \cdot 51}{2}$$

Şekil 4.138. M2'nin "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü

M3'ün "1'den n'ye kadar olan sayıların toplam formülünün bilindiğini düşünüyorum." açıklaması ile bu alt kategorinin problem çözme sürecinde AN olmadığını ifade etmiştir.

M3'ün çözümü Şekil 4.139'daki gibidir.

$$A(1 + \dots + 50) = A \cdot \frac{50 \cdot 51}{2}$$

Şekil 4.139. M3'ün "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü

M4, "Sonra ardışık sayıların toplam kuralını zaten bilmesi lazım burada çocuğun" açıklaması ile bu alt kategorinin zaten öğrenci tarafından bilindiğini dolayısıyla önemli bir nokta olmadığını belirtmiştir. M4 öğretmenin çözümü Şekil 4.140'da verilmiştir.

$$A(1 + 2 + \dots + 50) = A \cdot \frac{50 \cdot 51}{2}$$

Şekil 4.140. M4 öğretmenin "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü

M5, "toplam formülünü bilme" alt kategorisinin bilinmesi gerektiğini söyleyerek Şekil 4.141'de görüldüğü gibi problem çözme sürecinde AN olduğunu ifade etmiştir.

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \text{toplam biliniyor}$$

$$\frac{50 \cdot 51}{2} \cdot A = 9K + 3$$

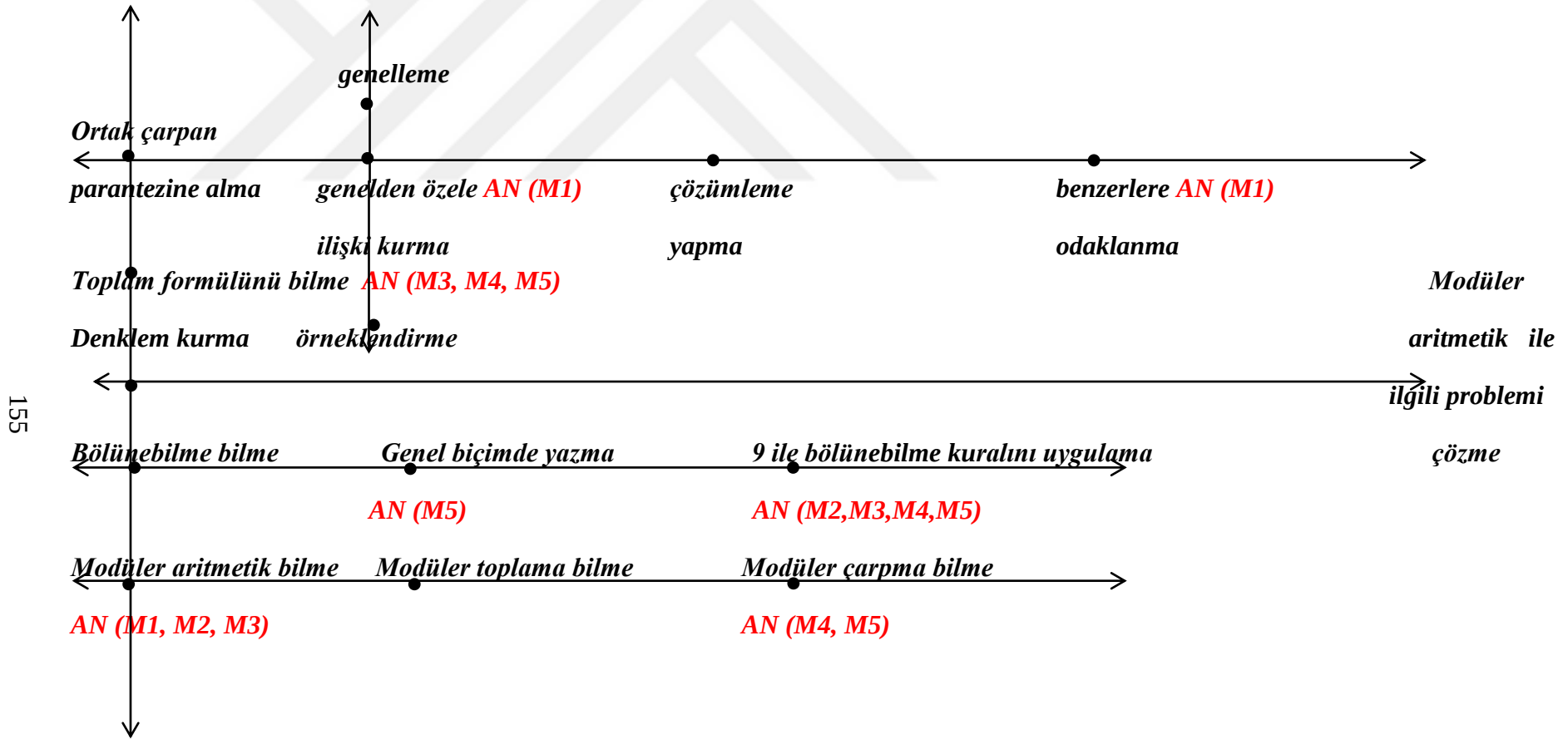
Şekil 4.141. M5'in "toplam formülünü bilme" alt kategorisine ait çözümü

Denklem çözme: Denklemi sağlayan A değerlerinin bulunması durumunu temsil etmektedir.

M5, “*En sonda ise sağlayan değerleri vermeyi bilebilir.*” açıklaması ile problemin çözümünde başka önemli bir nokta olmadığını ifade etmiştir.

M1 “genelden özele ilişki kurma” ve “benzerlere odaklanma” boyutunu AN olarak belirlemiştir. M5 “genel biçimde yazma” boyutunu AN olarak belirlemiştir. M1, M2 ve M3 “modüler aritmetik bilme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. M4 ve M5 “modüler çarpma bilme” boyutunu AN olarak belirlemiştir. M3, M4, M5 “toplam formülünü bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2, M3, M4, M5 öğretmenler “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir.

Matematik öğretmenlerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyutlar ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.142’deki gibidir.



Şekil 4.142. Matematik öğretmenlerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.8. Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2018 yılında AYT sınavında sorulmuş olan polinom fonksiyon ile ilgili problemin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve problem çözme sürecindeki AN'leri belirlenmiştir. Öğretmenler çözümü görmek istememiştir. 2018 AYT sınavında sorulmuş olan polinom fonksiyon ile ilgili problem Şekil 4.143'teki gibidir.

Gerçek katsayılı ve baş katsayısı 1 olan 4.dereceden bir $P(x)$ polinomu her x gerçek sayısı için

$$P(x) = P(-x)$$

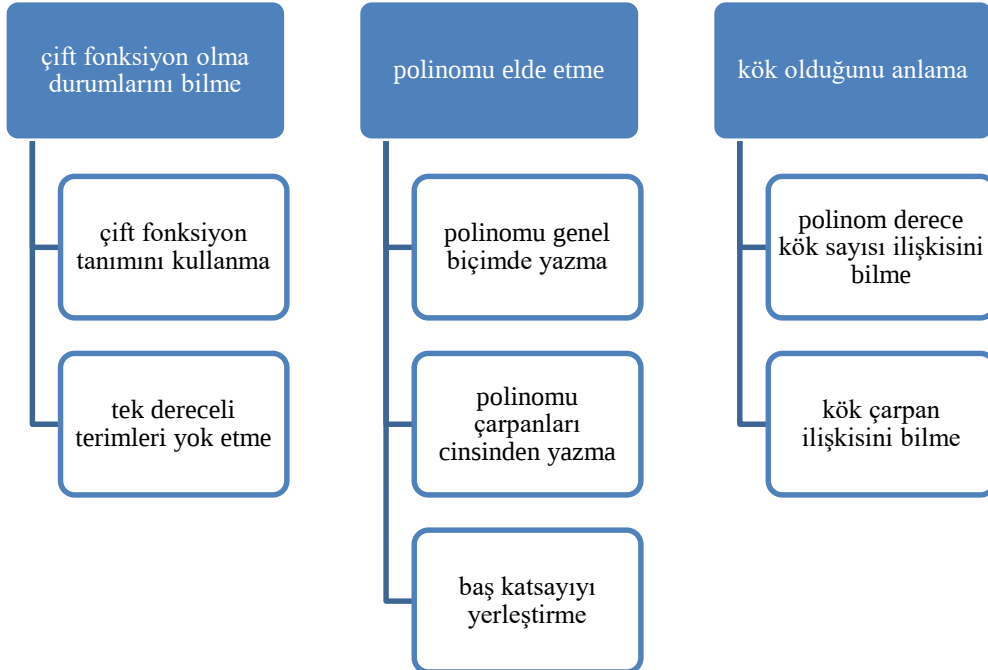
eşitliğini sağlamaktadır.

$$P(2) = P(3) = 0$$

olduğuna göre, $P(1) = ?$

Şekil 4.143. Polinom fonksiyon ile ilgili problem

Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.144'teki gibidir.



Şekil 4.144. Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategori ve alt kategorileri

4.1.8.1. Matematik Öğretmenlerinin Polinom Fonksiyon ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Çift fonksiyon olma durumlarını bilme: Çift fonksiyon tanımını ve uygulamalarını bilme durumlarını temsil etmektedir. “çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisi “çift fonksiyon tanımını kullanma” ve “tek dereceli terimleri yok etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M1, “Burada en önemli bilgi çift fonksiyon olma durumu bilgisidir.” açıklaması ile problem çözme sürecinde “çift fonksiyon olma durumunu bilme” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. M1, AN olarak belirlediği “çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisi ile alternatif bir yol ile de problemin çözülebileceğini belirtmiştir.

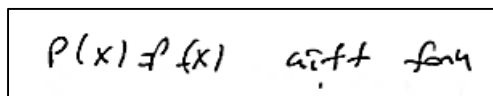
M1, AYN olarak adlandırdığımız AN olan “çift fonksiyon olma durumları bilme” kategorisine sahip öğrenci “polinomu elde etme” kategorisine ait farklı alt kategorilere sahip olmasına göre farklı bir çözüm yolu geliştirebilir.

M2 problemi okuduktan sonra “Bu problemde ne önemli, öğrenci neyi bilmesi gerekiyor. Tek çift fonksiyon ne demek bilmesi gerekiyor.” açıklaması ile “çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M2 ile polinom fonksiyon ile ilgili problem için alternatif çözüm yolu da araştırmacı tarafından paylaşılmıştır. M2, “Çift fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetrik olduğunu bilen bir öğrenci polinomun iki kökü ise 2 ve 3 ise diğer köklerin -2 ve -3 olduğunu düşünebilir.” diyerek bu çözüm yolu için de “çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Çift fonksiyon tanımını kullanma: “ $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ çift fonksiyondur.” ifadesini bilme veya $f(-x) = f(x)$ bilgisinden yararlanma durumunu temsil etmektedir. “çift fonksiyon tanımını kullanma” alt kategorisi “çift fonksiyon olduğunu anlama” ve “tek dereceli terimleri yok etme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M5 problem çözümüne “Öncelikle öğrenci çift fonksiyon tanımını biliyor mu” diyerek başlamıştır ve Şekil 4.145’te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.

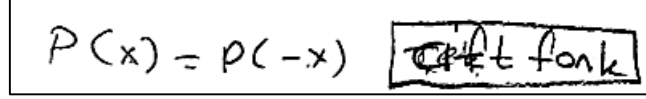


The image shows a handwritten note on a piece of paper. The text is written in Turkish and reads: "P(x) = f(x) çift fonksiyon". The word "çift" is written with a dot over the 'i'.

Şekil 4.145. M5’in “çift fonksiyon tanımını kullanma” alt kategorisine ait çözümü

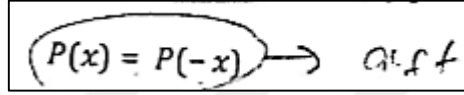
Çift fonksiyon olduğunu anlama: " $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ çift fonksiyondur." ifadesini bilme durumunu temsil etmektedir.

M1 problemi okuduktan sonra " $P(x)$ polinomu çift fonksiyon" diyerek çalışma kâğıdına Şekil 4.146'da görüldüğü gibi problem çözümüne başlamıştır.


$$P(x) = P(-x) \quad \boxed{\text{çift fonk}}$$

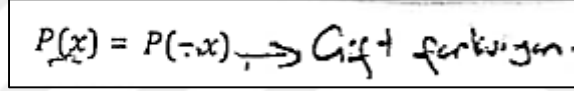
Şekil 4.146. M1'in "çift fonksiyon olduğunu anlama" boyutuna ait çözümü

M2'nin "Bu ifade ile çift fonksiyon olduğunu bilmesi gerekiyor" diyerek Şekil 4.147'de görüldüğü gibi problemde verilen ifadeyi yuvarlak içine almıştır.


$$(P(x) = P(-x)) \rightarrow \text{çift}$$

Şekil 4.147. M2'nin "çift fonksiyon olduğunu anlama" boyutuna ait çözümü

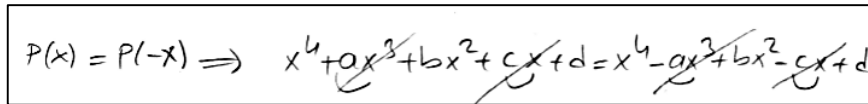
M3, "Çift fonksiyon" diyerek Şekil 4.148'de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.


$$P(x) = P(-x) \rightarrow \text{Çift fonksiyon.}$$

Şekil 4.148. M3'ün "çift fonksiyon olduğunu anlama" boyutuna ait çözümü

$P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma: $P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma durumlarını temsil etmektedir. " $P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma" kategorisi "dört denklem elde etme" ve "kökleri elde etme" olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M4, "eksinin çift kuvveti artı, eksinin tek kuvveti artı olacağı için o zaman tek kuvvetlerinin olmaması gerekiyor" diyerek Şekil 4.149'da verilen çözümü yapmıştır.


$$P(x) = P(-x) \Rightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$

Şekil 4.149. M4'ün " $P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma" boyutuna ait çözümü

M4'ün çözümü ve açıklaması incelendiğinde " $P(-x) = P(x)$ bilgisini kullanma" boyutu ile "tek dereceli terimleri yok etme" alt kategorisi arasında bir ilişki kurulmuştur.

Dört denklem elde etme: $P(-x) = P(x)$ bilgisinden faydalananarak dört tane denklem elde etme durumunu temsil etmektedir.

M1 Şekil 4.150.'da görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

4 bilinmeyen
 $p(2)=0$
 $p(-2)=0$
 $p(3)=0$
 $p(-3)=0$ } 4 denklem
 çözülür. SÜRE

Şekil 4.150. M1'in "dört denklem elde etme" alt boyutuna ait çözümü

M1'in öğrencilerin heyecan ve zamanı kullanma becerisi dikkate alındığında Şekil 4.150'de verilen çözüm yolunun ideal bir çözüm yolu olmadığını ifade etmiştir. M1'in açıklaması şöyledir.

"Dört bilinmeyen ve dört denklem var. Buradan çözebilir. Ama sıkıntı süre sıkıntısı yaşaması bir yana yıpranacaktır. Biz yeri geldiği zaman iki denklemini çözemedik öğrencilere."

Kökleri elde etme: Polinomun köklerinin olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir.

M1 daha sonra " $P(-x) = P(x)$ olduğu için" diyerek Şekil 4.151'de verilen ifadeyi yazmıştır. Daha sonra M1, "birinci kök, ikinci kök, üçüncü kök ve dördüncü kök olduğunu görmesi gerekir" açıklamasını yapmıştır.

$$p(2) = p(3) = 0 = p(-2) = p(-3)$$

Şekil 4.151. M1'in "kökleri elde etme" alt boyutuna ait çözümü

Tek dereceli terimleri yok etme: Çift fonksiyon olduğu için tek dereceli terimlerin katsayılarının sıfır olmasını bilme durumunu temsil etmektedir. "Tek dereceli terimleri yok etme" kategorisi "iki denklem elde etme" ve "çift dereceli polinomu yazma" olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

M3, "Çift fonksiyon olduğu için tek dereceli terimlerin katsayıları sıfırdır" açıklamasını yapmıştır.

M5, "Çift fonksiyon tanımını biliyorsa verilen polinomda tek dereceli terimlerin olmadığını bilecek, Tek dereceli terimlerin katsayısı sıfır olacak" açıklamasını yapmıştır.

Çift dereceli polinomu yazma: Dördüncü dereceden çift dereceli polinomun genel biçimde yazılması durumunu temsil etmektedir.

M2'nin çözümü Şekil 4.152'deki gibidir.

$$P(x) = a x^4 + b x^2 + c x^0$$

Şekil 4.152. M2'nin “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü

M3 problem çözme sürecinde “Bu problemde en önemli nokta çift fonksiyon olduğunu görüp çift fonksiyon polinom fonksiyon olunca x 'in kuvvetlerinin çift olmasıdır” diyerek Şekil 4.153'te görüldüğü üzere çalışma kâğıdına çözümü yapmıştır.

$$P(x) = 1 \cdot x^4 + m \cdot x^2 + n \cdot x^0$$

Çift
Kuvvet.

Şekil 4.153. M3'ün “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü

M4 çalışma kâğıdına Şekil 4.154'te görüldüğü üzere çözümü yapmıştır.

$$P(x) = x^4 + b x^2 + d \text{ olmalı.}$$

Şekil 4.154. M4'ün “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü

M5, “Tek dereceli terimler olmayacak. Şu polinomu yazabiliyor mu” diyerek Şekil 4.155'te görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

$$P(x) = x^4 + a x^2 + b$$

Şekil 4.155. M5'in “çift dereceli polinomu yazma” boyutuna ait çözümü

İki denklem elde etme: $P(2) = P(3) = 0$ bilgisinin kullanılarak iki denklem elde edilmesi durumunu temsil etmektedir.

M2 bu aşamadan sonra “Sonra şu bilgileri de vermiş. iki bilinmeyen var, iki de bilgi var. 2 koyduğumuz zaman sıfır oluyormuş.” diyerek Şekil 4.156'da görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

$$\begin{array}{rcl}
 - & / & 16 + 4a + b = 0 \\
 + & & 81 + 9a + b = 0 \\
 \hline
 & & 65 + 5a = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 a = -13 \\
 b = 36
 \end{array}$$

Şekil 4.159. M5'in "iki denklem elde etme" boyutuna ait çözümü

Polinomu elde etme: $P(x)$ polinomun katsayılar yerleştirilerek elde edilmesi durumunu temsil etmektedir. "polinomu elde etme" kategorisi "baş katsayıyı yerleştirme", "polinomu genel biçimde yazma" ve "polinomu çarpan cinsinden yazma" olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

M2 Şekil 4.160'da görüldüğü gibi çözümü tamamlamıştır.

$$\begin{array}{l}
 P(x) = x^2 - 13x^2 + 36 \\
 P(1) = 1 - 13 + 36 \\
 = 37 - 13 = 24
 \end{array}$$

Şekil 4.160. M2'nin "polinomu elde etme" kategorisine ait çözümü

M3 son olarak Şekil 4.161'de görüldüğü gibi m ve n değerlerini polinomda yerine yazarak $P(x)$ polinomunu elde etmiştir.

$$\begin{array}{l}
 P(x) = x^4 - 13x^2 + 36 \\
 P(1) = 1 - 13 + 36 = 24
 \end{array}$$

Şekil 4.161. M3'ün "polinomu elde etme" kategorisine ait çözümü

M4, "buradan katsayıları bulurum" diyerek denklemleri çözmüştür. M4, "burada bulduğum b ve d 'yi yerine yazarım" diyerek Şekil 4.162'de görüldüğü gibi polinom ifadesinde yerlerine yazmıştır.

$$p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$p(1) = 1 - 13 + 36 = 24 //$$

Şekil 4.162. M4 öğretmenin “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü

M5 a ve b yerine değerlerini yazmıştır ve $P(x)$ polinomunu Şekil 4.163’te görüldüğü gibi elde etmiştir.

$$p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$p(1) = 1 - 13 + 36 = \underline{\underline{24}}$$

Şekil 4.163. M5’in “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü

Baş katsayıyı yerleştirme: Polinomun baş katsayısını 1 yazma durumunu temsil etmektedir.

M1, “Burada m katsayısını ne yapacağız? Baş katsayısı 1 şimdi gördüm.” açıklamasını yaparak Şekil 4.164’te görüldüğü gibi ilk olarak m yazdığı yere 1 yazarak çözüme devam etmiştir.

$$1 \cdot (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = p(x)$$

Şekil 4.164. M1’in “baş katsayıyı yerleştirme” alt kategorisine ait çözümü

M2 “Burada bize baş katsayıyı vermiş. O zaman $a = 1$ ’dir deriz” diyerek a ’nın üstüne 1 yazmıştır. M2, “Baş katsayısının 1 olmasına dikkat etmeli” diyerek “baş katsayıyı yerleştirme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3, “Baş katsayısı 1 ve dördüncü dereceden bir polinom olduğu için polinomu yazalım” açıklaması ile polinomu yazarken adlandırma yapmadan baş katsayısını 1 olarak yazmıştır.

M4, “baş katsayısı 1 ve dördüncü derece olduğu için bunu yazdım.” diyerek problemin çözümüne başlamıştır. M4, “buradaki önemli nokta baş katsayısının 1 olduğunu öğrencinin görebilmesi” diyerek “baş katsayıyı yerleştirme” kategorisini problemin çözümünde AN olarak belirlemiştir.

Polinomu genel biçimde yazma: Dördüncü dereceden bir polinomun genel biçimde yazılması durumunu temsil etmektedir.

M1'in "kök çarpan ilişkisini bilme" kategorisine sahip olmayan bir öğrencinin farklı bir yolla düşünebileceğini belirtmiştir. Bu durumda M1, " $P(x)$ polinomunu dördüncü dereceden olduğu için" diyerek Şekil 4.165'te görüldüğü gibi çözümü yazmıştır.

II $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 5 bilinmeyen
 $a=1$ olur
 $b=d=0$
 çift

Şekil 4.165. M1'in "polinomu genel biçimde yazma" alt kategorisine ait çözümü

M1 aşağıdaki açıklaması ile "dört denklem elde etme" ve "polinomu genel biçimde ifade etme" kategorileri arasında ilişki kurmuştur.

"Şimdi burada 5 tane bilinmeyen var. Şimdi bu 5 bilinmeyenden sonra $a = 1$ olduğu için biri azalır ve dört bilinmeyen oldu. Öğrenci çift fonksiyon olduğu zaman tek dereceli terimlerin katsayılarının sıfır olduğunu biliyorsa buradan b ve d nin sıfır olduğunu görebilir. Buradan iki bilinmeyene düşürerek sonuca ulaşabilir."

M4, Şekil 4.166'da görüldüğü gibi polinomu genel biçimde yazmıştır.

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Şekil 4.166. M4'ün "polinomu genel biçimde yazma" alt kategorisine ait çözümü

Polinomu çarpan cinsinden yazma: Bir polinomun iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması durumunu temsil etmektedir.

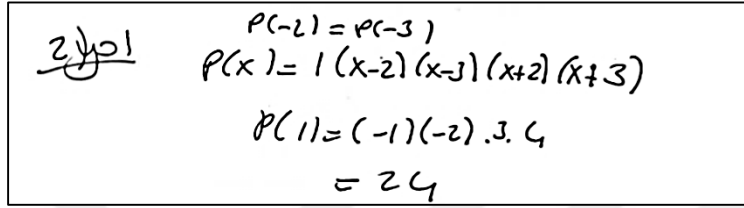
M1, "çarpanlı düşünürsek köklerimizde hazır" diyerek Şekil 4.167'de görüldüğü gibi yazmıştır. M1 öğretmenin "çarpanlı düşünürsek" diyerek ifade ettiği durum "polinomu çarpanları cinsinden yazma" kategorisi ile ilişkilendirilmiştir. M1 bu kategoriye AN olarak belirlemiştir.

4. derece 4 kök
 $m(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$
 1. kök

Şekil 4.167. M1'in "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

M1 bu noktada AN'nin öğrencinin bilgisine göre değiştiğini belirtmekle birlikte en ideal çözüm yolunun “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisi ile oluştuğunu ifade etmiştir.

M5, “*Şimdi bunu iki şekilde yapabilir*” diyerek problemin çözümü için alternatif bir yol olduğunu belirtmiştir. M5, “*Hem de çift fonksiyon olduğu için $P(2) = P(3) = 0$ verildiğinde $P(-2) = P(-3) = 0$ yazabilmesi önemli*” açıklaması ile Şekil 4.168’de verilen çözümü çalışma kâğıdına yazmıştır.


$$\begin{aligned} P(-2) &= P(-3) \\ P(x) &= 1(x-2)(x-3)(x+2)(x+3) \\ P(1) &= (-1)(-2) . 3 . 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Şekil 4.168. M5’in “polinomu çarpan cinsinden yazma” alt kategorisine ait çözümü

Kök olduğunu anlama: Polinomun kökü olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir.

M1, “*kök olduğunu görmesi gerekir*” açıklamasını ve M5, “*önce bunların kökü olduğunu bilmesi lazım*” açıklamasını yapmıştır.

M3, “*Diğer kökleri $P(x) = P(-x)$ ifadesinden sezmek gerekiyor.*” diyerek “kök olduğunu anlama” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Polinom derecesi ile kök sayısı ilişkisini bilme: Polinomun derecesi ile kök sayısının aynı olması durumunu temsil etmektedir.

M5, “*kaç kökü olduğunu bilmesi lazım*” diyerek polinomun köklerinin tespit edilmesini sağlayan “polinomun derece kök sayısı ilişkisini bilme” alt kategorisine de değinmiştir.

Kökü çarpan ilişkisini bilme: Polinomun kökü verildiğinde çarpan olarak yazma durumunu temsil etmektedir.

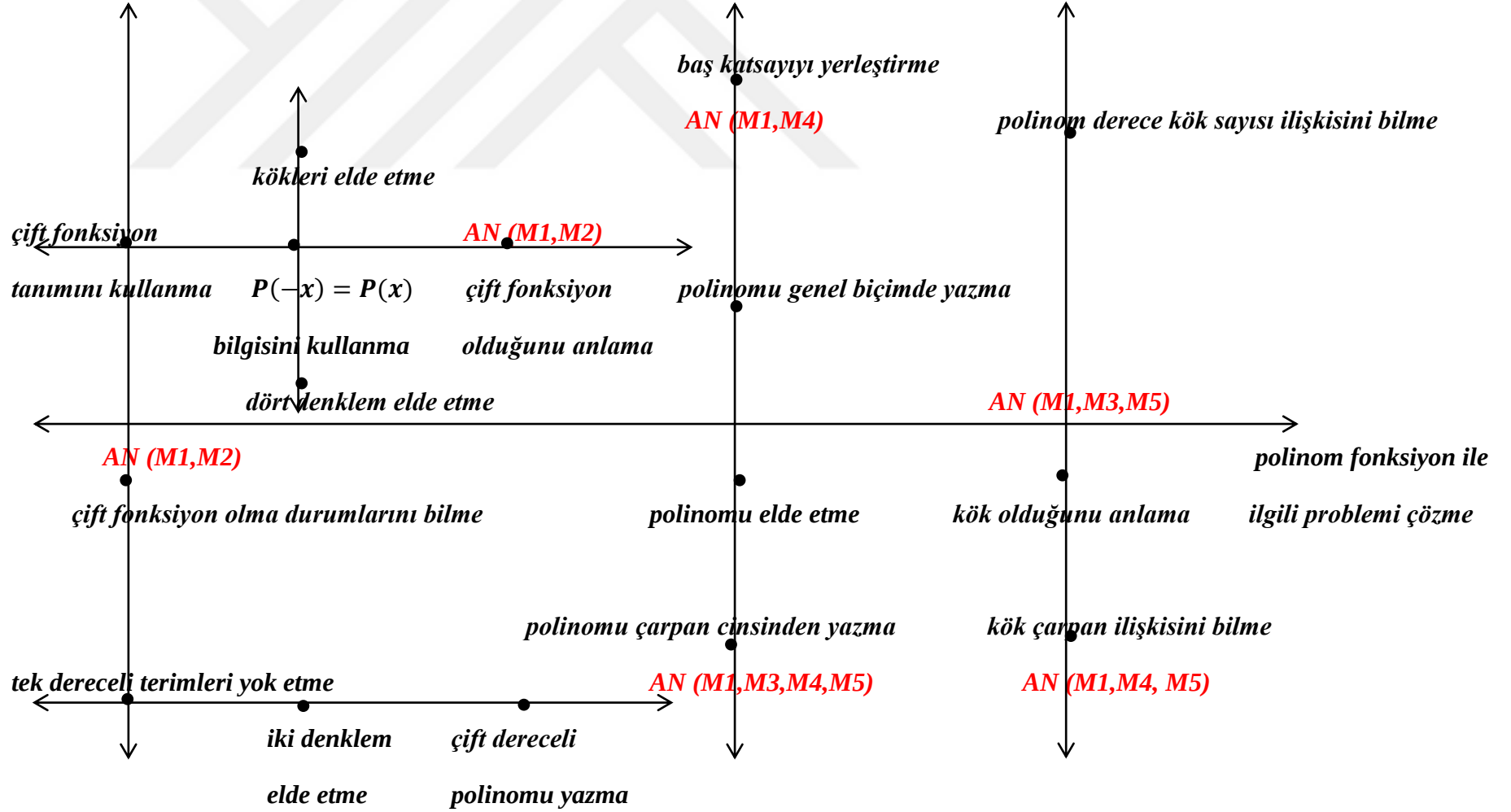
M5, “*çarpanlardan birisi $(x - 2)$, birisi $(x - 3)$ ve diğerleri $(x + 2)$ ve $(x + 3)$ olacak. Yani polinomun kökü olduğunu gördükten sonra çarpanı olduğunu bilmesi lazım.*” açıklaması ile “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

M1, M3, M5 “kök olduğunu anlama” kategorisini, M1, M4, M5 “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2 ve M4 öğretmenler “baş katsayıyı yerleştirme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M3, M4 ve M5 “polinomu

arpanları cinsinden yazma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1 ve M2 ğretmenler çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Matematik ğretmenlerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi şekil 4.169’daki gibidir.





Şekil 4.169. Matematik öğretmenlerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler, alt kategoriler, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.1.9. Maksimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

2018 yılında AYT sınavında sorulmuş olan maksimum ile ilgili problemin çözümü araştırmacı tarafından yapılmıştır ve problem çözme sürecindeki AN'leri belirlenmiştir. Öğretmenler çözümü görmek istememiştir. 2018 AYT sınavında sorulmuş olan türev problemi Şekil 4.170'deki gibidir.

Bir internet şirketi en fazla 1000 müşteriye hizmet verebilmekte ve aylık internet ücretini 40 TL olarak belirlediğinde bu sayıya ulaşabilmektedir. Bu şirket aylık internet ücretinde yaptığı her 5 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlemiştir. Bu şirket, aylık internet ücretinden elde edeceği toplam gelirin en fazla olması için aylık internet ücretini kaç TL olarak belirlemelidir?

Şekil 4.170. Maksimum ile ilgili problem

Maksimum ile ilgili problem ile yapılan görüşmede matematik öğretmenlerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.171'de verilmiştir.



Şekil 4.171. Maksimum ile ilgili problem ile ilgili matematik öğretmenlerinin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.1.9.1. Matematik Öğretmenlerinin Maksimum ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma: Gelir fonksiyonun tek değişkene bağlı yazılması durumunu temsil etmektedir. “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisi “gelir hesaplamayı bilme” ve “adlandırma yapma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M1, “*k tane artış yaptığını düşünürsek*” diyerek Şekil 4.172’de belirtilen çözümü yazmıştır. M1 öğretmen “*değişen müşteri sayısına göre gelir hesaplamayı bilmeli*” diyerek bu kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

$$(40 + 5k) \cdot (1000 - 50k) = A$$

Şekil 4.172. M1’in “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

M2, “*Burada önemli olan nokta denklemi kurmaktır. Daha sonra devamını getirecektir. Bu sınıf düzeyine göre değişecektir.*” açıklaması ile problem çözümünde AN olarak belirlediği “toplam gelir ifadesinin tek değişkene bağlı yazılması” kategorisinin aynı zamanda ayrışma noktası olduğunu belirtmiştir. M2 “gelir fonksiyonum” diyerek Şekil 4.173’de verilen çözümü yazmıştır.

$$G = (40 + 5x) \cdot (1000 - 50x)$$

Şekil 4.173. M2’nin “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

M3, “*Fonksiyonu yazalım*” diyerek Şekil 4.174’te verilen çözümü yazmıştır.

$$p(x) = (40 + 5x) \cdot (1000 - 50x)$$

Şekil 4.174. M3’ün “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

M3, “Burada önemli nokta fonksiyonu yazmak” diyerek problem çözümünde “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisini problem çözmede AN olarak belirlemiştir.

M4’ün bu kategori ile ilgili çözümü Şekil 4.175’te belirtilmiştir.

$$A = (40 + 5x) \cdot (1000 - 50x)$$

Şekil 4.175. M4’ün “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

M5 bu tür problemlerde önemli olanın tek değişken kullanıp denklemini yazmak olduğunu söylemiştir. M5 öğretmen “tek değişken kullanıp denklemini yazması lazım” diyerek Şekil 4.176’da belirtilen çözümü yapmıştır.

$$\text{Gelir} = \underbrace{(40 + 5x)}_{\text{Ücret}} \cdot \underbrace{(1000 - 50x)}_{\text{Müşteri sayısı}}$$

Şekil 4.176. M5 öğretmenin “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

M5 bu kategoriye AN olarak belirlemiştir.

Gelir hesaplamayı bilme: Gelir hesabını bilme durumunu temsil etmektedir.

M1, “Şimdi burada normal şartlarda bizim başlangıcımız 1000.40’dır” açıklaması ile birlikte “Toplam geliri buradan çarparak yapacağız.” açıklaması “gelir hesaplamayı bilme” kategorisi ile değerlendirilmiştir. M1 bu tür hesaplamaların nasıl yapılacağını bilmesi gerektiğini söylemiştir. M1, Şekil 4.177’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu belirtmiştir.

$$1000 \cdot 40$$

Şekil 4.177. M1’in “gelir hesaplamayı bilme” alt kategorisine ait çözümü

M1 bu kategoriye AN olarak belirlemiştir.

M2’nin “Toplam gelir nasıl bulunur” açıklaması “gelir hesaplamayı bilme” alt kategorisi ile değerlendirilirken M2 bu kategoriye “Müşteri sayısı ile ücretin çarpımı” diyerek açıklamıştır.

M4 “öğrenci burada geliri bulmada zorlanabilir” açıklaması “gelir hesabını bilme kategorisi ile değerlendirilmiştir. M4 öğrencilerin yaşadığı zorluğu “öğrenci benim param var, paramın üzerine katılanla yani karla beraber olan tamamı gelirdir diye düşünüyor” şeklinde açıklamıştır. M4 bu yanılgının önüne geçmek için öğrencilere verdiği örneği “mesela haftada girdiğim ders karşılığı karşılığında aldığım maaş benim için gelirdir diyorum” diyerek açıklamıştır. M4 bu alt kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

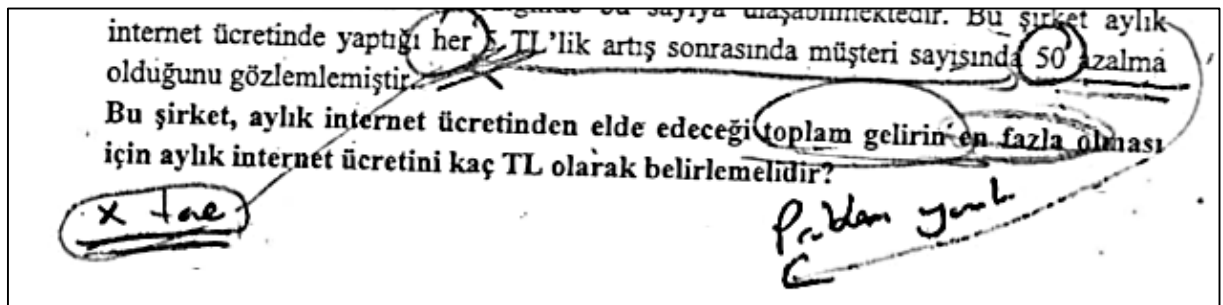
M5 öğrencinin gelir hesabının nasıl yapıldığını bilmesi gerektiğini, hangi iki ifadeyi çarptığını bilmesi gerektiğini söylemiştir. M5, “geliri ücret ile kişi sayısının çarparak bulacağını biliyorsa problemi çözecektir.” diyerek bu alt kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

Adlandırma yapma: Problemde artış miktarının değişkenle gösterilmesi durumunu temsil etmektedir.

M1, “kaç tane 5 TL’lik artış yapıldığını bilmiyoruz. k tane artış yaptığını düşünürsek toplam gelir” açıklamasını yapmıştır.

M2 ilk olarak “ücret nasıl belirleniyor. Normalde ücret 40 TL imiş. Ama sürekli 5 TL’lik artış yapıyormuş. Peki, her 5 TL’lik artışta, x defa 5’ TL’lik artış yapılsın.” açıklamasını yapmıştır.

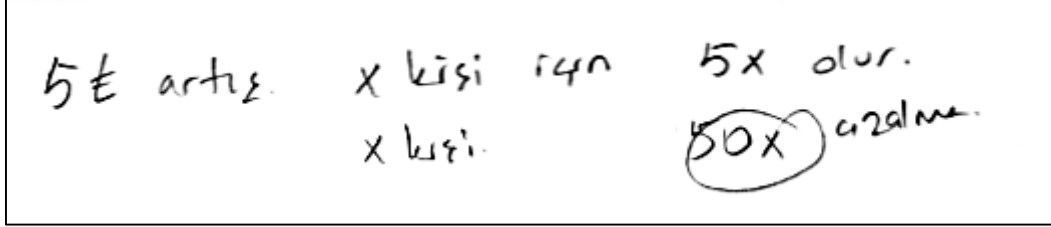
M3, “internet ücretinde yaptığı her 5 TL’lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma oluyormuş. Ha... x tane 5 TL’lik artış olsun.” diyerek Şekil 4.178’de görüldüğü gibi problemde bazı yerlerin altını çizmiştir.



Şekil 4.178. M3’ün “adlandırma yapma” alt kategorisine ait çözümü

M3, “burada “yaptığı her 5 TL’lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma” Yani şu ikisinde de ortak değişken olmasını yorumlayarak o değişkene x denmesi önemli noktadır.” diyerek “adlandırma yapma” alt kategorisi ile ilgili açıklamasına devam etmiştir. M3 öğretmen “adlandırma yapma” alt kategorisini problem çözmede AN olarak belirlemiştir.

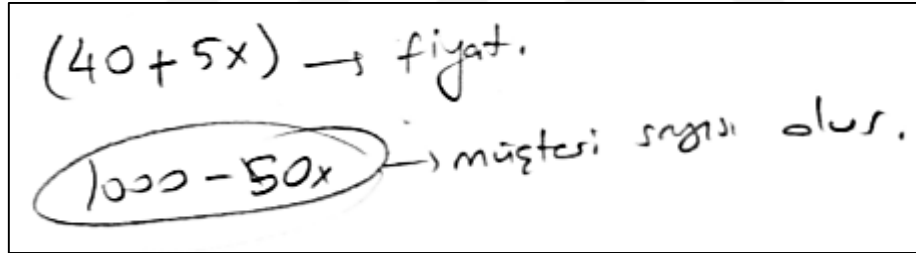
M4, “kaç tane arttığını bilmiyoruz, o halde x diyelim.” açıklaması “adlandırma yapma” alt kategorisi ile değerlendirilmiştir. M4 öğretmen “o zaman x kişi kabul ettiğimize göre $50x$ azalma meydana gelecek” diyerek Şekil 4.179’da görüldüğü üzere yazmıştır.



5 TL artış. x kişi için $5x$ olur.
 x kişi. $50x$ azalma.

Şekil 4.179. M4’ün “adlandırma yapma” alt kategorisine ait çözümü

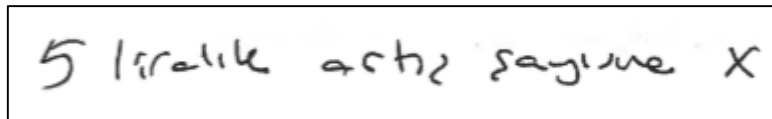
M4, x ’i kullanarak yazılan ifadenin ne olduğunun bilinmesi gerektiğini söylemiştir. Bu şekilde öğrencinin x ’i bulsa bile sonuca ulaşamayacağını belirtmiştir. M4, “bu şekilde elde edeceğim fiyat olacak” diyerek Şekil 4.180.’de görüldüğü üzere yazmıştır. Benzer şekilde “müşteri sayım bu olacak” diyerek çalışma kâğıdına Şekil 4.180’de görüldüğü üzere yazmıştır.



$(40 + 5x) \rightarrow$ fiyat.
 $1000 - 50x \rightarrow$ müşteri sayısı olur.

Şekil 4.180. M4’ün “adlandırma yapma” alt kategorisine ait çözümü

M5, “burada en büyük şey artış sayısına x demektir” diyerek Şekil 4.181’de görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.



5 liralık artış sayısına x

Şekil 4.181. M5’in “adlandırma yapma” alt kategorisine ait çözümü

M5 “adlandırma yapma” kategorisinin problem çözme sürecinden AN olarak belirlediğini ifade ederek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

“Her 5 TL’lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlendiği için kişi sayısı ile ücretin birbiri ile ilişkili olması, onda değişim olduğunda onda da olması aynı bir değişkenle ifade etmeye itebilir.”

Toplam gelir ifadesini yorumlama: Toplam gelir ifadesinin en fazla olması için x yerine yazılabilecek değeri elde etme durumlarını yorumlama sürecini temsil etmektedir.

Türev yardımıyla düşünme: Maksimum probleminin türev yardımıyla çözülmesinin düşünülmesini temsil etmektedir.

M1, “*bu problemin türev sorusu olduğunu anlaması en önemli noktadır*” açıklamasını yapmıştır. M1 “türev yardımıyla düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

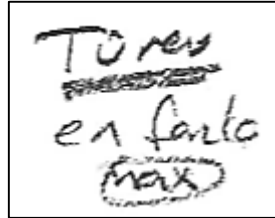
M2 problemin çözümüne “*bu problem maksimum minimum problemi*” diyerek başlamıştır.

M2, “*ama bir şeyi maksimize etmek bir türev sorusudur*” diyerek problemin çözüm sürecinde bu yolu kullanacağını ifade etmiştir. M2 bu kategoriye AN olarak belirlemiştir.

M3 problemi okuduktan sonra “*Türev sorusu bu. Maksimum minimum problemi*” diyerek problemin çözümüne başlamıştır.

En fazla maksimum ilişkisini kurma: Problemde soru kökünde geçen “en fazla” kelimesinin “maksimum” kelimesinin anlamını çağrıştırmayı durumunu temsil etmektedir.

M1 “en fazla” kelimesinin “maksimum” anlamını çağrıştırmayı dolayısıyla problem çözme sürecine başlamada “türev yardımıyla düşünme” alt kategorisinin öğrenci tarafından anlaşılabilirliğini belirtmiştir. M1 Şekil 4.182’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu yazmıştır.



Şekil 4.182. M1’in “en fazla maksimum ilişkisini kurma” boyutuna ait çözümü

M1, “*En fazlanın maksimumu çağrıştırması lazım*” açıklamasını yapmıştır.

M3, “*Türev sorusu olduğunu en fazla kelimesinden anlaşılması gerektiğini düşünüyorum*” diyerek “türev yoluyla düşünme” alt kategorisi ve “en fazla maksimum ilişkisini kurma” boyutu arasında ilişki kurmuştur.

M4, “*burada ne yapabiliriz*” diyerek “en fazla” kelimesinin altını çizdikten sonra “*en çok, en fazla, en geniş, en az, en küçük, minimum, maksimum olan ifadeler türevin sıfıra eşit olmasıyla bulunur*” diyerek Şekil 4.183’te belirtildiği üzere çözümü yazmıştır.

Şekil 4.183. M4'ün “en fazla maksimum ilişkisi kurma” boyutuna ait çözümü

M5 problemi okuduktan sonra “*bu problemde önemli nokta öğrenci bunun maksimum problemi olduğunu anlayıp türevden çözeceğini anlaması lazım*” açıklamasını yapmıştır. M5 çalışma kâğıdına Şekil 4.184’te görüldüğü gibi bu durumu belirtmiştir.

Şekil 4.184. M5’in “en fazla maksimum ilişkisini kurma” boyutuna ait çözümü

M5 “türev yoluyla düşünme” alt kategorisi ve “en fazla maksimum ilişkisini kurma” boyutu arasında ilişki kurmuştur.

Türev alma: Gelir fonksiyonunun türevinin alınarak sifıra eşitlenmesi durumunu temsil etmektedir.

M1, “*daha sonra türevini alıp sifıra eşitleyeceğiz*” diyerek Şekil 4.185’te verilen çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}
 & 5 \cdot (1000 - 50k) + (-50) \cdot (40 + 5k) = 0 \\
 & 5000 - 250k - 2000 - 250k = 0 \\
 & 3000 - 500k = 0 \\
 & 6 = k
 \end{aligned}$$

Şekil 4.185. M1’in “türev alma” boyutuna ait çözümü

M2, “*Bunun türevini almam lazım. Çarpımın türevini alıp sifıra eşitleyelim*” diyerek Şekil 4.186’da görüldüğü gibi problemin çözümünü tamamlamıştır.

$$\begin{aligned}
 G' &= 5 \cdot (1000 - 50x) + (-50) \cdot (40 + 5x) \\
 &= \cancel{5} \cdot (1000 - 50x) = \cancel{50}^1 (40 + 5x) \\
 1000 - 50x &= 400 + 50x \\
 600 &= 100x \\
 \underline{x = 6}
 \end{aligned}$$

70

Şekil 4.186. M2'nin "türev alma" boyutuna ait çözümü

M3, "Türevini alalım. Sıfıra eşitleyelim. Çarpımın türevinden yapalım. Sıfıra eşitleyelim. Buradan $x = 6$ olur." diyerek Şekil 4.187'de görüldüğü gibi problemin çözümünü tamamlamıştır.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 5 \cdot (1000 - 50x) + (40 + 5x) \cdot (-50) = 0 \\
 5000 - 250x - 2000 - 250x &= 0 \\
 3000 &= 500x \\
 \underline{x = 6} \\
 40 + 5 \cdot 6 &= \underline{70 \text{ TL}}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.187. M3'ün "türev alma" boyutuna ait çözümü

M4, Şekil 4.188'de belirtildiği gibi türevini alıp sıfıra eşitleyerek x 'i elde etmiştir.

$$\begin{aligned}
 A' &= 5 \cdot (1000 - 50x) + (-50) \cdot (40 + 5x) = 0 \\
 \cancel{5} \cdot (1000 - 50x) &= \cancel{50}^1 (40 + 5x) \\
 1000 - 50x &= 400 + 50x \\
 600 &= 100x \\
 \underline{x = 6}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.188. M4'ün "türev alma" boyutuna ait çözümü

M5, Şekil 4.189'da görüldüğü gibi türev alıp, sıfıra eşitlemiştir.

$$P' = 0 \quad 5(1000 - 50x) + (40 + 5x)(-30) = 0$$

$$\underline{x = 6}$$

$$U' = 40 + 5x$$

$$= 40 + 30$$

$$= \underline{\underline{70}}$$

Şekil 4.189. M5'in "türev alma" boyutuna ait çözümü

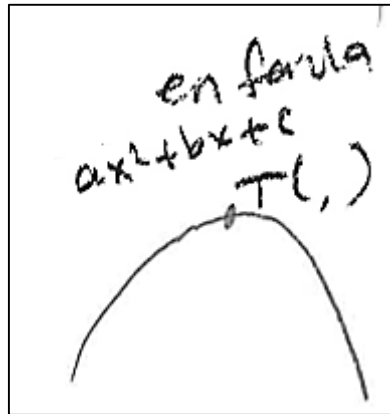
Parabol olarak düşünme: Toplam gelir ifadesini ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu anlama ve çözüm yolunu bu doğrultuda sürdürmeyi düşünme durumunu temsil etmektedir.

M1, "Diğer türlü parabol sorusu olarak yapabilir." açıklamasını yapmıştır.

M2, "Parabol problemi. İkinci dereceden bir denklem oluşacağı için" diyerek problemin çözümüne devam etmiştir.

En fazla en büyük ilişkisini kurma: Problemin soru kökünde geçen "en fazla" kelimesinin "en büyük" anlamını çağrıştırması durumunu temsil etmektedir.

M1 "en fazla" kelimesinin "en büyük" anlamını çağrıştırması dolayısıyla problem çözme sürecine başlamada "parabol olarak düşünme" alt kategorisinin öğrenci tarafından anlaşılabilceğini söylemiştir. M1'in çözümü Şekil 4.190'daki gibidir.



Şekil 4.190. M1'in "en fazla en büyük ilişkisini kurma" boyutuna ait çözümü

Tepe noktası kavramını anlama: İkinci dereceden fonksiyonun tepe noktasını bulma durumlarını ifade etmektedir. Problemden istenenin tepe noktası olduğunu anlama ve tepe noktasını elde etme durumlarını temsil etmektedir.

M1, “Tepe noktası fikri en büyüğü, en fazlayı çağrıştırabilir.” açıklamasını yapmıştır.

M2 problemin çözümünde alternatif bir yol önermiştir. M2, “ikinci dereceden bir denklem geldiği için tepe noktasını bulmam lazım. Kolları aşağı yönlü olduğu için tepe noktasının r’sini bulmamız gerekiyor” diyerek çözüm yolunu açıklamıştır. M2’nin çözümü Şekil 4.191’deki gibidir.



Şekil 4. 191. M2’nin “tepe noktası kavramını anlama” boyutuna ait çözümü

M4, “türev bilmeseydi, tepe noktasından maksimum değere ulaşabilirdi.” diyerek alternatif bir çözüm yolu önermiştir.

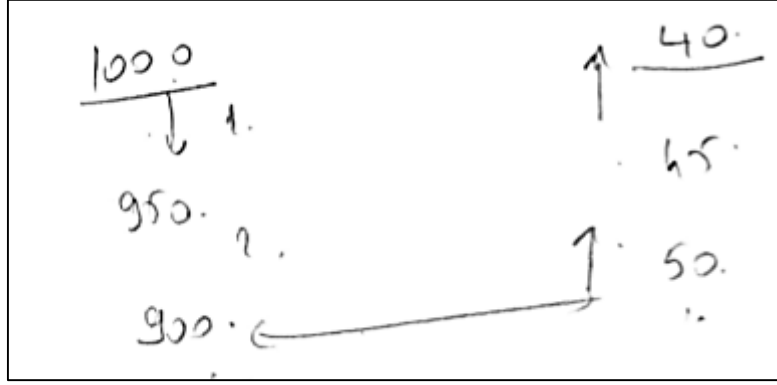
M5, “Eğer türev bilmiyorsa ikinci dereceden bir fonksiyon gibi düşünüp tepe noktasını kullanarak çözebilir.” diyerek problemin çözümü için alternatif bir yol önermiştir.

Mantıklı değer verme: Artış miktarındaki değişime değer verilerek ücret, kişi sayısı veya gelirdeki değişimin izlenmesi durumunu temsil etmektedir.

M1’in “Burada öğrenci şunu da yapabilir. Öğrenci bir 5 artırır bir 5 artırır arttığını görür gelirin ama yediye gelir azaldığını görür o şekilde anlayabilir. Bu da öğrencinin tercih edebileceği bir yoldur” açıklamasını yapmıştır. M1’in çözümü Şekil 4.192’deki gibidir.

Şekil 4.192. M1’in “mantıklı değer verme” alt kategorisine ait çözümü

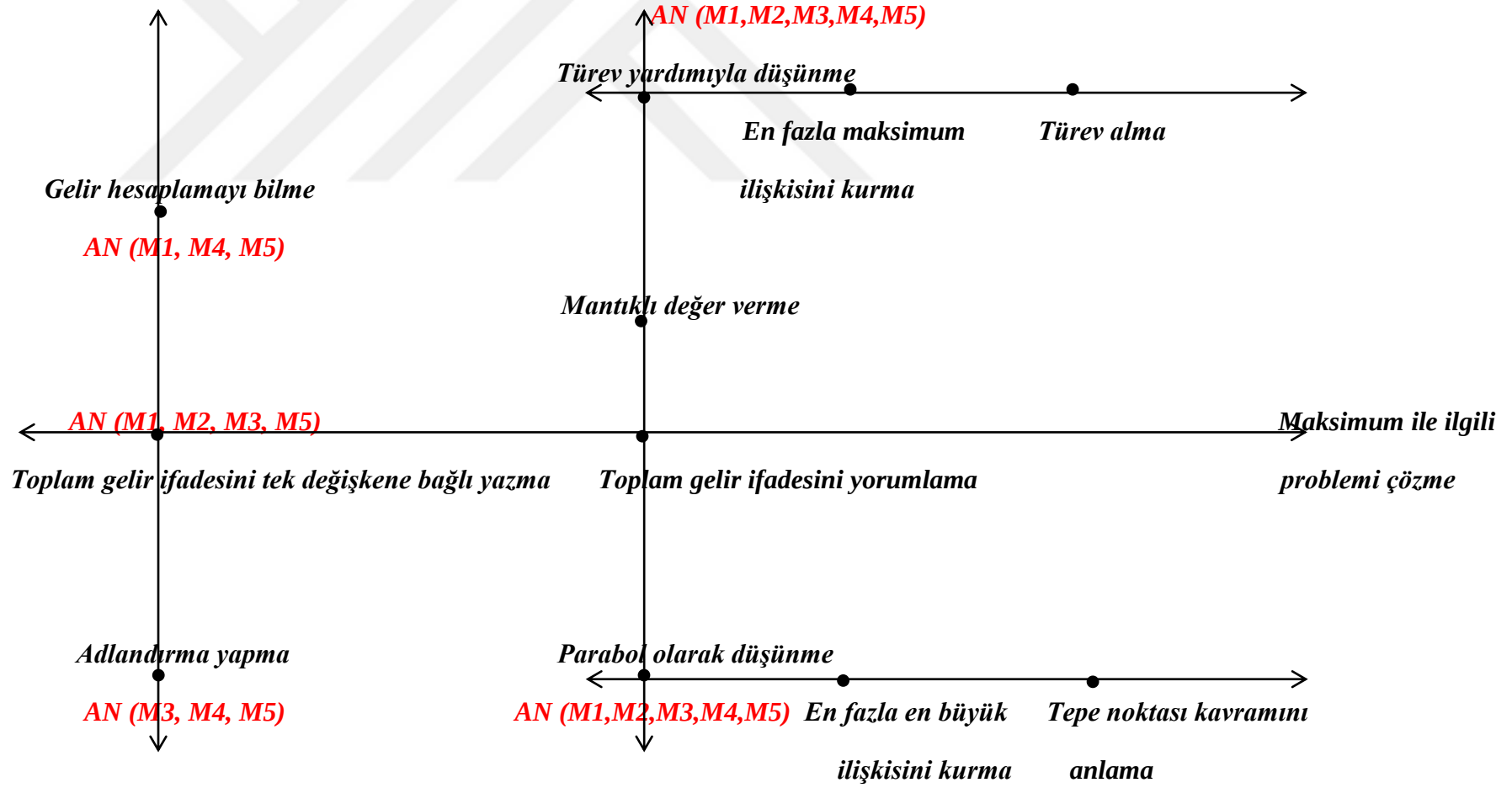
M4, “bir tane artırdığımda 5 artıyor, iki tane arttığında 10, üç tane arttığında 15 artıyor” diyerek Şekil 4.192’de görüldüğü gibi birkaç değer için denemeler yapmıştır. Benzer şekilde “ondan sonra müşteri azalıyor ya. Bir kişide 50 azalıyor, iki kişide 100 azalıyor.” diyerek Şekil 4.193’te görüldüğü gibi yazmıştır.



Şekil 4.193. M4'ün "mantıklı değer verme" alt kategorisine ait çözümü

M1, M4, M5 "gelir hesaplamayı bilme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3, M4 ve M5 "adlandırma yapma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2, M3 ve M5 "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2, M3, M4, M5 "parabol olarak düşünme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, M2, M3, M4, M5 "türev yoluyla düşünme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Matematik öğretmenlerinin maksimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.194'deki gibidir.



Şekil 4.194. Matematik öğretmenlerinin maksimum problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi

4.2. İkinci Alt Problem ile İlgili Bulgular ve Yorum:

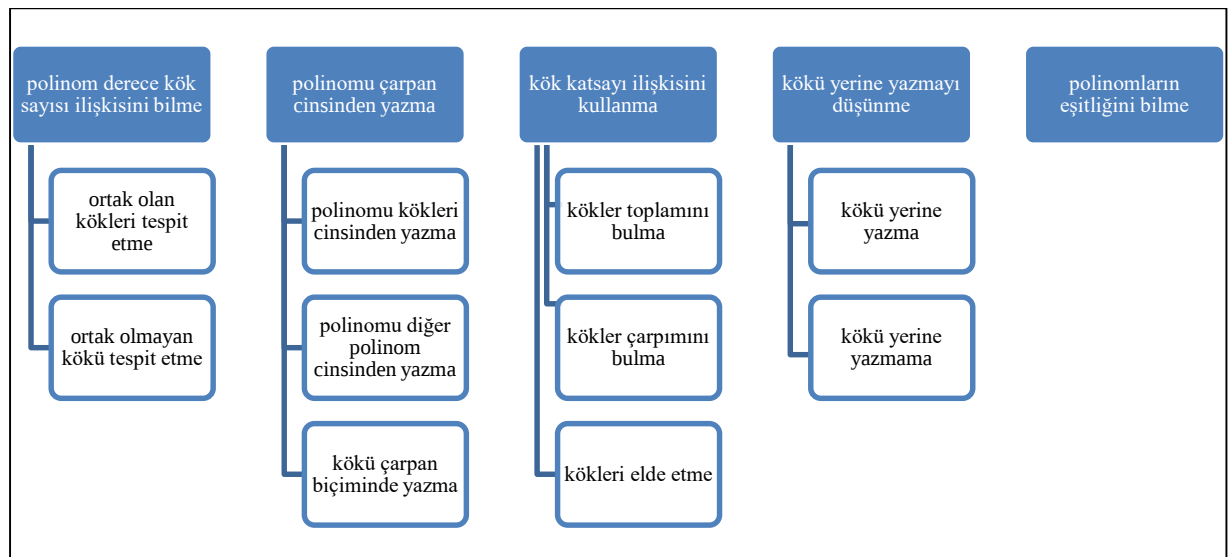
Araştırmanın ikinci probleminde “Lise öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumları nasıldır?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu probleme ilişkin bulgular her bir problem için M1, M2, M3, M4 ve M5 matematik öğretmenlerinin belirlediği öğrenciler ile AN belirleme durumlarına dair davranışlar gözlemlenmeye çalışılmıştır. Her bir problem için matematik öğretmenlerinin birer öğrencisi için bulgular verilecek, her bir soru beş öğrenci açısından yorumlanacaktır.

Bunun için dokuz tane problem verilmiş ve problemi çözmeleri ve çözerken düşündükleri her şeyi yazmaları ve en son aşamada da problemin çözümünde önemli gördükleri noktaları belirlemeleri istenmiştir. Çalışmada ilk olarak 2017 yılı ve öncesi üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan 7 problem ile ilgili öğretmenlerle görüşülmüştür. Daha sonra 2018 yılında yapılmış olan üniversiteye giriş sınavında sorulmuş olan 2 problem de görüşmelere dâhil edilerek bulguların desteklenmesi, çalışmanın güncel olması amaçlanmıştır.

4.2.1. Polinomlar ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada öğrencilerin problem çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Polinomlar ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.195’deki gibidir.



Şekil 4.195. Polinomlar ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.1.1. Lise Öğrencilerinin Polinomlar ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme: Polinomun derecesine bakılarak kök sayısının ne olabileceği hakkında fikir yürütme durumunu temsil etmektedir. “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisi “ortak olan kökleri tespit etme” ve “ortak olmayan kökü tespit etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M1 öğretmenin öğrencisi S1 polinom probleminin çözüm sürecinde “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. S1’in önemli noktayı ortaya çıkaran açıklaması ise şöyledir:

“Bu problemde önemli nokta birinin üçüncü dereceden birinin ikinci dereceden olduğunu fark etmektir. Çünkü böylece birinin üç kökü birinin iki kökü olduğu çıkar. Bunun üç kökünden ikisi ortak ve diyor ki $P(x)$ polinomunda -4 yazıp 0 buluyoruz. Diğerinde -4 yazınca 0 bulamıyoruz. Demek ki üçüncü kök -4.”

S1 öğrencilerin polinomun derecesi ile kök sayıları arasındaki ilişkiyi bilmediği için kök sayılarını aynı düşünebileceğini dolayısıyla polinomun kökü olma yorumunun yapılamayacağını ifade etmiştir. Öğrencilerin ortak olan ve olmayan kökü tespit edemeyebileceğini belirtmiştir. S1 problem çözme sürecinde AN olarak belirlediği bu kategori ile öğrencilerin yaşayabileceği güçlük hakkında fikir yürütmektedir.

M2 öğretmenin öğrencisi S2 problemin çözümünü nasıl yürüteceğini bulamadığını ifade etmiştir. S2’nin polinomlar ile ilgili problemin çözme sürecini tamamlaması ve anahtar noktaların belirlenmesi amacıyla araştırmacı tarafından bazı noktalara değinilmiştir. Bundan sonra araştırmacı ve S2 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: *$P(x)$ polinomunun derecesi 3 olduğu için polinomun üç kökü vardır, $Q(x)$ polinomunun derecesi 2 olduğu için polinomunun 2 kökü vardır diyebiliriz.*

S2: *Ben böyle bir soru hiç görmedim. Ben baya bir soru çözdüm bunlarla ilgili ama. Polinomlarla ilgili aşırı derecede soru çözdüm ama bunda siz dediniz ya derece 3 olunca 3 kökü vardır. Ben bu iki polinomun kök sayısının aynı düşünmüştüm. Bilmiyordum öyle bir şey olduğunu. 10. Sınıfla ilgili birçok yardımcı kitap çözdüm. Böyle bir soru görmedim.*

S2 bu kategoriyi problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. Araştırmacı tarafından S2’ye bu kategori ile bilgi verilerek güçlüğü aşması sağlanmıştır. M2 ise bu kategoriyi AN olarak belirlememiştir.

S2 problemi çözmede güçlük yaşamıştır. S2’nin güçlük yaşadığı bu nokta ile açıklaması şöyledir.

“Buna da -4 verdiğim zaman sağlaması gerekirdi. Ama $Q(-4) \neq 0$ diyor hocam. Tek kök mü ortak acaba. -4 sadece $P(x)$ in kökü.”

S2, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının ortak olan köklerini belirleyememiştir. Açıklamada da görüldüğü üzere S2 her iki polinomun köklerinin sayısının iki tane olduğunu düşünmüştür; fakat aynı zamanda bununla ilgili de çelişki yaşamıştır. Katılımcı S2’ nin öğretmeni olan M2 bu noktayı AN olarak belirlememiştir. M3’ün öğrencisi S3’ün ise bu noktayı AN olarak belirlediği açıklaması ise şöyledir.

“Bu problemde önemli olan -4 ’ün ortak kök olmadığını bilmek. En önemli nokta buydu. Bir de derece ile kök sayısını da bilmeli. Yoksa gider buna iki kök buna iki kök derse olmaz”

S3 öğrencilerin kök sayılarının mutlaka aynı olması gerektiğini düşünebileceğini ifade etmiştir. S3 problem çözme sürecinde başka bir öğrencinin bu noktada takılabileceğini ifade ederek öğrencinin çözüm sürecini tamamlayamayacağını belirtmiştir.

M3 öğretmenin öğrencisi S3 problemi okuduktan sonra *“Bu derece olduğu zaman o kadar sayıda kökü var demektir. Bunun üç tane kökü var. Tamam. Bunun da iki tane kökü var.”* açıklamasını yapmıştır. S3 bu kategorinin problemin çözüm sürecinde önemli bir nokta olduğunu düşündüğü için AN olarak belirlemiştir. S3, *“Bir de derece ile kök sayısını da bilmeli. Yoksa gider buna iki kök buna iki kök derse olmaz.”* açıklamasıyla bu durumun nedenini açıklamıştır. S1 gibi S3’te S2’nin yaşadığı güçlüğü düşünerek bu kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

Ortak olan kökleri tespit etme: Polinomlarda hangi köklerin ortak olduğunun tespit edilmesi durumunu temsil etmektedir.

S1, *“ x_1 , x_2 ve -4 $P(x)$ polinomunun kökleridir. $Q(x)$ polinomunun kökleri x_1 , x_2 dir”* açıklamasını yapmıştır. S1’in çözümü Şekil 4.196’daki gibidir.

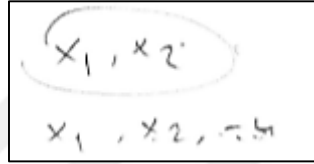
$$\begin{array}{l} (x_1, x_2, -4) \text{ } P \text{ kökleri} \\ (x_1, x_2) \text{ } Q \text{ kökleri} \end{array}$$

Şekil 4.196. S1’in “ortak olan kökleri tespit etme” alt kategorisine ait çözümü

S2 problemi okuduktan sonra *“ $P(-4) = 0$ ise bunun bir kökü -4 tür. $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre diyor. Buna da -4*

verdiğim zaman sağlaması gerekirdi” açıklamasını yapmıştır. S2 her iki polinomun kök sayısının eşit olduğunu düşündüğü söylenebilir. S2 açıklamasının devamında “Ama $Q(-4) \neq 0$ diyor hocam. Tek kök mü ortak acaba” açıklamasının polinomların kök sayılarının eşit olması düşüncesinden kaynaklı olduğu söylenebilir. Burada S1 öğrencilerin polinomun derecesi ile kök sayıları arasındaki ilişkiyi bilmediği için kök sayılarını aynı düşünebileceğini dolayısıyla ortak olan ve olmayan kökü tespit edemeyeceği düşüncesinin doğrulanmış olduğu söylenebilir.

S3, “ortak kökler var. Bunun köklerine x_1, x_2 diyelim. Diğerinin köklerine $x_1, x_2, -4$ tür” açıklamasını yapmıştır. S3, Şekil 4.197.’te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu alt kategori ile ilgili çözümü yazmıştır.



Şekil 4.197. S3’ün “ortak kökleri tespit etme” alt kategorisine ait çözümü

M4 öğretmenin öğrencisi S4 bu kategoride sorun yaşamış olmasına rağmen bu noktayı problem çözme sürecinde AN olarak belirlememiştir. Bu kategoriler araştırmacı tarafından verildikten sonra problemin çözümü için bir yol düşünmüştür ve sonuca ulaşmıştır.

M5 öğretmenin öğrencisi S5 ile araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: $Q(x)$ polinomunun iki kökünün aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğu verilmiş. Neden verilmiş?

S5: Aynen. $P(x)$ polinomu üçüncü dereceden olduğu için üç kökü var. İki zaten ortak. Diğer kök zaten -4 tür. Kökler toplamından gidebiliriz. Çünkü iki kök ortak ve kökler toplamı a cinsinden geliyor.

S5 bu diyalogdan sonra problemin çözümünü tamamlamıştır. S5, “Ortak kökleri düşünmek ve -4 ün de ortak kök olmadığını anlamak önemliydi. Oradan sonrası zaten gelecektir” açıklaması ile problemin çözümünde “ortak kökleri tespit etme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Ortak olmayan kökü tespit etme: Polinomun ortak olmayan kökünün -4 olduğunun anlaşılması durumunu temsil etmektedir.

S1, “ $-4, P(x)$ polinomun kökü $Q(x)$ polinomunun kökü değilse ortak olmayan üçüncü kök bu demektir” açıklamasını yapmıştır.

S2, “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisi araştırmacı tarafından açıklanmıştır. Bu diyalogdan sonra S2 “ -4 bu $P(x)$ polinomunun ortak olmayan köküdür.” açıklamasını yapmıştır.

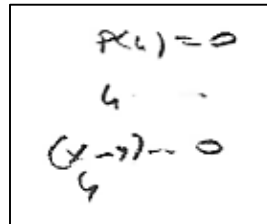
S3, “Şimdi burada. -4 , $P(x)$ ’i sağlıyor, bunu sağlamıyor. Bunların ortak olmayan kökü -4 . Burada hemfikiriz.” açıklamasını yapmıştır. S3 aynı zamanda bu kategorinin polinom problemi çözme sürecinde çıkış noktası olduğunu ifade etmiştir. S3 “ortak olmayan kökü tespit etme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. S3, “Bu problemde önemli olan -4 ’ün ortak kök olmadığını bilmek. En önemli nokta buydu.” açıklaması ile AN’lerden bir diğerini belirlemiştir.

Polinomu çarpan cinsinden yazma: Bir polinomun iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazma durumunu temsil etmektedir. “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisi “polinomu kökleri cinsinden yazma”, “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” ve “kökü çarpan biçiminde yazma” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

S1 polinomların köklerini tespit ettikten sonra bir an duraksamıştır ve “Ne yapabiliriz? $P(x)$ polinomunu çarpım şeklinde yazsak” açıklamasını yapmıştır.

Kökü çarpan biçiminde yazma: Polinomun kökünü polinomun çarpanı olacak şekilde yazılması durumunu temsil etmektedir.

S2, “ -4 polinomun kökü ise ne verirsem sıfır olur şeklinde düşünebiliyorum çarpanı. Polinomda x yerine verdiğimizde sıfırlıyorsa bu polinomda böyle bir çarpan vardır.” açıklaması ile birlikte Şekil 4.198’deki gibidir.


$$\begin{array}{l} P(x) = 0 \\ 4 \quad \dots \\ (x + 4) = 0 \\ 4 \end{array}$$

Şekil 4.198. S2’nin “kökü çarpan biçiminde yazma” alt kategorisine ait çözümü

S2, “Bu problemde önemli nokta -4 bu polinomun kökü ise $(x + 4)$ çarpanıdır.” açıklaması ile bu durumu vurgulamıştır.

Polinomu kökleri cinsinden yazma: Polinomu indirgenemeyen polinomların çarpımı biçimde yazma durumunu temsil etmektedir.

S1, “ $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ gibi çarpanları cinsinden yazalım” açıklamasını yapmıştır ve Şekil 4.199’da görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.

$$\begin{array}{l} (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x+4) = P(x) \\ (x-x_1) \cdot (x-x_2) = Q(x) \end{array}$$

Şekil 4.199. S1'in "polinomu kökleri cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

Polinomu diğer polinom cinsinden yazma: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu cinsinden yazılması durumunu temsil etmektedir.

S1, " $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x + 4)$ ve $Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ dir. $Q(x)$ polinomunu biliyoruz. $P(x)$ polinomunu ve $Q(x)$ polinomunu yerine yazalım." açıklamasını yapmıştır.

S1 açıklaması ile birlikte Şekil 4.200'de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu yazmıştır.

$$(x^2 - 2ax + b) (x + 4) = x^3 - ax^2 - (b+2)x + 4b$$

Şekil 4.200. S1'in "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

S2, $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleri ise $P(x) = Q(x) \cdot (x + 4)$ yazabileceğini ifade etmiştir. S2, " x yerine -4 yazdığımızda sıfırlıyor demek ki doğru yazmışım" açıklaması ile çözümünü kontrol etmiştir. S2'nin çözümü Şekil 4.201'deki gibidir.

$$\begin{array}{l} (x+4) \cdot Q(x) = P(x) \\ -4 \end{array}$$

Şekil 4.201. S2'nin "polinomu diğer polinom cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

Polinomların eşitliğini bilme: Eşit iki polinom verildiğinde aynı dereceli terimlerin katsayılarının birbirine eşitlenmesi durumunu temsil etmektedir.

S5, "polinomların eşitliğini bilme" kategorisinin anahtar nokta olarak görmemiştir. S5'in bu kategoriye ait olan çözümü Şekil 4.202'deki gibidir.

$$P(x) = Q(x) \cdot (x+4)$$

$$x^3 - ax^2 - (b+2)x + 6b = (x^2 - 2ax + b)(x+4)$$

Şekil 4.202. S5'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü

S1, "Aynı dereceli terimlerin katsayılarını birbirine eşitlersek $b = 15, a = 4$ olur. $b - a = 11$ dir" açıklaması ile problemin çözümünü tamamlamıştır.

S1 problemin çözümünü Şekil 4.203'de görüldüğü gibi tamamlamıştır.

$$x^3 - 2ax^2 + bx + 4x^2 - 8a + 4b = x^3 - ax^2 - (b+2)x + 6b$$

$$(4-2a)x^2 = (-a)x^2 \quad b-8a = -b-2$$

$$4-2a = -a \quad b-32 = -b-2$$

$$4 = a \quad 2b = 30$$

$$15 - 4 = 11 \quad b = 15$$

Şekil 4.203. S1'in "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü

M2'nin öğrencisi S2, Şekil 4.204'de görüldüğü gibi problemin çözümünü polinomların eşitliğini kullanarak tamamlamıştır.

$$(x+4)(x^2 - 2ax + b) = x^3 - ax^2 - (b+2)x + 6b$$

$$4x^2 - 2ax + b = -a$$

$$4 - 2a = -a$$

$$4 = a$$

$$15 - 4 = 11$$

$$b - 8a = -b - 2$$

$$b - 32 = -b - 2$$

$$2b = 30$$

$$b = 15$$

Şekil 4.204. S2'nin "polinomların eşitliğini bilme" kategorisine ait çözümü

Kökü yerine yazmayı düşünme: $P(a) = 0$ verildiğinde $P(x)$ polinomunda x yerine a yazılmasını düşünme durumunu temsil etmektedir. "kökü yerine yazmayı düşünme"

kategorisi “kökü yerine yazma” ve “kökü yerine yazmama” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

M5’in öğrencisi S5, “Ondan sonra ne yapabiliriz? $Q(-4) \neq 0$ verildiği için yerine yazarak a ve b nin ne olmayacağı hakkında fikir sahibi olabiliriz.” açıklaması ile problemin çözümüne başka şekilde devam etmiştir.

S5 bu tür problemlerin çözümünde belirlenen “kökü yerine yazmayı düşünme” kategorisinin ilk akla gelen yol olduğunu ifade etmiştir. S5’in problemin çözüm süreci ile ilgili açıklaması şöyledir:

“Burada çoğu öğrenci gibi ben de ilk olarak eşitlik gördüğüm için polinomda yerine yazıp sıfıra eşitlemeye çalıştım. Genel olarak ilk yaptığımız bu. Buradan bir şey elde edemiyoruz. İki bilinmeyenli tek denklemden bir şey elde edemeyince sıkıntı yaşıyoruz.”

Kökü yerine yazma: $P(a) = 0$ verildiğinde $P(x)$ polinomunda x yerine a yazılarak denklem elde edilmesi durumunu temsil etmektedir.

S2, “ -4 sadece $P(x)$ in kökü. $P(x)$ polinomunda x yerine -4 yazarsak 0 çıkar” açıklaması ile birlikte Şekil 4.205’te görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned} 16 + 80 + 15 &= 0 \\ 9a + b &= -16 \\ 16 + 80 + 15 &= 15 \\ -64 - 16a + 4b + 8 + 4b &= 0 \\ -64 &= 16a - 8b \\ -8 &= 2a - b \end{aligned}$$

Şekil 4.205. S2’nin “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

M3’ün öğrencisi S3, “ $P(-4) = 0$ verilmiş. Yerine yazalım” açıklamasını yapmıştır ve Şekil 4.206’da görüldüğü üzere b ’yi elde etmiştir.

$$\begin{aligned} P(-4) &= -64 - 64 - (b+2) - 4 + 4b = 0 \\ P(-4) &= -128 + 4b + 8 + 4b = 0 \\ 8b &= 120 \\ b &= 15 \end{aligned}$$

Şekil 4.206. S3’ün “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

S3 “kökü yerine yazma” kategorisi ile problemin sonucuna ulaştığı görülmüştür. Selin bu kategorisinin problem çözme sürecinde önemli bir nokta olduğunu ifade etmemiştir. Problem çözme sürecinde AN olarak belirlememiştir.

M4’ün öğrencisi S4 ilk aşamada polinom problemini okumuştur ve “ $P(-4) = 0$ olduğu için $P(x)$ polinomunda yerine yazalım.” açıklamasını yapmıştır. S4’ün çözümü Şekil 4.207’deki gibidir.

$$\begin{aligned} P(-4) &= -64 - 16a - (b+2) \cdot (-4) + 4b = 0 \\ -64 - 16a + 4b + 8 + 4b &= 0 \\ -56 - 16a + 8b &= 0 \\ 8b - 16a &= 56 \\ 8(b - 2a) &= 56 \\ b - 2a &= 7 \end{aligned}$$

Şekil 4.207. S4’ün “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

S4 daha sonra ise “ $Q(-4) \neq 0$ verilmiş. Buradan bir şey çıkar mı acaba” açıklamasını yapmıştır. S4 biraz düşündükten sonra $Q(x)$ polinomunda x yerine -4 yazmaya karar vermiştir. S4’ün çalışma kâğıdına yaptığı çözüm Şekil 4.208’de verilmiştir.

$$\begin{aligned} 16 + 8a + b &\neq 0 \\ 16 + 8a + b &\neq 0 \end{aligned}$$

Şekil 4.208. S4’ün “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

S5 problemi okuduktan sonra “Şimdi $P(-4) = 0$ vermiş bize sıfır olarak. Önce ben bunu yerine koyardım büyük ihtimalle. Yerine yazayım. Bu bize sıfırı verecekmiş” açıklamasını yapmıştır. S5’in çözümü Şekil 4.209’daki gibidir.

$$\begin{aligned} -56 \\ P(-4) &= -64 - 16a + 4b + 8 + 4b = 0 \\ 8b - 16a &= 56 \\ b - 2a &= 7 \end{aligned}$$

Şekil 4.209. S5’in “kökü yerine yazma” alt kategorisine ait çözümü

Kökü yerine yazmama: $P(a) = 0$ verildiğinde $P(x)$ polinomunda x yerine a yazılmayarak denklem elde edilmemesi durumunu temsil etmektedir.

S1, $P(-4) = 0$ verildiği için öğrencilerin problem çözmek için yerine yazma yolunu deneyebileceklerini söylemiştir. S1 problem çözme sürecinde bu yolu kullanmamasını ise şu şekilde açıklamıştır.

“ $P(-4)$ gördüğüm zaman tabi benim aklıma yerine yazmak geldi ama a ve b olduğu için bir yere varamayacağımı düşündüm. İki bilinmeyenli tek denklem gelecek. Altta da bir denklem olsa yerine yazardım.”

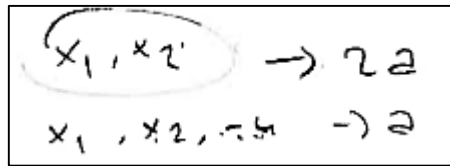
Metin “kökü yerine yazma” kategorisinin polinom problemi çözümü için uygun bir kategori olmadığını düşünmüştür.

Kök katsayı ilişkisini bilme: İkinci veya üçüncü dereceden bir denklemin katsayılarının kullanılarak kökler toplamının, kökler çarpımının veya köklerinin bulunması durumunu temsil etmektedir. “kök katsayı ilişkisini bilme” kategorisi “kökler toplamını bulma”, “kökler çarpımını bulma” ve “kökleri elde etme” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

S3 polinom problemlerinde ortak köklerin olması durumunda kökler toplamı veya kökler çarpımı kullandığını belirtmiştir. S3, *“Çözdüğüm sorularda kökler aynı olduğu zaman hep kökler toplamı veya kökler çarpımını kullandığım için bunda da öyle düşündüm.”* açıklaması ile “ortak kökleri tespit etme” alt kategorisi ile ilişki kurduğu söylenebilir.

Kökler toplamını bulma: İkinci veya üçüncü dereceden bir denklemin katsayılarının kullanılarak kökler toplamının bulunması durumunu temsil etmektedir.

S3 daha sonra kökler toplamı formüllerini uygulamıştır. S3 buradan $a = 4$ elde etmiştir. Fakat S3 problem çözme sürecinde “kökler toplamını bulma” alt kategorisini önemli bir nokta olarak belirlememiştir. S3’ün çözümü Şekil 4.210’deki gibidir.


$$\begin{array}{l} (x_1, x_2) \rightarrow 2a \\ x_1, x_2, -5 \rightarrow a \end{array}$$

Şekil 4.210. S3’ün “kökleri toplamını bulma” alt kategorisine ait çözümü

Araştırmacı ve S4 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: $P(x)$ polinomunun kaç kökü var?

S4: 3 kökü var.

Araştırmacı: $Q(x)$ polinomunun kaç kökü var?

S4: 2 kökü var.

Araştırmacı: $Q(x)$ polinomun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleridir. $P(x)$ polinomunun üçüncü kökü ise -4 'tür. Ne düşünüyorsun?

S4: O zaman $P(x)$ polinomunun üçüncü kökü -4 tür. Kökler aynı olduğu zaman kökler toplamına bakıyorum. Bunun kökler toplamı bunun kökler toplamına eşit. Bir de $P(x)$ polinomun kökler toplamını hesaplarken -4 ü ekleyeceğim. $P(x)$ için kökler toplamı, üçüncü dereceden denklem olsa da fark etmiyor.

S4 polinomların ortak olan kökleri ile ilgili yorum yapamamıştır. M4 problem çözme sürecinde “kök katsayı ilişkisini kullanma” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. S4 bu noktada güçlük yaşamamıştır. S4’e polinomların iki kökünün ortak olduğu bilgisi araştırmacı tarafından verilmiştir. Bu durumdan sonra S4 problemin çözümünü tamamlamıştır. S4, ADN ile bu güçlüğü aşmıştır.

Bu diyalogdan sonra S4, Şekil 4.211’de görüldüğü gibi $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının kökler toplamını bulmuştur. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının ortak köklerini x_1 ve x_2 olarak adlandırmıştır. Problemin sonucuna doğru bir şekilde ulaşmıştır.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + x^2 + 4x - 8 = 0 \\ Q(x) &= 2x^2 + 8x + 15 = 0 \\ \text{Kökler toplamı } P(x) &= -1 \\ \text{Kökler toplamı } Q(x) &= -4 \\ \text{Ortak kök} &= -4 \end{aligned}$$

Şekil 4.211. S4’ün “kökler toplamını bulma” alt kategorisine ait çözümü

S4, “Burada önemli olan nokta kökler toplamını görebilmek, yani kökler toplamının eşit olduğunu görebilmektir” açıklaması ile problemin çözüm sürecini tamamlamıştır. S4’ün açıklamasında vurguladığı gibi “kökler toplamını bulma” alt kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. S4 yaşadığı güçlüğü rağmen “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisini AN olarak belirlememiştir.

S5’in çözümü Şekil 4.212’deki gibidir.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 - 4 &= 9 \\ 7 - 4 &= 3 \\ 9 &= 3 \end{aligned}$$

Şekil 4.212. S5’in “kökler toplamını bulma” alt kategorisine ait çözümü

Kökler çarpımını bulma: İkinci veya üçüncü dereceden bir denklemin katsayılarının kullanılarak kökler çarpımının bulunması durumunu temsil etmektedir.

S3 kökler çarpımı formülünü uygulamıştır. Buradan b 'yi elde edeceğini düşünmüştür fakat Şekil 4.213'te görüldüğü gibi sonuca ulaşamamıştır.

$$\begin{array}{l} (x_1, x_2) \rightarrow b \\ x_1, x_2, -5 \rightarrow 4b \\ b/4 = 4b \end{array}$$

Şekil 4.213. S3'ün “kökler çarpımını bulma” alt kategorisine ait çözümü

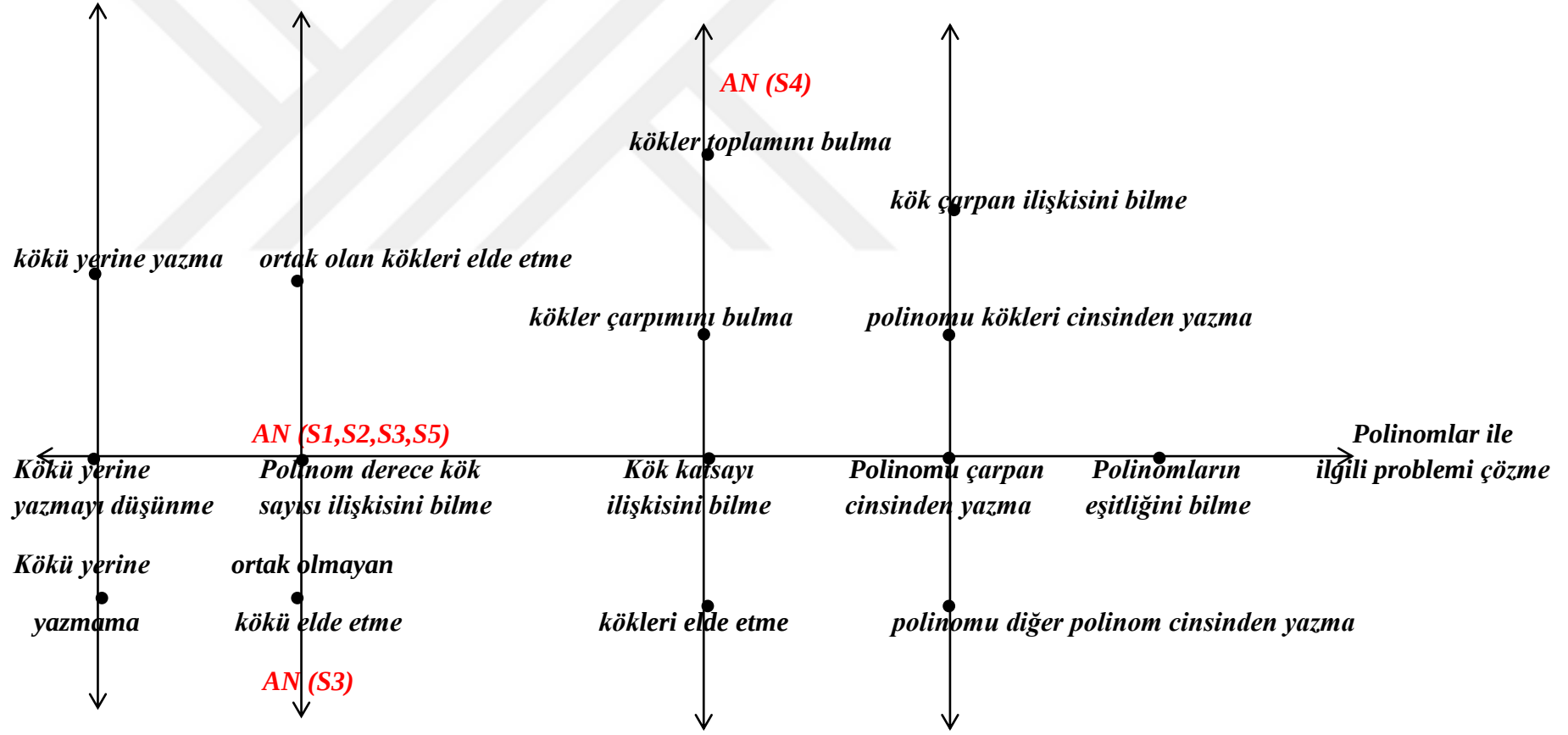
Kökleri elde etme: İkinci dereceden bir denklemin katsayılarının kullanılarak köklerinin bulunması durumunu temsil etmektedir.

S5, Şekil 4.214'te görüldüğü gibi $Q(x)$ polinomunun köklerini bulmaya çalışmıştır.

$$\begin{array}{l} x^2 - 2ax + b \quad a^2 - 4b \\ 2 \pm \sqrt{4(a^2 - b)} = \\ 2 \\ \frac{2 \pm 2\sqrt{a^2 - b}}{2} = 1 \pm \sqrt{a^2 - b} \end{array}$$

Şekil 4.214. S5'in “kökleri elde etme” alt kategorisine ait çözümü

S1, S2, S3, S5 “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. S3 ve S5 “ortak olmayan kökü tespit etme” alt kategorisini ve S4 “kökler toplamını bulma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. Öğrencilerin polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.215’ deki gibidir.



Şekil 4.215. Öğrencilerin polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.2. Maksimum- Minimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin problem çözmede anahtar nokta belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Maksimum-minimum ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme süreçlerine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.216’da verilmiştir.



Şekil 4.216. Maksimum-minimum ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme süreçlerine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.2.1. Lise Öğrencilerinin Maksimum-Minimum ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Uzunluğu adlandırma: Bilinmeyen kenar uzunluğuna harf verilmesi durumunu temsil etmektedir. “uzunluğu adlandırma kategorisi “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” ve “uzunluğu x cinsinden ifade etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

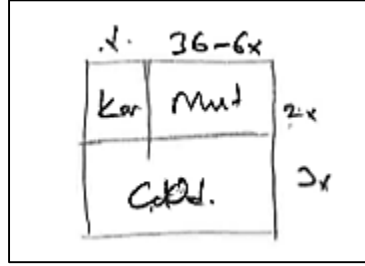
S1 problemi çözmeden okuduktan hemen sonra “*Mutfağın bir kenarını biliyoruz. Diğer kenarını bilmiyoruz.*” açıklamasını yapmıştır.

S3, “*Mutfağın bir kenarı bilinmiyor. Bir şey demem lazım.*” açıklamasını yapmıştır.

S5 problemi okuduktan sonra “*Şimdi bize en geniş alanı soruyor. Şimdi bu dikdörtgenin çevresi 72 imiş. Elimizde $6x$ lik verilenler var. Bilmediğimiz bir uzunluk var. Ne yapardım.*” açıklamasıyla bu kategoriye dikkat çekmiştir.

Uzunluğu x cinsinden ifade etme: Mutfağın bilinmeyen kenar uzunluğunun x olarak adlandırılması durumunu temsil etmektedir.

S1, “Buna bir x ’li bir değer vermemiz lazım. x ’e bağlı bir değer vermemiz lazım ki bir işlem çıkartalım” açıklamasını yapmıştır. S1 bilinmeyen uzunluğu Şekil 4.217’de görüldüğü gibi x cinsinden ifade etmiştir.



Şekil 4.217. S1’in “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

S2 ifadede iki değişken olduğu için buradan ilerleyemeyeceğini ifade etmiştir. Bu yüzden çevreyi kullanarak alan ifadesini x cinsinden ifade etmiştir. S2’nin çözümü Şekil 4.218’deki gibidir.

$$\begin{aligned} 24 &= 72 - 10x \\ 4 &= \frac{72 - 10x}{2} \\ 136 &= 5x \end{aligned}$$

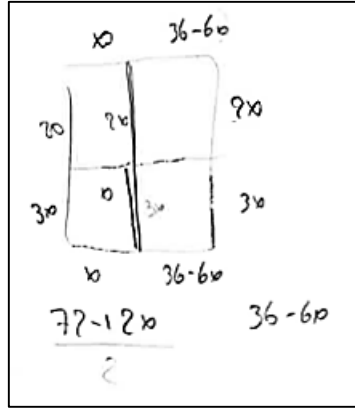
Şekil 4.218. S2’nin “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

S4 ilk olarak uzunluğu a olarak adlandırmıştır. Daha sonra Şekil 4.219’da görüldüğü gibi bilinmeyen kenar uzunluğunu x cinsinden ifade etmiştir.

$$\begin{aligned} 12x + 2a &= 72 \\ 6x + a &= 36 \\ a &= 36 - 6x \end{aligned}$$

Şekil 4.219. S4’ün “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

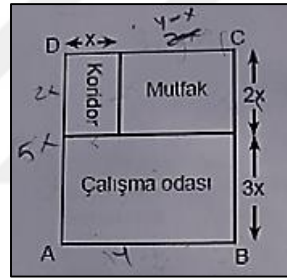
S5 problem çözme sürecinde AN’yi “Bence kritik nokta öncelikle çevrenin 72 olmasından hareket ederek bilinmeyen kenarın uzunluğunu x cinsinden bulmaktı.” açıklaması ile belirlemiştir. S5’in çözümü Şekil 4.220’deki gibidir.



Şekil 4.220. S5'in "uzunluğu x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

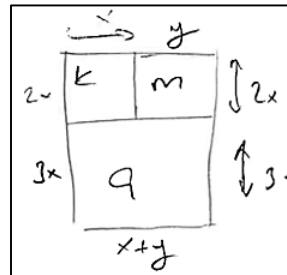
Uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme: Bilinmeyen uzunluğun problemde verilenin dışında bir adlandırma yapılması durumunu temsil etmektedir.

S2 problemin çözümüne Şekil 4.221'de görüldüğü gibi şeklin üzerinde yerleştirmeler yaparak başlamıştır.



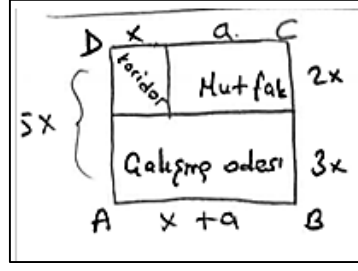
Şekil 4.221. S2'nin "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

S3, "Şuraya y diyeceğim ben" açıklaması ile Şekil 4.222'de verilen çözümü yapmıştır.



Şekil 4.222. S3'ün "uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisi çözümü

S4 ilk olarak Şekil 4.223'te görüldüğü gibi mutfakın bilinmeyen kenar uzunluğuna a demiştir.



Şekil 4.223. S4'ün “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

S4, “Mutfakın bir kenarına a demek önemli bir nokta.” açıklamasında belirttiği gibi problem çözme sürecinde “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Alanı ifade etme: Problemde en geniş olarak istenen alan ifadesinin yazılmasını temsil etmektedir. “alanı ifade etme” kategorisi “alanı x cinsinden ifade etme” ve “alanı iki değişken cinsinden ifade etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

S3, “Bizden ne isteniyor. Mutfakın en geniş alanı” ve “alanı elde etmesi lazım” açıklamasını yapmıştır.

S5, “Şimdi bize en geniş alanı soruyor” açıklamasını yapmıştır.

Alanı x cinsinden ifade etme: Alan ifadesinin x cinsinden ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir. “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisi “parabol olarak düşünme” ve “türev yardımıyla düşünme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S1 Şekil 4.224’de görüldüğü gibi çözümünü yapmıştır.

$$(36-4x) 2x$$

Şekil 4.224. S1’in “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

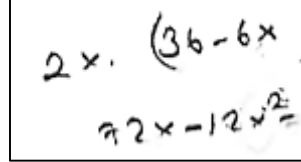
S1 problemin çözümünde “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S1 maksimum-minimum problemlerinde denklemi tek değişken haline getirmenin ve türev almanın AN’ler olduğunu belirtmiştir. Öğretmenin bu durumun altını çizdiğini vurgulamıştır.

S2 Şekil 4.225’de görüldüğü gibi alan ifadesini x cinsinden yazmaya çalışmıştır.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2xy &= P(x) \\ -2x^2 + 2x(36-4x) &= P(x) \\ -2x^2 + 72x - 8x^2 &= P(x) \\ -10x^2 + 72x &= P(x) \end{aligned}$$

Şekil 4.225. S2'nin "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

S2 alanı x cinsinden ifade etmesinin nedenini tepe noktasını diğer türlü bulamayacağını düşünmesinden kaynaklandığını ifade etmiştir. S2'nin "*Tepe noktasına bakacağım. $-\frac{b}{2a}$ ya bakacağım. Ama iki değişken var.*" açıklaması ile "alanı x cinsinden ifade etme" kategorisi ile "tepe noktasını elde etme" kategorileri arasında ilişki kurduğu söylenebilir. S3'ün çözümü Şekil 4.226'daki gibidir.


$$2x \cdot (36 - 6x) \\ 72x - 12x^2$$

Şekil 4.226. S3'ün "alanı x cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

Parabol olarak düşünme: Problemin çözüm yolunun parabol çağrıştırması, hatırlatması durumunu temsil etmektedir. "parabol olarak düşünme" boyutu "ikinci dereceden fonksiyon olduğunu anlama" ve "tepe noktası olduğunu anlama" olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

S1, "*Türev almasaydık ikinci dereceden fonksiyon gibi düşünürdük.*" açıklamasını yapmıştır.

İkinci dereceden fonksiyon olduğunu anlama: Alan ifadesinin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunun anlaşılması durumunu temsil etmektedir.

S2 diğer öğrencilerden farklı olarak alan ifadesini $P(x)$ ile göstermiştir. Bu durumun S2'nin alan ile elde edeceği ifadenin ikinci dereceden fonksiyon olarak düşünmesinden kaynaklı olduğu söylenebilir.

Araştırmacı ile S3 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: *Problemde başka bir çözüm yolu olabilir mi? y 'yi x cinsinden ifade edip, alanı x cinsinden ifade edebilir misin?*

S3: *Tamam. $y = 36 - 6x$ olur. alan $= 72x - 12x^2$ oluyor. Buradan ne yapacağım?*

Araştırmacı: *Bu ifade ikinci dereceden bir fonksiyondur. Bu ifadenin grafiği paraboldür.*

S3 ifadenin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu anlamamıştır.

S5, "*Öğrenci açısından o ifadenin parabol denklemi olduğunu bilmesi veya görmesi zor. Bu ikisini çarpıp o ifadenin parabol olduğunu anlaması gerekiyor. Burada öğrenci basit matematiksel işlem bilgisinin yanı sıra fonksiyon bilgisini kullanması gerekiyor*"

açıklamasını yapmıştır. S5 öğrencilerin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu anlamayacaklarını ikinci dereceden denklem gibi çarpanlarına ayırmaya deneyeceklerini söylemiştir. S5 bu durumu “İkinci dereceden o ifadeyi çarpanlarına ayırabilir değer vermeye çalışabilir. Çözemeyebilir” şeklinde ifade etmiştir.

Tepe noktası olduğunu anlama: Parabolde en büyük değeri veren noktanın tepe noktasının apsisi olduğunun bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

S1, “En geniş alan sorulduğu zaman genelde bir grafik çıkar. Bu grafiğin tepe noktasını soruyor bize” açıklamasını yapmıştır.

S1, “tepe noktasını bulurduk. Apsisi bulurduk” açıklamasını yapmıştır.

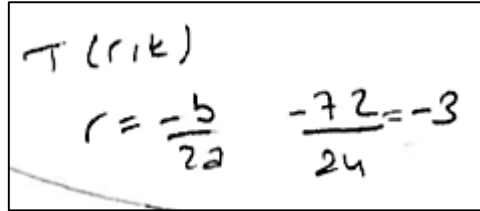
S2 problemi okuduktan sonra “tepe noktası sorusu. Mutfağın en geniş alanlı olmasını soruyor” açıklamasını yapmıştır.

Araştırmacı ile S3 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Parabolde en büyük değer sana neyi çağrıştırıyor?

S3: Tepe noktasında en büyük değeri alır.

S3, “Tepe noktasının r sini bulurum. $-\frac{72}{-24} = 3$ olur” açıklaması ile Şekil 4.227’de görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.


$$r = \frac{-b}{2a} \quad \frac{-72}{-24} = 3$$

Şekil 4.227. S3’ün “tepe noktasını elde etme” alt boyutuna ait çözümü

S3 ile araştırmacı arasında geçen diyalog incelendiğinde S3’ün ifadenin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu anlamadığı ve araştırmacının parabol ile bağlantı kurarak en büyük değeri sormasının ardından tepe noktasını bulacağını anladığı görülmüştür.

S5, “Tepe noktasının r sini bulurken formül sayıyı elde etmede önemli ama bilen bir öğrenci için kritik değildir. Parabol sorularını çözeceklerse zaten bunları bilmeleri gerekiyor.” açıklamasında belirttiği gibi öğrencinin parabol olarak düşünmesi durumunda dahi tepe noktasının anahtar nokta olamayacağını ifade etmiştir. S5 son olarak “Formülü bilen bir öğrenci bu soruyu garanti çözer diyemeyiz” açıklamasını yaparak neden AN olarak belirlemediğini ifade etmiştir.

Türev yardımıyla düşünme: Problemin çözüm yolunda türev kullanabileceğini düşünmesi durumunu temsil etmektedir. “türev yardımıyla düşünme” boyutu “geniş maksimum ilişkisini kurma” ve “türev alma” olarak iki alt boyutta ele alınmıştır.

S1 problemi okuduğu anda türev problemi olduğunu ifade etmiştir. Alanı elde ettikten sonra türev alıp sıfıra eşitleyeceğini söylemiştir. S1 türev bilmeyen bir öğrencinin de bu problemi çözebileceğini söylemiştir.

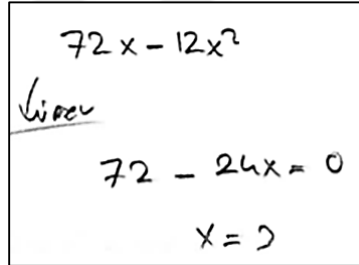
Geniş maksimum ilişkisini kurma: Problemde geçen “en geniş” kelimesinin maksimum kelimesini çağrıştırması durumunu temsil etmektedir.

S1, “Bu problemin türev aldirmaya yönelik olduğunu düşünüyorum. En geniş dediği için” açıklamasını yapmıştır.

S4, “En geniş alanlı, en büyük dediği için” bunların aynı anlamda olduğunu bilen türev bilen her öğrencinin bu problemin maksimum minimum problemi olabileceğini düşünebileceğini belirtmiştir.

Türev alma: Türev alma durumunu temsil etmektedir.

S1 Şekil 4.228’de görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.


$$\begin{array}{l} 72x - 12x^2 \\ \text{türev} \\ \hline 72 - 24x = 0 \\ x = 3 \end{array}$$

Şekil 4.228. S1’in “türev alma” alt boyutuna ait çözümü

S4 Şekil 4.229’da görüldüğü gibi türevini alarak sıfıra eşitlemiştir.

$$\begin{aligned}
 (a \cdot 2x)_{\max} \quad [36 - 6x] 2x &= 0 \\
 72x - 12x^2 &= 0 \\
 72 - 24x &= 0 \\
 \boxed{x = 3}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.229. S4'ün "türev alma" alt boyutuna ait çözümü

Alanı iki değişken cinsinden ifade etme: Alan ifadesinin iki değişken ile ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir. "alanı iki değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisi "mantıklı değer verme" ve "değer verememe" olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S2, Şekil 4.230'da görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}
 (4 - x)(2x) &= \\
 2x \cdot 4 - 2x^2 &= P(x) \\
 -2x^2 + 2xy &= P(x)
 \end{aligned}$$

Şekil 4.230. S2'nin "alanı iki değişken cinsinden ifade etme" alt kategorisine ait çözümü

S3, "Mutfağın alanı. $2xy$ en geniş olması için. Ama tabi ilk başta mutfağın kenarına y demesi ve alanı elde etmesi lazım. Daha sonrası kendi bilgisine göre değişecektir." açıklamasını yapmıştır.

Kare gibi düşünme: Belli ölçütlere göre değer verilmesi durumunu temsil etmektedir.

S3, " $2xy$ en geniş olması için. Bunlara en yakın değerleri verecektik sanırım. y ye 6 desek x , 3 oluyor. Başka. Birkaç tane daha deneyim. $2xy$ nin en fazla olması için x ve y yi birbirine en yakın seçmeliyim. $6x$ ve y birbirine en yakın 18 olur. Buradan x , 3 olur. Diğerlerinde uzaklaşıyor. Örneğin x e 5 versem alan daha küçük oluyor" açıklamasını yapmıştır. S3'ün çözümü Şekil 4.231'deki gibidir.

$$\begin{aligned}
 12x + 2y &= 72 \\
 6x + y &= 36 \\
 2x \cdot y &= \text{en geniş} \\
 \text{36} & \quad \text{3} \quad \text{5}
 \end{aligned}$$

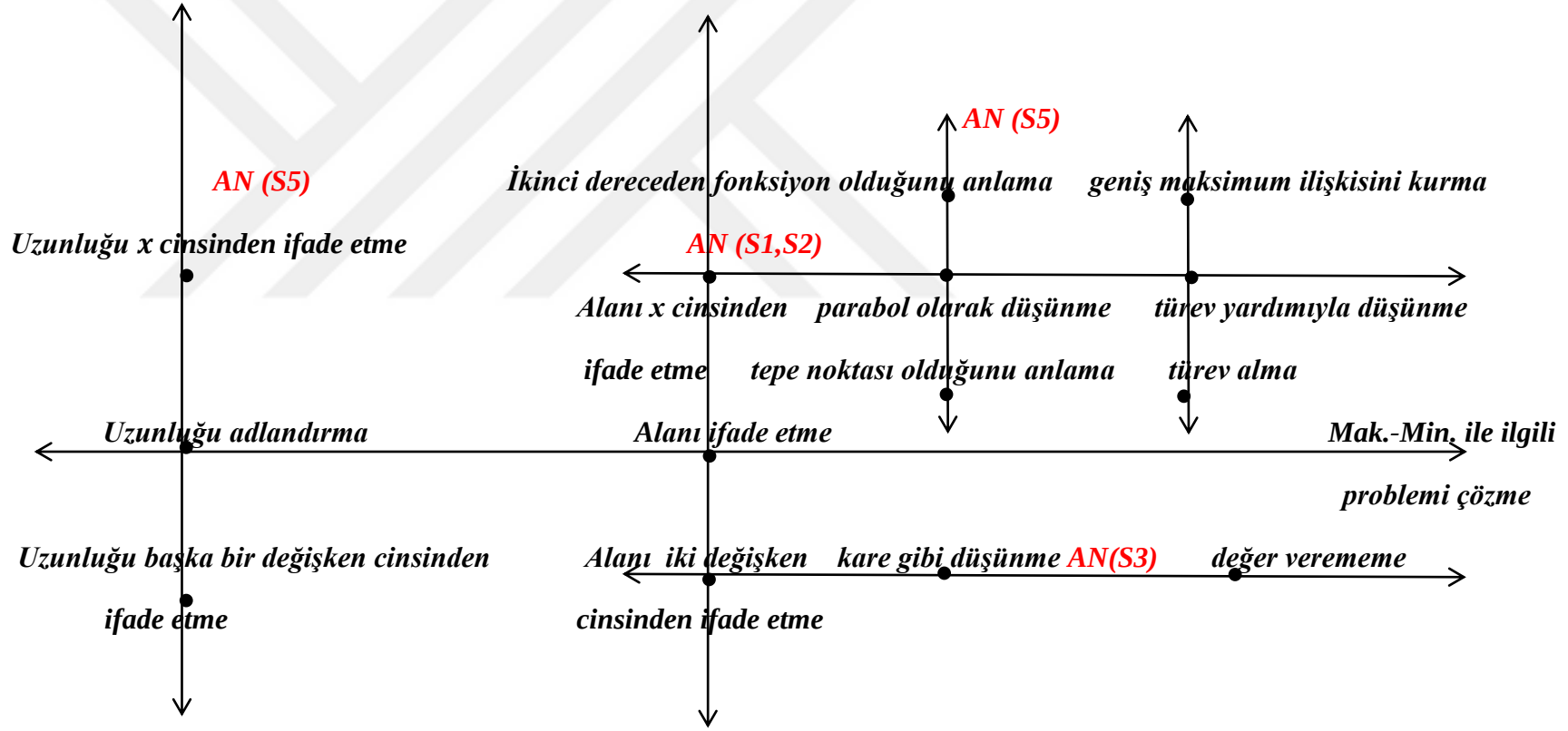
Şekil 4.231. S3'ün "mantıklı değer verme" boyutuna ait çözümü

Değer verememe: Değer verme ölçütünü bilmeme durumunu temsil etmektedir.

S4, “*Türev bilmesem değer verirdim. Ama değer vermekle de pek gelecek gibi görünmüyor.*” açıklaması ile deneme de yapılabileceğini fakat nasıl değer vereceğini bilmediğini ifade etmiştir. Bu problemin çözümü için başka bir yol olamayacağını söylemiştir.

S1 ve S2 öğrenciler “alanı x cinsinden ifade etme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. S5 “uzunluğu x cinsinden ifade etme” alt kategorisi ile “ikinci dereceden fonksiyon olduğunu anlama” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir. S2 “tepe noktası olduğunu anlama” alt boyutunu AN olarak belirlemiştir. S3 “kare gibi düşünme” boyutunu AN olarak belirlemiştir. S4 “uzunluğu başka bir değişken cinsinden ifade etme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Lise öğrencilerinin maksimum-minimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.232’deki gibidir.

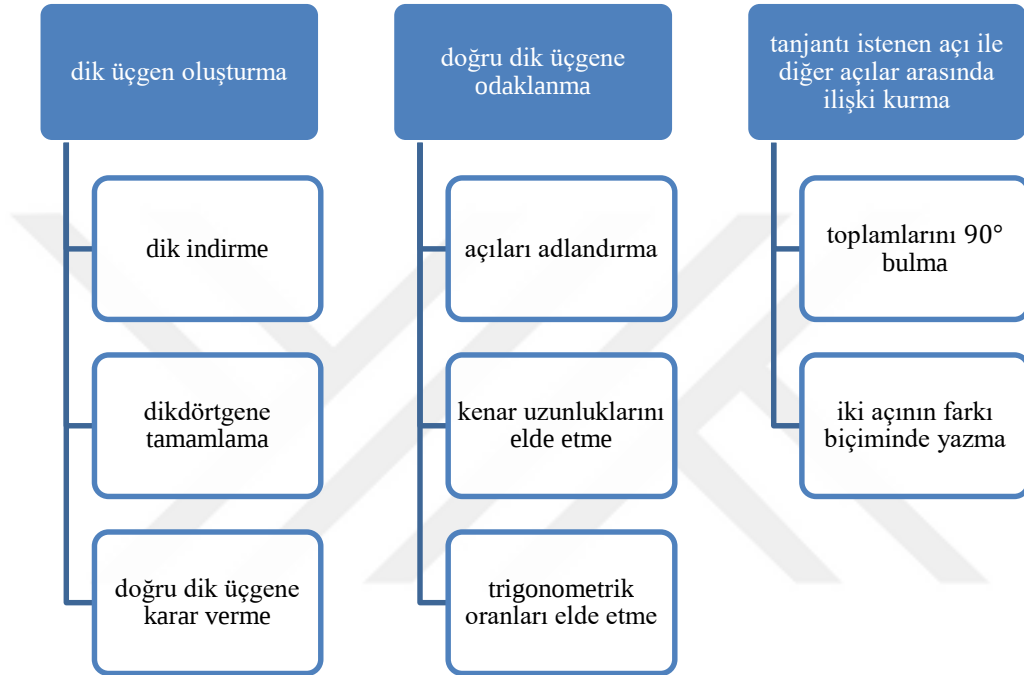


Şekil 4.232. Lise öğrencilerinin maksimum-minimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.3. Trigonometri ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada öğrencilerin problem çözmede anahtar nokta belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Trigonometri ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.233'te verilmiştir.



Şekil 4.233. Trigonometri ile ilgili problem ile öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.3.1. Lise Öğrencilerinin Trigonometri ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Dik üçgen oluşturma: Açının tanjant değerini bulmak amacı ile dik üçgen oluşturma durumlarını temsil etmektedir. “dik üçgen oluşturma” kategorisi “dik indirme”, “dikdörtgene tamamlama” ve “doğru dik üçgene karar verme” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

S3, “*tan y’yi bulabileceğim bir dik üçgen oluşturmam lazım.*” açıklamasını yapmıştır.

S3 dik indirmeye karar vermiştir. Dik indirdikten sonra “*Tabi ben burada bir dik üçgen oluşturdum.*” diyerek oluşan dik üçgende açıları adlandırma yapmıştır ve kenar uzunluklarını yerleştirmiştir.

S4 dikdörtgene tamamlama nedenini ise “Çünkü tanjant sorulduğunda bir 90° ’lik açığı görmem lazım, bir dik üçgen lazım.” açıklamasında ifade etmiştir.

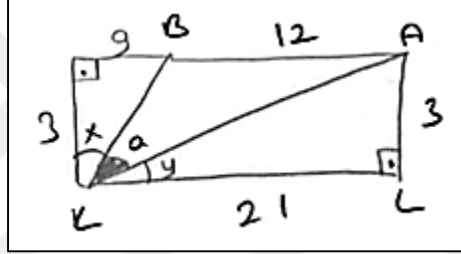
S5 ilk olarak dik indirmiştir ve “Dik üçgen oluşturdum.” açıklamasını yapmıştır.

Dik indirme: Üçgende dik indirme durumlarını temsil etmektedir.

S1, Ö2, S3, S4 ve Ö5 öğrencilerin hepsi dik indirmiştir.

Dikdörtgene tamamlama: Dik yamuğu dikdörtgene tamamlama durumunu temsil etmektedir.

S4 problemi okuduktan sonra ilk olarak “Dik yamuk gördüğüm zaman dikdörtgene tamamlıyorum” açıklamasını yapmıştır. S4, Şekil 4.234’te görüldüğü gibi açılı adlandırmıştır.



Şekil 4.234. S4’ün “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisine ait çözümü

Doğru dik üçgene karar verme: Açının tanjantının bulunabileceği dik üçgen ya da dik üçgenlere karar verme durumunu temsil etmektedir.

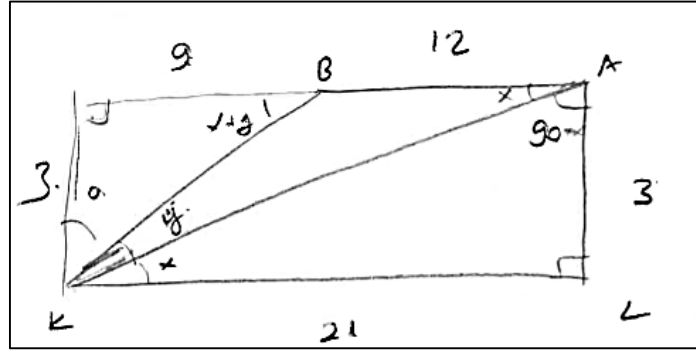
S4’ün “bir dik üçgen lazım. Burada var ama yetmiyor” açıklaması ile belli ölçütler çerçevesinde üzerinde çalışacağı üçgene karar verme sürecinde olduğu söylenebilir.

M5’in öğrencisi Ö5, “Ama şurayı bulamadım. Mantıksız geldi. Başka bir yere taşıyabilir miyim ona bakayım. Taşıyamam.” açıklamalarını yapmıştır. Bu durum “doğru dik üçgene karar verme” kategorisi ile ilişkilendirilmiştir.

Doğru dik üçgene odaklanma: Dik üçgende açılarının trigonometrik oranların bulunabileceği üçgene dikkat etme durumunu temsil etmektedir. “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisi “açıları adlandırma”, “kenar uzunluklarını elde etme” ve “trigonometrik oranları elde etme” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

Ö2 $\tan \beta$ değerini dik üçgende bulamadığını ifade etmiştir. Ö2, “Benzerlik var mı diye düşündüm ama oradan çıkmayacak gibi görünüyor.” açıklamasıyla β açısının bulunduğu dik üçgenin dik kenar uzunluğunu elde etmeye çalışmıştır. Begüm daha sonra “Başka bir şey deneyeceğim” açıklamasını yaptıktan sonra “Doğru dik üçgenleri görmek önemli”

S3 çalışma kâğıdına Şekil 4.237’de görüldüğü gibi şekli çizmiştir. Daha sonra tanjantı istenen açıyı y ve ortak kenarı paylaştığı komşu açıyı x olarak adlandırmıştır.



Şekil 4.237. S3’ün “kenar uzunluklarını elde etme” alt kategorisine ait çözümü

Trigonometrik oranları elde etme: Dik üçgende dar açıların trigonometrik oranlarını bulma durumunu temsil etmektedir.

S1, “Belirli olan tanjant değerleri var” açıklamasını yapmıştır.

Ö2 Şekil 4.238’de görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{1}{7} \\ \tan(x) &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Şekil 4.238. Ö2’nin “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisine ait çözümü

Ö5 k ile adlandırdığı büyük açının tanjantını bulabildiğini ifade ederek “Büyük açı $\tan k$ zaten $\frac{1}{3}$, $\tan m$ ise $\frac{1}{7}$ ” açıklamasını yapmıştır.

Tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma: Tanjantı istenen açı ile dik üçgen yardımıyla trigonometrik oranları bulunabilen açılar arasında ilişki kurma durumunu temsil etmektedir. “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma” kategorisi “Toplamlarını 90° bulma” ve “iki açının farkı biçiminde yazma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

S1, “Onları kullanmamızı istiyor” açıklamasını yapmıştır.

Ö2 problemi okuduktan sonra ilk olarak adlandırma yaparken tanjantı istenen açının olduğu üçgende bulunan bütün açıları adlandırmıştır. Daha sonra tanjantı istenen açı ile ilişki kurabildiği açıların tanjant değerini bulup bulamayacağını kontrol etmiştir.

Toplamlarını 90° bulma: Tanjantı istenen açı ile trigonometrik oranı bulunabilen açının toplamını 90° bulma durumunu temsil etmektedir. “Toplamlarını 90° bulma” alt kategorisi “tümleyen açıları kullanma” ve “trigonometrik özdeşlikleri kullanma” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

M4 öğretmenin öğrencisi S4, “ $x + a + y = 90$ ise $a = 90 - (x + y)$ dir. Bunun tanjantını soruyor” diyerek Şekil 4.239’da görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.

$$x + y + a = 90$$

Şekil 4.239. S4’ün “Toplamlarını 90° bulma” alt kategorisine ait çözümü

Tümleyen açıları kullanma: Toplamları 90° olan açıların tanjant ve kotanjant değerlerinin eşit olmasını kullanma durumunu temsil etmektedir.

S4, $\tan a = \tan 90^\circ - (x + y) = \cot (x + y)$ ifadesini elde etmiştir. S4, “*isim değiştirmesi lazım. $\cot (x + y)$ ’yi bulursam bulurum.*” açıklamasını yapmıştır. S4’ün çözümü Şekil 4.240’daki gibidir.

$$\begin{aligned} \tan. 90 - (x + y) &= \\ \cot (x + y) &= \end{aligned}$$

Şekil 4.240. S4’ün “tümleyen açıları kullanma” boyutuna ait çözümü

Trigonometrik özdeşlikleri kullanma: $\tan x . \cot x = 1$ özdeşliğini kullanma durumunu temsil etmektedir.

S4, “*Şimdi ben kotanjantı bilmiyorum. Tanjantı bulup ters çevirmeliyim*” açıklamasını yapmıştır.

İki açının farkı biçiminde yazma: Tanjantı istenen açıyı trigonometrik oranları dik üçgen yardımıyla bulunabilen iki açının farkı biçiminde yazma durumunu temsil etmektedir. “iki açının farkı biçimde yazma” alt kategorisi “tanjantın toplam formülünü bilme” ve “tanjantın fark formülünü bilme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

Ö2’nin çözümü Şekil 4.241’deki gibidir.

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta - \gamma)$$

Şekil 4.241. Ö2’nin “iki açının farkı biçiminde yazma” boyutuna ait çözümü

Ö5 tanjantı istenen açığı $\alpha = k - m$ şeklinde ifade etmiştir.

Tanjantın toplam formülünü kullanma: Tanjantın toplam formülünü kullanma durumunu temsil etmektedir.

S3 problemin çözümünün son aşamasında “ $\tan(x + y)$ yi açarız. $\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ ” diyerek

Şekil 4.242’deki çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}\tan x + y &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{7} + \tan y}{1 - \frac{\tan y}{7}} \\ \frac{1}{3} &= \frac{1 + 7 \tan y}{7} \cdot \frac{7}{7 - \tan y} \\ 3 + 21 \tan y &= 7 - \tan y \\ 22 \tan y &= 4 \\ \tan y &= \frac{2}{11}\end{aligned}$$

Şekil 4.242. S3’ün “tanjantın toplam formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

S4, “Ben zaten kotanjant dediği zaman tanjanttan yapıp sonunda hep değiştiriyorum” açıklaması ile bu tür problemlerde sürekli bunu kullandığını belirterek Şekil 4.243’teki çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} &= \frac{3 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{\frac{22}{7}}{\frac{4}{7}} \\ &= \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{11}\end{aligned}$$

Şekil 4.243. S4’ün “toplam formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

Tanjantın fark formülünü kullanma: Tanjantın fark formülünü kullanma durumunu temsil etmektedir.

Ö2, “tanjant formülü genelde biliniyor” diyerek Şekil 4.244’teki çözümü yapmıştır.

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} \quad \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5} \quad \boxed{\frac{2}{5}}$$

Şekil 4.244. Ö2'nin “tanjantın fark formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

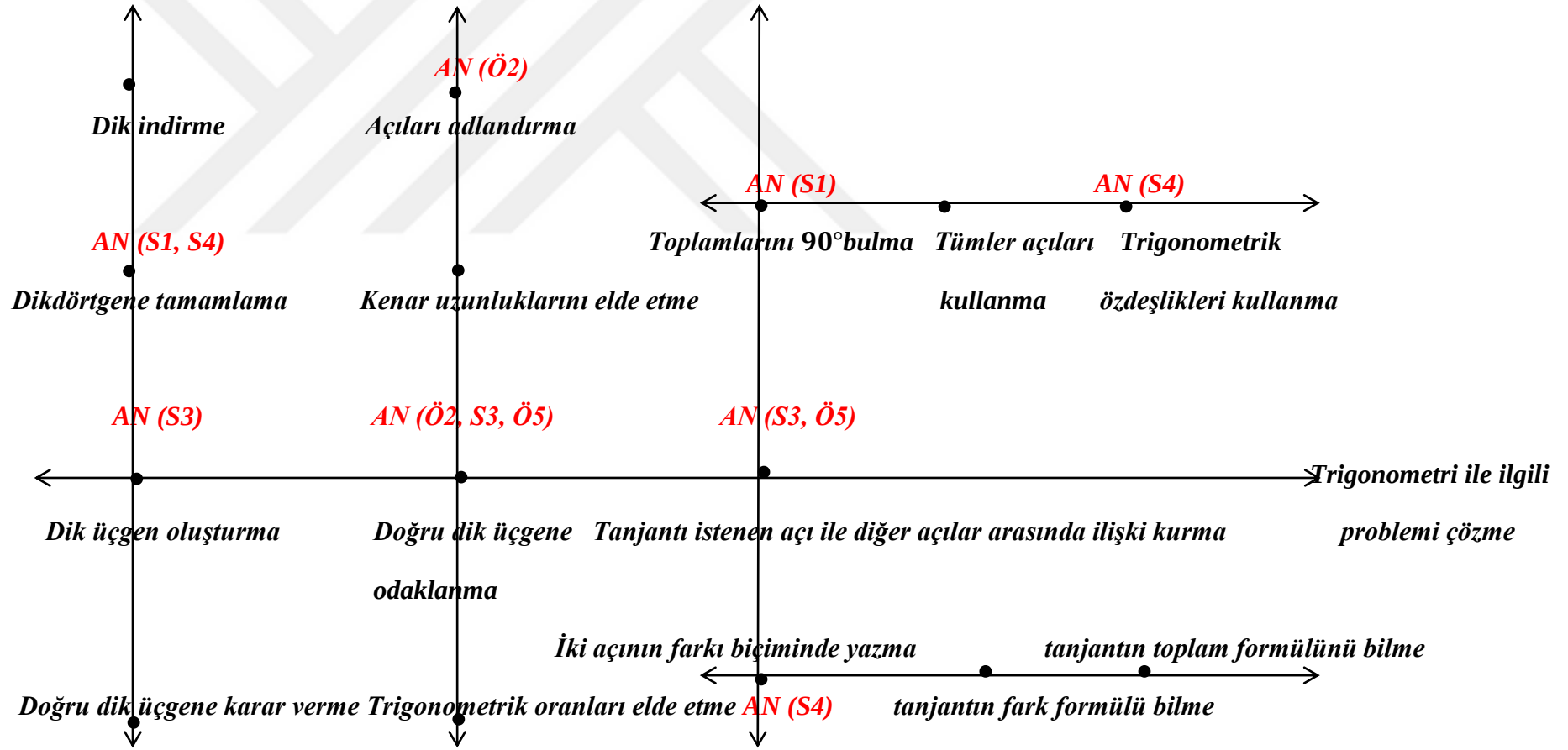
Ö5, “Büyük k açısından $\tan(k - m)$ yapacağım” diyerek Şekil 4.245'teki çözümü yapmıştır.

$$\tan(k - m) = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

Şekil 4.245. Ö5'in “tanjantın fark formülünü bilme” boyutuna ait çözümü

Ö2 “açıları adlandırma” alt kategorisi ile “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. S4 “trigonometrik oranları elde etme” alt kategorisini ve “trigonometrik özdeşlikleri kullanma” boyutunu AN olarak belirlemiştir. S1 “dikdörtgene tamamlama” alt kategorisi ve “toplamlarını 90° bulma” boyutunu AN olarak belirlemiştir. S3 ve Ö5 “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisi ile “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Öğrencilerin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.246'daki gibidir.

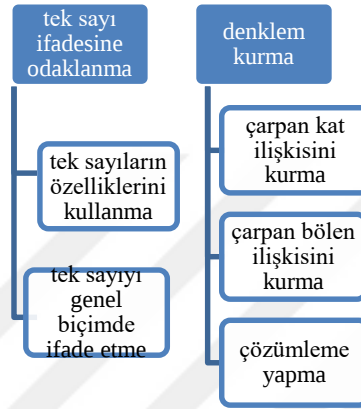


Şekil 4.246. Öğrencilerin trigonometri ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.4. Bölünebilme ile İlgili Problem ile Elde edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin bölünebilme ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Bölünebilme ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.247’deki gibidir.



Şekil 4.247. Bölünebilme ile ilgili problem ile öğrencilerin anahtar nokta belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.4.1. Lise Öğrencilerin Bölünebilme ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Tek sayı ifadesine odaklanma: Problemden belirtilen gömlek sayısının tek sayı olması bilgine dikkat etme durumunu temsil etmektedir. “tek sayı ifadesine odaklanma” kategorisi “tek sayıların özelliklerinin kullanma” ve “tek sayıyı genel biçimde ifade etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

S1, “gömlek aynı zamanda tek sayı” açıklamasını ve “tek sayıda gömlek aldığına göre” açıklamasını yapmıştır.

Tek sayıların özelliklerini kullanma: Tek sayılar ile ilgili özellikleri kullanma durumunu temsil etmektedir. “tek sayı özelliklerini kullanma” alt kategorisi “seçenekleri azaltma” ve “birler basamağını bulma” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S1’in sayının birler basamağının tek sayı olmasının nedenini ifade ettiği “tek sayıda gömlek aldığına göre tek sayı özelliği gereği tek sayı ile tek sayının çarpımının tek” açıklamasını yapmıştır.

S4, “Şimdi 45 ile tek sayıyı çarparsam yine tek sayı olacak” açıklamasını yapmıştır.

Seçenekleri azaltma: Tek sayıların özelliğinin kullanılarak sayının birler basamağına gelebilecek rakamlar ile ilgili tahminde bulunma durumunu temsil etmektedir.

Ö2 sayının birler basamağı ile fikir yürütmüştür. Ö2, “*Tek sayıda gömlek olduğu için birler basamağı tek sayı olur*” diyerek nedenini de açıklamıştır.

S4, “*Yani birler basamağı 1, 3, 5, 7, 9 olması lazım*” açıklamasını yapmıştır.

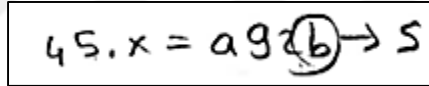
Birler basamağını bulma: Sayının birler basamağının 5 olduğunun bulunması durumunu temsil etmektedir.

S1, “*Tek sayı olduğu için birler basamağı 5*” açıklamasını yapmıştır.

Ö2, “*Birler basamağı tek olacak demiştik. 5 olur*” açıklamasını yapmıştır.

S3, “*Birler basamağı 5 olur*” açıklamasını yapmıştır.

S4, “*Tek sayı olduğu için birler basamağı 5 olur*” diyerek şekil 4.248’de görüldüğü gibi bu durumu çalışma kâğıdına yazmıştır.



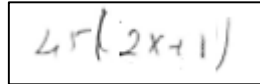
A handwritten equation in a box: $45 \cdot x = 926 \rightarrow 5$. The number 6 in 926 is circled, and an arrow points from it to the number 5 on the right.

şekil 4.248. S4’n “birler basamağını bulma” boyutuna ait zm

T5, “*Tek sayı olduğu için birler basamağı 5 olur*” açıklamasını yapmıştır. Bunun nedenini ise “*tek sayıda gömlek alınması üzerinden sayının tek olması, yoksa birler basamağı 0 da olabilirdi*” şeklinde açıklamıştır.

Tek sayıyı genel biçimde ifade etme: Tek sayının genel biçimde ifade edilmesi durumunu temsil etmektedir.

Ö2 problemi okuduktan sonra “*Tek sayı olduğu için $2x + 1$ gömlek sayısı olsun.*” açıklamasını yapmıştır ve şekil 4.249’da görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.



A handwritten equation in a box: $45(2x+1)$.

şekil 4.249. Ö2’nin “tek sayıyı genel biçimde ifade etme” alt kategorisine ait zm

S3, “Tek sayıda gömlek olduğu için $2x + 1$ olarak düşündüm” diyerek Şekil 4.250’de görüldüğü gibi problem çözümüne başlamıştır.

$$\text{Abdığ' gömlek} \rightarrow 2x+1$$

Şekil 4.250. S3’ün “tek sayıyı genel biçimde ifade etme” alt kategorisine ait çözümü

Denklem kurma: Problemde verilen bilgilere göre denklem kurma durumunu temsil etmektedir. “denklem kurma” kategorisi “çarpan kat ilişkisini kurma” ve “çarpan bölen ilişkisini kurma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

S1 Şekil 4.251’de görüldüğü gibi denklemi kurmuştur.

$$45 \cdot x = 925$$

Şekil 4.251. S1’in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

S3, Şekil 4.252’de görüldüğü gibi denklemi kurmuştur.

$$(2x+1) \cdot 45 = 925$$

45

(2)

Şekil 4.252. S3’ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Çarpan kat ilişkisini kurma: Bir doğal sayı ile bir doğal sayının çarpıldığında elde edilen sayının o çarpanlardan birinin katı olma durumunu temsil etmektedir.

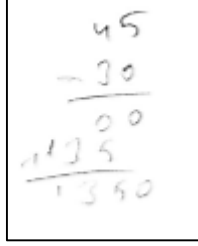
Ö2 sayının onlar basamağı ile fikir yürütmeye çalışmıştır. 45 sayısını hangi sayı çarparsa onlar basamağı 2 olur şeklinde sesli bir şekilde düşünmeye başlamıştır ve Şekil 4.253’te görüldüğü gibi çalışma kâğıdına yazmıştır.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times \\ \hline 925 \end{array}$$

Şekil 4.253. Ö2’nin “çarpan kat ilişkisini kurma” alt kategorisine ait çözümü

Ö2 bir süre deneme yaptıktan sonra sessiz kalmıştır

S3 denklemi kurduktan sonra “45’in katlarını düşüneceğim. 45’i dört haneye çıkaracak sayıları düşüneceğiz” açıklamasını yapmıştır. S3 “30 versek. Biraz düşmemiz mi lazım. Tek sayı ile 45 çarpıldığı için bir kere sayı tek sayı olacak” diyerek Şekil 4.254’te görüldüğü gibi çözümünü yapmıştır.


$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 30 \\ \hline 1350 \end{array}$$

Şekil 4.254. S3’ün “çarpan kat ilişkisini kurma” alt kategorisine ait çözümü

S3 daha sonra “Bu sayıyı veren 45 in katı olan sayıyı bulamıyorum.” açıklamasını yapmıştır.

S4 çözüm için seçtiği yolun problem çözümü için bir fayda sağlamadığını düşünmüştür. S4, “45 in hangi katı bu sayıyı verebilir diye düşündüm. Ama o yolun çıkmaza gittiğini gördüm.” diyerek çözüm yolunu değiştireceğini farklı bir yolla daha çözmeyi deneyeceğini belirtmiştir.

Çarpan bölen ilişkisini kurma: İki doğal sayının çarpımı şeklinde olan sayının diğer iki sayıya tam bölünebilme durumunu temsil etmektedir. “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisi “5 ile bölünebilme kuralını uygulama” ve “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S1 problemi okuduktan sonra “45 liradan aldığına göre gömlekleri bu sayı 45’e tam bölünecek” açıklamasını yapmıştır. S1 bu aşamadan sonra “O zaman 5 ve 9 ile tam bölünecek” açıklamasını yapmıştır.

Ö2 çözüme devam edemeyeceğini ifade etmesi üzerine araştırmacı ile Ö2 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Peki. Bu sayı 45’in katı olduğuna göre 45 ile tam bölünebilir diye düşünsek.

Ö2: Çok mantıklı. Nasıl düşünmedim.

Bu diyalogdan hemen sonra Ö2, “45 ile tam bölünüyorsa hem 5’e hem de 9’a tam bölünür” açıklamasını yapmıştır.

Ö2, “Benim ilk aklıma çözümleme geldi ama yanlış bir yol. Aslında bölünebilmeyi düşünmek gerekiyormuş” açıklaması ile problem çözme sürecinde AN’yi “çarpan bölen ilişkisini bulma” alt kategorisi olarak belirlemiştir.

S3 problem çözümünde ne yapacağını bilemediğini ifade etmiştir. Bu aşamada araştırmacı ile S3 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: *Bu sayı 45’in tam katı ise 45 ile tam bölünebilir diyebilir miyiz?*

S3: *Evet. 45’in katı ise 45 ile tam bölünebilir. Evet. Buradan problem çözülür.*

Bu diyalogdan hemen sonra S3, “45 ile tam bölünebiliyor ise hem 9’a hem de 5 ile tam bölünür” açıklamasını yapmıştır.

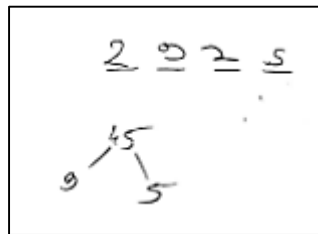
S3 problemin çözümünde “çarpan bölen ilişkisini kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Problemin çözümünde başka herhangi bir AN olmadığını düşünmüştür. S3’ün bu durumu şöyle açıklamıştır.

“Bu problemde birler basamağının tek sayı olduğunu düşünebiliyorsun, 45’in katı olduğunu düşünebiliyorsun. Ama 45 ile tam bölünebiliyor demek önemli nokta. Bunu düşünmek en önemlisi.”

S4, “Bu sayı 45’in tam katı. O halde bu sayı 45 ile yani 9 a ve 5 e tam bölünmelidir” açıklamasını yapmıştır. S4 ilk başta $45 \cdot x$ ifadesini $45k$ gibi düşünmediğini daha sonra fark ettiğini söylemiştir. Bu durumun ona daha farklı gözüktüğünü belirtmiştir.

T5 problemi okuduktan sonra “Bu problemde 45 ile tam bölünüyor” açıklaması ile problem çözme sürecine başlamıştır. T5 daha sonra “Oradan 9 ve 5 e bölünüyor” açıklamasını yapmıştır.

T5’in çözümü Şekil 4.255’teki gibidir.



Şekil 4.255. T5’in “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisine ait çözümü

T5 problemin çözümünde “çarpan bölen ilişkisini kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

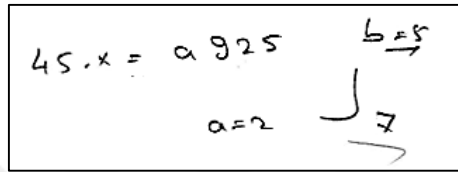
5 ile bölünebilme kuralını uygulama: 5 ile bölünebilme kuralını uygulama durumunu temsil etmektedir.

S1'in "5 ile bölündüğüne göre birler basamağı 5 ya da 0 olacak." açıklamasını yapmıştır.

Ö2, "5 e tam bölüyorsa sonu ya 0 ya da 5 olacak." açıklamasını yapmıştır.

9 ile bölünebilme kuralını uygulama: 9 ile bölünebilme kuralını uygulama durumunu temsil etmektedir.

S1, "9 ile bölünebildiğine göre rakamları toplamı 9'un katı olacak. Buradan $a = 2$ olur" açıklaması ile Şekil 4.256'da görüldüğü gibi problemin çözümünü tamamlamıştır.

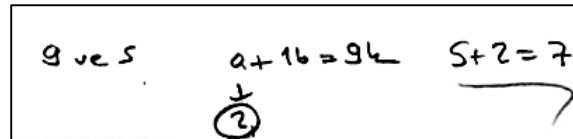

$$45 \cdot x = a925 \quad b=5$$
$$a=2 \quad \checkmark 7$$

Şekil 4.256. S1'in "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü

Ö2, "9 ile tam bölünebiliyorsa 2 olur" diyerek problem çözümünü tamamlamıştır.

S3, "Binler basamağı da 2 olur" diyerek problem çözümünü tamamlamıştır.

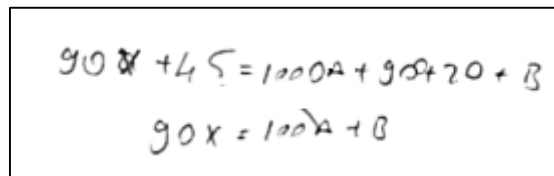
S4, "9 ile tam bölündüğüne göre rakamları toplamı 9'un katı olacak" açıklaması ile Şekil 4.257'de görüldüğü gibi a rakamını 2 bulmuştur.


$$9 \text{ ve } 5 \quad a+16=96 \quad 5+2=7$$
$$\textcircled{2}$$

Şekil 4.257. S4'ün "9 ile bölünebilme kuralını uygulama" boyutuna ait çözümü

Çözümleme yapma: Sayının rakamlarının basamak değerleri toplamı biçiminde yazılması durumunu temsil etmektedir.

Ö2 sayıyı çözümleme yapmıştır fakat daha sonraki adımlar için tereddütte düşmüştür. Ö2 yaşadığı durumu "Çözümleme yaptım ama bilinmeyen çok olduğu için karıştı sanki" diyerek belirtmiştir. Ö2'nin çözümü Şekil 4.258'deki gibidir.

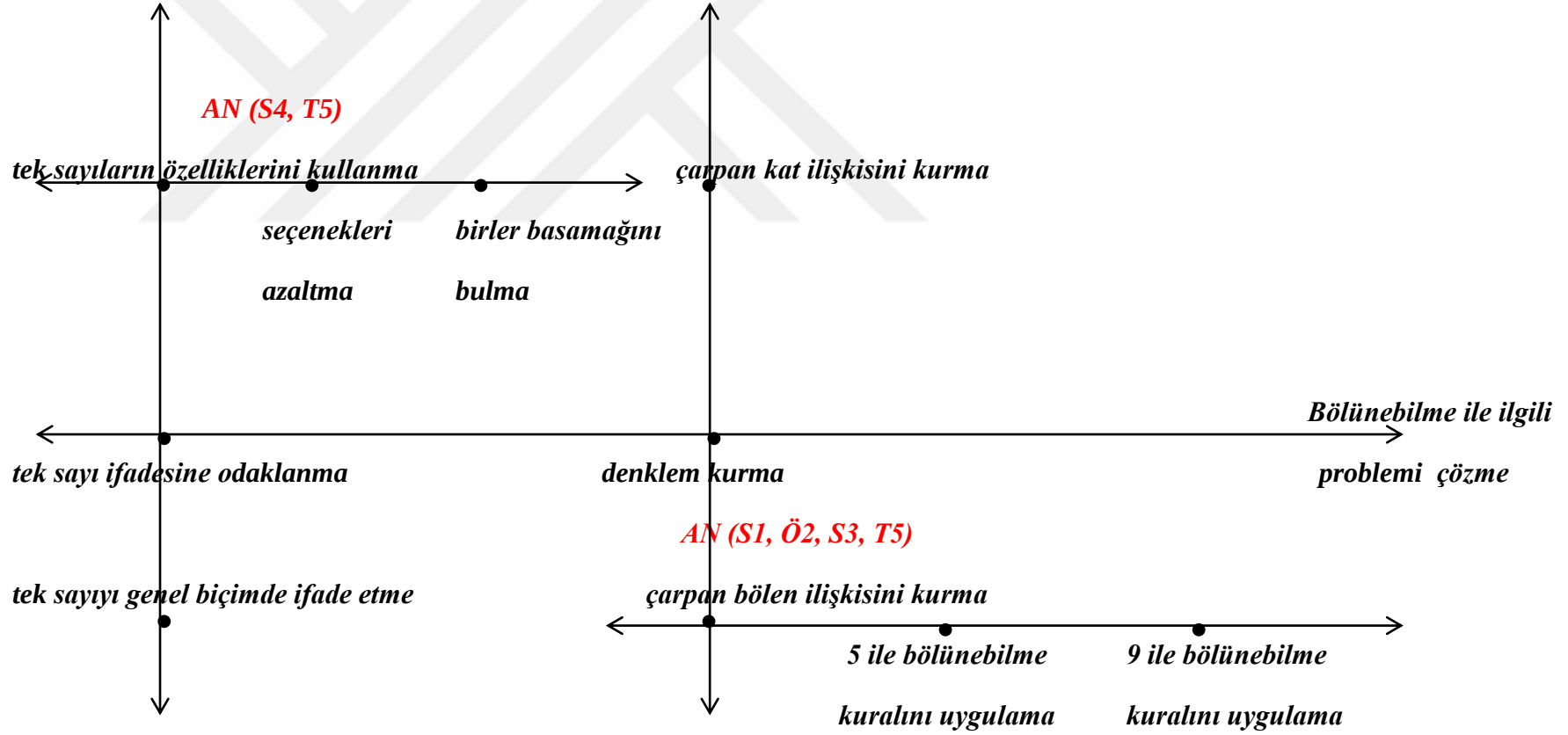

$$90x + 45 = 1000A + 90 + 20 + B$$
$$90x = 100A + B$$

Şekil 4.258. Ö2'nin "çözümleme yapma" alt kategorisine ait çözümü

S1, Ö2, S3 ve T5 problem çözme sürecinde “çarpan bölen ilişkisini kurma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S4 uzun süre düşünmesine rağmen bu alt kategoriyi AN olarak belirlememiştir. S4 ve T5 “tek sayıların özelliklerini kullanma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Öğrencilerin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.259’daki gibidir.



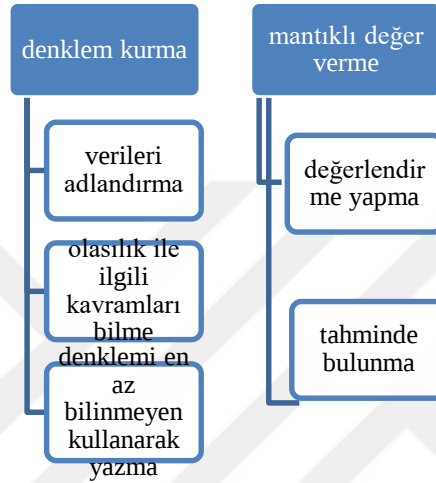


Şekil 4.259. Öğrencilerin bölünebilme ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.5. Olasılık ile İlgili Problem ile Elde edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerin olasılık ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Olasılık ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.260'daki gibidir.



Şekil 4.260. Olasılık ile ilgili problem ile ilgili öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.5.1. Lise Öğrencilerinin Olasılık ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Denklem kurma: Problemden verilen bilgileri kullanarak denklem oluşturma durumunu temsil etmektedir. “denklem kurma” kategorisi “verileri adlandırma”, “olasılık kurallarını bilme” ve “denklemini en az bilinmeyen kullanarak yazma” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

S2'nin çözümü Şekil 4.261'deki gibidir.

$$\frac{3}{5x} \cdot \frac{4}{3x} = \frac{1}{2}$$
$$(3+x)(3-x) = 64$$
$$9 - 16 = \frac{24}{4}$$
$$x=1$$

Şekil 4.261. S2'nin “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

S3'ün çözümü Şekil 4.262'deki gibidir.

$$\frac{3}{3+x} \cdot \frac{y}{7-x} = \frac{1}{2} \quad \text{ü. } 6 = 24$$

$$6y = (3+x)(7-x)$$

Graph of $y = -(x-2)^2 + 10$ with points $(3, 6)$ and $(1, 6)$ marked. A circle is drawn around the vertex $(2, 10)$.

Şekil 4.262. S3'ün “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Verileri adlandırma: Birinci veya ikinci torbada bulunan beyaz ve kırmızı top sayılarını harflendirme durumunu temsil etmektedir.

S1, “Kırmızı top sayısına K beyaz top sayısına B diyelim. $K + B = 10$ ” açıklamasını yapmıştır. S1, “Birinci torbada 3 tane kırmızı top vardır. İkinci torbada kırmızı sayısı $K - 3$ tür.” diyerek açıklamasına devam etmiştir. S1 problem çözümünde onu doğru sonuca götüren alternatif yolu neden seçtiğini “İkisinde de en az bir beyaz top vardır. Şimdi bir tane n desem üç tane bilinmeyene çıkacak o yüzden deneme ile yapmıştım.” açıklaması ile ifade etmiştir. S1'in çözümü Şekil 4.263'deki gibidir.

$$K + B = 10$$

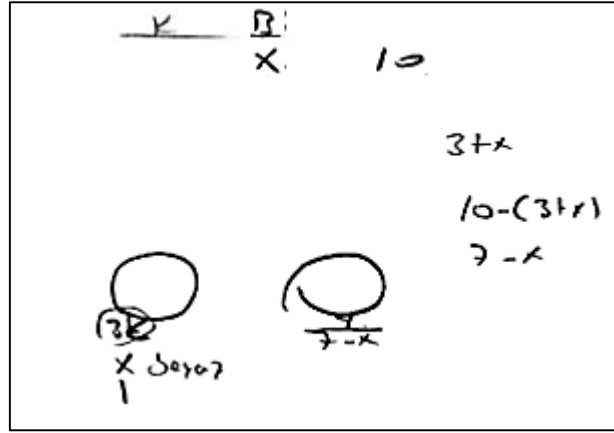
3 n	K-3 B-n
1. torba	2. torba

Şekil 4.263. S1'in “verileri adlandırma” alt kategorisine ait çözümü

S1, “Birinci torbada n tane beyaz top olsa ikinci torbada $b - n$ beyaz top olur” açıklaması ile verileri adlandırma işlemini bitirmiştir.

S2 problemi okuduktan sonra “Bilinmeyen vereceğim ama. Birinci torbada x beyaz olsun” diyerek verileri harflendirme işlemine başlamıştır. S2 ikinci torbadaki top sayısına bilinmeyen sayısının fazla olduğu düşünerek x cinsinden ifade etmiştir. S2'nin “Toplam $3 + x$ buradaysa ikinci torbada $10 - (3 + x) = 7 - x$ top var” açıklamasını yapmıştır.

S2 problemi tekrar okuduktan sonra ikinci torbadaki kırmızı top sayısına da ihtiyacı olduğunu anlamıştır. S2'nin çözümü Şekil 4.264'teki gibidir.



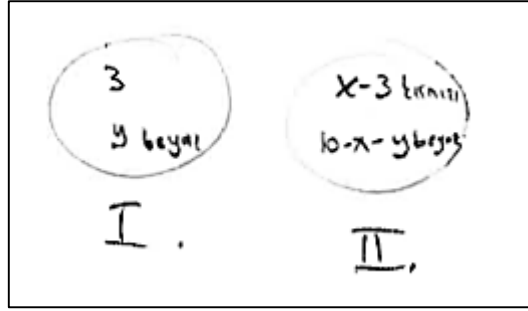
Şekil 4.264. S2'nin “verileri adlandırma” alt kategorisine ait çözümü

S3, “O zaman burada x beyaz top var desem çok bilinmeyene girmem umarım” açıklamasını yapmıştır. Aynı şekilde S3, “Kaç kırmızı top olduğunu bilmiyorum. y diyelim” diyerek işlemlerine devam etmiştir. S3 burada ilk başta beyaz top sayısını x olarak adlandırdığını unutmuştur ve birinci torbadaki top sayısını x olarak düşünmüştür. S3, “İkinci torbada $10 - x$ top olsun” açıklamasından ve denklem oluştururken olasılığı yazdığı durumlardaki ifadelerinden burada dikkatsizlik yaptığı anlaşılmıştır.

S3 problem çözme sürecinde “verileri adlandırma” kategorisinin AN olarak belirlediğini “Problem çok karışık gerçekten. Bilinmeyenleri vermek önemli nokta” açıklamasıyla ifade etmiştir.

S5 toplam kırmızı sayısına x diyerek adlandırma işlemine başlamıştır. S5, “İkinci torbada kırmızı sayısını bilmiyoruz ama $x - 3$ tane kırmızı olacak” ve “İkinci torbada yine beyaz sayısını bilmiyoruz. Şimdi burada beyaz sayısını bilmediğim için baya bir problem yaşadım. Başka bir değişken mi kullansam bilemedim” açıklamasını yapmıştır. S5 başka bir bilinmeyen kullanmak istememiştir. S5 problem çözme sürecinin ilk aşamasında yaşadığı zorluğu “Burada takıldım açıkçası. Tek bir bilinmeyen tarzında yazabilirsek çok daha iyi olabilirdi” açıklaması ile ifade etmiştir. S5 bu şekilde denklem kurmak istememiştir.

S5'in Şekil 4.265'deki gibidir.



Şekil 4.265. S5'in "verileri adlandırma" alt kategorisine ait çözümü

S5 problemin çözüm sürecinde "verileri adlandırma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. S5 yaşadığı bu zorluk nedeniyle diğer aşamalara geçemediğini belirtmiştir. S5'in bu durum ile ilgili açıklaması şöyledir.

"Benim ilk başta kafamı karıştıran bilinmeyen verirken yaptığım karmaşıklık. Çok fazla bilinmeyen ortaya çıktı. Bilinmeyeni sonda verilen bilgiye göre verseydim böyle karışıklık olmazdı. Sondan başlamam gerekirdi. Ben ilk gördüğüm veriden başladım. Sondaki verileri kullanıp ilk verileri elde etmeye çalışırsak daha kolay bir eşitlik elde ederiz."

Olasılık ile ilgili kavramları bilme: Olasılık ile ilgili kavram ve kuralları bilme durumunu temsil etmektedir. "olasılık ile ilgili kavramları bilme" alt kategorisi "olasılığı bulma" ve "olasılıkta çarpma kuralını bilme" olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S2, "ilk başta öncelikle iki torbadan birini seçeceğim. Çünkü iki tane torbam var. Birinci torbadan mı alacağım ikinci torbadan mı alacağım" açıklamasını yapmıştır. Problemde geçen kavramları anlamadığı görülmüştür. Daha sonra S2 torbalar için bir seçimin söz konusu olmadığını anlamıştır.

Olasılığı bulma: Bir olayın olma olasılığını bulma durumunu temsil etmektedir.

S3'ün denklemi dikkat alındığında bazı hatalar göze çarpmıştır. S3'ün birinci torbadan kırmızı top çekilme olasılığını doğru yapmadığı görülmüştür. Araştırmacı bu noktada S3'ün dikkatini çekmiştir. S3 verileri adlandırma işlemi yaparken birinci torbadaki top sayısına x dediğini, çalışma kâğıdına beyaz sayısı olarak ifade ettiğini belirtmiştir.

S3'ün çözümü Şekil 4.266'daki gibidir.

Handwritten solution for S3:

$$k + b = 10$$
$$\frac{3k}{x} \cdot \frac{y}{10-x} = \frac{1}{2}$$
$$6y = -x^2 + 10x$$

Şekil 4.266. S3'ün “olasılığı bulma” boyutuna ait çözümü

Olasılıkta çarpma kuralını bilme: Olasılıkta çarpım kuralını bilme durumunu temsil etmektedir.

S2, “Torbalardan rastgele birer top çekildiğinde topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$ 'dir” cümlesini tekrar okumuştur. S2'nin çözümü Şekil 4.267'deki gibidir.

Handwritten solution for S2:

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{2}$$

Şekil 4.267. S2'nin “olasılıkta çarpma kuralını bilme” boyutuna ait çözümü

Denklemini en az bilinmeyen kullanarak yazma: Denkleminde yer alan bilinmeyenleri en az sayıda kullanma durumunu temsil etmektedir.

S1 denklemini yazdıktan sonra bilinmeyen sayısının fazla olduğunu düşünmüştür ve en sade hale getirmeye çalışmıştır. S1, “ $k + b = 10$ 'dur. Bunu denkleminde yerine yazarsak” diyerek 4.268'deki çözümü yapmıştır.

Handwritten solution for S1:

$$\frac{3}{3+n} \cdot \frac{k-3}{b-n+k-3} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3(k-3)}{3+n(7-n)} = \frac{1}{2}$$
$$6(k-3) = (3+n)(7-n)$$

Şekil 4.268. S1'in “denklemini en az bilinmeyen kullanarak yazma” alt kategorisine ait çözümü

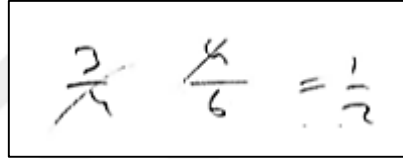
Mantıklı değer verme: Belli ölçütler çerçevesinde deneme yapma durumunu temsil etmektedir.

S1 daha sonra problem çözüm sürecinde yaptığı işlemlerin nedenini açıklamıştır. S1, *“Aslında ben bu soruyu deneme yanılma ile akıl yürüterek buldum”* ve *“Problemi okuduğum zaman ilk aklıma denemek gelmedi. Ama bilinmeyen sayısı fazla olduğu için vazgeçtim. Deneyerek yapmaya karar verdim”* açıklamasını yapmıştır.

S4 problemi okuduktan sonra önceki deneyimlerinden yola çıkarak *“Eğer problemde birden fazla bilinmeyen varsa hiç bulaşmıyorum. Genelde deneyerek yapıyorum”* diyerek değer verme yoluna gitmiştir

Tahminde bulunma: Olasılığı kullanarak tahmin yapma durumlarını temsil etmektedir.

S1 problemi okuduktan sonra çalışma kâğıdına Şekil 4.269’da görüldüğü gibi çözümü yapmıştır. Kırmızı top sayısı 3 olduğu için ve birinci torbada en az bir beyaz top olduğu için bir beyaz top olsun düşüncesiyle deneme yapmıştır ve çözüme ulaşmıştır.


$$\frac{3}{4} \div 6 = \frac{1}{2}$$

Şekil 4.269. S1’in “tahminde bulunma” alt kategorisine ait çözümü

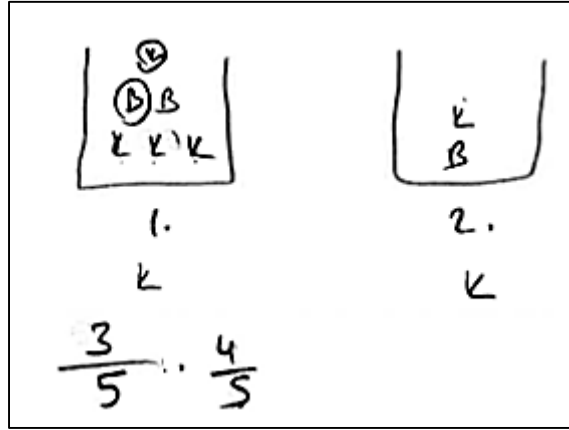
S1, *“Şöyle 3 tane kırmızı 1 tane beyaz olsun dedim”* ve *“İkinci torbaya 6 top kalıyor. 4 kırmızı olursa 2 beyaz top kalır.”* açıklamasını yapmıştır. Bunun nedenini ise *“Olasılığın $\frac{1}{2}$ gelmesi için böyle olması gerektiğini düşündüm. Böylelikle çözüme ulaştım.”* diyerek çözümü tamamlamıştır.

S1 üniversiteye giriş sınavında sorulan bir sorunun kısa sürede çözülmesinin gerektiğini belirterek *“Problemin en önemli noktası kırmızı çekilme olasılıklarını yazıp olasılığı $\frac{1}{2}$ elde etmek için deneme yapmaktır.”* açıklamasını yapmıştır.

S4 en az bir tane olması ölçütünü kullanarak kırmızı ve beyaz top sayılarını dağıtarak çeşitli denemeler yapmıştır. Fakat S4 verilen olasılığı verdiği değerler ile elde edememiştir.

S4 daha sonra topların iki torbaya eşit dağılmış olabileceğini düşünmüştür ve o şekilde bir dağılım yapmıştır. Sonuçta istenen olasılığı yine elde edememiştir.

S4’ün olasılığı kullanarak top sayılarının ne olduğu hakkında fikir yürüttüğü çözüm Şekil 4.270’deki gibidir.



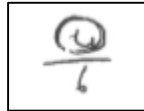
Şekil 4.270. S4’ün “tahminde bulunma” alt kategorisine ait çözümü

S4 verdiği değerler ile problemin sonucuna ulaşamamıştır. Bunun üzerine S4’ün son olarak problem çözme süreci ile açıklaması şöyledir:

“Ben bu soruda şıklardan giderdim. Deneyerek yapardım. Daha kolay olurdu. Daha basit çıkardı. Bu kadar uğraşmaya gerek kalmazdı. Deneyip hepsini yerleştirdim. Olasılıklardan doğru sonuca ulaşırdım.”

Değerlendirme yapma: Problemden yer alan koşula uygun olası değerlerin değerlendirilmesi durumunu temsil etmektedir.

S2, “ $x = 1$ ise $y = 4$ olur” açıklamasıyla problemin çözümünü tamamlamıştır. S2, “beyaza 2 top kalır” diyerek Şekil 4.271’de görüldüğü gibi kontrol yapmıştır.



Şekil 4.271. S2’nin “değerlendirme yapma” alt kategorisine ait çözümü

S2 “değerlendirme yapma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

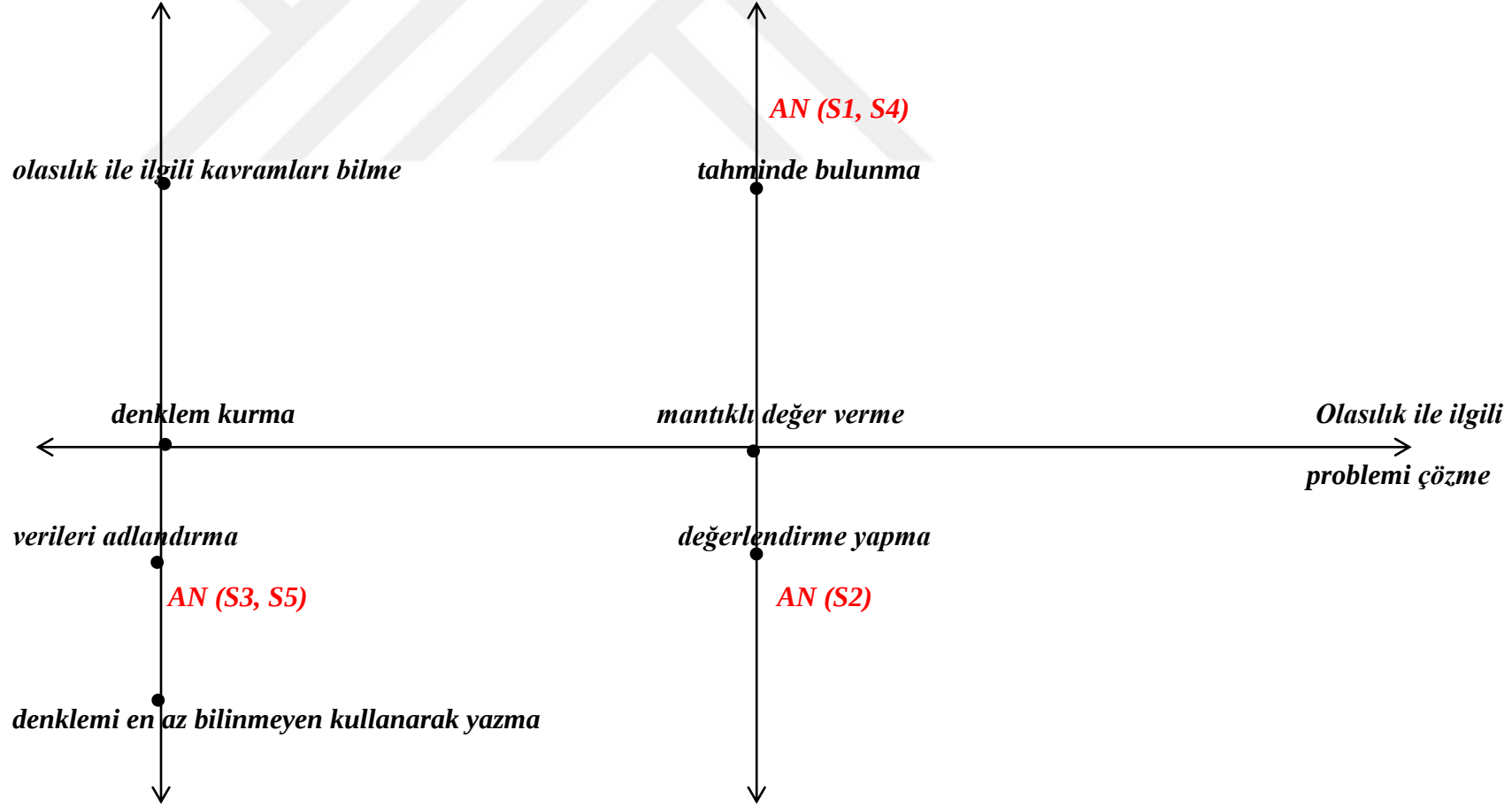
S5, “Burada x yerine 3 verdiğimizde ikinci torbaya beyaz kalmıyor. x yerine 1 verdiğimizde ikinci torbadaki beyaz sayısını buluruz.” açıklaması ile Şekil 4.272’de görüldüğü üzere problemin çözümünü tamamlamıştır.

The image shows a handwritten solution for a problem. At the top, the equation $\frac{3}{3+x} \cdot \frac{y}{7-x} = \frac{1}{2}$ is written. To the right of this equation, the number 2 is underlined. Below the first equation, the equation $6y = (3+x)(7-x)$ is written. Below this, the equation $6y = 4(6)$ is written. To the right of these equations, the value $x = 1$ is written, and below it, the value $y = 1$ is written.

Şekil 4.272. S5'in "değerlendirme yapma" alt kategorisine ait çözümü

S3 ve S5 "verileri adlandırma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S1 ve S4 "tahminde bulunma" alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir. S2 "değerlendirme yapma" alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Öğrencilerin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.273'deki gibidir.



Şekil 4.273. Öğrencilerin olasılık ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.6. Kombinasyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin kombinasyon ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Kombinasyon ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.274'deki gibidir.



Şekil 4.274. Kombinasyon ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.6.1. Lise Öğrencilerinin Kombinasyon ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Kesişime odaklanma: Kesişimde olan hücrelere dikkat etme durumunu temsil etmektedir. “kesişime odaklanma” kategorisi “kesişimi ayrı düşünme” ve “kesişimi ayırmama” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

S1, “Gözlemlediğim zaman şu kısım kesişiyor. Kesiştikleri için ikisi için de olabileceğini gördüm” açıklamasını yapmıştır.

S2, “Ama kesişen olacak herhalde şunlar” açıklamasını yapmıştır.

S3, “Ortadaki iki petekte kesişme var” açıklamasını yapmıştır.

Kesişimi ayrı düşünme: Kesişimde olan hücrelerden ve kesişimde olmayan hücrelerden ayrı ayrı seçim yapılması durumunu temsil etmektedir. “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisi “kesişimde olan bölgeyi hesaplama” ve “kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S1’in problemi okuduktan hemen sonra problem çözme sürecini tasarladığı görülmüştür. S1 ilk olarak “*Boyadığımız bu turuncu rengin ortada olma ihtimali var, ikisinin ortasında olma ihtimali var. Bir de ayrı olma ihtimali var diye düşündüm*” açıklamasını yapmıştır.

S1’in çözümü Şekil 4.275’deki gibidir.

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 4 = 16 \\ 2 \cdot 6 = 12 \\ \hline 28 \\ 7 \\ \hline 4 \cdot 7 = 28 \end{array}$$

Şekil 4.275. S1’in “kesişim ayrı düşünme” alt kategorisine ait çözümü

S1’in “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlediğini ifade ettiği açıklaması şöyledir.

“Bu problemin önemli noktası iki mavi noktanın ortasındaki yerin ayrı değerlendirmesi gerekiyor. Kesiştikleri için ikisi için de olabileceğini gördüm.”

S3, “*Bu problemin en önemli noktası ortadaki ortak kısmı ayrı düşünmek*” açıklaması ile “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

S4, “*Burada önemli olan nokta ayrı durum olarak alınması*” açıklaması ile “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

S5, “*Mesela hiç ortak olmayacak şekilde düşündüm. Ona göre bir olası durum çıktı*” ve “*Sonra bir tanesi ortak olsun dedim*” açıklamaları ile “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini problem çözme sürecinde belirtmiştir.

Kesişimde olan bölgeyi hesaplama: Kesişimde yer alan hücrelerden seçim yapılması durumunu temsil etmektedir.

S2, “*Şimdi o iki taneden birini seçtiğimi düşünürsem. Geriye kalan 5 taneden 3 tane seçmem gerekir. Ama toplam 3 tane olması için 2 tane seçmem gerekir. Yani*

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{2} = 10 + 10 = 20$$

İlk kısımdan 16 vardı. Toplam 36 olur” diyerek çözümünü tamamlamıştır. S2, “Hocam cevap 36 mı” açıklaması ile problemin çözümünü tamamladığını ifade etmiştir. Bu aşamada S2 ve araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Ortadaki iki hücreden birini seçilmiş kabul ettiğimizi unutmamalısın. Bu durumda $\binom{5}{2}$ seçersen ve seçtiğin hücrede ortadaki hücrelerden biri olursa istenen durum ile çelişir.

S2: Tamam şimdi anladım. Bir daha soruya bakayım. Şunu bıraktım. Geri kalan 4 hücreden 2 tane seçtim.

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 6 + 6 = 12$$

olur.

Bu diyalogdan sonra S2 problem çözme sürecini doğru olarak tamamlamıştır. S2’nin problem çözme sürecinde yaşadığı zorluğun kesişimde bulunan bölgeyi hesaplamada olduğu anlaşılmıştır. S2 bu zorluğu “Ben ilk başta bazıları turuncu diyor ya onun sabit olduğunu düşünmedim.” açıklaması ile ifade etmiştir. S2 problem çözme sürecinde bu noktayı AN olarak belirlemiştir.

S3, “Ortada ikisini birden boyamayacağız.” açıklamasını yapmıştır. S3’ün kesişimde olan bölgeyi hesaplarken bu ölçütü göz önünde bulundurduğu söylenebilir. S3 kesişim bölgesi ile ilgili bu açıklamanın nedenini de “Çünkü soldakinin kuralı bozulur.” diyerek vurgulamıştır. S3 daha sonra “Ortadan bir tanesini seçsek. İçinde bir yazan hücre için durum kalkmış oluyor. Geriye kalan durum için de dört tanenin iki tanesini alacağız..” diyerek Şekil 4.276’daki çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}
 &= \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{1}{1} \cdot \binom{4}{3} \\
 &= 2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 \\
 &= 12 + 4 = 16
 \end{aligned}$$

Şekil 4.276. S3’ün “kesişimde olan bölgeyi hesaplama” boyutuna ait çözümü

S3 problem çözme sürecinde AN'yi "kesişimde olan bölgeyi hesaplama" boyutu olarak belirlemiştir. Bu durumu ise *"Ortadaki hücreyi ayrı aldım çünkü 1 kuralı bozuyor. Ortadan iki tane alamıyorum. Burası önemli."* diyerek belirtmiştir.

S5 burada ortak hücrelerde yapılan seçime dikkat edilmesi gerektiğini vurgulamıştır ve *"ortak olanlardan iki tanesi olsun diyemedim. Çünkü kuralı ihlal ediyorum."* açıklamasını yapmıştır. S5'in *"bir tane boyama hakkımız bitti. İkinin birisini seçeriz. Geri kalandan dördün ikilisini seçeriz. İki tane boyarsak çünkü kuralı ihlal etmiş oluruz."* açıklaması ile kesişimde olan bölgenin seçimini tamamlamıştır.

S5 öğrencilerin iki hücreden bir hücre seçimi yapılırken sadece bir tanesinin seçiminin sabit kalacağı düşüncesinin olabileceğini belirterek *"Çarpı ikiye gerek yok çünkü zaten burada seçmiş oluyoruz."* açıklaması ile ifade etmiştir. S5'in bu durumu belirtmesi problemin çözümü için S2'nin çözümü dikkate alındığında anlamlı bulunmuştur. Çünkü S2'nin kesişimde olan bölgeyi hesaplama çözümü incelendiğinde S2'nin seçim yaptığı halde aynı hücreyi tekrar hesaba katmasından kaynaklı hata yaptığı görülmüştür.

Kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama: Kesişimde olmayan hücrelerden seçimlerin yapılması durumunu temsil etmektedir.

S2'nin kesişimde bulunan hücrelerde seçimin nasıl yapılacağına dair zorluk yaşadığı söylenebilir. S2 problemin çözümünde yaşadığı bu zorluğu "problemi anlamadım" açıklaması ile ifade etmiştir. Buradan S2 *"Tekrar düşünüyim."* diyerek problemin çözümünü ile ilgili alternatif bir yol düşüneceğini belirtmiştir. S2 bu çözüm yolunu *"ortadaki yeri hiç düşünmezsem."* diyerek açıklamaya başlamıştır.

Daha sonra S2, *"Eğer ortadaki yeri hiç düşünmezsem $\binom{4}{1}\binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16$ geliyor."* açıklaması ile çözümüne devam etmiştir. S2'nin çözümüne bakıldığında çok sayıda kombinasyon hesaplaması yaptığı söylenebilir. S2'nin çözümü Şekil 4.277'deki gibidir.

Şekil 4.277. S2'nin "kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama" boyutuna ait çözümü

S3, "Şimdi ortadan hiç almama durumunu düşüneceğiz." açıklamasını yapmıştır. S3 "Dört taneden bir tane alacağız. Sonra da yine ortadan seçmeyip, bu taraftan dördün üçlüsü yapacağız." diyerek hesaplamasını yapmıştır.

S5 problem çözümüne "Hiç ortak komşuları olmadığını düşünürsek. Şuradan dört taneden bir tane seçmesi lazım. Dördün birli kombinasyonu derim. Buradan da üç tanesi boyanacağı için dördün üçlüsü derim." diyerek Şekil 4.278'de görüldüğü gibi çözümü yazmaya başlamıştır.

Şekil 4.278. S5'in "kesişimde olmayan bölgeyi hesaplama" boyutuna ait çözümü

Kesişimi ayırmama: Kesişimde olan hücreleri diğer hücrelerden ayırmadan seçim yapılması durumunu temsil etmektedir. "kesişimi ayırmama" alt kategorisi "kesişimi çıkarma" ve "kesişimi paylaşırma" olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S4'ün problemi okuduktan sonra yaptığı "Tüm durumlardan ortak olanları mı çıkaracağız." açıklaması ile problem çözme sürecinde nasıl bir yol izleyeceğine henüz karar veremediği anlaşılmıştır.

Kesişimi çıkarma: Tüm hücrelerden yapılan seçimlerden kesişimde olan hücrelerden yapılan seçimlerin çıkarılması durumunu temsil etmektedir.

S2'nin “*Onu çıkaracağız.*” diyerek tüm durumlar için hesaplamaları yapıp kesişimde bulunan hücrelerle ilgili seçimleri hesapladıktan sonra bunu tüm durumdan çıkarmayı düşünmüştür. S2'nin bu durumla ilgili açıklaması şöyledir.

“*Şimdi $\binom{6}{1}$ lisi seçtim. $\binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1}$ 36 oldu. 36'dan İki durum kesişiyor herhalde. Onu çıkaracağız.*”

S2 açıklamasının hemen ardından “*Hocam sonuç büyük bir şey mi çıkıyor. Ben soruyu tam anlamadım sanırım.*” diyerek çözümü ilerletemediğini belirtmiştir.

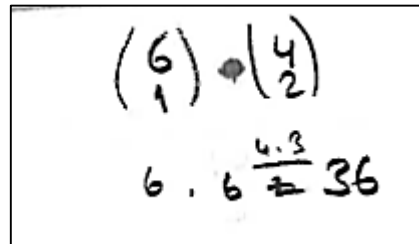
Kesişimi paylaşırma: Kesişimde bulunan iki hücrenin diğer hücrelere dağıtılarak seçim yapılması durumunu temsil etmektedir.

S2, “*Şimdi o iki taneden birini seçtiğimi düşünürsem. Geriye kalan 5 taneden 3 tane seçmem gerekir. Ama toplam 3 tane olması için 2 tane seçmem gerekir. Yani*

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{2} = 10 + 10 = 20$$

İlk kısımdan 16 vardı. Toplam 36 olur.” diyerek çözümünü tamamlamıştır.

S4, “*Bir şuradan birini boyadım diyelim. Mesela bunu boyadım. Buradan artık boyayamam. İki tane buradan boyamam gerekiyor.*” diyerek Şekil 4.279'daki çözümü yapmıştır.


$$\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}$$
$$6 \cdot 6 \frac{4 \cdot 3}{2} = 36$$

Şekil 4.279. S4'ün “kesişimi paylaşırma” boyutuna ait çözümü

S4 problemin çözümünü tamamladığını düşünmüştür ve hata yaptığını düşünmemiştir. Araştırmacı S4'e hatasını fark ettirmek istemiştir. Bu aşamada araştırmacı ve S4 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

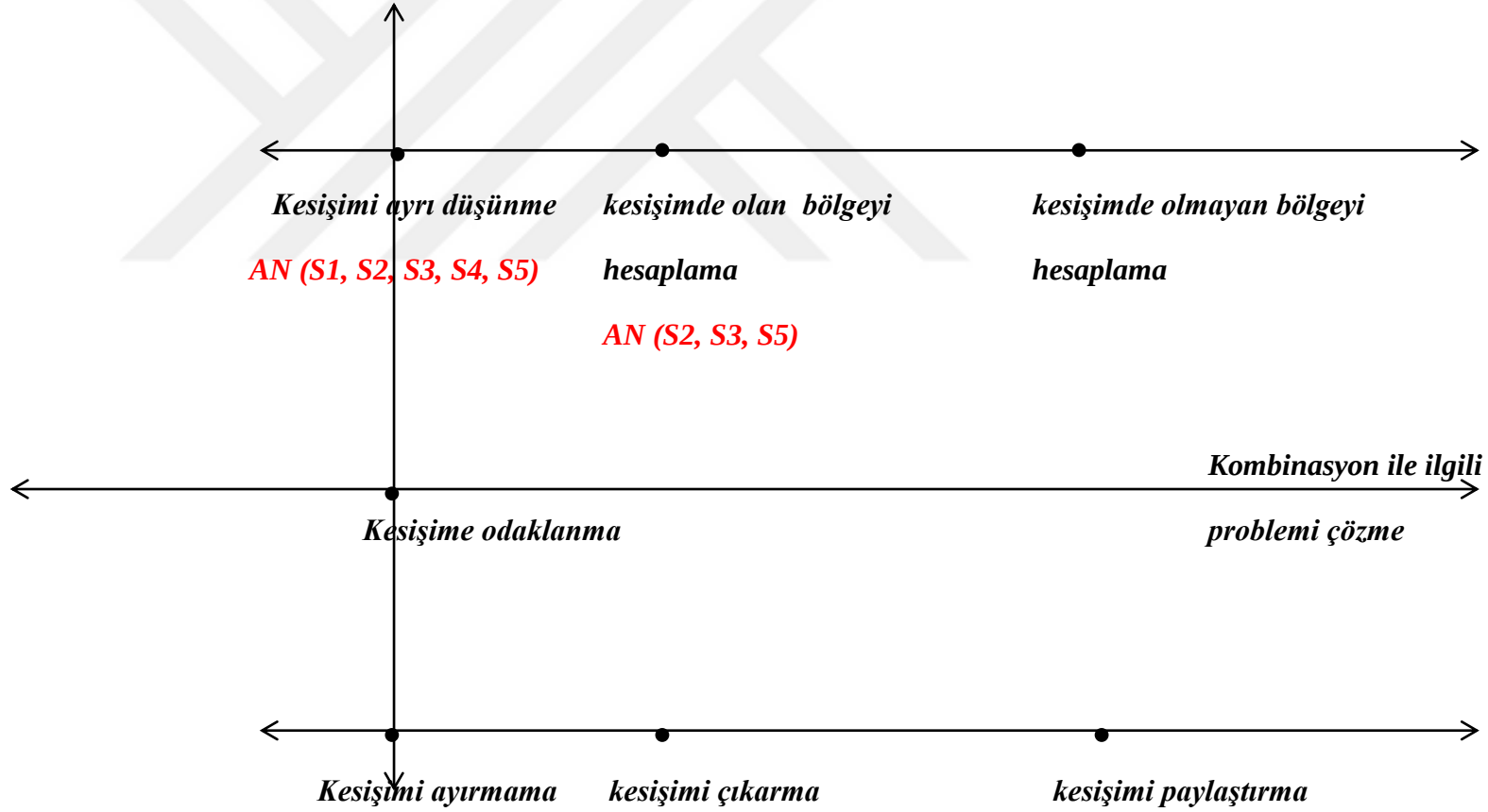
Araştırmacı: Yukarıda uyguladığın durumlara göre diyelim ki altı hücreden ortak olmayan hücrelerden birisi boyandı. Diğer tarafta dört hücreden ikisi boyandı. Bu durumda üç tane boyama şartına uymamış oluyorsun. Ne düşünüyorsun?

S4: Anladım. Ayı ayrı yazıp toplayacağım.

Araştırmacı: Ortada bulunan hücreleri ayrı bir durum olarak düşünebilirsin.

S1, S2, S3, S4 ve S5 öğrencilerin tamamı problem çözme sürecinde “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S2, S3 ve S5 öğrenciler “kesişimde olan bölgeyi hesaplama” boyutunu AN olarak belirlemiştir. S2 ve S4 problemi çözmede zorluk yaşamıştır. S2 ve S4 öğrencilere “kesişimi ayrı düşünme” alt kategorisi AN olarak araştırmacı tarafından verilmiştir ama yeterli olmamıştır. Öğrenciler kesişimde olmayan bölgeden seçim yapmada zorluk yaşamamış fakat kesişimde olan bölgeden seçim yapmada zorluk yaşamışlardır.

Lise öğrencilerinin kombinasyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.280’deki gibidir.

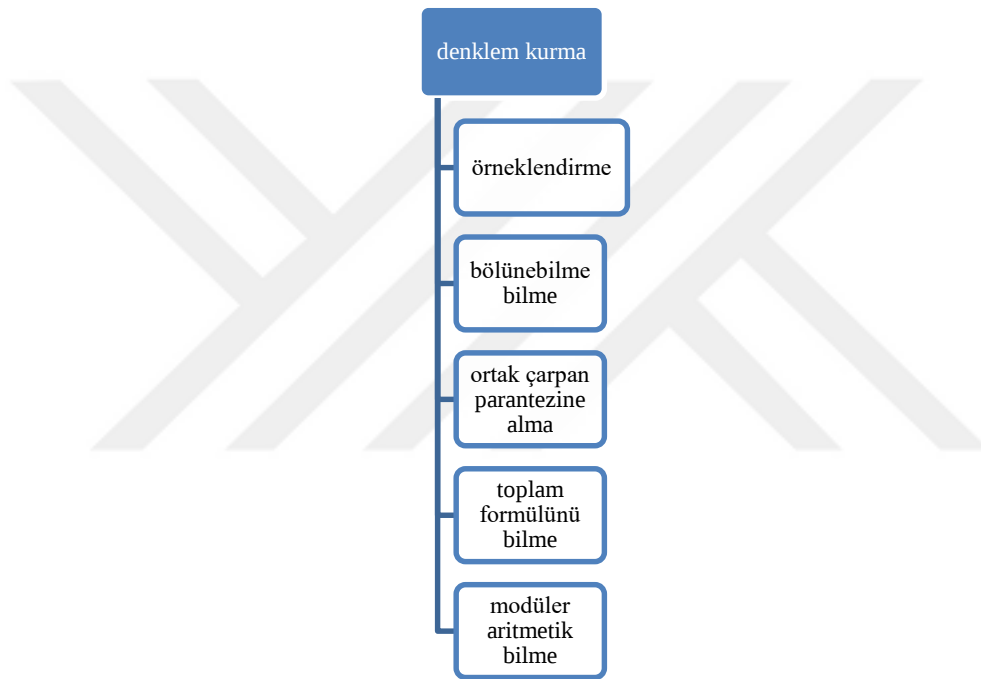


Şekil 4.280. Lise öğrencilerinin kombinasyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.7. Modüler Aritmetik ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin modüler aritmetik problemi ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Modüler aritmetik ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.281'deki gibidir.



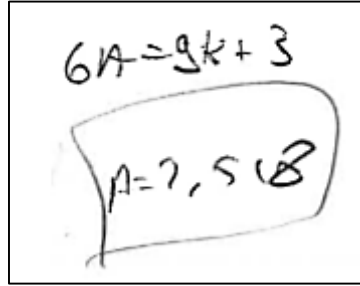
Şekil 4.281. Modüler aritmetik ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.7.1. Lise Öğrencilerinin Modüler Aritmetik ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Denklem kurma: Problemde verilenlere göre denklem oluşturma ve $A'yı$ ele etme durumunu temsil etmektedir. “denklem kurma” kategorisi “örneklendirme”, “bölünebilme bilme”, “ortak çarpan parantezine alma”, “toplam formülünü bilme” ve “modüler aritmetik bilme” olarak beş alt kategoride ele alınmıştır.

S3 problemin çözümünde önemli nokta olarak “*Bu problemin en önemli noktası ilk denklemini yazmak.*” açıklaması ile “denklem kurma” kategorisi olarak belirlemiştir.

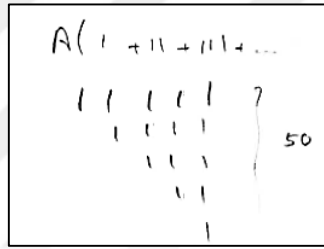
Ö5 problemin çözümünü “*A yerine ne verebilirim. $6A - 3 = 9k$ yazarım. 2 verebilirim. Daha sonra 5 ve 8.*” diyerek Şekil 4.282’deki gibi tamamlamıştır.


$$6A = 9k + 3$$
$$A = 7, 5, 8$$

Şekil 4.282. Ö5’in “denklem kurma” kategorisine ait çözümü

Ortak çarpan parantezine alma: Ortak çarpanın parantezin dışına alınması durumunu temsil etmektedir.

S1, “A parantezine alırsak” diyerek Şekil 4.283’teki çözümü yapmıştır.


$$A(1 + 11 + 111 + \dots)$$

50

Şekil 4.283. S1’in “ortak çarpan parantezine alma” alt kategorisine ait çözümü

Örneklendirme: A yerine verilebilecek herhangi bir rakam ile somutlaştırma durumunu temsil etmektedir.

Ö2, “*Küçük a yazsam olur değil mi. Bir şey deneyeceğim.*” açıklamasından sonra “*Bir tane sayı için denedim a yerine 4 verdim. Dört basamağa kadar denedim oluyor.*” açıklamasını yapmıştır.

Ö2, “örneklendirme” alt kategorisini “*Böyle sorularda genel halde verilen sorularda bir sayı vererek deniyorum denklemi öyle oluşturuyorum. Bence önemli kısım bu.*” açıklaması ile anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Bölünebilme bilme: Bölünebilme kurallarını bilme durumunu temsil etmektedir. “bölünebilme bilme” alt kategorisi “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” ve “genel biçimde yazma” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S3, “*Bu sayıyı 9 ile bölssem. Kalanı bulayım. 6 kalıyor.*” diyerek 1275 sayısının 9’a bölümünden kalanı elde etmiştir.

9 ile bölünebilme kuralını uygulama: 9 ile bölünebilme kuralını uygulama durumunu temsil etmektedir.

S1, “Rakamları toplamına baktığım zaman bir tane 1, iki tane 1, üç tane 1,..., 50 tane 1 var.” açıklamasını yapmıştır.

S1, 1275 sayısının 9 ile bölümünden kalana bakacağını “Sayı 9 ile tam bölünebiliyor mu ona bakacağız. Rakamları toplamı 15, 6 kalan geliyor.” açıklaması ile belirtmiştir. S1 burada 1275 sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulmak için bölme işlemi yapmak yerine rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalanı bulmuştur.

S4, “9 ile bölümünden kalan dediği için direk rakamları toplamına baktım. Rakamları toplamının 9 ile tam bölünebilmesi gerekiyor.” açıklamasını yapmıştır. S4 daha sonra “1275 sayısının 9 ile bölümünden kalan rakamları toplamı olan 15 in 9 ile bölümünden kalana eşit 6.” diyerek çözümünü yapmıştır.

Genel biçimde yazma: 9 ile bölümünden kalanı 3 olan sayıyı genel biçimde ifade etme durumunu temsil etmektedir.

S1’in çözümü Şekil 4.284’teki gibidir.

$$1275.A = 9k + 3$$

Şekil 4.284. S1’in “genel biçimde yazma” boyutuna ait çözümü

S4, “Sayıların toplamının 9 ile bölümünden kalan 3 tür.” diyerek Şekil 4.285’teki çözümü yazmıştır.

$$\begin{array}{l} 1275.A = 9k + 3 \\ 15.A_1 = 9k + 3 \\ 6.A = 9k + 3 \\ \downarrow \\ 2,5,8 \end{array}$$

Şekil 4.285. S4’ün “genel biçimde yazma” boyutuna ait çözümü

Toplam formülünü bilme: 1’den n’ye kadar olan ardışık sayıların toplamını formülden yapma durumunu temsil etmektedir.

S1, “Bu durumda 1 den 50 ye kadar olan sayıların toplamı olacak.” diyerek Şekil 4.286’daki çözümü yapmıştır.

$$A. \left(\frac{25}{50=51} \right) =$$

Şekil 4.286. S1’in “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü

S3, “Toplam formülünden gideceğiz. $\frac{n(n+1)}{2}$ ’den gideceğim.” diyerek Şekil 4.287’deki çözümü yapmıştır.

$$\frac{25}{50=51} = \frac{1225}{9} = 3 \pmod{9}$$

Şekil 4.287. S3’ün “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü

S4, “Şimdi burada toplam formülünü kullanalım.” diyerek Şekil 4.288’deki çözümü yapmıştır.

$$(1+2 \dots + 50) = \frac{n \cdot n+1}{2} = \frac{25 \cdot 51}{2}$$

Şekil 4.288. S4’ün “toplam formülünü bilme” alt kategorisine ait çözümü

Modüler aritmetik bilme: Modüler aritmetik ile ilgili özellikleri bilme durumlarını temsil etmektedir. “modüler aritmetik bilme” alt kategorisi “modüler toplama bilme” ve “modüler çarpma bilme” olarak iki boyutta ele alınmıştır.

S3’ün çözümü Şekil 4.289’daki gibidir.

$$\begin{aligned} 6A &\equiv 3 \pmod{9} \\ 6A-3 &= 9k \\ 6A &= 12 \\ A &= 2 \\ 6A &= 21 \\ 6A &= 30 \\ A &= 5 \end{aligned} \quad (15)$$

Şekil 4.289. S3’ün “modüler aritmetik bilme” alt kategorisine ait çözümü

S3, “Sıfır versem tam gelmiyor. 2 versem oluyor. Üç artırarak bulurum.” açıklamasını yapmıştır.

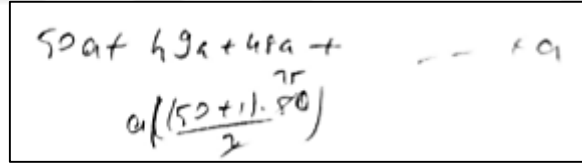
S4, “Şimdi $A = 2$ olur. Diğerleri de üçer üçer artacağı için 5 ve 8 olur. Kalandan dolayı üçer üçer artar.” diyerek problemin çözümünü tamamlamıştır.

S4, “Bu problemin çözümünde önemli nokta modüler aritmetik bilgisidir. Bilmiyorsa çünkü sınav biter bu soruyu çözene kadar.” diyerek “modüler aritmetik bilme” alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Ö5 problemin çözüm sürecinde anahtar noktayı “Bu problemin önemli noktası biraz daha pratik düşünmek. Sorularda neyi kullanacağımız açık olmuyor. Bunu bizim bulmamız gerekiyor. Aslında şu iki sayıyı çarpmadan mod 9 a göre hesaplayabilirdim. Burada ki önemli nokta mod kullanmak.” açıklaması ile “modüler aritmetik bilme” alt kategorisi olarak belirlemiştir.

Modüler toplama bilme: Modüler toplama özelliğinin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

Ö2, “Sayıların toplamını bir tane a , iki tane a şeklinde ifade edebiliyorum. En sonunda da $50a$. Burada a parantezine alsak.” diyerek Şekil 4.290’deki çözümü yapmıştır.

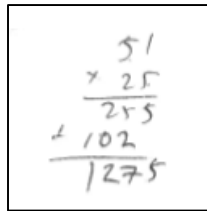

$$50a + 49a + 48a + \dots + a$$
$$a \left(\frac{(50+1) \cdot 50}{2} \right)$$

Şekil 4.290. Ö2’nin “modüler toplama bilme” boyutuna ait çözüm

Ö5, “Yine hepsinin sayı değerlerini toplayacağız. 50 sayı var.” diyerek çözüme başlamıştır.

Modüler çarpma bilme: Modüler çarpma özelliğinin bilinmesi durumunu temsil etmektedir.

S1’in çözümü Şekil 4.291’deki gibidir.


$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 25 \\ \hline 255 \\ + 1020 \\ \hline 1275 \end{array}$$

Şekil 4.291. S1’in “modüler çarpma bilme” boyutuna ait çözümü

Ö2, “Çarpımı yapmadan yapsam.” diyerek Şekil 4.292’deki çözümü yapmıştır.

Handwritten solution for Ö2:

$$\begin{aligned} 25 \cdot 51 &= 96 + 3 \\ 7 \cdot 6 \\ 69 &= 96 + 3 \\ (2, 5, 8) \end{aligned}$$

Şekil 4.292. Ö2’nin “modüler çarpma bilme” boyutuna ait çözümü

S3, “Bunları çarpmam lazım.” diyerek 1275 sayısını Şekil 4.293’de görüldüğü gibi çarpma işlemi yaparak elde etmiştir.

Handwritten multiplication of 51 and 25:

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 25 \\ \hline 255 \\ 1020 \\ \hline 1275 \end{array}$$

Şekil 4.293. S3’ün “modüler çarpma bilme” boyutuna ait çözümü

S4, 25 ve 51 sayısını şekil 4.294’de görüldüğü gibi çarpmıştır.

Handwritten multiplication of 25 and 51:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 51 \\ \hline 25 \\ 1250 \\ \hline 1275 \end{array}$$

Şekil 4.294. S4’ün “modüler çarpma bilme” boyutuna ait çözümü

Ö5’in çözümü Şekil 4. 295’teki gibidir.

Handwritten multiplication of 51 and 25:

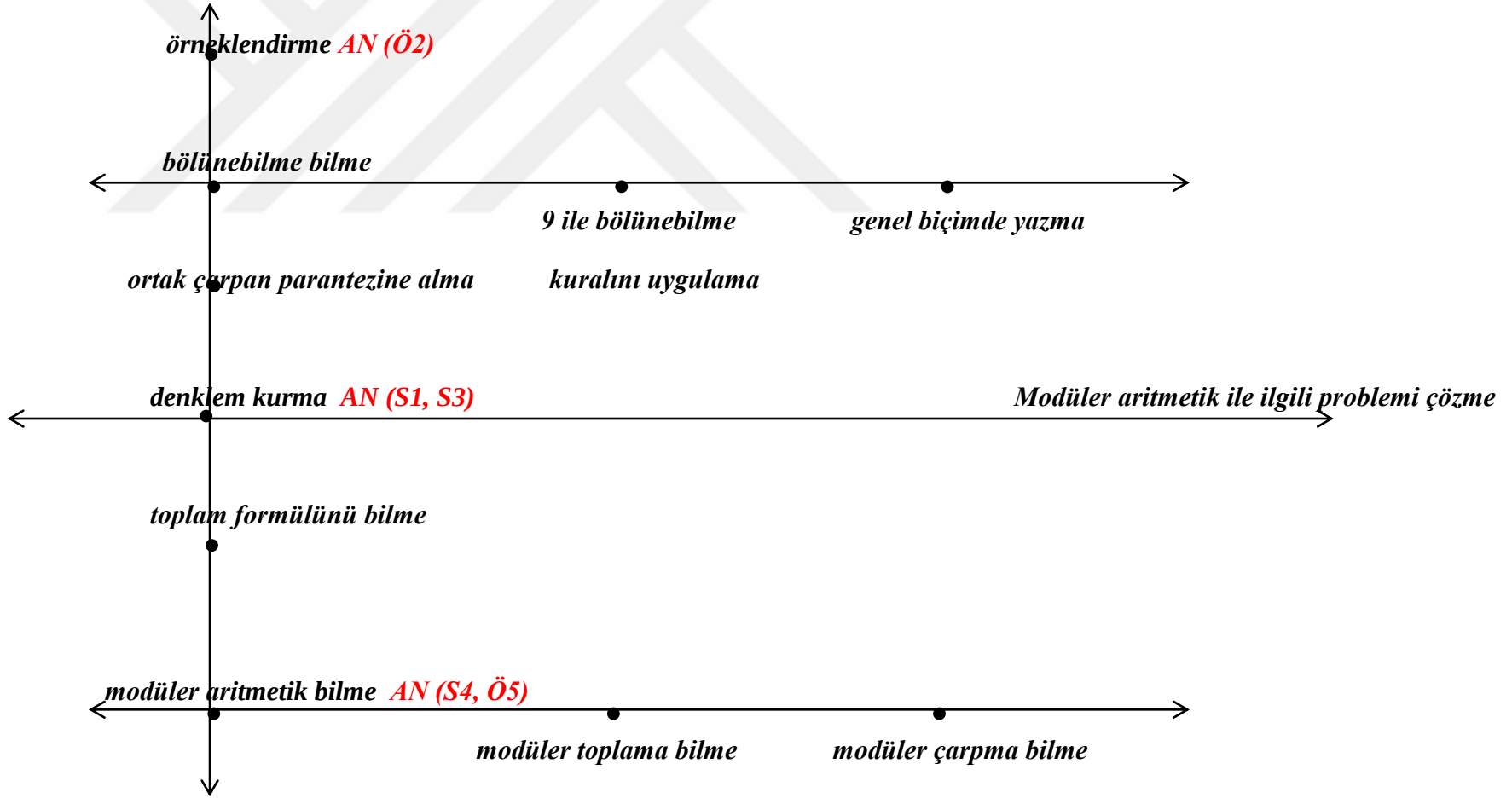
$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 25 \\ \hline 255 \\ 1020 \\ \hline 1275 \end{array}$$

Şekil 4.295. S5’in “modüler çarpma bilme” boyutuna ait çözümü

Öğrencilerin öğretmenlerden farklı olarak “toplam formülünü bilme” alt kategorisi ve “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” boyutunu AN olarak belirlemediği görülmüştür. Lise

öğrencilerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.296'daki gibidir.



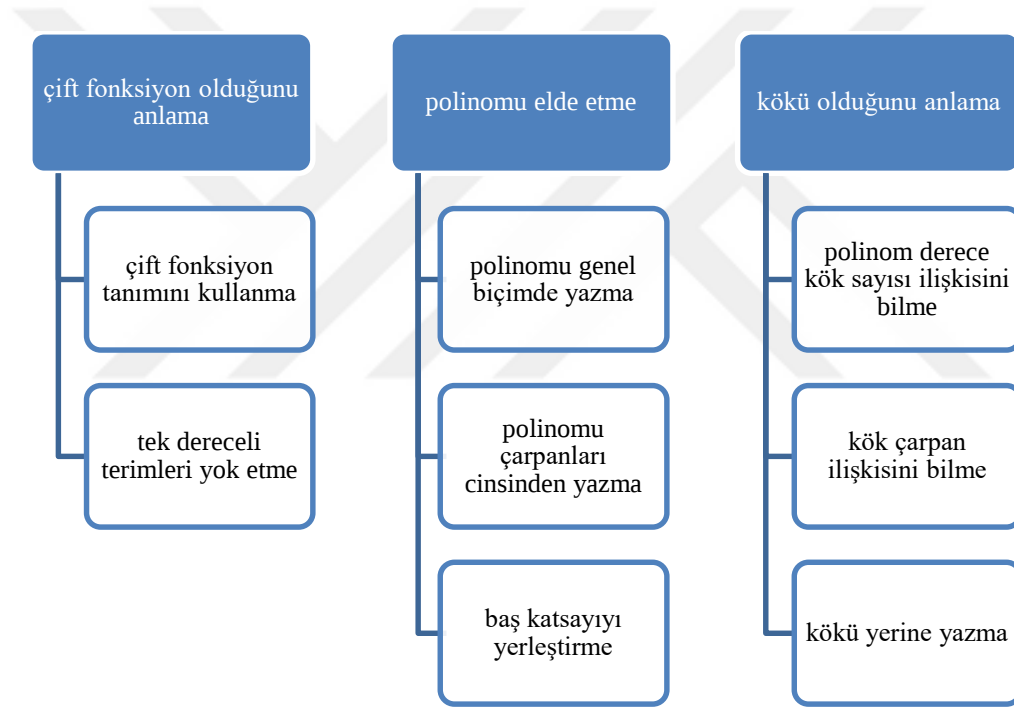


Şekil 4.296. Lise öğrencilerinin modüler aritmetik ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategori, alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

4.2.8. Polinom Fonksiyon ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.297'deki gibidir.



Şekil 4.297. Polinom fonksiyon ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.8.1. Lise Öğrencilerinin Polinom Fonksiyon ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Çift fonksiyon olduğunu anlama: Çift fonksiyon olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir. “Çift fonksiyon olduğunu anlama” kategorisi “çift fonksiyon tanımını kullanma” ve “tek dereceli terimleri yok etme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

Ö1, “Bir de bu fonksiyon çift fonksiyon oluyor. Çift fonksiyon olduğunu biliyorum. Ama daha sonra ne yapacağımı bilmiyorum.” açıklamasını yapmıştır.

S3, “*Şu çift fonksiyon olduğunu belirtiyor.*” diyerek Şekil 4.298’de görüldüğü gibi problemde verilen ifadeyi yuvarlak içine alarak çift yazmıştır.

$$P(x) = P(-x) \rightarrow \text{çift}$$

Şekil 4.298. S3’ün “çift fonksiyon olduğunu anlama” kategorisine ait çözümü

Çift fonksiyon tanımını kullanma: $P(x) = P(-x)$ bilgisini kullanma durumunu temsil etmektedir.

S2 ilk olarak problemin soru kökünde yer alan ifadeyi sesli bir şekilde okuyarak problemin çözümüne başlamıştır. S2, “*Şimdi $P(x) = P(-x)$ ise*” diyerek Şekil 4.299’da görüldüğü gibi $P(x)$ ve $P(-x)$ polinomlarını yazmıştır. Daha sonra S2 her iki polinomu birbirine eşitleyerek bazı katsayıları 0 bulmuştur.

$$\begin{aligned} 1x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= P(x) \\ 1x^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e &= P(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= -b \\ 2b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Şekil 4.299. S2’nin “çift fonksiyon tanımını kullanma” alt kategorisine ait çözümü

S2, “*Aynı dereceli terimler birbirine eşitse*” diyerek b ve d katsayılarını 0 bulmuştur.

Tek dereceli terimleri yok etme: Polinomun çift dereceli terimlerden oluştuğunu bilme durumunu temsil etmektedir.

S3, “*Bu çift fonksiyonda üzeri tek olan şeyler yoktu.*” açıklamasını yapmıştır.

Ö4, “*bence çift fonksiyon olduğunu yakalamak önemliydi çünkü polinomu yazdığım zaman bazılarını bulmama gerek kalmadı sıfır oldu*” açıklamasını yapmıştır.

S5, “*Ama $P(x)$ çift fonksiyon. Çift fonksiyonlarda üzeri tek olanlar olmayacak. O yüzden $a = 0$ ve $c = 0$ oluyor buradan.*” diyerek Şekil 4.300.’deki çözümü yapmıştır.

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Şekil 4.300. S5’in “tek dereceli terimleri yok etme” alt kategorisine ait çözümü

S5, “çift olduğunu anlaması lazım. Yoksa ya işin içerisinde çıkamaz ya da zaman kaybı.” diyerek AN’nin önemine değinmiştir. S5 aksi halde öğrencinin tek dereceli terimlerin olamayacağı bilgisine sahip olamayacağını, elde etmesinin ise zaman alacağını düşünmüştür. S5’in açıklamaları AN’nin “ bireyin sebepsiz ve gereksiz işlem yapmasını önleyebilmesi” özelliği ile bağdaştığı söylenebilir.

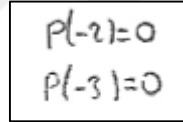
Kök olduğunu anlama: $P(a) = 0$ verildiğinde a ’nın $P(x)$ polinomunun bir kökü olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir. “kök olduğunu anlama” kategorisi “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme”, “kök çarpan ilişkisini bilme” ve “kökü yerine yazma” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

M1’in öğrencisi Ö1 polinomun çift fonksiyon olduğunu anladığını ama daha ileriye gidemediğini belirtmiştir. Bu aşamada araştırmacı ile Ö1 arasında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: $P(2) = P(-2) = 0$ diyebilir miyiz?

Ö1: O zaman $P(3) = P(-3) = 0$ olur.

Burada Ö1 Şekil 4.301’de görüldüğü gibi çalışma kâğıdına bu durumu yazmıştır.


$$\begin{array}{l} P(-2)=0 \\ P(-3)=0 \end{array}$$

Şekil 4.301. Ö1’in “kök olduğunu anlama” kategorisine ait çözümü

Araştırmacı: Bu polinomun kaç kökü var ve köklerini biliyor muyuz?

Ö5: Polinom dördüncü dereceden olduğu için dört kökü var.

Araştırmacı: $P(2) = P(3) = 0$ verildiğine göre polinomun kökleri 2 ve 3 diyebiliriz.

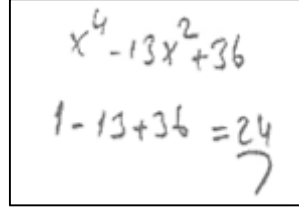
Ö5: O zaman -2 ve -3 de polinomun kökleridir.

Ö5, “Şimdi burada önemli olan noktalara bakarsak, polinomun dört tane kökü olduğunu bileceğiz, bunların $2, -2, 3, -3$ olduğunu bileceğiz. Ondan sonrası zaten geliyor.” açıklaması ile “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” alt kategorisini ve “ kök olduğunu anlama” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

S3, “Gerçek katsayılı ve baş katsayısı 1 olan 4.dereceden bir $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için diyor.” diyerek problemi tekrar okumuştur. Daha sonra Selin polinomu yazacağını ve daha sonra da kökleri yerine yazarak sonuca ulaşacağını belirtmiştir.

Polinomu elde etme: Katsayılarının bulunarak polinomun elde edilmesi durumunu temsil etmektedir. “polinomu elde etme” kategorisi “baş katsayıyı yerleştirme”, “polinomu genel biçimde yazma” ve “polinomu çarpan cinsinden yazma” olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

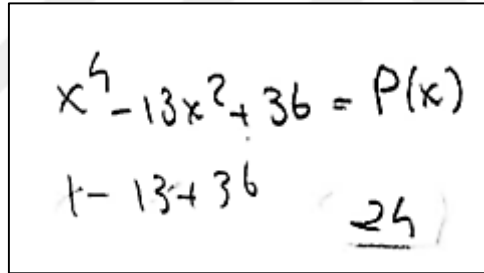
Ö4, “bulduğum a ve b 'yi yerine yazarım” diyerek Şekil 4.303'te görüldüğü gibi çözümü yapmıştır.


$$x^4 - 13x^2 + 36$$
$$1 - 13 + 36 = 24$$

Şekil 4.303. Ö4'ün “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü

Ö4, “1 yazacağız” diyerek problem çözümünü tamamlamıştır.

S5, “Polinomu tekrar yazalım.” diyerek Şekil 4.304'de görüldüğü gibi yazmıştır. S5 son olarak $P(x)$ polinomunda x yerine 1 yazarak sonuca ulaşmıştır.


$$x^4 - 13x^2 + 36 = P(x)$$
$$1 - 13 + 36 = 24$$

Şekil 4.304. S5'in “polinomu elde etme” kategorisine ait çözümü

Baş katsayıyı yerleştirme: En yüksek dereceli terimin katsayısının 1 olarak yazılması durumunu temsil etmektedir.

Ö1 problemi okuduktan sonra “Baş katsayısı 1 olduğu için polinomda derecesi en büyük olanın baş katsayısı 1 olacak.” diyerek problemin çözümüne başlamıştır.

S5, “ $P(x)$ polinomunu 4.dereceden ve baş katsayısı 1 ise $P(x)$ polinomunu yazalım o zaman” diyerek çözüme başlamıştır.

Polinomu genel biçimde yazma: Dördüncü dereceden bir polinomun genel biçimde yazılması durumunu temsil etmektedir.

S5, “Aslında polinomumuz buymuş” diyerek Şekil 4.305'te görüldüğü gibi yazmıştır.

$$x^2 + bx^2 + d = P(x)$$

Şekil 4.305. S5'in "polinomu genel biçimde yazma" alt kategorisine ait çözümü

Polinomu çarpanları cinsinden yazma: Polinomun iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçimde yazılması durumunu temsil etmektedir.

Araştırmacı: O halde polinomun bir kökü 2 ise bir çarpanı $(x + 2)$ 'dir. O halde bu polinomu çarpanları türünden ifade edebilir miyiz?

Ö1: Ha. Tamam. $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ gibi.

Bu diyalogdan sonra Ö1 Şekil 4.306'da görüldüğü gibi polinom problemi çözümünü tamamlamıştır.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3) \\ P(1) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (3) \cdot (4) \\ &= 24 // \end{aligned}$$

Şekil 4.306. Ö1'in "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

S3'ün çözümü Şekil 4.307'deki gibidir.

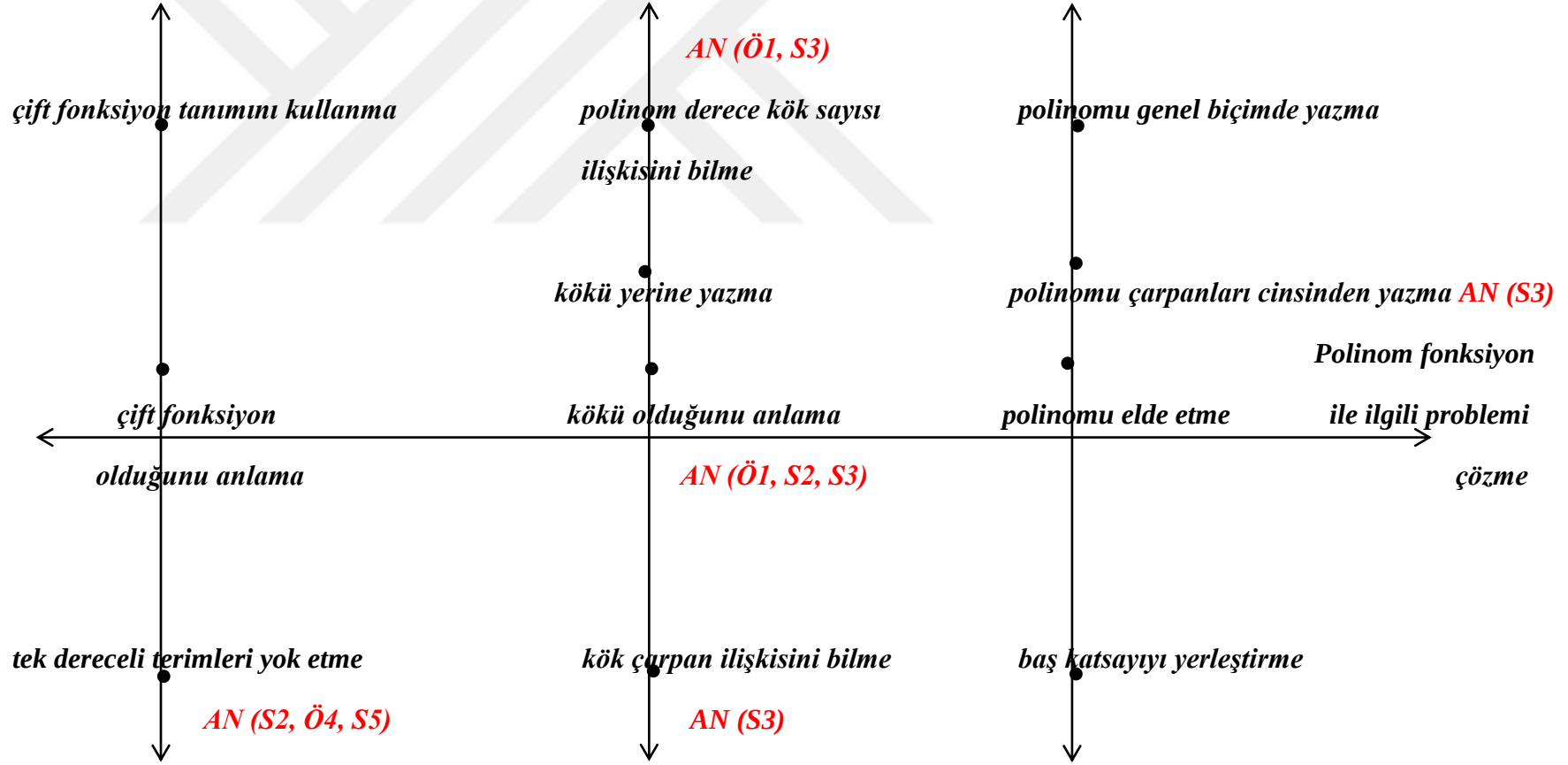
$$\begin{aligned} (x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+3) \cdot (x+2) &= P(x) \\ P(1) &= -1 \cdot -2 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= \underline{\underline{24}} \end{aligned}$$

Şekil 4.307. S3'ün "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisine ait çözümü

S5, "Diğer kökleri -2 ve -3 olur. Buradan da gidilir." açıklamasını yapmıştır.

S2, Ö4 ve S5 "tek dereceli terimleri yok etme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S2 ve S3 "kökü olduğunu anlama" kategorisini AN olarak belirlemiştir. Ö1 ve S3 "polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S3 "kök çarpan ilişkisini bilme" alt kategorisi ile "polinomu çarpanları cinsinden yazma" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Lise öğrencilerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.308'deki gibidir.



Şekil 4.308. Lise öğrencilerinin polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.9. Maksimum ile İlgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu aşamada lise öğrencilerinin maksimum ile ilgili problemi çözmede AN belirleme durumları ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıdı üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

Maksimum ile ilgili problem ile yapılan görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri Şekil 4.309'daki gibidir.



Şekil 4.309. Maksimum ile ilgili problem ile ilgili görüşmede öğrencilerin AN belirleme sürecine ait kategoriler ve alt kategorileri

4.2.9.1. Lise Öğrencilerinin Maksimum ile İlgili Problemi Çözme Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma: Toplam gelir fonksiyonunun tek değişkene bağlı yazılması durumunu temsil etmektedir. “Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategori “gelir hesaplamayı bilme” ve “adlandırma yapma” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

Ö1, “*Mutfak sorusu gibi düşündüm. Denklemi yazmam lazım.*” açıklamasını yapmıştır.

S2, “*Denklemi oluşturmam lazım. Ben şimdi geliri yazayım.*” açıklamasını yapmıştır. S2, “*Bence burada güzel olan şey, gelirin denklemini yazmak.*” diyerek “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

S3, “O zaman denklem yazmam lazım. $Gelir = 40000 + 3000k - 250k^2$ olur.” açıklamasını yapmıştır.

S3’ün çözümü Şekil 4.310’daki gibidir.

$$(40+5k) \cdot (1000-50k) = \text{gelir}$$

Şekil 4.310. S3’ün “Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

S3, “Burada önemli nokta denklemi kurmaktır.” diyerek “Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Ö4’ün çözümü Şekil 4.311’deki gibidir.

$$(40+5x) \cdot (1000-50x)$$

Şekil 4.311. Ö4’ün “Toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisine ait çözümü

S5, “Buradan ne çıkar. $40000 - 2000k + 5000k - 250k^2$ ’dir. Bunu toparlarsak $-250k^2 + 3000k + 40000$ elde ederim.” açıklamasını yapmıştır. S5, “Bu problemin önemli noktası toplam gelir ifadesini yazmaktır.” diyerek “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Gelir hesaplamayı bilme: Gelirin nasıl hesaplanacağını bilme durumunu temsil etmektedir.

Ö4’ün çözümü Şekil 4.312’deki gibidir.

$$\text{Gelir} = \text{Müşteri} \cdot \text{Aylık internet ücreti}$$

Şekil 4.312. Ö4’ün “gelir hesaplamayı bilme” alt kategorisine ait çözümü

S5, “Aylık 40 TL ücret belirlerse bu 1000 kişiye ulaşabiliyormuş. Şimdi bunu nasıl matematiğe dökeriz. Normalde gelir 40000 TL oluyor.” açıklamasını yapmıştır.

S5, “Gelir en fazla olması için aylık internet ücreti kaç TL belirlenmelidir? Çarpacağımız büyük ihtimalle.” açıklamasını yapmıştır.

Adlandırma yapma: Artış sayısına harf verilerek bilinmeyen durumların adlandırma yapılması durumunu temsil etmektedir.

Ö1, “Kaç kere artırıldığını bilmiyorum. x kere artırılsın. Bu durumda $5x$ artar. Normalde 1000 müşteri var. Her seferinde 50 azalıyor. Bir kerelik artışta 950 olacak. İki kerelik

artışta 900 olacak. 50 nin katı azalacak. $1000 - 50x$ olur x cinsinden.” Açıklamasını yapmıştır.

S2, “1 tane 5 tl de 50 düşerse k tane de 5 tl de bu bunun 10 katı $50k$ düşer. $50k$ azaldı.” açıklamasını yapmıştır.

S2, “ k ’yı vermek süper bir şey. Her 5 TL’lik artışa k demek, oranı kurmak süper bir şey. Bu seviyeye gelmek güzel. Şu oran biliniyorsa zaten problem çözülecektir. En önemli yer burası.” diyerek “adlandırma yapma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

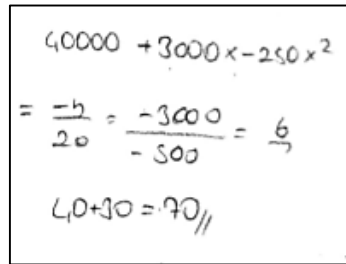
S3, “Artış sayısına k desem aylık internet ücreti $40 + 5k$ olur. Kişi sayısı $1000 - 50k$ olur.” açıklamasını yapmıştır.

S5, “Bunları yazıya dökeyim. Artışın kaç kere yapıldığı bilmiyoruz. Ona k desem. Ücret $40 + 5k$ TL oluyor. O zaman kişi sayısı $1000 - 50k$ oluyor.” açıklamasını yapmıştır. S5 “Artış sayısına k demek önemli.” diyerek “adlandırma yapma” alt kategorisini AN olarak belirlemiştir.

Gelir ifadesini yorumlama: Gelir ifadesinin oluşturulmasından sonra çözüm yolu ile ilgili fikir yürütme durumunu temsil etmektedir. “Gelir ifadesini yorumlama” kategorisi “parabol olarak düşünme” ve “türev yardımıyla düşünme” olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

Parabol olarak düşünme: Gelirin en fazla olmasından hareket ederek tepe noktasını bulacağını anlama durumunu temsil etmektedir.

Ö1, “Bunun en büyük olması demek tepe noktası demek. $x = 6$ buluruz. Daha sonra yerine yazarız ve sonuca ulaşırız. Ama onu sormuyor. $40 + 30 = 70$ dir. Burada önemli olan nokta toplam geliri yazıp, tepe noktasını bulacağımızı bilmek.” diyerek Şekil 4.313’teki çözümü yapmıştır.


$$\begin{aligned} &40000 + 3000x - 250x^2 \\ &= \frac{-b}{2a} = \frac{-3000}{-500} = 6 \\ &40 + 30 = 70 // \end{aligned}$$

Şekil 4.313. Ö1’in “parabol olarak düşünme” alt kategorisine ait çözümü

S2, “Toplam gelirin en fazla olması isteniyor. O zaman bu parabol sorusu. Tepe noktasını bulalım. $r = 6$ olur. Yerine yazarsam k yı bulurum. Ama bana k yı mı sormuyor. Aylık

internet ücretinde yerine yazarak 70 bulurum. parabol olduğunu hemen anladım.” diyerek Şekil 4.314’teki çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}
 (4013k) \cdot (1000 - 50k) &= P(k) \\
 4000 - 2000k + 5000k - 250k^2 &= P(k) \\
 4000 + 3000k - 250k^2 &= P(k) \\
 \frac{50}{50k} - \frac{3000}{-500} &= 6
 \end{aligned}$$

Şekil 4.314. S2’nin “parabol olarak düşünme” alt kategorisine ait çözümü

Ö4’ün çözümü Şekil 4.315’teki gibidir.

$$\begin{aligned}
 40000 - 2000x + 5000x^2 - 250x^2 \\
 40000 + 3000x - 250x^2 \quad x = \frac{-b}{2a} \quad \frac{-3000}{-500} = 6 \\
 4015 \cdot 6 = 70
 \end{aligned}$$

Şekil 4.315. Ö4’ün “parabol olarak düşünme” alt kategorisine ait çözümü

S5, “Bunu en fazla istediği için bu bir parabol hem de kolları aşağı yönlü bir parabol. O zaman en yüksek değerini bulabiliriz. $-\frac{b}{2a}$ dan $-\frac{3000}{-500} = 6$ dır. Şimdi bunu yerine yazalım. Aylık internet ücreti 70 TL olur.” açıklamasını yapmıştır.

Türev yardımıyla düşünme: Problemin maksimum problemi olduğunu anlama durumunu temsil etmektedir.

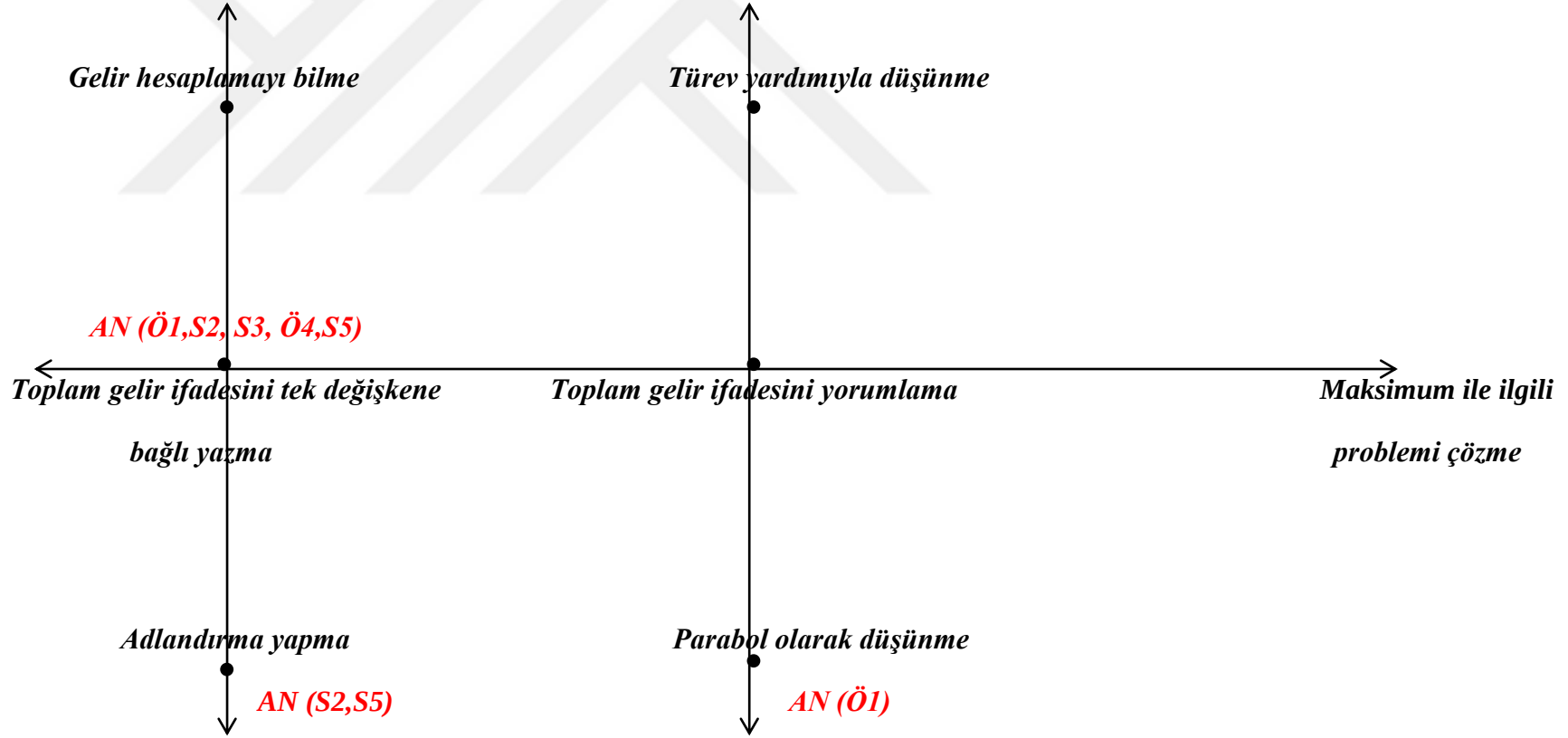
S3, “Mutfak sorusunda alanı en fazla istediği zaman parabolden gitmiştik. Bu sefer türevden gideceğim.” diyerek Şekil 4.316’daki çözümü yapmıştır.

$$\begin{aligned}
 &40000 - 2000k + 5000k - 250k^2 \\
 &250k^2 - 3000k + 40000 \\
 &25k^2 - 300k - 4000 \\
 &50k - 300 = 0 \\
 &\frac{300}{50} = 6 \quad k = 6
 \end{aligned}$$

Şekil 4.316. S3'ün "türev yardımıyla düşünme" alt kategorisine ait çözümü

Ö1, S2, S3, Ö4 ve S5 öğrencilerinin tamamı "toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. Ö1 "parabol olarak düşünme" alt kategorisini AN olarak belirlemiştir. S2 ve S5 "adlandırma yapma" alt kategorisini anahtar nokta olarak belirlemiştir.

Lise öğrencilerinin maksimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi Şekil 4.317'deki gibidir.



Şekil 4.317. Lise öğrencilerinin maksimum ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarına ait kategoriler ve alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi

4.3. Üçüncü Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum:

Araştırmanın üçüncü alt probleminde “Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözmede AN’leri belirleme davranışları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu probleme ilişkin bulgular her bir problem için katılımcı öğretmenler M1, M2, M3, M4 ve M5 ve onların öğrencilerine göre ayrı ayrı karşılaştırmalar yapılacaktır.

4.3.1. Polinomlar ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 ve öğrencisi S1 her ikisi de polinom problemini hatasız bir biçimde çözmüş ve sonuca ulaşmışlardır. M1 ve öğrencisi S1’in problemin çözümünde belirlediği AN’ler benzerlik ve farklılık göstermiştir. Problem çözme sürecinde bir kategori olan “kök olduğunu anlama” kategorisi her ikisi için de problem çözme sürecinde önemli bir yer almasına rağmen bunun bir alt kategorisi olan “ortak olan kökleri tespit etme” kategorisinin oluşmasında M1 ve öğrencisi S1 farklı görüşlere sahiptir. Bu durumun bireyin bilgisi, becerisi ve deneyimine göre AN’nin minimum sayıda olma özelliği ile açıklanabilir. AN’ler problem çözme sürecinde en temel matematiksel beceriler, bilgiler ve stratejiler olduğundan; bu matematiksel fikirlerin problem çözme süreçlerinin hangi aşamalarında nasıl etkili olduğunun belirlenmesi bireyin üstbilgi bilgisi ile ilgili olabilir.

M1 polinom problemi için anahtar nokta olarak “bağlaca göre yorumlama” kategorisi olarak belirlemiştir. M1’e göre “bağlaca göre yorumlama” kategorisine sahip bir öğrenci ortak kökleri ve ortak olmayan kökü rahatlıkla tespit edebilir. Dolayısıyla bu nokta problem çözme sürecinde önemli bir noktadır. M1 bu durumu şöyle açıklamıştır:

“ $Q(x)$ ’in kökleri 2 tane $P(x)$ ’in de kökleri bu ikisi ve başka bir tane daha var. Yani $P(x)$ ’in kökleri 3 tane. Ama bunu bilmek zorunda değil öğrenci. Sadece $Q(x)$ ’in $P(x)$ ’e gittiğini bilmesi gerekir.”

M1’in öğrencisi S1’in ise “ortak kökleri ve ortak olmayan kökü tespit etme” kategorilerinin oluşması için problem çözümünde AN olarak “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisini belirlemiştir. S1, M1’in aksine polinomların kök sayılarının tespit edilmesinin problem çözme sürecinde önemli bir nokta olduğunu ifade etmiştir. Bu bilgiye sahip olan bir öğrencinin ortak olan kökleri ve ortak olmayan kökleri tespit edip yazabileceğini düşünmüştür. S1’in bu durum ile ilgili açıklaması aşağıdaki gibidir.

“Bu problemde önemli nokta birinin üçüncü dereceden birinin ikinci dereceden olduğunu fark etmektir. Çünkü böylece birinin üç kökü birinin iki kökü olduğu çıkar. Bunun üç kökünden ikisi ortak ve diyor ki $P(x)$ polinomunda -4 yazıp 0 buluyoruz. Diğerinde -4 yazınca 0 bulamıyoruz. Demek ki üçüncü kök -4.”

M1 ve öğrencisi S1’in problem çözme sürecinde belirledikleri ortak AN “polinomu çarpan biçiminde yazma” kategorisidir. S1 bu durumu “ x_1, x_2 ve -4 $P(x)$ polinomunun kökleridir. $Q(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 dir. Ne yapabiliriz? $P(x)$ polinomunu çarpım şeklinde yazmalıyız.” şeklinde ifade etmiştir, M1 ise “Ya $Q(x)$ ile $(x + 4)$ ü çarpıp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Ya da $P(x)$ i $(x + 4)$ e bölüp $Q(x)$ e eşitleyeceğiz. Burada makul olan ilk seçenektir.” açıklamasını yapmıştır.

M1 de öğrencisi S1 de yine bu problem ile ilgili öğrencilerin problem çözme sürecinde ilk olarak “kökü yerine yazma” kategorisini yapacaklarını ifade etmişlerdir. M1 “ $P(-4) = 0$ olduğu için polinomda x gördüğü yere -4 yazarak 0 a eşitlemektir. Bu onu çıkmaz sokağa ulaştırır. İkisini de sağlıyor olsa buna da ona da yazarak çözüme ulaşılır.” diye açıklarken S1 ise bu durumu “ $P(-4)$ gördüğüm zaman tabi benim de aklıma yerine yazmak geldi ama a ve b olduğu için bir yere varamayacağımı düşündüm. İki bilinmeyenli tek denklem gelecek. Altta da bir denklem olsa yerine yazardım.” şeklinde açıklamıştır. Her ikisi de “kökü yerine yazma” kategorisinin bu problem için uygun bir çözüm yolu olmadığını düşünmüştür ve bir öneri getirmemişlerdir.

M2 ve bu problem için görüşülen öğrencisi S2’nin çözümleri ve diyalogları incelendiğinde belirledikleri AN’ler arasında benzerlik ve farklılıklar ortaya çıkmıştır. M2 polinom probleminin çözüm sürecini herhangi bir zorluk yaşamadan tamamlamıştır. Öğrencisi S2 ise problem çözme sürecinde zorluklar yaşamıştır.

M2 ve öğrencisi S2 polinom problemi çözümünde AN olarak benzer bir kategorinin üzerinde durmuşlardır. M2, AN olarak “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” alt kategorisini ve “kök çarpan ilişkisini bilme” alt kategorisini belirlerken öğrencisi S2 “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2 problem çözümünde AN olarak “polinomu diğer polinom cinsinden yazma” alt kategorisini belirlemiştir. M2’nin bu durum ile ilgili açıklaması aşağıdaki gibidir.

“Baş katsayıları da aynı, öyle de bir sorunuz yok. a gibi bir katsayı çarpanı da yok. O zaman $(x + 4)$ ile $Q(x)$ i çarpıp $P(x)$ e eşitleyeceğiz. Öğrenciler içinde önemli olan kısım burası.”

M2 daha sonra düşünmüş ve bu durumu “*Ama bu tarz olanlarda hemen çarpanı olduğunu düşünmek gerek.*” şeklinde ifade ederek “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisinin üzerinde durmuştur.

S2 ise M2 ile benzer şekilde düşünerek “kök çarpan ilişkisini bilme” kategorisinin problem çözmede önemli bir nokta olduğunu düşünmüştür. S2 polinomun kökünün aynı zamanda onun bir çarpanı olabileceği bilgisinin problem çözme sürecinde “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisinin oluşmayacağını düşünmüştür. S2’nin bu durum ile ilgili açıklaması ise şöyledir.

“Bu problemde önemli nokta -4 bu polinomun kökü ise $(x+4)$ çarpanıdır şeklinde düşünmek. Ne verirsem sıfır olur şeklinde düşünebiliyorum çarpanı. Aslında düşündüğüm zaman tamam diyorum. Ama göremedim. Polinomda x yerine verdiğimizde sıfırlıyorsa bu polinomda böyle bir çarpan vardır.”

M2 öğretmen de “kökü yerine yazma” kategorisinin polinom problemi çözüm sürecinde iyi bir fikir olmadığını düşünmüştür. Bu durumu “*Burada birden fazla değişken olduğu için yerine yazma işe yaramayacaktır. Zaten sıfırlıyor. Sıfırlayan bir şey değişken olmasa da bir şeye yaramaz.*” şeklinde açıklamıştır. M2 öğretmen bu şekilde düşünen öğrenciler için herhangi bir çözüm önerisinde bulunmamıştır. M2 öğretmenin öğrencisi S2 da ilk olarak problem çözme sürecine “*-4 sadece $P(x)$ ’in kökü. $P(x)$ polinomunda x yerine -4 yazarsak 0 çıkar.*” diyerek başlamıştır ve sonuca ulaşamamıştır.

S2, M2 öğretmenden farklı olarak “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisinin AN olduğunu düşünmüştür. S2 problem çözme sürecinde bu bilgiye sahip olmamasının problemle ilgili birçok veriyi kullanamamasına neden olduğunu ifade etmiştir. S2’nin bu durum ile ilgili açıklaması aşağıdaki gibidir.

“Ben baya bir soru çözdüm bunlarla ilgili ama. Polinomlarla ilgili aşırı derecede soru çözdüm ama bunda siz dediniz ya derece 3 olunca 3 kökü vardır. Ben bu iki polinomun kök sayısının aynı düşünmüştüm. Bilmiyordum öyle bir şey olduğunu.”

M2’nin bu durum ile ilgili herhangi bir açıklaması olmamıştır, öğrencilerin bu noktada bir zorluk yaşayacağını düşünmemiştir. Fakat M1’nin öğrencisi olan S1 ve S3 problem çözme sürecinde AN olarak bu kategoriye dikkat çekmiştir. Dolayısıyla M2’nin öğrencisi için S2’nin problemi çözmede yaşayabileceği güçlüğü farkında oldukları görülmüştür. Bu AN ile S2 problemin çözümüne devam etmiştir. Öğrencinin bilgi ve deneyimi öğretmenin belirlediği AN’yi kullanabilmesi için yeterli olmamıştır. Öğrenci başka bir AN’ye ihtiyaç duymuştur.

M3 ve öğrencisi S3 polinom problemi için belirledikleri çözüm yolları açısından benzerlikler olmuştur. M3 *“Burada üçüncü dereceden denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanmak istiyorum çünkü biliyorum. Kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerini kullanmak istiyorum.”* diyerek “kökler toplamını bilme” kategorisinin problem çözümünde bir adım olabileceğine dikkat çekmiştir. Benzer şekilde S3 *“Şimdi kökler toplamı yapabiliriz. Sonuçta ortak kökler var.”* diyerek “kökler toplamını bilme” kategorisini kullanarak sonuca ulaşmıştır.

M3 ve öğrencisi S3 benzer şekilde problem çözümünde anahtar nokta olarak “polinom derece kök sayısı ilişkisini bilme” kategorisini belirlemiştir. M3 *“ $P(x)$ polinomunda üç tane kök olduğunu bilmesi gerekir.”* diyerek ve S3 ise *“Bir de derece ile kök sayısını da bilmeli. Yoksa gider buna iki kök buna iki kök derse olmaz.”* şeklinde ifade ederek bu durumu açıklamıştır.

S3, M3’den farklı olarak “ortak olmayan kökü tespit etme” kategorisi AN olarak belirlemiştir. M3 ise her öğrencinin üçüncü dereceden kök katsayısı ilişkisini bilemeyeceğini düşünüp S3’ten farklı olarak çözüm yolunu değiştirmiştir. M3 “kök çarpan ilişkisini bilme”, “polinomu çarpan cinsinden yazma” ve son olarak “polinom eşitliğini bilme” kategorilerini AN olarak belirlemiştir.

M4 ve öğrencisi S4 polinom problemi çözümü için benzer bir yol düşünmüştür. Her ikisi de “kök katsayı ilişkisini kullanma” kategorisini problem çözümünde bir yol olarak belirlemiştir. M4 öğrencisi S4’den farklı olarak *“Eğer derece iki ise üç ise kökler aynı olduğu zaman kökler toplamı kökler çarpımı üzerinden giderek denklem sistemi oluşturup çözmeye çalışın* diyorum çocuklara.” diyerek “kökler toplamını bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M4 diğer öğretmenlerden farklı olarak bu yolun problem çözme sürecinde doğru sonuca götürmesi için “kökü yerine yazma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M4 *“Çocuklar böyle bir şey verildiği zaman ilk aklınıza şey gelsin. Kökü ise denklemi sağlamak zorunda. Hadi gelin yerine yazalım.”* diyerek bu tür problemlerde bu kategorinin kullanılması gerektiğini vurgulamıştır.

S4, M4 öğretmenin aksine “kökü yerine yazma” kategorisini problem çözme sürecinde anahtar nokta olarak belirlememiştir. Çünkü S4 polinom problemini çözümüne *“ $P(-4) = 0$ olduğu için $P(x)$ polinomunda yerine yazalım.”* diyerek başlamıştır ama sonuca ulaşamamıştır. S4 problem çözümünde önemli olanın kökler toplamını kullanacağını

görebilmek bunun için de köklerin tespit edilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Araştırmacı ile S4 arasında geçen diyalog sonrası “kök olduğunu anlama” kategorisinin oluşmasının ardından S4 “*Bunun kökler toplamı bunun kökler toplamına eşit. Bir de $P(x)$ polinomun kökler toplamını hesaplarken -4 ü ekleyeceğim.*” diyerek problemin çözümünü tamamlamıştır.

M5 öğretmen ve öğrencisi S5’in polinom problemi ile ilgili görüşme süreci dikkate alındığında benzerlikler ve farklılıklar olduğu görülmüştür.

M5 problemin çözümüne “ *$P(-4) = 0$ olduğu için polinomda x yerine -4 yazması gerektiğini bilmesi lazım. Oradan mı gideceğiz. Bir kere yerine yazacak bunu buradan bir denklem gelecek.*” diyerek “kökü yerine yazma” kategorisi ile başlamıştır. Daha sonra “ *$Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğu için kökler toplamı kökler çarpımından mı gidecek.*” diyerek problemin çözümünü görmek istemiştir. M5 çözümü gördükten sonra bu tür problemlerde “kökü yerine yazma” kategorisinin AN olamayacağını “*Polinomların tamamında var bu. Kök olunca yerine yazma çarpanı olduğu gör ve çarpan şeklinde yaz. Çok ilginç yine aynı soruyu sormuşlar. Yerine yazmayı istemiyorlar.*” şeklinde ifade etmiştir.

M5’den farklı olarak öğrencisi S5 “kökü yerine yazma” kategorisinin bir öğrenci için en elverişli yol olduğunu düşünmüştür. S5 “*Burada çoğu öğrenci gibi ben de ilk olarak eşitlik gördüğüm için polinomda yerine yazıp sıfıra eşitlemeye çalıştım. Genel olarak ilk yaptığımız bu.*” diyerek bu durumu açıklamıştır. Öğrencilerin bu aşamadan sonra yaşadığı zorluğu ise “*İki bilinmeyenli tek denklemden bir şey elde edemeyince sıkıntı yaşıyoruz.*” şeklinde açıklamıştır. S5 problemin çözümün için öğrenciler açısından anlaşılabilir yolu ise “*kökler toplamından gidebiliriz. Çünkü iki kök ortak ve kökler toplamı a cinsinden geliyor. Bu yol daha kolay.*” açıklaması ile “kök katsayısı ilişkisini bilme” kategorisi olarak belirlemiştir. Bu yolu görmenin de kolay olmadığını “ *-4 ün de ortak kök olmadığını anlamak önemliydi.*” açıklamasıyla belirterek “ortak olmayan kökü tespit etme” kategorisinin çözümde AN olduğunu vurgulamıştır.

S5 diğer çözüm için M5’le benzer şekilde “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisinin anahtar nokta olduğunu ifade etmiştir. S5’in “*Burada önemli olan polinomların kökleri cinsinden yazmak, yani çarpanlarına ayırmaktır.*” açıklamasına benzer bir şekilde M5’in “ *$P(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)$ şeklinde ifade etmesini*

istiyorlar. Köklerini çarpanı biçimde yazmaları isteniyor.” açıklaması problemin çözümünde “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisine değindiklerini göstermiştir.

4.3.2. Maksimum-minimum ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 ve öğrencisi S1 ile yapılan görüşmelerin verileri incelendiğinde problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumlarında benzerlikler olduğu görülmüştür.

M1 bu tür problemlerde soru köküne odaklanılması gerektiğini vurgulamıştır ve onu elde etmek için ilk olarak adlandırma yapılması gerektiğini ifade etmiştir. M1 *“Mutfakta ne eksik boy eksik onu göreceğ alan da istiyor ise çarpma’yım diyecek.”* diyerek “uzunluğu adlandırma” kategorisinin problem çözme sürecine başlamada ilk adım olduğunu ifade etmiştir, “uzunluğu x cinsinden ifade etme” kategorisini de problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. Böylelikle “alanı x cinsinden ifade etme” kategorisini bu problem için AN olarak belirlemiştir. M1 bu aşamadan sonra *“Tek bir çözüm yolu olmadığı için illa şunu yapması gerekir diyemeyeceğim bu noktada. Burada şu denklemi yazması önemli oradan hangi yolu seçeceğine kendisi karar verir.”* diyerek farklı çözüm yollarını vurgulamıştır.

M1 diğer öğretmenlerden farklı olarak *“geniş kavramının bir en büyük ya da maksimum kelimesini bize çağrıştırması gerekiyor. Çünkü geniş olduğu zaman alan büyüyecek demektir.”* açıklamasını yapmıştır. Bu kelimelerin anlamını bilen öğrencilerin problemin çözümünde ne yapacağına daha kısa sürede karar verebileceğini düşünmüştür. M1 *“Şimdi denklemimizi oluşturalım. Bu denklemin en büyük değerinden bahsediyorsak bu ne anlama geliyor bizim için.”* diyerek farklı çözüm yolları geliştirebileceğini vurgulamıştır.

M1’in *“Diğer kenarını bilmiyoruz. Buna bir x ’li bir değer vermemiz lazım. x ’e bağlı bir değer vermemiz lazım ki bir işlem çıkartalım.”* açıklaması M1’in açıklaması ile benzerlik göstermiştir. S1 de problem çözme sürecinde M1 gibi “uzunluğu x cinsinden ifade etme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2 problem çözümünde *“Burada mutfak dikdörtgen alanını x cinsinden ifade etmesi gerekiyor. Tek değişken cinsinden ifade etmesi gerekiyor.”* diyerek “alanı x cinsinden ifade etme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2’nin öğrencisi S2 ise problemin çözümünde bu kategoriye AN olarak belirlememiştir.

M2 “*Sonra alanı ikinci dereceden fonksiyon olarak elde edip tepe noktasını bulması gerekiyor.*” açıklaması ile problem çözme sürecinde bir diğer AN’yi “tepe noktası kavramını bilme” kategorisi olarak belirlemiştir. M2 ile öğrencisi S2’nin anahtar nokta belirleme durumu benzerlik göstermiştir. S2 “*Bu problemin önemli noktası şu böyle sorularda bir fonksiyonun tanım aralığında en büyük ya da en küçük değerini aldığı nokta tepe noktasıdır.*” açıklaması ile “tepe noktası kavramını bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3 de “*tepe noktası kavramının bilinmesi(en büyük değerin tepe noktasını ifade etmesi)*” diyerek problem çözme sürecinde “tepe noktası kavramını bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Ayrıca M3 “*tepe noktasının nasıl bulunacağını bilmesi önemlidir*” diyerek “tepe noktasını elde etme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3’ün öğrencisi S3 ise “parabol olarak düşünme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak düşünmüştür. S3 alan ifadesini elde ettikten sonra ifadenin parabol denklemi olduğunu anlayamamıştır. Kendisine parabol olduğu söylendiği anda S3 “*Tepe noktasında en büyük değeri alır. Tepe noktasının r sini bulurum.*” diyerek tepe noktasını bulması gerektiğini ifade etmiştir.

M4 ve öğrencisi S4 problemi benzer şekilde çözerek sonuca ulaşmıştır. Problem çözme sürecinde “alanı x cinsinden ifade etme” ve “türev yardımıyla düşünme” kategorilerini AN olarak belirlemişlerdir.

M5 ve öğrencisi S5 problem için benzer açıklamalar yapmıştır. M5 “*İkinci dereceden fonksiyon olduğunu göremez.*” diyerek “parabol olarak düşünme” kategorisinin AN olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde S5 “*Öğrenci açısından o ifadenin parabol denklemi olduğunu bilmesi veya görmesi zor.*” diyerek “parabol olarak düşünme” kategorisinin AN olduğuna dikkat çekmiştir.

M5’in öğrencisi S5, “*Tepe noktasının r’sini bulurken formül sayıyı elde etmede önemli ama bilen bir öğrenci için kritik değildir.*” açıklaması ile M3’den farklı olarak formülün AN olamayacağı düşüncesini dile getirmiştir.

4.3.3. Trigonometri ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 ve öğrencisi S1 ile yapılan görüşmeler incelendiğinde problem çözme süreci ile ilgili benzer açıklamalar olduğu görülmüştür. M1 “*Dolayısıyla x tek başına bir üçgen içine dâhil olamayacağı için bu x’i başka dik üçgenlerdeki açılar yardımıyla ifade edilebilir.*”

açıklaması ile “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma kategorisini AN olarak belirlemiştir. Benzer şekilde öğrencisi S1 de “*O dik üçgende belirli trigonometrik değerler çıkacak. Onları kullanmamızı istiyor. Belirli olan tanjant değerlerinden isteneni bulurum.*” açıklaması ile aynı kategoriye AN olarak belirlemiştir.

M1 “*Toplam fark formülü artık öğrenci zaten çok fazla örnek çözdüğü için ezberlemiş oluyor. Yani zaten bu formülden kurtulma şansı yok.*” diyerek “tanjantın toplam formülünü bilme” kategorisinin problem çözme sürecinde AN olamayacağını ifade etmiştir. S1 de M1 ile benzer düşüncede olup “*Problemin çözümünde önemli nokta tanjant toplamını veya farkını kullanacağını bilmesidir.*” açıklaması ile “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma” kategorisinin AN olacağını ifade etmiştir. Bu durum bir önceki soruda “tepe noktasını bulma” yerine “tepe noktası kavramını bilme” kategorisinin AN olarak belirlenmesi durumu ile benzer yönler taşıdığı görülmüştür. S2 gibi S1 de matematiksel bilgiye sahip olmaktan çok onu ne zaman kullanacağını önemli bulmuştur.

M2 ile M1, S1’den farklı olarak “*Tabi formülleri de bilmesi gerekiyor.*” diyerek “tanjantın toplam formülünü bilme” kategorisi problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. S2 öğretmenin öğrencisi Ö2 “*Yoksa tanjant formülü genelde biliniyor.*” açıklaması ile “tanjantın toplam formülünü bilme” kategorisinin problem çözme sürecinde AN olamayacağını düşünmüştür. Bu noktada S2 öğretmen ve öğrencisi Ö2 AN belirleme durumları farklı olmuştur. Ö2 “*Bir de benim ilk başta yaptığım gibi yanlış üçgenlere bakmamak. Doğru dik üçgenleri görmek.*” açıklaması ile kendisinin karşılaştığı öğrencilerin de karşılaşılabileceği zorluk olarak gördüğü “doğru dik üçgene odaklanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3 ve öğrencisi S3’ün problem çözme sürecinde AN belirleme durumlarında benzerlik olduğu görülmüştür. M3 “*İstenen açı iki tane dik üçgene ait açının farkı cinsinden yazmak bu problemlerin en kritik noktasıdır.*” diyerek öğrencisi S3 ise “*Tanjantı istenen açı ile ilişki kurduğum açının tanjantını bulabilecek şekilde bir dik üçgen oluşturdum.*” açıklaması ile “tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma” kategorisinin problem çözme sürecinde AN olduğunu belirtmişlerdir.

M3 ve S3 her ikisi de “tanjant formülünü bilme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

M1’in problem çözümü incelendiğinde diğer öğretmen ve öğrencilerden farklı olarak “kosinüs teoremini kullanma” ve “sinüs teoremini kullanma” kategorilerinin M4’ün

problem çözme sürecinde yer aldığı görülmüştür. M4'in problem çözme sürecinde tanjantın toplam veya fark formülünü kullanmamıştır. Diğer öğretmenler ve öğrencilerden farklı olarak problem için daha uzun süre harcamıştır. M1'in öğrencisi S1'in "tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma" kategorisini AN belirleme durumunun altında yatan fikrin bu olduğu söylenebilir. M4 geometri bilgisi olan bir öğrencinin bu problemi çözeceğini düşünmüştür. M4'ün öğrencisi S4 ise "*Önemli nokta dikdörtgene tamamlayıp açılar arasında ilişkiyi bulmaya çalışıyorum.*" diyerek "tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma" ve "dikdörtgene tamamlama" kategorilerini AN olarak belirlemiştir.

M5 de "*Ama toplama ile ama fark ile ya da paralelliği kullanarak bir dik üçgene taşıyabilmeyi bilmeli.*" diyerek problem çözme sürecinde "tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. M5'in öğrencisi Ö5 de "*Açıyı iki açının farkı veya toplamı şeklinde yazıyorum.*" diyerek aynı kategoriyi AN olarak belirlemiştir.

4.3.4. Bölünebilme ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 "*Burada önemli olan çarpan kavramı ile bölen kavramının aynı olduğunu bilmesi.*" diyerek "çarpan bölen ilişkisini kurma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1'in öğrencisi S1 problem çözme sürecine "çarpan kat ilişkisini kurma" kategorisi ile başlamıştır. Daha sonra çözümü devam ettirememiştir. S1'e araştırmacı tarafından bu AN hatırlatılmıştır. Bu aşamadan sonra S1 problemin çözümünü tamamlamıştır.

M2 "*Burada önemli nokta x tek sayısını ifade etmektir.*" diyerek "tek sayı biçiminde ifade etme" kategorisini AN olarak belirlemiştir. M2 diğer öğretmenlerden farklı bir çözüm yolu ile sonuca ulaşmıştır. M2'nin öğrencisi Ö2 "*Aslında bölünebilmeyi düşünmek gerekiyormuş.*" diyerek "çarpan bölen ilişkisini kurma" kategorisini AN olarak belirlemiştir. Ö2 ilk olarak M2'nin belirlediği şekilde tek sayı ifadesini yazmış ama sonuca ulaşamamıştır.

M3 "*45 ile bir sayının çarpımının son basamağını tek olduğu ve 45 ile bölünebilme kuralı bu soruda kritik noktalardır.*" açıklaması ile anahtar noktaları belirlemiştir. S3 "*Tek sayı ile 45 çarpıldığı için bir kere sayı tek sayı olacak.*" açıklaması ile problem çözümüne başlamıştır ama sonuca ulaşamamıştır. 45 sayısının katlarını düşünmüştür. Daha sonra araştırmacı S3'e "çarpan bölen ilişkisini kurma" kategorisini hatırlatmıştır. Bu aşamadan

sonra S3 problemin çözümünü tamamlamıştır. S3 için bölünebilme kuralları M3 öğretmenin düşüncesinin aksine problem çözme sürecinde kritik bir rol oynamamıştır. S3 problem çözme sürecinde *“Ama 45 ile tam bölünebiliyor demek önemli nokta. Bunu düşünmek en önemlisi.”* açıklaması ile AN’yi “çarpan bölen ilişkisini kurma” kategorisi olarak belirlemiştir.

M4 *“O zaman ne olacak 45 in katları olacak.”* diyerek problemin çözümüne başlamıştır. M4 45 sayısının birler basamağı 5 olan dört basamaklı katını bulmaya çalışmıştır. Bir süre düşündükten sonra araştırmacının “çarpan bölen ilişkisini kurma” kategorisini hatırlatması üzerine problemin çözümünü tamamlamıştır. M4’ün öğrencisi S4 *“İlk düşündüğümde 45’in hangi katı bu sayıyı verebilir diye düşündüm. Ama o yolun çıkmaza gittiğini gördüm.”* diyerek problemde zorluk yaşayan diğer öğrenciler gibi “çarpan kat ilişkisini kurma” kategorisinin problem çözme sürecinde sonuca ulaştırmadığını ifade etmiştir. S4 *“9’a ve 5’e bölünebilme kuralları ve tek sayıda gömlek alınması üzerinden sayının tek olması, yoksa birler basamağı 0 da olabilirdi.”* açıklaması ile “bölünebilme kurallarını bilme” ve “tek sayı özelliğini bilme” kategorilerini AN olarak belirlemiştir. S4 problem çözümünde “çarpan bölen ilişkisini kurma” kategorisini kullanmadan uzun süre boyunca düşünmüş, çözüm yolları aramış olmasına rağmen bu kategoriye AN olarak belirlememiştir.

M5 “tek sayıyı genel biçimde yazma” kategorisinin önemli olduğunu düşünmüştür. Daha sonra tek sayıda gömlek olduğu için gömlek sayısını $2n - 1$ biçimde yazmıştır. M5 problemin çözümünü gördüğü zaman *“Bir sayı ile 45 i çarpıyorsun bunu buluyorsun o zaman bu sayı 45 ile tam bölünür demesi lazım.”* diyerek problemin çözümünü tamamlamıştır. M5 öğretmene AN’leri belirlemesi istendiğinde “çarpan bölen ilişkisini kurma” ve “bölünebilme kurallarını bilme” kategorisi olarak belirlemiştir. Öğrencisi T5 ise *“Bu problemde 45 ile tam bölünüyor.”* açıklamasını yaparak problemin çözümünü tamamlamıştır.

4.3.5. Olasılık ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 *“Soruda sadece tek bir bilgi verilmiş. Başka verilen bir şey yok. Diğerlerinin verilmediği yerde hepsine değişken vereceğiz. Üçgenlerde olduğu gibi, hemen bir şey yapamıyor olsan bile değer verilmesi gerekir.”* açıklaması ile “adlandırma yapma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1’in öğrencisi S1 ise *“Denklem kurmaya çalıştım.*

Ama bilinmeyen sayısı fazla olduğu için vazgeçtim. Deneyerek yapmaya karar verdim.” diyerek problem çözme sürecinde zorlandığı ve AN’yi “adlandırma yapma” kategorisi olarak belirleyerek M1 ile benzer bir açıklama yapmıştır.

M1 ile S1 problem çözümleri ve açıklamaları incelendiğinde farklılıklar da ortaya çıkmıştır. M1 *“Burada önemli olan torbalardan rastgele birer top çekildiğinde cümlesinin iyi anlaşılması gerekiyor. Burada ayrı ayrı ikisinin de olasılıklarının $\frac{1}{2}$ olduğu anlaşılabilir.”* diyerek “olasılık ile ilgili kavramları bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. S1 ise *“Problemin en önemli noktası kırmızı çekilme olasılıklarını yazıp olasılığı $\frac{1}{2}$ elde etmek için deneme yapmaktır.”* diyerek “tahminde bulunma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2 ile öğrencisi S2’nin problem çözme sürecinde AN belirleme durumları incelendiğinde benzerlik ve farklılıkların olduğu söylenebilir. M2 *“Bence üç aşama önemli. Bir değişken kullanmak, iki şu denklemi kurmak, üç x, y, z değişkenlerinin büyük eşit 1 olması.”* diyerek problem çözme sürecinde belirlediği AN’leri ifade etmiştir. S2 ise *“Burada önemli nokta en son değer vermektir. Son kısımda dağıtırdım. İçler dışlar çarpımı yaptıktan sonra toplamın 10 olmasından giderdim.”* diyerek problem çözme sürecinin son aşamasında “mantıklı değer verme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. S2’nin çözümü incelendiğinde çözüme başlarken “denklem kurma” kategorisinde zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir. Fakat bu durumu S2 çözüm sürecinde AN olarak belirlememiştir. S2’nin “denklem kurma” kategorisinde yaşadığı zorluğun *“Torbalardan birer top çekildiğinde ilk başta öncelikle iki torbadan birini seçeceğim. Çünkü iki tane torbam var. Birinci torbadan mı alacağım ikinci torbadan mı alacağım.”* açıklamasında ifade ettiği üzere “olasılık ile ilgili kavramları bilme” kategorisinden kaynaklandığı söylenebilir.

M3 *“Problemin çözümünde yardımcı olabilecek önemli nokta iki değişkene bağlı olarak ifade edilmesi, çarpım kuralına göre olasılık yazılır, çıkabilecek iki farklı değer değerlendirilir, eleme yapılır.”* açıklaması ile problem çözme sürecinde AN’leri “adlandırma yapma”, “denklem kurma”, “değerlendirme yapma” kategorileri olarak belirlemiştir. S3 ile yapılan görüşmelere bakıldığında *“Problem çok karışık gerçekten. Bilinmeyenleri vermek önemli nokta.”* diyerek “adlandırma yapma” kategorisini vurguladığı görülmüştür. S3, M3’ün aksine bir tane AN belirlemiştir.

M4 problem çözme sürecinin ilk aşamasında M2’nin öğrencisi S2’nin yaşadığı zorluğu yaşamıştır. M4 öğretmen *“Torbalardan rastgele bir top çekildiğinde ikisinin de kırmızı*

olma olasılığı. Şimdi öğrenci ilk olarak şunu bilecek. İki farklı durum olduğu için torbalardan birinden çekilen ama hangi torbadan çekildiği bilinmediği için öncelikle $\frac{1}{2}$ olasılık olduğunu bilecek.” açıklaması S2’nin açıklaması ile benzerlik göstermiştir. M4 de S2 gibi “olasılık ile ilgili kavramları bilme” kategorisinde aynı hatayı yapmıştır. M4 yaptığı hatayı kendisi düzeltmiştir ve açıklamasını yapmıştır. M4’ün öğrencisi S4 bu çözümde “tahminde bulunma” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir. S4 problem çözme sürecinin ilk aşamasında problemde verilen bilgilere göre değer vermenin en iyi çözüm yolu olduğunu düşünmüştür. M4 ise bu problemin çözümünde AN’yi “ tahminde bulunma” olarak belirlemiştir. S4’ün aksine problem çözme sürecinin son aşamasında “denklem kurma” kategorisinden sonraki aşamada değer vermeyi düşünmenin AN olduğunu söylemiştir. M4 öğretmenin “Denemek hiç aklıma gelmezdi doğrusu.” açıklaması M2’nin öğrencisi S2 ile benzerlik göstermiştir.

M5 ile öğrencisi S5’in anahtar nokta belirleme durumlarında benzer noktaların olduğu söylenebilir. Örneğin, M5 “Çocuk değişken vermeyi bilmeyi, ortak değişken vermeyi bilmeli. İlişkileri kurabilmeli.” diyerek “adlandırma yapma” kategorisinin önemine değinmiştir. Aynı şekilde S5’in “Çok fazla bilinmeyen ortaya çıktı. Bilinmeyeni sonda verilen bilgiye göre verseydim böyle karışıklık olmazdı. Sondan başlamam gerekirdi. Ben ilk gördüğüm veriden başladım. Sondaki verileri kullanıp ilk verileri elde etmeye çalışırsak daha kolay bir eşitlik elde ederiz.” açıklamasının ise M5’in açıklamasını desteklediği söylenebilir. Her ikisi de ilişkilere dayalı adlandırma yapmanın önemine değinmiştir.

4.3.6. Kombinasyon ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 “Burada öğrencinin bilmesi gereken ikisinin de de olan hücrelerin etkileyici olduğudur. İki farklı olgu bir araya geldiğinde çakışan noktalara dikkat edilmelidir.” “kesişime odaklanma” kategorisini M1’in öğrencisi S1 ise “Şekle baktığım zaman üçün de kendi etrafındakiler olabiliyor. Birin de kendi etrafındakiler olabiliyor. Gözlemlediğim zaman şu kısım kesişiyor. Kesiştikleri için ikisi için de olabileceğini gördüm.” diyerek aynı kategoriye yani “kesişime odaklanma” kategorisini AN olarak belirleyerek benzer açıklamalarda bulunmuştur.

M2 “Burada dikkat edilmesi gereken ortadaki hücrelerle diğerlerini ayırması gerekiyor.” diyerek “kesişime odaklanma” ve “kesişimi ayrı düşünme” kategorilerini AN olarak belirlemiştir. M2’nin öğrencisi S2 ise problem çözme sürecinin başında zorluk yaşamıştır.

Araştırmacı M2'nin AN olarak belirlediği kategorileri kendisine sunmuştur. S2 bu aşamadan sonra ilerleme kaydetse de problemin sonucuna ulaşamamıştır. S2 *“Bu problemde önemli nokta bence soruyu anlamaktı. Ben açıkça söyleyeyim ilk başta soruyu anlamadım yani.”* diyerek problem çözme sürecinde eksik bir bilgiye sahip olmadığını vurgulamak istemiştir. S2'nin araştırmacı tarafından AN verilmesinden sonra sonuca ulaşamamasının nedenini kendisi de *“Ben ilk başta bazıları turuncu diyor ya onun sabit olduğunu düşünmedim.”* açıklaması ile belirtmiştir. S2 seçim yaptığı hücreler içinden bir hücrenin olma ihtimalini göz ardı etmiştir.

M3 *“Öğrenci burada mutlaka ortak olanları ayrı düşünmeli, burada önemli nokta burası.”* açıklamasını yaparken S3 ise *“Bu problemin en önemli noktası ortadaki ortak kısmı ayrı düşünmek.”* açıklamasını yapmıştır. Buradan M3 ile öğrencisi S3'ün benzer açıklamalar yaptığı söylenebilir. Dolayısıyla problem çözme sürecinde AN belirleme durumları benzerlik göstermiştir.

M4 problem çözme sürecine “kesişime odaklanma” kategorisini dikkate almadan başlamıştır. Fakat daha sonra *“6 tanesinden 3 tanesini seçerim. Burada nedir 6 tanesinden 1 tanesini seçerim. Durumumu oluşturmuş olurum. Ama o zaman ortadaki iki taneden seçersek sıkıntı olabilir. O kural bozulmuş olacak. İki tanesi seçilirse o kuralımız sağlamamış oluyor. O zaman onu ayrı düşünmem lazım.”* açıklamasını yapmıştır. Daha sonra ise “kesişimi ayrı düşünme” kategorisini problem çözme sürecinin kritik bir rol oynadığını ifade etmiştir ve AN olarak belirlemiştir. M4 problem çözme sürecinde “kesişimi ayrı düşünme” kategorisinin tek başına yeterli olamayacağını düşünmüştür. M4 *“bu ayrı durumlarda kaç farklı seçenek olduğunun yazılmasının bilinmesi gerekir.”* diyerek M2'nin öğrencisi S2'nin de yaptığı hataya dikkat çekmiştir. M4'ün öğrencisi S4 ise “kesişime odaklanma” kategorisini değerlendirmiştir fakat buradan “kesişimi ayrı düşünme” kategorisi yerine başka bir çözüm yolunu izlemeyi düşünmüştür. S4 *“Tüm durumlardan ortak olanları mı çıkaracağız.”* diyerek bazı çözümler yapmıştır fakat sonuca ulaşamamıştır. S4 problem çözme sürecinde araştırmacı tarafından “kesişimi ayrı düşünme” kategorisi sunulmuştur. Bu aşamadan sonra S4 problemi çözmüştür ve *“Burada önemli olan nokta ayrı durum olarak alınması.”* açıklamasını yapmıştır. Bu noktada M4 ile benzer açıklama yaptığı söylenebilir.

M5 *“Ortak yerden kaynaklanan iki farklı durum olduğunu sezmeli. Ayrı incelenmesi gerektiğini bilmesi gerekir.”* açıklaması ve M5'in öğrencisi S5'in ise *“Bütün olası durumları hesaba katmamız gerekiyor.”* açıklaması dikkate alındığında problem çözme

sürecinde AN belirleme durumlarında benzer açıklamalar olduğu görülmüştür ve dolayısıyla bu benzer açıklamalar doğrultusunda aynı kategoriler oluşmuştur.

M5 öğretmen diğer öğretmen ve öğrencilerden farklı olarak “*Kombinasyon hesabını bilmesi gerekir*” diyerek “kombinasyon ile kavramları bilme” kategorisini problem çözme sürecinde AN olarak belirlemiştir.

4.3.7. Modüler Aritmetik ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 ile öğrencisi S1’in AN belirleme durumlarında benzerlikler görülmüştür. M1 “*İstenen toplamı yazabilmesi lazım. Burada önemli olan toplamı yazdıktan sonra benzerlerden yola çıkmaktır.*” açıklaması ile öğrencisi S1 ise “*A parantezine alıp toplamı elde etmek önemlidir.*” açıklaması ile benzer kategoriler üzerinde durmuşlardır. Her ikisi de “toplamı elde etme” ve “paranteze alma” kategorilerini AN olarak belirlemişlerdir. M1 de öğrencisi S1 de “toplam formülünü kullanma” kategorisinin AN olamayacağı yönünde görüş bildirmiştir. M1 bu durumu “*Burada 1’den 50’ye kadar olan sayıların toplamı formülünün ezbere kaçtığını düşünüyorum.*” şeklinde açıklamıştır. M1 “*Ama öğrencinin modüler aritmetik bilgisi varsa farklı şekillerde dahi düşünebilir. Modüler aritmetik bilgisi varsa eğer bir yol tıkandığında başka bir yol bulabilir. Gazoz açacağı yoksa kaşıkla açmak gibi diyebilirim.*” açıklaması ile “modüler aritmetik bilme” kategorisini AN olarak belirlerken AN olma özellikleri ile ilgili yorumlarda bulunmuştur. M1 bu açıklaması ile AN’nin farklı çözüm yolları için AYN olabileceği üzerinde durmuştur. Öğrenci problemin çözümünde anahtar noktaya sahip ise sahip olduğu AAN’ler ile bağlantı kurabileceği farklı çözüm yollarından birini tercih edebilir. M1 bu durumu gazoz içmek isteyen bir kişinin durumu ile benzetme yaparak açıklamıştır. Amacı gazoz içmek olan bir kişinin anahtar bilgisi kapağı yukarı doğru kaldırmaktır. Bu durumda “kapağı kaldırma” AN’dir. Kapağı kaldıracağını bilen bir kişi bunu gazoz açacağı ile veya kaşık ile yapabilir. Bu durumda “gazoz açacağı ile açma” ve “kaşık kullanma” alt kategorileri amaca ulaşmayı sağlayan farklı çözüm yollarıdır. M1’in öğrencisi S1 de “*Problemin çözümünde modüler aritmetik kullandım. Modüler aritmetik bilgisi lazım.*” diyerek “modüler aritmetik bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2 ve öğrencisi Ö2’nin AN belirleme durumları farklı olmuştur. M2 “*Önemli noktalardan birisi 9 ile bölünebilme kuralını uygulamak.*” diyerek “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Öğrencisi Ö2 ise “*Böyle*

sorularda genel halde verilen sorularda bir sayı vererek deniyorum denklemi öyle oluşturuyorum. Bence önemli kısım bu.” diyerek “örneklendirme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3 ve öğrencisi S3 problem çözme sürecinde AN belirleme durumları arasında farklılıklar olduğu görülmüştür. M3 “Bu soruda önemli olan noktalar 9 ile bölünebilme kuralından hareket ettik.” açıklamasıyla ilk olarak “9 ile bölünebilme kuralını uygulama” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Sonraki aşamada M3 diğer öğretmenlerin aksine “Bir diğer önemli nokta ise 1 den n e kadar olan sayıların toplam formülünün bilinmesidir.” diyerek “toplam formülünü kullanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M3 son olarak “Modüler aritmetiğin mantığının bilinmesi gerekir.” açıklamasıyla son AN’yi belirlemiştir. S3 ise “Bu problemin en önemli noktası ilk denklemi yazmak” açıklamasıyla “denklem kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M4 ilk olarak “Şimdi çocuk 9 ile bölünebilme kuralını bilecek.” açıklamasını yapmıştır. Bu açıklama öğretmen açıklamaları ile benzerlik gösterse de öğrenci açıklamalarıyla benzerlik göstermemiştir. Aynı şekilde öğrencisi S4 de “9 ile bölünebilme kuralını bilme” kategorisini AN olarak belirlememiştir. M4 daha sonra “Sonra burada da 50 tane A olduğunu bilecek.” açıklamasını yapmıştır. Bu açıklama M1’in de belirlediği “benzerlerden yola çıkma” kategorisini AN olarak belirlediğini göstermiştir. M4 son olarak “Sonra ardışık sayıların toplam kuralını bilmesi lazım burada çocuğun.” açıklaması ile “toplam formülünü bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. Dolayısıyla M3’ün açıklaması ile benzer yönler taşıdığı görülmüştür. M4’ün öğrencisi S4 ise “Bu problemin çözümünde önemli nokta modüler aritmetik bilgisidir. Bilmiyorsa çünkü sınav biter bu soruyu çözene kadar.” açıklaması ile “modüler aritmetik bilme” kategorisini AN olarak belirlediğini ifade etmiştir. M4 ise “Sayı büyük olmadığı için modüler aritmetik bilmesine gerek yok.” diyerek S4 ile aynı şekilde düşünmediğini ifade etmiştir.

M5 ile öğrencisi Ö5’in bazı açıklamaları arasında benzerlik olmuştur. M5 “Öğrenci burada modüler aritmetik kullanır ama belki onu kullandığını anlamaz. Çarpım yapmadan kalanlar üzerinden işlem yapmayı bilmeli.” açıklaması ile “modüler aritmetik bilme” kategorisini AN olarak belirlerken öğrencisi Ö5 “Burada ki önemli nokta mod kullanmak.” açıklaması ile aynı kategoriye AN olarak belirlemiştir. AN belirleme durumlarında benzerlik olduğu kadar farklılıklar da olmuştur. Örneğin M5 “Öğrenci 9 ile bölünebilme kuralını bilecek öncelikle.” açıklamasını yaparken öğrencisi Ö5 “Böyle problem soruları bence biraz daha muhakeme istiyor. Ben biraz daha kuralcıyım. Sorularda neyi

kullanacağımız açık olmuyor. Bunu bizim bulmamız gerekiyor.” açıklamasını yapmıştır. Serkan kuralları bilmenin problem çözme için AN olamayacağını önemli olanın hangi problemde neyi kullanmak gerektiğini bilmek olarak ifade etmiştir. Serkan’ın problem çözme sürecini doğru bir şekilde tamamlama planı, çalışmanın amacı ile de örtüştüğü söylenebilir. Çünkü araştırmanın amacı problem çözme sürecinde öğrencilerin neyi bilirlerse problemi çözebileceklerini belirleme durumlarını tespit etmek olduğu için Ö5’in açıklaması ile benzerlik taşıdığı söylenebilir. M5 son olarak *“Sonlu bir toplamı bilecek. 1 den 50 ye kadar olan sayıların toplamını bilecek.”* diyerek “toplam formülünü kullanma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

4.3.8. Polinom Fonksiyon ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1 *“Burada en önemli bilgi çift fonksiyon olma durumu bilgisidir.”* açıklaması ile problem çözme sürecinde “çift fonksiyon olma durumunu bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M1, AN olarak belirlediği “çift fonksiyon olma durumunu bilme” kategorisinin aynı zamanda problemin çözümü için alternatif yollara olanak sağlayan bir AYN olduğunu ifade etmiştir. M1’in 2017 LYS sınavında sorulmuş olan polinomlar ile ilgili problem çözme sürecinde AN belirleme durumu incelendiğinde AN olarak belirlemede aradığı özellikler açısından en çok tekrarladığı özelliğin bu durum olduğu gözlemlenmiştir. M1 problem çözme süreçlerinde istenilen bilgiye sahip olmanın aslında temel matematiksel bilgilerin bilinmesi ile mümkün olabileceğini ifade etmiştir. M1’in açıklaması aşağıdaki gibidir.

Öğrencilere aslında her bilginin her yerde işe yarayabileceğini söylememiz gerekiyor. Çarpınlara ayırma konusunun her yerde geçerli olduğu, köklerin varlığının olduğu her yerde bu durumların olabileceği durumu tek bir üniteyle sınırlamamak gerekiyor. ÖSYM sorularına bakıldığı zaman bir soruda birkaç konuyu harmanladığını, soruya bakıldığı zaman hangi konuyla ilgili olduğunun hemen anlaşılmadığı görülmektedir.

M1’in AN belirleme ölçütlerini çalışmada belirtilen AN olma özellikleri ile örtüştüğü söylenebilir. Örneğin, çalışmada AN tanımı yapılırken AN’nin bireyin sebepsiz ve gereksiz işlem yapmasını önleyerek problem çözmede hedefe götürebilmesi özelliğine sahip olması gerektiği belirtilmiştir. M1 *“...Buradan da çözebilir. Ama sıkıntı süre sıkıntısı yaşaması bir yana yıpranacaktır. Bu yolu kolaylaştıracak şey çift fonksiyon olma bilgisidir...”* diyerek AN olarak belirlediği “çift fonksiyon olma durumunu bilme” kategorisinin problem çözme sürecinde sağladığı faydaya değinmiştir.

M1'in 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumu incelendiğinde benzer açıklamalar olduğu görülmüştür. M1'in *"Burada dikkat etmesi gereken şey bir kere problemi çözmesi için kısıtlı bir süre var. ÖSYM kendisinden gereksiz işlem yapmasını istemediğini bilmesi gerekiyor."* açıklaması ile AN belirleme gerekçesini ifade etmiştir.

M1, AN olarak belirlediği "polinomu çarpanları cinsinden yazma" kategorisinin polinom problemi çözme sürecinde önceki yıl sorulan polinom probleminde de AN olduğunu altını çizmiştir. M1'in açıklaması şöyledir.

"Geçen yıl sorulan polinom sorusunda olduğu gibi x_1 ve x_2 varken denklemin yazılmasının önemi ortaya çıkıyor. Orada ne yapıyorduk. Kökleri verildiği zaman $a. (x - x_1). (x - x_2)$ yazıyorduk."

M1 öğrencilerin bu matematiksel bilgiyi nerede kullanacaklarını bilmede zorluk yaşadıklarını ifade ederek polinom probleminin çözümünde yardımcı olabilecek AN'nin birçok matematiksel bilginin gölgesinde kaldığını ifade etmiştir. M1'in açıklaması şöyledir.

"Bunu biz parabolde gösteriyoruz. İkinci derece fonksiyonun grafiği verildiği zaman denklemini yazmada gösteriyoruz. Bu konudan sonra ikinci dereceden denklem konusu veriliyor. Orada kökleri bulurken çarpanlarına ayırıyor, kökleri buluyor. Önceki konunun etkisi kaybolurken, asıl önemli olan gölgede kalıyor."

M1 "kök çarpan ilişkisini bilme" kategorisini gerek 2017 LYS sınavında gerekse 2018 AYT sınavında sorulmuş olan polinomlar ile ilgili problemi çözmede AN olarak belirlediği görülmektedir. M1'in 2017 LYS polinomlar ile ilgili problem için *"Kök kavramını bilmesi gerekiyor. çarpanının ne olduğu bilmesi gibi."* açıklamasını yaparken 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon ile ilgili problemi için *"Kök çarpan ilişkisini bilmeli."* açıklaması ile polinom problemi çözümünde "kök çarpan ilişkisini bilme" kategorisinin önemine değinmiştir. M1, AN olarak belirlediği bu kategorinin öğrencilere açıklanması gerektiğini ifade ettiği açıklaması şöyledir.

"Öğrencilere aslında her bilginin her yerde işe yarayabileceğini söylememiz gerekiyor. Çarpanlara ayırma konusunun her yerde geçerli olduğu, köklerin varlığının olduğu her yerde bu durumların olabileceği durumu tek bir üniteyle sınırlamamak gerekiyor."

AN tanımı gereği problemlerin çözümünde önemli ve olmazsa olmaz bilgiler olarak karşımıza çıkarak problemin çözümünde bize yardımcı olabilir. M1'in yaptığı açıklamalara bakıldığında AN tanımı ile örtüştüğü söylenebilir.

M1'in öğrencisi Ö1'in polinom problemi çözümü incelendiğinde “kök olduğunu anlama” kategorisini AN olarak belirlediği görülmüştür. Ö1 zorlandığı noktaların başında kök olduğunu anlamak olduğunu, dört kökü elde etmeye çalışmak olduğunu belirtmiştir.

Ö1'nin önceki polinom problemi çözüm süreci incelendiğinde “ *$Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleriymiş. Buradan bir tane kök bulursak orada deneyince de oluyor.*” açıklamasında belirttiği gibi $Q(x)$ ve $P(x)$ polinomlarının kök sayılarının eşit olduğunu düşünmesi olduğu görülmüştür. Ö1'in 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözüm sürecinde yaptığı “polinomun dört tane kökü olduğunu bileceğiz” açıklaması ile “polinom derece kök sayısı ilişkisi kurma” kategorisinin oluştuğu görülmüştür.

Ö1'in “ *$-4, P(x)$ 'i sağlıyor ise $(x + 4)$ ifadesinin onun bir çarpanı olduğu aklıma gelmedi. -4 bu polinomu böler gibi geliyor.*” açıklaması ile “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisinin oluşmadığı söylenebilir. Ö1'in bölünebilme mantığı ile düşündüğü de söylenebilir.

Ö1 “kök çarpan ilişkisi kurma” kategorisinin polinom kazanımları içinde değil ikinci dereceden denklemler kazanımları içinde anlamlı geldiğini söylemiştir. Ö1'in açıklaması şöyledir.

“Onun kökü olması çarpanı da olması fikrini çağrıştırmıyor. Ama düşündüğüm zaman mantıklı geliyor. İkinci dereceden denklemlerde kökü nasıl bulduğumuz aklıma geldiği zaman kökü nasıl buluyorduk. Çarpan fikri mantıklı oluyor.”

Ö1 önceki yıl sorulan polinom probleminde kullanmadığı “polinomu çarpan biçiminde yazma” kategorisini kullanarak problemin çözümünü tamamlamıştır. Ö1'in “*Ondan sonrası zaten geliyor.*” diyerek AN olarak belirlediği nokta “kök olduğunu anlama” kategorisidir. Bunun nedeni ise Ö1'in her iki polinom problemi incelendiğinde de yaşadığı zorluk polinomun kökü sorulduğu zaman ilk olarak “*Polinomun kökü sıfır.*” açıklaması verilebilir.

M2 önceki görüşmede “polinomu çarpanları cinsinden yazma” kategorisi ile polinomu ifade ederken 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon problemi ile yapılan

görüşmede “polinomu genel biçimde ifade etme” kategorisi ile problem çözme sürecini tamamlamıştır. M2 ile 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözüm sürecinde yapılan görüşmede *“Bu problem önceki görüşmede yaptığımız şekilde de çözülebilir. Ama verilen ilk bilgi öğrenciyi ilk çözüme yönlendirir gibi geldi.”* açıklaması ile öğrencilerin polinomlar ile ilgili problemin çözümü için bu yolu tercih edebileceklerini ifade etmiştir. Dolayısıyla M2’nin 2017 LYS ve 2018 AYT sınavlarında sorulan polinomlar ile ilgili problemi çözüm sürecinde AN belirleme durumlarında farklılık olduğu söylenebilir. M2 öğretmen ile yapılan önceki görüşmede yer alan polinomlar ile ilgili probleminin çözüm sürecinde *“Burada birden fazla değişken olduğu için yerine yazma işe yaramayacaktır. Zaten sıfırlıyor. Sıfırlayan bir şey değişken olmasa da bir şeye yaramaz. Ama bu tarz olanlarda hemen çarpanı olduğunu düşünmek gerek.”* diyerek “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M2’nin öğrencisi S2 problemin çözümüne “çift fonksiyon olma durumlarını bulma” kategorisi ile çözüme başlamıştır. S2 problemin çözümünde bu kategoriye AN olarak belirlemiştir. S2 diğer öğretmen ve öğrencilerin aksine AN olarak belirlenen “çift fonksiyon olma durumlarını bilme” kategorisine sahip olmadığı için bu kategoriye yaptığı işlemlerle elde etme yoluna gitmiştir.

M3 *“Baş katsayısı 1 olduğu için o yol da olabilirdi.”* diyerek “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisinin alternatif bir yol olabileceğini ifade ederken daha önceki yıllarda sorulmuş olan polinom problemlerinin çözüm süreçleri ile benzerlik kurmuştur. M3 *“Bu soru daha önce de soruldu. Belki çift fonksiyon bilgisi yoktu ama orada da başka bir bilgi vardı.”* diyerek çözüm süreçleri ile ilgili benzerliklere değinmiştir. M3 *“Diğer kökleri $P(x) = P(-x)$ ifadesinden sezmek gerekiyor.”* açıklaması ile 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problemde olduğu gibi “kök olduğunu anlama” kategorisini AN olarak belirtmiştir. M3 *“Önceki polinom probleminde de polinomu çarpanları cinsinden yazmak daha kısa bir yoldu.”* diyerek problem çözme sürecinde AN olan kategorilerin aynı olduğunu ifade etmiştir.

M3’ün öğrencisi S3 *“polinomun kökü olduğunu düşünmek önemli. Bu insanın aklına gelmiyor.”* açıklaması ile “kök olma durumlarını bilme” kategorisini *“Kök nasıl buluyorsak, tersten de polinomu oluşturmak.”* diyerek “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. S3’ün 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problem çözümü incelendiğinde “kök olduğunu anlama” kategorisini AN olarak belirttiği görülmüştür. Fakat “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisini problemin

çözümünde AN olarak belirlememiştir. S3 bu durumu “*Polinomlarda çözdüğümüz sorular genelde yerine yazma ile ilgiliydi. Bir polinomu kökleri cinsinden yazdığımı hatırlamıyorum.*” diyerek açıklamıştır. Selin “*Ama ben yine de diğer yöntemle giderdim.*” diyerek “kökü yerine yazma” kategorisini kullanarak polinomlar ile ilgili problemin çözümünde ilerleyeceğini “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisi ile yapılan çözümü kullanmayacağını belirtmiştir.

M4 öğrencilerin polinom probleminin çözümü için birinci yolu tercih edebileceklerini söylemiştir. M4 öğrencilerin “polinomu genel biçimde ifade etme” kategorisini kullanabilme ihtimallerinin yüksek olduğunu söylemiştir. Bunun nedenini ise “*biz çocuklara birinci dereceden bir polinom nedir diyoruz, $ax + b$, ilk başta verdiğimiz tanım öyle, polinomu o şekilde tanımlamamızdan kaynaklanıyor. Öğrencinin kafasında polinom öyle şekilleniyor. Biraz da ondan kaynaklı.*” şeklinde açıklamıştır.

M4 öğretmenin önceki polinom problemi çözüm süreci incelendiğinde anahtar nokta olarak “kök olma durumlarını bilme” ve “kök katsayı ilişkisini kurma” kategorilerini AN olarak belirlemiştir. Aynı şekilde M4 öğretmen 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problemin çözümü için farklı bir çözüm yolu izlediği için farklı AN’ler belirlemiştir. Dolayısıyla “kök çarpan ilişkisini kurma” ve “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorilerini AN olarak belirlememiştir. Bu aşamadan sonra araştırmacı ile diyalogundan sonra bu kategorilerin çözüm için daha uygun olabileceğini belirtmiştir. M4 öğretmen kendisinin de ilk bakışta göremediği bu çözüm yolunun öğrenciler için de bir seçenek olamayabileceğini dair nedenleri ifade etmiştir.

M4, öğrenciler tarafından “kök çarpan ilişkisini kurma” ve “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorilerinin problem çözmede kullanılmaması ile ilgili açıklamalar yapmıştır.

M4

“Çocuklara polinom konusunu işlerken şöyle bir örnek veriyorum. Diyorum ki çocuklar $P(x)$ polinomunun $x = 2$ ile tam bölünebilmesi ne demek diyorum. Bunu bu tarafa at $(x - 2)$ dir diyorum. O zaman $(x - 2), P(x)$ polinomunun çarpanlarından biridir diyorum. $P(x)$ polinomunu oluşturmak için $(x - 2)$ çarpanlarından biridir, başka bilgiler olursa yanına gelir diyorum. Bunu yüzde yüz diyorum.”

açıklamasını yapmıştır. M4 “polinomu çarpan cinsinden yazma” kategorisini AN olarak belirlememe nedenini ise “*ama öğrenciler ikinci dereceden fonksiyon grafiğini çizmeyi öğrenmiyorlar, grafiği yorumlamayı bilmiyorlar, denklemi yazmayı bilmiyorlar, o yüzden.*” şeklinde açıklamıştır. M4 “12.sınıf öğrencileri bu ilişkiyi kurabilir” diyerek açıklamasını sürdürmüştür.

M5 önceki görüşmede sorulan polinom probleminin çözüm süreci ile 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon ile ilgili problemin çözüm sürecinde de benzer açıklamalar yapmıştır. M5 *“O zaman hani geçen yıl sorulan sınav sorusu gibi çarpanlardan birisi $(x - 2)$, birisi $(x - 3)$ ve diğerleri $(x + 2)$ ve $(x + 3)$ olacak. Yani polinomun kökü olduğunu gördükten sonra çarpanı olduğunu bilmesi lazım.”* diyerek önceki görüşmede yer alan 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problemin çözme sürecinde belirlediği “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisini yine AN olarak belirlemiştir. Aynı şekilde 2018 AYT sınavında sorulan polinom fonksiyon ile ilgili problemi çözme sürecinde AN belirleme durumlarında ortaya çıkan kategorilerin benzerliğine dikkat çekmiştir. M5 *“Geçen yıl sorulan polinom sorusu ile aynı önemli noktalara sahip.”* diyerek AN’lerdeki benzerliği vurgulamıştır. M5 önceki görüşmede yer alan anahtar noktaların öğrenciyi sebepsiz ve gereksiz işlem yapmasını önleyeceğini *“Hem zamandan kazanacak hem de yolu uzatmayacağı için hata yapma olasılığı azalacak. İkinci yol o yüzden daha önemli.”* diyerek belirtmiştir.

M5 *“Son yıllarda sınavda sorulan sorularda hep bunu istiyor. Kökü ise çarpanı olarak yazsın isteniyor.”* açıklaması ile AN’nin problem çözme sürecinde sonuca ulaştırmada bireye yardım edebilmesini sağlayacak temel fikirler olabilmesi özelliğini vurguladığı söylenebilir.

M5’in *“Öğrenci daha çok kök çarpan konusunu ikinci dereceden denklem konusu içinde düşünüyor. Polinomda başka bir şey gibi geliyor. Dördüncü dereceden bir polinomda olamaz gibi geliyor.”* açıklaması AN’nin başka problemlerin çözümünde önemli ve olmazsa olmaz bilgiler olarak öğrencilerin karşılaşılacağı problemin çözümünde yardımcı olabilecek bilgiler olması özelliğini vurguladığı söylenebilir.

M5’in *“Daha çok birinci yol gibi çözdüğümüz için hep o yoldan gitmeye çalışıyorlar. Bu sene o yüzden bunu göstereceğim.”* açıklaması AN’nin problem çözmede deneyimin sonucu olarak ortaya çıkabilme durumlarının değişebilmesi özelliği ile ilgili olduğu söylenebilir. Bu yüzden M5 *“Bu yüzden bu sene polinom konusunu işlerken çıkmış soruları çözüp bu noktaları göstereceğim. Bence biz de göstermeliyiz artık bunu.”* açıklaması ile AN’lerin problemin çözümünde yapılan planların çerçevesinde etkili olabileceğini düşündüğü söylenebilir.

M5’in öğrencisi S5 de M5 ile benzer açıklamalarda bulunmuştur. S5 de problem çözme sürecinde iki yol olabileceğini düşünmüştür. M5 öğretmen ve S5 polinom probleminin

çözümü için seçilebilecek bu iki yol ile ilgili benzer açıklamaları olmuştur. S5 “Ben bu yöntemin çoğu öğrencinin gideceği yöntem olarak seçtim.” açıklaması M5’in “Daha çok birinci yol gibi çözdüğümüz için hep o yoldan gitmeye çalışıyorlar. Bu sene o yüzden bunu göstereceğim.” açıklaması ile benzerlik göstermektedir. Her ikisinin açıklamasının da AN’nin “problem çözmede deneyimin sonucu olarak ortaya çıkabilme durumlarının değişebilmesi” özelliği ile ilgili olduğu söylenebilir.

S5 “Yoksa diğer köklerin -2 ve -3 olur. -2 nin ve -3 ün kök olduğunu anlamayacaktır.” açıklaması ile 2017 LYS sınavında sorulan polinomlar ile ilgili problemi çözme sürecinde AN olarak belirtilen “kök olduğunu anlama” kategorisini vurgulamıştır.

S5 “Ama öğrenciler genelde kökleri yerine yazma eğilimde” diyerek önceki problemde olduğu gibi öğrencilerin polinomlar ile ilgili problemlerin çözümlerinde “kökü yerine yazma” kategorisinin yer alacağını belirtmiştir. S5, 2017 LYS sınavında sorulmuş olan polinomlar ile ilgili problemin çözümünü inşa etmede AN olarak belirlenen “kök çarpan ilişkisini kurma” kategorisinin “kök olduğunu anlama” kategorisi olmadığı takdirde kullanılamayacağını belirtmiştir. S5 “Kök olduğunu düşünüp çarpan olduğunu anlayamaz.” diyerek bu konudaki düşüncesini belirtmiştir.

4.3.9. Maksimum ile ilgili Problem ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

M1’in “gelir hesaplamayı bilme” kategorisinin altını çizdiği açıklaması şöyledir:

“Öğrencilere TYT soruları ile ilgili bir video izletmiştim. Orada bir problem vardı. Mesela bir soru vardır. $a.b$ çarpımında her bir terim bir artırıldığında çarpım ne kadar artar? ÖSYM bunu sorduğu zaman a tane park yapılmak isteniyor. Her parka da b tane ağaç dikilecektir. Ama sonradan karar değiştiriyorlar. Park sayısını bir artıralım, ağaç sayısını bir artıralım. Ne kadar bir artış olur. bu bir laf kalabalığıdır. O soru ile bu soru arasında bir fark yok. ÖSYM’nin yaptığı bundan sonra bu. Bu yıl fark edilir şekilde değişti. Öğrencilerin ezberlemelerinin önüne geçildi. Öğrencinin muhakeme yeteneği yoktu. Şimdi en azından klasik soruları zaten bilecek ve yorumlayacak ondan sonra. Şimdi bu soru bir nevi ticaret maksimum kar onlarla ilgili bir şey. Şimdi burada normal şartlarda bizim başlangıcımız 1000.40 dır.”

M1 öğretmen “Bu problemin türev sorusu olduğunu anlaması en önemli noktadır. Diğer türlü parabol sorusu olarak yapabilir. Tepe noktası fikri en fazlayı çağrıştırabilir.” açıklaması ile “parabol olarak düşünme” ve “türev yardımıyla düşünme” kategorilerini vurgulamıştır. M1 öğretmenin öğrencisi Ö1’in de benzer açıklamalar yaptığı söylenebilir. Ö1 “Burada önemli olan nokta toplam geliri yazıp, tepe noktasını bulacağımızı bilmek.” açıklaması ile aynı AN’leri belirtmiştir.

M2 “Burada önemli olan nokta denklemi kurmaktır.” açıklamasıyla öğrencisi S2 “Bence burada güzel olan şey, gelirin denklemini yazmak.” açıklaması ile “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazma” kategorisini ANolarak belirlemiştir. Ayrıca S2 “Her 5 tl lik artışa k demek, oranı kurmak süper bir şey.” diyerek “adlandırma yapma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M3 “Burada önemli nokta fonksiyonu yazmak. Gerisi kolay zaten. Mesela bunun da benzeri çıktı. Öğrenciler ÖSYM sorunlarını çözüp ne istediğini anlamaları lazım. Şu sorunun çok benzeri var. Burada “yaptığı her 5 TL’lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma” Yani şu ikisinde de ortak değişken olmasını yorumlayarak o değişkene x denmesi önemli noktadır. Sözel problemlerde de aynı şeyi yapıyoruz. Ortak değişkeni belirleyip denklemi kuruyoruz.” açıklaması ile “adlandırma yapma” ve “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorilerini AN olarak belirlemiştir. M3 “Türev sorusu olduğunu en fazla kelimesinden anlaşılacağını düşünüyorum.” diyerek “türev yardımıyla düşünme” kategorisini anahtar nokta olarak belirlememiştir. M3’ün öğrencisi S3 “Burada önemli nokta denklemi kurmaktır.” diyerek “toplam gelir ifadesini tek değişkene bağlı yazma” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M4 “Bu soruyu Salı günü 12.sınıf öğrencilerinden birisi bana sordu. Öğrenci ile beraber yorumlayarak sonuca ulaştık.” diyerek çözüme başlamıştır. M4 “öğrenci geliri nasıl hesaplayacağını bilmiyordu. Benim param var, paramın üzerine katılanla beraber tamamını mı düşüneceğim şeklinde soruyla geldi. Hayır gelir o değil dedim. Haftalık girdiğim ders saatine göre aldığım ücreti örnek verdim anladı. O geliri karlı satış gibi düşünmüş.” açıklamasını yapmıştır. M4 “geliri hesaplamayı bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M4 “Daha sonra kişi sayısını bilmiyoruz. bir şey diyelim” diyerek “adlandırma yapma” kategorisinin altını çizmiştir. Problemde önemli olan noktaları bu şekilde belirledikten sonra son sınıf olduğu için “en fazla, en geniş, en büyük kelimesi türeve yönlendiriyor” diyerek başka önemli nokta olmadığını söylemiştir. M4’ün öğrencisi Ö4 “adlandırma yapma” ve “parabol olarak düşünme” kategorisini AN olarak belirlemiştir.

M5 “Burada en büyük şey artış sayısına x demektir. Her 5 TL’lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlendiği için kişi sayısı ile ücretin birbiri ile ilişkili olması, onda değişim olduğunda onda da olması aynı bir değişkenle ifade etmeye itebilir.” diyerek “adlandırma yapma” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M5 “Geliri ücret ile kişi sayısının çarparak bulacağını biliyorsa problemi çözecektir.” diyerek M1 ile benzer olarak “gelir hesaplamayı bilme” kategorisini AN olarak belirlemiştir. M5’in öğrencisi S5 “Bu

problemin önemli noktası toplam gelir ifadesini yazmaktır. Artış sayısına k demek önemli. Buradan bir parabol denklemi elde etmesi lazım.” diyerek benzer AN’lere değinmiştir.



BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde; araştırmanın problemlerinden elde edilen sonuçlar ilgili literatür karşılaştırılarak tartışılacak, yapılacak çalışmalar için öneriler verilecektir.

5.1. Birinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler

Birinci alt problem “Matematik öğretmenlerinin problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumları nasıldır?” şeklinde ifade edilmiştir.

Çalışmadan elde edilen bulgular göz önüne alındığında katılımcı öğretmenlerin böyle bir süreci yaşamalarının problem çözme süreçlerinde olmazsa olmaz bilgiler yani AN’ler ile ilgili farkındalıklarının oluşmasına katkı sağladığı söylenebilir. Deney süreci sonrasında katılımcı öğretmenlerden M5 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Bu yüzden bu sene polinom konusunu işlerken çıkmış soruları çözüp bu noktaları göstereceğim. Bence biz de göstermeliyiz artık bunu. Daha çok birinci yol gibi çözdüğümüz için hep o yoldan gitmeye çalışıyorlar. Bu sene o yüzden bunu göstereceğim.”(M5).

Görüldüğü gibi M5, AN’lerin öneminden ve gerekliliğinden bahsetmiştir. Katılımcı öğretmenlerle yapılan görüşmelerde AN’leri belirlemeye yönelik “kritik noktalar neler”, “olmazsa olmaz noktalar neler” şeklinde sorular yöneltilmiştir. Sadece sorular yönelterek kendi kendilerine düşünmeleri ve yargılamaları sağlanmıştır. M5 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Biz aslında soruyu yazıyoruz çözüyoruz da asıl istediğimiz bu mu. Aslında neyi öğrenmesi gerektiğini vurguluyor muyuz? O yüzden bu önemli noktaları vurgulamak çok önemli. Aslında öğrenciye neyi öğretmek istediğimiz arka planda kalıyor. Öğrenci öğretmenim siz yaparken anlıyoruz ama biz neden yapamıyoruz? Siz nereden başlayacağınızı nasıl biliyorsunuz? gibi sorular sorabiliyor.”(M5)

Derste kullanılan dersin amacı, tahtaya yazılan bilgiler ya da ders kitaplarında kullanılan altı çizili ya da italik sözcükler öğrencilerin önemli veya önemsiz bilgiyi ayırt etmelerine

yardımcı olabilir. Fakat öğrenciler zaman zaman bunlara yalnızca göz gezdirir ya da onları yanlış yorumlayabilirler. Kimi durumlarda da kullanışsız oldukları için öğrenciler dersin ana fikrini tanımlamakta sorun yaşayabilir. Özellikle de öğrencilerin konular hakkındaki altyapıları yetersiz ise bu durum yaşanabilir (Byrnes, 1996). Birçok öğrenci odaklanacakları bilgileri seçmede yüzeysel stratejiler kullanmaktadır. Örneğin her paragrafın ilk cümlesine bakarlar ya da formüllere odaklanırlar ve genellikle de sonuçtaki önemli fikirleri kaçırmaktadır (Mayer, 1984).

Öğrenciler çoğunlukla belirli bir zaman diliminde uzun süreli hafızaya depolayabileceklerinden daha fazla bilgiyle karşılaşmaktadırlar. Sonuç olarak da, öğrenmek ve çalışmak için hangi bilgilerin en önemli olduğunu belirlemeleri gerekmektedir. Örneğin, ana fikirleri gereksiz detaylardan ayırmaları gerekmektedir. Özellikle de, öğrencilerden daha geniş bir perspektife sahip öğretmenlerin daha önemli bilgileri belirtmesi öğrencilerin teşvik edilmesinde yarar sağlayacaktır (Alexander & Jetton, 1996).

Çalışmadan elde edilen bulgular göz önüne alındığında bazı durumlarda katılımcı öğrenciler problem çözme sürecini tamamlayabilmeleri için matematik öğretmenlerinin belirlediği AN'ler dışında bir AN'ye ihtiyaç duydukları görülmüştür. Eğer öğrenciler problem çözerken yüzeysel bir strateji kullanıyorlarsa yani benzer bir problemin çözümünden yararlanıp verilen değerleri değiştiriyorsa bu şekilde oldukça sınırlı bir öğrenme gerçekleşmektedir Öğrencinin problem çözümünden öğrencinin neyi ve nasıl öğrendiği, öğretmenin problem ile ilgili detayları ve yapıyı sağlamasına ve problemin çözüm yoluna bağlı olmaktadır (Lithner, 2003). Bu nedenle öğretmenler, öğrencilerin neyi öğrenmeye ihtiyaçları olduğunu ve nasıl öğrenmeyi denediklerini göz önüne almalıdır. Öğretmenler etkili bilişsel süreçleri teşvik etmek ve desteklemek için pek çok şey yapabilir. Öğretmenler öğrencilerin matematik problemleri ile ilgili nasıl düşündüklerini inceleyerek birçok değerli bilgi edinebilirler.

Öğretmenlerin planlarına rağmen, öğrenciler sınıfta, işleyip hatırlayabileceklerinden çok daha fazla bilgiyle karşılaşmaktadır (Brophy, 2008). Bu yüzden öğrencilere yardım etmek için gerekli ve gereksiz bilgileri ayıklamak önemlidir. Öğretmenler çok fazla ayrıntıya girmeden, detaylandırmak ve açıklamak için AN'lerden faydalanabilir. Böylece öğrenciler neye odaklanmaları konusunda iyi bir yargıya varabilir. Çok fazla bilgi sunulduğu zaman öğrenciler bu bilgiyi hatırlamayacaktır (Mayer R. E., 2010a). Katılımcı öğretmenlerden M1 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Önceki konunun etkisi kaybolurken, asıl önemli olan gölgede kalıyor.”

Öğrenciler neyin önemli olduğunun belirlenmesi hususunda rehberliğe ihtiyaç duyabilir. Öğretim çok fazla bilgi sağladığında öğrenciler hangi şeylerin en önemli olduğuna karar verirken güçlük yaşayabilir (McCrudden & Schraw, 2007). Öğretmenler AN’ler ile desteklenmiş problem çözme görevleri veya ders tasarlama konusunda öğretimi düzenleyebilir.

Çalışmadan elde edilen bulgular göz önüne alındığında katılımcı öğretmenlerin problem çözme süreçlerinde aynı AN’leri belirlediği durumlar görülmüştür. Katılımcı öğretmenlerden farklı çözüm yolu için farklı AN’nin belirlendiği durumlar da gözlenmiştir. Bu durum AN’nin çözüm yolu değiştiğinde değişebilme özelliği ile uyumlu görülmüştür. Öğrencilerin bu noktaları bildikleri durumlarda aynı bağlamda diğer yeni problemlerin çözümünde başarılı olabilecekleri ifade edilmiştir. Çalışmada adı geçen AN’ler benzer problemler için ipucu sağlayan basit algoritmalarından farklıdır. Çünkü algoritma ezbere dayalı olarak temel mantığını anlamadan öğrenildiğinde düşünmeden uygun olmayan biçimde kullanılabilir (Carr, 2010). AN’ler problemin ilgili olduğu öğrenme alanı ile ilgili tanım, teorem, kavram ve fikirlerden oluşmaktadır. AAN’ler ile AN’ler desteklenerek kavram ve fikirler arasındaki ilişkiler sağlanmıştır. Matematik programı incelendiğinde AN’lerin kazanımlar ile örtüştüğü görülmüştür. Katılımcı öğretmenlerden M1 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Öğrencilerin ezberlemelerinin önüne geçildi. Öğrencinin muhakeme yeteneği yoktu.”

AN’lerin belirlenmesi ile öğrencilerin problemi doğru bir şekilde çözebilmeleri hem de AN’leri destekleyen AAN’ler ile birlikte problem çözme sürecinde en temel noktalara dikkat çekilmiştir. Üstbilişsel becerileri zayıf olan öğrencilerin bilişsel ve üstbilişsel gelişimlerini sağlamada öğretmene daha çok ihtiyaç duydukları ifade edilmiştir. Özellikle, başarısız öğrencilerin başarılı öğrencilere yaklaşması için onlarla ilgilenen, farkındalıklarını ve üstbilişsel becerilerini geliştirecek öğretmenlerin öneminin büyük olduğu belirtilmiştir (Jager, Jansen & Reezigt, 2005). Bu durumda öğretmenler öğrencilerin problem çözmede AN belirleme durumlarına uygun bilişsel ve üstbilişsel süreçleri birlikte kullanabileceği matematiksel görevler sunabilir, öğretim ortamını bu ölçütler çerçevesinde düzenleyebilir.

5.2. İkinci Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler

İkinci alt problem “Lise öğrencilerinin problem çözme sürecinde AN’leri belirleme durumları nasıldır?” şeklinde ifade edilmiştir.

Literatür gözden geçirildiğinde anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında matematik öğretmen adaylarının, ispat yapma performanslarının arttığı gözlemlenmiştir. Anahtar nokta ve fikirlerin matematik öğretmen adaylarının ispatları yapabilme performanslarına katkı sağladığı belirtilmiştir (Karaoğlu, 2010). Öğrencilerin olgun bir ispat görüşüne sahip olmaları için anahtar fikirleri müfredatın bir parçası yapmak gerektiği ifade edilmiştir (Raman, 2003).

Öğrencilerden problem çözmede güçlük yaşadıkları anda katılımcının ilerleyemediğini ifade ettiği anda araştırmacı tarafından AN’ler kendilerine sunulmuştur. Öğrenci bu aşamadan sonra problemin çözümüne devam edebilmiştir. Daha sonra katılımcı problem çözme sürecinin bittiğini ifade ettikten sonra AN’leri belirlemeye yönelik sorular araştırmacı tarafından katılımcıya yöneltilmiştir. Bu oturumlarda araştırmacının gözlemlediği durumlardan birisi katılımcı öğrencilerden güçlük yaşadığı noktayı AN olarak belirlememesidir. Maalesef tüm yaş gruplarındaki birçok öğrenci kendi kavramalarını dikkatli bir şekilde izlememektedir (Dunlosky & Lipko, 2007). Bunun sonucunda, bildikleri ya da bilmedikleri şeylerden çoğunlukla habersizdirler ve aslında anlamadıkları şeyleri anladıklarını sanmaktadırlar (Zhao & Linderholm, 2008). Üstbiliş kavramı incelendiğinde izleme eylemi, bir durum ve olay karşısında eylemi gerçekleştirenin performansı değerlendirmesi olarak tanımlanmaktadır (Smith & Kosslyn, 2007). İzleme eylemleri, bilişsel ve üstbilişsel eylemlerin süreç boyunca etkilerinin gözlemlendiği bilinçli bir takibi gerektirmektedir. Bu bağlamda süreçteki adımlar izlenmekte, yapılanlar hakkında yargılara varılmakta ve anlık sorgulamalar yapılmaktadır. İzleme sonucunda alınan kararlar hem bilişsel hem de üstbilişsel eylemlerde değişimlere olanak sağlamaktadır (Hıdıroğlu, 2018). Dolayısıyla öğrencilerin AN belirleme durumlarının geliştirilmesini sağlayacak stratejiler geliştirilebilir.

Çalışmada kombinasyon ile ilgili problemi çözme sürecinde katılımcı öğrencilerden S2 güçlük yaşamıştır. Katılımcı öğrenciye araştırmacı tarafından öğretmenin belirlediği AN sunulmuştur. S2, AN yardımıyla bu güçlüğü aşarak problemin çözümüne devam etmiştir. Araştırmacı katılımcı öğrenciden problem çözme sürecinde AN’leri belirlemesini

istediğinde S2 bu noktanın önemli bir nokta olduğunu düşünmemiştir. Deney sürecinde katılımcı öğrencilerden S2 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Bu problemde önemli nokta bence soruyu anlamaktı. Ben açıkça söyleyeyim ilk başta soruyu anlamadım yani.”

Dolayısıyla öğrenciler problem çözme görevlerinde kötü performans sergilediklerinde şaşırabilmektedir (Hacker, Bol, Horgan, & Rakow, 2000). Çalışmadan elde edilen bulgular göz önüne alındığında katılımcı öğrencilerden S2 polinomlar ile ilgili problemi çözmede güçlük yaşamıştır ve bu duruma bir anlam verememiştir. Deney sürecinde katılımcı öğrencilerden S2 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Ben böyle bir soru hiç görmedim. Ben baya bir soru çözdüm bunlarla ilgili ama. Polinomlar ile ilgili aşırı derecede soru çözdüm. 10. Sınıfla ilgili birçok yardımcı kitap çözdüm. Aslında düşündüğüm zaman tamam diyorum. Ama göremedim.”

Öğrenciler çok iyi bildikleri şeyleri problem çözme görevlerinde neden yapamadıkları ile ilgili şaşkınlık yaşayabilmektedir. Öğretmenler öğrencilere belli sorular yönelterek öğrencilerin problem çözme görevlerinde olmazsa olmaz bilgileri iyi bir şekilde kavrayıp kavrayamadıklarını anlayabilir.

Öğrencilerin karmaşık görevleri yerine getirmek için gerekli bilgi ve becerilere sahip iken bunları kullanmamaktadır. Bu durum gerekli bilgi ve becerileri uygulamak için motive edilmedikleri, kendilerine güvenmedikleri ve bazen de durumun bu becerilerin kullanımını gerektirdiğini kabul etmedikleri veya bilmedikleri için ortaya çıkmaktadır (Hartman, 2001a).

Çalışmada elde edilen bulgular göz önüne alındığında katılımcı öğrencilerden S2'nin polinomlar ile ilgili problemde yaşadığı güçlüğü katılımcı öğrencilerden S1 ve S3'ün belirlediği AN ile aşabilmiştir. Katılımcı öğrenci S2'nin öğretmeni olan M2 polinomlar ile ilgili problemi çözüm sürecinde S2'nin güçlük yaşadığı bu noktayı AN olarak belirlememiştir. Öğretmenler hem bilişsel hem de üstbilişsel davranışları sergilemekte öğrenciler için bir model olmaktadır. Fakat bazı durumlarda diğer öğrenciler bazen öğretmenlerden daha iyi model olabilmekte ve arkadaşlarını etkileyebilmektedirler. Bu nedenle işbirliğine dayalı çalışmalar yapılarak üstbilişsel bilgi ve becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlanabilir. Benzer şekilde üstbilişsel bilgi ve beceriler ile işbirliğine dayalı çalışmaların etkililiği artırılabilir. Literatür gözden geçirildiğinde yapılan birçok çalışmanın da bu görüşü desteklediği görülmüştür (Carr, 2010).

Öğrenciler duydukları ya da okudukları bilgilerin ne kadarını sonradan hatırlayabilecekleri konusunda çoğunlukla hatalı ve fazlasıyla olumlu değerlendirmeler yapabilmektedir (Dunlosky & Lipko, 2007). Öğrenciler kavrayışlarını yalnızca o esnada değil, üzerinden biraz zaman geçtikten sonra da değerlendirmelidir. Bu aşamada problem çözme süreçlerinde AN'lerin belirlenmesinin bu duruma katkı sağlayacağı söylenebilir. Problem çözme süreçlerinde AN'lerin belirlenmesi ile öğrenciler süreci değerlendirebilirler. Böylelikle öğrencilerin öğrendikleri ve öğrenmedikleri şeyleri bilme olasılıkları artacaktır.

Pek çok öğrenci içeriği nasıl organize edeceğini, birbiriyle ilişkili ve bağlantılı olarak içeriği nasıl düşüneceğini bilmekte zorluk yaşayabilir. Çalışılan dersin içinde düşünmeyi öğrenmenin yolu temel kavramları içselleştirmek olduğu göz önüne alındığında AN belirleme durumlarının buna katkı sağladığı söylenebilir. Çünkü AN'leri belirleme bakış açısına sahip olan bir kimse o konunun altında yatan temel kavramları ve fikirleri bulabilir, onunla ilişkili olan AAN'leri ifade edip, kendi örnekleriyle veya kendi kelimeleriyle açıklayabilir.

Kavramlar ve fikirler ayrılmaz bir bütün oluşturmaktadır. Yalnızca yüzeysel olarak öğretilebilecek konulardan oluşan uzun bir liste gerektiren okul müfredatları bunu karşılamayacaktır (Linn, 2008). Öğrenciler problem çözme stratejilerini ezbere dayalı olarak öğrendiklerinde, bunları düşünmeden kullanmakta ve bunun mantıklı olarak uygulanabileceği birçok durumu fark etmemektedirler (Carr, 2010).

AAN'ler ile desteklenmiş anahtar noktalar bir ders kitabındaki bir formülün ötesinde, problemin çözümünde yapılan planların çerçevesinde etkili olabilir, başka problemlerin çözümünde önemli ve olmazsa olmaz bilgiler olarak karşımıza çıkarak problemin çözümünde bize yardımcı olabilir. Deney süreci sonrasında katılımcı öğrencilerden S5 polinomlar ile ilgili problemleri incelediğini belirterek AN'lerin problem çözme sürecine olan katkısını paylaşmıştır. Katılımcı öğrencilerden S5 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Ben direk temel yoldan bizden istediğini kısa sürede buldum. Bu polinomların temel taşı gibi bir şey. Diğer türlü çıkmaza girebilirdim. Diğer türlü bir soru için en az altı dakika kaybedecektim. O yüzden bu yöntemi daha doğru buluyorum. Öğrencilerin bilmesi gerektiğini düşünüyorum.”

Katılımcı öğrencilerden S5 deney süreci içerisinde belirlenen AN'leri başka polinomlar ile ilgili problem durumlarına uygulamıştır. S5, AN'leri yardımıyla problem çözme sürecinde gereksiz işlem yapmamıştır ve sonuca kısa sürede ulaşmıştır.

5.3. Üçüncü Alt Problem ile Elde Edilen Bulgular ile İlgili Sonuç ve Öneriler

Üçüncü alt problem ise “Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problem çözmede AN’leri belirleme davranışları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?” şeklinde ifade edilmiştir.

Çalışmada matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin AN belirleme durumları incelendiğinde katılımcı öğretmenlerden M1, AN’lerin formül olamayacağını belirtmiştir. Katılımcı öğretmenlerden M1 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Toplam fark formülü artık öğrenci zaten çok fazla örnek çözdüğü için ezberlemiş oluyor. Yani zaten bu formülden kurtulma şansı yok.”

Öğrenciler temel kavramları öğrenmeli, daha sonra bu kavramlar arasındaki ilişkileri kurabilmelidir. Aksi takdirde öğrenciler ezbere öğrenmeye yönelebilir. Bu şekilde öğrenciler fikirleri kullanabilir ve anlamlandırabilir (Woolfolk, 1993). Problem çözme süreçlerinde AN ve ilişkili olduğu AAN’ler ile anlamlı öğrenmeye katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin matematiksel problem çözme görevlerinde AN belirleme durumları teşvik edilebilir.

Katılımcı öğrencilerden S5 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Formül sayıyı elde etmede önemli ama bilen bir öğrenci için kritik değildir. Formülü bilen bir öğrenci bu soruyu garanti çözer diyemeyiz.”

Öğrenciler ezbere dayalı bir öğrenme yerine gerekli bilgileri anlamlı bir yolla öğrenmelidir. Katılımcı öğrencilerden S5’in de belirttiği gibi formülleri bilmek problem çözmede başarıyı getirmeyebilir. Formülleri ve gereksiz birçok bilgiyi bilmek yerine AN’leri ve onları oluşturan AAN’leri gerçekten anlamaya çalışırlarsa sahip oldukları bu kavramlar, fikirler ışığında problem çözmede başarılı olabilirler. Öğrencilerin fikirleri anlamlandırmalarını sağlayacak bilişsel süreçler öğrencinin kontrolündedir. Öğrencilerin bu süreçte bilişlerini olduğu kadar üst bilişlerini kullanmaları; bilgiyi nasıl, nerede ve ne zaman kullanmaları açısından önemli olmaktadır. Katılımcı öğrencilerden Ö5 bu durumu aşağıdaki gibi belirtmiştir.

“Sorularda neyi kullanacağımız açık olmuyor. Bunu bizim bulmamız gerekiyor.”

Çalışmada matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin problemleri çözme sürecini tamamlamasından ziyade matematiksel kavramlar ve fikirler arasındaki ilişkileri düşünmeleri üzerinde durulmuştur. Öğrenilen kavram ve fikirleri birleştirmek

öğrendiğimiz bilgilerin ötesine geçen çıkarımlar yapmamıza yardımcı olabilir. Öğretmenler, öğrencilerinin matematiğin temel kavram ve ilkeleri ve problem çözmek için gerekli prosedür arasında ilişki kurmalarına yardımcı olmalıdır (Carr, 2010). Düşünmeyi öğrenmenin yolu temel kavramları içselleştirmek olduğu göz önüne alındığında anahtar nokta belirleme durumlarının buna katkı sağladığı söylenebilir.

Çalışmada elde edilen bulgular göz önüne alındığında problem çözme süreçlerinde AN'lerin belirlenmesi aynı bağlamda yeni problem durumları bakış açısı sağladığı öğretmen ve öğrenciler tarafından belirtilmiştir. Öğretmenler ve öğrenciler süreç boyunca kullandıkları kavram, tanım, teorem ve fikirleri gözden geçirerek çözüm sürecinde en uygun bilgi ve stratejiyi belirlemeye çalışmıştır. Problem çözme süreci boyunca uygun bilgi ve stratejilerin kullanılması için öğrenciler ve öğretmenler üst bilişi kullanmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin üstbilişsel farkındalıklarını geliştirmelerine yardımcı edecek şekilde öğretmenler de rehberlik etmelidir. Öğretmenler problem çözme süreçlerinde kritik rol oynayan AN'leri öğrencilerin kazanmaları konusunda rehberlik edebilir.

Literatür gözden geçirildiğinde özellikle matematik eğitiminde yapılan son çalışmalar öğrencilerin problem çözme sürecinde doğru çözüme ulaşma çabasını değil, öğrencilerin problem çözücü olarak üst bilişsel farkındalıklarını geliştirmeye odaklanmıştır. Çünkü çoğu araştırmacı üstbilişsel farkındalığın öğrencinin öğrenmesinde ve başarısında önemli bir rol oynadığını vurgulamaktadır (Sperling, Richmond, Ramsay, & Klapp, 2012). Üst bilişsel farkındalığı olan öğrenciler problem çözme sürecinde hangi bilgi ve stratejileri nasıl ve ne zaman etkili bir biçimde kullanabileceklerini bilmektedir ve bilişin düzenlenmesi ile de öğrenciler problem çözme süreçlerini etkin bir şekilde izlemelerini, kontrol etmelerini ve değerlendirmelerini sağlamaktadır (Radzali, Meerah, & Zakaria, 2010). Üstbilişsel farkındalığın bütün bileşenlerinin öğrencilerin başarılarını geliştirmelerine yardımcı olabilecek unsurlar içerdiği belirtilmektedir (Young & Fry, 2008).

Çalışmada katılımcı öğrencilerin bazıları ile tüm süreç boyunca problemler ile ilgili görüşmeler yapılırken bazıları ile yapılamamıştır. Bunun nedeni ise katılımcı öğrencilerden bazılarının matematik programına göre problem ile ilgili kazanıma sahip olmamasıdır. Dolayısıyla katılımcı öğretmenlerin belirlediği çalışmaya katılan öğrenci sayısı öğretmenlere göre farklılık göstermiştir. Araştırmanın veri toplama aracında yer alan problemler ÖSYM tarafından hazırlanan üniversiteye giriş sınavında sorulan matematiksel problemlerdir. Bu nedenle katılımcı öğretmenin 12.sınıf düzeyinde bulunan bir öğrencisi

Çalışmada yer almışsa eğer bütün problemler ile ilgili görüşmeler ğrenci ile yapılmıştır. Aksi halde sınıf seviyesine göre öğrencinin ilgili kazanıma sahip olduğu problemler ile görüşmeler yapılmıştır.

Bu çalışmanın sınırlılıklarından hareketle ilerideki çalışmalar için şu önerilerde bulunabilir:

- ğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin ve ğretmenlerinin problem çözme süreçlerinde AN belirleme durumları incelenebilir.
- Özel yetenekli öğrencilerin ve ğretmenlerinin problem çözme süreçlerinde AN belirleme durumları incelenebilir.
- Yurt içi ve yurt dışında yapılan çeşitli sınav türlerine ait problem çözme süreçlerinde AN belirlenmesi durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematiksel kavramların künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Avargil, S., Lavi, R., & Dori, Y. J. (2018). Students' metacognition and metacognitive strategies in science education. *Cognition, Metacognition, and Culture in STEM Education*, 33-64.
- Azevedo, R. (2009). Theoretical, methodological and analytical challenges in the research on metacognition and self-regulation: A commentary. *Metacognition & Learning*, 87-95.
- Blakey, E. ve Spence, S. (1990). Developing Metacognition, ERIC Clearinghouse on Information Resources Syracuse.
- Bonner, S. M. (2013). Mathematics strategy use in solving test items in varied formats. *The*, 409-428.
- Brady, R. R. (1991). A close look at student problem solving and the teaching of mathematics. *School Science and Mathematics*, 4.
- Breed, B., Mentz, E., & Westhuizen, G. v. (2014). A metacognitive approach to pair programming: Influence on metacognitive awareness. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 33-60.
- Brophy, J. (2008). Developing students appreciation for what is taught in school. *Educational Psychologist*, 132-141.
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston: Allyn&Bacon.
- Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problemsolving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1); 45-75.
- Carr, M. (2010). The importance of metacognition for conceptual change and strategy use in mathematics. In H. S. Waters & W. Schneider (Eds.), *Metacognition, strategy use, and instruction* (pp. 176-197). Newyork: Guilford Press.
- Coles, A. (2013). On metacognition. *For the Learning of Mathematics*, 21-26.

- Cowan, P. (2006). *Teaching mathematics: A handbook for primary and secondary* . New York: Taylor & Francis Group .
- Çetin, A. Y. (2017). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri (Doktora Tezi)*. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum. <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Demircioğlu, H. (2008). *Matematik öğretmen adaylarının üstbilişsel davranışlarının gelişimine yönelik tasarlanan eğitim durumlarının etkililiği (Doktora tezi)*. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara. <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Desoete, A., Roeyers, H. ve Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disability*, 34(5), 435–449.
- DiMatteo, R. W., & Lester, F. K. (2010). The role of problem solving in the secondary school mathematics classroom. In J. Lobato & F. Lester (Eds.). *Teaching and learning mathematics: Translating research for secondary teachers* (pp 7-12). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics. .
- Dunlosky, J., & Lipko, A. R. (2007). Metacomprehension: A brief history and how to improve its accuracy. *Current Directions in Psychological Science*, 228-232.
- Ellefson, B., Foster, G., Manson, A. ve Werner, J. (2002). Metacognition Prepared for Edmonton Regional Consortium.
- Esan, F. (2015). Cooperative problem solving strategy and students ' learning outcomes in algebraic word problems : A Nigerian case. *International Journal for Infonomics* , 986-989.
- Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 906-911.
- G.Camahalan, F. M. (2006). Effects of self-regulated learning on mathematics achievement of selected southeast Asian children. *Journal of Instructional Psychology*, 194-205.
- Glaserfeld, E. v. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. London: Falmer Press.
- Grant, G. (2014). *A metacognitive-based tutoring program to improve mathematical abilities of rural high school students: An action research study. Doctoral Dissertation*. Capella University.
- Gick, M. L. (2013). Problem solving strategies. *Educational Psychologist*. 99-120.

- Grizzle-Martin, T. (2014). *The effect of cognitive- and metacognitive-based instruction on problem solving by elementary students with mathematical learning difficulties. Doctoral Dissertation.* Walden University, College of Education.
- Hacker, D. J., Bol, L., Horgan, D. D., & Rakow, E. A. (2000). Test prediction and performance in a classroom context. *Journal of Educational Psychology*, 160-170.
- Handel, M., Artelt, C., & Weinert, S. (2013). Assessing metacognitive knowledge:. *Journal for Educational Research Online*, 162-188.
- Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: An introduction, *Instructional Science*, 26, 1-3.
- Hartman, H. (2001a). Developing Students' Metacognitive Knowledge and Strategies. In. H. Hartman (Eds.), *Metacognition in learning and instruction: Theory, research, and practice* (pp. 33-68). London: Kluwer Academic Publishers.
- Hassan, N. M., & Rahman, S. (2017). Problem solving skills, metacognitive awareness, and mathematics achievement: A mediation model. *The New Educational Review*, 201-212.
- Hennessey, M. G. (1999). Probing the dimensions of metacognition: Implications for conceptual change teaching-learning. *Paper presented at the annual meeting of the National Association for Research in Science Teaching.* Boston. MA.
- Hıdıroğlu, C. N. (2018). Üstbiliş kavramına ve problem çözme sürecinde üstbilişin rolüne eleştirel bir bakış. *Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 32, 87-103.
- Howland, M. (2001). *Sixty-grade students' use of schema knowledge in word problem solving* . San Jose State University: Faculty of the Division of Teacher education.
- Jager, B., Jansen, M. & Reezigt, G. (2005). The development of metacognition in primary school learning environments, *School Effectiveness and School Improvement*, 16, 179-196.
- Kafadar, H. (2012). Cognitive model of problem solving. *New Symposium Journal*, 195-206.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları. Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kramarski, B. (2008). Promoting teachers' algebraic reasoning and self-regulation with metacognitive guidance. *Metacognition and Learning*, 83-99.
- Larkin, S. (2010). *Metacognition in young children.* London : Routledge.

- Lee, C. B., Teo, T., & Bergin, D. (2009). Children's use of metacognition in solving everyday problems: An initial study from an Asian context. *The Australian Educational Researcher*, 89-102.
- Lee, P. A., & Schmitt, M. C. (2014). Teacher language scaffolds the development of independent strategic reading activities and metacognitive awareness in emergent readers. *Reading Psychology*, 32-57.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Greenwich, CT: IAP.
- Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr, H. (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501-518). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lester, F. K. (2013). "Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction". *The Mathematics Enthusiast*, 245-278.
- Linn, M. C. (2008). Teaching for conceptual change: Distinguish or extinguish ideas. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook on conceptual change* (pp. 694-722). New York: Routledge.
- Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. . *Educational Studies in Mathematics*, 29-55.
- Maviş M., Gül G., Solaklıoğlu H., Tarku H., Bulut F., Gülşen M. (2018). *Ortaöğretim 10.matematik ders kitabı*. Ankara: Meb Yayınları. <http://img.eba.gov.tr/680/945/905/3d6/a94/994/8d4/8ab/c6a/7dc/90f/ff5/fba/53a/013/6809459053d6a949948d48abc6a7dc90ff5fba53a013.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Mayer, R. (1984). Aids to text comprehension . *Educational psychologist*, 30-42.
- Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59, 14-19.
- Mayer, R.E. (2010) Fostering scientific reasoning with multimedia instruction. In H.S. Waters & W. Schneider (Eds.), *Metacognition, strategy use, and instruction* (pp. 160-175). New York: Guilford Press.
- Moshman D., (2018). Metacognitive theories revisited. *Educational Psychology Review*, 30, 599-606.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston/VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niederhauser, D. S. (2008). Educational hypertext. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. van Merriënboer & M. P. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology*. (pp. 199-210). New York: Erlbaum.

Noushad, P. P. (2007). Cognitions about cognitions: The theory of metacognition. *American International Journal of Contemporary Research*.

Ormrod, J. E. (2012). *Human learning*. Boston: Pearson.

ÖSYM (2006). *Öğrenci Seçme Sınavı Matematik-2 Testi*.
https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/arsiv/2006OSS/oss_mat2.pdf sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2007). *Öğrenci Seçme Sınavı Matematik-1 Testi*.
https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/arsiv/2007OSS/oss_mat1.pdf sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2010). *Lisans Yerleştirme Sınavı-1 Matematik Testi*.
<https://www.osym.gov.tr/Eklenti/279,2010lys1matpdf.pdf?0> sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2011). *Yükseköğretime Geçiş Soru Kitapçığı*.
<https://www.osym.gov.tr/Eklenti/209,2011ygssorularipdf.pdf?0> sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2012). *Lisans Yerleştirme Sınavı-1 Matematik Testi*.
<https://www.osym.gov.tr/Eklenti/180,lys1matematikpdf.pdf?0> sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2016). *Lisans Yerleştirme Sınavı-1 Matematik Testi*.
https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2015/LYS/Sorular/2015_LYS1_MATEMATIK.pdf sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2016). *Lisans Yerleştirme Sınavı-1 Matematik Testi*.
https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2016/LYS/Sorular/2016_LYS1_MATEMATIK.pdf sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2017). *Lisans Yerleştirme Sınavı-1 Matematik Testi*.
<https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2017/OSYS/LYS/LYS1MATEMATIK18062017.pdf> sayfasından erişilmiştir.

ÖSYM (2018). *Alan Yeterlilik Testleri*.
https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2018/YKS/AYT_01072018.pdf sayfasından erişilmiştir.

Panaoura, A., Philippou, G., & Christou, C. (2003). Young pupil's metacognitive ability in mathematics. *Paper presented at the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Retrieved from <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/>.

- Papaleontiou-Louca, E. (2003). The concept and instruction of metacognition. *Teacher Development*, 9-30.
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Social and Behavioral Sciences*, 3169 – 3174 .
- Pierce, W. (2003). Metacognition: Study Strategies, Monitoring, and Motivation.
- Presley, M., & Harris, K. R. (2006). Cognitive strategies instruction: From basic research to classroom instruction. In. P. A. Alexander & P. H. Winne . (Eds.) , *Handbook of educational psychology* (2nd ed., pp. 265-286). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics and metacognition: looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematic*, 236-245.
- Radzali, R., Meerah, T. S., & Zakaria, E. (2010). Hubungan antara kepercayaan matematik, metakognisi dan perwakilan masalah dengan kejayaan penyelesaian masalah matematik. *Jurnal Pendidikan Malaysia*; 1 – 7.
- Raman, M. (2003). Key ideas: Key ideas:What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 319-325.
- Raman, M. & Weber, K. (2006). Key ideas and insights in the context of three high school geometry proofs. *Mathematics Teacher*, 644-649.
- Raman, M. & Zandieh, M. (2009). The case of Brandon: The dual nature of key ideas in the classroom. *Nordisk Matematikdidaktikk*, ISSN 1104-2176, 14(2), 29-47.
- Raman, M., Sandefur J., Birky G., Campbell C., Somers K. (2009). “ Is that a proof?”. An emerging explanation for why students don't know they (just about) have one. Proceedings of CERME 6.
- Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 836-852.
- Santos-Trigo, M., & Machín, M. C. (2013). "Framing the use of computational technology in problem solving approaches". *The Mathematics Enthusiast*, 279-302.
- Schraw, G. & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, 7, 351–371.
- Schraw, G. (2006). Knowledge: Structures and processes. In. P. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 245-263). Mahwah: NJ:Erlbaum.

- Sperling, R. A., Richmond, A. S., Ramsay, C. M., & Klapp, M. (2012). The measurement and predictive ability of metacognition in secondary school learners. *The Journal of Educational Research* , 1-7.
- Swanson, H. L. (1992). The relationship between and problem solving in gifted children. *Roeper Review*, 43-49.
- Tavakoli, H. (2014). The effectiveness of metacognitive strategy awareness in reading comprehension: The case of Iranian university EFL students. *The Reading Matrix* , 314-336.
- Ülgen, G. (2001). *Kavram geliştirme: kuramlar ve uygulamalar*. Ankara: Pegem-A Yayıncılık.
- Vaidya, S. R. (1999). Metacognitive learning strategies for students with learning disabilities. *Education*, 186-191.
- Veenman, M. V. J. (2011). Learning to self- monitor and self-regulate. In R. Mayer & P. Alexander (Eds.) , *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 197-218). New York: Routledge.
- Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modelling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. *Teaching and learning thinking skills. Contexts of learning* , 215-240.
- Victor, A. M. (2004). *The effects of metacognitive instruction on the planning and academic achievement of first and second grade children. Doctoral Dissertation*. Chicago, IL: Graduate.
- Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, 25-48.
- Woolfolk, A. (1993). *Educational psychology*. Boston: Allyn and Bacon.
- Young, J. W.(1951). *A technique for producting ideas*. Chicago: Advertising Publications.
- Young, A., & Fry, J. D. (2008). Metacognitive awareness and academic achievement in college students. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 1-10.
- Zhao, Q., & Linderholm, T. (2008). Adult metacomprehension: Judgment processes and accuracy constraints. *Educational Psychology Review*, 191-206.



EK 1. Araştırma İzni



T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 14588481-605.99-E.853392
Konu : Araştırma İzni

11.01.2018

KEÇİÖREN KAYMAKAMLIĞINA (İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü)

- İlgi: a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün 2012/13 nolu Genelgesi.
b) 17/11/2017 Tarihli ve 80287700-302.08.01/2423 sayılı yazınız.
c) 09/01/2018 Tarihli ve 80287700-302.08.01/47 sayılı yazınız.

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora programı öğrencisi Nur Şebnem ERASLAN'ın "Öğretmenlerin Problem Çözme ve İspatlamadaki Anahtar Nokta ve Fikirleri Belirleme Sistemlerinin İncelenmesi " konulu tez çalışması kapsamında uygulama talebi Araştırma Komisyonumuzca incelenmiş olup ilçenize bağlı Anadolu Lisesinde uygulamanın yapılması Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Uygulama formunun (12 sayfa) uygulama yapılacak sayıda araştırmacı tarafından çoğaltılarak, araştırmanın ilgi (a) genelge çerçevesinde, ilçe milli eğitim müdürlüklerinin sorumluluğunda okul ve kurum yöneticileri de uygun gördüğü takdirde gönüllülük esasına göre yazımız ekinde gönderilen mühürlü uygulama araçlarının uygulanmasına izin verilmesini rica ederim.

Vefa BARDAKCI
Vali a.
Milli Eğitim Müdürü

EK:

Uygulama formu (12 sayfa)

EK 1. (Devam) Araştırma İzni



T.C.
KEÇİÖREN KAYMAKAMLIĞI
İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı :84725282-604.01.01-E.932203
Konu : Araştırma İzni
(Nur Şebnem ERASLAN)

12.01.2018

ANADOLU LİSESİ MÜDÜRLÜĞÜNE KEÇİÖREN

- İlgi: a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün 2012/13 nolu Genelgesi.
b) 17/11/2017 Tarihli ve 80287700-302.08.01/2423 sayılı yazımız
c) 09/01/2018 Tarihli ve 80287700-302.08.01/47 sayılı yazımız.
c) Ankara Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nün 12.01.2018 tarih ve 14588481-605.99.E.853359 sayılı yazısı.

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora programı öğrencisi Nur Şebnem ERASLAN'ın "Öğretmenlerin Problem Çözme ve İspatlamadaki Anahtar Nokta ve Fikirleri Belirleme Sistemlerinin İncelenmesi " konulu araştırması kapsamında uygulama yapma talebinin uygun görüldüğüne dair, Ankara Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nün ilgi (c) yazısı ekte gönderilmiştir.

Söz konusu araştırmanın eğitim ve öğretimi aksatmayacak şekilde gönüllülük esasına dayalı şekilde, yazımız ekinde gönderilen mühürlü uygulama araçlarının uygulanması hususunda;

Gereğini bilgilerinize rica ederim.

Osman KOÇ
Müdür a.
Şube Müdürü

EKLER:

1-Yazı (13 sayfa)

EK 2. Görüşme Formu

Görüşme Formu

Birinci araştırma problemi:

Matematik öğretmenlerinin problem çözme sürecinde anahtar noktaları belirleme durumları nasıldır?

Görüşmeci: Nur Şebnem Bakır

Tarih:

Giriş

Merhaba, benim adım Nur Şebnem Bakır. Bu görüşme ile amacım matematik öğretmenlerinin problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumlarını incelemektir. Meslekteki tecrübeniz ve matematik alanındaki eğitiminiz nedeniyle sizinle görüşmek istedim.

Öğrencilerde problem çözme veya ispatlama süreci karanlık kalmaktadır. Problemlerin çözümünde yanlış başlangıçlar yapmak, onlardan alınan geri kazanımlar, ilgi çekici anlayışlar, öğretmenin yararlandığı yollar öğrencilerden gizli kalmaktadır. Bu süreç açıkça ortaya çıkarılmalıdır.

Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların öğrencilerin matematiksel problem çözme performanslarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla matematik eğitimine katkı sağlaması beklenmektedir.

- Bana bu görüşme boyunca söyleyeceklerinizin tümü gizlidir. Bu bilgileri araştırmacıların dışında herhangi bir kimsenin görmesi mümkün değildir. Ayrıca araştırma sonuçlarını yazarken isminizi kesinlikle rapora yansıtmayacağım.
- Görüşmeyi önceden bahsettiğim gibi kaydetmek istiyorum.
- Bu görüşmenin yaklaşık 50 dakika süreceğini tahmin ediyorum.
- Başlanmadan önce, belirtmek istediğiniz herhangi bir şey var mı? İzin verirsiniz sorulara başlamak istiyorum.
- Problemin çözmek için gerekli olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için olmazsa olmaz olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için kritik olan bilgiler nelerdir?
- Öğrenciler hangi noktaları bilirlerse problemi çözebilir?
- Problemi farklı bir yolla daha çözebilir misiniz?

Görüşme Formu

İkinci araştırma problemi:

Lise öğrencilerin problem çözme sürecinde anahtar noktaları belirleme durumları nasıldır?

Görüşmeci: Nur Şebnem Bakır

Tarih:

Giriş

Merhaba, benim adım Nur Şebnem Bakır. Bu görüşme ile amacım lise öğrencilerinin problem çözme süreçlerinde anahtar nokta belirleme durumlarını incelemektir. Öğretmeninizin seçimi ve matematik dersindeki başarınız nedeniyle sizinle görüşmek istedim

Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların öğrencilerin matematiksel problem çözme performanslarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla matematik eğitimine katkı sağlaması beklenmektedir.

- Bana bu görüşme boyunca söyleyeceklerinizin tümü gizlidir. Bu bilgileri araştırmacıların dışında herhangi bir kimsenin görmesi mümkün değildir. Ayrıca araştırma sonuçlarını yazarken isminizi kesinlikle rapora yansıtmayacağım.
- Görüşmeyi önceden bahsettiğim gibi kaydetmek istiyorum.
- Bu görüşmenin yaklaşık 50 dakika süreceğini tahmin ediyorum.
- Başlanmadan önce, belirtmek istediğiniz herhangi bir şey var mı? İzin verirseniz sorulara başlamak istiyorum.
- Problemin çözmek için gerekli olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için olmazsa olmaz olan bilgiler nelerdir?
- Problemi çözmek için kritik olan bilgiler nelerdir?
- Problemi farklı bir yolla daha çözebilir misiniz?
- Problemin çözümünde en önemli noktalar nelerdir?

Diyalogun akışına göre bu soruların dışında da sorular yöneltilemiştir.

- bunu nasıl yaptın?
- nasıl düşündün?
- ne düşünüyorsun söyler misin?
- başka yol mu düşünüyorsun?

EK 3. Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 LYS 1. Polinomlar ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
a ve b tamsayılar olmak üzere $P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$ $Q(x) = x^2 - 2ax + b$ polinomları için $P(-4) = 0$ $Q(-4) \neq 0$ olduğu biliniyor. $Q(x)$ polinomunun kökleri aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da kökleri olduğuna göre, $b - a$ kaçtır?	1. Problemi anlama: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun kökleridir. -4, $P(x)$ polinomunun köküdür fakat $Q(x)$ polinomunun kökü değildir.	AN 1: $P(x)$ polinomunun köklerinin ve $Q(x)$ polinomunun köklerinin tespit edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun da köküdür. AAN 2: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan üçüncü kökü -4 tür. AAN 3: x yerine a alındığında $P(a) = 0$ ise, a'ya $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir. AAN 4: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunun en fazla n tane kökü vardır.
	2. Çözüm için plan yapma: $Q(x)$ polinomunun iki kökü x_1, x_2 olsun. Bu durumda $Q(x)$ polinomu ikinci dereceden olduğundan $Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ olarak yazılabilir. $P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 ve -4 olsun. Bu durumda $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x + 4)$ olarak yazılabilir. O halde $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$ yazılabilir.	AN 2: Bir $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır. AAN 1: $P(a) = 0$ ise $(x - a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır (MEB, 2018) AAN 2: $P(a) \neq 0$ ise $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ olacak şekilde bir $Q(x)$ polinomu vardır.

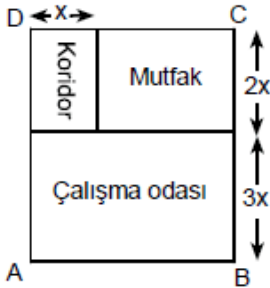
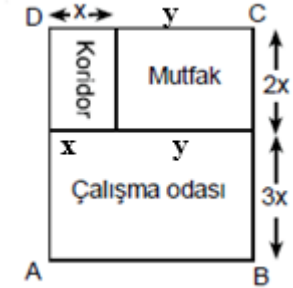
EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 LYS 1. Polinomlar ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	3. Planı uygulama: $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$ ve $P(x) = x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b$ olduğundan $x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4) \cdot Q(x)$ elde edilir. Buradan $Q(x)$ polinomu yerine yazılırsa $x^3 - ax^2 - (b + 2)x + 4b = (x + 4) \cdot (x^2 - 2ax + b)$ $= x^3 + (4 - 2a)x^2 + (b - 8a)x + 4b$ elde edilir.	AN 3: (Çarpanlara Ayırma Fikri) $P(x) = (x + 4)Q(x)$ biçimde ifade edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2, $a \neq 0$ olmak üzere $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçimindedir. AAN 2: $P(x)$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2, $b \neq 0$ olmak üzere $P(x) = b(x - x_1)(x - x_2)(x + 4)$ biçimindedir. AAN 3: Polinomun baş katsayı 1 olduğu için $a = b = 1$ dir.
	Polinomların eşitliği tanımından $-a = 4 - 2a \text{ ve } b + 2 = b - 8a$ elde edilir. O halde $a = 4 \text{ ve } b = 15$ dir. Buradan $b - a = 11$ bulunur.	AN 4: Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit olan polinomlara eşit polinomlar denir (MEB, 2018).

EK 3. (Devam)Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 LYS 1. Polinomlar ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	4. Değerlendirme: Polinomların kökleri ortak olduğundan kökler toplamı veya kökler çarpımı kullanılarak çözüm yapılabilir. $Q(x)$ polinomunun iki kökü x_1, x_2 olsun. Bu durumda $P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2 ve -4'tür. O halde $Q(x)$ polinomunun kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c} = 2a$ elde edilir. $P(x)$ polinomunun kökler toplamı $x_1 + x_2 + (-4) = a$ elde edilir. Buradan $2a + (-4) = -\frac{d}{c} = a$ $a = 4$ tür. $P(-4) = 0$ olduğundan $(-4)^3 - a(-4)^2 - (b + 2)(-4) + 4b = 0$ $-64 - 16a + 4b + 8 + 4b = 0$ $-16a + 8b = 56$ elde edilir. Denklemden $a = 4$ yazılarak $b = 15$ bulunur. O halde $b - a = 15 - 4 = 11$ elde edilir.	AN 1: $P(x)$ polinomunun köklerinin ve $Q(x)$ polinomunun köklerinin tespit edilmesi fikri. AAN 1: $Q(x)$ polinomunun iki kökü aynı zamanda $P(x)$ polinomunun köküdür. AAN 2: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile ortak olmayan üçüncü kökü -4 tür. AAN 3: x yerine a alındığında $P(a) = 0$ ise, a'ya $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir. AAN 4: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunun en fazla n tane kökü vardır. AN 2: (Kök Katsayı İlişisini Kullanma Fikri) $c \neq 0$ ve $c, d, e \in R$ olmak üzere $cx^2 + dx + e = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c}$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{e}{c}$ olur (MEB, 2018). AAN 1: $Q(x) = 0$ ikinci dereceden denklemdir. AAN 2: $P(x) = 0$ üçüncü dereceden bir denklemdir.

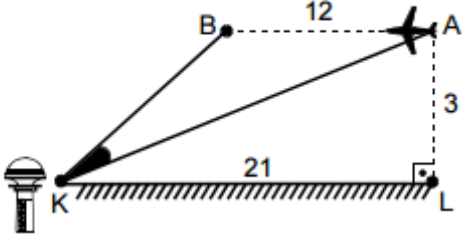
EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2010 LYS 2. Maksimum-minimum ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
 Koridor, mutfak ve çalışma odasından oluşan bir iş yerinin yukarıda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir. Bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 72 metredir. Bu iş yerindeki mutfağın en geniş alanlı olması için x kaç metre olmalıdır?	1. Problemi anlama:  $l(ABCD) = 72$ $ALAN_{MUTFAK}$ en büyük olması durumunda $x = ?$	AN 1: Mutfağın bilinmeyen ayrıtının uzunluğunun x cinsinden ifade edilmesi fikri. AAN 1: Mutfağın alanını ifade etmek için eksik bilginin tespit edilme fikri. AAN 2: Mutfağın bilinmeyen ayrıtının uzunluğuna y denmesi fikri.
	2. Çözüm için plan hazırlama: $l(ABCD) = 72$ olduğundan $2 \cdot (5x + (x + y)) = 72$ dir. Buradan $6x + y = 36$ elde edilir. O halde $y = 36 - 6x$ dir. $ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y$ ifadesini en büyük elde etmek için öncelikle tek bir değişkene bağlı fonksiyon olarak yazılmalıdır.	AN 2: Alan ifadesini x cinsinden yazma fikri. Tek değişkenli ikinci dereceden fonksiyonu elde etme durumunu temsil etmektedir. $ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y = 2x \cdot (36 - 6x)$ $= 72x - 12x^2$

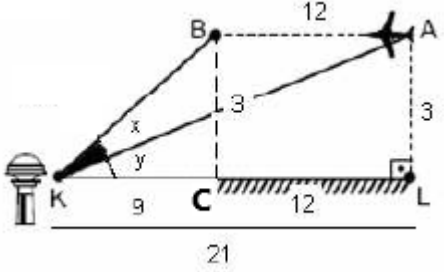
EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2010 LYS 2.Maksimum-minimum ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	3. Planı uygulama: $ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y$ olduğundan bu hesabı yapabilmek için $y = 36 - 6x$ yazılarak $ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y = 2x \cdot (36 - 6x)$ $= 72x - 12x^2$ elde edilir. Mutfağın maksimum alana sahip olması durumunu hesaplamak demek $T(r, k)$ noktasının k ordinatını belirlemek demektir. Maksimum alanı veren apsis noktası istenen x değeridir. Buradan tepe noktasının apsisi $x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{72}{2 \cdot (-12)} = 3$ elde edilir. Bu noktayı fonksiyonda yerine yazarsak tepe noktasının ordinatını $k = f(3) = 72 \cdot 3 - 12 \cdot 3^2 = 108$ elde edilir.	AN 3: $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası $T(r, k)$ ise, $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = f(r)$ dir. Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere, k değeri fonksiyonun alabileceği maksimum ya da minimum değeri verir. r ise o minimum ya da maksimum değer için hangi x'in hangi değeri için alınacağını verir. AAN 1: $f(x) = 72x - 12x^2$ ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlar ve bu fonksiyonun grafiği paraboldür. AAN 2: en geniş kelimesinin anlamının en büyük olduğu fikri. AAN 3: Parabolde en büyük ya da en küçük değer değerinin tepe noktasının ordinatıdır.
	4. Değerlendirme: Mutfağın alanının maksimum olması, fonksiyonun grafiğinin o noktada maksimum değere ulaşması ile mümkündür. Bu noktada türev sıfırdır. Dolayısıyla türev alınıp sıfıra eşitlenirse maksimum değere ulaştıran x değeri bulunabilir. Buradan $72 - 24x = 0$ $x = 3$ elde edilir.	AN 1: Alanın x cinsinden yazılmasıdır. Yani tek değişkenli ikinci dereceden fonksiyonun ifade edilebilmesi fikri. $ALAN_{MUTFAK} = 2x \cdot y = 2x \cdot (36 - 6x)$ $= 72x - 12x^2$ AN 2: f nin kritik değer aldığı x noktasını belirlemek için türevin kullanılması fikri. AAN: en geniş kelimesinin anlamının maksimum olduğu fikri.

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2006 ÖSS 3.Trigonometri ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
 $BA \parallel KL$ $AL = 3 \text{ km}$ $BA = 12 \text{ km}$ $KL = 21 \text{ km}$ K noktasındaki kontrol kulesinde bulunan bir görevli, yerden 3 km yükseklikte yere paralel uçan bir uçağın, A noktasından B noktasına kadar 12 km lik hareketini radarla izliyor. A noktasının yerdeki dik izdüşümü L noktası ve $KL = 21 \text{ km}$ olduğuna göre, radarın taradığı AKB açısının tanjantı kaçtır?	1. Problemi anlama: Problemin bizden istediği $\tan(m(\widehat{AKB})) = ?$ dir.	AN 1: Ölçüsünün tanjantı istenen açının içinde bulunduğu dik üçgenini oluşturma fikri. AAN 1: Dik üçgende açılara isim verme fikri. AAN 2: Dik üçgende verilenleri uygun yere yazma fikri. Tanım: İç açılarından biri dik (ölçüsü 90°) olan bir üçgene dik üçgen denir. $\triangle ABC$, $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olan bir üçgen olsun. O zaman $[AC]$ doğru parçasına $\triangle ABC$ üçgeninin hipotenüsü denir (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2006 ÖSS 3. Trigonometri ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	2. Çözüm için plan hazırlama $\tan x$'ielde etmek için ilave olarak başka nelere ihtiyaç vardır? Yeni bilgiler ve değişkenler şekilde yerleştirilir.  Bu durumda $m(\widehat{BKL}) = k$ ve $m(\widehat{AKL}) = y$ olmak üzere $x + y = k$ olduğundan problemin bizden istediği $\tan(m(\widehat{AKB})) = \tan x = \tan(k - y) = ?$	AN 2: Ölçüsünün tanjantı istenen açı ile diğer açılar arasında ilişki kurma fikri. $m(\widehat{BKL}) = k$ ve $m(\widehat{AKL}) = y$ denilerek, $x = k - y$ eşitliğini yazmaktır. AAN 1: Açılarının ölçülerinin trigonometrik oranlarının bulunabileceğinin kontrol edilmesi fikri. AAN 2: Doğru dik üçgenlere odaklanma gerekliliği fikri. $\triangle BKC$ ve $\triangle AKL$ dik üçgenlerine odaklanma. AN 3: Dik üçgende trigonometrik oranları elde etme fikri. $\sin \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$ $\cos \alpha = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$ $\tan \alpha = \frac{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}$ $\cot \alpha = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}$
	3. Planı uygulama $\tan x = \tan(k - y) = \frac{\tan k - \tan y}{1 + \tan k \cdot \tan y}$ $= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}}$ $= \frac{\frac{4}{21}}{\frac{22}{21}}$ $= \frac{4}{22}$ $= \frac{2}{11}$	

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2007 ÖSS 4. Bölünebilme ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
Bir tüccar, tanesi 45 TL den belirli sayıda gömlek satın alıyor. Kendisine verilen faturada, ödenen miktarın ilk ve son rakamları silik çıktığı için bu tutarın yalnızca ■92■ biçiminde dört basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor. Tüccarın tek sayıda gömlek aldığı bilindiğine göre, silik çıkan iki rakamın toplamı kaçtır?	1. Problemi anlama: Tüccarın ödediği miktar ■92■ olup, gömlek sayısı bilinmemektedir. Gömlek sayısının tek sayı olduğu bilinmekte olup, tanesi 45 TL dir. ■92■ dört basamaklı sayısında noktalı yerlerdeki rakamların toplamı istenmektedir.	AN 1: 5 ile bir tek sayının çarpımında elde edilen sayının birler basamağı 5 dir. AAN 1: Tek sayı ile tek sayının çarpımı tek sayıdır. AAN 2: a bir tek tamsayı ise $a = 2k + 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.
	2. Çözüm için plan yapma: Gömlek sayısı= $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda toplam ödediği miktar $45 \cdot (2n + 1) = 90n + 45$ elde edilir. Bu durumda Tüccarın ödediği miktarın son hanesi 5 dir; yani, $90n + 45 = \blacksquare 925$ dir.	

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2007 ÖSS 4.Bölünebilme ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	3. Planın uygulanması $90n + 45 = \blacksquare 925 = a925$ olduğundan $90n = \blacksquare 880$ olur. $9n = \blacksquare 88$ elde edilir. Bu sayı 9 ile tam bölünebilir demektir. $a + 8 + 8 = 9n$ dır. Buradan $16 + a = 9n$ ve $a = 2$ elde edilir. O halde bilinmeyen hanelerdeki rakamların toplamı $2 + 5 = 7$ dir.	AN 2: Bir sayı 90 a tam bölünebilmesi için hem 9 a hem de 10 a tam bölünür.
	4. Değerlendirme Diğer yandan bu sayı 45 ile tam bölünebildiğine göre hem 9 a hem de 5 ile tam olarak bölünebilir. Bu sayının tek sayı olduğu ve 5 ile tam bölünebildiği bilindiğine göre $b = 5$ olacaktır. Daha sonra $a925$ sayısının rakamları toplamı 9 ile tam bölünebilmesi için $a = 2$ olacaktır.	AN 1: 5 ile bir tek sayının çarpımında elde edilen sayının birler basamağı 5 dir. AAN : Tek sayı ile tek sayının çarpımı tek sayıdır. AN 2: Bu sayı 45 ile tam bölünür. AAN 1: Bu sayı 5 ile tam bölünür. AAN 2: Bu sayı 9 ile tam bölünür. Tanım: R değişmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $a = b.c$ olacak şekilde $c \in R$ varsa o zaman b, a yı böler veya a, b ile bölünür denir ve $b a$ ile gösterilir. Ayrıca b ve c ye a nın bölenleri ya da çarpanları denir.

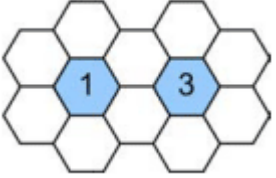
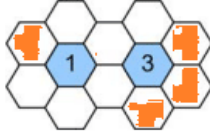
EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2011 YGS 5. Olasılık ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
Meriç'in elinde kırmızı veya beyaz renklerde toplam 10 top vardır. Meriç bu topları iki torbaya her bir torbada en az bir kırmızı ve bir beyaz top olacak şekilde dağıttıktan sonra şunları söylüyor: "Birinci torbada 3 kırmızı top vardır. Torbalardan rastgele birer top çekildiğinde topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$'dir." Buna göre, ikinci torbada kaç beyaz top vardır?	1. Problemi anlama İki torbada da hem beyaz hem kırmızı top bulunmaktadır. Toplam top sayısı 10 dur. Sadece birinci torbada bulunan kırmızı top sayısı bilinmektedir. İkinci torbada bulunan beyaz top sayısı istenmektedir.	AN 1: Bilinmeyen sayısının çok olduğu durumlarda bilinmeyenleri temsil eden sembolleri mümkün olduğunca az kullanma fikridir. AAN 1: Her iki torbadaki kırmızı top sayısının belirlenmesi fikri. AAN 2: Her iki torbadaki top sayısının belirlenmesi fikri.
	2. Çözüm için plan hazırlama I.torbada bulunan toplam top sayısı x olsun. O halde II. torbada bulunan toplam top sayısı $10 - x$ dir. I.torbada bulunan kırmızı top sayısı 3 tür. II.torbada bulunan kırmızı top sayısı y olsun.	
	3. Planın uygulanması I.torbadan kırmızı top çekme olasılığı $P(K_1) = \frac{3}{x}$ dir. II. torbadan kırmızı top çekme olasılığı $P(K_2) = \frac{y}{10-x}$ dir. I.ve II.torbadan çekilen topların ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{2}$ dir.	AN 2: Olasılığın yazılarak denklemi kurma durumunu temsil etmektedir. AAN 1: Rastgeleliğin doğasını ve yapısını anlayabilme. AAN 2: Belirli bir olayın olma olayını hesaplamak için gerekli olan oransal muhakemeye sahip olma (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2011 4.Olasılık ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	Buradan $P(K_1 \cap K_2) = \frac{3}{x} \cdot \frac{y}{10 - x} = \frac{1}{2}$ elde edilir. Buradan $6y = x \cdot (10 - x)$ elde edilir. Eğer I.torbadaki top sayısı $x = 6$ ise II. torbadaki top sayısı $10 - x = 10 - 6 = 4$ olur; fakat $y = 4$ olacağından ve bu her iki torbada en az bir beyaz top olması istendiğinden bu durum ile çelişecektir. Dolayısıyla I.torbadaki top sayısı $x = 4$ ise II. torbadaki top sayısı $10 - x = 10 - 4 = 6$ olur; böylece $y = 4$ olduğundan II.torbadaki beyaz top sayısı $6 - 4 = 2$ elde edilir.	AN 3: “En az bir” niceleyicisinin işlevinin ne anlama geldiğini bilme. Tanım: $p(x)$ açık önermesi verilmiş olsun. “En az bir x için $p(x)$” şeklindeki önermelerde “en az bir x” ifadesine varlıksal niceleyici denir (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).
	4. Değerlendirme Birinci torbada 3 tane kırmızı top vardır. Birinci torbada en az bir beyaz top bulunması gerektiğinden birinci torbada 1 beyaz top olduğunu varsayalım. Bu durumda birinci torbada toplam top sayısı 4 olur. O halde toplam top sayısı 10 olduğundan ikinci torbada 6 top kalacaktır. Torbalardan rastgele bir top çekildiğinde her ikisinin de kırmızı gelme olasılığı $\frac{1}{2}$ olduğuna göre ikinci torbada bulunan kırmızı top sayısına x dersek $\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$ olarak elde edilir. Buradan $x = 4$ elde edilir. İkinci torbada bulunan kırmızı top sayısı 4’tür. O halde ikinci torbada bulunan beyaz top sayısı $6 - 4 = 2$ elde edilir.	AN: Olasılığın yazılarak denklemi kurma durumunu temsil etmektedir. AAN 1: “En az bir” niceleyicisinin işlevinin ne anlama geldiğini bilme. AAN 2: Rastgeleliğin doğasını ve yapısını anlayabilme. AAN 3: Belirli bir olayın olma olayını hesaplamak için gerekli olan oransal muhakemeye sahip olma (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014).

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 LYS 6. Kombinasyon ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
Aşağıda düzgün altıgen şeklindeki hücrelerden oluşturulmuş bir düzenek verilmiştir. Beyaz hücrelerin bazıları turuncu renge boyanacaktır.  Her bir mavi hücrenin içerisinde yazan sayı, o mavi hücre ile ortak kenarı olan ve turuncuya boyanacak toplam hücre sayısını göstermektedir. Buna göre, hücreler kaç farklı biçimde boyanabilir?	1. Problemi anlama: İçerisinde 1 yazan mavi hücrenin etrafında bir turuncu hücre boyanırken, içerisinde 3 yazan mavi hücrenin etrafında üç tane turuncu hücre boyanmalıdır. Bu durum kaç farklı şekilde olabileceği istenmektedir.	AN 1: Problemin bağlamında yer alan mümkün olayların tümünü ortaya çıkarabilme fikri (Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014). AAN 1: Kesişimde olmayan bölgeden seçim yapma durumunu ayrı düşünme fikri. AAN 2: Kesişimde olan bölgeden seçim yapma durumunu ayrı düşünme fikri. 1.Durum  2.Durum 
	2. Çözüm için plan yapma: Hücrelerin boyanması ile ilgili iki farklı durum vardır. 1 yazan mavi hücre ile 3 yazan mavi hücrenin ortak iki hücresi vardır. Bu hücrelerin boyanması ve boyanmaması durumu ile iki farklı durum oluşmaktadır. Tüm durumlar bu iki durumun toplanması ile bulunur.	

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 LYS 6. Kombinasyon ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	3. Planı uygulama: I.Durum: 1 ile 3'ün ortak kenarı olan hücrelerden biri boyanmazsa; Sadece 1 ile ortak kenarı olan 4 hücreden biri boyanacak, Sadece 3 ile ortak kenarı olan 4 hücreden üçü boyanacaktır. Bu durumda $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16$ biçim elde edilir. II.Durum: 1 ile 3'ün ortak kenarı olan hücrelerden biri boyanırsa; 1 ve 3 ile ortak kenarı olan iki hücreden biri boyanacak, Sadece 3 ile ortak kenarı olan 4 hücreden ikisi boyanacaktır. Bu durumda $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$ farklı biçim elde edilir. O halde $16 + 12 = 28$ farklı biçimde boyanabileceğini elde ederiz.	AN 2: Problem durumunda seçim yapılması gerekliliğinin fark edilmesi ve dolayısıyla çözüm için kombinasyon kullanılması fikri. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ dir. AAN 1: 2 ve 2 den fazla aynı anda gerçekleşen olayların gerçekleşme sayısı bu olayların ayrı ayrı gerçekleşme sayısının çarpılması ile elde etme fikri. AAN 2: Aynı anda gerçekleşmeyen, olaylardan sadece birisinin gerçekleşme sayısının olayların gerçekleşme sayılarının toplamı olması fikri.

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2017 7.Modüler Aritmetik ile ilgili Problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
A sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere, A bir basamaklı AA iki basamaklı AAA üç basamaklı $AA \dots A$ elli basamaklı sayılarının toplamının 9 ile bölümünden kalan 3'tür. Buna göre, A'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?	1. Problemi anlama: A sıfırdan farklı bir rakamdır. A nın alabileceği değerler toplamı istenmektedir.	AN 1: Toplamı elde etme fikri. AAN 1: Genel durumlar için örnek verme fikri. AAN 2: Ortak paranteze alma fikri.
	2. Çözüm için plan hazırlama: $A + AA + AAA + \dots + AA \dots A = 9k + 3$	
	3. Planı uygulama: $A + 2A + 3A + \dots + 50A \equiv 3(mod 9)$ $A \cdot (1 + 2 + \dots + 50) \equiv 3(mod 9)$ $A \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} \equiv 3(mod 9)$ $25 \cdot 51 \cdot A \equiv 3(mod 9)$ Bu toplamın 9 ile bölümünden kalan 3 olduğundan $25 \cdot 51 \cdot A \equiv 3(mod 9)$ $7 \cdot 6 \cdot A \equiv 3(mod 9)$ $42 \cdot A \equiv 3(mod 9)$ $6 \cdot A \equiv 3(mod 9)$ Bu durumda $A = 2, 5, 8$ olabilir. O halde $2 + 5 + 8 = 15$ elde edilir.	AN 2: Modüler aritmetik kullanma fikri. AAN 1: Modüler toplama kullanma fikri. AAN 2: Modüler çarpma kullanma fikri.

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2018 AYT 8.Polinomlar ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
Gerçek katsayılı ve baş katsayısı 1 olan 4.dereceden bir $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $P(x) = P(-x)$ eşitliğini sağlamaktadır. $P(2) = P(3) = 0$ olduğuna göre, $P(1) = ?$	1.yol $f(x)$ polinomu için $f(x) = f(-x)$ olduğundan $f(x)$ çift fonksiyondur. Dolayısıyla tek dereceli terimlerin katsayıları sıfırdır. $f(x)$ polinomu dördüncü dereceden bir polinom ve başkatsayısı 1 olduğundan $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ şeklinde ifade edilebilir. Tek dereceli terimlerin katsayıları sıfır olduğundan $b = 0$ ve $d = 0$ dır. Bu durumda $f(x) = x^4 + cx^2 + e$ dir. $f(2) = f(3) = 0$ olduğundan $f(x)$ polinomunda yerine yazılırsa $16 + 4c + e = 0$ $81 + 9c + e = 0$ elde edilir. Buradan $c = -13$ dür. c denklemde yerine yazılırsa $e = 36$ dır. O halde $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ elde edilir. $f(1) = 1 - 13 + 36 = 24$ tür.	AN 1: $p(x)$ polinomu dördüncü dereceden bir polinom $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$) şeklinde ifade edileceği fikri. AAN: Baş katsayı 1 olduğundan $a = 1$ dir.

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2018 AYT 8. Polinomlar ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
	2.yol $f(x)$, 4. dereceden bir polinom fonksiyonu olduğundan dört kökü vardır. $f(2) = f(3) = 0$ olduğundan f nin iki sıfır yeri 2 ve 3 tür. $f(x) = f(-x) = 0$ olduğundan $f(-2) = f(-3) = 0$ elde edilir. O halde $f(x)$ polinom fonksiyonunun dört sıfır yeri $x=2$, $x = 3$, $x = -2$ ve $x = -3$ tür. Buradan f, $(x - 2)$, $(x + 3)$, $(x - 2)$ ve $(x - 3)$ lerin çarpımı olarak yazılır. $f(x)$ polinom fonksiyonu $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$ olarak ifade edelim. Bu durumda $f(1) = (1 - 2) \cdot (1 + 2) \cdot (1 - 3) \cdot (1 + 3)$ elde edilir.	AN 1: $p(x)$, 4. dereceden bir polinom olduğundan en fazla dört sıfır yeri vardır. AAN: 2 ve 3 p nin kökleridir. Anahtar nokta 2: $p(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 olmak üzere $p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$ olarak ifade edilir. Alt anahtar nokta 1: $P(x_1) = P(x_2) = 0$ olduğundan $P(x)$ polinomu $(x - x_1)$ ve $(x - x_2)$ ile tam bölünür. Alt anahtar nokta 2: $P(-x) = p(x)$ olduğundan $P(x)$ polinomu $(x + x_1)$ ve $(x + x_2)$ ile tam bölünür.

EK 3. (Devam) Problemler ve Belirlenen Anahtar Noktaları

2018 AYT 2019 Maksimum ile ilgili problem	Problem çözme süreci	Anahtar noktalar
Bir internet şirketi en fazla 1000 müşteriye hizmet verebilmekte ve aylık internet ücretini 40 TL olarak belirlediğinde bu sayıya ulaşabilmektedir. Bu şirket aylık internet ücretinde yaptığı her 5 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlemiştir. Bu şirket, aylık internet ücretinden elde edeceği toplam gelirin <u>en fazla</u> olması için aylık internet ücretini kaç TL olarak belirlemelidir?	Şirketin aylık internet ücretinden elde edeceği gelirin en fazla olması istenmektedir. Bu durumda öncelikle toplam geliri elde edelim. Aylık internet ücretinde yaptığı 5 TL'lik artış sayısına k diyelim. Aylık internet ücreti $40 + 5k$ ve müşteri sayısı $1000 - 50k$ elde edilir. Buradan toplam geliri $\text{Toplam gelir} = (40 + 5k) \cdot (1000 - 50k)$ olarak ifade edebiliriz. $\text{Toplam gelir} = 4000 - 2000k + 5000k - 250k^2$ dir. Buradan 1.yol Maksimum değer istendiğinden türev alınıp sıfıra eşitlenerek k bulunur. $3000 - 500k = 0$ $k = 6$ dir. Aylık internet ücreti ise $40 + 5k = 40 + 30 = 70$ olur. 2.yol Toplam gelir fonksiyonu $= 4000 + 3000k - 250k^2$ olduğundan bu fonksiyonun alabileceği en büyük değer bunun grafiği olan parabol eğrisinin tepe noktasıdır. Buradan $k = -\frac{b}{2a} = -\frac{3000}{(-500)} = 6$ elde edilir. Aylık internet ücreti ise $40 + 30 = 70$ dir.	AN 1: Aylık internet ücretinde yaptığı 5 TL'lik artış sayısının sembolle gösterilerek aylık internet ücretinden elde edeceği toplamın $\text{Toplam gelir} = (40 + 5k) \cdot (1000 - 50k) =$ şeklinde ifade edilmesi fikri. AN 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası $T(r, k)$ ise, $r = -\frac{b}{2a} \text{ ve } k = f(r) \text{ dir.}$ Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere, k değeri fonksiyonun alabileceği maksimum ya da minumum değeri verir. r ise o minumum ya da maksimum değerin hangi x'in hangi değeri için alınacağını verir. AAN 1: İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerinin gösterdiği eğriye parabol denir. AAN 2: en fazla kelimesinin anlamının maksimum olduğu fikir.



GAZİ GELECEKTİR..