



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA HEMEN
HEMEN KARŞIT S-G-SÜREKLİ
FONKSİYONLAR ÜZERİNE**

Melahat ŞAFAK(KOCABAŞ)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topoloji Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Melahat Şafak(Kocabaş) tarafından hazırlanan “İdeal Topolojik Uzaylarda Hemen Hemen Karşıt S-G-Süreklİ Fonksiyonlar Üzerine” adlı tez çalışması 22/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Dr.Öğr.Üyesi Yusuf BECEREN

Danışman

Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Üye

Dr.Öğr.Üyesi Yusuf BECEREN

Üye

Doç. Dr. Sedat PAK

Üye

Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Melahat ŞAFAK(KOCABAŞ)

Tarih: 22/08/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA HEMEN HEMEN KARŞIT S- G-SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Melahat ŞAFAK(KOCABAŞ)

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Topoloji Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Aynur Keskin Kaymakcı

2019, 33 Sayfa

Jüri

**Danışman: Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Dr.Öğr.Üyesi Yusuf BECEREN
Doç.Dr. Sedat PAK**

Bu tez çalışması, hemen hemen karşıt S-g-sürekli fonksiyonlar hakkında genel bilgi sahibi olmak için yapıldı. Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci kısımda; genel topolojik uzaylardaki bazı kümelerin tanımlarını ve karakterizasyonlarını ele aldık. İkinci kısımda, ideal topolojik uzayları ve bu uzaydaki bazı kümelerin tanımlarını inceledik. Ayrıca verilen kümeleri birbiri ile karşılaştırdık ve aralarındaki ilişkileri diyagramla ile gösterdik. Üçüncü kısımda ise bazı sürekli fonksiyonların tanımlarını verdik ve bu fonksiyonlar arasındaki ilişkileri elde ettik.

İkinci bölümde ise ilk olarak mk-açık küme tanımlanarak bazı özellikleri verildi. Bu kümenin hem açık hem kapalı kümeden daha zayıf ve λ^* -kapalı küme ve açık kümeden daha güçlü bir küme olduğu gösterildi. Daha sonra S-g-kapalı kümeler yardımıyla hemen hemen karşıt S-g-sürekli fonksiyon kavramını tanımladık ve karakterizasyonlarını elde ettik. Ayrıca hemen hemen f_s -sürekli, karşıt R-S dönüşüm, düzenli *-bağlantılı küme, (θ, s) -S-sürekli tanımları da verildi. Daha sonra bulunan bu tanımlar karşılaştırılarak diyagramla gösterildi.

Anahtar Kelimeler: düzenli açık küme, g-kapalı küme, hemen hemen karşıt g-sürekli, ideal, ideal topolojik uzay, S-g-kapalı küme.

ABSTRACT
MS THESIS
ON ALMOST CONTRA S-G-CONTINUOUS FUNCTIONS IN IDEAL
TOPOLOGICAL SPACES

Melahat ŞAFAK(KOCABAŞ)

SELCUK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF
NATUREL AND SCIENCES
DEPARTMENT OF
MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Aynur Keskin Kaymakcı

2019,33 Pages

Jury

Advisor Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Dr.Öğr.Üyesi Yusuf BECEREN
Doç.Dr. Sedat PAK

This study is consist of two section. First section is consist of three subsection. In first subsection, we have taken definitions of some sets in general topology. In second subsection, we have investigated ideal topological spaces and definitions of some sets in this space. Besides, we have given sets and denoted their among relations in diyagram. In third subsection, we have given definitions of some continuous functions and taken relations among of them.

In second section, firstly we have defined the concept of mk-open set and obtained some properties of it. It is weaker than clopen set and stronger than both λ^* -closed set and open set. We have introduced the notion of almost contra S-g-continuous functions by using the concept of S-g-closed sets and obtained some characterizations of it. Besides, we have given definitions of the notions of almost f_s -continuous (resp. contra R-S-map, regular *-connected set, (θ, s) -S-continuous) by using f_s - (resp. regüler S-closed, mk-open, λ^* -closed) set. Then, we have obtained one diagram is consist of relations among these definitions.

Keywords: almost contra g-continuous, g-closed set, ideal, ideal topological space, regular open set, S-g-closed.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, hemen hemen karşıt S-g-sürekli fonksiyonlar hakkında genel bilgi sahibi olmak için yapılmıştır. Söz konusu süreklilik çeşidinin [15] deki karakterizasyonlarına ve başka süreklilik çeşitleriyle olan ilişkilerine bu çalışmada yer verdik. Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma için gerekli ön bilgiler yer almaktadır. Birinci bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda; genel topolojik uzaylardaki bazı kümelerin tanımlarını ve karakterizasyonlarını ele aldık. İkinci kısımda, ideal topolojik uzaylar ve bu uzaydaki bazı kümelerin tanımlarını inceledik. Bu iki kısımda da verilen kümeleri birbiri ile karşılaştırarak aralarındaki ilişkileri diyagramla ile gösterdik. Üçüncü kısımda ise bazı sürekli fonksiyonların tanımlarını vererek bu fonksiyonlar arasındaki ilişkileri ele aldık.

İkinci bölümde ise ilk bölümde incelenen kümeler yardımıyla hemen hemen ters S-g-sürekli fonksiyon ve özelliklerini ele aldık. Bu bölümde ideal topolojik uzay ve hemen hemen ters g- sürekli fonksiyon tanımları yardımıyla hemen hemen ters S-g sürekli fonksiyon tanımı elde edilerek hemen hemen S-sürekli, karşıt R-S dönüşüm, düzenli *-bağlantılı küme, (θ, s) -S-sürekli tanımları bulunmuştur. Daha sonra bulunan bu tanımlar karşılaştırılarak diyagramla gösterilmiştir. Ayrıca hemen hemen karşıt S-g-sürekli fonksiyonun bileşke işlemi üzerindeki işlevi incelenmiştir.

Bu çalışma konusunu bana veren ve hazırlama aşamasında yardım eden danışman hocam Prof. Dr. Aynur Keskin Kaymakçı' ya ve en büyük destekçim aileme teşekkür ederim.

Melahat KOCABAŞ
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
GİRİŞ	1
1. ÖN HAZIRLIKLAR.....	2
1.1. Genel Topolojik Uzaylarda Bazı Kümeler	2
1.2. İdeal Topolojik Uzaylar ve Bu Uzaydaki Bazı Kümeler	4
1.3. Bazı Sürekli Fonksiyonlar ve Aralarındaki İlişkiler	10
2. HEMEN HEMEN KARŞIT S-G-SÜREKLİ FONKSİYON VE ÖZELLİKLER.....	11
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	21
4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A kümesinin içi	$Int(A)$
A kümesinin kapanışı	$Cl(A)$
A kümesinin δ -içi	$\delta-Int(A)$
Regüler açık kümelerin ailesi	$RO(P)$
δ - açık kümelerin ailesi	$\delta O(P)$
Hem açık hem kapalı kümelerin ailesi	$CO(P)$
Regüler kapalı kümelerin ailesi	$RC(P)$
g -kapalı kümelerin ailesi	$GC(P)$
g -açık kümelerin ailesi	$GO(P)$
regüler S - kapalı kümelerin ailesi	$RSC(P, \lambda)$
S - g kapalı kümelerin ailesi	$SGC(P, \lambda)$
M_k -açık küme	$MK(P, \lambda)$

GİRİŞ

İlk olarak 1970 yılında N.Levine [20], genelleştirilmiş kapalı (kısaca *g-kapalı*) küme kavramını vermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. Dunham ve Levine [8] 1980 de *g-kapalı* kümelerin daha ileri özelliklerini tanıttı. Dunham [9] 1982 de Kuratowski kapanış operatörü kullanarak konu üzerinde çalıştı. Balanchadran ve arkadaşları [2] 1991 de *g-kapalı* kümeler ve bunun özelliklerini kullanarak yeni bir sınıf tanımladı.

1933 yılında Kuratowski [19], ideal kavramı yardımıyla bir topolojik uzayda lokal fonksiyon tanımını verdi ve özelliklerini inceledi. 1945 yılında ise Vaidyanathaswamy [27] lokal fonksiyon kavramından faydalanarak bir kapanış işlemi tanımlamıştır ve kapanış işleminden yeni bir topoloji elde etti. 1990 yılında ise Janković ve Hamlet [14], lokal fonksiyon ile ilgili bütün bilgileri kullanarak yeni özellikler verdiler. O zamandan günümüze kadar idealler üzerinde birçok çalışmalar yapıldı ve hala günümüzdeki pek çok araştırmacı için önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır.

Dontchev [5] 1996 da contra-süreklilik kavramını tanıttı. Son zamanlarda contra-sürekliliğin yeni türleri mesela almost-contra süreklilik, almost-contra pre-süreklilik ve contra almost β -süreklilik tanıtılmıştır. Kısa süre önce Ekici [12], (LC,s) süreklilik üzerine ilgili fonksiyonlarla olan ilişkilerini inceleyen bir çalışma yaptı.

Bu çalışmada hemen hemen karşıt *g-sürekli* fonksiyonun ideal topolojik uzaya nasıl taşınabileceği incelendi ve m_k -açık küme tanımlanarak bazı özellikleri verildi. Bu kümenin hem açık hem kapalı kümeden daha zayıf ve λ^* -kapalı küme ve açık kümeden daha güçlü bir küme olduğu gösterildi. Daha sonra S-*g-kapalı* kümeler yardımıyla hemen hemen karşıt S-*g-sürekli* fonksiyon kavramını tanımladık ve karakterizasyonlarını elde ettik. Ayrıca hemen hemen f_s -sürekli, karşıt R-S dönüşüm, düzenli *-bağlantılı küme, (θ,s) -S-sürekli tanımları da verildi. Daha sonra bulunan bu tanımlar karşılaştırılarak diyagramla gösterildi.

1.BÖLÜM

ÖN HAZIRLIKLAR

Bu çalışmada ele alınan konu için gerekli ön bilgiler, bu bölümde verilecektir. Bu bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda; genel topolojik uzaylardaki bazı kümelerin tanımlarını ve karakterizasyonlarını ele aldık. İkinci kısımda, ideal topolojik uzaylar ve bu uzaydaki bazı kümelerin tanımlarını inceledik. Bu iki kısımda da verilen kümeleri birbiri ile karşılaştırarak aralarındaki ilişkileri diyagramla ile gösterdik. Üçüncü kısımda ise; bazı sürekli fonksiyonların tanımlarını vererek bu fonksiyonlar arasındaki ilişkileri ele aldık.

1.1.Genel Topolojik Uzaylarda Bazı Kümeler

Tanım 1.1.1.([29]): P boş olmayan bir küme ve λ ailesi de $\wp(P)$ güç kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun. Eğer $\lambda \subset \wp(P)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa; λ ailesinin her elemanına, P kümesinde bir **açık küme** ve aşağıdaki özelliklere de **açıklar aksiyomu** denir.

- i. P ve $\emptyset$ kümeleri, λ ailesine aittir.
- ii. λ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların birleşimi, λ ailesine aittir.
- iii. λ ailesine ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi, λ ailesine aittir.

Tanım 1.1.2.([29]): Tanım 1.1.1. de verilen açıklar aksiyomunu sağlayan λ ailesine, P kümesi üzerinde **topolojik yapı** ya da kısaca **topoloji**; (P, λ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir.

Tanım 1.1.3.([29]): (P, λ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in P$ noktası verilsin. x_0 noktasını içeren her $Y \subset P$ açık alt kümesine, x_0 noktasının bir **açık komşuluğu** denir.

$$Y, x_0 \text{ noktasının bir açık komşuluğudur} \Leftrightarrow x_0 \in Y \in \lambda (\exists x_0 \in P)$$

Tanım 1.1.4.([29]): (P, λ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in P$ noktası verilsin. x_0 noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subset P$ alt kümesine, x_0 noktasının **komşuluğu** denir.

$$V, x_0 \text{ noktasının komşuluğudur} \Leftrightarrow \exists Y \in \lambda \ni x_0 \in Y \subset V$$

Bir x noktasının bütün komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{A}(x)$ simgesi ile gösterilir ve bu aileye **x noktasının komşuluklar ailesi** denir.

Tanım 1.1.5.([29]): (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi ve bir $x \in Y$ noktası verilsin. Eğer Y kümesi, x noktasının bir komşuluğu ise; x noktasına, Y kümesinin bir **iç noktası** denir.

$$x, Y \text{ kümesinin iç noktasıdır} \Leftrightarrow \exists U \in \lambda \ni x \in U \subset Y$$

Tanım 1.1.6.([29]): (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Y kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye, **Y kümesinin içi** denir ve $Int(Y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.7.([29]): (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi ve bir $x \in P$ noktası verilsin. Eğer x noktasının her komşuluğunda, Y kümesinin en az bir elemanı varsa; x noktasına, Y kümesinin bir **kapanış noktası** denir.

$$x, Y \text{ kümesinin bir kapanış noktasıdır} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{G}(x) \text{ için, } Y \cap V \neq \emptyset$$

Tanım 1.1.8.([29]): (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Y kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesine, **Y kümesinin kapanışı** denir ve $Cl(Y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9.[19]: (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Eğer $Y = Int(Cl(Y))$ ise; Y kümesine, **regüler (düzenli) açık küme** denir. (P, λ) uzayında bütün regüler açık kümelerin ailesi $RO(P)$ ile gösterilir.

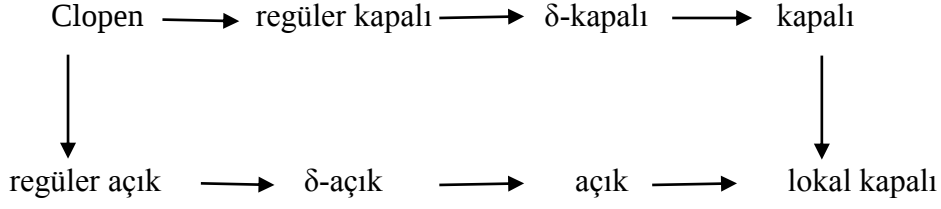
Tanım 1.1.10.[19]: (P, λ) topolojik uzayı ile herhangi bir $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Eğer $Y = Cl(Int(Y))$ ise; Y kümesine, **regüler (düzenli) kapalı küme** denir. (P, λ) uzayında bütün regüler kapalı kümelerinin ailesi de $RC(P)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.11.[26]: (P, λ) topolojik uzayı ile herhangi bir $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. $\delta - Int(Y) = \{x \in P \mid \exists U \in \lambda_{(x)}, Int(Cl(U)) \subseteq Y\}$ ise; P nin Y alt kümesinin δ -içi denir ve $\delta - Int(Y)$ ile gösterilir. Bir Y alt kümesi için, $Y = \delta - Int(Y)$ ise; Y kümesine **δ -açık küme** denir. (P, λ) uzayında bütün δ -açık kümelerin ailesi $\delta O(P)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12.[3]: (P, λ) topolojik uzayı ve herhangi bir $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. U, P de açık ve V, P de kapalı iken; $Y = U \cap V$ ise, Y kümesine **lokal kapalı küme** denir.

Tanım 1.1.13.[16]: (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Y kümesi, hem açık hem kapalı küme ise; Y kümesine, **clopen (hem açık hem kapalı) küme** denir. P nin, tüm hem açık hem kapalı alt kümelerinin ailesi; $CO(P)$ ile gösterilir.

Burada geçen kümelerle ilgili olarak her bir gerektirme ayrı ayrı çalışmalarda verilmiş olup [16] de bu gerektirmeler aşağıdaki diyagramla birleştirilmiştir. Buradaki gerektirmelerin hiçbirinin tersinin genelde doğru olmadığı [16] de ve ilgili kaynaklarda verilmiştir.



Şekil 1.1.

Tanım 1.1.14.([20]): (P, λ) topolojik uzayı ve bir $Y \subset P$ alt kümesi verilsin. Eğer

a) $Y \subset U$ ve $U \in \lambda$ iken; $Cl(Y) \subset U$ oluyorsa; Y kümesine, **genelleştirilmiş kapalı küme** (kısaca ***g-kapalı küme***) denir.

b) $F \subset Y$ ve $F \in \lambda^t$ iken $F \subset Int(Y)$ oluyorsa; Y kümesine, ***g-açık küme*** denir.

P nin bütün g -kapalı (sırasıyla g -açık) alt kümelerinin ailesi $GC(P)$ (sırasıyla $GO(P)$) ile gösterilir.

Kapalı küme ile g -kapalı küme [20]' da karşılaştırılmış olup, aşağıdaki önerme, uyarı ve örnek ile bunlar hatırlatılmıştır.

Önerme 1.1.1.([20]): Her kapalı küme, g -kapalı bir kümedir.

İspat. (P, λ) topolojik uzayı ile $Y \subset U$ olacak şekilde $U \in \lambda$ verilsin. Y kümesi, kapalı küme olduğundan; $Cl(Y) = Y$ ve dolayısıyla $Cl(Y) = Y \subset U$ elde edilir. O halde; $Y \subset P$ kümesi, g -kapalı bir kümedir.

Uyarı 1.1.1. g -kapalı bir kümenin kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 1.1.1. $P = \{a, b, c\}$ ve $\lambda = \{P, \emptyset, \{a\}\}$ olmak üzere; (P, λ) topolojik uzayı verilsin.

Bu takdirde $Y = \{a, b\} \subset P$ kümesi, g -kapalıdır fakat kapalı değildir. Gerçekten; $Y \subset P \in \lambda$,

$Cl(Y) = Cl(\{a, b\}) = P \subset P \in \lambda$ olduğundan Y kümesi g -kapalıdır. Fakat $\lambda^t = \{P, \emptyset, \{b, c\}\}$

olup $Y \notin \lambda^t$ olduğundan Y kapalı küme değildir.

1.2.İdeal Topolojik Uzaylar ve Bu Uzaydaki Bazı Kümeler

Tanım 1.2.1([19]): $\wp(P)$, boş olmayan bir P kümesinin güç kümesi olmak üzere; boş olmayan bir $S \subset \wp(P)$ ailesi; eğer

(1) $Y \in S, Z \subseteq Y \Rightarrow Z \in S$ (Kalıtımsallık Özelliği)

(2) $\forall Y \in S, Z \in S \Rightarrow (Y \cup Z) \in S$ (Sonlu Birleşim Özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu takdirde S ailesine, P üzerinde bir **ideal** denir.

Tanım 1.2.2.([19]): (P, λ) topolojik uzayı, $Y \subset P$ alt kümesi ve P kümesi üzerinde bir S ideali verilsin. Bu takdirde;

$$Y^*(S, \lambda) = \{p \in P : \forall K \in \lambda_{(p)} \text{ için } (K \cap Y) \notin S\}$$

şeklinde tanımlanan $(.)^* : \wp(P) \rightarrow \wp(P)$ ($\exists \forall Y \subseteq P, Y^*$) fonksiyonuna, Y kümesinin S ideali ve λ topolojisine bağlı **lokal fonksiyonu** denir.

Tez boyunca $Y^*(S, \lambda)$ yerine Y^* sembolünü kullanacağız. Y^* kümesi ile Y kümesinin lokal fonksiyonundan bahsetmiş olacağız. Lokal fonksiyon ile ilgili literatürde yer alan özellikler aşağıda verildi:

Lemma 1.2.1([14]): (P, λ) topolojik uzayı, P kümesi üzerinde bir S ideali ile birlikte $Z, Y \subset P$ kümeleri verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1) $Z \subset Y \Rightarrow Z^* \subset Y^*$;
- (2) $Y^* = cl^*(Y) \subset cl(Y)$;
- (3) $(Y^*)^* \subset Y^*$;
- (4) $(Z \cup Y)^* = Z^* \cup Y^*$
- (5) $(Y^* - Z^*) \subset (Y - Z)^*$;
- (6) Eğer $U \in \lambda$ ise, $(U \cap Y^*) \subset (U \cap Y)^*$.

Janković ve Hamlet([14]), topolojik uzay ve ideal kavramlarını kullanarak, ideal topolojik uzayı tanımladılar.

Tanım 1.2.3([14]): (P, λ) topolojik uzayı ile P kümesi üzerinde tanımlı S ideali verilsin.

S ideali ile birlikte (P, λ) topolojik uzayına, **ideal topolojik uzay** denir ve (P, λ, S) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.4.: (P, λ, S) ideal topolojik uzayında $M \subset P$ verilsin. Eğer,

- (1) $M^* \subset M$ ise; M ye, λ^* -kapalı küme ([14]);
- (2) $M^* = M$ ise; M ye, $*$ -perfect küme ([13]);

(3) $M \subset M^*$ ise; M ye, $*$ -dense in itself küme ([13]) denir.

Tanım 1.2.5.([27]): (P, λ) topolojik uzayı ile P kümesi üzerinde tanımlı S ideali verilsin.

Herhangi bir $Y \subset P$ kümesi için, $Cl^*(Y) = Y \cup Y^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : \wp(P) \rightarrow \wp(P)$ fonksiyonu; bir Kuratowski kapanış operatörüdür.

Tanım 1.2.6.([27]): (P, λ) topolojik uzayı ile P kümesi üzerinde tanımlı S ideali verilsin.

Bu takdirde,

$$\lambda^*(S) = \{Y \subset P : Cl^*(P - Y) = (P - Y)\}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda^*(S)$ ailesi, P kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji, λ topolojisinden daha ince bir topolojidir.

Önerme 1.2.1.([18]): Her kapalı küme λ^* -kapalı kümedir.

İspat : $\lambda \subset \lambda^*$ olduğundan herhangi bir $Y \subset P$ için Lemma 1.2.1. (2) den; $cl^*(Y) \subset cl(Y)$ sağlanır. Y kümesi kapalı küme olsun. Yani; $Y = cl(Y)$ sağlanır. Dolayısıyla $cl^*(Y) \subset cl(Y) = Y$ elde edilir ki bu da $cl^*(Y) \subset Y$ olduğunu gösterir. $cl^*(Y) = Y \cup Y^*$ olduğundan $Y \subset cl^*(Y)$ sağlanır. Sonuç olarak $Y = cl^*(Y)$ olup Y kümesi λ^* -kapalı küme olur. Y kümesi kapalı iken λ^* -kapalı küme bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Tanım 1.2.7.([6]): (P, λ, S) ideal topolojik uzayı ile $Y \subset P$ kümesi verilsin Eğer $Y \subseteq U$ ve $U \in \lambda$ iken, $Y^* \subset U$ oluyorsa; bu takdirde Y kümesine ***S-genelleştirilmiş kapalı küme*** denir.

Tez boyunca (P, λ) topolojik uzayındaki tüm S -genelleştirilmiş kapalı kümelerin ailesini $SGC(P, \lambda)$ ile göstereceğiz.

Tanım1.2.8.([17]): (P, λ, S) ideal topolojik uzayı ile $Y \subset P$ kümesi verilsin. Y kümesi $Y \subset (Int(Y))^*$ sağlıyorsa, Y kümesine f_S -**küme** denir. (P, λ, S) ideal topolojik uzayındaki f_S - kümelerin ailesini $f_S(P, \lambda)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.9.([28]): (P, λ, S) ideal topolojik uzayının $Y \subset P$ alt kümesine; $Y = (Int(Y))^*$ ise ***regüler (düzenli) S-kapalı küme*** denir.

(P, λ, S) ideal topolojik uzayındaki regüler (düzenli) S -kapalı kümelerin ailesini $RSC(P, \lambda)$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.2.1.([17]): (P, λ, S) ideal topolojik uzayı ile $Y \subset P$ kümesi verilsin. Y kümesi regüler (düzenli) S -kapalı bir küme ise, Y kümesi f_S - kümedir.

İspat: Y kümesini regüler (düzenli) S -kapalı küme alalım. Tanım 1.2.13 ten $Y = (Int(Y))^*$. Bu sebeple $Y \subset (Int(Y))^*$ olup Y kümesinin f_S - küme olduğu açıktır.

Uyarı 1.2.1.([17]): Teorem 1.2.1 ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 1.2.1.([17]): $P = \{a, b, c, d\}$ kümesi ile üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{a, d\}, \{c\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{a, d\} \subseteq P$ alt kümesi, f_S - kümedir ancak regüler (düzenli) S -kapalı küme değildir. Gerçekten; $Y = Int(Y)$ olup, $(Int(Y))^* = Y^* = \{a, b, d\} \supset \{a, d\} = Y$ elde edilir. Y kümesi, f_S - küme olur. Diğer taraftan $(Int(Y))^* \neq Y$ olduğundan; Y , regüler (düzenli) S -kapalı küme değildir.

Tanım 1.2.10.([23]): (P, λ, S) ideal topolojik uzayı ile $K \subset P$ kümesi verilsin. K hem açık hem λ^* - kapalı küme ise K kümesine **mk-açık küme** denir.

(P, λ, S) ideal topolojik uzayındaki mk-açık kümelerin ailesini $MK(P, \lambda)$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.2.2.([23]): Her clopen (hem açık hem kapalı) küme mk-açık kümedir.

İspat: K kümesi clopen küme verilsin. Dolayısıyla K kümesi hem açık hem kapalı bir kümedir. Önerme 1.2.1. de gösterildiği gibi her kapalı küme λ^* -kapalı küme olduğundan; K , hem açık hem λ^* -kapalı küme olur. Sonuçta K , mk-açık küme olur.

Uyarı 1.2.2.([23]): Teorem 1.2.2. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 1.2.2.([23]): $P = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $S = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$ ideali ve

$\lambda = \{\emptyset, P, \{c, d\}, \{c\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}\}$ topolojisi verilsin.

$K = \{c, d\} \subset P$ kümesi mk-açık kümedir ancak clopen küme değildir. Gerçekten;

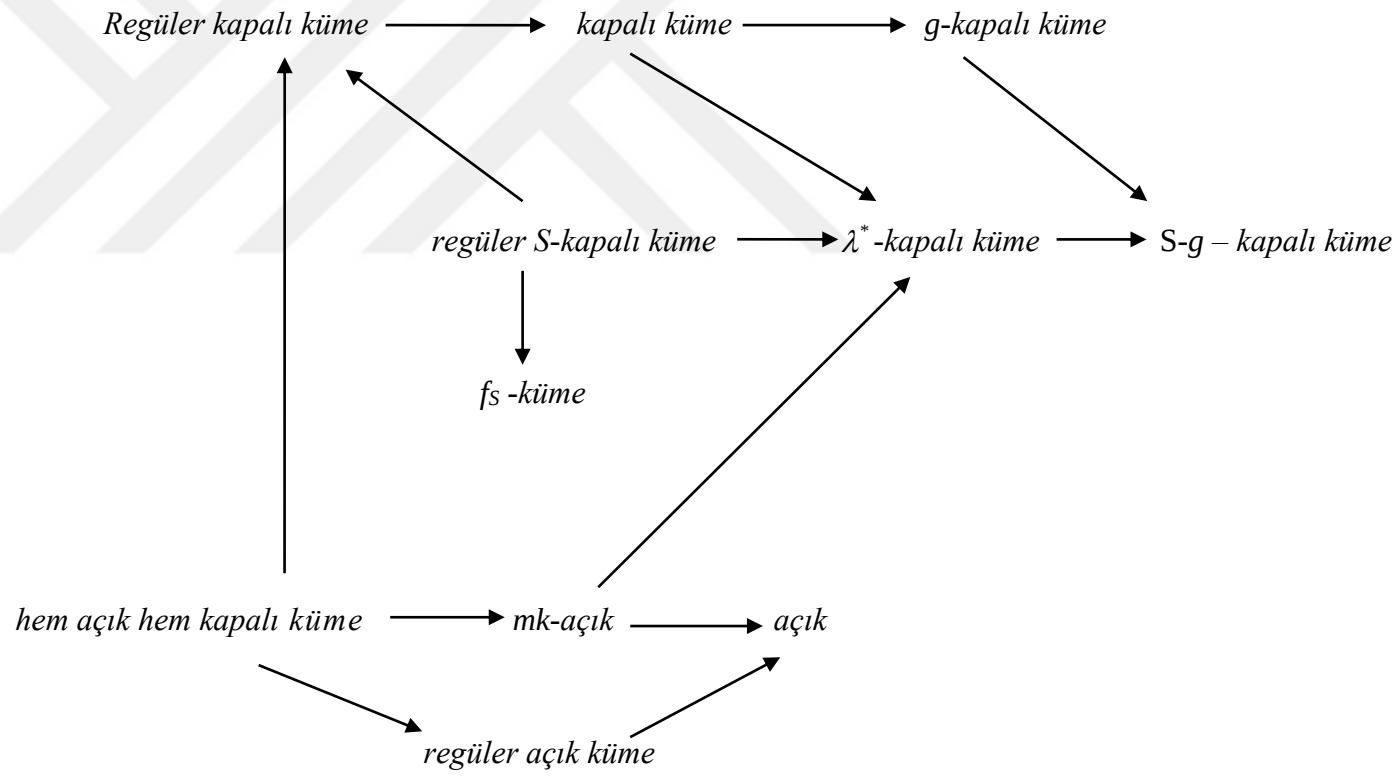
$K^* = \emptyset \subset \{c, d\} = K$ olduğundan, K kümesi *mk-açık* kümedir. Diğer taraftan; $Cl(K) = P \not\subset \{c, d\} = K$ olup K kümesinin clopen küme olmadığı elde edilir.

Önerme 1.2.2.: *mk-açık* küme ile f_s –küme birbirinden bağımsızdır.

Örnek 1.2.3.: $P = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ideali verilsin. $A = \{2, 3\}$ kümesi *mk-açık* kümedir ancak f_s –küme değildir. Gerçekten; $A = \{2, 3\} \in \lambda$ ve $A^* = \{2\} \subset A$ olup, A , λ^* kapalı kümedir. Dolayısıyla A kümesi *mk-açık* kümedir. Ayrıca $Int(A) = \{2, 3\}$ ve $(Int(A))^* = (\{2, 3\})^* = \{2\}$ olup $A = \{2, 3\} \not\subset \{2\} = (Int(A))^*$ olduğundan; A , f_s –küme değildir.

Örnek 1.2.4.: $P = \{p, q, r\}$ kümesi ile üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{r\}\}$ ideali verilsin. $A = \{q\} \subset P$, f_s –kümedir ancak *mk-açık* değildir. $A = \{q\}$ için, $Int(A) = \{q\}$ ve $(Int(A))^* = \{q\}^* = \{q, r\}$ olup, $A = \{q\} \subset \{q, r\} = (Int(A))^*$ elde edilir ki, bu da Tanım 2.11 gereği, A , f_s –kümedir. Ayrıca; $A^* = \{q, r\} \not\subset A$ olup, Tanım 1.2.4(1) gereği A , λ^* kapalı küme değildir ve $A = \{q\} \in \lambda$. Dolayısıyla A kümesi *mk-açık* küme değildir.

Yukarıda verilen önermeler ve tanımlar kullanılarak söz konusu kümeler arasındaki ilişkiler, Şekil 1.2. ile verildi.



Şekil 1.2.

1.3. Bazı Sürekli Fonksiyonlar ve Aralarındaki İlişkiler .

Tanım 1.3.1.: $f : (P, \lambda) \rightarrow (Q, \mu)$ *almost contra (hemen hemen karşıt) g-sürekli* ([16]) bir fonksiyon olması için (sırasıyla; *hemen hemen sürekli* ([24]), δ -sürekli ([22]), R -dönüşüm ([4]), *regüler küme bağlantılı* ([7]), *karşıt R-dönüşüm* ([11]), *hemen hemen karşıt süper sürekli* ([10]), (LC, s) sürekli ([12]), (θ, s) -sürekli ([15])) gerek ve yeter şart her $V \subset Q$ kümesi (Q, μ) 'de regüler açık iken bu kümenin f altındaki ters görüntüsü olan $f^{-1}(V) \subset P$ kümesinin (P, λ) 'da g-kapalı (sırasıyla; açık, δ -açık, regüler açık, clopen (hem açık hem kapalı), regüler kapalı, δ -kapalı, lokal kapalı, kapalı) olmasıdır.

Tanımları, aşağıdaki gibi, sembolize edebiliriz:

$$f, \text{ hemen hemen karşıt g-sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q), f^{-1}(V) \in GC(P)$$

$$f, \text{ hemen hemen sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in \lambda,$$

$$f, \delta\text{-sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in \delta O(P),$$

$$f, R\text{-dönüşüm} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in RO(P),$$

$$f, \text{ regüler küme bağlantılı} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in CO(P),$$

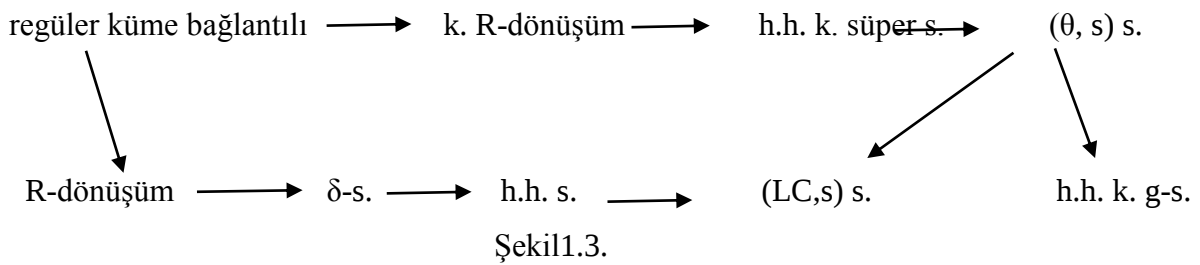
$$f, \text{ karşıt R-dönüşüm} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in RC(P),$$

$$f, \text{ hemen hemen karşıt süper sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in \delta C(P),$$

$$f, (LC, s) \text{ sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in LC(P),$$

$$f, (\theta, s) \text{ sürekli} \Leftrightarrow \forall V \in RO(Q) \text{ için } f^{-1}(V) \in \lambda^t.$$

Şekil 1.1. kullanılarak aşağıdaki diyagramı elde edilir. Şekil 1.3. üzerinde s. (sırasıyla h.h. ve k.) süreklilik (sırasıyla hemen hemen ve karşıt) kavramları için kısaltma olarak kullanıldı. Gerektirmelerin hiçbirinin tersi genelde doğru değildir.



2.BÖLÜM

HEMEN HEMEN KARŞIT S-G-SÜREKLİ FONKSİYON VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $Z \in RO(Q, \mu)$ için, $f^{-1}(Z) \in SGC(P, \lambda)$ ise bu takdirde f fonksiyonuna hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.1.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) f fonksiyonu, hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli dir;
- (2) Her $F \in RC(Q, \mu)$ için, $f^{-1}(F) \in SGO(P, \lambda)$ dir.
- (3) Q kümesinin her açık T alt kümesinin ters görüntüsü, $f^{-1}(Int(Cl(T))) \in SGC(P, \lambda)$
- (4) Q kümesinin her kapalı R alt kümesinin ters görüntüsü, $f^{-1}(Cl(Int(R))) \in SGO(P, \lambda)$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Her $F \in RC(Q, \mu)$ olsun. $(Q - F) \in RO(Q, \mu)$ ve (1) den $f^{-1}((Q - F)) \in SGC(P, \lambda)$ olduğundan $f^{-1}(F) \in SGO(P, \lambda)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Bu ispat (1) $\Rightarrow$ (2) ye benzer şekilde ispat edilebilir.

(1) $\Rightarrow$ (3) $T \in \mu$ olsun. $Int(Cl(T)) \in RO(Q, \mu)$ ve $f^{-1}(Int(Cl(T))) \in SGC(P, \lambda)$ kullanılarak bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (1) açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (4) ispatı (1) $\Rightarrow$ (3) e benzer şekilde tümlleme işlemi yardımıyla ispatlanır.

(4) $\Rightarrow$ (2) açıktır.

Teorem 2.2.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ bir fonksiyon hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli ise aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) Her bir $p \in P$ ve her $f(p)$ yi kapsayan Q de regüler kapalı F için vardır p yi kapsayan P de bir S-g açık K kümesi öyle ki $f(K) \subset F$ dir.

(2) Her bir $p \in P$ ve her $f(p)$ yi kapsamayan Q nin regüler açık K kümesi için vardır p yi kapsamayan P de bir S -g kapalı V kümesi öyle ki $f^{-1}(K) \subset V$ dir.

İspat: (1) ve (2) nin ispatları benzer olduğundan sadece (1) in ispatını yapacağız. $f(p)$ yi içeren Q nun regüler kapalı kümesi F olsun. Teorem 2.1. (2) den $f^{-1}(F) \in SGO(P, \lambda)$ ve $p \in f^{-1}(F)$ tir. $K = f^{-1}(F)$ alırsak $f(K) \subset F$ anında elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $Z \in RO(Q, \mu)$ için,

- (1) $f^{-1}(Z) \in f_s(P, \lambda)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna, hemen hemen (almost) f_s - sürekli,
- (2) $f^{-1}(Z) \in RSC(P, \lambda)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna, karşıt R-S dönüşüm (contra R-S map),
- (3) $f^{-1}(Z) \in MK(P, \lambda)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna, düzenli *-bağlantılı küme (regular set *-connected),
- (4) $f^{-1}(Z), \lambda^*$ -kapalı ise f fonksiyonuna, (θ, s) -S-sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.2. ve Tanım 1.3.1 ile verilen fonksiyon çeşitlerinin aralarındaki ilişkileri inceleyelim.

Önerme 2.1.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu (θ, s) -S-sürekli ise, f aynı zamanda hemen hemen karşıt (almost contra) S -g süreklidir.

İspat: Şekil 1.2. den ispatı açıktır.

Uyarı 2.1.([23]): Önerme 2.1. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.1.([23]): $P = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{x\}, \{y, z\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{x\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{x, y, z\} = P$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(x) = f(z) = z$ ve $f(y) = y$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{z\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere

$f^{-1}(Z) = \{x, z\} \subset \{x, y, z\} = P \in \lambda$ ve $(f^{-1}(Z))^* = (\{x, z\})^* = \{y, z\} \subset P$ olur.

$f^{-1}(Z) = \{x, z\}$ kümesi S -g kapalı olmasına rağmen $(f^{-1}(Z))^* = \{y, z\} \not\subset \{x, z\}$

olduğundan λ^* -kapalı değildir. Bu yüzden f fonksiyonu hemen hemen karşıt S -g sürekli fakat (θ, s) - S -sürekli değildir.

Önerme 2.2.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) ise, f aynı zamanda (θ, s) - S -sürekli dir.

İspat: Şekil 1.2. den ispatı açıktır.

Uyarı 2.2.([23]): Önerme 2.2. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.2.([23]): $P = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{1, 2, 3\} = P$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{1, 2\}, \{3\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ ve $f(3) = 3$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{3\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $((f^{-1}(Z))^* = (\{3\})^* = \emptyset \subset \{3\} = f^{-1}(Z)$, $f^{-1}(Z)$, P kümesi üzerinde λ^* -kapalı küme olmasına rağmen $(Int(f^{-1}(Z)))^* = (Int(\{3\}))^* = (\emptyset)^* = \emptyset \neq \{3\} = f^{-1}(Z)$ olup regüler S -kapalı küme değildir. Bu yüzden f fonksiyonu (θ, s) - S -sürekli dir fakat karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) değildir.

Önerme 2.3.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) ise, f aynı zamanda hemen hemen (almost) f_s -sürekli dir.

İspat: Teorem 1.2.1. sonucu ispat açıktır.

Uyarı 2.3.([23]): Önerme 2.3. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.([23]): $P = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{z\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{x, y, z\} = P$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu

$f(x) = f(z) = x$ ve $f(y) = z$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{z\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(Z) = \{y\}$, $(Int(f^{-1}(Z)))^* = (Int(\{y\}))^* = (\{y\})^* = \{y, z\} \supset \{y\} = f^{-1}(Z)$ olduğundan P kümesi üzerinde f_s -küme olmasına rağmen regüler S -kapalı küme değildir. Bu yüzden f fonksiyonu hemen hemen (almost) f_s -sürekli fakat karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) değildir.

Önerme 2.4.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu hemen hemen karşıt (almost contra) g -sürekli ise, f aynı zamanda hemen hemen karşıt (almost contra) S - g süreklidir.

İspat: Tanım 1.3.1. , Tanım 2.1. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılabilir.

Uyarı 2.4.([23]): Önerme 2.4. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.4.([23]): $P = \{x, y, z, t\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{x\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{x\}, \{z\}, \{x, z\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(x) = f(z) = z$, $f(y) = x$ ve $f(t) = y$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{z\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(Z) = \{x, z\}$, $Y = \{x, y, z\} \in \lambda$ ve $(f^{-1}(Z))^* = (\{x, z\})^* = \emptyset \subset Y$ olduğundan $f^{-1}(Z)$ kümesi S - g kapalı bir kümedir. Ancak $Cl(f^{-1}(Z)) = P \not\subset Y$ olduğundan $f^{-1}(Z)$ kümesi g -kapalı küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu hemen hemen karşıt (almost contra) S - g sürekli iken hemen hemen karşıt (almost contra) g -sürekli değildir.

Önerme 2.5.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu düzenli bağlantılı küme (regular connected set) ise, f aynı zamanda düzenli küme *-bağlantılı (regular set *-connected) dir.

İspat: Tanım 1.3.2. , Tanım 2.2. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.5.([23]): Önerme 2.5. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.5.([23]): $P = \{x, y, z, t\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{x\}, \{z, t\}, \{x, z, t\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{z\}, \{t\}, \{z, t\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(x) = x$, $f(y) = y$ ve $f(z) = f(t) = z$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{z\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(Z) = \{z, t\}$ kümesi açık kümedir. Fakat $(f^{-1}(Z))^* = (\{z, t\})^* = \emptyset \subset \{z, t\}$ kümesi λ^* -kapalı küme olmasına rağmen $Cl(f^{-1}(Z)) = \{y, z, t\} \not\subset \{z, t\}$ olup kapalı küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu düzenli küme bağlantılı (regular set *-connected) iken düzenli bağlantılı küme (regular connected set) değildir.

Önerme 2.6.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) ise, f aynı zamanda karşıt R -dönüşüm (contra R -map) dır.

İspat: Tanım 1.3.2. , Tanım 2.2. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.6.([23]): Önerme 2.6. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.6.([23]): $P = \{x, y, z, t\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{x, z\}, \{y, t\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{y\}, \{t\}, \{y, t\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(x) = x$, $f(z) = y$ ve $f(y) = f(t) = z$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{z\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(Z) = \{y, t\}$ kümesi için $Int(f^{-1}(Z)) = Int(\{y, t\}) = \{y, t\}$ ve $Cl(Int(f^{-1}(Z))) = Cl(Int(\{y, t\})) = \{y, t\}$ olduğundan $f^{-1}(Z)$ kümesi regüler kapalı bir kümedir. Ancak $(Int(f^{-1}(Z)))^* = (Int(\{y, t\}))^* = \emptyset \neq \{y, t\}$ olduğundan regüler S -kapalı küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu karşıt R -dönüşüm (contra R -map) olduğu halde karşıt R - S dönüşüm (contra R - S map) değildir.

Önerme 2.7.: $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu (θ, s) -sürekli ise, f aynı zamanda (θ, s) - S -sürekli dir.

İspat: Tanım 1.3.2. , Tanım 2.2. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.7.: Önerme 2.7. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.7.: $P = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{Q, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(3) = f(4) = c$, $f(1) = b$ ve $f(2) = a$ şeklinde tanımlansın. $V = \{c\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(V) = \{3, 4\}$ kümesi için $(f^{-1}(V))^* = (\{3, 4\})^* = \emptyset \subset \{3, 4\}$ ve olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi λ^* -kapalı kümedir. Ancak $Cl(f^{-1}(V)) = P \not\subset \{3, 4\}$ olduğundan kapalı küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu (θ, s) - S -sürekli olduğu halde (θ, s) -sürekli değildir.

Önerme 2.8.: $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu düzenli küme $*$ -bağlantılı (regular set $*$ -connected) ise, f aynı zamanda hemen hemen (almost) süreklidir.

İspat: Tanım 1.3.2. , Tanım 2.2. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.8: Önerme 2.8. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.8: $P = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{1\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{Q, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(3) = b$ ve $f(1) = f(2) = a$ şeklinde tanımlansın. $V = \{a\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(V) = \{1, 2\}$ kümesi açık kümedir. Fakat $(f^{-1}(V))^* = (\{1, 2\})^* = \{2, 3\} \not\subset \{1, 2\}$ kümesi λ^* -kapalı küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu hemen hemen (almost) sürekli iken düzenli küme bağlantılı (regular set $*$ -connected) değildir.

Önerme 2.9.: $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu düzenli küme $*$ -bağlantılı (regular set $*$ -connected) ise, f aynı zamanda (θ, s) - S -süreklidir.

İspat: Tanım 1.3.2. , Tanım 2.2. ve Şekil 1.2. kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.9: Önerme 2.9. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.9: $P = \{p, q, r\}$ kümesi üzerinde $\lambda = \{\emptyset, P, \{p\}, \{p, q\}\}$ topolojisi ve $S = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ ideali ve ayrıca $Q = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{Q, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(p) = 1, f(q) = 2, f(r) = 3$ ve şeklinde tanımlansın. $V = \{3\} \in RO(Q, \mu)$ olmak üzere $f^{-1}(V) = \{r\}$ kümesi açık küme değildir. Fakat $(f^{-1}(V))^* = (\{r\})^* = \{r\} \subset \{r\}$ kümesi λ^* -kapalı kümedir. Dolayısıyla, f fonksiyonu (θ, s) -S-sürekli iken düzenli küme*-bağlantılı (regular set *-connected) değildir.

Tanım 2.3.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu için $\forall Z \in \mu$ için $f^{-1}(Z) \in SGC(P, \lambda, S)$ oluyorsa bu fonksiyona karşıt (contra) S-g sürekli denir.

Teorem 2.3.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli ise karşıt (contra) S-g süreklidir.

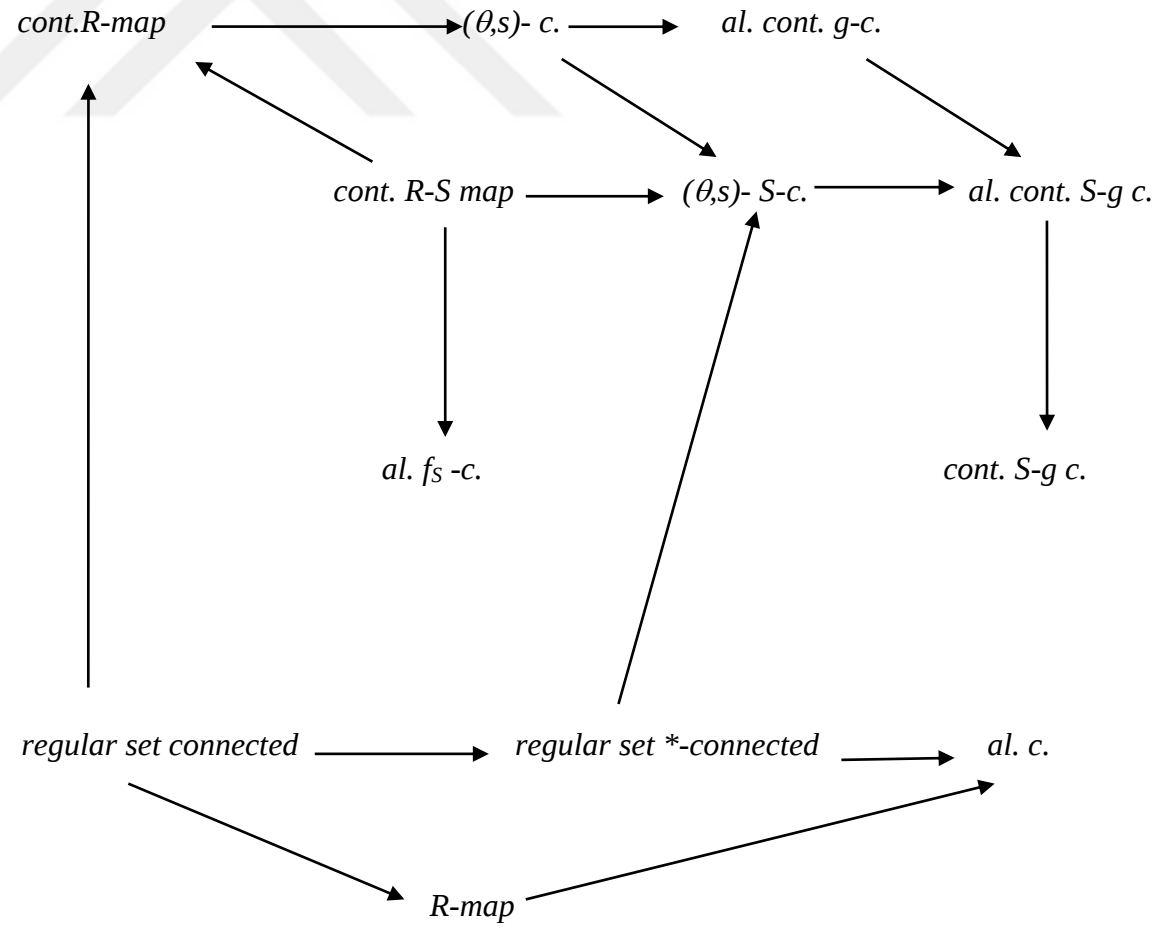
İspat: $Z \in RO(Q, \mu)$ kümesini alalım. Her regüler açık küme, açık olduğundan $Z \in \mu$ bulunur. f , hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli olduğundan $f^{-1}(Z) \in SGC(P, \lambda)$ bulunup f , aynı zamanda contra S-g sürekli bulunmuş olur.

Uyarı 2.10.([23]): Teorem 2.3. te verilen önermenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.10.([23]): $P = \{x, y, z, t\}$ kümesi üzerinde $S = \{\emptyset, \{y\}\}$ ideali ve

$\lambda = \{\emptyset, P, \{x\}, \{t\}, \{z\}, \{z, t\}, \{x, z\}, \{x, t\}, \{x, y, z\}, \{x, t, z\}\}$ topolojisi verilsin. Ayrıca $Q = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{\emptyset, Q, \{x\}, \{y, z\}\}$ ideali alalım. Bu takdirde $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu $f(x) = y, f(y) = f(z) = x, f(t) = z$ şeklinde tanımlansın. $Z = \{x\} \in \mu$ alalım. $f^{-1}(Z) = \{y, z\} \subset \{x, y, z\} = K \in \lambda$ ve $(f^{-1}(Z))^* = (\{y, z\})^* = \{y, z\} \subset K$, Z kümesi S-g kapalı kümedir. Buradan f , contra S-g sürekli olur. Diğer taraftan, $N = \{y, z\} \in RO(Q, \mu)$ alınıp $f^{-1}(N) = \{x, t\} = L \in \lambda$ ve $(f^{-1}(N))^* = (\{x, t\})^* = \{x, y\} \not\subset L$, N kümesi S-g kapalı küme değildir. Sonuçta f , hemen hemen karşıt (almost contra) S-g sürekli değildir.

Bu bölümde verilen tanımlar ve önermeler ışığında ve Şekil 1.3. kullanılarak aşağıdaki diyagram verilebilir.



Şekil 2.2.

Tanım 2.4.: $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $Z \in \mu$ için, $f^{-1}(Z) \in RO(P, \lambda)$ (sırasıyla açık) ise bu takdirde f fonksiyonuna *tamamen (completely) sürekli* [1] (sırasıyla sürekli) fonksiyon denir.

Teorem 2.4.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ ve $g : (Q, \mu, D) \rightarrow (R, \kappa)$ iki fonksiyon için, $gof : (P, \lambda, S) \rightarrow (R, \kappa)$ bir bileşke fonksiyon olsun. Aşağıdaki gerektirmeler doğrudur:

- (1) f , almost contra S-g sürekli ve g , R-map ise gof , almost contra S-g sürekli;dir;
- (2) f , contra S-g sürekli ve g , almost sürekli ise gof , almost contra S-g sürekli;dir;
- (3) f , almost contra S-g sürekli ve g , completely sürekli ise gof , contra S-g sürekli;dir;
- (4) f , contra S-g sürekli ve g , sürekli ise gof , contra S-g sürekli;dir.

İspat. (1) $V \in RO(R, \kappa)$ kümesini alalım. g fonksiyonu bir R-map olduğundan $g^{-1}(V) \in RO(Q, \mu)$ olur. f , almost contra S-g sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (gof)^{-1}(V) \in SGC(P, \lambda)$ olarak bulunur. Buradan gof fonksiyonu almost contra S-g sürekli olur.

(2) $V \in RO(R, \kappa)$ kümesini alalım. g , bir almost sürekli fonksiyon olduğundan $g^{-1}(V) \in \mu$ açık kümesi bulunur. f , contra S-g sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (gof)^{-1}(V) \in SGC(P, \lambda)$ olup gof , almost contra S-g sürekli bir fonksiyon olur.

(3) ispatı (1) maddeye benzer şekilde yapılır.

(4) ispatı (2) maddeye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.5.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu)$ fonksiyonu almost contra S-g sürekli ve almost sürekli ise f , regular set *-connected.

İspat. $V \in RO(Q, \mu)$ kümesini alalım. F , almost contra S-g sürekli ve almost sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ S-g-kapalı ve açıktır. Bu yüzden $f^{-1}(V)$, λ^* -kapalı küme ve mk- λ -açık küme olur. Buradan f , regular set *-connected bulunur.

Tanım 2.5.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu, D)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

- a) Her $K \subset P$ S -g-açık kümesi için, $f(K) \subseteq Q$ D -g-açık küme oluyorsa; f fonksiyonuna S -g-açık fonksiyon denir.
- b) Her $K \subset P$ S -g-kapalı kümesi için, $f(K) \subseteq Q$ D -g-kapalı küme oluyorsa; f fonksiyonuna S -g-kapalı fonksiyon denir.

Teorem 2.6.([23]): $f : (P, \lambda, S) \rightarrow (Q, \mu, D)$ örten ve S -g-açık (ya da S -g-kapalı) ve $g : (Q, \mu, D) \rightarrow (R, \kappa)$ bir fonksiyon olsun. Öyle ki, $gof : (P, \lambda, S) \rightarrow (R, \kappa)$ almost contra S -g sürekli ise g , almost contra D -g süreklidir.

İspat: V, R' de regüler kapalı (ya da regüler açık) bir küme olsun. gof , almost contra S -g sürekli iken $(gof)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ S -g-açıktır.(ya da S -g-kapalıdır)

f , örten ve S -g açık (ya da S -g kapalı) olduğundan $f(f^{-1}(g^{-1}(V))) = g^{-1}(V)$ kümesi D -g açıktır.(ya da D -g kapalıdır.) Buradan, g fonksiyonu almost contra D -g süreklidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

İnternet ve kütüphane aracılığıyla elde edilen hem genel topoloji, hem ideal topoloji hem de topolojik uzaylarda g-kapalı kümeler ile ilgili bazı temel makaleler ve kitaplar incelenerek, orijinal bir çalışma yapılmıştır.



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Topolojik uzaylarda tanımlanan hemen hemen karşıt g -süreklilik kavramının ideal topolojik uzaylarda sağladığı özellikler elde edildi.

Bu tezde tanımlanan m_k -açık kümenin hem açık hem kapalı kümeden daha zayıf ve λ^* -kapalı küme ve açık kümeden daha güçlü bir küme olduğu gösterildi. Bu küme üzerinden tanımlanan bir hemen hemen süreklilik çeşidi tanımlandı. Buradan eğer bir fonksiyon hemen hemen karşıt S - g sürekli ve hemen hemen sürekli olduğu takdirde düzenli küme $*$ -bağlantılı fonksiyon olur ki buradan bir ayrışım elde edilir.



KAYNAKLAR

- [1] Arya, S. P. and Gupta, R., 1974, On strongly continuous mappings, Kyungpook Math. J., 14, 131-143.
- [2] Balachandran, K., Sundaram, P. and Maki, H. On generalized continuous maps in topological spaces. Mem Fac Sci Kochi Univ (Math) 1991;12:5-13.
- [3] Bourbaki, N., General Topology, Part I. Reading, MA: Addison Wesley, 1996.
- [4] Carnahan, D.A. Some properties related to compactness in topological spaces. PhD Thesis, Univ of Arkansas, 1973.
- [5] Dontchev, J. Contra-continuous functions and strongly S-closed mappings. Int J Math & Math Sci. 1996;19:303-10.
- [6] Dontchev, J., Ganster, M., Noiri, T., Unified Operation Approach of Generalized Closed Sets via Topological Ideals, Math. Japonica, 49(1999), No: 3, 395-401.
- [7] Dontchev, J., Ganster, M. and Reilly, I.L. More on almost s-continuity. Indian J Math 1999;41:139-46.
- [8] Dunham, W. and Levine, N., Further results on generalized closed sets in topological spaces. Kyungpook Math J 1980;20:169-75.
- [9] Dunham, W., A new closure operator for non- T_1 topologies. Kyungpook Math J 1982;22:55-60.
- [10] Ekici, E. Almost contra-precontinuous functions. Bull Malays Math Sci Soc 2004;27(1):53-65.
- [11] Ekici, E. Another form of contra-continuity. Kochi J Math 2006;1:21-9.
- [12] Ekici, E. On (LC,s)-continuous functions. Chaos, Solitons & Fractals 2008;38:430-8.
- [13] Hayashi, E.. 1964. Topologies defined by local properties, Math. Ann. 156, 205-215.
- [14] Jankovic, D., Hamlett, T.R. New Topologies from Old via Ideals, Amer. Math. Monthly 97(1990), no. 4, 295-310.
- [15] Joseph, J.K and Kwak, M.K. On S-closed spaces. Proc Amer Math Soc 1980;80:341-8.

- [16] Keskin, A., Noiri, T., Almost Contra g - Continuous Functions, Chaos, Solitons and Fractals, 42(2009), 238-246.
- [17] Keskin, A., Noiri, T., Yüksel, S., f_1 - Sets and Decomposition of RIC-Continuity, Acta. Math. Hungar. 107(4) (2004), 307-313.
- [18] Keskin, A. 2003. New decompositions of contiunity in ideal topological spaces, PhD. Thesis, Konya
- [19] Kuratowski, K., 1933, Topologie I, Warszawa.
- [20] Levine, N., Generalized Closed Sets in Topology, Rendicontidel Circolo Matematico di Palermo 19(1), (1970), 89-96.
- [21] Njastad, O., On some classes of nearly open sets. Pasific J Math 1965; 15: 961-70.
- [22] Noiri, T. On δ -continuous functions. J Korean Math Soc 1980;16:161-6.
- [23] Safak(Kocabas), M., Keskin Kaymakcı, A. , *A Mapping for S-g-Closedness*, International Journal of Mathematics Trends and Technology 65.7 (2019): 218-224.
- [24] Singal, M.K and Singal, A.R. Almost-continuous mappings. Yokohama Math J 1968;16:63-73.
- [25] Stone, M.H.. Applications of the theory of Boolean rings to general topology TAMS 1937; 41:375-81.
- [26] Velicko, N.V.. H-closed topological spaces. Amer Math Soc Transl 1968; 78: 103-18.
- [27] Vaidyanathaswamy, R..1960. Set Topology, Chelsea Publishing Company, New York.
- [28] Yuksel, S., Keskin, A. and Noiri, T. 2004. Idealization of decomposition theorem, Acta Math. Hungar. 102 (4), 269-277.
- [29] Yuksel, S., Genel Topoloji,7. Baskı. 20,21,43,51,56

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Melahat ŞAFAK(KOCABAŞ)
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : KONYA-1992
Telefon :
Faks :
e-mail : melahat_kocabas@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Konya Anadolu İ.H.L.	2010
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Mat.Böl.	2014
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
	M.E.B	Öğretmen

YAYINLAR

Melahat Safak(Kocabas), Aynur Keskin Kaymakcı "A Mapping for S - g -Closedness"
 International Journal of Mathematics Trends and Technology 65.7 (2019): 218-224.