



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BİLGİSAYAR DESTEKLİ ARDIŞIK TÜREV
METODU İLE PADÉ YAKLAŞIMININ
BLASIUS DENKLEMİNİN BİR FORMUNA
UYGULANMASI**

İmran TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

İmran Turan tarafından hazırlanan “Bilgisayar Destekli Ardışık Türev Metodu ile Padé Yaklaşımının Blasius Denkleminin Bir Formuna Uygulanması” adlı tez çalışması 05/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Şükrü Ulaş ATMACA

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa Yılmaz
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



İmran TURAN

05/08/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLGİSAYAR DESTEKLİ ARDIŞIK TÜREV METODU İLE PADÉ YAKLAŞIMININ BLASIUS DENKLEMİNİN BİR FORMUNA UYGULANMASI

İmran TURAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

2019, ix+36 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Dr. Öğr. Üyesi Şükrü Ulaş ATMACA

Blasius denklemi, akışkanlar mekaniğinin en ünlü denklemlerinden biridir ve yarı sonsuz düz bir plaka üzerinden geçen sıkıştırılamaz bir akışkan problemini temsil eder. Blasius denkleminin sonsuzda sınır şartı vardır ve sonsuzda sınır şartı olan problemler genellikle sayısal çözüm yöntemleri için bir sorun teşkil eder. Bu çalışmada bu zorluğun üstesinden gelmek için, ardışık türev metodu ile Padé yaklaşımı Blasius denklemine birlikte uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, diğer yöntemlerle yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Blasius denklemi, Ardışık türev metodu, Padé yaklaşımı, yarı sonsuz düz plaka

ABSTRACT

MS THESIS

APPLICATION OF THE COMPUTER-ASSISTED SUCCESSIVE DIFFERENTIATION METHOD WITH THE PADÉ APPROXIMANT TO A FORM OF BLASIUS EQUATION

İmran TURAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

2019, ix+36 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Asst. Prof. Dr. Şükrü Ulaş ATMACA

The Blasius equation is one of the most famous equations of fluid dynamics and represents the problem of an incompressible fluid that passes on a semi-infinity flat plate. The Blasius equation has boundary conditions at infinity and problems with boundary conditions at infinity are often a problem for numerical solution methods. In this study, in order to overcome this difficulty, successive differentiation method and Padé approximation are applied together to Blasius equation. The results obtained were compared with other studies.

Keywords: Blasius equation, Successive differentiation method, Padé approximation, semi-infinity flat plate

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek bana yol gösteren saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER'e ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İmran TURAN
KONYA-2019



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. BLASIUS DENKLEMİ	3
2.1. Blasius Denklemine Elde Edilişi	3
2.2. Blasius Denklemine İki Ayrı Formu	6
3. ARDIŞIK TÜREV METODU	8
3.1. Birinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı	9
3.2. İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı	10
3.3. Bernoulli Denklemine Uygulanışı	11
3.3.1. Sabit Katsayılı Bernoulli Denklemi	12
3.3.2. Değişken Katsayılı Bernoulli Denklemi	13
3.4. Riccati Denklemine Uygulanışı	13
3.4.1. Sabit Katsayılı Riccati Denklemi	14
3.4.2. Değişken Katsayılı Riccati Denklemi	15
3.5. Birinci Mertebeden Abel Diferansiyel Denklemine Uygulanışı	15
3.6. Airy Denklemine Uygulanışı	16
3.7. İkinci Mertebe Euler Denklemine Uygulanışı	17
4. PADÉ YAKLAŞIMI	20
5. ARDIŞIK TÜREV METODU İLE PADÉ YAKLAŞIMININ BLASIUS DENKLEMİNE UYGULANMASI	29
6. SONUÇLAR	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

T_w	: Duvarın sıcaklığı
T_∞	: Serbest akış sıcaklığı
U_∞	: Serbest akış hızı
ν	: Viskozite
$\psi(x, y)$	: Akış fonksiyonu
R	: Reel sayı
η	: Benzerlik değişkeni
T	: Sıcaklık
u	: x eksenî yönündeki hız bileşeni
v	: y eksenî yönündeki hız bileşeni
α	: Termal yayılma
f	: Boyutsuz akış fonksiyonu
θ	: Boyutsuz sıcaklık fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Düz bir plaka üzerinde hız ve sıcaklık sınır tabakaları.....	4
Şekil 2.2 Bir vektör alanı u	5
Şekil 5.1 Adomian ayrıştırma metodu, diferensiyel dönüşüm metodu, ardışık türev metodu ve varyasyonel iterasyon metodundan elde edilen sonuçlar.....	33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Padé $[L/M]$ yaklaşım tablosu.....	22
Çizelge 5.1 Padé yaklaşımları ve A 'nın nümerik değerleri.....	31
Çizelge 5.2 Adomian ayrıştırma metodu, diferensiyel dönüşüm metodu, ardışık türev metodu ve varyasyonel iterasyon metodundan elde edilen sonuçlar.....	32

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Blasius denklemi, akışkanlar mekaniğinin en önemli denklemlerinden biridir ve yarı sonsuz düz bir plaka üzerinden geçen sıkıştırılamaz bir akışkan problemini temsil eder. Blasius denklemlerinin sonsuzda sınır şartı vardır ve sonsuzda sınır şartı olan problemler genellikle sayısal çözüm yöntemleri için bir sorun teşkil eder (Peker ve ark., 2011). Bu çalışmada bu zorluğun üstesinden gelmek için, Ardışık türev metodu Padé yaklaşımı ile birlikte denkleme uygulanacaktır.

Lineer olmayan adi diferensiyel denklemleri çözmek için Boyd (1997) Taylor seri açılımını diyagonal Padé yaklaşımlarıyla kullanmıştır. Wazwaz (2001) yüksek mertebeden integro-diferensiyel denklemlerin sınır değer problemlerini çözmek için analitik ve sayısal yöntem sunmuştur. Padé yaklaşımına dayalı yeni bir öz değer analiz yöntemini Yang ve arkadaşları (2001) geliştirmişlerdir. Yöntemin bir uygulaması olarak, sayısal bir örnek verilmiş ve ikinci mertebeden pertürbasyon yöntemi ve önerilen yöntemin öz değerlerini karşılaştırmışlardır. Çelik ve Bayram (2003), diferensiyel cebirsel bir denklemi çözmek için öncelikle kuvvet serisini hesaplayıp sonra Maple kullanarak diferensiyel cebirsel denklemi Padé seri formuna dönüştürmüşlerdir.

Yarı sonsuz düz bir plaka üzerinde termal sınır katmanındaki hız ve sıcaklık alanını Kuo (2004) incelemiş ve diferensiyel dönüşüm metodunu bu hız ve termal sınır-tabaka problemlerinin bazı çözümlerini belirlemek için kullanmıştır. Değiştirilmiş Ayırıştırma metodunu, akışkanlar mekaniğindeki sınır tabakalarında görünen lineer olmayan diferensiyel denklemlerin analitik işlemi için Wazwaz (2006) uygulamıştır. Değiştirilen yöntem, seri çözümün yakınsamasını hızlandırmıştır. Elde edilen seri çözümü diyagonal Padé yaklaşımlarıyla birleştirmiştir. Varyasyonel iterasyon metodunu, Wazwaz (2007) sınır tabaka denklemlerinden gelen lineer olmayan Blasius denkleminin iki formuna yarı sonsuz bir alanda uygulamış ve elde edilen seri çözümü diyagonal Padé yaklaşımlarıyla birleştirmiştir.

Sınır tabaka teorisindeki Falkner-Skan denkleminin çözümü için Ganapol (2010) Maclaurin serisine dayalı bir algoritma sunmuş, Blasius ve Falkner-Skan sınır tabaka denklemlerinin yüksek hassasiyetli çözümleri üzerine çalışma yapmıştır. Peker ve arkadaşları (2011) Blasius denklemini diferensiyel dönüşüm metodu ve Padé yaklaşımını birlikte kullanarak çözmüşlerdir, elde edilen sonuçları literatürdeki diğer metodlarla karşılaştırmışlardır. Lineer olmayan Bratu problemini ve çeşitli Bratu tipi

denklemleri çözmek için ardışık türev metodunu Wazwaz (2016) uygulamıştır. Khuri ve Wazwaz (2018) lineer, lineer olmayan, homojen ve homojen olmayan adi diferensiyel denklemlerin çözümü için bilgisayar destekli ardışık türev metodunun kullanımını göstermişlerdir. Ardışık türev metodu, verilen denklemin lineer olmayan terimlerin dönüştürülmesine veya Lagrange çarpanlarının kullanılmasına gerek kalmadan art arda türevinin alınmasının değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Metod, fonksiyonun türevlerinin değerlerini $x=0$ da bulmak için verilen herhangi bir adi diferensiyel denklemin ardışık türevlerini alır. Bulunan değerler, adi diferensiyel denklemin çözümünün Taylor serisini oluşturmak için kullanılır. Algoritma yeni bir varsayım gerektirmez, bu nedenle problemi doğrudan ele alır. Bernoulli, Riccati, Abel ve ikinci dereceden Euler denklemleri gibi bazıları sabit ve değişken katsayılı iyi bilinen denklemlere uygulanmıştır. Yöntem, Volterra integral denklemlerinde de etkili bir şekilde çalışmaktadır. Ayrıca diferensiyel denklemlerle modellenen çeşitli mühendislik problemlerine genişletilebilir. Bu yöntem basit, yeni ve son derece hassastır.

2. BLASIUS DENKLEMİ

Sınır tabakası teorisi, hem doğa hem de birçok mühendislik uygulamasında yaygın olduğundan, akışkan dinamiğinin en önemli dallarından birini oluşturur. Sınır tabakası teorisi ile ilgili problemleri çözmek, genel olarak, denklemlerin lineer olmama ve çok boyutlu karakterinden dolayı zorlu bir çaba gerektirir. Literatürdeki Navier-Stokes denklemlerinin tamamı için makul miktarda kesin çözüm bulunmasına rağmen, bunlar sadece bazı özel durumlar ve geometriler için geçerlidir (White ve Corfield, 2006).

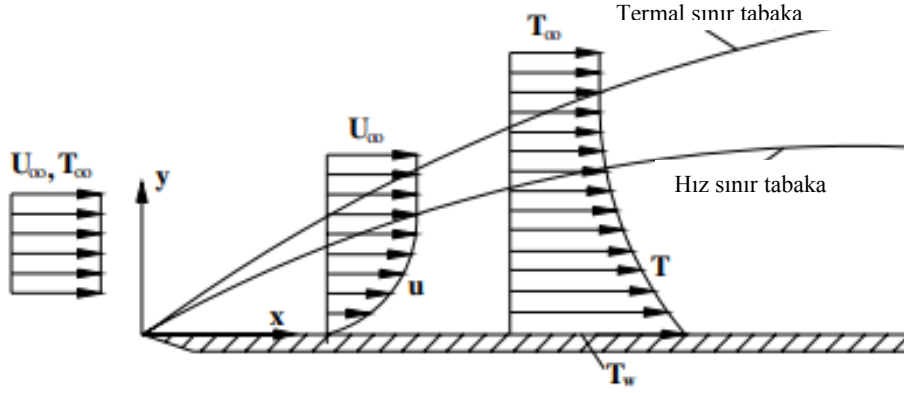
Bir akışkanın atalet kuvvetlerinin viskozite kuvvetlerine olan oranı yani Reynolds sayısı yüksek olan bir dış akış problemini çözmek için etkili bir yaklaşım, ilk olarak 1904 yılında Prandtl tarafından geliştirilen sınır tabakası analiz tekniği olarak bilinir. 1908 yılında, öğrencilerinden biri olan Blasius, laminar sınır tabaka akışının iyi bilinen bir problemini düz bir plaka üzerinde adi bir diferensiyel denkleme dönüştürmek için bir teknik ortaya koydu. Blasius denklemi birçok mühendislik uygulamasında büyük öneme sahiptir çünkü laminar dış akışlarda sınır tabaka kalınlığı ve toplam sürtünme kuvveti için çok iyi yaklaşımlar sağlar. Örneğin, bir laminar akışta ince bir kanat üzerinde etkiyen sürtünme kuvveti, Blasius denklemi kullanılarak çok iyi bir şekilde modellenir (Schlichting ve Gersten, 2016).

1908 de literatürdeki ilk ortaya çıkmasından itibaren (White ve Corfield, 2006), düz bir plaka üzerinde viskoz akışı tanımlayan Blasius denklemi, fizikçiler, mühendisler, matematikçiler ve sayısal analistler için sıvı akışına uygulanması sebebiyle büyük bir öneme sahiptir. Bu adi diferensiyel denklem, fiziksel, matematiksel ve sayısal zorluklar bakımından oldukça zengindir. Sabit bir aşılma yüzey üzerinde iki boyutlu akış, parçacıklar yüzeye yakın serbest akışa göre daha yavaş hareket ettikçe bir sınır tabakası oluşturur (Ganapol, 2010). Blasius denklemi, sınır tabaka teorisindeki laminar viskoz bir akış olan sıvının hız profilini yarı sonsuz bir aralıkta tanımlar (burada akışkan olarak kastettiğimiz fiziksel sıvılar veya gazlardır). Utz 1978 de Blasius denkleminin çözümünün varlığı üzerine bir çalışma yapmıştır.

Blasius denklemi, akışkanlar mekaniğinin en önemli denklemlerinden biridir.

2.1. Blasius Denkleminin Elde Edilişi

Blasius denklemi, Şekil 2.1. de gösterilen düz bir plaka üzerinde tanımlanabilir:



Şekil 2.1. Düz bir plaka üzerinde hız ve sıcaklık sınır tabakaları.

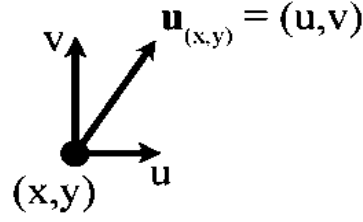
Viskoz bir akışkanın, Şekil 2.1 de gösterildiği gibi yarı sonsuz düz bir plaka üzerinde akışını düşünün. Duvarın sıcaklığı (T_w), homojen ve sabittir ve serbest akış sıcaklığından (T_∞) daha yüksektir. Serbest akış hızının (U_∞), aynı şekilde homojen ve sabit olduğu varsayılır. Ayrıca, laminar sınır katmanındaki akışın iki boyutlu olduğu ve viskoz dağılımından kaynaklanan sıcaklık değişikliklerinin küçük olduğu varsayımıyla, süreklilik denklemi ve sınır tabakası denklemleri şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

Burada u ve v elemanları, akışkanın sırasıyla x ve y koordinat eksenleri yönündeki hız bileşenleridir. T , plakanın çevresindeki sıcaklık dağılımıdır ve sınır koşulları aşağıda verilir:



Şekil 2.2. Bir vektör alanı u (akışkanın hızını gösterir)

$$\begin{aligned} y=0 \quad \text{iken} \quad u=v=0 \quad \text{ve} \quad T=T_w, \\ y \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad u \rightarrow U_\infty \quad \text{ve} \quad T=T_\infty, \\ x=0 \quad \text{iken} \quad u=U_\infty \quad \text{ve} \quad T=T_\infty. \end{aligned}$$

Bir akış fonksiyonu $\psi(x, y)$ şöyle verilir:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ve} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.4)$$

(2.4) deki ifadeleri, denklem (2.1) de yerine koyarsak (yani sınır tabaka denklemlerini akış fonksiyonu cinsinden yazarsak) momentum denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (2.5)$$

Denklem (2.4) ün integrali alındığında (benzerlik) değişken dönüşümleri şu şekilde bulunur:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{U_\infty \nu x}}, \quad (2.6)$$

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (2.7)$$

denklem (2.6) ve (2.7) yi denklem (2.5) de yerine koyarsak:

$$\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = 0$$

olur. Sınır şartları şu şekilde verilir:

$$\eta = 0: \quad f(0) = \frac{df(0)}{d\eta} = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \frac{df(\infty)}{d\eta} = 1.$$

Boyutsuz sıcaklık parametresi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}. \quad (2.8)$$

(2.8) numaralı ifade, denklem (2.3) de yerine yazılırsa, sınır tabaka enerji denklemi o zaman şu şekilde bulunur (Kuo, 2004):

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot f(\eta) \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (\text{Pr} = \nu / \alpha = 1) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad \theta = 0, \\ \eta \rightarrow \infty: & \quad \theta = 1. \end{aligned}$$

Blasius'un serbest salınımını modelleyen diferensiyel denklem, sürtünme ihmal edildiğinde aşağıdaki gibi yazılır:

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (2.10)$$

2.2. Blasius Denkleminin İki Ayrı Formu

Blasius denkleminin 1. Formu, (Wazwaz, 2007)

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Blasius denkleminin 2. Formu, (Wazwaz, 2007)

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0, \quad -\infty < x < 0. \quad (2.12)$$

şeklindedir.

Görüldüğü üzere Blasius denklemlerinin sonsuzda sınır şartı vardır ve bu durum sayısal çözüm yöntemleri için zorluk teşkil etmektedir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için, Padé yaklaşımları, elde edilen serileri sayısal yaklaşımlar için manipüle etmek üzere uygulanabilir (Peker ve ark., 2011).

Çalışmamızda Blasius denkleminin,

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0, \quad -\infty < x < 0. \quad (2.13)$$

formu kullanılacaktır.

3. ARDIŞIK TÜREV METODU

Adi diferensiyel denklemler, popülasyon büyüme modelleri, av-avcı denklemleri, kimyasal ve biyolojik modeller gibi bilim ve mühendislikteki çeşitli problemleri tanımlamak için matematiksel modellemede kullanılır (Wazwaz, 2016).

Adi diferensiyel denklemlerin keşfi, Leibniz, Newton, Bernoulli ve diğerlerine kadar uzanır. Literatürde adi diferensiyel denklemleri çözmek için daha önce birçok geleneksel yöntem kullanılmıştır. Diferensiyel denklemleri çözmek için farklı geleneksel yöntemler vardır ve her bir diferensiyel denklem türü belirli bir yöntemle çözülür. Bu geleneksel yöntemlerin birçoğu, adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çalışmasında ve integral denklemlerde kullanılır. Lineer olmayan denklemleri çözme yöntemleri, lineer denklemleri çözmek için kullanılanlardan ayırt edilir (Khuri ve Wazwaz, 2018).

Birçok araştırmacının temel kaygısı, adi ve kısmi diferensiyel denklemler ve integral denklemler için işe yarayan birleşik bir yöntem bulmaktır. Bu alanda çalışan araştırmacılar, çoğu adi diferensiyel denklem türü için etkili bir şekilde çalışabilecek daha pratik ve birleşik yöntemleri keşfetmişlerdir. Araştırmacılar, analitik ve nümerik olarak diferensiyel ve integral denklemleri çözmek için yeni yöntemler keşfetmeye hala devam ediyorlar. Araştırmacılar, büyük bir diferensiyel ve integral denklem sınıfını çözebilecek kapasitede güvenilir yöntemler bulmayı hedefliyorlar. Adomian tarafından geliştirilen Adomian ayrışma metodu, homojen veya homojen olmayan adi diferensiyel denklemlerin işlenmesinde kullanılabilecek güçlü bir yöntemdir. Bununla birlikte Adomian ayrışma metodu, lineer olmayan denklemleri ve adi diferensiyel denklemleri çözmek için Adomian polinomlarının türetilmesini gerektirir. Belirtilen yöntemler, incelenen denklem için seri çözüm elde etmek üzere uyarlandı (Khuri ve Wazwaz, 2018).

Ardışık türev metodu lineer ve lineer olmayan, homojen ve homojen olmayan adi diferensiyel denklemleri çözmek için güçlü bir teknik oluşturmayı hedefler. Metot, esasen denklemin lineer olmayan terimlerinin dönüştürülmesine veya Lagrange çarpanlarının kullanılmasına gerek kalmadan art arda türevinin alınmasının değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır.

Ardışık türev metodu verilen diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden teriminin birçok kez art arda türevinin alınıp, her adımda $x=0$ daki sonuç fonksiyonlarının değerleri belirlenir. Bu değerleri belirledikten sonra ele alınan

denklemin çözümünün Taylor serisi oluşturulur. Elde edilen seri, çözüm varsa analitik bir çözüme dönüşür; aksi takdirde, seri sayısal hesaplamalar için kullanılabilir. Bu tekniğin lineer, lineer olmayan denklemler ve homojen veya homojen olmayan durumlar için, başka bir varsayıma ihtiyaç duymadan doğrudan kullanılabileceğini belirtmekte fayda vardır (Khuri ve Wazwaz, 2018). Ardışık türev metodu adi diferensiyel denklemlerin üstesinden gelmeyi amaçlayan bilgisayar destekli bir teknik sunmayı amaçlamaktadır.

Ardışık türev metodunun ana adımlarını göstermek için, genelleştirilmiş bir n .inci mertebeden diferensiyel denklemi şu şekilde ele alalım:

$$u^{(n)}(x) = F(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) + G(x), \quad (3.1)$$

$$u(0) = \alpha_0, u'(0) = \alpha_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1},$$

burada F , $u(x)$ in lineer veya lineer olmayan operatörü olabilir ve bunun sabit katsayılı veya değişken katsayılı türevleri ve $\alpha_i \leq i \leq (n-1)$ başlangıç koşulları verilir. Denklemin her iki tarafının k kez türevini alalım:

$$(u^{(n)})^{(k)}(x) = F^{(k)}(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) + G^{(k)}(x), k \geq 1. \quad (3.2)$$

Her türev alma adımında $x=0$ kullanılarak, $u^{(n)}(x)$ fonksiyonlarının değerleri hesaplanır. Bu değerleri belirledikten sonra, verilen ilk koşulları kullanarak, $u(x)$ çözümünün Taylor serisi bulunur (Khuri ve Wazwaz, 2018). Yöntem aşağıdaki denklemlere (Khuri ve Wazwaz, 2018) deki makalesinden uyarlandı.

3.1. Birinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı

Birinci mertebeden adi diferensiyel denklemi ele alalım:

$$v'(x) - P(x)v(x) = Q(x), \quad v(0) = \alpha_0. \quad (3.3)$$

Bu denklemi en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini alırsak:

$$\begin{aligned}
&v(x) \\
&v'(x) = P(x)v(x) + Q(x), \\
&v''(x) = P(x)v'(x) + P'(x)v(x) + Q'(x), \\
&v'''(x) = P(x)v''(x) + 2P'(x)v'(x) + P''(x)v(x) + Q''(x), \\
&v^{(iv)}(x) = P(x)v'''(x) + 3P'(x)v''(x) + 3P''(x)v'(x) + P'''(x)v(x) + Q'''(x), \\
&v^{(v)}(x) = P(x)v^{(iv)}(x) + 4P'(x)v'''(x) + 6P''(x)v''(x) + 4P'''(x)v'(x) + P^{(iv)}(x)v(x) + Q^{(iv)}(x), \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Denklem (3.4) $x=0$ için aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
&v(0) = \alpha_0 \\
&v'(0) = P(0)v(0) + Q(0) = \alpha_1, \\
&v''(0) = P(0)v'(0) + P'(0)v(0) + Q'(0) = \alpha_2, \\
&v'''(0) = P(0)v''(0) + 2P'(0)v'(0) + P''(0)v(0) + Q''(0) = \alpha_3, \\
&v^{(iv)}(0) = P(0)v'''(0) + 3P'(0)v''(0) + 3P''(0)v'(0) + P'''(0)v(0) + Q'''(0) = \alpha_4, \\
&v^{(v)}(0) = P(0)v^{(iv)}(0) + 4P'(0)v'''(0) + 6P''(0)v''(0) + 4P'''(0)v'(0) + P^{(iv)}(0)v(0) + Q^{(iv)}(0) = \alpha_5, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Fonksiyonun türevlerinin $x=0$ noktasında değerlerini belirledikten sonra, $v(x)$ çözümünün Taylor serisi,

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \frac{\alpha_3}{3!} x^3 + \frac{\alpha_4}{4!} x^4 + \dots \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır.

3.2. İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı

İkinci mertebeden adi diferensiyel denklemi ele alalım:

$$v''(x) - P(x)v'(x) - H(x)v(x) = Q(x), \quad v(0) = \alpha_0 \quad v'(0) = \alpha_1. \tag{3.7}$$

Daha önce olduğu gibi bu denklemi en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini alırsak:

$$\begin{aligned}
 v(x) \\
 v'(x) =, \\
 v''(x) &= P(x)v'(x) + H(x)v(x) + Q(x), \\
 v'''(x) &= P(x)v''(x) + (P'(x) + H(x))v'(x) + H'(x)v(x) + Q'(x), \\
 v^{(iv)}(x) &= P(x)v'''(x) + (2P'(x) + H(x))v''(x) + (P''(x) + 2H'(x))v'(x) + H''(x)v(x) + Q''(x), \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.8) $x=0$ için aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \alpha_0 \\
 v'(0) &= \alpha_1, \\
 v''(0) &= P(0)v'(0) + H(0)v(0) + Q(0) = \alpha_2, \\
 v'''(0) &= P(0)v''(0) + (P'(0) + H(0))v'(0) + H'(0)v(0) + Q'(0) = \alpha_3, \\
 v^{(iv)}(0) &= P(0)v'''(0) + (2P'(0) + H(0))v''(0) + (P''(0) + 2H'(0))v'(0) + H''(0)v(0) + Q''(0) = \alpha_4, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fonksiyonun türevlerinin $x=0$ noktasında değerlerini belirledikten sonra, $v(x)$ çözümünün Taylor serisi,

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \frac{\alpha_3}{3!} x^3 + \frac{\alpha_4}{4!} x^4 + \dots \tag{3.10}$$

şeklinde yazılır.

3.3. Bernoulli Denklemine Uygulanışı

Standart Bernoulli denklemi:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad y(0) = \alpha \tag{3.11}$$

şeklindedir. Bu denklem sabit katsayılı ve değişken katsayılı olarak örnekler üzerinde incelenecektir.

3.3.1. Sabit Katsayılı Bernoulli Denklemi

Aşağıdaki gibi sabit katsayılı bir Bernoulli denklemini ele alalım:

$$y' - y - y^3 = 0, \quad y(0) = 1. \quad (3.12)$$

Denklemini en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned} y(x) & \quad , & y(0) &= 1, \\ y'(x) &= y + y^3, & y'(0) &= 2, \\ y''(x) &= y' + 3y^2 y', & y''(0) &= 8, \\ y'''(x) &= y'' + 3y^2 y'' + 6y(y')^2, & y'''(0) &= 56, \\ y^{(iv)}(x) &= y''' + 3y^2 y''' + 18yy' y'' + 6(y')^3, & y^{(iv)}(0) &= 560, \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Diğer türevlerin hesaplandığı ve değerlendirildiği de varsayılır. Bu hesaplamalar doğrultusunda,

$$y(x) = 1 + 2x + 4x^2 + \frac{28}{3}x^3 + \frac{70}{3}x^4 + \frac{904}{15}x^5 + \frac{7148}{45}x^6 + \frac{133736}{315}x^7 + \frac{72224}{63}x^8 + \dots \quad (3.14)$$

şeklinde seri yaklaşımı elde edilir. Bu serinin kesin çözümü,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2x} - 1}} \quad (3.15)$$

olur.

3.3.2. Değişken Katsayılı Bernoulli Denklemi

Aşağıdaki gibi değişken katsayılı bir Bernoulli denklemini ele alalım:

$$y' + y - 2xy^3 = 0, \quad y(0) = 1. \quad (3.16)$$

Denklemi en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned} y(x) & , & y(0) &= 1, \\ y'(x) &= -y + 2xy^3, & y'(0) &= -1, \\ y''(x) &= -y' + 6xy^2y' + 2y^3, & y''(0) &= 3, \\ y'''(x) &= -y'' + 6x(y^2y'' + 2y(y')^2) + 12y^2y', & y'''(0) &= -15, \\ y^{(iv)}(x) &= -y''' + 6x(y^2y''' + 6yy'y'' + 2(y')^3) + 18y^2y'', & y^{(iv)}(0) &= 105, \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Diğer türevlerin hesaplandığını ve değerlendirildiğini de varsayarak bu hesaplamalar doğrultusunda seri yaklaşımı,

$$y(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \frac{63}{8}x^5 + \frac{231}{16}x^6 - \frac{429}{16}x^7 + \frac{6435}{128}x^8 + \dots, \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir. Bu seri,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad (3.19)$$

değerine yakınsar.

3.4. Riccati Denklemine Uygulanışı

Standart Riccati denklemi,

$$u' - u - P(x)u - R(x)u^2 = 0, \quad u(0) = \alpha. \quad (3.20)$$

şeklinde olup bu denkleme uygulanışı, sabit katsayılı ve değişken katsayılı olarak örnekler üzerinde incelenecektir.

3.4.1. Sabit Katsayılı Riccati Denklemi

Aşağıdaki gibi sabit katsayılı bir Riccati denklemini ele alalım:

$$y' - 1 + 2y - y^2 = 0, \quad y(0) = 2 \quad (3.21)$$

denklemini en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevleri alındığında $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned} y(x) & , & y(0) &= 2, \\ y'(x) &= 1 - 2y + y^2, & y'(0) &= 1, \\ y''(x) &= -2y' + 2yy', & y''(0) &= 2, \\ y'''(x) &= -2y'' + 2yy'' + 2(y')^2, & y'''(0) &= 6, \\ y^{(iv)}(x) &= -2y''' + 2yy''' + 6y'y'', & y^{(iv)}(0) &= 24, \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Diğer türevlerin hesaplandığını ve değerlendirildiğini de varsayarak bu hesaplamalar doğrultusunda aşağıdaki seri yaklaşımı elde edilir:

$$y(x) = 1 + (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots). \quad (3.23)$$

Bu seri

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1-x} \quad (3.24)$$

değerine yakınsar.

3.4.2. Değişken Katsayılı Riccati Denklemi

Aşağıdaki gibi değişken katsayılı bir Riccati denklemini ele alalım:

$$u' - 1 - 2x^2 + 3xu - u^2 = 0, \quad u(0) = 0. \quad (3.25)$$

Denklemi en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned} u(x) & \quad , & u(0) &= 0, \\ u'(x) &= 1 + 2x^2 - 3xu + u^2, & u'(0) &= 1, \\ u''(x) &= 4x - 3xu' - 3u + 2uu', & u''(0) &= 0, \\ u'''(x) &= 4 - 3xu'' - 6u' + 2uu'' + 2(u')^2, & u'''(0) &= 0, \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. Diğer türevlerin hesaplandığını ve değerlendirildiğini de varsayarak bu hesaplamalar doğrultusunda,

$$u(x) = x$$

sonucu elde edilir.

3.5. Birinci Mertebeden Abel Diferansiyel Denkleminin Uygulanışı

Standart Abel denklemi:

$$u' - P_1(x) - P_2(x)u - P_3(x)u^2 - P_4(x)u^3 = 0, \quad u(0) = \alpha \quad (3.27)$$

şeklindedir. Birinci mertebeden Abel diferansiyel denklemini göz önünde bulunduralım:

$$y' - (1-x)y^3 = 0, \quad y(0) = 1. \quad (3.28)$$

Denklemin en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned}
 y(x) & \quad , & y(0) &= 1, \\
 y'(x) &= (1-x)y^3, & y'(0) &= 1, \\
 y''(x) &= 3(1-x)y^2y' - y^3, & y''(0) &= 2, \\
 y'''(x) &= 3(1-x)(y^2y'' + 2y(y')^2) - 6y^2y', & y'''(0) &= 6, \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & &
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

olarak bulunur. Diğer türevlerin hesaplandığını ve değerlendirildiğini de varsayarak bu hesaplamalar doğrultusunda aşağıdaki seri yaklaşımı elde edilir:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots \tag{3.30}$$

Bu seri,

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \tag{3.31}$$

değerine yakınsar.

3.6. Airy Denkleminin Uygulanışı

İkinci dereceden Airy'nin denklemi şöyle verilir:

$$y'' = xy, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta. \tag{3.32}$$

Airy'nin denklemi, fizikte ışığın kırınımını modeller. Denklemin en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned}
y(x) & , & y(0) &= \alpha, \\
y'(x) & , & y'(0) &= \beta, \\
y''(x) &= xy & , & y''(0) = 0, \\
y'''(x) &= xy' + y & , & y'''(0) = \alpha, \\
y^{(iv)}(x) &= xy'' + 2y' & , & y^{(iv)}(0) = 2\beta, \\
y^{(v)}(x) &= xy''' + 3y'' & , & y^{(v)}(0) = 0, \\
y^{(vi)}(x) &= xy^{(iv)} + 4y''' & , & y^{(vi)}(0) = 4\alpha, \\
y^{(vii)}(x) &= xy^{(v)} + 5y^{(iv)} & , & y^{(vii)}(0) = 10\beta, \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olarak bulunur. Diğer türevlerin hesaplandığını ve değerlendirildiğini de varsayarak bu hesaplamalar doğrultusunda,

$$y(x) = \alpha \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{12960}x^9 + \dots \right) + \beta \left(x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \frac{1}{45360}x^{10} + \dots \right) \tag{3.34}$$

olacak şekilde seri yaklaşımı elde edilir.

3.7. İkinci Mertebe Euler Denkleminin Uygulanışı

İkinci dereceden Euler denklemi:

$$x^2 y'' + \alpha x y'(x) + \beta y(x) = 0, \tag{3.35}$$

verilsin. Burada $y(1)$ ve $y'(1)$ başlangıç koşulları, a ve b sabittir ($a, b \in \mathbb{R}$). İlk önce, $x=0$ konumundaki tekillik çıkarılır. Bunu yapmak için,

$$z = \ln x, \quad x = e^z, \tag{3.36}$$

dönüşümleri kullanılarak denklem (3.35),

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y(z) = 0 \tag{3.37}$$

olarak elde edilir. Ardışık türev metodunu aşağıdaki gibi bir Euler denklemine uygulayacağız:

$$x^2 y'' - 2xy'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 3, \quad x > 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + -3 \frac{dy}{dz} + 2y(z) = 0, \quad (3.39)$$

başlangıç koşulları $y(0)=2$ ve $y'(0)=3$ tür. Denklemin en yüksek mertebeli terimine göre düzenleyip ardışık türevlerini aldığımızda $x=0$ noktasındaki değerleri:

$$\begin{aligned} y(z) & , & y(0) &= 2, \\ y'(z) & , & y'(0) &= 3, \\ y''(z) &= 3y' - 2y & , & y''(0) = 5, \\ y'''(z) &= 3y'' - 2y' & , & y'''(0) = 9, \\ y^{(iv)}(z) &= 3y''' - 2y'' & , & y^{(iv)}(0) = 17, \\ y^{(v)}(z) &= 3y^{(iv)} - 2y''' & , & y^{(v)}(0) = 33, \\ & . \\ & . \\ & . \end{aligned} \quad (3.40)$$

olur. Seri çözüm:

$$y(z) = 2 + 3z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{3}{2}z^3 + \frac{17}{24}z^4 + \frac{11}{40}z^5 + \dots \quad (3.41)$$

olarak bulunur ve yukarıdaki seri

$$y(z) = (1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{5!}z^5 \dots) + (1 + 2z + \frac{1}{2!}(2z)^2 + \frac{1}{3!}(2z)^3 + \frac{1}{4!}(2z)^4 + \frac{1}{5!}(2z)^5 \dots) \quad (3.42)$$

şeklinde düzenlenip serinin çözümü de

$$y(z) = e^z + e^{2z}, \quad (3.43)$$

olarak bulunur. $z = \ln x$ olduğundan $x = e^z$ dir. Dolayısıyla,

$$y(x) = x + x^2 \quad (3.44)$$

şeklinde elde edilir.

Görüldüğü gibi ardışık türev metodu, hem homojen hem de homojen olmayan hem lineer hem de lineer olmayan adi diferensiyel denklemleri kısıtlayıcı koşullara gerek olmadan doğrudan ele alır. Yöntem esas olarak verilen denklemin türevlerini almaya ve elde edilen türevleri $x=0$ da değerlendirmeye dayanır. Daha sonra denklemin çözümü için Taylor serisi kullanılır. Bu yöntem Bernoulli denklemi, Riccati denklemi, Abel denklemi ve ikinci dereceden Euler denklemi gibi sabit ve değişken katsayılı denklemlere uygulanmıştır (Wazwaz, 2016).



4. PADÉ YAKLAŞIMI

Padé yaklaşımı, mühendislik uygulamalarında adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde (Çelik ve Bayram, 2003a), pertürbe sistemlerin özdeğerlerinin analizlerinin yapılmasında kullanılmaktadır (Yang ve ark., 2001) ve sürekli kesirler teorisiyle ilişkilidir (Çelik ve Bayram, 2003b).

Verilen bir fonksiyonun daha uygun şekilde bir rasyonel fonksiyon haline getirilmesi işlemine Padé yaklaşımı denmektedir. Polinomların kesilmiş kuvvet serilerini yaklaşık olarak belirlemek için kullanılır (Amilcare, 1994). Ayrıca, polinomların tekillikleri sonlu bir düzlemde açıkça görülemez. Kuvvet serisinin yakınsama yarıçapı, iki sınırı içerecek kadar büyük olamayacağından, kuvvet serisinin kullanılması her zaman yararlı değildir (Boyd, 1997). Yakınsama yarıçapının, alanın sınırlarını içerecek kadar büyük olmaması nedeniyle, ayrıştırma yöntemiyle veya herhangi bir seri çözüm yöntemiyle elde edilen seri çözümünü Padé ile birlikte kullanmak önemlidir (Wazwaz, 2006).

Padé yaklaşımı tekil noktaya sahip fonksiyonlar için genellikle Taylor serisine göre daha üstündür, çünkü rasyonel fonksiyonların kullanımı, onların iyi temsil edilmesini sağlar. Padé yaklaşımı, fonksiyonunun kesilmiş Taylor serisinden daha iyi bir yaklaşım sağlar ve Maple veya Mathematica gibi sembolik programlama dilleri kullanılarak kolayca hesaplanır (Peker ve ark., 2011).

f fonksiyonunu temsil eden bir kuvvet serisi $\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$ şeklinde verilsin.

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r \quad c_r = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı;

$$[L / M] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M} \quad a_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, \dots, L), \ b_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, \dots, M) \quad (4.2)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur. Burada payın derecesi L , paydanın derecesi de M dir. Payın $(L+1)$ tane katsayısı ve paydanın da $(M+1)$ tane katsayısı vardır. Ayrıca

ifadenin tanımsız olmaması için $b_0=1$ alınmalıdır. Bu durumu da dikkate aldığımızda kesrin payının $(L+1)$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının da M tane bağımsız katsayısı olur. Tüm durum dikkate alındığında $L+M+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[L/M]$ ifadesi yukarıdaki kuvvet serisinin ilk $L+M+1$ terimine karşılık gelir.

$L+M$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M} + O(x^{L+M+1}) \quad (4.3)$$

Denklem (4.3) de içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M)(c_0 + c_1 x + \dots) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L) + O(x^{L+M+1}) \quad (4.4)$$

elde edilir. Denklem (4.4)'de katsayıların $(x^{L+1}, x^{L+2}, \dots, x^{L+M})$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \dots + b_0 c_{L+1} &= 0, \\ b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \dots + b_0 c_{L+2} &= 0, \\ . \\ . \\ . \\ b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \dots + b_0 c_{L+M} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

denklem sistemi elde edilir. $b_0=1$ olduğundan sistem M tane lineer denklemden oluşur. Yani,

$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & . & . & . & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & . & . & . & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & . & . & . & c_{L+2} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & . & . & . & c_{L+M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ . \\ . \\ . \\ c_{L+M} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

yazılır. Buradan herhangi bir lineer denklem sisteminin çözüm yöntemlerinden biri ile b_r katsayıları bulunur. Diğer yandan (4.4) denkleminde, payın katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_L$ katsayıları ile $1, x, x^2, \dots, x^L$ terimlerinin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0, \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_L &= c_L + \sum_{r=1}^{\min(L,M)} b_r c_{L-r}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir. Böylece denklem (4.6) ve denklem (4.7) Padé yaklaşımının pay ve paydasını oluşturur. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir. O halde genel anlamda bir f fonksiyonunun Padé yaklaşımı

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{L}{M} \right]_f = \left[\frac{L}{M} \right](x) = \left[\frac{L}{M} \right]_f(x) = r_{L,M} \tag{4.8}$$

şeklinde değişik formlarda gösterilir (Amilcare, 1994). Yaklaşımlara ait tablo Henri Eugène Padé tarafından verildiği için onun anısına hem yaklaşıma, hem de tabloya Padé ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir (Baker ve Graves-Morris, 1996).

Çizelge 4.1. Padé $[L/M]$ yaklaşım tablosu

L/M	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	...
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·

Örneğin (Baker ve Graves-Morris, 1996);

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

fonksiyonu için

$$[1/0] = 1 - \frac{1}{2}x = f(x) + O(x^2),$$

$$[0/1] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} = f(x) + O(x^2),$$

$$[1/1] = \frac{1 + \frac{1}{6}x}{1 + \frac{2}{3}x} = f(x) + O(x^3)$$

olur.

e^x için ilk birkaç Pade yaklaşımı;

$$[0/0] = 1$$

$$[0/1] = \frac{1}{1-x}$$

$$[0/2] = \frac{2}{2-2x+x^2}$$

$$[0/3] = \frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$$

$$[1/0] = 1+x$$

$$[1/1] = \frac{2+x}{2-x}$$

$$[1/2] = \frac{6+2x}{6-4x+x^2}$$

$$[1/3] = \frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$$

$$[2/0] = \frac{2+2x+x^2}{2}$$

$$[2/1] = \frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

$$[2/2] = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

$$[2/3] = \frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$$

$$[3/0] = \frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$$

$$[3/1] = \frac{24+18x+16x^2+x^3}{24-6x}$$

$$[3/2] = \frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$$

$$[3/3] = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$$

Şimdi aşağıdaki örnekte e^x in $[2/2]$ lik Padé yaklaşımının nasıl bulunduğunu inceleyelim.

Örnek 4.1 (Baker ve Graves-Morris, 1996)

$f(x) = e^x$ fonksiyonu için $[2/2]$ lik Padé yaklaşımı

$$e^x = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

şeklinde olup, buradan

$$f(x)Q_2(x) - P_2(x) = 0$$

olur.

$$P_2(x) = p_0 + xp_1 + x^2 p_2$$

$$Q_2(x) = 1 + xq_1 + x^2 q_2$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$f(x)Q_2(x) - P_2(x) = 0$$

$$(1 - p_0) + (1 - p_1 + p_2)x + \left(\frac{1}{2} - p_2 + q_1 + q_2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{q_1}{2} + q_2\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2}\right)x^4 + O(x^5) = 0$$

$$f(x)Q_2(x) - P_2(x) = 0$$

$$1 - p_0 = 0$$

$$1 - p_1 + q_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - p_2 + q_1 + q_2 = 0$$

$$\frac{1}{6} + \frac{q_1}{2} + q_2 = 0$$

$$\frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2} = 0$$

$$p_0 \rightarrow 1$$

$$p_1 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$p_2 \rightarrow \frac{1}{12}$$

$$q_1 \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$q_2 \rightarrow \frac{1}{12}$$

$$f(x) = e^x$$

$$R[x] = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}$$

Örnek 4.2 (Wazwaz, 2010)

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu için $[4/4]$ lük Padé yaklaşımını bulalım.

$$\cos x = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$$

$$f(x)Q_4(x) - P_4(x) = 0$$

$$P_2(x) = p_0 + xp_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + x^4 p_4$$

$$Q_2(x) = 1 + xq_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3 + x^4 q_4$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + O(x^9)$$

$$f(x)Q_4(x) - P_4(x) = 0$$

$$(1-p_0)+(-p_1+q_1)x+(-\frac{1}{2}-p_2+q_2)x^2+(-p_3-\frac{q_1}{2}+q_3)x^3+(\frac{1}{24}-p_4-\frac{q_2}{2}+q_4)x^4$$

$$+(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2})x^5+(-\frac{1}{720}+\frac{q_2}{24}-\frac{q_4}{2})x^6+(-\frac{q_1}{720}+\frac{q_3}{24})x^7+(\frac{1}{40320}-\frac{q_2}{720}+\frac{q_4}{24})x^8+O(x^9)=0$$

$$f(x)Q_4(x)-P_4(x)=0$$

$$1-p_0=0$$

$$-p_1+q_1=0$$

$$-\frac{1}{2}-p_2+q_2=0$$

$$-p_3-\frac{q_1}{2}+q_3=0$$

$$\frac{1}{24}-p_4-\frac{q_2}{2}+q_4=0$$

$$\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}=0$$

$$-\frac{1}{720}+\frac{q_2}{24}-\frac{q_4}{2}=0$$

$$-\frac{q_1}{720}+\frac{q_3}{24}=0$$

$$\frac{1}{40320}-\frac{q_2}{720}+\frac{q_4}{24}=0$$

$$p_0 \rightarrow 1$$

$$p_1 \rightarrow 0$$

$$p_2 \rightarrow -\frac{115}{252}$$

$$p_3 \rightarrow 0$$

$$p_4 \rightarrow \frac{313}{15120}$$

$$q_1 \rightarrow 0$$

$$q_2 \rightarrow \frac{11}{252}$$

$$q_3 \rightarrow 0$$

$$q_4 \rightarrow \frac{13}{15120}$$

$$f(x) = \cos x$$

$$R[x] = \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}$$

5. ARDIŞIK TÜREV METODU İLE PADÉ YAKLAŞIMININ BLASIUS DENKLEMİNE UYGULANMASI

Klasik Blasius probleminin aşağıdaki formunu göz önünde bulunduralım:

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0 \quad (5.1)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0, \quad -\infty < x < 0.$$

Blasius denklemi görüldüğü üzere 3. mertebeden bir denklem ve verilen sınır şartlarından biri eksik olup problemin çözümü eksik olan sınır şartının ($f''(0)$ ın) tahmini üzerine kurulur. $f''(0)$ ın sayısal değerlerini bulmak için, ardışık türev metoduyla elde edilen serinin köşegenel Padé yaklaşımları alınacaktır.

Blasius denkleminin çözümünün davranışı hakkında bir fikir oluşturmak için farklı derecelerde birkaç diyagonal Padé yaklaşımı kullanılacaktır.

$f''(0) = A$ ($A \in \mathbb{R}$) diyelim. Öncelikle ardışık türev metodunu uygulayalım:

$$\begin{aligned} f(x), \\ f'(x) =, \\ f''(x) =, \\ f'''(x) = -\frac{1}{2} f(x) f''(x), \\ f^{(iv)}(x) = -\frac{1}{2} (f'(x) f''(x) + f'''(x) f(x)), \\ f^{(v)}(x) = -\frac{1}{2} (f''(x) f''(x) + 2 f'(x) f'''(x) + f^{(iv)}(x) f(x)), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{aligned} \quad (5.2)$$

Denklemin her adımında $x = 0$ değişikliği, fonksiyonların değerlerini şu şekilde verir:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f'(0) &= 1, \\
f''(0) &= A, \\
f'''(0) &= -\frac{1}{2} f(0) f''(0) = 0, \\
f^{(iv)}(0) &= -\frac{1}{2} (f'(0) f''(0) + f'''(0) f(0)) = -\frac{A}{2}, \\
f^{(v)}(0) &= -\frac{1}{2} (f''(0) f''(0) + 2 f'(0) f'''(0) + f^{(iv)}(0) f(0)) = -\frac{A^2}{2}, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Fonksiyonun değerlerini $x = 0$ olarak belirledikten sonra, f fonksiyonunun Taylor serisi kolayca şöyle yazılır: (f fonksiyonunun istediğimiz türevine kadar hesaplama yapabiliriz fakat literatürdeki çalışmalarla karşılaştırmak için f nin 12. türevine kadar hesaplama yapılacaktır.)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{A}{2} x^2 - \frac{A}{48} x^4 - \frac{A^2}{240} x^5 + \frac{A}{960} x^6 + \frac{11A^2}{20160} x^7 + \left(\frac{11}{161280} A^3 - \frac{1}{21504} A \right) x^8 \\
&- \frac{43A^2}{967680} x^9 + \left(-\frac{5}{387072} A^3 + \frac{1}{552960} A \right) x^{10} + \left(-\frac{5}{4257792} A^4 + \frac{587}{212889600} A^2 \right) x^{11} \\
&+ \left(\frac{1}{725760} A^3 - \frac{1}{16220160} A \right) x^{12}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Şimdi, amacımız sınır koşulunu kullanarak A için sayısal bir değer belirlemektir. Bunu yapabilmek için polinom çözümünün türevi alınmalıdır. Daha sonra, bu denklemin Padé yaklaşımı ile oluşumundan sonra, elde edilen rasyonel fonksiyon için $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ koşulu uygulanacaktır.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + Ax - \frac{A}{12} x^3 - \frac{A^2}{48} x^4 + \frac{A}{160} x^5 + \frac{11A^2}{2880} x^6 + \left(\frac{11}{20160} A^3 - \frac{1}{2688} A \right) x^7 - \frac{43A^2}{107520} x^8 \\
&+ \left(-\frac{25}{193536} A^3 + \frac{1}{55296} A \right) x^9 + \left(-\frac{5}{387072} A^4 + \frac{587}{19353600} A^2 \right) x^{10} + \left(\frac{1}{60480} A^3 - \frac{1}{1351680} A \right) x^{11} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \left(4 + 3Ax + (-A^2 + \frac{1}{3})x^2 \right)}{12 - 3A + x^2} \quad [2/2] \text{ için}$$

f' fonksiyonunun $[2/2]$ lik Padé yaklaşımına $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ uygulandığında elde edilen A değeri: $A=0.5773502692$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{300A^2 - 40 + (300A^3 - 70A)x - 3x^2 + (\frac{45}{4}A^3 - 3A)x^3}{10 \left(30A^2 - 4 - 3Ax + (-\frac{3}{10} + 3A^2)x^2 + (\frac{5}{8}A^3 - \frac{1}{3}A)x^3 \right)} \quad [3/3] \text{ için}$$

f' fonksiyonunun $[3/3]$ lük Padé yaklaşımına $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ uygulandığında elde edilen A değeri: $A=0.5163977795$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{225A^4 + 60A^2 - 26 + (225A^5 - \frac{225}{4}A^3 + \frac{17}{2}A)x + (-\frac{690}{7}A^4 + \frac{2619}{56}A^2 - \frac{39}{7})x^2 + (\frac{135}{28}A^5 - \frac{99}{56}A^3 - \frac{69}{112}A)x^3 + (\frac{135}{112}A^6 - \frac{189}{64}A^4 + \frac{51}{28}A^2 - \frac{169}{560})x^4}{225A^4 + 60A^2 - 26 + (-\frac{465}{4}A^3 + \frac{69}{2}A)x + (\frac{495}{28}A^4 + \frac{687}{56}A^2 - \frac{39}{7})x^2 + (\frac{165}{28}A^5 - \frac{253}{28}A^3 + \frac{937}{336}A)x^3 + (-\frac{1055}{448}A^4 + \frac{153}{112}A^2 - \frac{169}{560})x^4}$$

f' fonksiyonunun $[4/4]$ lük Padé yaklaşımına $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ uygulandığında elde edilen A değeri: $A=0.5227030798$ dir.

Maple'da hesapladığımız bu değerleri, literatürde Adomian ayrıştırma metodu ve diferensiyel dönüşüm metodu ile elde edilen diğer sonuçlarla karşılaştıralım.

Çizelge 5.1. Padé yaklaşımları ve A 'nın nümerik değerleri

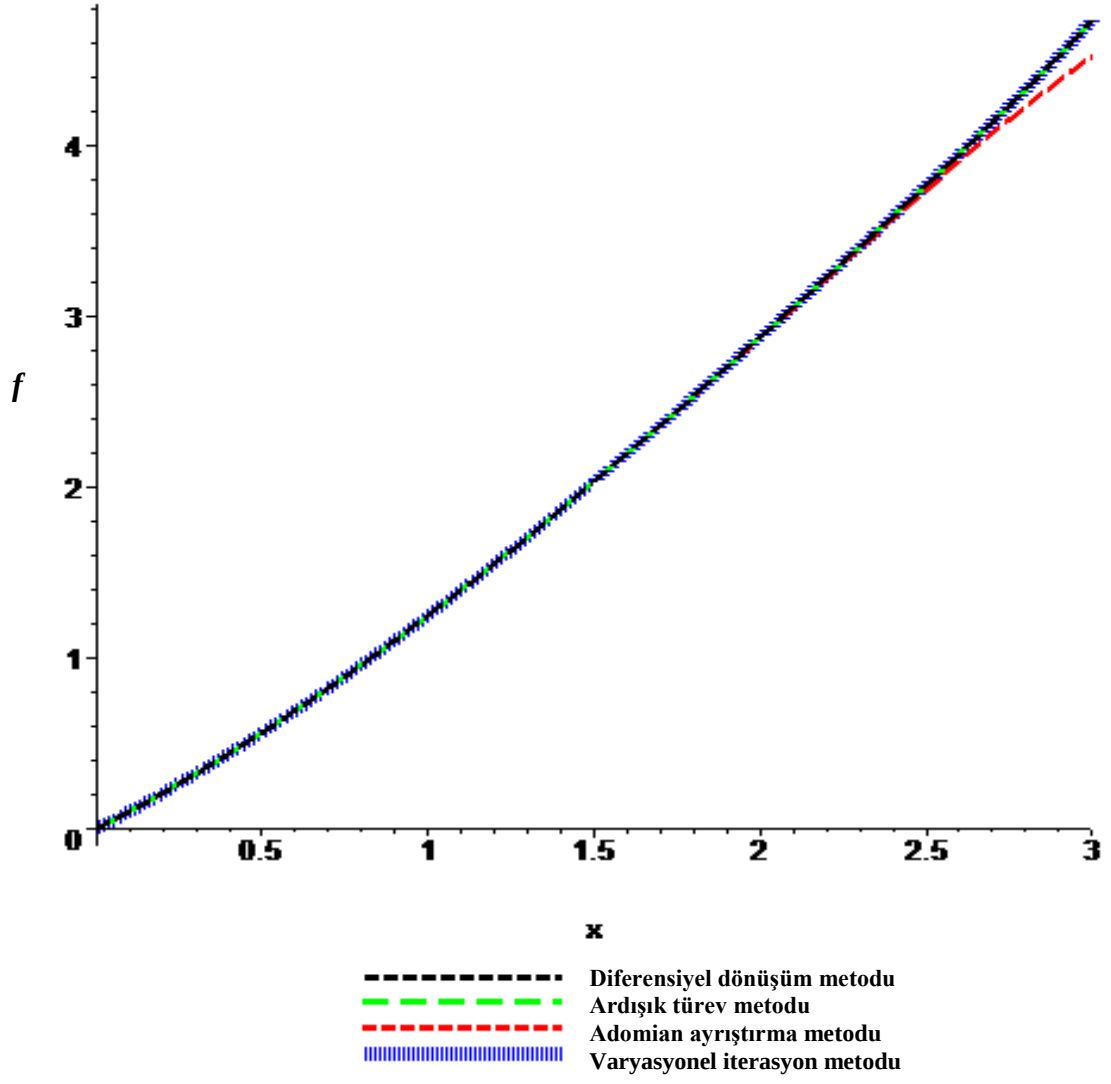
Padé Yaklaşımı	A	A (Adomian ayrıştırma metodu)	A (Diferensiyel dönüşüm metodu)
[2/2]	0.5773502692	0.5773502693	0.5773502693
[3/3]	0.5163977795	0.5163977793	0.5163977795
[4/4]	0.5227030798	0.5227030798	0.5227030798

Bu problemin analitik bir çözümü bulunmamaktadır. Bu nedenle, Ardışık türev metodu ile bulduğumuz seri çözümünün tutarlılığını görmek için, problemin literatürde, Adomian ayrıştırma metodu, diferensiyel dönüşüm metodu ve varyasyonel iterasyon

metodunun $[4/4]$ lük Padé ile bulunmuş seri çözümlerinin $[0,3]$ aralığındaki değerleri hesaplanmış ve bunların hepsi aşağıdaki çizelge ve şekilde verilmiştir.

Çizelge 5.2. Adomian ayrıştırma metodu, diferensiyel dönüşüm metodu, ardışık türev metodu ve varyasyonel iterasyon metodundan elde edilen sonuçlar

f x	Ardışık türev metodu- Padé (ATM- Padé)	Diferensiyel dönüşüm metodu- Padé (DDM- Padé)	Adomian ayrıştırma metodu- Padé (AAM-Padé)	Varyasyonel iterasyon metodu- Padé (VIM-Padé)	Hata (DD M- ATM)	Hata (AAM - ATM)	Hata (VIM-ATM)
0.5	.5646312977	.5646312977	.5646312977	.5646312965	0	0	$-.12.10^{-8}$
1	1.249990266	1.249990266	1.249990266	1.249988644	0	0	$-.1622.10^{-5}$
1.5	2.032203442	2.032203442	2.032203442	2.032086131	0	0	$-.117311.10^{-3}$
2	2.879842512	2.879842512	2.879842512	2.877285332	0	0	$-.255718.10^{-2}$
2.5	3.769377588	3.769377588	3.769377588	3.740671281	0	0	$-.28706307.10^{-1}$
3	4.734147446	4.734147446	4.734147446	4.523174793	0	0	$-.210972653$



Şekil 5.1. Adomian ayrıştırma metodu, Diferensiyel dönüşüm metodu, Ardışık türev metodu ve Varyasyonel iterasyon metodundan elde edilen sonuçlar

6. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tez çalışmasında akışkanlar mekaniğinin önemli denklemlerinden biri olan Blasius denklemi ele alınmıştır.

Blasius denkleminin sonsuzda sınır şartı vardır ve bu durum genel olarak sayısal çözüm yöntemleri için bir sorun teşkil etmektedir. Literatürde, bilgisayar destekli ardışık türev metodunun Padé yaklaşımı ile birlikte kullanımına rastlanmamış olup bu çalışmada ilk kez Blasius denkleminin bir formuna uygulanmıştır.

Çalışmamızda, ilk defa bilgisayar destekli ardışık türev-Padé tekniği ile elde edilen sonuçlar, literatürdeki diferansiyel dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu ve varyasyonel iterasyon metodunun Padé tekniği ile birlikte kullanımıyla elde edilen diğer sonuçlarla (Peker ve ark., 2011) karşılaştırıldığında yöntemin gayet iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Sadece Adomian ayrıştırma metodunda sıfırdan uzaklaşıldıkça çatallanma oluşmaya başlamıştır ve bu da grafikte gösterilmiştir.

Yöntem uygulanabilirlik ve işlem zorluğu açısından bilgisayar programlarına ihtiyaç duymaktadır, bu açıdan hesaplamalar Maple programı kullanılarak yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- Amilcare, P., 1994, Applications Of Pade'Approximation Theory In Fluid Dynamics, World Scientific.
- Baker, G. ve Graves-Morris, P., 1996, Padé approximants, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boyd, J. P., 1997, Padé approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain, *Computers in Physics*, 11 (3), 299-303.
- Çelik, E. ve Bayram, M., 2003a, Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equation by Padé series, *Applied Mathematics Computation*, 137 (1), 57-65.
- Çelik, E. ve Bayram, M., 2003b, On the numerical solution of differential-algebraic equations by Padé series, *Applied Mathematics Computation*, 137 (1), 151-160.
- Ganapol, B., 2010, Highly accurate solutions of the Blasius and Falkner-Skan boundary layer equations via convergence acceleration, *Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Arizona*, arXiv:1006.3888 (June 2010).
- Khuri, S. ve Wazwaz, A.-M., 2018, The successive differentiation computer-assisted method for solving well-known scientific and engineering models, *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, 28 (12), 2862-2873.
- Kuo, B.-L., 2004, Thermal boundary-layer problems in a semi-infinite flat plate by the differential transformation method, *Applied Mathematics Computation* 150 (2), 303-320.
- Peker, H., Karaoğlu, O. ve Oturanç, G., 2011, The differential transformation method and Pade approximant for a form of Blasius equation, *Mathematical Computational Applications*, 16 (2), 507-513.
- Schlichting, H. ve Gersten, K., 2016, Boundary-layer theory, Springer.
- Utz, W. R., 1978, Existence of solutions of a generalized Blasius equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 66 (1), 55-59.
- Wazwaz, A.-M., 2006, The modified decomposition method and Padé approximants for a boundary layer equation in unbounded domain, *Applied Mathematics Computation*, 177 (2), 737-744.
- Wazwaz, A.-M., 2007, The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain, *Applied Mathematics Computation*, 188 (1), 485-491.
- Wazwaz, A.-M., 2010, Partial differential equations and solitary waves theory, Springer, Berlin, Heidelberg.

- Wazwaz, A.-M., 2016, The successive differentiation method for solving Bratu equation and Bratu-type equations, *Romanian Journal of Physics*, 61 (5), 774-783.
- White, F. M. ve Corfield, I., 2006, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill New York.
- Yang, X., Chen, S. ve Wu, B., 2001, Eigenvalue reanalysis of structures using perturbations and Padé approximation, *Mechanical systems signal processing*, 15 (2), 257-263.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İmran Turan
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya / Karatay 20.07.1991
Telefon :
Faks :
e-mail : mranTrkoluimran@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Konya Anadolu Lisesi Meram/Konya	2009
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi Selçuklu/Konya	2015
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Selçuklu/KONYA	2019

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Turan, İmran ve Peker, Haldun Alpaslan, “A Numerical Approach for a Form of Blasius Equation”, *VI. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı*, 26-28 Nisan 2019, Konya, Türkiye.