

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**PERTÜRBASYON YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

MELİKE KELEŞ

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ




MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERTÜRBASYON YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

MELİKE KELEŞ

Prof. Dr. Serdal PAMUK
Danışman, Kocaeli Üniversitesi
Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi
Prof. Dr. Şevket GÜR
Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi


.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 01.07.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Matematiksel biyoloji, matematiğin özellikle son yıllarda üzerinde çalışılan bir alanı haline gelmiştir. Biyolojinin hemen her konusu için matematiksel modeller elde edilebilir ve elde edilen modeller farklı yöntemler kullanılarak çözülebilir. Çözülen bu modellerin sonuçlarının biyolojik verilerle örtüştüğü gözlemlenebilir. Bu çalışmada biz pertürbasyon yöntemiyle tümör oluşumunda rol alan hücrelerin denklemlerini ele aldık ve davranışlarını inceledik.

Yapılan bu çalışmanın, matematiksel biyoloji ile ilgili ileri zamanlarda yapılacak çalışmalara katkısının olmasını dilerim.

Beni bu konuya yönlendiren ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Serdal PAMUK' a bana göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı teşekkür eder ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, tüm hayatım boyunca benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmadan beni bu yaşa getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen AİLEME de sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Haziran - 2019

Melike KELEŞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	3
1.1. Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklem	3
1.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem	4
1.3. Taylor Seri açılımı ve Binom Teoremi	5
1.4. Mertebe Sembolleri	7
1.5. Asimptotik Açılım ve Diziler	8
2. PERTÜRBASYON YÖNTEMİ	10
2.1. Regüler ve Singüler Pertürbasyon Yöntemi.....	11
2.2. Diferansiyel Denklemler İçin Pertürbasyon Yöntemi	16
3. TÜMÖR MODELİNİN PERTÜRBASYON YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	43
3.1. Bir Boyutlu Tümör Modeli	43
3.2. İki Boyutlu Tümör Modeli.....	50
4. MATEMATİKSEL MODELLER VE PERTÜRBASYON ÇÖZÜMLERİ	65
4.1. Endotel Hücre Denkleminin Zamandan Bağımsız Çözümü ve İki Boyutlu Tümör Anjiyogenez Faktörü Denkleminin Çözümü.....	65
4.2. Tümör Anjiyogenezindeki Denklem Sisteminin Pertürbasyon Çözümü.....	71
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	82
KAYNAKLAR.....	84
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER.....	86
ÖZGEÇMİŞ.....	87

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	$y(x)$ ` in $\varepsilon=0,0001$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması	24
Şekil 2.2.	$y(x)$ ` in $\varepsilon=0,0001$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması	24
Şekil 2.3.	$y(x)$ ` in $\varepsilon = 0,05$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması	27
Şekil 2.4.	$y(x)$ ` in $\varepsilon = 0,005$ için pertürbasyon ve tam çözümü karşılaştırması.....	27
Şekil 2.5.	Farklı ε değerleri için (2.56) denkleminin yaklaşık ve pertürbasyon yöntemiyle elde edilen çözümlerin karşılaştırması	32
Şekil 2.6.	$u(x,t)$ `nin $\varepsilon=0,1$ için tam çözümü	35
Şekil 2.7.	$u(x,t)$ `nin $\varepsilon=0,1$ için pertürbasyon çözümü.....	36
Şekil 2.8.	$u(x,t)$ `nin $\varepsilon=0,01$ için pertürbasyon çözümü.....	39
Şekil 2.9.	$u(x,t)$ `nin $\varepsilon=0,01$ için tam çözüm.....	42
Şekil 2.10.	$u(x,t)$ `nin $\varepsilon=0,01$ için pertürbasyon çözümü.....	42
Şekil 3.1.	$t=0,1$ de Anjiyogenetik faktör yoğunluğu.....	49
Şekil 3.2.	$t=0,1$ de Proteolitik enzim yoğunluğu.	49
Şekil 3.3.	$t=0,1$ de Fibronektin yoğunluğu.....	50
Şekil 3.4.	$t=0,1$ de dört terimli Endotel hücre yoğunluğu denkleminin çözümü.....	50
Şekil 3.5.	$t=2$ için Kemotatik ajan	62
Şekil 3.6.	$t=2$ için Anjiyogenik faktör.....	63
Şekil 3.7.	$t=2$ için Enzim.....	63
Şekil 3.8.	$t=2$ için Fibronektin	63
Şekil 3.9.	$t=2$ için Endotel hücre denkleminin dört terimli seri çözümü	64
Şekil 3.10.	$t=2$ için Perisit hücre denkleminin dört terimli seri çözümü	64
Şekil 3.11.	$t=2$ için Makrofaj hücre denkleminin dört terimli seri çözümü	64
Şekil 4.1.	Geçiş olasılık fonksiyonu	68
Şekil 4.2.	Endotel hücre denklemi	68
Şekil 4.3.	Tümör anjiyogenez faktörü pertürbasyon çözümü	70
Şekil 4.4.	Tümör anjiyogenez faktörünün nümerik çözümü	70
Şekil 4.5.	Kemotatik ajan	79
Şekil 4.6.	Anjiyogenik faktör	79
Şekil 4.7.	Enzim.....	80
Şekil 4.8.	Fibronektin.....	80
Şekil 4.9.	Endotel hücre yoğunluğu.....	80
Şekil 4.10.	Perisit hücre yoğunluğu	81
Şekil 4.11.	Makrofaj hücre yoğunluğu.....	81

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ϵ	: Elemandır sembolü
ε	: Küçük pertürbasyon parametresi
L	: Lineer operatör
M	: Lineer olmayan operatör
O	: Asimptotik kıyaslayıcı (Büyük O)
o	: Asimptotik kıyaslayıcı (Küçük o)
\sim	: Denklik sembolü

Kısaltmalar

EC	: Endothelial Cell (Endotel hücre)
MC	: Macrophage Cell (Makrofaj hücre)
PC	: Pericyte Cell (Perisit hücre)

PERTÜRBASYON YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak pertürbasyon yöntemiyle adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edildi ve tam çözümleriyle karşılaştırıldı. Daha sonra enzim kinetiği kavramı kullanılarak elde edilen tümör oluşumundaki bazı denklemler ele alınarak pertürbasyon yöntemiyle çözümleri elde edildi. Ayrıca elde edilen sonuçlar, yapılan matematik analizler ile karşılaştırılmış ve biyolojide bilinen gerçekler ile örtüştüğü matematiksel olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Endotel Hücre, Makrofaj Hücre, Perisit Hücre, Pertürbasyon Yöntemi, Tümör Anjiyogenezi.

SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERTURBATION METHOD

ABSTRACT

In this study, solutions of ordinary and partial differential equations with perturbation method are obtained and compared with their exact solutions. Then, some of the equations in tumor growth obtained by using the concept of enzyme kinetics are analyze, and solutions of this model are obtained. Also, we compare the outcome with the mathematical analysis and show that our results coincide with the biological facts.

Keywords: Endothelial Cell, Macrophage Cell, Pericyte Cell, Perturbation Method, Tumor Angiogenesis.

GİRİŞ

Kesin çözümler birçok akışkanlar mekaniği, katı mekaniği, hareket ve fizik dallarında lineer olmayan, homojen olmayan ve genel sınır koşulları nedeniyle nadirdir. Bu nedenle, mühendisler, fizikçiler ve uygulamalı matematikçiler karşılaştıkları problemlerin yaklaşık çözümlerini belirlemek isterler.

Matematiğin önemli konularından biri olan diferansiyel denklemler günlük hayattaki birçok problemin özellikle değişim gösteren olayların anlaşılması ve çözümü için bir model oluşturur. Bu anlamda pertürbasyon yöntemleri uzun yıllar boyunca matematiksel modellerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir (Nayfeh, 1993). Direkt açılımın fiziksel veya gerçek çözümlerle uyumlu olmayan çözümlere yol açtığı problemler için birçok farklı pertürbasyon yöntemleri zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Pertürbasyon teknikleri, lineer olmayan problemlerin üstesinden gelmek için bilim ve mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin yanı sıra, cebirsel denklemler, integraller, fark denklemleri, diferansiyel fark denklemleri ve integro-diferansiyel denklemler de pertürbasyon yöntemleri kullanılarak yaklaşık olarak çözülmektedir. Pertürbasyon yöntemlerinde çözüm, fiziksel bir parametrenin seri açılımı ile ifade edilebilir.

Pertürbasyon yöntemlerinin uygulanmasındaki en önemli sorun küçük bir parametreye denklemde ihtiyaç duyulmasıdır. Bazen bu küçük parametre denkleme yapay olarak eklenebilir. Fakat bu parametreleri denkleme yerleştirmek teknik bir işittir. Bu yerleştirme sonucunda çoğu zaman yakınsama yavaş olur ya da hiç yakınsama olmaz. Parametrenin uygun seçimi ideal sonuçlar verirken uygun olmayan bir şekilde seçilmesi kötü sonuçlara yol açabilir. Uygun bir parametre bulunsa bile, çoğu durumda pertürbasyon yöntemleriyle bulunan yaklaşık çözümler, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerlidir.

Pertürbasyon yöntemi ile ilgili literatür tarandığında geliştirildiği tarihten bu yana pek çok bilim insanı bu yöntemi ele almıştır. Bu yöntem (Bender ve Orszag, 1999), (Hinch, 1991), (Nayfeh, 1993) kitaplarında ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Tümör anjiyogenezindeki matematiksel modelleri kullanılarak değişik çalışmalar yapılmıştır (Levine ve diğ., 2000), (Murray, 2002), (Pamuk, 2013), (Pamuk ve Çay, 2018), (Pamuk, 2003), (Pamuk ve Gürbüz, 2004), (Pamuk, 2004).

Bu çalışmada pertürbasyon yönteminin ayrıntılı irdelenmesi, başlangıç ve sınır değer gibi çeşitli adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması, elde edilen sonuçların tam çözümleri ile karşılaştırılması ve son olarak tümör anjiyogenezindeki matematiksel modellerin pertürbasyon yöntemiyle çözülmesi amaçlandı. Bu çözümlerin grafikleri Matlab programı yardımıyla verildi.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

1.1. Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklem

Tanım 1.1.1: Bir bağımsız değişken, bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve bu bağımlı değişkenin türevlerini içeren denklemlere adi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak, y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olmak üzere n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazılır (Bayram, 2010) .

Örneğin;

$$(y-x)dx+7xdy=0$$

$$y''-4y'+7y=0$$

ifadeleri birer adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.1.2: En az iki bağımsız değişken, bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve bu bağımlı değişkenin kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak u bağımlı değişken, x ve y bağımsız değişken olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem;

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde yazılır (Bayram, 2010) .

Örneğin;

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

birer kısmi diferansiyel denklemdir.

1.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

Tanım 1. 2. 1:

$L = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x)I$ şeklinde operatör tanımlayalım. Eğer

$L(\lambda y_1 + \beta y_2) = \lambda L(y_1) + \beta L(y_2)$ oluyorsa L operatörüne lineerdir, denir. Aksi takdirde lineer olmayan operatördür. Burada $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler, y_1, y_2 keyfi fonksiyonlar ve $a_n(x) \neq 0$ olmalıdır. n . mertebeden en genel lineer diferansiyel denklem

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

şeklindedir.

Örneğin;

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' + 6y = e^{-2x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

denklemleri lineer diferansiyel denklemdir,

$$yy'' - 2y' - x = 0$$

$$y''' + y^2 = 0$$

denklemleri ise lineer olmayan diferansiyel denklemdir.

1.3. Taylor Seri açılımı ve Binom Teoremi

Tanım 1.3.1: Bir $f(x)$ fonksiyonun $x=x_0$ da her mertebeden türevlerinin mevcut olduğunu varsayalım, o zaman

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (1.1)$$

olarak $(x-x_0)$ 'ın kuvvet serisini ifade edebiliriz. Burada,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} \text{ ve } f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = a_0 \quad (1.2)$$

dır. Böylece, (1.3.1) denkleminin $x=x_0$ da $f(x)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımı

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

şeklinde yazılabilir (Nayfeh, 1993).

Örneğin; $x_0=0$ da bazı standart fonksiyonların Taylor seri açılımı

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

şeklindedir.

Tanım 1.3.2 (Binom Teoremi) : Düz çarpma kullanılarak,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

elde ederiz. Bu işlem

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} a^{n-m}b^m$$

şeklinde n için genelleştirilebilir. Fakat bu ifade sonlu ise, n pozitif tamsayı olması durumunda geçerli olduğu ortaya çıkar. Eğer n sonsuz ise, $|b/a|$ 'nın 1 den daha küçük olması koşuluyla n pozitif veya negatif herhangi bir sayı için geçerlidir. Aksi takdirde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m. \text{terim}}{(m-1). \text{terim}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-1)!n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)a^{n-m}b^m}{m!n(n-1)(n-2)\dots(n-m+2)a^{n-m+1}b^{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1)b}{ma} = -\frac{b}{a}$$

olduğu için seri iraksar (Nayfeh, 1993).

Örneğin;

$$(a+b)^5 = \sum_{m=0}^5 \frac{5!}{m!(5-m)!} a^{5-m}b^m = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = \sum_{m=0}^6 \frac{6!}{m!(6-m)!} a^{6-m}b^m = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^{1/2} = a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{-1/2}b + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}a^{-3/2}b^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}a^{-5/2}b^3 + \dots$$

$$= a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{-1/2}b - \frac{1}{8}a^{-3/2}b^2 + \frac{1}{16}a^{-5/2}b^3 + \dots$$

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + \frac{(-1)(-2)}{2!}a^{-3}b^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}a^{-4}b^3 + \dots$$

$$= a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \dots$$

$n=5$ ve $n=6$ 'a karşılık gelen ilk iki serinin sonlu olduğunu görüyoruz. $n=1/2$ ve $n=-1$ karşılık gelen son iki seri sonlu olmaz. Dolayısıyla son iki seri sadece $|b|<|a|$ olduğunda geçerlidir.

1.4. Mertebe Sembolleri

Bu semboller ilk olarak Bachmann (1894) tarafından kullanılmaya başlanmış fakat Alman Edmund Landau (1909) sayesinde yaygınlaşmıştır. Bu nedenle Bachmann-Landau sembolleri olarak da bilinir.

Tanım 1.4.1: f ve g iki reel fonksiyon olsun. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right|$ sonlu ise $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ olarak yazılır ve $\varepsilon \rightarrow 0$ iken f fonksiyonu g fonksiyonunun büyük O 'sudur şeklinde okunur (Nayfeh, 1993), (Shivamoggi, 2003), (Rice ve Do, 1995).

Tanım 1.4.2: f ve g iki reel fonksiyon olsun. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$ ise $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ olarak yazılır ve $\varepsilon \rightarrow 0$ iken f fonksiyonu g fonksiyonunun küçük o 'sudur şeklinde okunur (Nayfeh, 1993), (Shivamoggi, 2003), (Rice ve Do, 1995).

Örneğin;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 \text{ olduğundan, } \sin(\varepsilon) = O(\varepsilon) ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} \text{ dir ve Tanım 1.4.1'den dolayı } \cos(\varepsilon)-1 = O(\varepsilon^2) \text{ olur.}$$

Örneğin;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(\varepsilon)}{\varepsilon^{-\frac{1}{3}}} = 0 \text{ olduğundan, } \cos(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}) ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0 \text{ olduğundan, } \sin(\varepsilon) = o(\varepsilon^2) \text{ ve}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{\varepsilon} = 0 \text{ olduğundan, } \varepsilon^2 \ln \varepsilon = o(\varepsilon) \text{ dir.}$$

1.5. Asimptotik Açılım ve Diziler

Tanım 1.5.1: $\delta_n(\varepsilon)$ bir dizi olsun. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\delta_n(\varepsilon) = o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$ yani $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_n(\varepsilon)}{\delta_{n-1}(\varepsilon)} = 0$ sağlanıyorsa $\delta_n(\varepsilon)$ dizisine bir asimptotik dizi denir.

Örneğin;

ε^n , $\varepsilon^{\frac{n}{3}}$, $(\ln \varepsilon)^{-n}$, $(\cot(\varepsilon))^{-n}$ birer asimptotik dizidir. Bu tür bir $\delta_n(\varepsilon)$ dizisi için $f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) a_m(x)$ açılımı, $f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m(\varepsilon) a_m(x) + O(\delta_n(\varepsilon))$ ya da $f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m(\varepsilon) a_m(x) + o(\delta_n(\varepsilon))$ yazılabiliyor ise buna asimptotik açılım denir (Shivamoggi, 2003), (Hinch, 1991).

Yukarıdaki asimptotik açılımı ε 'un bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ele alırsak,

$$f(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) a_m = a_0 \delta_0(\varepsilon) + a_1 \delta_1(\varepsilon) + \dots \quad (1.3)$$

şeklinde elde ederiz. (1.3) denklemini $\delta_0(\varepsilon)$ bölersek,

$$a_0 = \frac{f(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} = a_1 \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} + \dots$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $n \geq 1$ için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_n(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} = 0$ olduğundan, $a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)}$ elde ederiz.

Benzer şekilde devam edilirse, $a_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - a_0 \delta_0(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}$, ..., $a_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m(\varepsilon) a_m}{\delta_n(\varepsilon)}$

şeklinde elde ederiz .

Tanım 1.5.2. Asimptotik açılım

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^N \delta_m(\varepsilon) a_m(x) + R_N(x, \varepsilon)$$

şeklinde verilsin. Eğer $\varepsilon \rightarrow 0$ iken her x için $R_N(x, \varepsilon) = O(\delta_{N+1}(\varepsilon))$ ya da $o(\delta_{N+1}(\varepsilon))$ ise bu açılıma düzgün açılım denir. Aksi takdirde düzgün olmayan açılımdır. Yani bazı x ler için verilen bölgede bu açılım geçerli olmaz (Shivamoggi, 2003), (Hinch, 1991).

Örneğin;

$f(x, \varepsilon) = \sin(x+\varepsilon)$ ele alalım.

$$\sin(x+\varepsilon) = \sin(x) \cos(\varepsilon) + \sin(\varepsilon) \cos(x) = \sin(x) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots \right) + \cos(x) \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} + \dots \right)$$

olduğundan, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken bu açılım her x için düzgün bir açılımdır.

$f(x, \varepsilon) = \sqrt{x+\varepsilon}$ ele alalım.

$$\sqrt{x+\varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x} \right)^{1/2} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \frac{\varepsilon^3}{16x^3} + \dots \right) = \sqrt{x} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}} - \frac{\varepsilon^2}{8x^{3/2}} + \dots$$

olduğundan bu düzgün olmayan bir yaklaşımdır. Çünkü sadece $|\varepsilon/x| \leq 1$ olduğunda yakınsar.

$f(x, \varepsilon) = e^{-\varepsilon x}$ fonksiyonunun Taylor açılımı ile ilk üç terimi ele alalım.

$$f(x, \varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^2 + R_3(x, \varepsilon)$$

olur. Burada hata fonksiyonu $R_3(x, \varepsilon) = -\frac{1}{3!} \varepsilon^3 x^3 + \dots$ şeklindedir.

Sabit bir x için yeterince küçük ε seçilerek hata istenildiği kadar küçük yapılabilir. Fakat sabit bir ε için, ne kadar küçük olursa olsun, yaklaşım x büyüdükçe kopar. Böylece, bu yaklaşım $I = [0, \infty)$ aralığında düzgün açılım değildir.

Tanım 1.5.3: f ve g iki reel fonksiyon verilsin. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1$ ise, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken f ve g fonksiyonları özdeşdir denir. Bu durum $f \sim g$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.4 (Asimptotik Açılımlar Üzerinde Elementer İşlemler) :

$f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) a_m(x)$ ve $g(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) b_m(x)$ olarak verilsin.

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iken, $\alpha f(x, \varepsilon) + \beta g(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) (\alpha a_m(x) + \beta b_m(x))$ ve
- $k_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n(x) b_{m-n}(x)$ ele alınırsa, $f(x, \varepsilon)g(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) k_m(x)$

şeklinde elde edilir.

2. PERTÜRBASYON YÖNTEMİ

Pertürbasyon yöntemi, tam çözümü elde edilemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Pertürbasyon yönteminde temel yaklaşım, zorlu bir problemi sonsuz sayıda nispeten daha kolay problemlere ayırmaktır.

Pertürbasyon yöntemi, problemin çözümünü, tam çözümü olan problemden sapmayı belirleyen küçük bir parametre kullanarak kuvvet serisi terimleri yardımıyla bulmayı hedefler. Kuvvet serisinin ilk terimi, tam olarak çözülebilen problemin çözümü; diğer terimler ise çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlar. ε küçük parametre, x bağımsız değişken ve y tam çözüm olmak üzere;

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

tam çözüme yaklaşan çözümü ifade eder. Burada y_0 , tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin çözümüdür. y_1, y_2, \dots ise yüksek mertebeden sistematik bir yöntemle tekrarlanarak bulunan çözümlerdir. Pertürbasyon çözümü genellikle seri çözümünün belli bir noktadan kesilmesiyle elde edilir. Genellikle tam çözümü bulmak güç olduğu için iki terimli yaklaşık çözüm yeterli kabul edilir. Yani, $y = y_0 + \varepsilon y_1$ ifadesini almak yeterli olacaktır. Eğer ε çok küçükse, $y(x,\varepsilon)$ pertürbasyon serisinin sadece birkaç terimiyle iyi yaklaşım elde edileceği beklenmektedir. Fakat ε 'un çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir. Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar. Fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinden oldukça farklı olabilir (Bender ve Orszag, 1999), (Rice ve Do, 1995), (Sahoo, 2014).

Teorem (Pertürbasyon Teorisinin Temel Teoremi): Eğer $A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots + \varepsilon^N A_N + O(\varepsilon^{N+1}) \equiv 0$ ise, o zaman $A_0 = A_1 = \dots = A_N = 0$ dır. Burada $i=1, \dots, n$, A_i ler ε dan bağımsızdır ve ε yeterince küçüktür (Mann ve Simmonds, 1998).

İspat: Varsayalım ki $A_0 + A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + \dots + A_N \varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1}) = 0$ olsun fakat tüm A_k lar sıfır olmasın. Sıfır olmayan ilk terim A_M olsun. O zaman

$$\frac{A_M \varepsilon^M + A_{M+1} \varepsilon^{M+1} + \dots + A_N \varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1})}{\varepsilon^{N+1}} = \frac{A_M + A_{M+1} \varepsilon + \dots + A_N \varepsilon^{N-M} + O(\varepsilon^{N+1-M})}{\varepsilon^{N+1-M}}$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken bu ifade sonsuza gider. Tüm A_k ların sıfır kabul edilmemesinden dolayı bu ifade büyük O tanımı ile çelişir. Dolayısıyla $A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_N = 0$ olmalıdır (Mann ve Simmonds ,1998) , (Tzitzouris, Lecturer notes).

Pertürbasyon yöntemleri, regüler ve singüler pertürbasyon yöntemler şeklinde ele alınmaktadır.

2.1. Regüler ve Singüler Pertürbasyon Yöntemi

Regüler pertürbasyon problemleri ve singüler pertürbasyon problemleri arasında kesin bir ayırım yapmak yararlıdır. Regüler pertürbasyon problemi, ε 'un küçük, sıfır olmayan değerleri için pertürbe (indirgenmiş) edilmiş olan problemin, $\varepsilon=0$ için pertürbe edilmemiş olan problem ile aynı nitelikte olduğu problemlerdir. Regüler pertürbasyon problemleri genellikle, çözümleri bağımsız değişken için bir asimptotik serinin doğrudan yerine konulmasıyla yaklaştırılabildiğinden daha az zordur (Hunter, 2004), (Bender ve Orszag, 1999) (Sahoo, 2014).

Singüler pertürbasyon problemi ise pertürbe edilmiş olan problemin, pertürbe edilmemiş olan problemden niteliksel olarak farklı olduğu problemlerdir. Singüler pertürbasyon problemleri tipik bir problem olarak görünmesine rağmen, nitel olarak yeni fenomenleri anlamalarına izin verdikleri için çalışmak için en ilginç problemlerdir. Diferansiyel denklemleri içeren singüler pertürbasyon problemlerinin çözümleri çoğu zaman geniş çapta farklı uzunluk veya zaman ölçeklerine dayanır (Sahoo, 2014), (Hunter, 2004), (Bender ve Orszag, 1999).

Örnek 2.1.1 (Cebirsel Denklem):

Aşağıdaki ikinci dereceden denklemi ele alalım.

$$x^2 - \varepsilon x - 1 = 0 \quad (2.1)$$

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.2)$$

formunda bir çözüm arıyoruz. Bu genişlemeyi (2.1) denklemine kullanarak, ε^n göre denklemleri

$$\varepsilon^0: x_0^2 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon^1: 2x_0x_1 - x_0 = 0 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon^2: 2x_0x_2 + x_1^2 - x_1 = 0 \quad (2.5)$$

⋮

şeklinde yazabiliriz. (2.3) denkleminden, $x_0 = \pm 1$ elde edilir. $x_0 = \pm 1$ iken (2.4) denkleminden $x_1 = \frac{1}{2}$ ve $x_0 = \pm 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ iken (2.5) denkleminden, $x_2 = \pm \frac{1}{8}$ elde edilir. Böylece pertürbasyon çözümü,

$$x(\varepsilon) = \pm 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \pm \frac{1}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.6)$$

şeklinde olur. Burada ε 'un küçük, sıfır olmayan değerleri için pertürbe edilmiş olan problem ile, $\varepsilon=0$ için pertürbe edilmemiş olan problem aynı nitelikte olduğu için bu bir regüler pertürbasyon problemidir.

Şimdi ise bu yakınsamanın ne kadar iyi olduğunu belirlemek için (2.1) denkleminin

$$x = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4} \right)$$

şeklindeki tam çözümü ile karşılaştıralım. Binom teoremini kullanarak,

$$\sqrt{\varepsilon^2 + 4} = 2 \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon^4}{16} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{\varepsilon^6}{64} \right) + \dots \right) = 2 + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^4}{64} + \frac{\varepsilon^6}{512} + \dots$$

olur. Böylece,

$$x = \frac{1}{2}(\epsilon \pm (2 + \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon^4}{64} + \frac{\epsilon^6}{512} + \dots))$$

$$x = \begin{cases} 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \\ -1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

elde ederiz. Sonuç olarak, (2.6) ve (2.7) denklemlerine bakıldığında ilk üç terim için yaklaşım gayet iyidir.

Örnek 2.1.2 (Cebirsel Denklem):

$$\epsilon x^2 + x + 1 = 0 \quad (2.8)$$

denklemini ele alalım. (2.8) denklemi ikinci dereceden bir denklem olduğu için iki köke sahiptir. Fakat $\epsilon \rightarrow 0$ için (2.8) denklemi

$$x + 1 = 0 \quad (2.9)$$

birinci dereceli denkleme indirgenir ve sadece bir çözümü vardır. Böylece x , $\epsilon \rightarrow 0$ da sürekli değildir. Dolayısıyla, bu pertürbasyon problemi singüler pertürbasyon problemidir.

Köklerden biri için

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.10)$$

genişlemesini ele alalım. (2.8) denkleminde yerine yazarsak,

$$\epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \dots)^2 + (x_0 + \epsilon x_1 + \dots) + 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Buradan ϵ 'un kuvvetlerine göre

$$\epsilon^0: x_0 + 1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\epsilon^1: x_0^2 + x_1 = 0 \quad (2.12)$$

⋮

olur. $x_0 = -1$ olduğunda, $x_1 = -1$ olacaktır. Böylece tek kök için pertürbasyon çözümü

$$x(\varepsilon) = -1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (2.13)$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi ise diğer kökü belirlemek için (2.8) denkleminin tam çözümünü

$$x = \frac{1}{2\varepsilon} (-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon})$$

araştıralım. Binom teoremini kullanarak,

$$\sqrt{1-4\varepsilon} = (1+(-4\varepsilon))^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots$$

elde ederiz. Böylece,

$$x = \frac{1}{2\varepsilon} (-1 \pm (1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots))$$

$$x = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \dots \\ -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon + \dots \end{cases} \quad (2.14)$$

şeklinde olur. Buradan da görüldüğü gibi her iki kökte ε 'un kuvvetleriyle ilerliyor. Fakat bir tanesi ε^{-1} ile başlar. Sonuç olarak şekli bilinmediği sürece pertürbasyon yöntemiyle ikinci kök belirlenemez. Bu gibi durumlarda denklemin derecesinin azaltılmaması gerektiğinin farkındayız. Diğer kök $\varepsilon \rightarrow 0$ iken ∞ eğilimindedir. Bu nedenle

$$x = \frac{y}{\varepsilon^v} + \dots \quad (2.15)$$

formunda olduğunu varsayıyoruz. Burada v sıfırdan büyük olmalı ve analiz sırasında belirlenmelidir. (2.15) ifadesini (2.8) denkleminde ele alınırsa

$$\varepsilon^{1-2v}y^2 + \varepsilon^{-v}y + 1 + \dots = 0 \quad (2.16)$$

şeklini alır. $v > 0$ olduğundan, ikinci terim 1 den daha büyüktür. Dolayısıyla, (2.16) denkleminin baskın kısmı

$$\varepsilon^{1-2v}y^2 + \varepsilon^{-v}y = 0 \quad (2.17)$$

olur. Burada ε 'un kuvvetleri aynı olarak ele alınır ve v bulunur (Nayfeh, 1993). Yani, $1-2v = -v$ ya da $v = 1$ dir. O zaman (2.17) ifadesinden $y=0$ ya da $y=-1$ olur. İlk değer $y=0$, ilk köke karşılık gelirken $y=-1$, ikinci köke karşılık gelir. Böylece,

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + \dots$$

olur. İkinci kökün genişlemesinde daha fazla terim için

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots \quad (2.18)$$

ifadesini deneyelim. (2.18) ifadesini (2.8) denkleminde ele alırsak,

$$\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots + 1 = 0$$

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2x_0}{\varepsilon} + x_0^2 + \dots \right) - \frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots + 1 = 0$$

$$-2x_0 + x_0 + 1 + O(\varepsilon) = 0$$

elde ederiz. Buradan ise $x_0=1$ ve (2.18)'den

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \dots \quad (2.19)$$

elde ederiz. Aslında, v belirlendikten sonra x 'in bir dönüşümü olarak (2.15) dikkate alınabilir. O zaman (2.8) denkleminde $x = \frac{y}{\varepsilon}$ alınırsa,

$$y^2 + y + \varepsilon = 0 \quad (2.20)$$

denklemini verir. Bu denklem her iki kökün belirlenmesi için çözülebilir. Çünkü en yüksek mertebeli terim çarpan konumunda değildir. (2.13) ve (2.19) pertürbasyon yöntemiyle elde edilen çözümler ile (2.14) tam çözüm karşılaştırıldığında ilk iki terim için çözümler çakışıktır.

2.2. Diferansiyel Denklemler İçin Pertürbasyon Yöntemi

Bir boyutlu lineer olmayan sistemin diferansiyel denklemi aşağıdaki biçimde olsun.

$$L(u) + \varepsilon M(u) = 0 \quad (2.21)$$

Burada $u = u(x)$ biçiminde tek değişkenli bir fonksiyon, $L(u)$ genel olarak, x cinsinden türevleri içeren lineer bir operatör, $M(u)$ lineer olmayan operatör ve ε küçük bir parametredir (Kevorkian ve Cole, 1996). (2.21)'deki lineer olmayan terimin bir küçük pertürbasyon olduğunu ve (2.21) için çözümün küçük ε parametresinde bir kuvvet serisi olarak aşağıdaki gibi yazılabileceğini varsayalım.

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (2.22)$$

(2.22) ifadesini (2.21) denkleminde yazarsak ve ε 'un aynı kuvvetlere sahip terimleri eşitlenirse,

$$L(u_0) = 0$$

$$L(u_1) = -M(u_0)$$

⋮

denklemleri elde edilir. Böylece,

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$$

fonksiyonlarının değerlerini bulmak için özyinelemeli olarak entegre edilebilecek birkaç diferansiyel denklem elde etmek mümkündür (Kevorkian ve Cole, 1996).

Örnek 2.2.1 (Başlangıç değer problemi):

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + y(x) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (2.23)$$

başlangıç değer problemi verilsin.

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.24)$$

genişlemesini ele alalım. (2.23) denkleminde (2.24) ifadesini yazarsak,

$$\left(x + \varepsilon(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots)\right) \frac{d}{dx} (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots) + (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots) = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu ifadeyi ε 'un kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$\varepsilon^0: xy_0' + y_0(x) = 0, y_0(1) = 1 \quad (2.25)$$

$$\varepsilon^1: xy_1' + y_1(x) = -y_0 y_0', y_1(1) = 0 \quad (2.26)$$

⋮

şeklinde yazabiliriz. (2.25) ve (2.26) denklemlerini çözelim. (2.25) denkleminde,

$$(xy_0)' = 0 \Rightarrow xy_0 = c_1 \Rightarrow y_0 = \frac{c_1}{x}$$

olur. Başlangıç koşulundan $c_1 = 1$ elde ederiz. Böylece

$$y_0(x) = \frac{1}{x}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde (2.26) denkleminde,

$$(xy_1)' = \frac{1}{x^3} \Rightarrow xy_1 = -\frac{1}{2x^2} + c_2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2x^3} + \frac{c_2}{x}$$

olur. Başlangıç koşulundan $c_2 = \frac{1}{2}$ elde ederiz. Böylece

$$y_1(x) = -\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x}$$

şeklinde olur. İki terimli pertürbasyon çözümünü,

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{x} + \varepsilon \left(-\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.27)$$

elde ederiz. Aslında (2.23)'ün genel çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir.

Öncelikle verilen denklem $(x+\varepsilon y)dy+ydx=0$ şeklinde yazalım. Burada, $M=y$ ve $N=(x+\varepsilon y)$ olarak alındığı zaman $M_y=N_x=1$ olduğundan, tam diferansiyel denklemdir.

Denklem tamsa $\exists u$ çözümü $u=u(x,y)$ olacak şekilde $u_x=M$, $u_y=N$ dir. Böylece,

$u_x=y \Rightarrow u=xy+f(y)$ ve $u_y=x+\frac{df(y)}{dy}=x+\varepsilon y$ şeklinde olur ve f keyfi fonksiyonu

$$\frac{df(y)}{dy}=\varepsilon y \Rightarrow f(y)=\frac{\varepsilon y^2}{2}+c$$

elde edilir. Burada c keyfi sabittir. Denklemin genel çözümünü

$$xy+\frac{\varepsilon y^2}{2}+c=0$$

elde ederiz. $y(1)=1$ olduğundan, $c=-\frac{\varepsilon}{2}-1$ olur. O zaman denklemin son hali

$$\varepsilon y^2+2xy-\varepsilon-2=0$$

şeklini alır. Denklemin köklerini

$$y_{1,2}(x)=\frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+4\varepsilon(\varepsilon+2)}}{2\varepsilon}$$

şeklinde yazabiliriz. Başlangıç koşulu $y_1(1)=\frac{-2+2\varepsilon+2}{2\varepsilon}=1$ sağladığı için çözüm artılı olandır. O zaman genel çözüm

$$y(x)=-\frac{x}{\varepsilon}+\frac{\sqrt{4x^2+4\varepsilon(\varepsilon+2)}}{2\varepsilon} \text{ ya da } y(x)=-\frac{x}{\varepsilon}+\frac{x}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(\varepsilon+2)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinindedir. Binom teoremini kullanarak,

$$y(x)=-\frac{x}{\varepsilon}+\frac{x}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(\varepsilon+2)}{2x^2}-\frac{(\varepsilon^4+4\varepsilon^3+4\varepsilon^2)}{8x^4}+\dots\right)=-\frac{x}{\varepsilon}+\frac{x}{\varepsilon}+\frac{(\varepsilon^2+2\varepsilon)}{2\varepsilon x}-\frac{\varepsilon^4+4\varepsilon^3+4\varepsilon^2}{8x^3\varepsilon}+\dots$$

$$y(x)=\frac{1}{x}+\varepsilon\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^3}\right)+\dots \quad (2.28)$$

şeklinde elde ederiz. (2.27) ve (2.28) ifadelerine bakıldığında iki mertebeli çözümlerin çakışık olduğu görülmektedir.

Örnek 2.2.2 (Sınır Değer Problemi) :

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + (1+\varepsilon) \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1 \quad \text{ve} \quad 0 < x < 1 \quad (2.29)$$

sınır değer problemini ele alalım.

$\varepsilon=0$ iken indirgenmiş denklem ile (2.29) denklemi aynı nitelikte olmadığından bu bir singüler pertürbasyon problemidir. Bu problemin çözümü için iç ve dış çözümlerini bulup eşleştirme yaparak yaklaşık pertürbasyon çözümünü bulabiliriz.

Dış Çözüm:

ε 'un kuvvetine göre pertürbasyon serisi şeklinde bir dış çözüm arayalım.

$$y_{\text{dış}}(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.30)$$

$0 \leq x \leq 1$ için $1+x > 0$ olduğundan, sadece $x=1$ de bir sınır katı olmasını bekliyoruz.

Böylece, dış çözüm $y_{\text{dış}}(1)=1$ sınır koşulunu sağlamak zorundadır ve

$$y_0(1)=1, \quad y_n(1)=0, \quad n \geq 1 \quad (2.31)$$

sağlanmalıdır. (2.30) genişlemesini (2.29) denklemine yerine yazarsak ve ε 'un kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$\varepsilon^0: y_0' + y_0(x) = 0, \quad y_0(1) = 1, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon^1: y_1' + y_1(x) = -y_0'' - y_0', \quad y_1(1) = 0 \quad (2.33)$$

$$\varepsilon^2: y_2' + y_2(x) = -y_1'' - y_1', \quad y_2(1) = 0 \quad (2.34)$$

⋮

denklemleri elde edilir. (2.32), (2.33) ve (2.34) denklemlerini çözelim. (2.32) birinci mertebeden diferansiyel denklemi,

$$y_0 = c_1 e^{-x}$$

olur ve başlangıç koşulundan ise $c_1 = e$ elde edilir. Benzer şekilde (2.33) denkleminde,

$$y_1=c_2e^{-x}$$

olur ve başlangıç koşulundan, $c_2=0$ elde edilir. Böylece, $y_1(x)=0$ olur. Son olarak, (2.34) denkleminde,

$$y_2=c_3e^{-x}$$

olur ve başlangıç koşulundan, $c_3=0$ elde edilir. Hatta $y_n(1)=0$ olduğundan bundan sonraki çözümler $n \geq 1$, $y_n(x)=0$ olur. Böylece (2.32), (2.33) ve (2.34) denklemlerinin çözümlerini

$$y_0(x)=e^{1-x}$$

$$y_n(x)=0, \quad n \geq 1$$

şeklinde elde ederiz. Böylece dış bölge çözümü,

$$y_{\text{dış}}(x,\varepsilon)=e^{1-x} \quad (2.35)$$

elde ederiz.

İç Çözüm:

(2.35) dış çözümü $y(0)=0$ sınır koşulunu karşılamamaktadır, bu yüzden $x=0$ da bir sınır katı gereklidir. Yörünge olarak çözüm davranışında dış bölgeden uzaklaşan keskin bir değişiklik var. Bu keskin değişimi tanımlamak için, değişkeni aşağıdaki gibi büyütmemiz gerekir.

$$X=x/\varepsilon^v, \quad v > 0 \quad (2.36)$$

Burada ε^v sınır katının kalınlığını temsil eder. $Y_{\text{iç}}(X) \equiv y_{\text{iç}}(x)$ iç değişkeni tanımlayalım. (2.36) ifadesini (2.29) denkleminde alıp düzenlersek

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 Y_{\text{iç}}}{dX^2} + \varepsilon^{-v}(1+\varepsilon) \frac{dY_{\text{iç}}}{dX} + Y_{\text{iç}} = 0 \quad (2.37)$$

olur. Burada $1+\varepsilon > 0$ olduğundan, $1-2v = -v$ ya da $v=1$ bulunur. Dolayısıyla, (2.37) denklemi

$$\frac{d^2 Y_{i\epsilon}}{dX^2} + (1+\epsilon) \frac{dY_{i\epsilon}}{dX} + \epsilon Y_{i\epsilon} = 0 \quad (2.38)$$

şeklini alır.

$$Y_{i\epsilon}(X, \epsilon) = Y_0(X) + \epsilon Y_1(X) + \epsilon^2 Y_2(X) + \dots \quad (2.39)$$

pertürbasyon serisini ele alırsak sınır koşulları

$$Y_0(0) = 0 \text{ ve } Y_n(0) = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.40)$$

olur. (2.39) ifadesini (2.38) denkleminde ele alıp ϵ 'un kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$\epsilon^0: Y_0'' + Y_1' = 0, \quad Y_0(0) = 0, \quad (2.41)$$

$$\epsilon^1: Y_1'' + Y_1' = -Y_0' - Y_0, \quad Y_1(0) = 0 \quad (2.42)$$

⋮

denklemlerini elde ederiz. (2.41) ve (2.42) denklemlerini çözelim. (2.41) denklemi sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem olduğundan karakteristik denklemi $r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ ve $r_2 = -1$ olur. Böylece $Y_0(X) = c_0 + c_1 e^{-X}$ elde edilir. $Y_0(0) = 0$ olduğundan, $c_0 + c_1 = 0$ olur ki bu durumda tek sabite bağlı yazarsak

$$Y_0(X) = c_0 (1 - e^{-X}) \quad (2.43)$$

şeklinde elde ederiz. (2.42) denkleminde Y_0 ve Y_0' ifadelerini yazarsak, sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem

$$Y_1'' + Y_1' = -c_0 e^{-X} - c_0 (1 - e^{-X}) = -c_0$$

elde ederiz. Bu denklemin çözümü

$$Y_1(X) = Y_{1\text{homojen}} + Y_{1\text{özel}}$$

şeklinde bulunur. $Y_{1\text{homojen}}=c_2+c_3e^{-X}$ ve $Y_{1\text{özel}}=-c_0X$ şeklindedir. O zaman $Y_1(X)=c_2+c_3e^{-X}-c_0X$ ve $Y_1(0)=0$ başlangıç koşulundan $c_2+c_3=0 \Rightarrow c_3=-c_2$ olur. Buradan ise

$$Y_1(X)=c_2(1-e^{-X})-c_0X \quad (2.44)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece iç bölge çözümü,

$$Y_{iç}(X,\varepsilon)=c_0(1-e^{-X})+\varepsilon(c_2(1-e^{-X})-c_0X)+O(\varepsilon^2) \quad (2.45)$$

elde ederiz.

Eşleme:

$y(x,\varepsilon)$ fonksiyonu için geçerli iki yaklaşımın, birbiriyle örtüşen geçerlilik alanları varsa, bu iki yaklaşımın eşleştikleri söylenir. Asimptotik açılımlar tekniği, ilgilenilen aralık boyunca bazı mertebeden düzgün olarak geçerli yaklaşımları birlikte veren eşleştirme yapılarını içerir (Lagerstrom, 1988).

İç ve dış çözümleri asimptotik olarak eşleştirerek c_0, c_2 sabitlerini belirleyebiliriz. Eşleşme prensibi dış çözümün iç limiti, iç çözümün dış limiti ile eşleşmelidir (Bender ve Orszag, 1999), (O'Malley, 1991). Eşleşme prensibi matematiksel olarak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_{\text{dış}}(x,\varepsilon) = \lim_{X \rightarrow \infty} Y_{iç}(X,\varepsilon)$$

eşdeğerdir. $x=\varepsilon X$ iken, $y_{\text{dış}}(x,\varepsilon)=e^{1-x}=e\left(1-\varepsilon X+\frac{(\varepsilon X)^2}{2!}+\dots\right)$ yazabiliriz. İlk olarak ε 'un sıfırıncı mertebesini eşleyelim.

$$y_{\text{dış}}(x,\varepsilon)=e$$

olur. Diğer yandan, iç çözüm $X \rightarrow \infty$ ve $\varepsilon X=x \rightarrow 0$ iken,

$$Y_{iç}(X,\varepsilon)=c_0+O(\varepsilon)$$

olur. İç ve dış bölgelerin birbirine temas ettikleri geçiş bölgesinde her iki açılımın da aynı değeri alması beklenir. İç ve dış çözümler düşük mertebeden eşleşmeleri gerektirirler. Böylece, $c_0=e$ olur.

Şimdi ise ε 'un birinci mertebesini eşleyelim.

$$y_{dış}(x, \varepsilon) = e - \varepsilon e X, \quad x \rightarrow 0^+, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (2.46)$$

elde ederiz. (2.45) denkleminde iç çözüm,

$$Y_{iç}(X) = c_0 + \varepsilon(c_2 - c_0 X) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon X \rightarrow 0^+, \quad X \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

elde edilir. (2.46) ve (2.47) denklemlerinin eşlenmesinden, $c_2 = 0$ olur.

Amaç $0 \leq x \leq 1$ aralığının tamamında geçerli olan bir çözüm elde etmektir. Fakat burada $0 \leq x \leq 1$ aralığının farklı bölgelerinde geçerli iki farklı çözüm elde ettik. Bu yüzden iç ve dış çözüm olarak bulunan çözümlerin toplanıp ortak bölgedeki değerleri çıkartarak düzgün yaklaşımı elde edebiliriz. O zaman düzgün yaklaşım ,

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0 + \varepsilon y_1 + Y_0 + \varepsilon Y_1 - y_{eşleşme}$$

şeklinde olacaktır. Böylece $y_{eşleşme} = -e + \varepsilon e X + O(\varepsilon^2)$ olduğundan, iki terimli pertürbasyon çözümü

$$y(x, \varepsilon) = (e^{1-x} - e^{-e^{1-x}}) + \varepsilon(eX) - (-e + \varepsilon e X) + O(\varepsilon^2) = (e^{1-x} - e^{-e^{1-x}}) + O(\varepsilon^2)$$

olur ve $X = \frac{x}{\varepsilon}$ ifadesini bu denklemde ele alınırsa,

$$y(x, \varepsilon) = \left(e^{1-x} - e^{-e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.48)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise (2.29) denkleminin tam çözümünü yapalım. Bu denklem sabit katsayılı diferansiyel denklem olduğundan karakteristik denkleminin kökleri, $r_{1,2} = \frac{-(1+\varepsilon) \pm (\varepsilon-1)}{2\varepsilon}$ şeklinde olur. Buradan kökler ise, $r_1 = -\frac{1}{\varepsilon}$ ve $r_2 = -1$ dir. Böylece tam çözümü

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{\frac{x}{\varepsilon}}$$

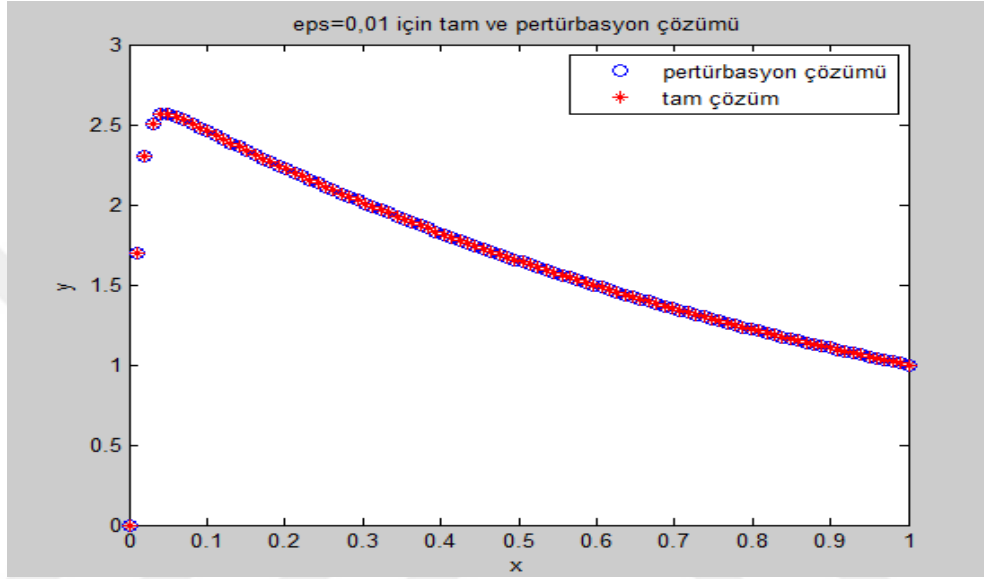
şeklinde elde ederiz. Sınır koşullarından, $A_1 = -A_2$ ve $A_1 = \frac{1}{e^{-1} - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ olur. O zaman tam

çözümün son hali

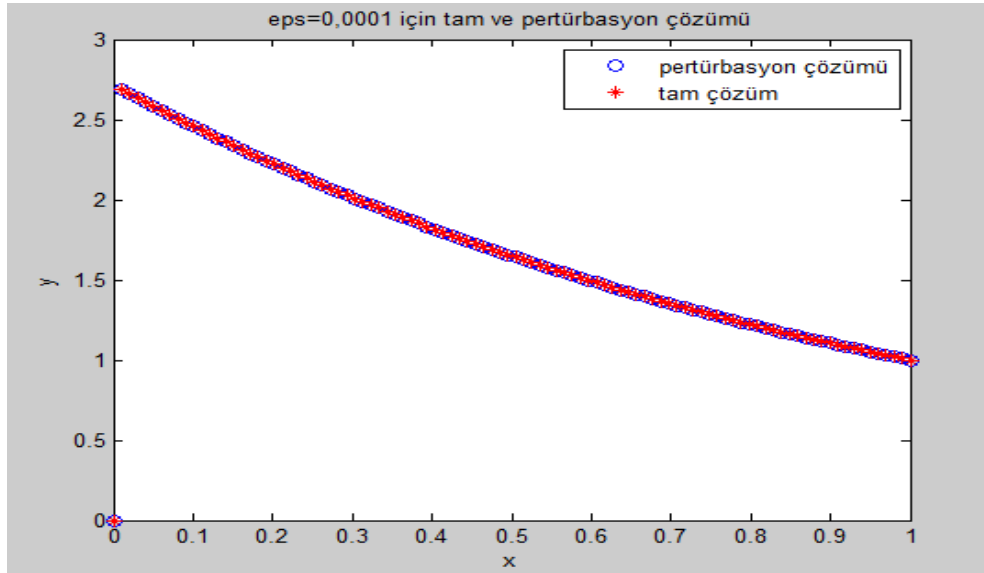
$$y(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (2.49)$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki grafikler incelendiğinde küçük ε değerleri için çözümlerin çakışık olduğu görülmektedir.



Şekil 2.1. $y(x)$ ' in $\varepsilon=0,01$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması



Şekil 2.2. $y(x)$ ' in $\varepsilon=0,0001$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması

Örnek 2.2.3 (Başlangıç Değer Problemi) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (1-\varepsilon x)y = 0, \quad y(0)=1, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0 \quad \text{ve} \quad 0 < x < 1 \quad (2.50)$$

problemini ele alalım.

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.51)$$

genişlemesini ele alalım. (2.50) denkleminde (2.51) genişlemesini yazıp, ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: y_0'' + y_0(x) = 0, \quad y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0, \quad (2.52)$$

$$\varepsilon^1: y_1'' + y_1(x) = x y_0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \quad (2.53)$$

$$\varepsilon^2: y_2'' + y_2(x) = x y_1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0 \quad (2.54)$$

⋮

olur. (2.52), (2.53) ve (2.54) denklemlerini çözelim. (2.52) sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$ olduğundan, $y_0(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ olur. $y_0(0) = 1$ iken $A = 1$ ve $y_0'(0) = 0$ iken $B = 0$ olur. Böylece,

$$y_0(x) = \cos(x)$$

ifadesini elde ederiz. (2.53) sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denkleminde y_0 ifadesini yazarsak, $y_1'' + y_1(x) = x \cos(x)$ denklemini elde ederiz.

Homojen olmayan bu denklemin çözümü $y_1 = y_{1\text{homojen}} + y_{1\text{özel}}$ şeklinde bulunur.

$$y_{1\text{homojen}} = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \quad \text{ve} \quad y_{1\text{özel}} = (C_3 x^2 + C_4 x) \cos(x) + (C_5 x^2 + C_6 x) \sin(x)$$

şeklindedir. $y_{1\text{özel}}$, $y_{1\text{özel}}'$, $y_{1\text{özel}}''$ ifadelerini hesaplayıp (2.53) denkleminde yazarsak $C_3 = 0$, $C_4 = 1/4$, $C_5 = 1/4$ ve $C_6 = 0$ elde ederiz. Böylece

$$y_1(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{1}{4} x^2 \sin(x) + \frac{1}{4} x \cos(x)$$

olur. $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$ olduğundan $C_1 = 0$ ve $C_2 = -1/4$ elde edilir. Böylece

$$y_1(x) = -\frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} x^2 \sin(x) + \frac{1}{4} x \cos(x)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi ise (2.54) denkleminde y_1 ifadesi ele alınırsa

$$y_2'' + y_2(x) = x \left(-\frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} x^2 \sin(x) + \frac{1}{4} x \cos(x) \right)$$

şeklinde olur. y_1 çözümünde olduğu gibi sabit katsayılı homojen olmayan bu denklemin çözümü $y_2 = y_{2\text{homojen}} + y_{2\text{özel}}$ şeklinde bulunacaktır.

$$y_{2\text{homojen}} = A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x)$$

ve

$$y_{2\text{özel}} = (A_3 x^4 + A_4 x^3 + A_5 x^2 + A_6 x) \cos(x) + (A_7 x^4 + A_8 x^3 + A_9 x^2 + A_{10} x) \sin(x)$$

şeklinindedir. Yukarıdakine benzer şekilde $y_{2\text{özel}}$, $y_{2\text{özel}}'$, $y_{2\text{özel}}''$ ifadelerini hesaplayıp (2.54) denkleminde yazılırsa $A_3 = -1/32$, $A_4 = 0$, $A_5 = 7/32$, $A_6 = 0$, $A_7 = 0$, $A_8 = 5/48$, $A_9 = 0$ ve $A_{10} = -7/32$ elde edilir. Böylece

$$y_2(x) = A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x) + \left(-\frac{1}{32} x^4 + \frac{7}{32} x^2 \right) \cos(x) + \left(\frac{5}{48} x^3 - \frac{7}{32} x \right) \sin(x)$$

ifadesini elde ederiz. $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 0$ olduğundan $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ elde edilir.

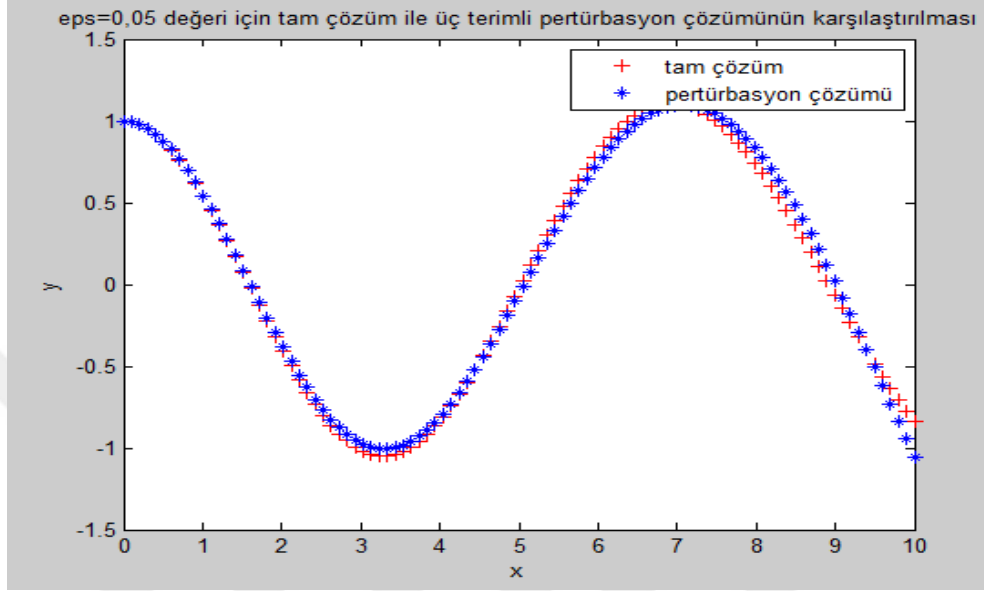
Buradan ise

$$y_2(x) = \left(-\frac{1}{32} x^4 + \frac{7}{32} x^2 \right) \cos(x) + \left(\frac{5}{48} x^3 - \frac{7}{32} x \right) \sin(x)$$

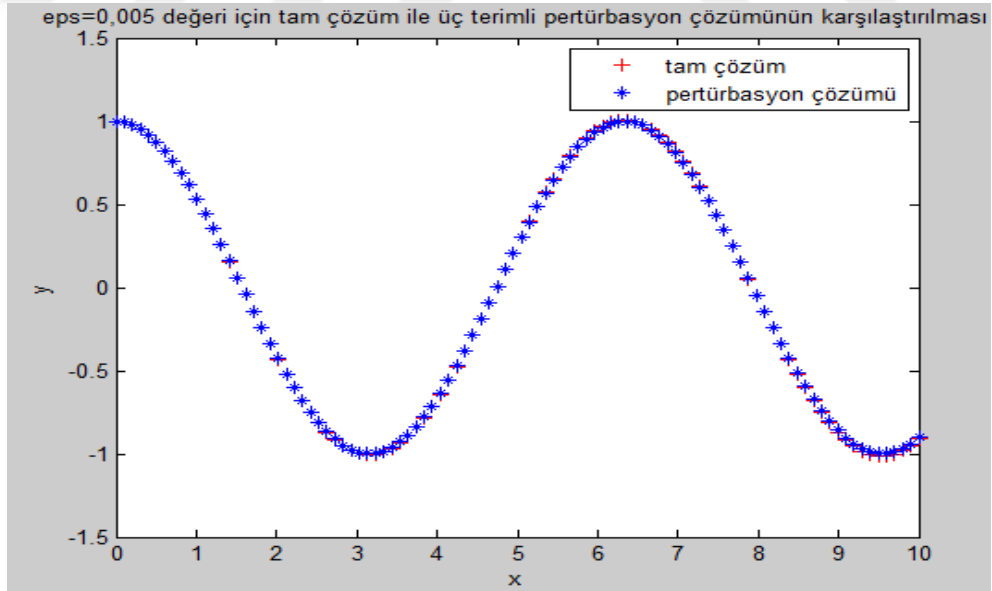
şeklinde elde ederiz. Böylece üç terimli pertürbasyon çözümünü,

$$y(x, \varepsilon) = \cos x + \varepsilon \left(\frac{1}{4} x^2 \sin(x) + \frac{1}{4} x \cos(x) - \frac{1}{4} \sin(x) \right) + \varepsilon^2 \left(\left(-\frac{1}{32} x^4 + \frac{7}{32} x^2 \right) \cos(x) + \left(\frac{5}{48} x^3 - \frac{7}{32} x \right) \sin(x) \right) + O(\varepsilon^3) \quad (2.55)$$

elde ederiz. (2.50) denkleminin değişken katsayılı bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin tam çözümünü Matlab programı yardımıyla elde edelim ve (2.55) üç terimli pertürbasyon çözümü ile karşılaştıralım. Elde edilen grafiklere baktığımızda tam çözüm ve üç terimli pertürbasyon çözümünün çakışık olduğu görülmektedir.



Şekil 2.3. $y(x)$ ' in $\varepsilon = 0,05$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması



Şekil 2.4. $y(x)$ ' in $\varepsilon = 0,005$ için pertürbasyon ve tam çözüm karşılaştırması

Örnek 2.2.4 (Sınır Değer Problemi) :

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + (1+x) \frac{dy}{dx} + y = 0, y(0)=1, y(1)=1 \text{ ve } 0 < x < 1 \quad (2.56)$$

sınır değer problemini ele alalım.

$\varepsilon=0$ iken indirgenmiş denklem ile (2.56) denklemi aynı nitelikte değildir.

Dolayısıyla, bu denklem bir singüler pertürbasyon problemidir.

Bu problemin çözümü için iç ve dış çözümlerini bulup eşleştirme yaparak yaklaşık pertürbasyon çözümünü bulabiliriz.

Dış Çözüm:

O zaman ε 'un kuvvetine göre pertürbasyon serisi şeklinde bir dış çözüm arayalım.

$$y_{\text{dış}}(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.57)$$

$0 \leq x \leq 1$ için $1+x > 0$ olduğundan, sadece $x=1$ da bir sınır katı olmasını bekliyoruz.

Böylece, dış çözüm $y_{\text{dış}}(1)=1$ sınır koşulunu sağlamak zorundadır ve

$$y_0(1)=1, y_n(1)=0, n \geq 1 \quad (2.58)$$

sağlanmalıdır. (2.57) genişlemesini (2.56) denklemine yerine yazılırsa ve ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: (1+x)y_0' + y_0(x) = 0, y_0(1)=1 \quad (2.59)$$

$$\varepsilon^1: (1+x)y_1' + y_1(x) = -y_0', y_1(1)=0 \quad (2.60)$$

⋮

denklemleri elde edilir. (2.59) ve (2.60) denklemlerini çözelim. (2.59) denkleminde

$$y_0 = \frac{c_1}{1+x}$$

olur. Başlangıç koşulundan ise $c_1=2$ elde edilir. (2.60) denkleminde,

$$y_1 = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{c_2}{1+x}$$

olur. Başlangıç koşulundan, $c_2 = -1/2$ elde edilir. Böylece dış bölge çözümü,

$$y_{\text{dış}}(x, \varepsilon) = \frac{2}{1+x} + \varepsilon \left(\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{1}{2(1+x)} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.61)$$

elde ederiz.

İç Çözüm:

Beklendiği gibi, (2.61) dış çözümü $y(0)=1$ sınır koşulunu karşılamamaktadır, bu yüzden $x=0$ da bir sınır katı gereklidir. Yörünge olarak çözüm davranışında dış bölgeden uzaklaşan keskin bir değişiklik var. Bu keskin değişimi tanımlamak için, değişkeni aşağıdaki gibi büyütmemiz gerekir.

$$X = x/\varepsilon^v, \quad v > 0 \quad (2.62)$$

Burada ε^v sınır katının kalınlığını temsil eder. $Y_{\text{iç}}(X) \equiv y_{\text{iç}}(x)$ iç değişkeni şeklinde verilsin. (2.62) ifadesini (2.56) denkleminde alıp düzenlenirse

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 Y_{\text{iç}}}{dX^2} + \varepsilon^{-v} (1 + \varepsilon X) \frac{dY_{\text{iç}}}{dX} + Y_{\text{iç}} = 0 \quad (2.63)$$

olur. Burada $1 + \varepsilon X > 0$ olduğundan, $1 - 2v = -v$ ya da $v = 1$ bulunur. Dolayısıyla, (2.63) denklemi

$$\frac{d^2 Y_{\text{iç}}}{dX^2} + (1 + \varepsilon X) \frac{dY_{\text{iç}}}{dX} + \varepsilon Y_{\text{iç}} = 0 \quad (2.64)$$

şeklini alır.

$$Y_{\text{iç}}(X, \varepsilon) = Y_0(X) + \varepsilon Y_1(X) + \varepsilon^2 Y_2(X) + \dots \quad (2.65)$$

pertürbasyon serisini ele alırsa sınır koşulları

$$Y_0(0) = 1 \text{ ve } Y_n(0) = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.66)$$

olur. (2.65) ifadesini (2.64) denkleminde ele alınıp ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: Y_0'' + Y_1' = 0, \quad Y_0(0) = 1 \quad (2.67)$$

$$\varepsilon^1: Y_1'' + Y_1' = -XY_0' - Y_0, Y_1(0) = 0 \quad (2.68)$$

⋮

denklemlerini elde ederiz. (2.67) ve (2.68) denklemlerini çözelim. (2.67) denklemi sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem olduğundan karakteristik denklemi $r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ ve $r_2 = -1$ olur. Böylece $Y_0(X) = c_0 + c_1 e^{-X}$ elde edilir. $Y_0(0) = 1$ olduğundan, $c_0 + c_1 = 1$ olur ki bu durumda tek sabite bağlı yazarsak

$$Y_0(X) = 1 + c_1(e^{-X} - 1) \quad (2.69)$$

şeklinde elde ederiz. (2.68) denkleminde Y_0 ve Y_0' ifadelerini yazarsak, sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem

$$Y_1'' + Y_1' = (c_1 X - c_1)e^{-X} - 1 + c_1$$

elde ederiz. Bu denklemin çözümü

$$Y_1(X) = Y_{1\text{homojen}} + Y_{1\text{özel}}$$

şeklinde bulunur. $Y_{1\text{homojen}} = c_2 + c_3 e^{-X}$ ve $Y_{1\text{özel}} = -\frac{c_1}{2} X^2 e^{-X} + (c_1 - 1)X$ şeklindedir. O zaman $Y_1(X) = c_2 + c_3 e^{-X} - \frac{c_1}{2} X^2 e^{-X} + (c_1 - 1)X$ olur. Başlangıç koşulundan $c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_3$ olur. Buradan ise

$$Y_1(X) = -X + c_1 \left(X - \frac{1}{2} X^2 e^{-X} \right) + c_3 (e^{-X} - 1) \quad (2.70)$$

denklemini elde ederiz. Böylece iç bölge çözümünü

$$Y_{iç}(X, \varepsilon) = 1 + c_1(e^{-X} - 1) + \varepsilon \left(-X + c_1 \left(X - \frac{1}{2} X^2 e^{-X} \right) + c_3 (e^{-X} - 1) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.71)$$

elde ederiz.

Eşleme:

İç ve dış çözümleri asimptotik olarak eşleştirerek c_1 , c_3 sabitlerini belirleyebiliriz. Örnek 2.2.2 de olduğu gibi eşleşme prensibinden yararlanalım. İlk olarak, ε 'ın sıfırcı mertebesini eşleyelim.

(2.61) dış çözümünde $x \rightarrow 0$ iken ,

$$y_{\text{dış}}(x, \varepsilon) = 2 + O(\varepsilon, x)$$

olur. Diğer yandan, iç çözüm $X \rightarrow \infty$ ve $\varepsilon X = x \rightarrow 0$ iken,

$$Y_{\text{iç}}(X, \varepsilon) = 1 - c_1 + O(\varepsilon X)$$

olur. İç ve dış çözümlerin eşleşmesinden $2 = 1 - c_1$ ya da $c_1 = -1$ elde ederiz.

Şimdi ise ε 'un birinci mertebesini eşleyelim. (2.61) denkleminde $1/(1+x)$ ifadesini Taylor serisi yardımıyla açalım. ε, x ifadelerini göz önüne alıp $\varepsilon^2, x^2, \varepsilon x$ ifadelerini önemsiz sayarsak dış çözümü,

$$y_{\text{dış}}(x, \varepsilon) = 2 - 2x + \frac{3}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2, \varepsilon x, x^2) \quad , \quad x \rightarrow 0^+ \quad , \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (2.72)$$

elde ederiz. Benzer şekilde ε, x ifadelerini göz önüne alıp $\varepsilon^2, x^2, \varepsilon x$ ifadelerini önemsiz sayarsak (2.71) denkleminde iç çözüm,

$$Y_{\text{iç}}(X) = 1 - c_1 - \varepsilon X + \varepsilon c_1 X - \varepsilon c_3 + O(x^2) \quad , \quad \varepsilon X \rightarrow 0^+ \quad , \quad X \rightarrow \infty \quad (2.73)$$

elde ederiz. (2.72) ve (2.73) denklemlerinin eşlenmesinden, $c_3 = -\frac{3}{2}$ olur.

Örnek 2.2.2 de olduğu gibi $0 \leq x \leq 1$ aralığının farklı bölgelerinde geçerli iki farklı çözüm elde ettik. Burada düzgün yaklaşım ,

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0 + \varepsilon y_1 + Y_0 + \varepsilon Y_1 - y_{\text{eşleşme}}$$

şeklinde olacaktır. Böylece $y_{\text{eşleşme}} = 1 + 1 - \varepsilon X - \varepsilon X + \frac{3}{2}\varepsilon$ olduğundan, iki terimli pertürbasyon çözümü

$$y(x, \varepsilon) = \left(\frac{2}{1+x} - e^{-X} \right) + \varepsilon \left(\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{1}{2(1+x)} + e^{-X} \left(\frac{1}{2} X^2 - \frac{3}{2} \right) \right) + O(\varepsilon^2)$$

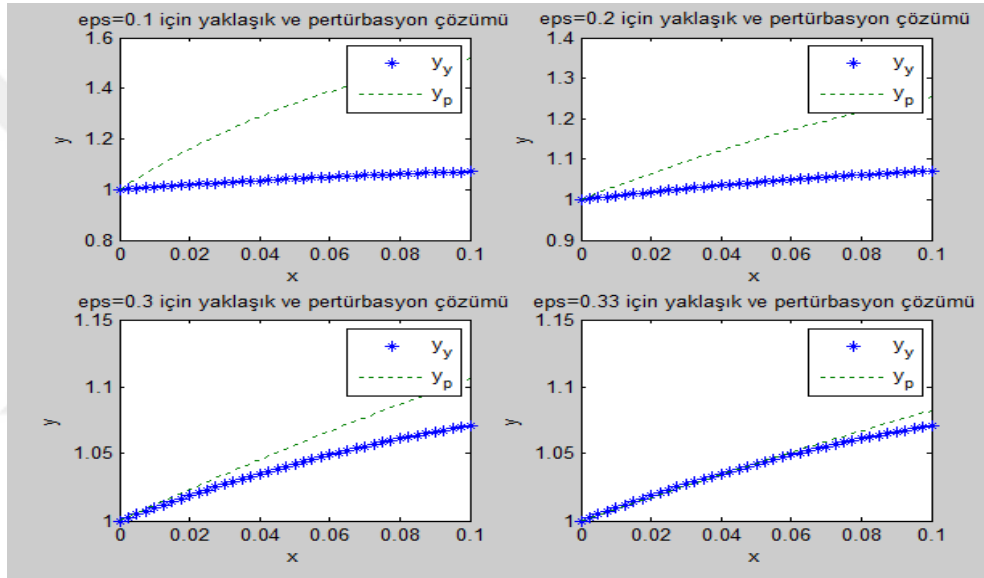
elde edilir. $X = \frac{x}{\varepsilon}$ ifadesini bu denklemde ele alırsak,

$$y(x, \varepsilon) = \left(\frac{2}{1+x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) + \varepsilon \left(\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{1}{2(1+x)} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{3}{2} \right) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.74)$$

şeklinde elde ederiz.

(2.56) denklemi basit bir diferansiyel denklem olarak görünebilir fakat bu denklem değişken katsayılı olduğundan tam çözümünü bulmak kolay değildir. (2.56) denkleminin Matlab programında ode45 çözücüsü yardımıyla yaklaşık çözümünü ele alalım.

Aşağıdaki grafik $0 < x < 0,1$ aralığında, $\epsilon=0,1$, $\epsilon=0,2$, $\epsilon=0,3$ ve $\epsilon=0,33$ değerleri için ele alındı. Grafiğe bakıldığında verilen aralıkta en iyi yaklaşım $\epsilon=0,33$ değeri için elde edildi. Bu aralıkta farklı ϵ değerleri ele alındığında pertürbasyon ve yaklaşık çözüm birbirinden uzaklaşmaktadır.



Şekil 2.5. Farklı ϵ değerleri için (2.56) denkleminin yaklaşık ve pertürbasyon yöntemiyle elde edilen çözümlerin karşılaştırması

Örnek 2.2.5 (Isı Transfer Denklemi) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(x), \quad u(x,0) = \cos(x), \quad t > 0 \quad \text{ve} \quad x > 0 \quad (2.75)$$

problemi verilsin.

$$u(x,t,\epsilon) = u_0(x,t) + \epsilon u_1(x,t) + \epsilon^2 u_2(x,t) + \dots \quad (2.76)$$

genişlemesini ele alalım. Bu genişlemeyi (2.75) denklemine yerine yazılırsa ve ϵ 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\epsilon^0: u_{0t} = \sin(x), \quad u_0(x,0) = \cos(x) \quad (2.77)$$

$$\varepsilon^1: u_{1t} = u_{0xx}, u_1(x,0) = 0 \quad (2.78)$$

$$\varepsilon^2: u_{2t} = u_{2xx}, u_2(x,0) = 0 \quad (2.79)$$

⋮

şeklinde olur. Şimdi (2.77), (2.78) ve (2.79) denklemlerini sırasıyla çözelim. (2.77) denkleminin çözümünden $u_0 = t \sin(x) + c_1(x)$ elde edilir. $u_0(x,0) = \cos(x)$ olduğundan, $c_1(x) = \cos(x)$ olur. Böylece,

$$u_0(x,t) = t \sin(x) + \cos(x)$$

ifadesini elde ederiz. (2.78) denkleminde u_0 'ı yazarsak ve denklemi çözersek,

$$u_{1t} = -t \sin(x) - \cos(x) \Rightarrow u_1 = -\frac{t^2}{2} \sin(x) - t \cos(x) + c_2(x)$$

elde ederiz. $u_1(x,0) = 0$ olduğundan, $c_2(x) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$u_1(x,t) = -\frac{t^2}{2} \sin(x) - t \cos(x)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi ise (2.79) denkleminde u_1 ifadesini ele alıp denklem çözümlerse,

$$u_{2t} = \frac{t^2}{2} \sin(x) + t \cos(x) \Rightarrow u_2 = \frac{t^3}{6} \sin(x) + \frac{t^2}{2} \cos(x) + c_3(x)$$

olur. $u_2(x,0) = 0$ olduğundan, $c_3(x) = 0$ olur. Böylece,

$$u_2(x,t) = \frac{t^3}{6} \sin(x) + \frac{t^2}{2} \cos(x)$$

denklemini elde ederiz. Buradan pertürbasyon çözümü,

$$u(x,t,\varepsilon) = \cos x + \varepsilon \left(-\frac{t^2}{2} \sin x - t \cos x \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{t^3}{6} \sin x + \frac{t^2}{2} \cos x \right) + O(\varepsilon^3) \quad (2.80)$$

elde ederiz.

Şimdi ise (2.75) denkleminin tam çözümünü araştıralım. Adomian ayrışma yöntemini uygulayalım. Bu yöntemde L diferansiyel operatör ve $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ şeklinde tanımlanabilir. L_t^{-1} ve L_x^{-1} integral operatör oldukları açıktır ve sırasıyla $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ ve $L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ şeklinde tanımlanabilir (Wazwaz, 2009) . Böylece (2.75) denklemini

$$L_t(u(x,t)) = \varepsilon L_x(u(x,t)) + \sin(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin her iki tarafını L_t^{-1} ile çarpalım ve başlangıç koşulunu kullanırsak,

$$u(x,t) = t \sin(x) + \cos(x) + \varepsilon L_t^{-1} \left(L_x(u(x,t)) \right)$$

şeklinde elde ederiz. Ayrıştırma yöntemi, $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonunu $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ serisi şeklinde tanımlar ve burada $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \dots$ ifadeleri belirlenecektir (Wazwaz, 2009). O zaman denklemin son şekli

$$u_0(x,t) + u_1(x,t) + \dots = t \sin(x) + \cos(x) + \varepsilon L_t^{-1} \left(L_x(u_0(x,t) + u_1(x,t) + \dots) \right)$$

olur. Ayrıştırma yöntemi, $u_0(x,t)$ sıfıncı bileşenin başlangıç, sınır koşullarından ve kaynak terimlerinden kaynaklanan terimlerle tanımlanır. $u(x,t)$ 'nin kalan bileşenleri, her bir bileşenin önceki bileşen kullanılarak yinelemeli bir şekilde belirlenir. Yani $u_{k+1}(x,t) = \varepsilon L_t^{-1} \left(L_x(u_k(x,t)) \right)$, $k \geq 0$ şeklinde ele alınır. Böylece

$$u_0(x,t) = t \sin(x) + \cos(x)$$

$$u_1(x,t) = \varepsilon L_t^{-1} \left(L_x(t \sin(x) + \cos(x)) \right) = \varepsilon L_t^{-1} (-t \sin(x) - \cos(x)) = -\varepsilon \left(\frac{t^2}{2!} \sin(x) + \cos(x) \right)$$

$$u_2(x,t) = -\varepsilon^2 L_t^{-1} \left(L_x \left(\frac{t^2}{2} \sin(x) + \cos(x) \right) \right) = \varepsilon^2 \left(\frac{t^3}{3!} \sin(x) + \frac{t^2}{2!} \cos(x) \right)$$

⋮

şeklinde elde ederiz.

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots$$

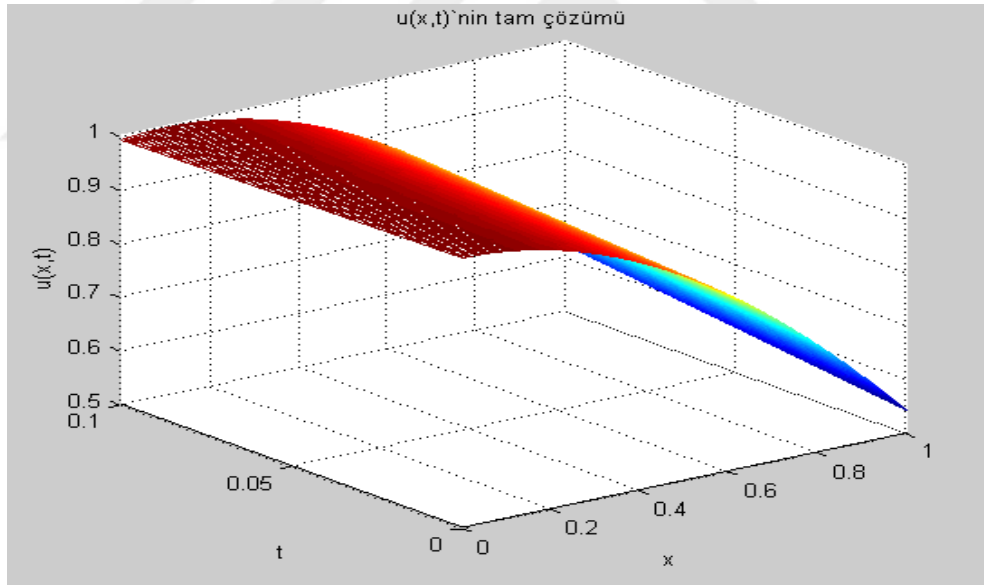
olduğundan,

$$u(x,t) = t \sin(x) + \cos(x) - \varepsilon \left(\frac{t^2}{2!} \sin(x) + \cos(x) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{t^3}{3!} \sin(x) + \frac{t^2}{2!} \cos(x) \right) + \dots$$

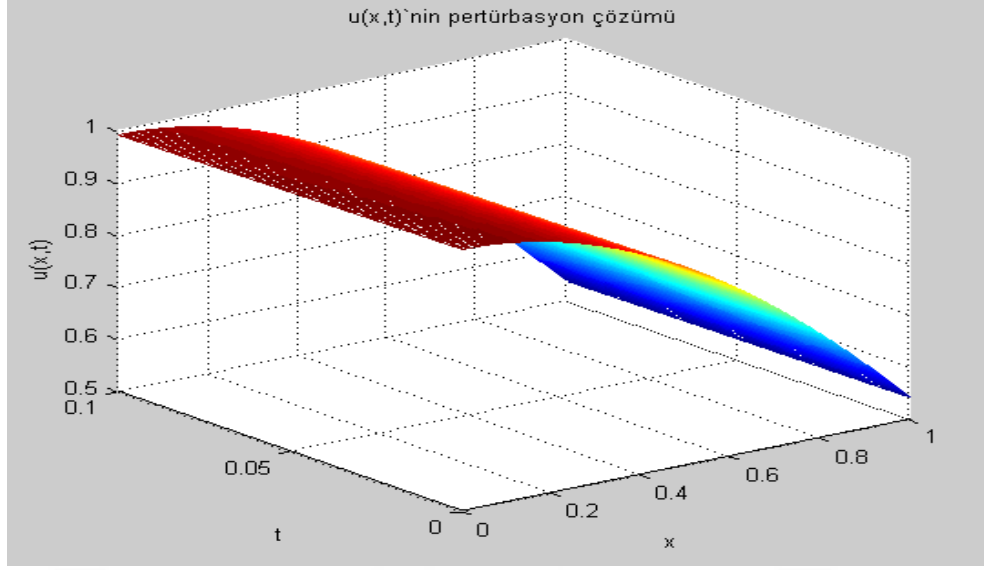
$$u(x,t) = \frac{\sin(x)}{\varepsilon} \left(\varepsilon t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3 t^3}{3!} + \dots \right) + \cos(x) \left(1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} + \dots \right)$$

$$= \frac{\sin(x)}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}) + \cos(x) e^{-\varepsilon t} \quad (2.81)$$

elde ederiz. Şimdi ise (2.80) pertürbasyon çözümü ile (2.81) tam çözümü karşılaştıralım. Burada grafik çizimleri için $0 < x < 1$ ve $0 < t < 0,1$ ve $\varepsilon = 0,1$ değerleri ele alındı ve Matlab programı yardımıyla grafikleri çizildi.



Şekil 2.6. $u(x,t)$ 'nin $\varepsilon=0,1$ için tam çözümü



Şekil 2.7. $u(x,t)$ 'nin $\varepsilon=0,1$ için pertürbasyon çözümü

Örnek 2.2.6 (Dalga Denklemi) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \varepsilon u^3, \quad u(x,0) = \alpha \cos(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (2.82)$$

kısmi diferansiyel denklemi verilsin.

$$u(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \dots \quad (2.83)$$

genişlemesini ele alalım. Bu genişlemeyi (2.82) denklemine yerine yazılırsa ve ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: u_{0tt} - u_{0xx} + u_0 = 0, \quad u_0(x,0) = \alpha \cos(x), \quad u_{0t}(x,0) = 0 \quad (2.84)$$

$$\varepsilon^1: u_{1tt} - u_{1xx} + u_0 = u_0^3, \quad u_1(x,0) = 0, \quad u_{1t}(x,0) = 0 \quad (2.85)$$

⋮

olur. (2.84) denklemine değişkenlerine ayırma yöntemini uygulayalım. $u_0(x,t) = X(x)T(t)$ alalım. (2.84) denklemine yazılırsa,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) + (\lambda + 1)T(t) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri ise,

$$X(x)=a_1 \cos \sqrt{\lambda}x+a_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$T(t)=a_3 \cos \sqrt{(\lambda+1)}t+a_4 \sin \sqrt{(\lambda+1)}t$$

şeklindedir. Buradan,

$$u_0(x,t)=(a_1 \cos \sqrt{\lambda}x+a_2 \sin \sqrt{\lambda}x)(a_3 \cos \sqrt{(\lambda+1)}t+a_4 \sin \sqrt{(\lambda+1)}t)$$

çözümü elde edilir. Böylece, $u_0(x,0)=a_1a_3 \cos \sqrt{\lambda}x+a_2a_3 \sin \sqrt{\lambda}x = \alpha \cos(x)$ ve $u_{0t}(x,0)=a_4=0$ ifadelerinden $a_1a_3 = \alpha$, $a_2a_3=0$, $\sqrt{\lambda}=1$ ve $a_4=0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$u_0(x,t)=\alpha \cos(x) \cos(\sqrt{2}t)$$

denklemini elde ederiz. u_0 ifadesini (2.81) denkleminde yazılırsa,

$$u_{1tt}-u_{1xx}+u_0=(\alpha \cos(x) \cos(\sqrt{2}t))^3$$

olur. Denklemin sağ tarafını ,

$$(\alpha \cos(x) \cos(\sqrt{2}t))^3 = \alpha^3 \left(\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) \right) \cos^3(\sqrt{2}t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sefer $u_1(x,t)=T_1(t) \cos(x) + T_2(t) \cos(3x)$ olarak alınıp denkleminde yerine yazılırsa

$$T_1''(t)+2T_1(t)=\alpha^3 \frac{3}{4} \cos^3(\sqrt{2}t)$$

$$T_2''(t)+10T_2(t)=\alpha^3 \frac{1}{4} \cos^3(\sqrt{2}t)$$

elde edilir. Bu denklemler lineer homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerdir.

Başlangıç koşullarından, $T_1(0)=T_2(0)=T_1'(0)=T_2'(0)=0$ olur.

$$T_1(t)=T_{1\text{homojen}}(t)+T_{1\text{özel}}(t)$$

olmak üzere,

$$T_{1\text{homojen}}(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t)$$

$$T_{1\text{özel}}(t) = \frac{9\sqrt{2}\alpha^3}{128} t \sin(\sqrt{2}t) - \frac{3\alpha^3}{256} \cos(3\sqrt{2}t)$$

elde edilir. Böylece

$$T_1(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t) + \frac{9\sqrt{2}\alpha^3}{128} t \sin(\sqrt{2}t) - \frac{3\alpha^3}{256} \cos(3\sqrt{2}t)$$

şeklindedir. Başlangıç koşulları ele alınırsa, $A = \frac{3\alpha^3}{256}$ ve $B=0$ bulunur. Böylece

$$T_1(t) = \frac{9\sqrt{2}\alpha^3}{128} t \sin(\sqrt{2}t) + \frac{3\alpha^3}{256} (\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3\sqrt{2}t))$$

olur. T_1 'e benzer şekilde,

$$T_2(t) = \frac{3\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(3\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{10}t)$$

elde edilir. O zaman

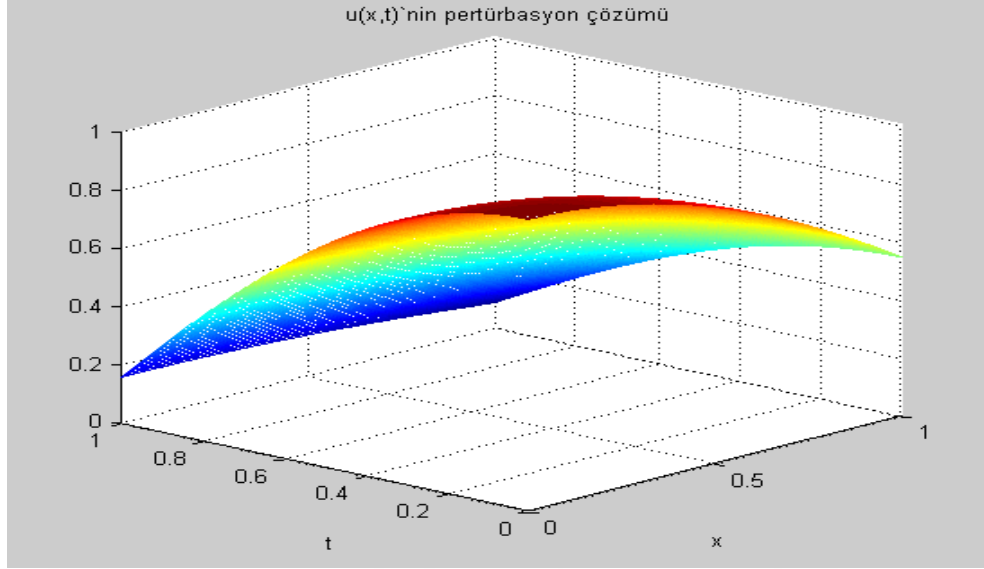
$$u_1(x,t) = \left(\frac{9\sqrt{2}\alpha^3}{128} t \sin(\sqrt{2}t) + \frac{3\alpha^3}{256} (\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3\sqrt{2}t)) \right) \cos(x) \\ + \left(\frac{3\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(3\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{10}t) \right) \cos(3x)$$

şeklinde elde ederiz. Böylece pertürbasyon çözümü,

$$u(x,t,\varepsilon) = \alpha \cos(x) \cos(\sqrt{2}t) +$$

$$+ \varepsilon \left(\left(\frac{9\sqrt{2}\alpha^3}{128} t \sin(\sqrt{2}t) + \frac{3\alpha^3}{256} (\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3\sqrt{2}t)) \right) \cos(x) + \left(\frac{3\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(3\sqrt{2}t) - \frac{\alpha^3}{128} \cos(\sqrt{10}t) \right) \cos(3x) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.86)$$

elde edilir.



Şekil 2.8. $u(x,t)$ 'nin $\varepsilon=0,01$ için pertürbasyon çözümü

Örnek 2.2.7:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x,t) = \sin(t), \quad u(x,0) = x, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.87)$$

denklemini ele alalım.

$\varepsilon=0$ iken indirgenmiş denklem ile (2.87) denklemi aynı nitelikte olmadığından bu bir singüler pertürbasyon problemidir. Bu problemin çözümünü de diğer singüler problemler gibi elde edelim.

Dış Çözüm:

O zaman ε 'un kuvvetine göre pertürbasyon serisi şeklinde bir dış çözüm arayalım.

$$u_{\text{dış}}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \dots \quad (2.88)$$

(2.88) genişlemesini (2.87) denkleminde yerine yazılırsa ve ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: u_0(x,t) = \sin(t) \quad (2.89)$$

$$\varepsilon^1: u_1(x,t) = -u_{0t} - 2u_{0x} \quad (2.90)$$

$$\varepsilon^2: u_2(x,t) = -u_{1t} - 2u_{1x} \quad (2.91)$$

⋮

denklemleri elde edilir. (2.90) ve (2.91) denklemlerini çözümlerse,

$$u_1(x,t) = -\cos(t)$$

$$u_2(x,t) = \sin(t)$$

olur. Hatta $u_{2n}(x,t) = (-1)^n \sin(t)$ ve $u_{2n+1}(x,t) = (-1)^{n+1} \cos(t)$ elde edilir. Böylece dış çözüm,

$$u_{\text{dış}}(x,t,\varepsilon) = \sin(t) - \varepsilon \cos(t) + \varepsilon^2 \sin(t) + O(\varepsilon^3) \quad (2.92)$$

elde ederiz.

İç Çözüm:

Beklendiği gibi, (2.92) dış çözümü $u(x,0)=1$ başlangıç koşulunu karşılamamaktadır. Yeni seriyi oluşturmak için, zaman değişkenini

$$T = t/\varepsilon, \quad v > 0 \quad (2.93)$$

şeklinde alalım. Böylece,

$$U_T^{iç} + 2\varepsilon U_x^{iç} + U^{iç} = \sin(\varepsilon T) \quad (2.94)$$

olur. Burada $\sin(\varepsilon T) = \varepsilon T - \frac{1}{4}(\varepsilon T)^3 + O(\varepsilon^5)$ şeklinde alabiliriz.

$$U^{iç}(x,T,\varepsilon) = U_0^{iç}(x,T) + \varepsilon U_1^{iç}(x,T) + \varepsilon^2 U_2^{iç}(x,T) + \dots \quad (2.95)$$

pertürbasyon serisini ele alırsak başlangıç koşulları

$$U_0^{iç}(x,0) = x \text{ ve } U_n^{iç}(x,0) = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.96)$$

olur. (2.95) ifadesini (2.94) denkleminde ele alınıp ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\varepsilon^0: U_{0T}^{iç} + U_0^{iç} = 0, \quad U_0^{iç}(x,0) = x \quad (2.97)$$

$$\varepsilon^1: U_{1T}^{iç} + U_1^{iç} = T - 2U_{0x}^{iç}, \quad U_1^{iç}(x,0) = 0 \quad (2.98)$$

⋮

denklemleri elde edilir. (2.97) ve (2.98) denklemlerinin çözümlerinden,

$$U_0^{iç}(x,T)=xe^{-T} \quad (2.99)$$

$$U_1^{iç}(x,T)=T-1+(1-2T)e^{-T} \quad (2.100)$$

şeklinde elde edilir. Böylece iç bölge çözümü

$$U^{iç}(x,T,\varepsilon)=xe^{-T}+\varepsilon(T-1+(1-2T)e^{-T})+O(\varepsilon^2) \quad (2.101)$$

elde ederiz.

Eşleme:

Dış çözümün ilk iki teriminde $t=\varepsilon T$ yazalım. Böylece, $u_{dış}(x,t,\varepsilon)=\sin(\varepsilon T)-\varepsilon \cos(\varepsilon T)=\varepsilon(T-1)+\dots=t-\varepsilon+\dots$ elde ederiz. O zaman düzgün yaklaşım ,

$$u(x,t,\varepsilon)\sim u_0+\varepsilon u_1+U_0+\varepsilon U_1-u_{eşleşme}$$

şeklinde olacaktır. ε 'un birinci mertebesi için eşleşme prensibinden ortak çözümü $u_{eşleşme}=t-\varepsilon$ bulabiliriz. Böylece, iki terimli pertürbasyon çözümünü

$$u(x,t,\varepsilon)=\sin(t)-\varepsilon \cos(t)+(x-2t+\varepsilon)e^{\frac{t}{\varepsilon}}+O(\varepsilon^2) \quad (2.102)$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi ise (2.87) denkleminin genel çözümünü karakteristik yöntemiyle elde edelim.

(2.87) denkleminde,

$$\frac{dt}{\varepsilon}=\frac{dx}{2\varepsilon}=\frac{du}{\sin(t)-u}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{dt}{\varepsilon}=\frac{dx}{2\varepsilon}\Rightarrow x=2t+c_1$$

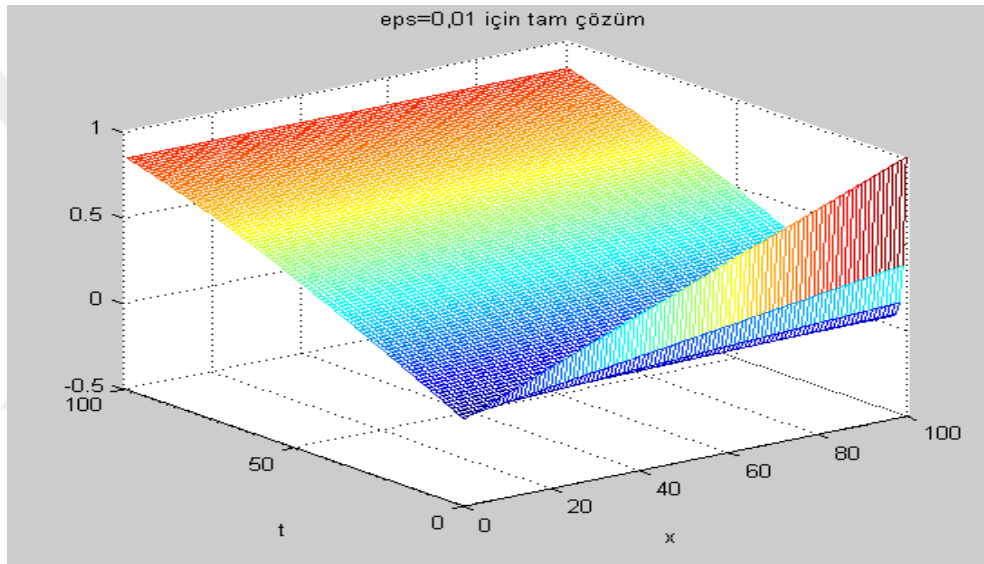
ve

$$\frac{dt}{\varepsilon} = \frac{du}{\sin(t)-u} \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{\varepsilon} = \frac{\sin(t)}{\varepsilon} \Rightarrow u(x,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon^2} \left(\sin(t) e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon \cos(t) e^{\frac{t}{\varepsilon}} + c_2 \right)$$

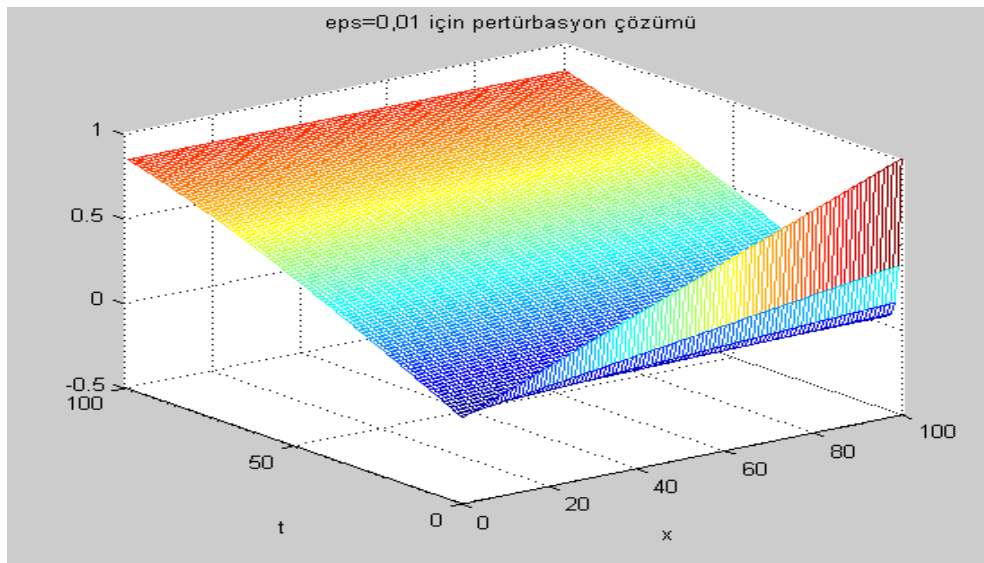
elde ederiz. c_1, c_2 keyfi sabitlerdir. Burada $c_2=f(c_1)$ şeklinde ele alınır ve f keyfi fonksiyondur. (Wazwaz, 2009). Böylece,

$$u(x,t) = \frac{1}{1+\varepsilon^2} (\sin(t) - \varepsilon \cos(t)) + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left(x - 2t + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right) \quad (2.103)$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.



Şekil 2.9. $u(x,t)$ 'nin $\varepsilon=0,01$ için tam çözüm



Şekil 2.10. $u(x,t)$ 'nin $\varepsilon=0,01$ için pertürbasyon çözümü

3.TÜMÖR MODELİNİN PERTÜRBASYON YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (Pamuk, 2013) ve (Pamuk ve Çay, 2018) makalelerinde ele alınan bir ve iki boyutlu tümör anjiyogenezindeki denklemleri ele aldık. Bu denklemlere pertürbasyon yöntemi uygulandı ve Matlab yardımıyla grafikleri elde edildi.

3.1. Bir Boyutlu Tümör Modeli

Bu modelde,

$v(y,t)$ = anjiyogenik faktör,

$c(y,t)$ = proteolitik enzim,

$f(y,t)$ = fibronektinin yoğunluğu,

$\eta(y,t)$ = endotel hücre yoğunluğu,

olmak üzere denklem sistemi aşağıdaki gibidir (Pamuk, 2013).

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\lambda v}{1+v_1 v} \frac{\eta}{\eta_0} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\lambda v}{1+v_1 v} \frac{\eta}{\eta_0} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta f \left(1 - \frac{f}{f_0}\right) \frac{\eta}{\eta_0} - \mu c f \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_\eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_y - \eta \frac{\tau'_1}{\tau_1} c_y - \eta \frac{\tau'_2}{\tau_2} f_y \right) \quad (3.4)$$

Burada λ , v_1 kinetik parametreleri, η_0 , f_0 sırasıyla endotel hücre ve fibronektin için bazı referans sayılar ve β , μ bazı pozitif sabitlerdir. Buna ek olarak α_i , β_i , γ_i ($i=1,2$) pozitif sabitler olmak üzere,

$$\frac{\tau'_1}{\tau_1} = \gamma_1 \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 + c)(\alpha_2 + c)},$$

$$\frac{\tau'_2}{\tau_2} = \gamma_2 \frac{\beta_2 - \beta_1}{(\beta_1 + f)(\beta_2 + f)},$$

şeklinde ve başlangıç verileri $\eta(y,0)=\eta_0=1$, $v(y,0)=\varepsilon\theta(y)$, $c(y,0)=c_0=0$, $f(y,0)=f_0=1$ alalım ve burada $\int_0^1 \theta(y)dy=1$ dir (Pamuk, 2013).

$$v(y,t)=\varepsilon v^*(y,t,\varepsilon),$$

$$c(y,t)=\varepsilon c^*(y,t,\varepsilon),$$

$$f(y,t)=1-\varepsilon f^*(y,t,\varepsilon),$$

$$\eta(y,t)=1+\varepsilon \eta^*(y,t,\varepsilon),$$

uygun bir şekilde yazalım ve bu denklemleri (3.1) - (3.4) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$v^*_t = -\frac{\lambda v^*(1+\varepsilon \eta^*)}{1+v_1 \varepsilon v^*} \quad (3.5)$$

$$c^*_t = \frac{\lambda v^*(1+\varepsilon \eta^*)}{1+v_1 \varepsilon v^*} \quad (3.6)$$

$$f^*_t = \beta f^*(1-\varepsilon f^*)(1+\varepsilon \eta^*) - \mu(1-\varepsilon f^*)c^* \quad (3.7)$$

$$\eta^*_t = D_\eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta^*_y - \frac{(1+\varepsilon \eta^*)\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)c^*_y}{(\alpha_1 + \varepsilon c^*)(\alpha_2 + \varepsilon c^*)} - \frac{(1+\varepsilon \eta^*)\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)f^*_y}{(\beta_1 + 1 - \varepsilon f^*)(\beta_2 + 1 - \varepsilon f^*)} \right) \quad (3.8)$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için (3.5) - (3.8) denklemleri

$$v^*_t = -\lambda v^* \quad (3.9)$$

$$c^*_t = \lambda v^* \quad (3.10)$$

$$-f^*_t = \beta f^* - \mu c^* \quad (3.11)$$

$$\eta^*_t = D_\eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta^*_y - \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)c^*_y}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)f^*_y}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} \right) \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir ve başlangıç koşulları,

$$v^*(y,0,\varepsilon)=\theta(y), c^*(y,0,\varepsilon)=0, f_t^*(y,0,\varepsilon)=0 \text{ ve } f^*(y,0,\varepsilon)=0$$

şeklinde olacaktır. (3.9) - (3.12) denklemlerini sırasıyla çözelim. İlk olarak (3.9) denklemini ele alınırsa,

$$v^*=c_1(y)e^{-\lambda t}$$

elde edilir ve $v^*(y,0,\varepsilon)=\theta(y)$ olduğundan, $c_1(y)=\theta(y)$ olur. Böylece

$$v^*(y,t,\varepsilon)=\theta(y)e^{-\lambda t}$$

elde edilir ve v^* , (3.10) denkleminde yerine yazılıp çözümlerse,

$$c^*=\theta(y)e^{-\lambda t}+c_2(y)$$

elde edilir. $c^*(y,0,\varepsilon)=0$ olduğundan, $c_2(y)=\theta(y)$ olur. Böylece

$$c^*(y,t,\varepsilon)=\theta(y)(1-e^{-\lambda t})$$

olur. Benzer şekilde c^* , (3.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f_t^*+\beta f^*=\mu\theta(y)(1-e^{-\lambda t})$$

olur ve bu lineer denklemin çözümü,

$$f^*(y,t,\varepsilon)=\mu\theta(y)e^{-\beta t}\left(\frac{e^{\beta t}}{\beta}-\frac{e^{(\beta-\lambda)t}}{\beta-\lambda}\right)+c_3(y)$$

şeklinde dir. $f^*(y,0,\varepsilon)=0$ olduğundan, $c_3(y)=-\mu\theta(y)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta-\lambda}\right)$ olur. O zaman

$$f^*(y,t,\varepsilon)=\mu\theta(y)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{e^{-\lambda t}}{\beta-\lambda}+\frac{\lambda e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\lambda)}\right)$$

denklemini elde ederiz. (3.12) denkleminde c^* , f^* yazılırsa ve düzenlenirse,

$$\eta_t^*=D_\eta\left(\eta_{yy}^*-\left(h_1(1-e^{-\lambda t})-h_2\mu\left(\frac{1}{\beta}-\frac{e^{-\lambda t}}{\beta-\lambda}+\frac{\lambda e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\lambda)}\right)\right)\right)x\theta''(y)$$

elde edilir ve burada $h_1 = \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2}$ ve $h_2 = \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)}$ olarak ele alındı (Pamuk, 2013). Yeterince büyük t için

$$\eta_t^* = D_\eta(\eta_{yy}^* - K\theta''(y))$$

yazılabilir ve $K = h_1 + \frac{h_2 \mu}{\beta}$ şeklindedir. $y=0,1$ de $n_y=0$ ve $\theta(0)=\theta'(1)=0$ olarak verilsin.

Böylece aşağıdaki sınır değer problemini oluşturabiliriz.

$$\begin{cases} \eta_t^* - D_\eta \eta_{yy}^* = -D_\eta K \theta''(y) \\ \eta^*(y, 0, \varepsilon) = 0, \quad 0 < y < 1 \\ \eta_y^*(0, t, \varepsilon) = \eta_y^*(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Şimdi bu problemi çözmek için $M(y, t, \varepsilon)$ herhangi bir bilinen fonksiyon olmak üzere,

$$w(y, t, \varepsilon) = \eta^*(y, t, \varepsilon) - M(y, t, \varepsilon)$$

alalım. Bu ifadeyi (3.13) denkleminde yerine yazarsak,

$$w_t - D_\eta w_{yy} = -D_\eta K \theta''(y) - (M_t - D_\eta M_{yy}) \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} w(y, 0, \varepsilon) = -M(y, 0, \varepsilon), \quad 0 < y < 1, \\ w_y(0, t, \varepsilon) = -M_y(0, t, \varepsilon), \quad t > 0, \\ w_y(1, t, \varepsilon) = -M_y(1, t, \varepsilon), \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

şeklinde elde ederiz. (3.14) denklemini homojen yapabilmek için $M(y, t, \varepsilon) = K\theta(y)$ alalım. Böylece $\theta(0)=\theta'(1)=0$ olduğundan, (3.14) ve (3.15)

$$w_t - D_\eta w_{yy} = 0, \quad (3.16)$$

$$w(y, 0, \varepsilon) = -K\theta(y), \quad 0 < y < 1 \quad (3.17)$$

$$w_y(0, t, \varepsilon) = w_y(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0 \quad (3.18)$$

olur. Bu problem homojen neuman sınır koşullarına sahip bir probleme dönüşür. Bu problem değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözülebilir.

$$w(y,t,\varepsilon)=Y(y)T(t)$$

şeklinde alalım. $w_t = Y(y)T'(t)$ ve $w_{yy} = Y''(y)T(t)$ ifadelerini (3.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Y(y)T'(t) = D_\eta Y''(y)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{D_\eta T(t)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

olur. Buradan

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, Y'(0) = Y'(1) = 0 \quad (3.19)$$

$$T'(t) + \lambda D_\eta T(t) = 0 \quad (3.20)$$

diferansiyel denklemlerini elde ederiz. (3.19) denklemini çözersek,

i) $\lambda = 0$ için,

$$Y(y) = Ay + B$$

elde ederiz ve $Y'(0) = Y'(1) = 0$ olduğundan, $A = 0$ olur. Böylece,

$$Y_0(y) = B_0$$

olur. (3.20) denkleminde $\lambda_0 = 0$ için $T'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = G$ elde ederiz.

ii) $\lambda > 0$ için,

$$Y(y) = C \cos(\sqrt{\lambda} y) + D \sin(\sqrt{\lambda} y)$$

olur ve $Y'(0) = Y'(1) = 0$ olduğundan, $D = 0$ ve $\sqrt{\lambda} = n\pi$ elde ederiz. Böylece,

$$Y_n(y) = C_n \cos(n\pi y)$$

olur ve (3.20) denkleminde $\lambda_n = (n\pi)^2$ için $T_n(t) = H_n e^{-D_n(n\pi)^2 t}$ elde ederiz.

iii) $\lambda < 0$ için

$$Y(y)=E\cosh(\sqrt{-\lambda} y)+F\sinh(\sqrt{-\lambda} y)$$

olur ve $Y'(0)=Y'(1)=0$ olduğundan, $E=F=0$ olur.

Böylece,

$$w(y,t,\varepsilon)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-n^2\pi^2 D_{\eta} t} \cos(n\pi y) \quad (3.21)$$

olur. Burada $C_0=GB_0$ ve $C_n^*=C_n H_n$ şeklindedir. Bu ise $(0,1)$ aralığında fourier cosinüs serisidir. O zaman

$$C_0=\int_0^1 w(y,0,\varepsilon)dy \text{ ve } C_n^*=2\int_0^1 w(y,0,\varepsilon)\cos(n\pi y)dy$$

şeklinde olduğu bilinir ve buradan

$$C_0=-K\int_0^1 \theta(y)dy=-K$$

$$C_n^*=-2K\int_0^1 \theta(y)\cos(n\pi y)dy, n=1,2,\dots$$

elde edilir. Böylece, (3.14) ile verilen problemin çözümü

$$\eta^*(y,t,\varepsilon)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-n^2\pi^2 D_{\eta} t} \cos(n\pi y)+K\theta(y), 0\leq y\leq 1, t>0$$

olur. Burada $\lim_{t\rightarrow\infty} \eta^*(y,t,\varepsilon)=-K+K\theta(y)$ dir. Sonuç olarak başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte (3.1) - (3.4) denklem sisteminin pertürbasyon çözümü,

$$v(y,t)=\varepsilon\theta(y)e^{-\lambda t}, 0< y < 1, t > 0$$

$$c(y,t)=\varepsilon\theta(y)(1-e^{-\lambda t}), 0< y < 1, t > 0$$

$$f(y,t)=1-\varepsilon\mu\theta(y)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{e^{-\lambda t}}{\beta-\lambda}+\frac{\lambda e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\lambda)}\right), 0< y < 1, t > 0$$

$$\eta(y,t)=1+\varepsilon\left(-K+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-n^2\pi^2 D_\eta t}\cos(n\pi y)+K\theta(y)\right), \quad 0\leq y\leq 1, t>0$$

şeklinde elde ederiz.

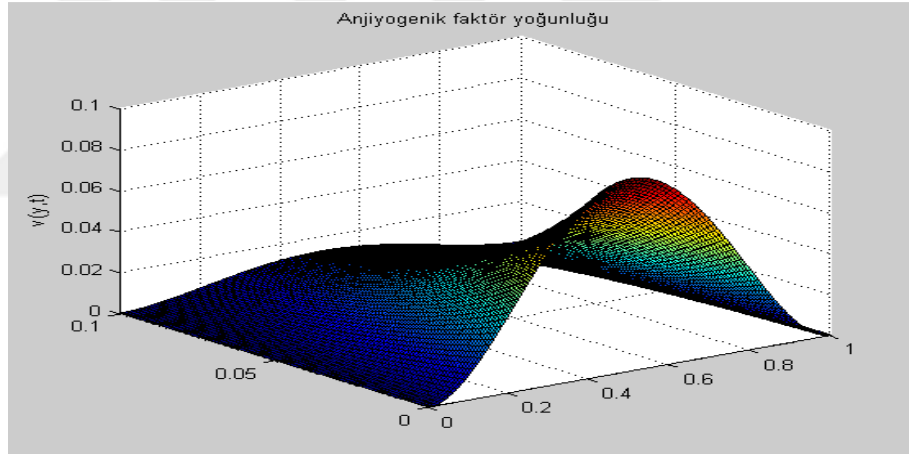
Burada nümerik bir örnek için $\theta(y)=Ay^2(1-y)^2$,

$$C_n=\begin{cases} 0, & n=1,3,5,\dots \\ \frac{1440K}{n^4\pi^4}, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

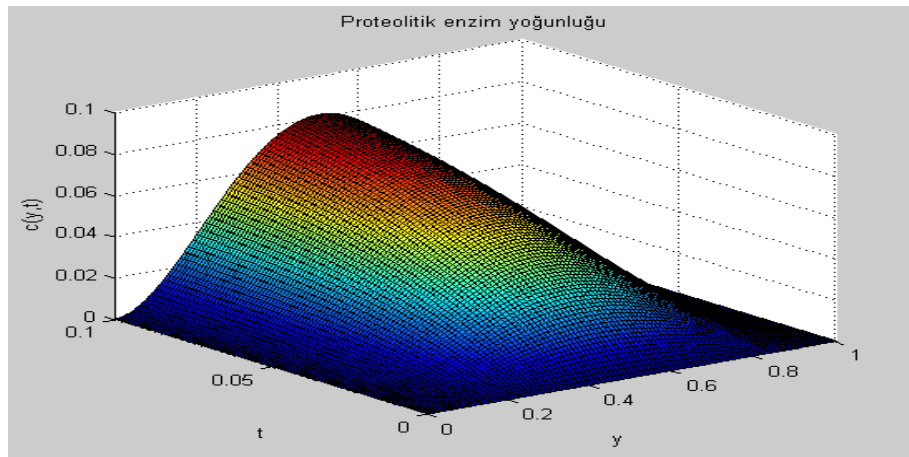
ve $\varepsilon=0,05$, $\lambda=20$, $\mu=5$, $\beta=10$, $K=0,1$ ve $D_\eta=0,25$ değerlerini alalım (Pamuk, 2013).

$\int_0^1\theta(y)dy=1$ olduğundan $A=30$ bulunur.

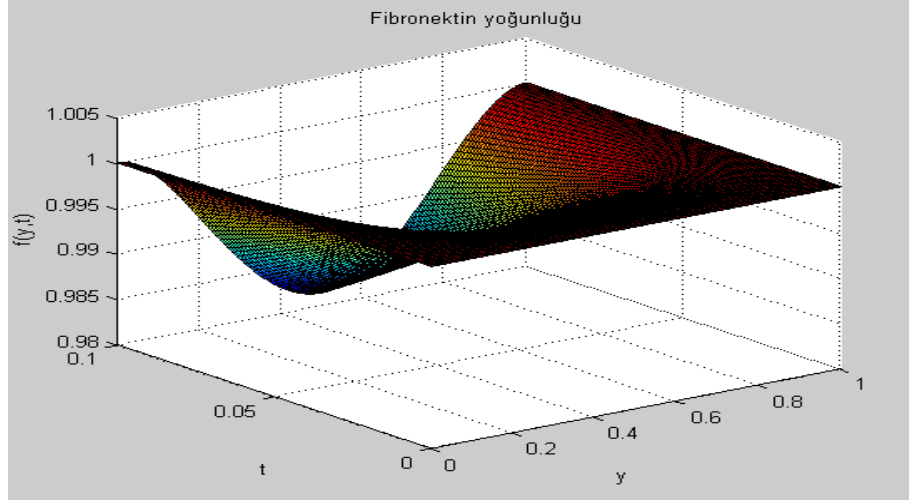
$t=0,1$ için anjiyogenik faktör, proteolitik enzim, fibronektin yoğunluğu ve endotel hücre yoğunluğu grafiklerini Matlab programı yardımıyla çizelim.



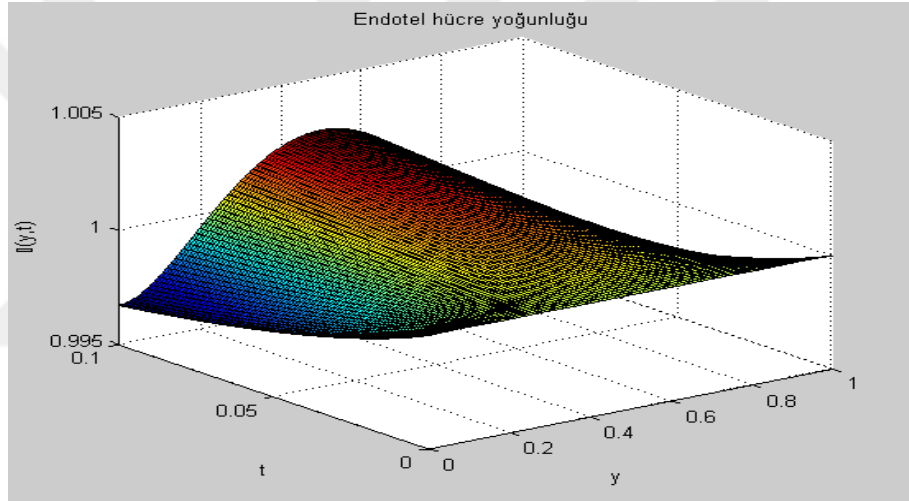
Şekil 3.1. $t=0,1$ de Anjiyogenetik faktör yoğunluğu



Şekil 3.2. $t=0,1$ de Proteolitik enzim yoğunluğu



Şekil 3.3. $t=0,1$ de Fibronektin yoğunluğu



Şekil 3.4. $t=0,1$ de dört terimli Endotel hücre yoğunluğu denkleminin çözümü

3.2. İki Boyutlu Tümör Modeli

Bu modelde

$U(x,y,t)$ = kemotatik ajan

$V(x,y,t)$ = anjiyogenik faktör,

$C(x,y,t)$ = proteolitik enzim,

$F(x,y,t)$ = fibronektin,

$N(x,y,t)$ = endotel hücre yoğunluğu,

$S(x,y,t)$ = perisit hücre yoğunluğu,

$M(x,y,t)$ = makrofaj hücre yoğunluğu,

olmak üzere denklem sistemi aşağıdaki gibidir (Pamuk ve Çay, 2018).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\lambda_2 UM}{1+v_2 U}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\lambda_2 UM}{1+v_2 U} - \frac{\lambda_1 VN}{1+v_1 V}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\lambda_1 VN}{1+v_1 V} - \mu C, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \beta(1-F)FN - \frac{\lambda_4 CF}{1+v_4 F}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_N \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x - N \frac{T'_1}{T_1} C_x - N \frac{T'_2}{T_2} F_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y - N \frac{T'_1}{T_1} C_y - N \frac{T'_2}{T_2} F_y \right) \right), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D_S \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(S_x - S \frac{T'_3}{T_3} F_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_y - S \frac{T'_3}{T_3} F_y \right) \right), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D_M \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x - M \frac{T'_4}{T_4} U_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_y - M \frac{T'_4}{T_4} U_y \right) \right). \quad (3.28)$$

Burada

$$\frac{T'_1}{T_1} = \gamma_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 + C)(\alpha_2 + C)},$$

$$\frac{T'_2}{T_2} = \gamma_2 \frac{\beta_2 - \beta_1}{(\beta_1 + F)(\beta_2 + F)},$$

$$\frac{T'_3}{T_3} = \gamma_3 \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{(\alpha_3 + C)(\alpha_4 + C)},$$

$$\frac{T'_4}{T_4} = \gamma_4 \frac{\beta_4 - \beta_3}{(\beta_3 + F)(\beta_4 + F)},$$

ve $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1,4$) pozitif sabitler ve başlangıç koşulları $U(x,y,0)=\varepsilon\theta_1(x,y)$, $V(x,y,0)=\varepsilon\theta_2(x,y)$, $C(x,y,0)=0$, $F(x,y,0)=1$, $N(x,y,0)=S(x,y,0)=M(x,y,0)=1$ ve sınır koşulları $x=0,1$ de $N_x=S_x=M_x=0$, $y=0,1$ de $N_y=S_y=M_y=0$ dir. $\theta_i(x,y)$ ($i=1,2$)

fonksiyonu $\theta_i(x,y)=Ax^2(1-x)y$ olacak şekilde seçilsin. Burada A , $\int_0^1 \int_0^1 \theta_i(x,y)dx dy=1$ olacak şekilde bir sabittir ve $A=24$ bulunur (Pamuk ve Çay, 2018). Modeli çözmek için,

$$U(x,y,t)=\varepsilon U^*(x,y,t,\varepsilon),$$

$$V(x,y,t)=\varepsilon V^*(x,y,t,\varepsilon),$$

$$F(x,y,t)=1-\varepsilon F^*(x,y,t,\varepsilon),$$

$$C(x,y,t)=\varepsilon C^*(x,y,t,\varepsilon), \quad (3.29)$$

$$N(x,y,t)=1+\varepsilon N^*(x,y,t,\varepsilon),$$

$$S(x,y,t)=1+\varepsilon S^*(x,y,t,\varepsilon),$$

$$M(x,y,t)=1+\varepsilon M^*(x,y,t,\varepsilon),$$

alalım ve (3.29) deki denklemleri (3.22) - (3.28) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$\varepsilon U_t^* = -\frac{\lambda_2 \varepsilon U^* (1+\varepsilon M^*)}{1+v_2 \varepsilon U^*} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon V_t^* = \frac{\lambda_2 \varepsilon U^* (1+\varepsilon M^*)}{1+v_2 \varepsilon U^*} - \frac{\lambda_1 \varepsilon V^* (1+\varepsilon N^*)}{1+v_2 \varepsilon V^*} \quad (3.31)$$

$$\varepsilon C_t^* = \frac{\lambda_1 \varepsilon V^* (1+\varepsilon N^*)}{1+v_1 V} - \mu \varepsilon C^* \quad (3.32)$$

$$-\varepsilon F_t^* = \beta \varepsilon F^* (1-\varepsilon F^*) (1+\varepsilon F^*) - \frac{\lambda_4 \varepsilon C^* (1-\varepsilon F^*)}{1+v_4 (1-\varepsilon F^*)} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon N_t^* = D_N \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{array}{l} \varepsilon N_x^* - (1+\varepsilon N^*) \gamma_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 + \varepsilon C^*)(\alpha_2 + \varepsilon C^*)} \varepsilon C_x^* \\ - (1+\varepsilon N^*) \gamma_2 \frac{\beta_2 - \beta_1}{(\beta_1 + 1 - \varepsilon F^*)(\beta_2 + 1 - \varepsilon F^*)} (-\varepsilon F_x^*) \end{array} \right)$$

$$+D_N \frac{\partial}{\partial y} \left(\begin{array}{l} \varepsilon N_y^* - (1 + \varepsilon N^*) \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 + \varepsilon C^*)(\alpha_2 + \varepsilon C^*)} \varepsilon C_y^* \\ -(1 + \varepsilon N^*) \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1 - \varepsilon F^*)(\beta_2 + 1 - \varepsilon F^*)} (-\varepsilon F_y^*) \end{array} \right) \quad (3.34)$$

$$\varepsilon S_t^* = D_S \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon S_x^* - (1 + \varepsilon S^*) \gamma_3 \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{(\alpha_3 + \varepsilon C^*)(\alpha_4 + \varepsilon C^*)} (-\varepsilon F_x^*) \right) \\ + D_S \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon S_y^* - (1 + \varepsilon S^*) \gamma_3 \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{(\alpha_3 + \varepsilon C^*)(\alpha_4 + \varepsilon C^*)} (-\varepsilon F_y^*) \right) \quad (3.35)$$

$$\varepsilon M_t^* = D_M \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon M_x^* - (1 + \varepsilon M^*) \gamma_4 \frac{\beta_4 - \beta_3}{(\beta_3 + \varepsilon U^*)(\beta_4 + \varepsilon U^*)} \varepsilon U_x^* \right) \\ + D_M \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon M_y^* - (1 + \varepsilon M^*) \gamma_4 \frac{\beta_4 - \beta_3}{(\beta_3 + \varepsilon U^*)(\beta_4 + \varepsilon U^*)} \varepsilon U_y^* \right) \quad (3.36)$$

elde ederiz. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$U_t^* = -\lambda_2 U^* \quad (3.37)$$

$$V_t^* = \lambda_2 U^* - \lambda_1 V^* \quad (3.38)$$

$$C_t^* = \lambda_1 V^* - \mu C^* \quad (3.39)$$

$$F_t^* = -\beta F^* + \frac{\lambda_4}{1 + \nu_4} C^* \quad (3.40)$$

$$N_t^* = D_N \left(N_{xx}^* - \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2} C_{xx}^* + \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} F_{xx}^* \right) \\ + D_N \left(N_{yy}^* - \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2} C_{yy}^* + \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} F_{yy}^* \right) \quad (3.41)$$

$$S_t^* = D_S \left(S_{xx}^* - \frac{\gamma_3(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_3 \alpha_4} F_{xx}^* \right) + D_S \left(S_{yy}^* - \frac{\gamma_3(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_3 \alpha_4} F_{yy}^* \right) \quad (3.42)$$

$$M_t^* = D_M \left(M_{xx}^* - \frac{\gamma_4(\beta_4 - \beta_3)}{\beta_3\beta_4} U_{xx}^* \right) + D_M \left(M_{yy}^* - \frac{\gamma_4(\beta_4 - \beta_3)}{\beta_3\beta_4} U_{yy}^* \right) \quad (3.43)$$

olur. (3.37) - (3.43) denklemlerini sırasıyla çözelim. (3.37) denklemini ele alırsak,

$$U^*(x,y,t,\varepsilon) = a_1(x,y)e^{-\lambda_2 t}$$

elde ederiz ve $U^*(x,y,0,\varepsilon) = \theta_1(x,y)$ olduğundan, $a_1(y) = \theta_1(x,y)$

$$U^*(x,y,t,\varepsilon) = \theta_1(x,y)e^{-\lambda_2 t}$$

elde edilir ve U^* , (3.38) denkleminde yerine yazarsak ve çözersek,

$$V^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_1(x,y)e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_1 t} a_2(x,y)$$

denklemini elde ederiz ve $U^*(x,y,0,\varepsilon) = \theta_2(x,y)$ olduğundan,

$a_2(x,y) = \theta_2(x,y) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_1(x,y)$ elde ederiz. Böylece,

$$V^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_1(x,y)(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) + e^{-\lambda_1 t} \theta_2(x,y)$$

bulunur. Benzer şekilde V^* , (3.39) denkleminde yerine yazarsak ve çözersek,

$$C^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + e^{-\mu t} a_3(x,y)$$

elde ederiz ve $C^*(x,y,0,\varepsilon) = 0$ olduğundan, $a_3(x,y) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} + \frac{\lambda_1 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)}$ olur. Böylece,

$$C^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + e^{-\mu t} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \theta_1(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)} \right)$$

denklemini bulunur. Şimdi ise C^* , (3.40) denkleminde yazarsak ve çözersek,

$$F^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)(1 + v_4)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} e^{-\lambda_1 t}$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y) e^{-\lambda_1 t}}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} + e^{-\mu t} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\beta - \mu)(1 + v_4)(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\beta - \mu)(1 + v_4)(\mu - \lambda_1)} \right) + e^{-\beta t} a_4(x,y)$$

elde ederiz ve $F^*(x,y,0, \varepsilon) = 0$ olduğundan,

$$a_4(x,y) = - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)(1 + v_4)} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} \\ - \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\beta - \mu)(1 + v_4)(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\beta - \mu)(1 + v_4)(\mu - \lambda_1)}$$

şeklinde olur. Böylece,

$$F^*(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)(1 + v_4)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} e^{-\lambda_1 t} \\ + \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{e^{-\mu t}}{\beta - \mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(1 + v_4)} - \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(1 + v_4)} \right) \\ + \frac{e^{-\beta t}}{\beta - \mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 + v_4)} \left(\frac{1}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)} - \frac{1}{(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)} \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \theta_1(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(1 + v_4)} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 \theta_2(x,y)}{(\mu - \lambda_1)(1 + v_4)} \right)$$

denklemini elde ederiz.

En başta $\theta_i(x,y) = Ax^2(1-x)y$ olacak şekilde seçilmişti ve $A=24$ bulunmuştu. Buradan ise $\theta_{ixx} = 48(1-3x)y$ ve $\theta_{iyy} = 0$, $(i=1,2)$ bulunur. Böylece, $C_{yy}^* = F_{yy}^* = U_{yy}^* = 0$ ve

$$C_{xx}^* = 48(1-3x)y \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \right) \\ + e^{-\mu t} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)} \right)$$

$$U_{xx}^* = 48(1-3x)y e^{-\lambda_2 t},$$

$$F_{xx}^* = 48(1-3x)y \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)(1 + v_4)} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} e^{-\lambda_1 t} \right) \\ + 48(1-3x)y \left(\frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{e^{-\mu t}}{\beta - \mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(1 + v_4)} - \frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(1 + v_4)} \right) \right)$$

$$+48(1-3x)y \left(\frac{e^{-\beta t}}{\beta-\mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_2)(1+v_4)} \left(\frac{1}{(\mu-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)} - \frac{1}{(\mu-\lambda_2)(\beta-\lambda_2)} \right) \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda_2)(1+v_4)} + \frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu-\lambda_1)(1+v_4)} \right) \right),$$

olur. O zaman (3.41) - (3.43) denklemleri

$$N_t^* = D_N (N_{xx}^* + N_{yy}^*) + \left(-D_N \frac{\gamma_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2} C_{xx}^* + D_N \frac{\gamma_2 (\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} F_{xx}^* \right),$$

$$S_t^* = D_S (S_{xx}^* + S_{yy}^*) + D_S \frac{\gamma_3 (\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_3 \alpha_4} F_{xx}^*,$$

$$M_t^* = D_M (M_{xx}^* + M_{yy}^*) - D_M \frac{\gamma_4 (\beta_4 - \beta_3)}{\beta_3 \beta_4} U_{xx}^*,$$

şeklini alır. Bu denklemleri

$$N_t^* = D_N (N_{xx}^* + N_{yy}^*) + f(x, y, t)$$

$$S_t^* = D_S (S_{xx}^* + S_{yy}^*) + g(x, y, t) \quad (3.44)$$

$$M_t^* = D_M (M_{xx}^* + M_{yy}^*) + h(x, y, t)$$

şeklinde alalım. Burada

$$f(x, y, t) = -D_N \frac{\gamma_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2} C_{xx}^* + D_N \frac{\gamma_2 (\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} F_{xx}^*$$

$$g(x, y, t) = D_S \frac{\gamma_3 (\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_3 \alpha_4} F_{xx}^* \quad (3.45)$$

$$h(x, y, t) = -D_M \frac{\gamma_4 (\beta_4 - \beta_3)}{\beta_3 \beta_4} U_{xx}^*$$

şeklindedir.

(3.44) denklemleri aslında hepsi kaynak terimli difüzyon denklemleridir. Bu denklemlerin homojen kısımları değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözülür ve

homojen olmayan kısımları da çözümlerse karmaşık denklemler elde edilir. Başlangıç koşulları , $N^*(x,y,0,\varepsilon)=S^*(x,y,0,\varepsilon)=M^*(x,y,0,\varepsilon)=0$ ve sınır koşulları $x=0$ ve $x=1$ de $N_x^*=S_x^*=M_x^*=0$ ve $y=0$ ve $y=1$ de $N_y^*=S_y^*=M_y^*=0$ dir.

Şimdi (3.44) denklemlerinin homojen kısımlarını değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözelim. Bunun için $N^*(x,y,t,\varepsilon)=X(x)Y(y)T(t)$ alalım. O zaman

$$X'(0)=X'(1)=0 \text{ sınır koşulları ile } X''(x)+\lambda X(x)=0 ,$$

$$Y'(0)=Y'(1)=0 \text{ sınır koşulları ile } Y''(y)+\mu Y(y)=0 \text{ ve } T'(t)+(\lambda+\mu)D_N T(t)=0$$

sınır değer problemlerini elde ederiz.

i) Eğer $\lambda=0$ ve $\mu=0$ ise, o zaman $X(x)=Ax+B$ ve $Y(y)=Cy+D$ olur. Böylece, $X_0(x)=B_0=\text{sabit}$ ve $Y_0(y)=D_0=\text{sabit}$ elde ederiz.

ii) Eğer $\lambda>0$ ise , o zaman $X(x)=A_1 \cos\sqrt{\lambda} x+B_1 \sin\sqrt{\lambda} x$ olur ve $X'(0)=X'(1)=0$ den $n=1,2,\dots$ için $\lambda_n=n^2\pi^2$ $X_n(x)=A_n \cos(n\pi x)$ elde ederiz.

iii) Eğer $\mu >0$ ise , o zaman $Y(y)=C_1 \cos\sqrt{\mu} y+D_1 \sin\sqrt{\mu} y$ olur ve $Y'(0)=Y'(1)=0$ den $m=1,2,\dots$ için $\mu_m=m^2\pi^2$ $Y_m(y)=C_m \cos(m\pi y)$ elde ederiz.

Başlangıç değer probleminin negatif öz değeri yoktur. Böylece başlangıç değer probleminin öz değerleri $\gamma_{nm}=\lambda_n+\mu_m=(n^2+m^2)\pi^2$ şeklindedir ve öz fonksiyonlar $\varphi_{nm}(x,y)=\cos(n\pi x)\cos(m\pi y)$ olur.

$$T'(t)+(n^2+m^2)\pi^2 D_N T(t)=0$$

ifadesinden ise $T(t)=Ae^{-(n^2+m^2)\pi^2 D_N t}$ elde edilir.

Şimdi ise homojen olmayan başlangıç değer problemini çözelim. $N^*(x,y,t,\varepsilon)$ ifadesi

$$N^*(x,y,t,\varepsilon)=B+\sum_{m,n=1}^{\infty} B_{nm}(t) \varphi_{nm}(x,y) \quad (3.46)$$

serisiyle temsil edilebilir ve burada, $B=4 \int_0^1 \int_0^1 N^*(x,y,0,\varepsilon) dx dy$,

$$B_{nm}(t)=4 \iint_D N^*(x,y,t,\varepsilon) \varphi_{nm}(x,y) dx dy \quad (3.47)$$

ve $D=[0,1] \times [0,1]$ şeklindedir (Wazwaz, 2009). (3.47) ifadesini t 'ye göre diferansiyellersek ve verilen kısmi diferansiyel denklemini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{dB_{nm}(t)}{dt} &= 4 \iint_D \frac{\partial N^*}{\partial t} \varphi_{nm}(x,y) dx dy \\ &= 4 \iint_D D_N (N_{xx}^* + N_{yy}^*) \varphi_{nm}(x,y) dx dy + 4 \iint_D f(x,y,t) \varphi_{nm}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde ederiz. Sağ taraftaki son integral

$$f_{nm}(t) = 4 \iint_D f(x,y,t) \varphi_{nm}(x,y) dx dy$$

t 'nin bilinen bir fonksiyonudur. Sağ taraftaki ilk integral Green formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} 4 \iint_D D_N (N_{xx}^* + N_{yy}^*) \varphi_{nm}(x,y) dx dy &= -\gamma_{nm} D_N 4 \iint_D D_N N^* \varphi_{nm}(x,y) dx dy \\ &\quad + \int_{\partial D} \left(\frac{\partial N^*}{\partial n} \varphi_{nm} - N^* \frac{\partial \varphi_{nm}}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

şekline dönüştürülebilir. Burada, n , D 'in sınırında dış normal vektördür. Böylece, $\frac{\partial N^*}{\partial n}$ ve $\frac{\partial \varphi_{nm}}{\partial n}$ ifadeleri ∂D üzerinde sıfırdır. Dolayısıyla sağ tarafın ikinci integrali sıfır olur. Böylece, (3.48) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{dB_{nm}(t)}{dt} = -\gamma_{nm} D_N B_{nm}(t) + f_{nm}(t) \quad (3.49)$$

(3.49) denkleminde $t \rightarrow 0$ alınırsa ve $N^*(x,y,0,\varepsilon)$ başlangıç koşulu kullanırsak,

$$B_{nm}(0) = 0 \quad (3.50)$$

elde ederiz. (3.50) başlangıç koşuluyla (3.49) denklemini çözersek,

$$B_{nm}(t) = e^{-\gamma_{nm} D_N t} \int_0^t e^{\gamma_{nm} D_N \omega} f_{nm}(\omega) d\omega \quad (3.51)$$

elde ederiz. Böylece çözüm tamamlanmış oldu. F_{xx}^* , C_{xx}^* ve U_{xx}^* denklemlerini daha basit ifade edebilmek için sabit terimleri

$$c_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)(1 + v_4)}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)},$$

$$c_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)(1 + v_4)}, \quad c_4 = \frac{1}{\beta - \mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(1 + v_4)} - \frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(1 + v_4)} \right),$$

$$c_5 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\beta - \mu)(\lambda_1 - \lambda_2)(1 + v_4)} \left(\frac{1}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \lambda_1)} - \frac{1}{(\mu - \lambda_2)(\beta - \lambda_2)} \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(\beta - \mu)(1 + v_4)}$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_4}{(\mu - \lambda_1)(\beta - \mu)(1 + v_4)},$$

$$c_6 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_2)}, \quad c_7 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1)}, \quad c_8 = \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)}, \quad c_9 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)}$$

şeklinde alırsak,

$$F_{xx}^* = 48(1-3x)y(c_1 e^{-\lambda_2 t} + (c_3 - c_2)e^{-\lambda_1 t} + c_4 e^{-\mu t} + c_5 e^{-\beta t}),$$

$$C_{xx}^* = 48(1-3x)y(c_6 e^{-\lambda_2 t} + (c_8 - c_7)e^{-\lambda_1 t} + e^{-\mu t}(c_9 - c_8)),$$

$$U_{xx}^* = 48(1-3x)y e^{-\lambda_2 t},$$

denklemlerini yazabiliriz. Kolaylık sağlamak için (3.45) denklemlerinde

$$c_{10} = -D_N \frac{\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad c_{11} = D_N \frac{\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)}$$

$$c_{12} = D_S \frac{\gamma_3(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_3 \alpha_4}, \quad c_{13} = -D_M \frac{\gamma_4(\beta_3 - \beta_4)}{\beta_3 \beta_4}$$

şeklinde alalım. Böylece,

$$f(x,y,t) = c_{10} C_{xx}^* + c_{11} F_{xx}^*, \quad g(x,y,t) = c_{12} F_{xx}^*, \quad h(x,y,t) = c_{13} U_{xx}^*$$

elde ederiz. Bu fonksiyonları,

$$f_1(t) = (c_1 c_{10} + c_6 c_{11}) e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_1 t} (c_{10}(c_3 - c_2) + c_{11}(c_8 - c_7)) + (c_4 c_{10} + c_{11}(c_9 - c_8)) e^{-\mu t} + c_{10} c_5 e^{-\beta t}$$

$$g_1(t) = c_1 e^{-\lambda_2 t} + (c_3 - c_2) e^{-\lambda_1 t} + c_4 e^{-\mu t} + c_5 e^{-\beta t},$$

şeklinde alırsak,

$$f(x, y, t) = 48(1-3x)y f_1(t),$$

$$g(x, y, t) = 48(1-3x)y c_{12} g_1(t),$$

$$h(x, y, t) = 48(1-3x)y c_{13} e^{-\lambda_2 t},$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} f_{nm}(t) &= 192 f_1(t) \int_0^1 \int_0^1 48(1-3x)y \cos(n\pi x) \cos(m\pi y) dx dy \\ &= 192 f_1(t) \left(\frac{6}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \left(\frac{-2}{(2m-1)^2 \pi^2} \right) = \frac{-2304 f_1(t)}{(2n-1)^2 (2m-1)^2 \pi^4}, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.44) ifadesindeki diğer denklemleri $N^*(x, y, t, \varepsilon)$ denklemini çözdüğümüz gibi çözebiliriz. Böylece,

$$\begin{cases} S^*(x, y, t, \varepsilon) = C + \sum_{m, n=1}^{\infty} C_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \\ M^*(x, y, t, \varepsilon) = H + \sum_{m, n=1}^{\infty} H_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \end{cases} \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir ve burada $C=H=0$ ve

$$C_{nm}(t) = 4 \iint_D S^*(x, y, t, \varepsilon) \varphi_{nm}(x, y) dx dy,$$

$$H_{nm}(t) = 4 \iint_D M^*(x, y, t, \varepsilon) \varphi_{nm}(x, y) dx dy,$$

şeklindedir. Benzer şekilde eğer

$$g_{nm}(t)=4 \iint_D g(x,y,t)\varphi_{nm}(x,y)dxdy, \quad h_{nm}(t)=4 \iint_D h(x,y,t)\varphi_{nm}(x,y)dxdy,$$

alınırsa,

$$C_{nm}(t)=\int_0^t e^{-\gamma_{nm}D_N(t-\omega)}g_{nm}(\omega)d\omega, \quad H_{nm}(t)=\int_0^t e^{-\gamma_{nm}D_N(t-\omega)}h_{nm}(\omega)d\omega \quad (3.53)$$

elde ederiz ve burada

$$g_{nm}(t)=\frac{-2304g_1(t)}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4}, \quad h_{nm}(t)=\frac{-2304c_{13}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4}, \quad m,n=1,2,\dots$$

şeklindedir.

Şimdi ise f_1 , g_1 ve h_1 ifadelerini göz önüne alarak, $B_{nm}(t)$, $C_{nm}(t)$ ve $H_{nm}(t)$ ifadelerini hesaplırsak,

$$\begin{aligned} B_{nm}(t) &= e^{-\gamma_{nm}D_N t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_N \omega} f_{nm}(\omega) d\omega = \frac{-2304}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_N t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_N \omega} f_1(\omega) d\omega \\ &= \frac{-2304}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_N t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_N \omega} [(c_1c_{10}+c_6c_{11})e^{-\lambda_2 t} \\ &\quad + e^{-\lambda_1 t}(c_{10}(c_3-c_2)+c_{11}(c_8-c_7))+(c_4c_{10}+c_{11}(c_9-c_8))e^{-\mu t}+c_{10}c_5e^{-\beta t}] d\omega \\ &= \frac{-2304}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 D_N t} \left[\frac{(c_1c_{10}+c_6c_{11})}{(n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_2} \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_2) t} - 1 \right) \right. \\ &\quad + \frac{c_{10}(c_3-c_2)+c_{11}(c_8-c_7)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_1} \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_1) t} - 1 \right) + \frac{c_4c_{10}+c_{11}(c_9-c_8)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_1} \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_N - \lambda_1) t} - 1 \right) \\ &\quad \left. + \frac{c_{10}c_5}{((n^2+m^2)\pi^2 D_N - \beta)} \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_N - \beta) t} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{nm}(t) &= \int_0^t e^{-\gamma_{nm}D_S(t-\omega)}g_{nm}(\omega)d\omega = \frac{-2304c_{12}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_S t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_S \omega} g_1(\omega) d\omega \\ &= \frac{-2304c_{12}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_S t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_S \omega} [(c_1e^{-\lambda_2 t}+(c_3-c_2)e^{-\lambda_1 t}+c_4e^{-\mu t}+c_5e^{-\beta t})] d\omega \end{aligned}$$

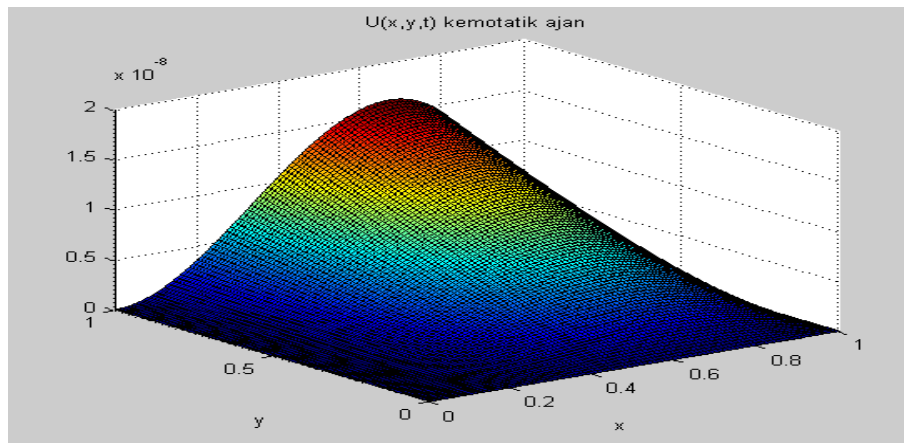
$$= \frac{-2304c_{12}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_S t} \left[\frac{c_1 \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_S - \lambda_2) t} - 1 \right)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_S - \lambda_2} + \frac{(c_3 - c_2) \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_S - \lambda_1) t} - 1 \right)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_S - \lambda_1} \right. \\ \left. + \frac{c_4 \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_S - \mu) t} - 1 \right)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_S - \mu} + \frac{c_5 \left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_S - \beta) t} - 1 \right)}{(n^2+m^2)\pi^2 D_S - \beta} \right]$$

ve

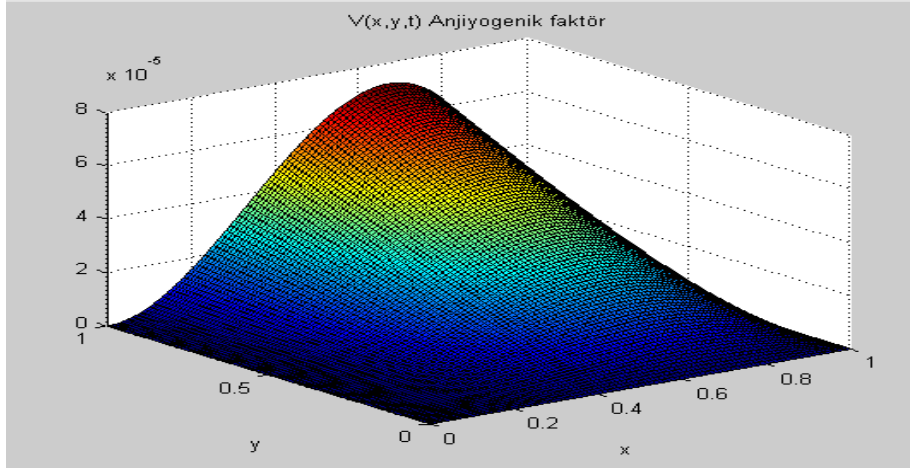
$$H_{nm}(t) = \int_0^t e^{-\gamma_{nm}D_M(t-\omega)} h_{nm}(\omega) d\omega \\ = \frac{-2304c_{13}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-\gamma_{nm}D_M t} \int_0^t e^{\gamma_{nm}D_M \omega} (e^{-\lambda_2 \omega}) d\omega \\ = \frac{-2304c_{13}}{(2n-1)^2(2m-1)^2\pi^4} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 D_M t} \frac{\left(e^{((n^2+m^2)\pi^2 D_M - \lambda_2) t} - 1 \right)}{\left((n^2+m^2)\pi^2 D_M - \lambda_2 \right)}$$

şeklinde elde ederiz. Sonuç olarak N^* , S^* ve M^* tamamen bulundu. Şimdi ise nümerik örnek için $\lambda_1=3,65$, $\lambda_2=2\lambda_1$, $\lambda_4=\lambda_2$, $\mu=0,1$, $\beta=0,025$, $v_4=0,014$, $\alpha_1=0,85$, $\gamma_1=1, \gamma_2=1$, $\alpha_2=1$, $\beta_1=10$, $\beta_2=8$, $\gamma_3=1$, $\alpha_3=0,85$, $\alpha_4=1$, $\gamma_4=1$, $\beta_3=0,85$, $\beta_4=1, \varepsilon=0,01$ $D_N=3,6 \times 10^{-5}$, $D_S=3,6 \times 10^{-2}$, $D_M=3,6 \times 10^{-4}$ parametre değerlerini ele alalım (Pamuk ve Çay, 2018).

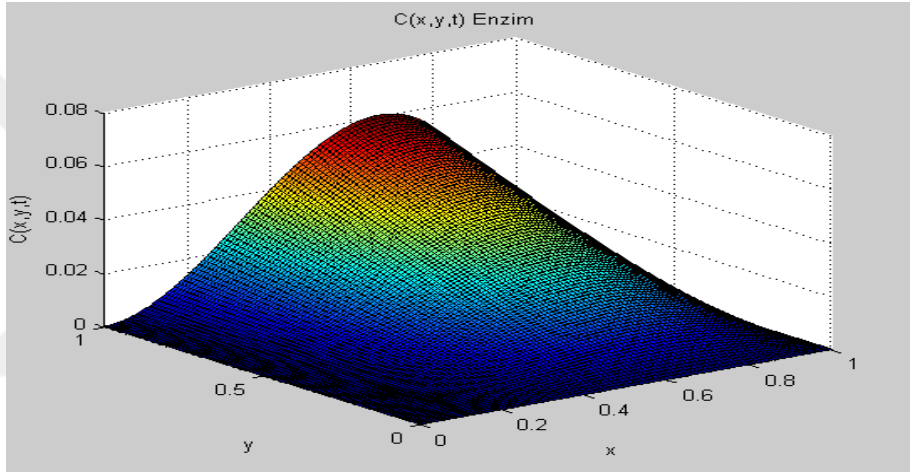
$t=2$ için anjiyogenik faktör, proteolitik enzim, fibronektinin yoğunluğu ve endotel hücre yoğunluğunun grafiklerini Matlab yardımıyla çizelim.



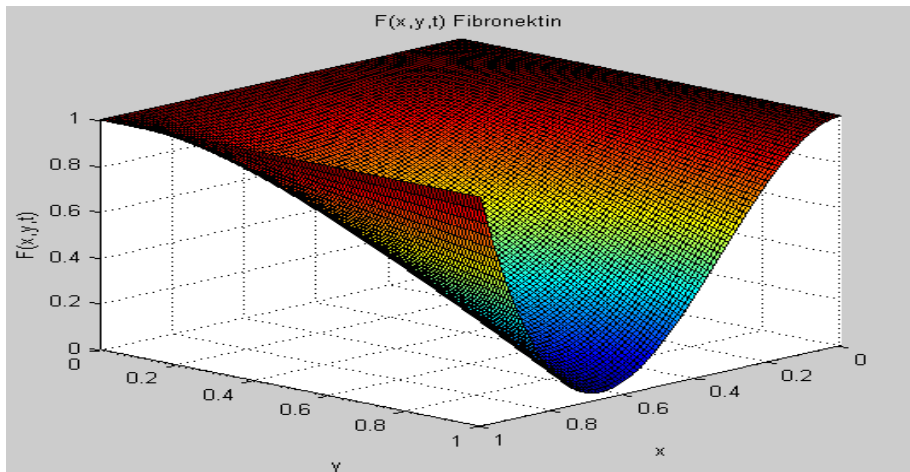
Şekil 3.5. $t=2$ için Kemotatik ajan



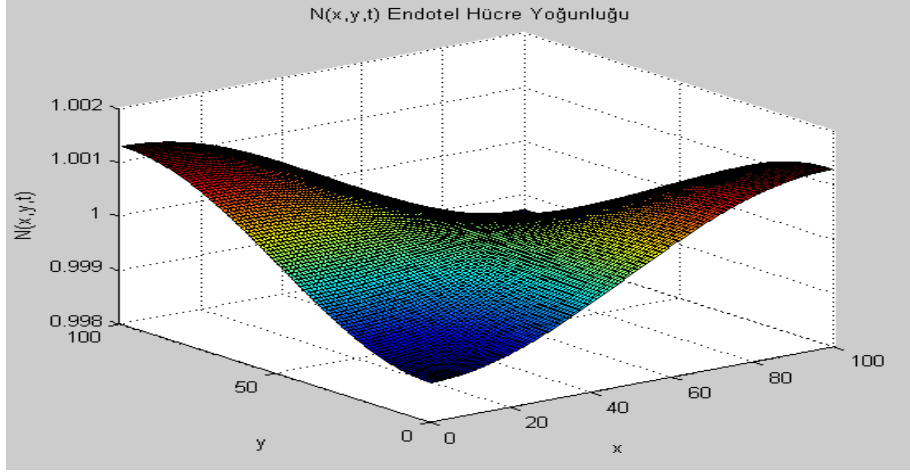
Şekil 3.6. $t=2$ için Anjiyogenik faktör



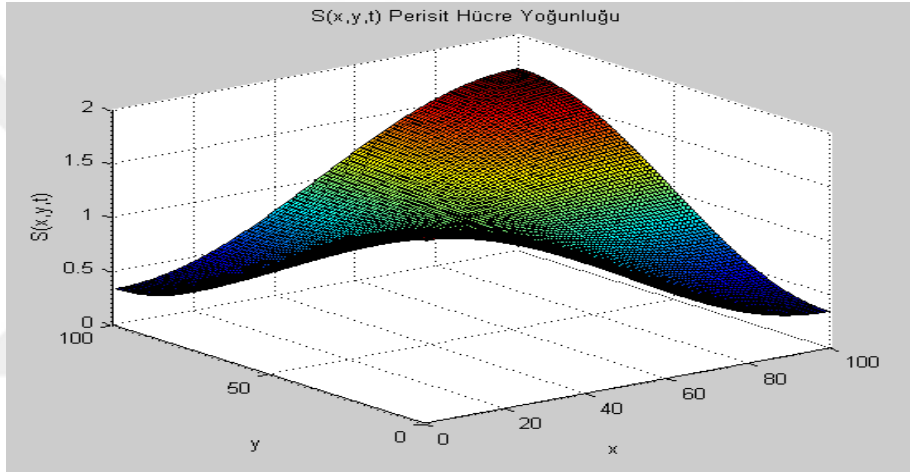
Şekil 3.7. $t=2$ için Enzim



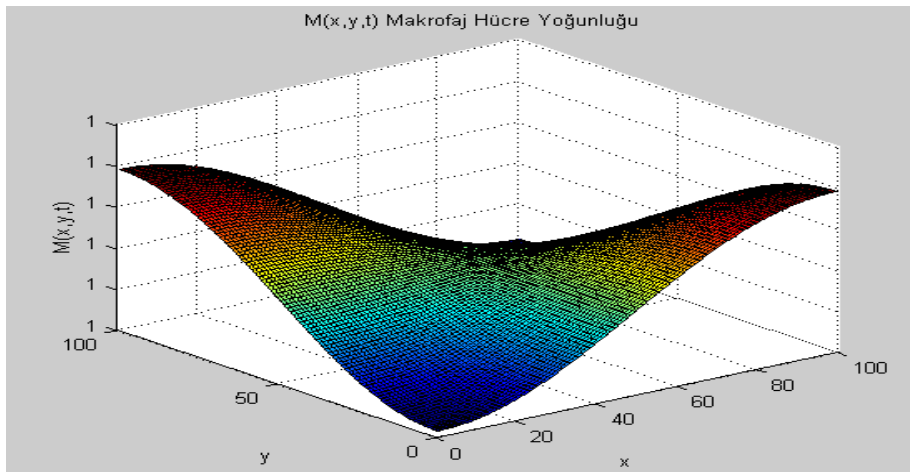
Şekil 3.8. $t=2$ için Fibronektin



Şekil 3.9. $t=2$ için Endotel hücre denkleminin dört terimli seri çözümü



Şekil 3.10. $t=2$ için Perisit hücre denkleminin dört terimli seri çözümü



Şekil 3.11. $t=2$ için Makrofaj hücre denkleminin dört terimli seri çözümü

4. MATEMATİKSEL MODELLER VE PERTÜRBASYON ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde tümör anjiyogenezinde hücre denklemlerini ele aldık ve bu denklemlere küçük ε parametresi ekleyerek pertürbasyon yöntemiyle yaklaşık çözümlerini elde ettik. Daha sonra ele aldığımız bu denklemlerin nümerik çözümleri ile yaklaşık pertürbasyon çözümlerini karşılaştırdık.

4.1. Endotel Hücre Denkleminin Zamandan Bağımsız Çözümü ve İki boyutlu Tümör Anjiyogenez Faktörü Denkleminin Çözümü

İlk olarak, bu çalışmada, orijinali (Levine ve diğerleri, 2000) 'de sunulan endotel hücre (EC) denklemini inceledik.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{\eta}{\tau} \right) \right) \quad \eta_y = 0 \quad y=0,1 \quad (4.1)$$

Burada D_{η} pozitif sabit (kılcaldaki EC difüzyon katsayısı), $\eta = \eta(y,t)$ EC yoğunluğu, τ ise geçiş olasılık fonksiyonudur.

$$\tau = \tau(c_a, f) \quad (4.2)$$

şeklinde ele alalım. Burada $c_a = c_a(y,t)$ aktif enzim yoğunluğu ve $f = f(y,t)$ fibronektin yoğunluğudur ($0 < y < 1$, $t > 0$). Endotel hücrelerin hareketinde enzim ve fibronektinin etkisini yansıtan basit bir geçiş olasılık fonksiyonu, γ_i ($i=1,2$) pozitif sabiti için $\tau(c_a, f) = c_a^{\gamma_1} f^{\gamma_2}$ şeklindedir (Levine ve diğ., 2000). Bu seçimin biyolojik yorumu, endotel hücrelerin c_a 'ın büyük veya f 'in bozulduğu bölgelerde, biyolojik deneyde temeli olan gerçeklere gitmeyi tercih ettiği yönündedir. (Pamuk, 2003) de olduğu gibi, dolaşım sistemine basitlik sağlamak için anjiyostatin bulunmadığını varsayıyoruz. Böylece, aktif enzim yoğunluğu total enzim yoğunluğu ile aynıdır. Yani, $c_a(y,t) = c(y,t)$. (Pamuk, 2003) ve (Pamuk ve Gürbüz, 2004) de olduğu gibi, geçiş olasılık fonksiyonunu aşağıdaki gibi aldık.

$$\tau(c,f) = \left(\frac{a_1+c}{a_2+c}\right)^{\gamma_1} \left(\frac{b_1+f}{b_2+f}\right)^{\gamma_2} \quad (4.3)$$

Burada $0 < a_1 \ll 1 < a_2$ ve $b_1 > 1 \gg b_2 > 0$ olacak şekilde a_i, b_i sabitlerdir. Açıkçası τ ve c, f 'in küçük ya da büyük değerleri için singüler değildir ve bu değişkenlerin kayda değer bir aralığı boyunca $c^{\gamma_1} f^{\gamma_2}$ oldukça iyi bir şekilde yaklaşacaktır. Yarı kararlı durum enzimi ve fibronektin konsantrasyonunu aşağıdaki şekilde alalım (Pamuk ve Gürbüz, 2004).

$$c(y) = Ay^n (1-y)^n, \quad f(y) = 1 - By^n (1-y)^n, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Burada A ve B pozitif sabitler ve $n \geq 16$ dir. (4.3) denkleminde basitlik için $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ alalım. Böylece, $y^n (1-y)^n \ll 1$ olduğundan, bazı C sabitleri için

$$\tau(y) = \frac{Ay^n (1-y)^n}{1 - By^n (1-y)^n} \approx Cy^n (1-y)^n$$

yazabiliriz. Pertürbasyon çözümü için (4.1) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\eta_t = D_\eta \left(\eta_{yy} - A\eta_y - \varepsilon A_y \eta \right) \quad (4.4)$$

Burada ε küçük pozitif sabit ve $A = \frac{\tau_y}{\tau}$ dir. Böylece, (4.4) denkleminde kararlı durum modelini

$$0 = \eta_{yy} - A\eta_y - \varepsilon A_y \eta \quad (4.5)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\eta(y,t,\varepsilon) = \eta_0(y,t) + \varepsilon \eta_1(y,t) + \varepsilon^2 \eta_2(y,t) + \dots \quad (4.6)$$

şeklinde pertürbasyon serisini ele alalım. Bu seriyi (4.5) denkleminde yerine yazıp ε 'un kuvvetlerine göre düzenleyelim. O zaman,

$$\varepsilon^0: \eta_{0yy} - A\eta_{0y} = 0, \quad y=0,1 \text{ için } \eta_{0y} = 0 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon^1: \eta_{1yy} - A\eta_{1y} = A_y \eta_0, \quad y=0,1 \text{ için } \eta_{1y} = 0 \quad (4.8)$$

⋮

denklemlerini elde ederiz. (4.7) ve (4.8) denklemlerini çözelim. (4.7) denkleminde $v_0 = \eta_{0y}$ alalım. O zaman,

$$v_0' - v_0 A = 0 \Rightarrow v_0 = c_1 \tau$$

elde ederiz. Koşullardan $c_1 \in \mathbb{R}$ olur. Böylece,

$$\eta_0 = \int c_1 \tau dy + c_2$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi ise (4.8) denkleminde $v_1 = \eta_{1y}$ alırsak,

$$v_1' - v_1 A = A_y \eta_0 \Rightarrow v_1 = \tau \left(\int \frac{A_y \eta_0}{\tau} dy \right)$$

elde ederiz. Böylece,

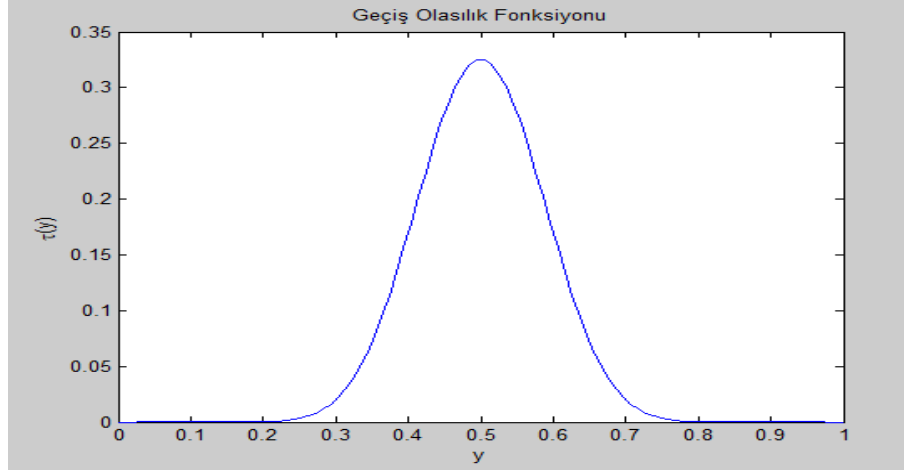
$$\eta_1 = \int \tau \left(\int \frac{A_y \eta_0}{\tau} dy \right) dy + c_3$$

şeklinde elde ederiz. Burada c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir. Böylece, iki terimli pertürbasyon çözümü,

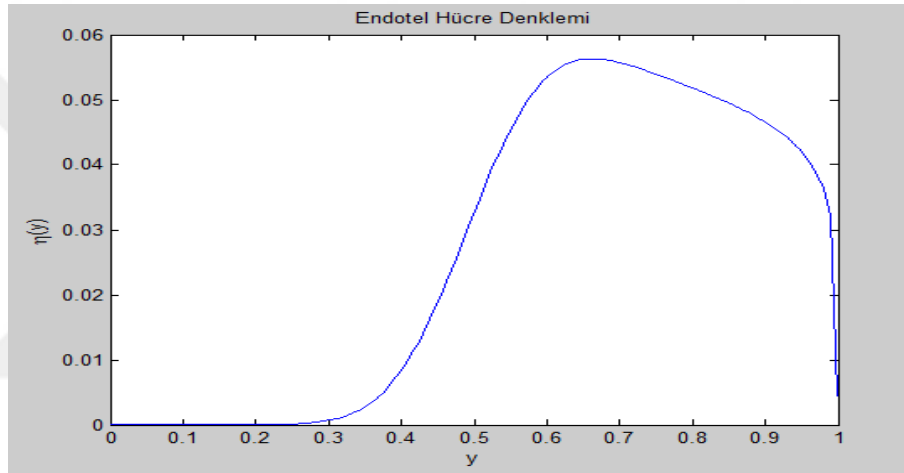
$$\eta(y,t) = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \dots = \int c_1 \tau dy + c_2 + \varepsilon \int \tau \left(\int \frac{A_y \eta_0}{\tau} dy \right) dy + c_3$$

şeklinde elde ederiz.

$n \geq 16$ için $\tau(y) = Cy^n(1-y)^n$ olduğundan, pertürbasyon çözümünü hesaplamak oldukça zordur. Bu yüzden, η_0 ve η_1 ifadelerini Matlab yardımıyla hesaplayabiliriz.



Şekil 4.1. Geçiş olasılık fonksiyonu



Şekil 4.2. Endotel hücre denklemini

Endotel hücre denkleminin pertürbasyon yöntemiyle çözümünün τ 'nin bir katı olması bekleniyordu. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 baktığımız zaman $0 < x < 0,5$ aralığında iyi bir yaklaşım elde ettik. Eğer pertürbasyon yöntemiyle daha fazla terim eklenseydi, $0,5 < x < 1$ aralığında da grafik τ 'nin grafiğine yaklaşacaktı. Bu ise (Pamuk ve Gürbüz, 2004) deki çözüme yaklaştığımızın bir göstergesidir. İkinci olarak, orijinali (Pamuk, 2004) de verilen tümör anjiyogenez faktörü denklemini ele aldık.

$$\frac{\partial V(x,y,t)}{\partial t} = D_V \left(\frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial V(0,y,t)}{\partial x} - \alpha V(0,y,t) = 0 \quad (4.10)$$

$$V(1,y,t)=\phi(y,t) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial V(x,0,t)}{\partial y} = \frac{\partial V(x,1,t)}{\partial y} = 0 \quad (4.12)$$

Burada D_V ve α pozitif sabittir, $V = V(x,y,t)$ tümör anjiyogenez faktörüdür ve $\phi(y,t)=1-\beta\cos(2\pi y)$ şeklinde alalım. Burada β bazı pozitif sabitlerdir. Şimdi ise pertürbasyon çözümü için (4.9) denklemini aşağıdaki gibi alalım.

$$V_t = \varepsilon D_V (V_{xx} + V_{yy}) \quad (4.13)$$

Burada ε pozitif parametredir. Benzer şekilde , pertürbasyon serisini

$$V(x,y,t,\varepsilon) = V_0(x,y,t) + \varepsilon V_1(x,y,t) + \varepsilon^2 V_2(x,y,t) + \dots \quad (4.14)$$

şeklinde alalım. (4.14) genişlemesini (4.13) denkleminde yerine yazalım ve ε 'un kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$\varepsilon^0: V_{0t} = 0 \quad (4.15)$$

$$\varepsilon^1: V_{1t} = V_{0xx} + V_{0yy} \quad (4.16)$$

ve V_0, V_1 için koşulları

$$V_{0x}(0,y,t) - \alpha V_0(0,y,t) = 0, \quad (4.17)$$

$$V_0(1,y,t) = 1 - \beta \cos(2\pi y), \quad (4.18)$$

$$V_{0y}(x,0,t) = V_{0y}(x,1,t) = 0, \quad (4.19)$$

$$V_{1x}(0,y,t) - \alpha V_1(0,y,t) = 0, \quad (4.20)$$

$$V_1(1,y,t) = 0, \quad (4.21)$$

$$V_{1y}(x,0,t) = V_{1y}(x,1,t) = 0 \quad (4.22)$$

şeklinde elde ederiz. (4.15) ve (4.16) denklemlerinin çözümlerinden, $V_0 = g(x,y)$ ve $V_1 = h(x,y)$ gibi keyfi fonksiyonlar elde ederiz. Bu keyfi fonksiyonları (4.17) - (4.19) ve (4.20) - (4.22) koşulları yardımıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$g(x,y) = \frac{1+\alpha x}{1+\alpha} - \beta \cos(2\pi y) \left(\frac{\cosh(2\pi x) + \frac{\alpha}{2\pi} \sinh(2\pi x)}{\cosh(2\pi) + \frac{\alpha}{2\pi} \sinh(2\pi)} \right)$$

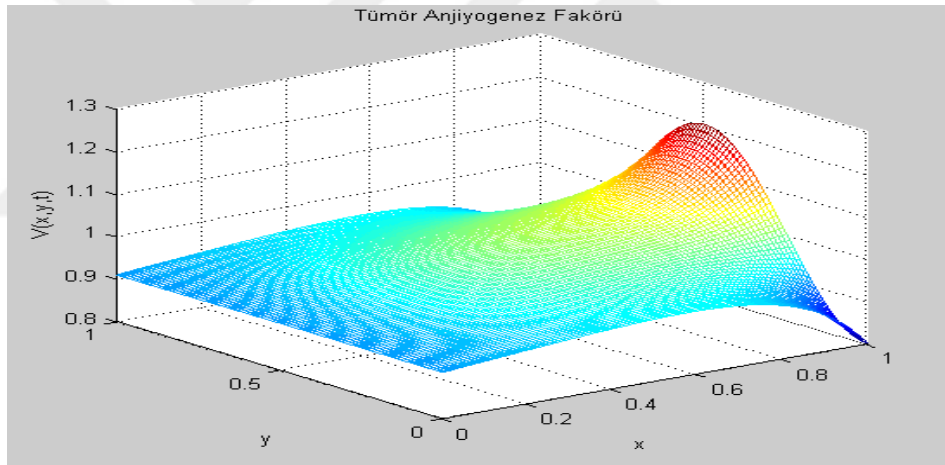
$$h(x,y) = (1 - \cos(2\pi x))(1 - \cos(2\pi y)).$$

Böylece, iki terimli pertürbasyon çözümü

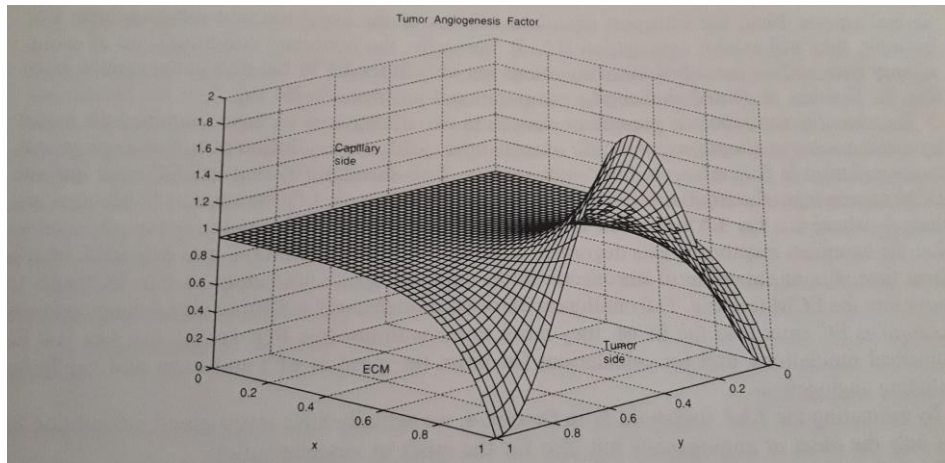
$$V(x,y,t,\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \dots$$

$$= \frac{1+\alpha x}{1+\alpha} - \beta \cos(2\pi y) \left(\frac{\cosh(2\pi x) + \frac{\alpha}{2\pi} \sinh(2\pi x)}{\cosh(2\pi) + \frac{\alpha}{2\pi} \sinh(2\pi)} \right) + \varepsilon (1 - \cos(2\pi x))(1 - \cos(2\pi y)) + \dots$$

şeklinde elde ederiz.



Şekil 4.3. Tümör anjiyogenez faktörü pertürbasyon çözümü



Şekil 4.4. Tümör anjiyogenez faktörünün nümerik çözümü (Pamuk, 2004)

(4.13) denkleminin iki terimli pertürbasyon çözümü Şekil 4.3 ve (Pamuk, 2004) alınan Şekil 4.4 baktığımız zaman elde edilen çözümlerin benzer olduğu görülmektedir. Bu ise iki terimli pertürbasyon çözümü ve nümerik çözümün çakışık olduğunu göstermektedir.

4.2. Tümör Anjiyogenezindeki Denklemlerin Pertürbasyon Çözümü

Öncelikle enzim kinetikleri daha sonra da Michaelis - Menten kinetikleri kullanılarak tümör oluşumundaki denklemler elde edilmiştir (Levine ve diğ., 2000), (Murray, 2002).

$u(x,t)$ kemotatik ajan,

$v(x,t)$ anjiyogenik faktör,

$c(x,t)$ proteolitik enzim,

$f(x,t)$ fibronektin,

$\eta(x,t)$ endotel hücre yoğunluğu (EC),

$\sigma(x,t)$ perisit hücre yoğunluğu (PC),

$m(x,t)$ makrofaj hücre yoğunluğu (MC),

olmak üzere denklem sistemi aşağıdaki gibidir (Levine ve diğ., 2000) .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\lambda_2 u m}{1+v_2 u}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda_2 u m}{1+v_2 u} - \frac{\lambda_1 v \eta}{1+v_1 v}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\lambda_1 v \eta}{1+v_1 v}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta(1-f)\eta - \frac{\lambda_4 c f}{1+v_4 f}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\eta}{\tau_1} \right) \right), \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = D_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\sigma}{\tau_2} \right) \right), \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(m \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{m}{\tau_3} \right) \right) \quad (4.29)$$

Burada D_1, D_2, D_3 pozitif sabitlerdir (kılıcaldaki EC, PC, MC difüzyon katsayıları) ve başlangıç koşulları $u(x,0)=(1-\cos(2\pi x))$, $v(x,0)=0$, $c(x,0)=0$, $f(x,0)=1$, $\eta(x,0)=\sigma(x,0)=m(x,0)=1$ ve sınır koşulları $x=0,1$ de $\eta_x=\sigma_x=m_x=0$ şeklinde alalım. τ_1, τ_2, τ_3 ise geçiş olasılık fonksiyonlarıdır ve

$$\tau_1 = C_1 e^{3(x-x^2)^2},$$

$$\tau_2 = C_2 e^{3(x-x^2)^2},$$

$$\tau_3 = C_3 e^{3(x-x^2)^2},$$

şeklindedir.

Burada $A = \frac{\tau_1 x}{\tau_1}$, $B = \frac{\tau_2 x}{\tau_2}$ ve $C = \frac{\tau_3 x}{\tau_3}$ olmak üzere, (4.23) - (4.29) denklem sistemine küçük ε parametresi ekleyerek aşağıdaki gibi ele aldık.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda_2 u(1+\varepsilon m), \quad (4.23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda_2 u(1+\varepsilon m) - \lambda_1 v(1+\varepsilon \eta), \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \lambda_1 v(1+\varepsilon \eta), \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta(1-\varepsilon f)\varepsilon f(1+\varepsilon \eta) - \lambda_4 c(1-\varepsilon f), \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_1 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \varepsilon A \frac{\partial \eta}{\partial x} - \varepsilon \eta \frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad (4.27a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = D_2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \varepsilon B \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \varepsilon \sigma \frac{\partial B}{\partial x} \right), \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_3 \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \varepsilon C \frac{\partial m}{\partial x} - \varepsilon m \frac{\partial C}{\partial x} \right). \quad (4.29a)$$

Buradaki her bir denklem için pertürbasyon serilerini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$u(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \dots \quad (4.30)$$

$$v(x,t,\varepsilon) = v_0(x,t) + \varepsilon v_1(x,t) + \varepsilon^2 v_2(x,t) + \dots \quad (4.31)$$

$$c(x,t,\varepsilon) = c_0(x,t) + \varepsilon c_1(x,t) + \varepsilon^2 c_2(x,t) + \dots \quad (4.32)$$

$$f(x,t,\varepsilon) = f_0(x,t) + \varepsilon f_1(x,t) + \varepsilon^2 f_2(x,t) + \dots \quad (4.33)$$

$$\eta(x,t,\varepsilon) = \eta_0(x,t) + \varepsilon \eta_1(x,t) + \varepsilon^2 \eta_2(x,t) + \dots \quad (4.34)$$

$$\sigma(x,t,\varepsilon) = \sigma_0(x,t) + \varepsilon \sigma_1(x,t) + \varepsilon^2 \sigma_2(x,t) + \dots \quad (4.35)$$

$$m(x,t,\varepsilon) = m_0(x,t) + \varepsilon m_1(x,t) + \varepsilon^2 m_2(x,t) + \dots \quad (4.36)$$

Bu serileri (4.23a) - (4.29a) denklemlerinde yazıp her birini ε 'un kuvvetlerine göre düzenlersek,

(4.23a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: u_{0t} = -\lambda_2 u_0, & u_0(x,0) = (1 - \cos(2\pi x)) \\ \varepsilon^1: u_{1t} = -\lambda_2(u_0 m_0 + u_1), & u_1(x,0) = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

(4.24a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: v_{0t} = \lambda_2 u_0 - \lambda_1 v_0, & v_0(x,0) = 0, \\ \varepsilon^1: v_{1t} = \lambda_2(u_0 m_0 + u_1) - \lambda_1(v_0 \eta_0 + v_1), & v_1(x,0) = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

(4.25a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: c_{0t} = \lambda_1 v_0, & c_0(x,0) = 0, \\ \varepsilon^1: c_{1t} = \lambda_1(v_1 + v_0 \eta_0), & c_1(x,0) = 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

(4.26a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: f_{0t} = -\lambda_4 c_0, f_0(x,0)=1, \\ \varepsilon^1: f_{1t} = \beta f_0 - \lambda_4 c_1, f_1(x,0)=0, \end{cases} \quad (4.40)$$

(4.27a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: \eta_{0t} = D_1 \eta_{0xx}, \eta_0(x,0)=1, \eta_{0x}(0,t)=\eta_{0x}(1,t)=0, \\ \varepsilon^1: \eta_{1t} = D_1(\eta_{1xx} - A\eta_{0x} - A_x \eta_0), \eta_1(x,0)=0, \eta_{1x}(0,t)=\eta_{1x}(1,t)=0, \end{cases} \quad (4.41)$$

(4.28a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: \sigma_{0t} = D_2 \sigma_{0xx}, \sigma_0(x,0)=1, \sigma_{0x}(0,t)=\sigma_{0x}(1,t)=0, \\ \varepsilon^1: \sigma_{1t} = D_2(\sigma_{1xx} - B\sigma_{0x} - B_x \sigma_0), \sigma_1(x,0)=0, \sigma_{1x}(0,t)=\sigma_{1x}(1,t)=0, \end{cases} \quad (4.42)$$

(4.29a) için,

$$\begin{cases} \varepsilon^0: m_{0t} = D_3 m_{0xx}, m_0(x,0)=1, m_{0x}(0,t)=m_{0x}(1,t)=0 \\ \varepsilon^1: m_{1t} = D_3(m_{1xx} - C m_{0x} - C_x m_0), m_1(x,0)=0, m_{1x}(0,t)=m_{1x}(1,t)=0 \end{cases} \quad (4.43)$$

diferansiyel denklemleri elde ederiz. (4.37) - (4.40) denklemlerin çözümlerinden,

$$u_0(x,t) = (1 - \cos(2\pi x))e^{-\lambda_2 t}, \quad u_1(x,t) = -\lambda_2 t (1 - \cos(2\pi x))e^{-\lambda_2 t}, \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} v_0(x,t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}), \\ v_1(x,t) = \lambda_2^2 (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{-te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{(e^{-\lambda_2 t} - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - te^{-\lambda_1 t} \right), \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\begin{cases} c_0(x,t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2} + \frac{(e^{-\lambda_1 t} - 1)}{\lambda_1} \right), \\ c_1(x,t) = \lambda_1 \lambda_2^2 (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{t}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) \\ - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(-\frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{(te^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t} - 1)}{\lambda_1} - \frac{(e^{-\lambda_1 t} + 1)}{\lambda_1^2} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2} \right), \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
f_0(x,t) = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{t}{\lambda_2} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} - 1)}{\lambda_2^2} + \frac{(e^{-\lambda_1 t} + 1)}{\lambda_1^2} - \frac{t}{\lambda_1} \right) \\
f_1(x,t) = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \beta}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{t^2}{2\lambda_2} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2^3} - \frac{t}{\lambda_2^2} + \frac{(e^{-\lambda_1 t} - 1)}{\lambda_1^3} - \frac{t}{\lambda_1^2} \right) \\
-\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_4 (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} - 1)}{\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{t}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) \\
+ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \cos(2\pi x)) \left(\frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{te^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} + \frac{(e^{-\lambda_1 t} - 1)}{\lambda_1^2} - \frac{(e^{-\lambda_2 t} + 1)}{\lambda_2} - \frac{(e^{-\lambda_1 t} - 1)}{\lambda_1} \right)
\end{array} \right. \quad (4.47)$$

Şimdi ise (4.41) - (4.43) denklemlerini çözelim. Bu denklemleri değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözebiliriz. $\eta_0(x,t) = X(x)T(t)$ şeklinde ele alalım. $\eta_{0t} = X(x)T'(t)$ ve $\eta_{0xx} = X''(x)T(t)$ ifadelerini (4.41) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X(x)T'(t) = D_1 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{D_1 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

olur. Buradan

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(1) = 0$$

$$T'(t) + \lambda D_1 T(t) = 0$$

diferansiyel denklemlerini elde ederiz. Elde edilen diferansiyel denklemleri çözersek,
i. $\lambda = 0$ için,

$$X(x) = Ax + B$$

elde ederiz ve $X'(0) = X'(1) = 0$ olduğundan, $A = 0$ olur. Böylece,

$$X_0(x) = B_0$$

olur. Böylece, $\lambda_0 = 0$ için $T'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = G$ elde ederiz.

ii. $\lambda > 0$ için,

$$X(x) = C \cos(\sqrt{\lambda} x) + D \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

olur ve $X'(0)=X'(1)=0$ olduğundan, $D=0$ ve $\sqrt{\lambda}=\pi$ elde ederiz. Böylece,

$$X_n(x)=C_n \cos(n\pi x)$$

olur. Böylece, $\lambda_n=(n\pi)^2$ için $T_n(t)=H_n e^{-D_1(n\pi)^2 t}$ elde ederiz.

iii. $\lambda < 0$ iken

$$X(x)=E \cosh(\sqrt{-\lambda} x) + F \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

olur ve $X'(0)=X'(1)=0$ olduğundan, $E=F=0$ olur.

Böylece,

$$\eta_0(x,t)=X_0(x)T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

$B^*=GB_0$ ve $C_n^*=C_n H_n$ alınırsa,

$$\eta_0(x,t)=B^*+\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-n^2\pi^2 D_1 t} \cos(n\pi x)$$

olur. Bu ise $(0,1)$ aralığında fourier cosinüs serisidir. O zaman

$$B^*=\frac{C_0}{2}, C_0=2 \int_0^1 \eta_0(x,0) dx \text{ ve } C_n^*=2 \int_0^1 \eta_0(x,0) \cos(n\pi x) dx$$

şeklinde olduğu bilinir ve buradan

$$C_0=2, C_n^*=0$$

elde edilir. Böylece, η_0 çözümü

$$\eta_0(x,t)=1$$

şeklinde olur. (4.41) daki ikinci denklemde η_0 yerine yazılırsa homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu problemin çözümü için

$$v(x,t)=\eta_1(x,t)-3(x^2-2x^3+x^4)$$

dönüşümü yapalım. Bu dönüşümü (4.41) da ki ikinci denklemde ele alırsak,

$$v_t = D_1 v_{xx}$$

$$v(x,0) = -3(x^2 - 2x^3 + x^4), \quad 0 < x < 1$$

$$v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

homojen kısmi diferansiyel denklemi elde ederiz. η_0 gibi çözersek,

$$B_0 = -\frac{1}{10}$$

$$B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ tek} \\ \frac{144}{n^4 \pi^4}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\eta_1(x,t) = -\frac{1}{10} + \frac{144}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{(2n)^4} e^{-4n^2 \pi^2 D_1 t} + 3(x^2 - 2x^3 + x^4), \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

elde ederiz. Dolayısıyla pertürbasyon çözümleri,

$$\begin{cases} \eta_0(x,t) = 1 \\ \eta_1(x,t) = 3(x-x^2)^2 - 0.1 + \frac{9}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^4} e^{-4n^2 \pi^2 D_1 t}, \end{cases} \quad (4.48)$$

şeklinde olur. (4.42) ve (4.43) denklemleri de benzer şekilde çözümlürse,

$$\begin{cases} \sigma_0(x,t) = 1, \\ \sigma_1(x,t) = 3(x-x^2)^2 - 0.1 + \frac{9}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^4} e^{-4n^2 \pi^2 D_2 t}, \end{cases} \quad (4.49)$$

ve

$$\begin{cases} m_0(x,t)=1, \\ m_1(x,t)=3(x-x^2)^2-0.1+\frac{9}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^4}e^{-4n^2\pi^2 D_3 t}, \end{cases} \quad (4.50)$$

şeklinde elde edilir. (4.44) - (4.50) ifadelerinin iki terimli pertürbasyon çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u(x,t,\varepsilon)=(1-\cos(2\pi x))e^{-\lambda_2 t}-\varepsilon(\lambda_2 t(1-\cos(2\pi x))e^{-\lambda_2 t})+O(\varepsilon^2),$$

$$v(x,t,\varepsilon)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t})+\varepsilon\left(\frac{\lambda_2^2(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{-te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{(e^{-\lambda_2 t}-1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)}{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{(e^{-\lambda_2 t}-1)}{\lambda_1-\lambda_2}-te^{-\lambda_1 t}\right)}\right)+O(\varepsilon^2),$$

$$c(x,t,\varepsilon)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{(1-e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2}+\frac{(e^{-\lambda_1 t}-1)}{\lambda_2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{(e^{-\lambda_2 t}+1)}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)^2}-\frac{t}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)}{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))\left(-\frac{(e^{-\lambda_2 t}+1)}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{t}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{(te^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}-1)}{\lambda_1}-\frac{(e^{-\lambda_1 t}+1)}{\lambda_1^2}+\frac{(e^{-\lambda_2 t}+1)}{\lambda_2}\right)}\right)+O(\varepsilon^2),$$

$$f(x,t,\varepsilon)=\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{t}{\lambda_2}+\frac{(e^{-\lambda_2 t}-1)}{\lambda_2^2}+\frac{(-e^{-\lambda_1 t}+1)}{\lambda_1^2}-\frac{t}{\lambda_1}\right)$$

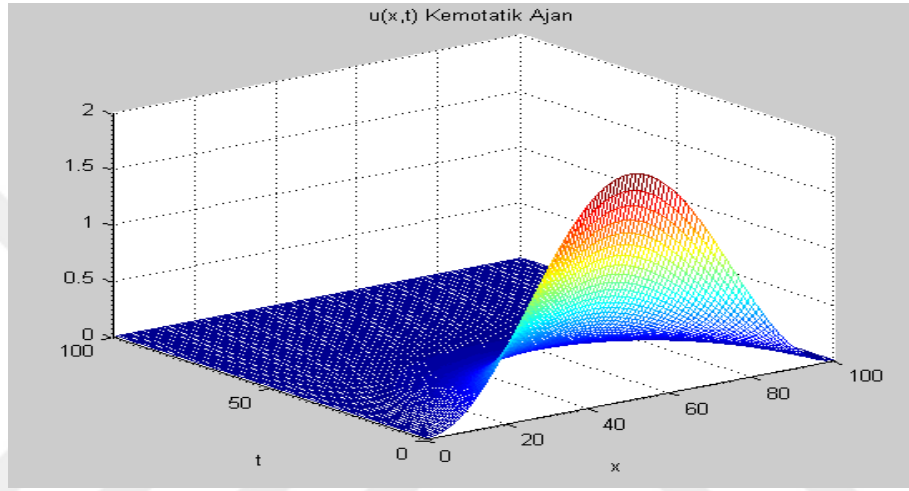
$$+\varepsilon\left(\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_4\beta}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{t^2}{2\lambda_2}+\frac{(-e^{-\lambda_2 t}+1)}{\lambda_2^3}-\frac{t}{\lambda_2^2}+\frac{(e^{-\lambda_1 t}-1)}{\lambda_1^3}-\frac{t}{\lambda_1^2}\right)}{-\lambda_1\lambda_2^2\lambda_4(1-\cos(2\pi x))\left(\frac{te^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{(e^{-\lambda_2 t}-1)}{\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{(-e^{-\lambda_2 t}+1)}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)^2}-\frac{t}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)}\right)+O(\varepsilon^2),$$

$$\eta(x,t,\varepsilon)=1+\varepsilon\left(3(x-x^2)^2-0.1+\frac{9}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^4}e^{-4n^2\pi^2 D_1 t}\right)+O(\varepsilon^2),$$

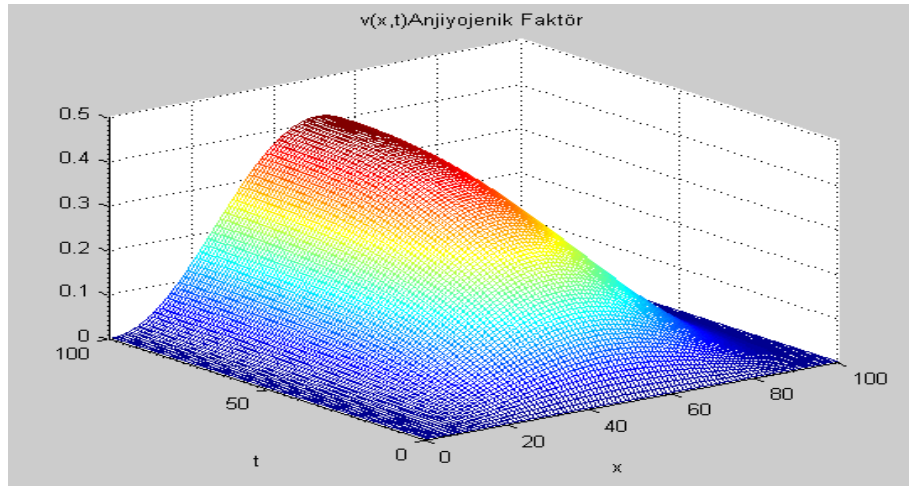
$$\sigma(x,t,\varepsilon)=1+\varepsilon\left(3(x-x^2)^2-0.1+\frac{9}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^4}e^{-4n^2\pi^2D_2t}\right)+O(\varepsilon^2),$$

$$m(x,t,\varepsilon)=1+\varepsilon\left(3(x-x^2)^2-0.1+\frac{9}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^4}e^{-4n^2\pi^2D_3t}\right)+O(\varepsilon^2).$$

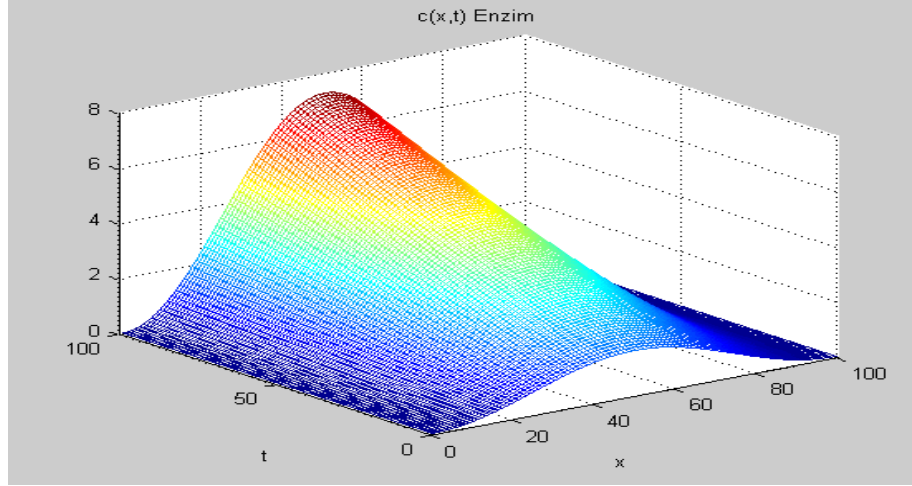
Elde edilen çözümlerin $\varepsilon=0,01$, $D_1=0,25$, $D_2=0,45$, $D_3=0,75$, alarak $0 < x < 1$ ve $0 < t < 0,1$ parametre değerleri için grafikleri Matlab yardımıyla elde edildi.



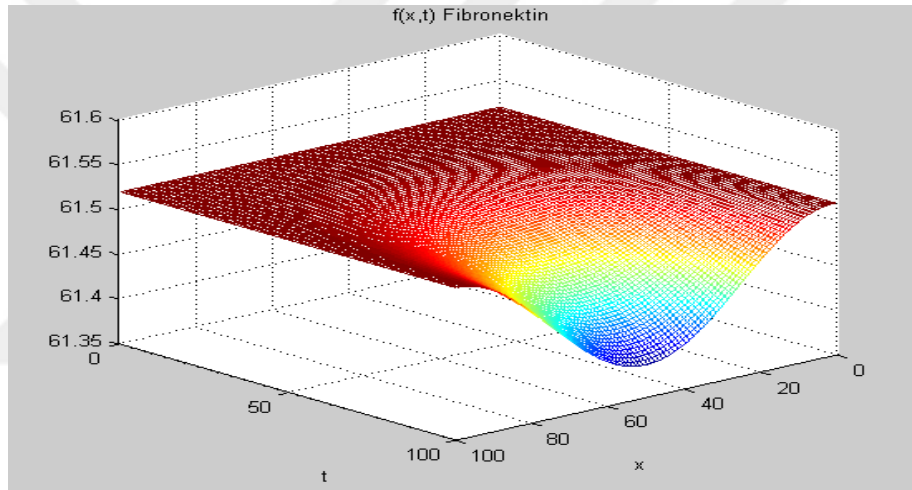
Şekil 4.5. Kemotatik ajan



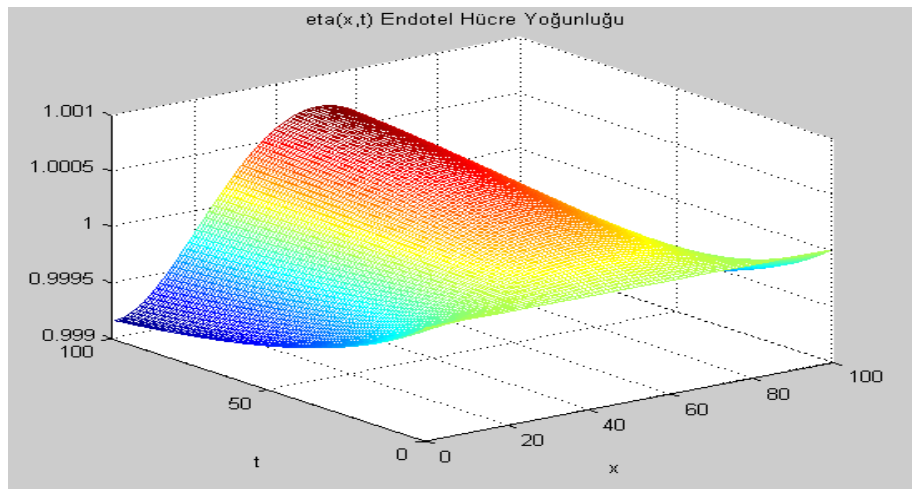
Şekil 4.6. Anjiyojenik faktör



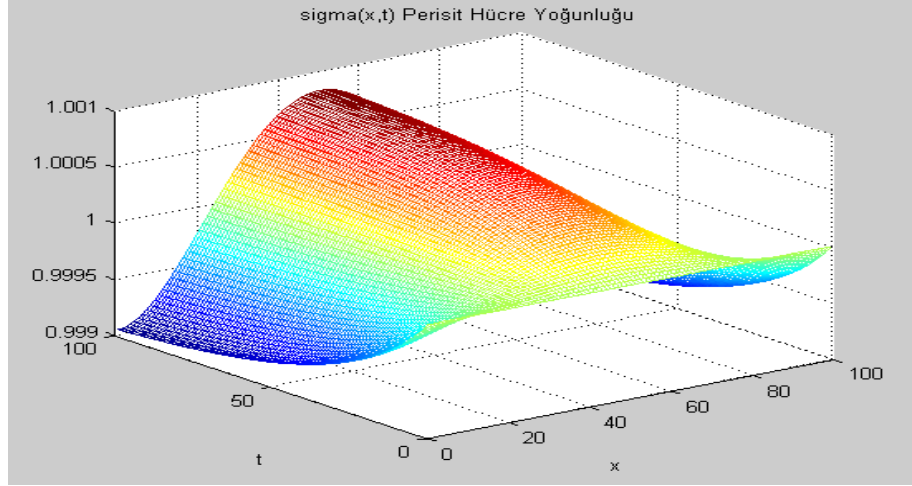
Şekil 4.7. Enzim



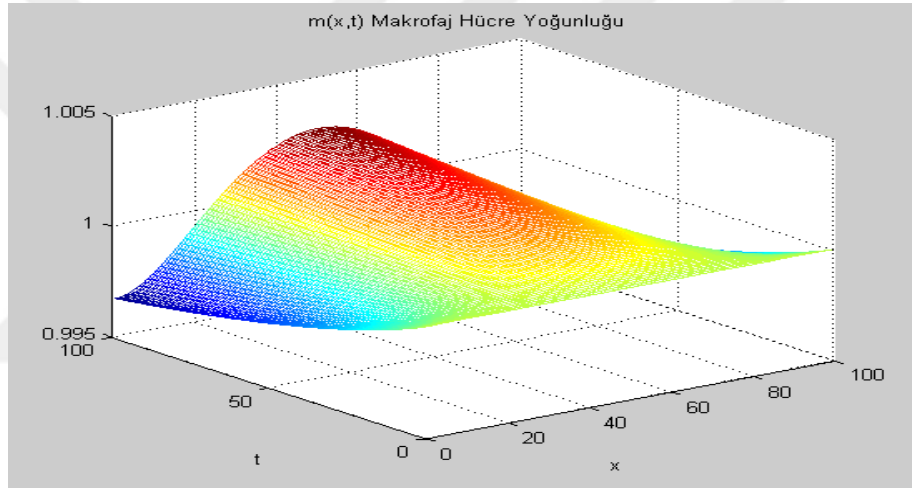
Şekil 4.8. Fibronektin



Şekil 4.9. Endotel hücre yoğunluğu



Şekil 4.10. Perisit hücre yoğunluğu



Şekil 4.11. Makrofaj hücre yoğunluğu

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada anjiyogenezin tümör hücrelerinin gelişiminde nasıl bir rol oynadığı matematiksel olarak ele alınmıştır. Bu amaçla, (Levine ve diğ., 2000) de elde edilen bir boyutlu matematiksel model ele alınmıştır.

Bu modelde sonuçlar Pertürbasyon Yöntemi ile elde edildi. İnceleyeceğimiz modele geçmeden önce örnek olması amacı ile bu yöntemin nasıl işlediği bazı adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile anlatılmış ve tam çözümleri ile karşılaştırılmış ve Matlab yardımıyla grafikleri elde edilmiştir.

Alt bölüm 4.1 için şunlar söylenebilir; zamandan bağımsız EC denkleminin pertürbasyon yöntemiyle çözümünün τ 'nin bir katı olması bekleniyordu. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 baktığımız zaman $0 < x < 0,5$ aralığında iyi bir yaklaşım elde ettik. Eğer pertürbasyon yöntemiyle daha fazla terim eklenseydi, $0,5 < x < 1$ aralığında da grafik τ 'nin grafiğine yaklaşacaktı. Bu ise (Pamuk ve Gürbüz, 2004) deki çözüme yaklaştığımızın bir göstergesidir. Tümör anjiyogenez faktörü denkleminin iki terimli pertürbasyon çözümü Şekil 4.3 ve (Pamuk, 2004) alınan Şekil 4.4 baktığımız zaman elde edilen çözümlerin benzer olduğu görülmektedir. Bu ise iki terimli pertürbasyon çözümü ve nümerik çözümün çakışık olduğunu göstermektedir.

Alt bölüm 4.2 de Şekil 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 ve 4.11 sırasıyla kemotatik ajanı, anjiyogenik faktörü, enzimi, fibronektin yoğunluğunu, endotel hücre yoğunluğu, perisit hücre yoğunluğu ve makrofaj hücre yoğunluğunu göstermektedir. Burada EC, PC ve MC için geçiş olasılık fonksiyonları τ_1, τ_2 ve τ_3 x 'in bir fonksiyonu olarak seçildi. Tümör oluşumundaki denklem sistemine küçük ε parametresi eklenerek iki terimli pertürbasyon çözümlerinden elde edilen sonuçlar, (Pamuk ve Çay, 2018) ve (Levine ve diğ., 2000) makalelerindeki sonuçlar ile benzerlik göstermektedir. Buradan ise, tümör oluşumundaki denklem sisteminin pertürbasyon çözümünden elde edilen sonuçların biyolojik gerçeklerle örtüştüğü görülmektedir.

Burada sadece kılcal damar üzerindeki hareketliliği tanımlayan bir boyutlu model ele alınmıştır. İleriki aşamalarda modelin iki boyutlu hali için bu çalışmalar temel oluşturur.



KAYNAKLAR

Bayram M., *Diferansiyel Denklemler*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2010.

Bender C.M., Orszag S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1999.

Hinch E. J., *Perturbation Methods*, 1st ed., Cambridge University Press., Cambridge, 1991.

Hunter J. K., *Asymptotic Analysis and Singular Perturbation Theory*, University of California at Davis, California, 2004.

Kevorkian J., Cole J.D., *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Lagerstrom P.A., *Matched Asymptotic Expansions, Applied Mathematical Sciences: Ideas and Techniques*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Levine H.A., Sleeman B. D. , Nilsen-Hamilton M., A Mathematical Model for the Roles of Pericytes and Macrophages in the Initiation of Angiogenesis. I. The Role of Protease Inhibitors in Preventing Angiogenesis, *Mathematical Biosciences*, 2000, **168**, 77-115.

Mann J.E., Simmonds J.G., *A First Look at Perturbation Theory*, 2nd ed., Dover Publications Inc., New York, 1998.

Murray J.D., *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd ed., Springer, New York, 2002.

Nayfeh A., *Introduction to Perturbation Techniques*, 1st ed., Wiley Classics Library, Birkach, 1993.

O'Malley R. E., *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer Science+Business Media, New York, 1991.

Pamuk S., Solutions of a Linearized Mathematical Model for Capillary Formation in Tumor Angiogenesis: An Initial Data Perturbation Approximation, *Comput. & Math. Methods in Medicine*, DOI: 10.1155/2013/789402.

Pamuk S., Çay İ., A Mathematical Analysis of a 2D Model for Tumor Angiogenesis: An Initial Data Perturbation Approximation, *Communication in Mathematical Modeling and Application*, 2018, **3**(1), 13-27.

Pamuk S., Qualitative Analysis of a Mathematical Model for Capillary Formation in Tumor Angiogenesis, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2003, **13**(1), 19-33.

Pamuk S., Gürbüz A., Stability Analysis of the Steady-State Solution of a Mathematical Model in Tumor Angiogenesis, *Global Analysis and Applied Mathematics*, 2004, **729**, 369-373.

Pamuk S., Steady-State Analysis of a Mathematical Model for Capillary Network Formation in the Absence of Tumor Source, *Mathematical Biosciences*, 2004, **189**, 21-38.

Rice R. G., Do D. D., *Applied Mathematics And Modeling For Chemical Engineers*, John Wiley & Sons Inc., USA, 1995.

Sahoo S.K., Some Perturbation Methods to Solve Linear and Non-Linear Differential Equation , Master Thesis, National Institute of Technology Rourkela, Department of Mathematics , 2014, 769008.

Shivamoggi B. K., *Perturbation Methods for Differential Equations* , Birkhauser Boston, Springer Science+Business Media, New York, 2003.

Tzitzouris J. A., Lecturer Notes on Perturbation Techniques for ODEs.

Wazwaz A., *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Keleş M., Pamuk S., Pertubation Solutions of a Matematical Model in Tumor Angiogenesis, *International Conference on Mathematical Advances and Application ICOMAA-2019*, Istanbul, Turkey, 3-5 May 2019.



ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2017 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Programında öğrenimine başladı. Mayıs 2019 itibari ile Kocaeli Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

