



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



Yüksek Lisans Tezi

MİMETİK F(R) GRAVİTASYON

Emre DEMİR

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı


**DANIŞMAN
Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ**

Ağustos, 2019

İSTANBUL

Bu çalışma, 7.08.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

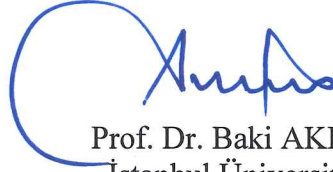
Tez Jürisi



Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Baki AKKUŞ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Tezin hazırlanma aşamasında manevi desteğini esirgemeyen aileme ve bilgileri ile bana yardımcı olan tez danışmanım Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ hocama minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos 2019

Emre DEMİR



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ.....	viii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	5
2.1. TENSÖRLER.....	5
2.2. LİE TÜREVİ.....	6
2.3. KOVARYANT TÜREV	7
2.4. VARYASYON HESABI	11
2.5. NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI.....	16
2.6. DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ.....	17
2.7. GRAVİTASYON TEORİLERİ	22
2.7.1. Einstein Genel Rölativite Teorisi	22
2.7.2. Brans-Dicke Teorisi.....	27
2.7.3. F(R) Gravitasyon Teorisi.....	29
2.7.4. Mimetik Gravitasyon Teorisi	31
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	34
3.1. F(R) GRAVİTASYON TEORİSİ ALAN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	34
3.2. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİ ALAN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	37
4. BULGULAR.....	40
4.1. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİNİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ	40
4.2. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİNDE NOETHER SİMETRİ.....	44
4.2.1. Kuadratik Potansiyel Çözümü	47

4.2.2. Üstel Potansiyel Çözümü	48
4.2.3. Bianchi Tip-I Kozmolojide Mimetik Madde İçin Potansiyel Çözümleri	49
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	54
KAYNAKLAR.....	56
EKLER	60
EK 1. Genel Varyasyonlar.....	60
EK 2. Bazı Önemli Varyasyonlar.....	64
EK 3. İdeal Akışkan İçin Enerji Momentum Tensörü.....	67
EK 4. FLRW Evreni İçin Süreklilik Denkleminin Türetilmesi.....	68
ÖZGEÇMİŞ	70



ŞEKİL LİSTESİ



TABLO LİSTESİ



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
.	: Zamana göre türev
\square	: D'alembert operatörü
∇	: Kovaryant türev
\mathcal{L}	: Lie türevi
\otimes	: Tensör çarpımı
δ	: Varyasyon
$R_{\mu\nu}$: Ricci tensörü
R	: Ricci eğrilik skaleri
$g_{\mu\nu}$: Metrik tensör
$T_{\mu\nu}$: Enerji-momentum tensörü
Λ	: Kozmolojik sabit
$V(\phi)$: Skaler potansiyel
ϕ	: Skaler alan
u^μ	: 4'lü hız vektörü
ρ	: Rölativistik enerji yoğunluğu
p	: Eş-yönlü basınç
w	: Durum sabiti
ds	: Yay elemanı
$a(t)$: FLRW modeli ölçek faktörü
H	: Hubble parametresi
q	: Yavaşlama (deceleration) parametresi
ξ^μ	: Killing vektörleri
$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$: Christoffel sembolleri
$\eta_{\mu\nu}$: Minkowski uzay-zamanı
$G_{\mu\nu}$: Einstein tensörü
S_{EH}	: Einstein-hilbert aksiyonu
S_m	: Madde-enerji aksiyonu
L	: Lagrange yoğunluk fonksiyonu
G	: Newton kütleçekim sabiti

κ^2 : Einstein kuplaj sabiti
c : Işık hızı

Kısaltmalar	Açıklama
DDS	: Diferansiyel Denklem Sistemi
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
FRLW	: Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
ΛCDM	: Λ Cold Dark Matter

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİMETİK F(R) GRAVİTASYON

Emre DEMİR

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Bu tezde, gravitasyonun genişletilmiş F(R) teorilerinden olan, ‘ghost’suz (phantom) skaler alan serbestlik derecesini barındıran ve içsel olarak konformal simetriye sahip Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi’nin alan denklemleri elde edilmiş, sıradan madde ile dolu düz Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) kozmolojik yapısı için noktasal Lagrangian’i yazılmış ve Noether simetriye uyumuna bakılmıştır. Ayrıca dinamik sistem analizi de yapılmıştır. Aynı zamanda, Bianchi tip-I kozmolojide, evrenimizin erken ve son dönemlerdeki ivmelenerek genişlemesine kaynaklık eden mimetik alanın temelleri, zamana $V(\phi = t) = \alpha/t^2$ biçiminde bağlı bir potansiyel önerilerek izah edilmeye çalışılmıştır. Bunları yapmamızdaki amaç, Noether simetriyi kullanarak, Λ CDM modelleri ve sıçrama durumu için çözümlerin kararlılığını araştırmak, ek olarak, çözümlerimizin Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi içinde elde edilebileceğini göstermektir. Ayrıca gelecek tekilliklerini barındıran çözümleri de yine bu model içerisinde elde etmektir.

Ağustos 2019, 82 sayfa.

Anahtar kelimeler: F(R) gravitasyon, mimetik gravitasyon, noether simetri, dinamik sistem, bianchi tip-I kozmoloji

SUMMARY

M.Sc. THESIS

MIMETIC F(R) GRAVITY

Emre DEMİR

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

In this thesis, the field equations of Mimetic F(R) Gravity Theory with a scalar field degree of freedom and internal conformal symmetry have been obtained, which is extended F(R) gravity theories but ghost-free. Beside, we have been carried out dynamical systems analysis of this theory and analyzed its accordance to Noether symmetry, on having written point-like Lagrangian for flat Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) metric in the presence of ordinary matter. Basis of the mimetic field originating the late-time (and initial era) expansion of the universe also have been described in Bianchi type-I cosmology by proposing a potential function time-dependant in terms of $V(\phi = t) = \alpha/t^2$. As a main purpose, we have looked into the stability of the solutions of the bouncing and Λ CDM models by utilizing the symmetries and demonstrated that the solutions are feasible in Mimetic F(R) Gravity. We also have gained the solution with future singularity in our theory.

August 2019, 82 pages.

Keywords: F(R) gravity, mimetic gravity, noether symmetry, dynamical systems, bianchi type-I cosmology

1. GİRİŞ

Genel anlamıyla kozmoloji, evrenin gözlenebilir özelliklerini anlamayı zaman içerisindeki evrimine açıklık getirmeyi amaç edinmiş bir bilim dalıdır. Bu maksatla, spektroskopiden parçacık fiziğine kadar fiziğin birçok alt dalından faydalanılarak, tarih boyunca bu disipline ait çeşitli teoriler öne sürülmüştür. Şüphesiz ki evrenin tam bir izahının yapılabilmesi için ortaya atılmış öneriler arasında, Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi (GRT) büyük bir önem taşımaktadır [1]. 1915 yılında öne sürülen bu teori, modern kozmolojinin temelini oluşturmaktadır olup, gelişen gözlem teknolojisi ve yöntemlerle elde edilen yeni bilgiler ışığında, ortaya atıldığı zamandan bugüne, bizzat Einstein'ın kendisi de dahil olmak üzere, birçok bilim insanı tarafından değişikliğe uğratılmıştır.

Kozmoloji tarihinde dönüm noktası olan GRT'nin öne sürüldüğü dönemlerde, evrenin durağan ve sonlu olduğu yaygın kabulü, teori için birtakım sıkıntılar ortaya çıkarmaktaydı. Herhangi bir madde-enerji dağılımının bulunmaması durumunda, yerel bölgede bir gravitasyonel dalgalanmanın oluşmaması, ayrıca, durağan bir evrenin, gravitasyonel etkileşimlere yenik düşerek çökmesi gerekmektedir. Bu gibi sorunlar Einstein'ı, alan denklemlerinin madde ile ilgili bölümüne bir terim eklemeye itmiştir. Bu terim Kozmolojik Sabit (veya Λ parametresi) olarak adlandırılır. Her ne kadar bu öneri Einstein tarafından beyhude bir girişim olarak düşünülmüş olsa da 1929 yılında yapılan gözlemler sayesinde tespit edilen galaksilerin resesyon hareketi, Λ parametresinin gerekliliğini tekrar ortaya koymuştur ve bu sabit evrenin genişlemesinin izahı olarak bir kez daha denklemdeki yerini almıştır.

Madde-enerji dağılımı tarafından yerel olarak yaratılan gravitasyon alanının incelenebilmesi için GRT'nin alan denklemlerinin çözülebilmesi gerekmektedir. Bu sebeple de enerji-momentum tensörü ve çalışılacak uzay-zaman geometrisinin doğru bir şekilde belirlenebilmesi büyük önem arz etmektedir. Bu yöntemlere, evrenin geniş ölçekli yapısının ve kaderinin nasıl olacağı ile ilgili iyi bir açıklamanın yapılabilmesi için de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, göreceli olmayan sıradan madde-radyasyonla dolu, Λ parametresini içeren ve GRT yasaları ile yönetilen düz bir evren yapısı ile Hubble gözlemleriyle tespit edilen genişleyen evren görüntüsü birbiri ile gayet tutarlıdır.

Fakat, son dönem geniş ölçekli gözlem sonuçları bize, evrenin ivmelenerek genişlediği bir döneme geçiş yaptığını göstermektedir. Sadece sıradan madde-radyasyon ile dolu bir evren modeli ile bu durum tam olarak izah edilememektedir. Buna ek olarak, evrenin genişlemesinden sorumlu tutulmuş olan Λ parametresinin fiziksel yorumu da dinamik bir evreni tarif etmekte yetersiz kalmaktadır. Ayrıca, Einstein alan denklemleri, güneş sistemi gibi daha düşük enerjili gravitasyon alanların çözümü için gayet tutarlı olması fakat, izahında yüksek mertebeden eğriliklere ihtiyaç duyulan sistemlerin ve evrende meydana gelen birtakım olayların açıklanmasında yetersiz kalması, bilim insanlarını bir kez daha alternatif bir teori aramaya ya da GRT'nin alan denklemlerinde değişiklikler yapmaya itmiştir.

Bu amaçla tezimizde, özel bir değiştirilmiş gravitasyon teorisi önerilmiştir. Ayrıca bu model ile GRT'den ne kadar sapıldığını belirlemeyi sağlayacak bir parametrizasyona nasıl geçiş yapıldığı da izah edilecektir. Bu yapılırken, Einstein alan denklemlerindeki gibi eğriliğe (R) lineer bağlı olmayan, eğriliğin genel bir fonksiyonunu içeren F(R) Gravitasyon Teorisi'nin aksiyonu ele alınacaktır. Çünkü bu değiştirilmiş gravitasyon teorisi 'ghost'suz bir modeldir ve Einstein çerçevesindeki skaler (alan) teoriye konformal olarak eşdeğerdir. Bununla birlikte, bu teorinin, evrenin son dönemdeki ivmelenerek genişlemesi durumu, karanlık enerji, karanlık madde ve holo problemi gibi birçok fenomeni açıklamakta kullanışlı ve ilgi çekici özellikleri bulunmaktadır. Ayrıca bu basit ve etkili değiştirilmiş gravitasyon teorisi kullanılarak enflasyon dönemi [2-5] de başarılı bir şekilde izah edilebilmektedir. Son yıllarda karanlık madde problemini çözebilecek birçok değiştirilmiş gravitasyon teorileri önerilmektedir. Bunlardan biri bizim de tezimizde konu ettiğimiz, mimetik model olarak isimlendirilen ve değiştirilmiş versiyonları da sunulmuş olan Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'dir [6-13]. Bu model ile gravitasyon teorilerine yapılan değişikliklerin arkasında yatan temel düşünce, skaler serbestlik derecesinin 'ghost'lar ile herhangi bir probleme sebebiyet vermediği, gravitasyon teorilerinin konformal invariant skaler bir teorisini önermektir. Burada fiziksel olmayan yardımcı bir metriğin konformal dönüşümü olarak ifade edilen fiziksel metriğin yeniden parametrize edilmesi yolu izlenmektedir. Buradaki can alıcı nokta ise, teorideki skaler alanın (ϕ) konformal fonksiyon olarak gözükmesi ve bu alanın içsel serbestlik derecesi rolü oynuyor olmasıdır. Kullanılan bu skaler alan bu sebeple bir 'ghost' değildir ve $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -1$ şeklinde birim boya (norma) sahiptir. Bu ölçüt fiziksel metrik üzerinde tanımlanmaktadır. Böylece parçacık koordinat sistemi ile eş hareket eden, birim boya sahip bir parçacığın hızına eşdeğer (benzer) bir nicelik ele almış bulunmaktayız. Modelimizin ilgi çekici bir özelliği ise, denklemlerimizi

FLRW uzay-zaman geometrisinde yazdığımızda fazladan a^{-3} ile orantılı bir terim elde ediyor olmamızdır. Bu terim karanlık madde gibi davranmakta olduğu için, teori, mimetik karanlık madde ya da kısaca mimetik gravitasyon olarak adlandırılmaktadır.

F(R) Gravitasyon Teorisi ile bu yeni ve oldukça ilgi çekici mimetik modelimizi bütünleştirmek amacıyla, mimetik gravitasyon teorisine benzer özelliklere sahip, değiştirilmiş gravitasyon teorilerinin yeni bir sınıfı olan Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi tezimizde sunulmuştur. Birçok özelliğe ve daha fiziksel çözümlere sahip olması sebebiyle bu yeni model daha ileri fiziksel problemlere tutarlı açıklamalar getirmeye de adaydır.

Koordinatların fonksiyonu ile ifade edilen dinamik bir sistemin, dönüşümlerin bazı tiplerine uyduğu ve yük gibi yerel olarak korunan nicelikleri veren korunum yasalarını barındıran, sırasıyla küresel ve yerel (lokal) olmak üzere iki tip simetri yasası bulunmaktadır. Fiziksel bir sistem için üstesinden gelinmesi gereken önemli bir konu olması sebebiyle simetrilerin korunumu tezimiz için de önemli bir yer tutmuştur. Bu sebeple ele aldığımız kozmoloji modeli alan denklemlerinin Noether simetriye uyumuna da bakılmıştır. Bu simetri türü, Galileons, F(T) [14], F(R), F(R,T) gibi birçok değiştirilmiş gravitasyon teorilerinin farklı versiyonları için araştırılmıştır [15-29]. Fakat biz burada sadece Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'nin Noether simetrisine bakmış bulunmaktayız.

Çalışmamız aşağıdaki gibi sunulmuştur:

Bölüm 2 : İlk olarak, faydalanılacak matematiksel altyapı sunulduktan sonra GRT ve birkaç değiştirilmiş gravitasyon teorilerinden bahsedilerek, tezimize kaynaklık eden Mimetik Gravitasyon Teorisi'nin temelleri sunulmuştur.

Bölüm 3 : Değiştirilmiş gravitasyon teorilerinden olan F(R) Gravitasyon Teorisi'nin temelleri ve alan denklemleri verildikten sonra, tezimizin ana konusu olan Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'ne kaynaklık eden ana düşünce ve matematiksel altyapısı izah edilmiştir.

Bölüm 4 : Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'nin FLRW kozmolojisi için yazılan Friedmann denklemlerinin çözümüne, dinamik sistem analizi ve Noether simetri yaklaşımı ile gidilmeye ve farklı potansiyel tipleri önerilerek, evrenimizde gerçekleşen birçok fenomene açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca tezimizin özgünlüğünü de ortaya koyan, Bianchi tip-I model için, evrenimizin erken ve son dönemlerdeki ivmelenerek genişlemesine kaynaklık eden

mimetik alanın temelleri, zamana $V(\phi = t) = \alpha/t^2$ biçiminde bağı bir potansiyel önerilerek izah edilmeye çalışılmıştır.

Bölüm 5 : Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'nin içeriği ve öneminden kısaca bahsedilmiş, Bölüm 4'te elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.



2. GENEL KISIMLAR

2.1. TENSÖRLER

Tensörler, invaryant niceliklerdir ve bileşenleri koordinat dönüşümü altında belirli kurallara göre dönüşmektedir. Herhangi bir x^μ koordinat sisteminden bir diğer x'^μ koordinat sistemine geçiş,

$$x'^\nu = x'^\nu(x^\mu), \quad dx'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.1)$$

denklem sistemi ile sağlanır. x^μ koordinatında bir noktada tanımlı birinci dereceden (rank-1) T^μ kontravaryant tensör bileşeninin dönüşümü;

$$T'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} T^\mu \quad (2.2)$$

T_μ kovaryant tensörün dönüşümü ise

$$T'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} T_\mu \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Burada $\partial x'^\nu / \partial x^\mu$ ifadesi dönüşüm, $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ ifadesi de ters dönüşüm matrisini (Jakobiyen) ifade etmektedir. Benzer şekilde ikinci mertebeden sırasıyla; $T^{\mu\nu}$ kontravaryant ve $T_{\mu\nu}$ kovaryant tensör bileşenlerinin dönüşümleri ise;

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}, \quad T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

şeklindedir.

Hem kovaryant hem de kontravaryant bileşenlere sahip yüksek mertebeden genel bir tensörün dönüşümü ise,

$$T'^{\alpha\dots\beta}_{\mu\dots\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \dots \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \dots \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} T^{\rho\dots\lambda}_{\sigma\dots\tau} \quad (2.5)$$

biçiminde ifade edilir. Burada T' ve T tensörleri için verilen kontravaryant bileşenlerin sayısı [üst indis $|\{\alpha \dots \beta\}| = |\{\rho \dots \lambda\}| = a$] a ile kovaryant bileşenlerin [alt indis $|\{\mu \dots \nu\}| = |\{\sigma \dots \tau\}| = b$] sayısı b 'nin toplamı karma tensörün mertebesini gösterir ve bu tensörlere $(a+b)$ 'inci mertebeden tensörler denir {rank-(a+b)}.

Bunun yanında sıfırinci mertebeden (rank-0) tensörler skaler, birinci mertebeden (rank-1) tensörler ise vektör olarak isimlendirilir. Birinci mertebeden kontravaryant tensörlere hız ve ivme, kovaryant tensörlere ise bir yüzeye teğet gradyent vektörleri örnek olarak verilebilir. Dört boyutlu bir koordinatta tanımlı birinci mertebeden tensörün 4, ikinci mertebeden tensörün ise 16 bileşeni bulunur.

2.2. LİE TÜREVİ

x^μ , M manifoldu üzerinde yerel koordinatlar olmak üzere, bu koordinatta bir P noktasında tanımlı tanjant vektör alanı $\{u^i(x^\mu)\}$, teğet olduğu $\varphi_i(t)$ eğri ailesi (kongrüans) tanımlar. Bu eğriler;

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = u^i[x^\mu(t)] \quad (2.6)$$

diferansiyel denkleminin $x^\mu(t=0) = x_p^\mu [P \in \varphi(t)]$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümleridir. Bu M manifoldu üzerinde alınan kovaryant V vektör alanının, P noktasından Q $[Q \in \varphi(t)]$ noktasına u^i vektör alanı yönündeki tasviri, bir nokta dönüşümü veya koordinat dönüşümü olarak yorumlanabilir. P noktasının Q'ya tasviri $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + u^\mu \delta t$ şeklinde nokta dönüşümü olarak düşünülürse vektör V,

$$V'^\mu(Q) \equiv V^\mu(x^\mu + u^\mu \delta t) \approx V^\mu(P) + \partial_\nu V^\mu(P) \delta x^\nu = V^\mu(P) + u^\nu (\partial_\nu V^\mu(P)) \delta t \quad (2.7)$$

biçiminde, $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ koordinat dönüşümü olarak ele alınır ise [P sabit nokta] V vektörü,

$$\tilde{V}^\mu(P) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(P) \quad (2.8)$$

$$\tilde{V}^\mu(P) = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} + (\partial_\nu u^\mu) \delta t \right] V^\nu(P) = V^\mu(P) + (\partial_\nu u^\mu) \delta t V^\nu(P) \quad (2.9)$$

biçimde ifade edilir $\{\tilde{V}^\mu(P) = V^\mu(Q)\}$. Bu $\tilde{V}^\mu(Q)$ ile $V^\mu(Q)$ vektörleri farkı δt 'ye bölünerek $\delta t \rightarrow 0$ limiti alınırsa,

$$\mathcal{L}_u V = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{V'^\mu(Q) - V^\mu(Q)}{\delta t} = (u^\nu \partial_\nu V^\mu - V^\nu \partial_\nu u^\mu) \quad (2.10)$$

ifadesi elde edilir ve buna Lie türevi denir.

\mathcal{L}_u türev operatörü,

$$\mathcal{L}_u[V, W] = [\mathcal{L}_u V, W] + [V, \mathcal{L}_u W] \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_u[f, g] = (\mathcal{L}_u f)g + f(\mathcal{L}_u g) \quad (2.12)$$

özelliklerini sağlamaktadır. $\{u, V, W$ vektör alanı, f ve g ise skaler fonksiyondur $\}$.

Lie türevinin sırasıyla f skaler fonksiyon ve W vektörü üzerine etkisi,

$$\mathcal{L}_u f = u^\mu \partial_\mu f \quad (2.13)$$

$$[\mathcal{L}_u W]_u = u^\nu \partial_\nu W_\mu + W_\nu \partial_\nu u^\mu \quad (2.14)$$

şeklindedir. Genel bir $T_{j_1 \dots j_\beta}^{i_1 \dots i_\alpha}$ karma tensör alınacak olursa Lie türevi,

$$(\mathcal{L}_u T)_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} = u^\mu \partial_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} + T_{\beta_1 \dots \mu \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} \sum_{\lambda=1}^b (\partial_{\beta_\lambda} u^\mu) - T_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \mu \dots \alpha_a} \sum_{\mu=1}^a (\partial_\lambda u^{\alpha_\mu}) \quad (2.15)$$

biçiminde ifade edilir.

Eğer $g_{\mu\nu}$ metriği $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ koordinat dönüşümleri altında $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ biçiminde form invariant kalıyor yani; metrik için,

$$[\mathcal{L}_u g]_{\mu\nu} = 0, \quad \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma + g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma = 0, \quad \partial_\nu \xi^\mu + \partial_\mu \xi^\nu = 0 \quad (2.16)$$

denklemleri sağlanıyor ise $g_{\mu\nu}$ metriği Killing simetrisine sahiptir denir. Bu denklemler Killing denklemleri olarak isimlendirilir. (2.16) denklemini sağlayan $u_\mu = \xi_\mu^\sigma \partial_\sigma$ ifadesi Killing vektörleridir. Her u_μ çözümlerinin oluşturduğu gruba izometri (eş-ölçüm) grubu denir ve böyle bir durumda $g_{\mu\nu}$ uzay-zaman metriği hareket simetrisine sahip olur.

2.3. KOVARYANT TÜREV

Lie türevi, dış türev gibi olmayıp, varyeteyi bir yapıyla donatan ve varyetede tanımlı her U vektörüne bağlanan ∇_U türev işlemi (U vektörüne göre kovaryant türev) şu özellikler ile tanımlanmaktadır:

1) ∇_U , bir tensör alanına uygulandığında aynı tipten bir tensör versin ve U 'ya göre lineer olsun:

$$\nabla_{(fU+gV)(T)} = f \nabla_U(T) + g \nabla_V(T) \quad (2.17)$$

2) Uygulandığı vektör alanına göre de lineer olsun:

$$\nabla_U(fV + gW) = f \nabla_U(V) + g \nabla_U(W) \quad (2.18)$$

3) Bir fonksiyona uygulandığında

$$\nabla_U(f) = Uf \quad (2.19)$$

olsun.

4) Tensör çarpımlarına uygulandığında türev operatörü özelliği gösterebiliriz:

$$\nabla_U(S \otimes T) = \nabla_U(S) \otimes T + S \otimes \nabla_U(T) \quad (2.20)$$

Dikkat edileceği üzere ∇_U tensör analizindeki ∇ (ya da ‘;’) ile gösterilen kovaryant türev kavramından farklıdır; zira, ∇ , uygulandığı tensörün kovaryansını 1 merteye arttırmaktaydı. (3) ve (4) özelliklerinden keyfi f fonksiyonu ve U, V vektörleri için,

$$\nabla_U(fV) = f \nabla_U(V) + (Uf)V \quad (2.21)$$

yazmak mümkündür.

Şimdi, $\{E_\mu, \omega^\mu\}$ genel tabanda, taban vektörlerinin taban vektörlerine göre kovaryant türevleri göz önüne alınsın. Sonuç yine bir vektör olacağından, taban vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak,

$$\nabla_{E_\mu}(E_\nu) = \Gamma^\sigma_{\nu\mu} E_\sigma \quad (2.22)$$

yazılır. (2.22) ile tanımlanan Γ 'lara, bağlantı katsayıları denir. (2.17) ve (2.18) kullanılarak şunları hesaplamak mümkündür:

$\{E_\mu, \omega^\mu\}$ tabanında $V = V^\alpha E_\alpha$, $U = U^\beta E_\beta$, $\omega = \omega_\alpha \omega^\alpha$ olsun. $\nabla_U(V)$ 'nin hesabı:

$$\begin{aligned} \nabla_U(V) &= \nabla_U(V^\alpha E_\alpha) = V^\alpha \nabla_U(E_\alpha) + (UV^\alpha) E_\alpha = U^\beta V^\alpha \nabla_{E_\beta}(E_\alpha) + (U^\beta E_\beta V^\alpha) E_\alpha \\ &= U^\beta (E_\beta V^\alpha + \Gamma^\tau_{\alpha\beta} V^\alpha) E_\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

Eğer $E_\beta V^\tau \equiv V^\tau_{;\beta}$ ve $V^\tau_{;\beta} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta} V^\alpha \equiv V^\tau_{;\beta}$ yazılırsa,

$$\nabla_U(V) = U^\beta V^\tau_{;\beta} E_\tau \quad (2.24)$$

şeklinde bir ifade bulunur. $U = U^\beta E_\beta$ özel hali için,

$$\nabla_{E_\beta}(V) = V^\tau_{;\beta} E_\tau \quad (2.25)$$

ifadesine indirgenir. $\nabla_U(\omega)$ 'nın hesabı:

$$\nabla_U(\omega(V)) = \nabla_U(\omega)(V) + \omega(\nabla_U(V)) \quad (2.26)$$

$$\omega(V) \equiv \langle \omega, V \rangle = \omega_\alpha V^\alpha \quad (2.27)$$

olduğundan,

$$\nabla_U(\omega_\alpha V^\alpha) = (\nabla_U \omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau (\nabla_U V)^\tau = (\nabla_U \omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau (U^\beta E_\beta V^\tau + U^\beta V^\alpha \Gamma^\tau_{\alpha\beta})$$

$$(\nabla_U \omega_\alpha) V^\alpha + \omega_\alpha (\nabla_U V^\alpha) = (\nabla_U \omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau (U^\beta V^\tau) + \omega_\tau U^\beta V^\alpha \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \quad (2.28)$$

ve buradan da,

$$(\nabla_U(\omega))_\alpha = U \omega_\alpha - U^\beta \omega_\tau \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \quad (2.29)$$

ya da,

$$\nabla_U(\omega) = U^\beta (E_\beta \omega_\alpha - \omega_\tau \Gamma^\tau_{\alpha\beta}) \omega^\alpha = U^\beta \omega_{\alpha;\beta} \omega^\alpha \quad (2.30)$$

bulunur. Özel olarak $\omega = \omega^\mu$ ve $U \equiv E_\beta$,

$$\nabla_{E_\beta}(\omega^\mu) = -\Gamma^\tau_{\alpha\beta} \omega^\alpha \quad (2.31)$$

olduğu görülür.

$\{\partial_\mu, dx^\mu\}$ koordinatsal tabanda, (2.24) ve (2.30) ifadeleri alışılmış kısmi türev ve kovaryant türev ifadelerine indirgenir.

Yukarıdaki hesaplamalar kolaylıkla daha yüksek mertebeden tensörlere de genişletilebilir. Örneğin, ikinci mertebeden kovaryant g tensörü için,

$$\nabla_{E_\beta} (g_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes \omega^\nu) = (E_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} g_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}) \omega^\mu \otimes \omega^\nu \quad (2.32)$$

bulunur.

5) Eğer ek bir varsayım olarak, $\nabla_U(g) = 0$ koşulu istenirse (2.32)'ten,

$$E_\lambda g_{\mu\nu} \omega^\lambda = (\Gamma^\tau_{\nu\lambda} g_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}) \omega^\lambda \quad (2.33)$$

elde edilir. Sol taraf $\{E_\mu, \omega^\mu\}$ tabanında $dg_{\mu\nu}$ (dış türev)'nin ifadesidir. Eğer,

$$\omega^\tau_{\nu} \equiv \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \omega^\lambda \quad (2.34)$$

denilirse, (2.33) ifadesi,

$$dg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \omega^\tau_{\nu} + g_{\tau\nu} \omega^\tau_{\mu} \quad (2.35)$$

ya da,

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\tau} \omega^\tau_{\nu} \quad (2.36)$$

yazarak,

$$dg_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} \quad (2.37)$$

elde edilir. ω^τ_{ν} (ya da $\omega_{\mu\nu}$)'lere bağlantı 1-formları denir. Bunların ω^μ tabanındaki bileşenlerine bağlantı katsayıları denildiği gibi Ricci dönme katsayıları da denir. Bu iki tip katsayı şöyle de ifade edilebilir. (2.34) ve (2.36)'den yazılabilecek

$$\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \omega^\lambda \quad (2.38)$$

bağıntısında,

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = g_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \quad (2.39)$$

tanımlanırsa,

$$\omega_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} \omega^\lambda \quad (2.40)$$

ifadesi elde edilir.

2.4. VARYASYON HESABI

x 'e bağılı bir $y(x)$ fonksiyonu için yazılan,

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x), y'(x), x] \quad (2.41)$$

fonksiyoneli ele alınsın. [$y'(x) = dy/dx$ olup, f , $y(x)$, $y'(x)$ ve x 'in rastgele fonksiyonudur]. Burada (2.41) integralini maksimum ya da minimum yapacak $y(x)$ fonksiyonunun tayini yapılacaktır.

Eğer, I fonksiyoneli, \mathcal{E} gibi bir eğri parametresine bağılı $I=I(\mathcal{E})$ şeklinde yazılırsa,

$$\frac{dI}{d\mathcal{E}} = 0 \quad (2.42)$$

durumu ile I için ekstremum değeri elde edilir.

Şimdi bir $y(x)$ eğrisinin (2.41) integralini ekstremum yaptığı bilinsin. Öyleyse, bu $y(x)$ çözümünden sapacak ve \mathcal{E} ile parametrize edilmiş bir $Y(x, \mathcal{E})$ biçiminde eğri ailesi ele alınsın. Burada, Y eğrileri \mathcal{E} 'nin sürekli bir fonksiyonudur ve \mathcal{E} 'nin herbir değerleri için farklı eğriler elde edilmektedir; $\mathcal{E} = 0$ durumunda, $y(x)$ ekstremum eğrisi (çözümü) elde edilir [$Y(x, 0) = y(x)$].

Ayrıca; bütün $Y(x, \mathcal{E})$ eğri aileleri, $y(x)$ ile aynı noktalarda [burada, X_1 ve X_2] sonlanmalıdır, yani;

$$Y(x_1, \mathcal{E})=y(x_1)=y_1, \quad Y(x_2, \mathcal{E})=y(x_2)=y_2 \quad (2.43)$$

yazılır.

Şimdi (2.41) ifadesi,

$$I(\mathcal{E}) = \int_{x_1}^{x_2} dx f[Y(x, \mathcal{E}), Y'(x, \mathcal{E}), x] \quad (2.44)$$

biçiminde yeniden ifade edilir ve böylelikle, (2.42) koşulu,

$$\frac{dl}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} dx f[Y(x, \varepsilon), Y'(x, \varepsilon), x] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df[Y(x, \varepsilon), Y'(x, \varepsilon), x]}{d\varepsilon} \quad (2.45)$$

buradan da,

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right] = \frac{dl}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

şeklini alır. Burada,

$$\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \quad (2.47)$$

alınmıştır. Şimdi, $\varepsilon = 0$ olduğunda hem x 'e göre kısmi türev $\partial/\partial x \rightarrow d/dx$ şekline dönüşür hem de,

$$Y(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = Y(x, 0) = y(x), \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \neq 0, \quad \forall \varepsilon \quad (2.48)$$

olur. Böylelikle (2.42) ifadesi;

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

şeklini alır.

(2.43) ifadesinin sonucu olarak, x_1 ve x_2 sınır noktalarında;

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0, x=x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.50)$$

elde edilir. Dahası, $Y(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun ε etrafındaki Taylor serisi,

$$Y(x, \varepsilon) \approx y(x) + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) \quad (2.51)$$

ve x_i ($i=1, 2$) sınır noktalarında,

$$y_i \approx y_i + \varepsilon \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, x=x_i} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, x=x_i} = 0 \quad (2.52)$$

biçiminde olduğu göz önünde bulundurulduğunda (ε 'ye birinci dereceden bağlı), (2.49) ifadesi,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] = 0 \quad (2.53)$$

biçimini alır ve bu ifade her $\partial Y / \partial \varepsilon |_{\varepsilon=0}$ için sağlanmalıdır. Böylelikle,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.54)$$

sonucu elde edilir ve bu diferansiyel denklemin çözümü ile (2.41) integralini ekstremum yapacak $y(x)$ fonksiyonu bulunabilir.

(2.41) integralinin içindeki birinci dereceden türeve sahip f fonksiyonu yerine daha yüksek mertebeden türevlere bağlı bir L fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyona Lagrangian denir ve genel olarak,

$$I = \int dx L, \quad L = L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \quad (2.55)$$

şeklinde verilir. Burada $y^{(n)}(x)$, $y(x)$ fonksiyonunun x 'e göre n -inci mertebeden türevini ifade etmektedir [$y^{(n)}(x) := d^n y(x) / dx^n$]. Ayrıca; $(n-1)$ 'inci mertebeye kadar bütün türevleri ve δy varyasyonları sınır değerlerde sıfırdır; yani,

$$\delta y|_{x_i} = 0 = \delta y'|_{x_i} = \dots = \delta y^{(n-1)}|_{x_i} \quad (2.56)$$

şeklindedir ($i=1, 2$). (2.55) integralinin

$$\delta I = \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = 0 \quad (2.57)$$

varyasyonu için,

$$\delta L = L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) - L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \quad (2.58)$$

ve

$$L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) \quad (2.59)$$

ifadesinin,

$$L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) \approx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \quad (2.60)$$

biçimindeki Taylor serisi göz önünde bulundurulduğunda elde edilecek,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \quad (2.61)$$

Lagrangian'ın varyasyonu ile (2.57) ifadesi,

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \\ &= \int dx \delta L = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

şeklini alır. Eşitliğin sağ tarafındaki parantez içinde y 'nin ve türevlerinin varyasyonunu içeren terimler,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right) - \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] = \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \right) - \delta y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] = \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \delta y \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] &= \left[\delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] = \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] & \end{aligned} \quad (2.64)$$

şeklinde düzenlenir. Burada görülüyor ki; δy (ve türevlerin varyasyonu) üzerine etkileyen türevler artık, y 'ye (ve x 'e göre türevlerine) göre türevli L Lagrangianinin üzerine etkimektedir.

Bu düzenlemeler, $k=0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere k -ıncı türevi içeren her bir $\partial L/\partial y^{(k)}$ terimi için integral,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \delta y^{(k)} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\delta y^{(k-1)} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) - \delta y^{(k-1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \\ &= \left(\delta y^{(k-1)} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y^{(k-1)} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \\ &= \dots = (-1)^k \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

biçiminde genelleştirilir. Böylelikle (2.62) varyasyonu,

$$\delta I = \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = (-1)^k \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] = 0 \quad (2.66)$$

ve buradan (2.54) ifadesinin genel hali,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) = 0 \quad (2.67)$$

biçiminde bulunur.

Eğer boyutlu $V(q)$ potansiyeli içinde hareket eden m kütleli noktasal bir parçacık ele alırsak ($q=q(t)$: genelleştirilmiş koordinatlar, t : zaman) sistemin Lagrangianı basitçe,

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (2.68)$$

şeklinde verilir ve (2.57) ifadesi gereği,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q, \dot{q}) = 0 \quad (2.69)$$

yazılır.

Lagrangianın varyasyonu için,

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (2.70)$$

yazıldığında (2.69) ifadesi (t_1 ve t_2 'de $\delta q = 0$),

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \quad (2.71)$$

biçimde ifade edilir. t_1, t_2 rastgele değerlerdir ve herhangi bir δq varyasyonu için,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.72)$$

elde edilir ve bu Euler-Lagrange diferansiyel denklemi olarak isimlendirilir.

2.5. NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI

N tane noktasal parçacığın birleşiminden oluşan bir sistemin, herhangi bir andaki durumu, her bir parçacığın konumunu ifade eden N tane yarıçap vektörü tanımlanarak belirlenir. Anlaşılır olması açısından vektörler üç boyutlu kartezyen koordinatlarda tanımlanırsa, bütün parçacıkların konumları (sistemin durumu) $3N$ tane nicelik ile ifade edilecektir. Böyle bir durum için parçacıkların konumlarını ifade eden koordinat bileşenleri veya bunların diferansiyelleri arasında, sistemin hareketini belirleyen koşullara bağlı olarak, bazı cebirsel ve/veya diferansiyel denklemler de yazılabilir. Bu ifadeler kısıtlayıcı denklemler olarak isimlendirilir. Kısıtlayıcıların olduğu bir durumda sistemi ifade eden $3N$ tane nicelik birbirinden bağımsız olmayacaktır. k tane kısıtlayıcı denkleme sahip bir sistem düşünülürse, sistemin durumunu ifade edecek olan $d=3N-k$ tane bağımsız bileşen elde edilir ve sistem 'd' serbestlik derecesine sahiptir denir. Bu bağımsız koordinat bileşenleri ile sistemin durumu izah edilebilir fakat; bu bileşenler sistemin hareket ettiği fiziksel koordinat bileşenlerinden farklıdır ve karıştırılmamalıdır. Bu yeni koordinat Genelleştirilmiş Koordinatlar (konfigürasyon uzayı) olarak bilinmekte olup, koordinatın bileşenleri genel olarak q_i ile ifade edilmektedir (d : serbestlik derecesi, $i=1,2,3\dots d$). Sistemin durumu bu d -boyutlu genelleştirilmiş koordinatlarda bir nokta ile gösterilir. Belirli bir zaman aralığında, dinamik bir sistemin her yeni durumunu ifade eden konfigürasyon uzayındaki her noktanın birleşimi, sistemin kaderini resmeden bir eğri oluşturur. Fakat eğri üzerindeki her bir noktadan, belirli başlangıç koşullarına sahip sonsuz sayıda eğri geçer. Bu eğriler arasında sisteme ait asıl eğri, konfigürasyon uzayının bir noktasından bir diğer noktasına çizilen, sistemin o zaman aralığındaki tarihini anlatan ve sistem

için yazılan Lagrange fonksiyonunun (L) zaman parametresi üzerinden integral değerini en küçük yapan eğridir (geodezik eğrisi). Bu eğri Hamilton ilkesi ($I = \int L dt$, $\delta I = 0$) gereği,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.73)$$

Euler-Lagrange diferansiyel denklemini sağlamalıdır [Nokta τ 'ya göre türevdir].

Konfigürasyon uzayında sistemin izleyeceği eğri üzerindeki noktaları tanımlayan $Q^i = Q^i(q)$ konum vektörünün dönüşümü, ' ε ' gibi tek parametrelili $[Q^i = Q^i(q, \varepsilon)]$ nokta dönüşümü olsun. Bu dönüşüm tek parametrelili Lie grubu oluşturur ve sonsuz küçük ' ε ' değeri için bu dönüşüm genel olarak,

$$X = \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{dt} \alpha^i(q) \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.74)$$

şeklinde yerel bir vektör alanı ile sağlanır. Bu alan boyunca $L=L(q^i, \dot{q}^i)$ Lagrangian fonksiyonunun Lie türevi,

$$\mathcal{L}_X L = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \quad (2.75)$$

şeklinde sıfır olacağından, sistem,

$$\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.76)$$

biçiminde hareket sabitine sahip olur ve Noether simetrisini sağlar [30].

2.6. DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ

Aşağıda, metinde kullanılan Dinamik Sistemler Teorisi'ne ilişkin bazı kavramları kısaca tanıtıyoruz [31]. Bir fiziksel sistem, kendisini tasvir eden kinematik ve dinamik değişkenlerin kümesinin oluşturduğu hal-uzayı denilen n-boyutlu matematiksel uzayda ele alınabilir. Dinamik Sistemler Teorisi, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir vektör fonksiyonu olmak üzere, evrimi; sembolik olarak,

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.77)$$

biçiminde yazılan bir diferansiyel denklem ile yönetilen fiziksel sistemleri incelemek için kullanılır [32]. (2.77) ifadesinin açık yazılışı,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (2.78)$$

ve

$$\frac{d}{dt} \equiv " , " \quad (2.79)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.80)$$

olup, bu bir adi türevli n adet diferansiyel denklem sistemi (DDS) demektir. f'nin t'ye açık bir şekilde bağlı olmaması halinde (2.77) ifadesine otonom DDS denir ki biz, yalnız bu durum ile ilgileneceğiz. Bu denklemler genel olarak, birbirlerine bağıdırlar ve de lineer değildirler. (2.77) ifadesinin çok özel hali, f(x) vektör alanınının, A bir nxn reel matris olmak üzere f(x)=Ax biçiminde bir reel fonksiyon olmasıdır.

Bir DDS'nin akışı : (2.77) ifadesinin bir çözümü, her t∈ℝ için

$$\tilde{\Psi}(x)=f(\Psi(t)) \quad (2.81)$$

denklemini sağlayan bir $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyonun varlığı ve tekliği gösterilebilir. Aslında, çözümü tesis etmek, kuplelikten ve nonlinearlikten dolayı çok zor ve hatta olanaksızdır. Buna rağmen çözüm bilinmeksizin de çözüm hakkında bilgilere sahip olmak olanaklıdır. Bu yaklaşıma DDS'nin Nitel İncelenmesi (Kalitatif Analiz) denir ve burada hakkında bilgi vereceğimiz konu da bu olacaktır.

Çözümün \mathbb{R}^n 'deki gösterimine (görüntüsüne) DDS'nin bir yörüngesi (veya çözüm eğrisi ya da orbiti) denir. Fiziksel sistemin zaman içindeki evrimi $x \in \mathbb{R}^n$ hal vektörünün DDS'nin bir yörüngesi boyunca hareketi ile tasvir edilir. Eğer çözümler her $t \in \mathbb{R}^n$ için geçerli olacak biçimde tanımlanmış ise, bu takdirde,

$$\Phi_t(a) = \Psi_a(t) \quad , \quad \text{her } x \in \mathbb{R}^n \text{ için} \quad (2.82)$$

ile tanımlanan $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasvirlerin $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ kümesine DDS'nin akışı denir. Bu verilmiş bir $t \in \mathbb{R}$ için, her başlangıç a halleri için sistemin t anındaki $\Phi_t(a) \in \mathbb{R}^n$ halini verir. Başka bir deyişle, belirli bir t anında fiziksel bir sistemin hali, belirli bir çözüm eğrisi üzerinde bir nokta ile değil fakat belirli bir anda \mathbb{R}^n 'nin her noktasından geçen çözüm eğrileri topluluğu ile belirlenmiş olacaktır. $\{\Phi_t\}$ akışı \mathbb{R}^n 'yi kendi üzerine tasvir eden tek parametrelili bir dönüşüm grubu olup, Dinamik Sistem (DS) olarak da adlandırılır. Mesela, $\dot{x} = Ax$ DDS için akışın açık ifadesi,

$$\Phi_t(x) = e^{At}x \quad , \quad \text{her } t \in \mathbb{R} \text{ için} \quad (2.83)$$

akışın \mathbb{R}^n 'deki gösterimine akışın faz portresi denir. Aslında akışın bilinmesi DDS'nin tüm çözümlerinin bilinmesine denktir. Ancak, akış, DDS'nin tüm çözüm ailesinin nitel olarak incelenmesinde bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu bakımdan DDS'yi çözmek değil, akışın özelliklerini saptamak üzere f vektör alanının incelenmesi hedef alınır.

Yörüngelerin sınıflandırılması:

Bir DDS ile buna bağlanan Φ_t akışı verildiğinde bir x_0 noktasından geçen yörünge $\Gamma(x_0)$ ile gösterilsin; bu (2.81) ve (2.82)'ün ışığında,

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \Phi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\} \quad (2.84)$$

olarak tanımlanır. Yörüngeler geçtikleri noktaların özelliklerine göre çeşitli adlar altında sınıflandırılırlar. Bu noktalar a) denge noktaları (tekil noktalar) ve b) bayağı noktalar olmak üzere iki türdür. Denge noktası,

$$\tilde{x}_0 = f(x_0) \Leftrightarrow \Phi_t(x_0) = x_0 \quad , \quad \text{her } t \in \mathbb{R} \quad (2.85)$$

koşulunu sağlayan x_0 noktalarıdır. Bu noktalar türevin sıfır olmasından dolayı, fiziksel sistemin denge hali olarak yorumlanır. Denge noktasında, (2.85) ifadesinden dolayı $\Gamma(x_0) = \{x_0\}$ olur, yani bir denge noktasındaki yörünge noktanın kendisidir. Öte yandan herhangi bir bayağı noktadan geçen yörünge, f vektör alanını teğet kabul eden bir eğri olup bayağı yörünge olarak anılır.

Eğer, $\Gamma(x_0)$ periyodik yörünge değilken, her $N(x_0)$ civarı ve her $T \in \mathbb{R}$ için $\Phi_t(x_0) \in N(x_0)$ olacak biçimde bir $t > T$ varsa, $\Gamma(x_0)$ 'a tekrarlayan yörünge (recurrent) denir. Bu taktirde fiziksel sistem ilk önceki haline istenildiği kadar geri döner.

İki farklı denge noktasını birleştiren yörüngeye heteroklinik yörünge denir. Eğer yörünge bir denge noktasını kendi üzerine bağlıyorsa homoklinik yörünge denir.

Denge Noktalarının Kararlılığı:

Bir DDS'nin çözümleri hakkında nitel bir bilgi edinmek için ilk yapılması gereken şey, akışın denge noktaları civarında yerel davranışını, yani kararlılığını incelemektir. Bunun için (2.77) ifadesinin,

$$f(a) = 0 \quad (2.86)$$

ile tanımlı bir a denge noktası civarında,

$$Df(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=a} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.87)$$

Jacobiyen matrisi olmak üzere,

$$f(x) \approx Df(a)(x - a) \quad (2.88)$$

lineer yaklaşıklık göz önüne alınır. Verilmiş bir $\tilde{x} = f(x)$ DDS'ye, $u = x - a$ olmak üzere

$$\tilde{u} = Df(a)u \quad (2.89)$$

lineer DDS'yi bağlamaya, DDS'nin ' a ' denge noktasında lineerleştirilmesi denir. Hartman-Grobman teoremi, eğer ' a ' noktası bir hiperbolik denge noktası ise (yani $Df(a)$ 'nın tüm özdeğerleri sıfırdan farklı reel kısma sahip ise) bu taktirde ' a ' civarında, (2.89) ifadesi ile

$\dot{x} = f(x)$ ifadesinin yörüngelerinin aynı olduğunu ifade eder. O halde, \mathbb{R}^n 'de lineer DDS'nin özelliklerinden hareketle şunlar söylenebilir:

*eğer $Df(a)$ 'nın tüm λ_i özdeğerleri için $\text{Re}\lambda_i < 0$ ise a 'ya yerel düğüm denir. Bu durumda nokta civarındaki tüm başlangıç halleri $t \rightarrow \infty$ için denge noktasına çekilir.

*eğer $Df(a)$ 'nın tüm λ_i özdeğerleri için $\text{Re}\lambda_i > 0$ ise a 'ya yerel kaynak denir. Bu durumda nokta civarındaki tüm başlangıç halleri $t \rightarrow -\infty$ için denge noktasına çekilir.

*ne yerel düğüm ne de kaynak olan hiperbolik denge noktasına yerel semer noktası denir. Bu durumda özdeğerlerin bazıları negatif bazıları pozitiftir.

*hiperbolik ($\lambda_i \neq 0$) denge noktaları yalın (izole) denge noktalarıdır. (0 boyutlu)

Bunların dışında yalın olmayan denge noktaları olabilir; mesela denge noktaları bir (C) eğrisinden oluşuyor ise (1-boyutlu) (C)'ye denge kümesi denir ve bunun için her bir noktada özdeğerlerden biri zorunlu olarak sıfırdır. Eğer sıfır olanın dışındaki özdeğerler negatif reel kısma sahip ise (C) eğrisi yerel düğüm (kaynak) olur. Genel olarak, eğer ' r ' özdeğer sıfır ise bu takdirde denge kümesi de r -boyutlu bir uzay olur.

İnvariant küme:

Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi için, eğer $x \in S$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için $\Phi_t(x) \in S$ ise S 'ye ϕ_i 'nin invariant kümesi denir. Eğer $x_0 \in S$ ise $\Gamma(x_0)$ yörüngesi de S 'ye ait olur. Dolayısı ile bir invariant küme yörüngelerin birleşimidir.

İnvariant kümeler şu durumda ortaya çıkar; $Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en az bir kere türetilen bir fonksiyon olsun. Z 'nin çözümler (yani akış) doğrultusundaki türevi $\tilde{Z} = \vec{\nabla}Z \cdot f(x)$ 'dir. Eğer, $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{Z} = \alpha Z \quad (2.90)$$

ise $Z > 0$, $Z = 0$, $Z < 0$ ile tanımlı alt-kümeler birer invariant küme olurlar.

Monoton fonksiyonlar:

S bir invaryant küme ve $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in S$ için $Z(\Phi_t(x))$ monoton eksilen (artan bir fonksiyon) ise Z 'ye monoton eksilen (artan) fonksiyon denir. O halde,

$$\vec{Z} = \vec{\nabla}Z \cdot f(x) < 0 \quad (\vec{Z} = \vec{\nabla}Z \cdot f(x) > 0) \quad (2.91)$$

ise Z , S 'de monoton eksilendir (artandır).

Eğer,

$$\vec{Z} = \vec{\nabla}Z \cdot f(x) \leq 0 \quad (\vec{Z} = \vec{\nabla}Z \cdot f(x) \geq 0) \quad (2.92)$$

ise ve de eşitlik halinde S hiçbir yörünge içermiyorsa Z 'nin S 'de monoton eksilen (artan) olduğu sonucu çıkar.

Eğer $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde, S 'de bir monoton fonksiyon ise S kümesi denge noktaları homoklinik yörüngeler içermez. Bu durum, fonksiyon periyodik veya tekrarlayan olsa da aynıdır.

2.7. GRAVİTASYON TEORİLERİ

2.7.1. Einstein Genel Rölativite Teorisi

Einstein Rölativite Teorisi temelde, her türlü hareketin göreliliği fikrine dayanmaktadır. Her ne kadar sınırlı bir kullanım alanı sunuyor olsa da, 1905 yılında Einstein'ın bu konuya ilk yaklaşımı olan Rölativitenin Özel Teorisi, gravitasyonel etkilerin ihmal edildiği boş uzay bölgesindeki uniform öteleme dönüşüm hareketinin göreliliğini içermektedir. Daha sonraları yine kendisi tarafından 1915 yılında öne sürülen Rölativitenin Genel Teorisinde, ivmeli referans sistemlerindeki göreliliğin hareketin (ve bütün hareket çeşitlerinin) tam bir izahını yapmıştır. Genel Rölativite ile gravitasyonel alan arasındaki benzerliğe dikkat çekerek, kütleçekimin madde-enerji dağılımı tarafından uzay-zamanda yaratılan deformasyondan ileri geldiğini söylemiştir. Bunu yaparak, Newton'dan farklı bir yaklaşımla kütleçekime geometrik bir yorum getirmiştir.

Einstein Rölative teorisinde üç temel ilkeyi rehber olarak almıştır. Birincisi (Genel) kovaryanslık ilkesidir ve bu ilke fizik yasalarının, Jakobiyeni sıfırdan farklı dönüşümle geçilen bütün koordinat sistemlerinde aynı formda, koordinattan bağımsız geometrik nesne olan tensörler ile ifade edileceğini söyler. İkincisi, serbest bir parçacığın ivmelenmesinin nedeninin, eylemsizlik kuvvetinden mi yoksa gravitasyonel alandan mı etkilenmesinden dolayı ileri geldiğinin yerel olarak ayırt edilemeyeceğini söyleyen eşdeğerlilik ilkesidir. Bu ilkenin, doğanın gözlenen yasalarının gravitasyonel potansiyelin mutlak değerine bağlı olmadığını söyleyen güçlü eşdeğerlilik ilkesi ile kapalı bir sistemde yerel olarak eylemsizlik kütlesi ve gravitasyon kütlesini eşdeğer kılan zayıf eşdeğerlilik ilkesi olmak üzere iki alt grubu bulunmaktadır. Üçüncü temel ilke ise; uzay-zaman geometrisinin ve bir parçacığın bu geometriden doğan eylemsizlik özelliklerinin, test parçacığı yakınındaki madde-enerji yoğunluk dağılımından kaynaklanan bilgi ile belirleneceğini söyleyen Mach İlkesi'dir. Her ne kadar Einstein bu ilke ile yola çıkmış olsa da önermiş olduğu Rölativistik Gravitasyon Teorisi Mach ilkesini tamamen barındırmamaktadır.

Einstein, 1915 yılında formüle ettiği Genel Rölative Teorisi'nin (GRT) matematiksel temellerini, yay elemanının $g_{\mu\nu}$ metriği cinsinden,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } 4 \quad (2.93)$$

biçiminde tanımlandığı, Riemann geometrisine dayandırmıştır. Burada $g_{\mu\nu}$ simetrik tensörünün bileşenleri gravitasyonel potansiyel olarak yorumlanmaktadır. 4-boyutlu eğrisel uzay-zamanda, madde ve enerjinin geometri ile yerel etkileşmesini [33],

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.94)$$

genelleştirilmiş alan denklemleriyle ifade etmiştir. Burada; $G_{\mu\nu}$ Einstein tensörünü, $R_{\mu\nu}$, Ricci eğrilik tensörünü, R , Ricci eğrilik skalerini, Λ [$\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$] Kozmolojik sabitini, κ^2 [$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$] Einstein eşleşim (kublaj) sabitini, c ışık hızını ve $T_{\mu\nu}$ madde-enerji momentum tensörünü ifade etmektedir. (2.94)'de verilen alan denklemlerindeki Einstein tensörü ($G_{\mu\nu}$), uzay-zaman geometrisini, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü aracılığı ile ifade edilen madde-enerji dağılımına yerel olarak bağlamaktadır ve bu madde enerji dağılımını ifade eden $T_{\mu\nu}$ tensörü genel formda;

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + \Theta_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

ikinci mertebeden tensörlerin toplamı şeklinde yazılmaktadır. Burada ρ , toplam enerji yoğunluğunu, u_μ vektörü, $u_\mu u_\nu = -1$ olacak şekilde dörtlü hız vektörünü, $\Theta_{\mu\nu}$, basınç ve gerilim tensörünü, $M_{\mu\nu}$ elektromanyetik enerji tensörünü, $F_{\mu\nu}$ elektromanyetik alan ile maddenin etkileşim tensörünü ve $Q_{\mu\nu}$ termodinamik etkileşme tensörünü ifade etmektedir. gravitasyona kaynaklık eden madde enerji içeriği: akışkan ya da akışkanların karışımı, kinetik teori ile tasvir edilen bireysel tanecikler topluluğu, bir $v(\phi)$ skaler potansiyelinden türeyen bir ϕ skaler alanı, Maxwell denklemleri ile tasvir edilen elektromagnetik alanlar gibi pek çok unsurlardan biri ya da hepsi olabilir. Bunların toplam etkisi, (2.95) denklemiyle de ifade edildiği gibi alan denklemlerinin sağındaki $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü ile de tasvir edilmektedir. Bir akışkan şeması için $T_{\mu\nu}$ 'nin ayrıcalıklı zaman cinsinden bir 4-lü vektörüne göre ayrışımı,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} \quad (2.96)$$

$$q_\mu u^\nu = 0 \quad , \quad \pi_{\mu\nu} = \pi_{(\mu\nu)} \quad , \quad \pi_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad , \quad \pi_\mu^\mu = 0 \quad (2.97)$$

biçiminde olup, burada: ρ , u^μ 'ya göre toplam rölativistik enerji yoğunluğunu, q_μ , rölativistik momentum yoğunluğu ya da u^μ 'ya göre enerji akısını (ısı iletimi ve difüzyonu), p , u^μ 'ya dik $h_{\mu\nu}$ 3-uzayında eş-yönlü basıncı, $\pi_{\mu\nu}$ ise izsiz eş-yönsüz basıncı (viskozite olduğunda sıfırdan farklı) ifade etmektedir. (2.96)'deki dinamik büyüklükler u^μ 'ya göre yazılmaktadır. (2.96)'den kolayca tesis edileceği gibi, bu dinamik büyüklükler, $T_{\mu\nu}$ verildiğinde,

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (2.98)$$

$$q_\mu = -h_\nu^\mu u^\lambda T_{\lambda\nu} \quad (2.99)$$

$$p = \frac{1}{3} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (2.100)$$

$$\pi_{\mu\nu} = h^\lambda_{\langle\mu} h^{\eta\rangle}_{\nu)} T_{\lambda\eta} \quad (2.101)$$

bağıntıları ile tamamlanır. (2.96)'daki geometrik ayrışımın fiziğini, akışkanın termodinamik tasviri ile (ısı yayılım katsayısı, bulk viskozite katsayısı vb...) ρ 'yu termodinamik değişkenler

ile ilişkilendiren bağıntılar belirler. Bunlara genel olarak, hal denklemi veya denklemleri denir. Rölativistik Kozmoloji'nin uygulamalarında, (2.96)'nın,

$$q_{\mu} = \pi_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu} + p h_{\mu\nu} \quad (2.102)$$

olarak kısıtlanmış hali çok yoğun bir şekilde kullanılmıştır. Buna ideal akışkan denilmektedir ve hal denklemi de sabit entropi ve sıcaklıktan bağımsız olma özelliklerinin bir sonucu olarak bulunan,

$$p = p(\rho) = (\gamma - 1)\rho \quad , \quad \omega = (\gamma - 1) = \frac{p}{\rho} \quad (\text{Hal denklemi}) \quad (2.103)$$

ifadesi alınır. (2.103) ifadesi lineer barotrop hal denklemi diye anılır. Burada γ bir sabit olup tanım aralığını, sesin $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{\text{sabit entropi}}$ bağıntısı aracılığı ile tanımlanan v_s hızı belirler.

Buna göre,

$$v_s^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (2.104)$$

olur. γ parametresinin kullanılagelen ilginç değerleri şunlardır:

$0 \leq \gamma < 1 \Rightarrow p = (\gamma - 1)\rho < 0$, $0 < v_s \leq 1$, negatif basınç, fiziksel olmamakla birlikte şişme (Enflasyon) teorisinde önem taşır.

$\gamma = 0 \Rightarrow p = -\rho < 0$, $v_s = c$, üstel şişmeli model, $\gamma = 0$ değeri efektif olarak Λ kozmolojik sabitine karşılık gelir.

$0 < \gamma < \frac{2}{3} \Rightarrow p = (\gamma - 1)\rho < 0$, $v_s > \frac{1}{\sqrt{3}}$, kuvvet kanunlu şişme modeline karşılık gelir.

$\gamma = \frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{1}{3}\rho < 0$, $v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, kozmik sicimler anlamına gelir.

$1 \leq \gamma < 2 \Rightarrow p = (\gamma - 1)\rho > 0$, $0 \leq v_s < 1$, kabul edilebilir fiziksel durumu ifade eder.

$\gamma = 1$, $p = 0$, $v_s = 0$ basınçsız akışkan (Toz ya da Soğuk Karanlık Madde)'i ifade eder.

$\gamma = \frac{4}{3}$, $p = \frac{1}{3}\rho$, $v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, radyasyon akışkanı (rölativist gaz)'i ifade eder.

$\gamma = 2$, $p = \rho$, $v_s = 1$, stiff akışkan (ses hızı ışık hızına eşit)'i ifade eder.

Enerji-momentum tensörü $T_{\mu\nu}$ hakkında son olarak şuna değinelim: $T_{\mu\nu}$ 'nin fizikselliğinin yalnızca hal denklemi değil, fakat aynı zamanda enerji koşulları denilen şu kısıtlamaları da belirler:

Zayıf enerji koşulu: $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$, $\rho \geq 0$ (ideal akışkan için $\rho + p \geq 0$ olursa sağlanır)

Egemen enerji koşulu: $|T^{\mu\nu}u_\mu| \leq 0 \Rightarrow T^{00} \geq |T^{\mu\nu}|$

Kuvvetli enerji koşulu: $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0 \Rightarrow T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq -\frac{1}{2}T^a_a$

Ayrıca, (2.94) ile verilen alan denkleminin, R 'ye göre lineer olan geometri ile ilgili bölümünün (sol), 4-boyutlu hiperyüzey üzerinde alınan invaryant hacim elemanı ve Ricci eğrilik skaleri (R) ile verilen,

$$I_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.105)$$

Einstein-Hilbert aksiyonunun, $g_{\mu\nu}$ metriğine göre varyasyonu alınarak da elde edilmesi mümkündür. [$\delta I_{EH}=0$]

Madde-enerji varlığında (2.105) ifadesi, $I = I_{EH} + I_m$ biçiminde, madde ile ilgili aksiyonu da içerecek şekilde yazılır. L_m , madde-enerji Lagrangian yoğunluğu olmak üzere, S_m madde aksiyonu,

$$I_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{\mu\nu}, \phi) \quad (2.106)$$

biçiminde tanımlanmakta olup [ϕ , skaler madde alanı], bu aksiyondan hareketle $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L_m \quad (2.107)$$

şeklinde verilir.

2.7.2. Brans-Dicke Teorisi

Einstein GRT'yi, bir cismin eylemsizliğinin evrendeki toplam kütle dağılımının bir fonksiyonu ile belirlenebileceğini söyleyen Mach İlkesi'ne dayandırmış olmasına rağmen, bu eylemsizliği yaratan, test parçacığı ile diğer bütün kütleler arasındaki etkileşimi belirgin bir şekilde teorisine dahil edememiştir. Mach İlkesi'ni içerecek genişletilmiş bir GRT önerisi Brans-Dicke Teorisi ismiyle öne sürülmüştür [34]. Bu model, ele alınan bir parçacığın eylemsizlik kütlelerinin, o parçacık ile bütün madde formlarıyla (yük hariç) eşit bir şekilde etkileşen uzak erimli evrensel bir ϕ skaler alanının etkileşmesinin bir ölçüsü olduğunu söyleyen skaler-tensörel bir teoridir. Bu temel parçacık eylemsizlik kütlelerinin sabit olmadığı, ϕ skaler alanına bağlı oldukları anlamına gelmektedir. Fakat, temel parçacık kütleleri sadece $G m/R^2$ şeklinde gravitasyonel ivmenin ölçülmesiyle belirlendiğinden dolayı, artık G (Newton gravitasyon) sabiti de bu ϕ skaler alanın ortalama değerine bağlı sabit olmayan bir nicelik olacaktır.

Sciama teorisi ele alındığında [35] evrenin bütün kütlelerinin R yarıçaplı küresel bir kabukta toplanan M kütlelerine göre ivmeli hareket eden m kütleli bir test parçacığı üzerine ekti eden eylemsizlik kuvvetinin,

$$\frac{GM}{R} m, \quad (c = 1) \quad (2.108)$$

ile ve,

$$\frac{GM}{R} \sim 1 \quad (2.109)$$

alındığında da parçacık eylemsizlik kütlesi m ile orantılı olacağı görülmektedir. (2.109) bağıntısı,

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M}{R} \quad (2.110)$$

şeklinde $1/G$ 'nin, evrenin kütle yoğunluğunu kaynak kabul eden,

$$\nabla^2 \phi \sim \rho \quad (2.111)$$

biçiminde madde yoğunlu ile ilişkilendirilmiş ϕ skaler alanla özdeş alınabileceğini gösterir [$\phi \sim M/R$, $\langle \phi \rangle \cong 1/G$]. (2.111) ifadesi 4-boyutlu uzay-zamana genelleştirilir ise,

$$\square^2 \phi = 4\pi\lambda T_{M\mu}^{\mu} \quad (2.112)$$

biçiminde ϕ skaler alanının, evrenin enerji-momentum tensörü ile ifade edilen kovaryant denklemi elde edilir. Burada \square^2 : d'Alembert operatörü, λ çiftlenim sabiti, $T_{M\mu}^{\mu}$ evrendeki toplam maddenin enerji-momentum tensörüdür.

C.H. Brans ve R.H. Dicke GRT'nin alan denklemlerini Mach ilkesini de içeren,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}(T_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}) \quad (2.113)$$

genişletilmiş hali ile, G 'nin ϕ^{-1} olduğu ve gravitasyon alan kaynağı skaler alanı için $\Phi_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörünü de içeren şekliyle ifade etmişlerdir.

(2.112) ve (2.113) denklemleri, λ 'ya bağlı,

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{2}{(2\omega+3)} \quad (2.114)$$

biçiminde yeni bir eşleşim sabiti alındığında,

$$\square^2 \phi = \frac{8\pi}{(2\omega+3)} T_{M\mu}^{\mu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \partial_{\rho} \phi \partial^{\rho} \phi \right) - \frac{1}{\phi} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \square^2 \phi) \quad (2.115)$$

biçimine dönüşür. Burada $\omega \rightarrow \infty$ alındığında bu alan denklemleri,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.116)$$

bilindik Einstein alan denklemlerine indirgenmektedir.

2.7.3. F(R) Gravitasyon Teorisi

F(R) Gravitasyon Teorisi'nde, Einstein-Hilbert aksiyonu madde Lagrangian yoğunluğu ile birlikte;

$$I_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R)}{2\kappa^2} + L_m \right) \quad (2.117)$$

şeklinde verilmektedir [36]. Einstein alan denklemlerinden farklı olarak eğrilik, R'ye lineer bağlı olacak şekilde değil, eğriliğin genel bir fonksiyonu olarak teoriye dahil edilmiştir. Bu aksiyonun metriğe göre varyasyonu ile elde edilen alan denklemleri;

$$R_{\mu\nu} f_R(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \square f_R(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R) = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} \quad (2.118)$$

şeklinde olup $\left[\frac{\partial f}{\partial R} \equiv f_R \right]$, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}) L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.119)$$

biçiminde elde edilir.

İdeal akışkan madde dağılımı için, yoğunluk, basınç ve hal denklemleri (2.117) ifadesi ile,

$$\rho = \frac{3}{\kappa^2} H^2 \quad (2.120)$$

$$p = - \frac{(3H^2 + 2\dot{H})}{\kappa^2} \quad (2.121)$$

$$w_{\text{etkin}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (2.122)$$

$$\gamma = - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (2.123)$$

biçiminde verilir. $[w = p/\rho]$. Burada uzayca düz,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_i (dx^i)^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.124)$$

FRW metriği kullanılarak elde edilecek Friedmann denklemleri ise,

$$0 = -\frac{f(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})f_R(R) - 18(4H^2\dot{H} + H\ddot{H})f_{RR}(R) + \kappa^2\rho \quad (2.125)$$

$$0 = \frac{f(R)}{2} - (3H^2 + \dot{H})f_R(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})f_{RR}(R) + 36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2 f_{RRR}(R) + \kappa^2 p \quad (2.126)$$

şeklinde bulunur [$H = \dot{a}/a$ Hubble parametresi, $R = 12H^2 + 6\dot{H}$].

$F(R)$ için önerilecek farklı tipteki fonksiyon biçimleri ile bu teori, bir çok fenomeni açıklayabilecek kozmolojik uygunluğa sahiptir. Örneğin,

$$f(R_0) = -2\widetilde{R}_0 \quad (2.127)$$

şeklinde, $f(R)$ 'ın şimdiki değeri, küçük bir sabit olarak alındığında ($f'(R_0) \sim 0$), evrenin günümüzdeki ivmelenecek genişleme durumu izah edilebilmektedir [$R_0 \sim (10^{-33} \text{ eV})^2$, evrenin günümüzdeki eğriliği]. Ya da $f(R)$ için,

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = 0 \quad (2.128)$$

koşulu ile düz uzay-zaman (Minkowski) çözümünün var olduğu gösterilebilir. Ayrıca; (2.124) FRW metriği için R eğriliğinin,

$$R \sim (t_s - t)^{-2/2n+3} \quad (2.129)$$

sonlu bir gelecekte ($t_s = t$) dağılım göstermesi ve Hubble oranının,

$$H \sim \frac{h_0}{(t_s - t)^\beta} \quad (2.130)$$

şeklinde yapısal bir teklige sahip olması sebebiyle $R = 6\dot{H} + 12H^2$ skaler eğriliği,

$$R \sim \left\{ \begin{array}{l} \frac{12h_0^2}{(t_s - t)^{2\beta}} \quad , \quad \beta > 1 \\ \frac{6h_0 + 12h_0^2}{(t_s - t)^2} \quad , \quad \beta = 1 \\ \frac{6\beta h_0}{(t_s - t)^{\beta+1}} \quad , \quad \beta < 1 \end{array} \right. \quad (2.131)$$

biçiminde davranmaktadır. Burada, sonlu zaman ve gelecek tekillikleri [37-38] içeren karanlık enerji evren modellerinde $\beta \geq 1$ durumu, tip-I (Big Rip) tekilliğine, $1 > \beta > 0$ durumu tip-III

tekilliğine, $0 > \beta > -1$ tip-II tekilliğine ve $\beta < -1$ ($\beta \neq$ tamsayı) durumu da tip-IV tekilliğine karşılık gelmektedir. tip-I (Big Rip) $t \rightarrow t_s$ için, $a \rightarrow \infty$, $\rho_{\text{etkin}} \rightarrow \infty$ ve $|p_{\text{etkin}}| \rightarrow \infty$ şeklinde olduğunu, tip-II (Sudden Rip) $t \rightarrow t_s$ için, $a \rightarrow a_s$, $\rho_{\text{etkin}} \rightarrow \rho_s$ ve $|p_{\text{etkin}}| \rightarrow \infty$ olduğunu, tip-III $t \rightarrow t_s$ için, $a \rightarrow a_s$, $\rho_{\text{etkin}} \rightarrow \infty$ ve $|p_{\text{etkin}}| \rightarrow \infty$ olduğunu, tip-IV $t \rightarrow t_s$ için, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow 0$, $|p_{\text{etkin}}| \rightarrow 0$ ve H 'nin yüksek mertebeden türevlerinin iraksadığını söylemektedir. Bu durum ayrıca, H 'nin yüksek mertebeden türevlerinin iraksamasına karşın, hem etkin basınç hem de yoğunluğun sonlu bir değere yaklaşacağını gösterir [39].

2.7.4. Mimetik Gravitasyon Teorisi

Mimetik karanlık madde ismiyle öne sürülen bu teorinin temel amacı, Einstein Alan Denklemleri'ni konformal serbestlik derecesinden arındırarak onu kovaryant bir biçimde yeniden formüle etmektir. Bu, fiziksel metrik $g_{\mu\nu}$ 'nü, yardımcı metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ve denklemden kendini birinci derece türev biçimiyle gösteren ϕ skaler alanı (mimetik alan) ile yeniden parametrize etme yoluyla yapılmıştır. Fakat, buradaki ϕ alanı, Brans-Dicke tipi disformal skaler-tensör gravitasyon teorilerinin önerdiği dinamiksel skaler alandan farklıdır. Fiziksel metriğin konformal dönüşüm altındaki invaryantlığı sebebiyle bu teorideki ϕ skaler alanı, integrasyon sabiti olarak beliren ölçek faktörüne eşdeğerdir ve yeni bir dinamiksel serbestlik derecesi değildir [40-42].

Fiziksel metrik $g_{\mu\nu}$, yardımcı metrik ve skaler alanın,

$$g_{\mu\nu} = -(\tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \tilde{g}_{\mu\nu} = P \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (2.132)$$

fonksiyonu olarak verilir. Bu koşulla, fiziksel metrik $g_{\mu\nu}$, yardımcı metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 'nün, $\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(t, x) \tilde{g}_{\mu\nu}$ biçimindeki konformal dönüşümü altında invaryant kalmaktadır [$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ şeklindedir ve $\Omega(t, x)$ uzay-zamanın bir fonksiyonudur]. Einstein-Hilbert aksiyonu (2.132) ifadesi göz önünde bulundurulduğunda,

$$I = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)} \left[R(g_{\mu\nu}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)) + L_m \right] \quad (2.133)$$

biçiminde yazılır. [$8\pi G=1$, L_m : madde Lagrangieni, $\sqrt{-g}$: fiziksel metrik $g'_{\mu\nu}$ 'nün izi]. (2.133) aksiyonu, açık bir şekilde $g_{\mu\nu}$ fiziksel metriğe bağlı olması sebebiyle, $\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(t, x) \tilde{g}_{\mu\nu}$ konformal dönüşümü altında invaryanttır. Bu ifadenin $g_{\mu\nu}$ 'ye göre varyasyonu,

$$(G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}) + (G - T) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0 \quad (2.134)$$

$$\nabla^k [(G - T) \partial_k \phi] = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k [\sqrt{-g} (G - T) g^{k\sigma} \partial_\sigma \phi] = 0 \quad (2.135)$$

biçiminde alan denklemleri verir. Burada, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ Einstein tensörü, $T_{\mu\nu}$ madde-enerji tensörü, $\nabla^k = g^{k\sigma} \nabla_\sigma$ kovaryant türevi ifade eder. $\tilde{g}_{\mu\nu}$ yardımcı metriği bu denklemlerde, $g_{\mu\nu}$ fiziksel metriği aracılığı ile bulunmasına rağmen, ϕ skaler alanı açık bir şekilde kendini göstermektedir. (2.132) ifadesi metriğin ortogonalliğinden dolayı,

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = -1 \quad (2.136)$$

şeklinde bir kısıtlayıcı doğurur.

(2.134) ifadesinin izi,

$$(G + T)(1 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) = 0 \quad (2.137)$$

biçiminde bir eşitlik verir ve $G \neq T$ durumunda bile (2.136) koşulunu sağlar. Aslında, gravitasyonel alan için yazılan denklemler $T_{\mu\nu} = 0$ durumunda bile pek de kolay olmayan çözümlere sahiptir ve (2.135) ve (2.136) denklemleri ϕ için çözüldüklerinde (G-T)'yi belirlemektedir.

ϕ skaler alanı, ϕ ile ifade edilmiş aksiyona [43] sahip gravitasyonel alandaki birim kütleli rölativistik bir parçacık için Hamilton-Jacobi denklemlerini sağlamaktadır. Bu sebeple gravitonlar olarak ifade edilen gravitasyonel alan, fiziksel metriğin bir konformal faktörü ile ϕ skaler alanı olmak üzere iki eksensel serbestlik derecesine ihtiyaç duyar; fakat sistem konformal invarianslık ile kısıtlanmıştır.

(2.134) ifadesi, $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}$ biçiminde yazılarak yeni bir,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -(G - T) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (2.138)$$

enerji-momentum tensörü tanımlanır. Bu (2.138) ifadesi, ideal akışkan için yazılan,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.139)$$

enerji-momentum tensörü ifadesinde, $p=0$ ve $\rho = -(G - T)$ biçiminde alınmasıyla elde edilir. [u_μ ; $u_\mu u^\mu = -1$ normalizasyon koşulunu sağlayan 4'lü hız vektörü, ρ : enerji yoğunluğu, p : basınç] (2.139) ifadesi, $\partial_\mu \phi$ (mimetik alanın gradyenti)'nin u_μ dördümlü hız vektörünün bileşenleri olduğunu göstermektedir. ϕ ekstra serbestlik derecesi ise (G-T) enerji yoğunluğuna sahip 'toz' için hız potansiyeli görevi görür. [madde olmadığı durumlarda enerji yoğunluğu (-R)'dir.]

FLRW evreni için verilen metrik ifadesi,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (2.140)$$

alındığında, $\phi(x^\mu) = \tau$ sabit hiperyüzeyine benzer bir şekilde, sabit zaman yüzeyi seçilir ise denklem (2.136)'in sağlandığı ve mimetik alanın FLRW metriği üzerinde zaman rolü oynadığı anlaşılır. (2.135) ifadesindeki mimetik enerji-momentum tensörünün enerji yoğunluğu ile uyumlu olan (G - T) değeri, FLRW evrenindeki ölçek faktörünün küpü ile ters orantılıdır [(G-T) $\sim 1/a^3$]. Bu durum FLRW evreni için yazılan, ω sabit hal parametresine bağlı, $a^{-3(\omega+1)}$ enerji yoğunluğu ifadesi ile uyumludur. Çünkü, 'toz' (mimetik alan) hal denklemi için $\omega = 0$ alındığında enerji yoğunluğu a^{-3} değerini verir.

Gravitasyonun konformal serbestlik derecesi kozmolojik ölçüde karanlık maddeye benzer davranması sebebiyle, bu teorinin adı mimetik karanlık madde olarak konulmuştur.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. F(R) GRAVİTASYON TEORİSİ ALAN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

F(R) Gravitasyon Teorisi'nin 4-boyutlu uzay-zamanda aksiyonu,

$$I = \frac{1}{16} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + \int L_m \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

şeklinde verilir [44]. R, Riemannian uzay-zamanın Ricci eğrilik skaleri, L_m ise etkin madde Lagrangianini ifade etmektedir. $g_{\mu\nu}$ metriği dinamiksel niceliktir ve metriğe göre (3.1) ifadesinin varyasyonu,

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \delta[f(R) \sqrt{-g}] d^4x + \int \delta(L_m \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \int [f(R) \delta \sqrt{-g} + \delta(R) \sqrt{-g}] d^4x + \int (L_m \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta L_m) d^4x \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçimindedir. Burada varyasyon için kullanılan δR ve $\delta \sqrt{-g}$ için,

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \quad (3.3)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

eşitlikleri yazılmaktadır. ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$: Christoffel Sembolü). $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ için ise,

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \quad (3.5)$$

kullanıldığında (3.3) ifadesi,

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

şeklinde, (3.2) ifadesindeki aksiyonun toplam varyasyonu da,

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta g^{\mu\nu} \left\{ f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R) + \right. \right. \\ &\left. \left. L_m \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) + \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

biçiminde bulunur (\square : D'Alembert operatörü, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$). Burada,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.8)$$

biçiminde $T_{\mu\nu}$ madde enerji-momentum tensörü tanımlandığında, (3.7) varyasyonu,

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

biçimini alır. (3.9) denkleminde, $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ biçimindeki Einstein tensörünü elde etmek için eşitliğin her iki tarafına, $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}Rf_R$ terimi eklenirse,

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Rf_R = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Rf_R \quad (3.10)$$

$$f_R(R) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - Rf_R) - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) \quad (3.11)$$

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = \kappa^2 \frac{T_{\mu\nu}^m}{f_R(R)} + \kappa^2 \left\{ \frac{1}{\kappa^2 f_R(R)} \left(\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - Rf_R) \right] - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) \right) \right\} \quad (3.12)$$

biçiminde bir ifade elde edilir ($T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}^m$). burada,

$$T_{\mu\nu}^M = \frac{T_{\mu\nu}^m}{f_R(R)} \quad (3.13)$$

ve

$$T_{\mu\nu}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R(R)} \left\{ \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - Rf_R) \right] - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R) \right\} \quad (3.14)$$

şeklinde, etkin enerji-momentum tensörleri tanımlanırsa (3.9) ile verilen alan denklemleri,

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 (T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}^t \quad (3.15)$$

şeklinde bilindik Einstein Alan Denklemleri formunda yazılmış olur. Burada; $T_{\mu\nu}^M$, $T_{\mu\nu}^m$ madde-enerji momentum tensörüne bağlanan bir etkin madde enerji-momentum tensörünü ve $T_{\mu\nu}^R$ de $F(R)$ 'den kaynaklanan bir etkin geometri enerji-momentum tensörünü temsil etmektedir ve bunun, “eğrilik akışkanı” olarak da adlandırılabilen matematiksel bir akışkanı temsil ettiği düşünülebilir. $T_{\mu\nu}^t$ ise,

$$T_{\mu\nu}^t = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^R \quad (3.16)$$

şeklinde olup toplam etkin enerji-momentum tensörünü göstermektedir.

(3.9) ifadesinin izi alınarak elde edilen bir diğer ifade de,

$$(3\Box + R)f_R(R) - 2f(R) = \kappa^2 T \quad (3.17)$$

şeklinde verilir.

F(R) Gravitasyon Teorisi'nde enerjinin korunduğu, (3.9)'de verilen alan denkleminin,

$$\nabla^\mu \left[f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R) \right] = 0 = \nabla^\mu T_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

biçiminde kovaryant diverjansı alınarak gösterilebilir.

Eğer uzayca homojen-izotropik düz bir evreni tasvir eden,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.19)$$

FLRW metriği ile ρ yoğunluklu ve p etkin basınca sahip madde alanı ile dolu bir evren düşünülürse ($T=3p-\rho$), F(R) Gravitasyon Teorisi'nin alan denklemlerinin çözümleri (I. ve II. Friedmann Denklemleri),

$$H^2 = \frac{1}{3f_R(R)} \left[\kappa^2 \rho + \frac{1}{2} (Rf_R(R) - f(R)) - 3Hf_{RR}(R) \dot{R} \right] \quad (3.20)$$

$$3H^2 + \dot{H} = -\frac{1}{f_R(R)} \left[2H\dot{R}f_{RR}(R) + \dot{R}^2 f_{RRR}(R) + \ddot{R}f_{RR}(R) - \frac{f(R)}{2} - \kappa^2 \rho \right] \quad (3.21)$$

şeklinde bulunur [H: Hubble parametresi= \dot{a}/a ve nokta türevler t 'ye göredir]. Bu metrikte sırasıyla R eğrilik skaleri ve $R_{\mu\nu}$ Ricci eğrilik tensörleri için,

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu), \quad R_{\mu\nu} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 \ (\mu = \nu) \quad (3.23)$$

ifadeleri yazılmaktadır.

(3.9) denkleminin çözümü olan hareket denklemlerinin eldesi Lagrange metodu ile de yapılabilir. F(R) Gravitasyon Teorisi için yazılacak,

$$L(a, R, \dot{a}, \dot{R}) = a^3(f(R) - Rf_R(R)) - 6 \left(a\dot{a}^2 f_R(R) + a^2 \dot{a}\dot{R} f_{RR}(R) \right) - p(a)a^3 \quad (3.24)$$

biçimindeki Lagrange yoğunluk fonksiyonu kullanılarak her bir bileşen için hesaplanacak (2.19) ifadesi ile ($2\kappa^2 = 1$, $L_m = -p(a)$),

$$6\ddot{R}f_{RR}(R) = -3f(R) + 3Rf_R(R) - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}f_R(R) - 12\frac{\dot{a}\dot{R}}{a}f_{RR}(R) + 3p(a) - 6\dot{R}^2f_{RRR}(R) - 12\frac{\ddot{a}}{a}f_R(R) \quad (3.25)$$

eşitliği ve (3.22) denkleminin aynısı elde edilir. Bu denklemler ile F(R) Gravitasyon Teorisi'nin Noether simetrisine uyduğu gösterilebilir.

3.2. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİ ALAN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Einstein alan denklemleri, güneş sistemi gibi düşük enerji (zayıf gravitasyon alan) bölgelerinde meydana gelen olayların izahında çok iyi sonuçlar veriyor olmasına rağmen, evrenin başlangıç dönemi, karanlık enerji, karanlık madde gibi, açıklanmasında yüksek mertebeden eğrilikler gerektiren birçok fenomene açıklık getirmekte yetersiz kalmaktadır. Evrenin genel bir izahının yapılabilmesi amacı ile Einstein Alan Denklemlerinin madde ve/veya geometri ile ilgili kısımlarına belirli kurallar çerçevesinde düzeltmeler ya da eklemeler yapan teoriler arasında bulunan Mimetik Gravitasyon Teorisi'nin özellikle karanlık maddeyi açıklayabildiği düşünülmektedir. Karanlık maddenin kendini bir integrasyon sabiti olarak gösterdiği bu teori 'ghost' barındırmamaktadır; ayrıca, konformal invaryant bir teoridir [45].

Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi'nin, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ yardımcı metriğinin konformal dönüşümü altında invaryant kalan $g_{\mu\nu}$ fiziksel metriğinin, (2.71) ifadesindeki gibi $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metriği ile ϕ skaler alanı cinsinden yazılmasıyla ve R eğrilik skalerinin F(R) biçiminde rastgele genel bir fonksiyonunun alınmasıyla elde edilen aksiyonu,

$$I = \int d^4x \sqrt{-g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)} \left\{ \frac{f[g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)]}{2\kappa^2} + L_m \right\} \quad (3.26)$$

biçiminde verilir.

F(R) Gravitasyon Teorisi'nde yapıldığı gibi (3.26) aksiyonunun $\tilde{g}_{\mu\nu}$ yardımcı metriğe göre varyasyonu,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \\ & \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\mu} \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\nu} f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \\ & g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} \square(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \kappa^2 T_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi \left[2f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \\ & \left. R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - 3 \square(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu}) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \kappa^2 T \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

biçiminde, ϕ skaler alana göre varyasyonu ise,

$$\begin{aligned} & \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})^{\mu} \left\{ \partial_{\mu} \Phi \left[2f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \right. \\ & \left. \left. 3 \square(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu}) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \kappa^2 T \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde alan denklemleri vermektedir. [$f_R \equiv \partial f / \partial R$, ∇_{μ} ve $\square = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$ ise $g_{\mu\nu}$ 'ye göre türevlerdir]. Burada $T_{\mu\nu} \left[T = (g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi))^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right]$ maddenin enerji-momentum tensörüdür ve yine (3.8) ifadesi ile verilmektedir. Burada, (3.9)'daki gibi bir terim eklenerek yine etkin enerji-momentum yaklaşımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} R f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \\ & \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \left[g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} \square(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) - \right. \\ & \left. \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\mu} \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\nu} \right] f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} R f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \\ & \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi \left[2f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \\ & \left. 3 \square(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu}) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \kappa^2 T \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

buradan,

$$\begin{aligned}
& \left(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} R \right) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \\
& \left[g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} \square(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) - \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\mu} \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\nu} \right] f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \\
& \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} R f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi \left[2f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \\
& \left. 3 \square(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu}) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) + \kappa^2 T \right] \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} = & \kappa^2 \frac{T_{\mu\nu}}{f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi))} + \kappa^2 \left[\frac{1}{\kappa^2 f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi))} \left\{ \frac{1}{2} g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} \left[f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. R f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) \right] - \left[g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu} \square(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) - \right. \right. \\
& \left. \left. \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\mu} \nabla(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu})_{\nu} \right] f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) \right\} \right] + \\
& \kappa^2 \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi \left\{ \frac{1}{\kappa^2 f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi))} \left(2f(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) - \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \square(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)_{\mu\nu}) f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)) \right) \right\} + \kappa^2 \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi \frac{T}{f_R(R(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi))} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

4. BULGULAR

4.1. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİNİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ

Mimetik F(R) Gravitasyon Teorisi için (3.27) ile verilen alan denklemleri (3.19) FLRW metriği kullanılarak bulunabilir. Bunun yanında (3.26) denklemleri ile verilen teorinin aksiyonu, (2.75) kısıtlayıcısına sahip olması sebebiyle Lagrange çarpanlar metodu kullanılarak,

$$L = \int d^4x \sqrt{-g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)} \left[\frac{f[g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)]}{2\kappa^2} - V(\Phi) - \lambda(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 1) + L_m \right] \quad (4.1)$$

biçiminde yeniden yazılır ($\lambda=\lambda(t)$, Lagrange çarpanı, $V(\Phi)$ potansiyel terimi ve $p = p(a, \dot{a}, \Phi)$ basıncına sahip akışkan alınmıştır). Bu aksiyondan hareketle, teorinin noktasal Lagrangian yoğunluk fonksiyonu da,

$$L(a, R, \Phi, \dot{a}, \dot{R}, \dot{\Phi}) = a^3 (f(R) - R f_R(R)) - 6 \left(a \dot{a}^2 f_R(R) + a^2 \dot{a} \dot{R} f_{RR}(R) \right) - p(a, \dot{a}, \Phi) a^3 - V(\Phi) a^3 - \lambda(1 - \dot{\Phi}^2) a^3 \quad (4.2)$$

şeklinde verilir. Buradan teorinin hareket denklemleri de

$$6\ddot{R}f_{RR}(R) = -6\dot{R}^2 f_{RRR}(R) - a\ddot{a}p_{a\dot{a}} - \dot{a}ap_{a\dot{a}} - ap_{\dot{a}t} - 3\dot{a}p_{\dot{a}} + ap_a - f_R(R) \left(-3R + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 12\frac{\ddot{a}}{a} - 3 \left(f(R) - \lambda + \lambda\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \right) - p \right) - 12\frac{\dot{a}\dot{R}}{a} \quad (4.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{6} \left[R - 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

$$\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{3\dot{a}}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{V_\Phi}{\lambda} = 0 \quad (4.5)$$

Biçiminde elde edilir. (4.4) ifadesi FLRW metriği için Ricci skalerinin standart denklemdir. (4.5) ifadesi $\lambda=\lambda(t)=\text{sabit}$ alındığında Klein-Gordon denklemine indirgenir. (4.3) ifadesi ise $p=p(a)$, $\lambda=1$, $\Phi(t)=t$ ve $V(\Phi) = 0$ alınması ile F(R) Gravitasyon Teorisi'nin hareket denklemlerine dönüşür. Bu denklem sistemleri çözülürken, bölüm (2.5)'teki gibi, non-otonom dinamik bir \vec{x} konum vektörü için verilen diferansiyel denklem için,

$$\dot{\vec{x}} = f(t, \vec{x}) \quad (4.6)$$

$$f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (4.7)$$

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_2 < 0\} \quad (4.8)$$

durumu düşünülür.

Denge noktası $x=0$ ise (ancak ve ancak) bir t anı için,

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.9)$$

cebirsel denklemi çözülebilir.

Bu vektör için, sonlu bir \mathcal{M} tanım kümesi üzerinde, t 'nin sınırlı bir fonksiyonu olan $J \equiv \left| \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right|$ tanımlanır ve bu,

$$\|f(t, \vec{x}) - f(t, \vec{y})\| \leq L \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \|\vec{x}\|_p = \left(\sum_i^p |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (4.10)$$

Lipschitz'z lemmasına uyar.

Burada, denge noktası etrafındaki bir sistemin asimtotik kararlılığı için iki teorem vardır; denklem sistemi,

$$(\dot{\delta \vec{x}}) = A(t) \delta \vec{x} \quad (4.11)$$

biçiminde, denge noktası etrafında lineerize edilir (teorem I) ve,

$$f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (4.12)$$

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_2 < r\} \quad (4.13)$$

koşulunu sağlayan, $\dot{\vec{x}} = f(t, \vec{x})$ sistemi için $x=0$ denge noktası düşünülerek,

$$A \equiv \left. \frac{\partial f(t, \vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=0} \quad (4.14)$$

biçiminde zamana bağlı fonksiyon tanımlanır (teorem II).

Böylece, denklem sistemi, (4.11)'daki lineerize sistemin üstel kararlı denge noktasına sahiptir denir. (4.3), (4.4) ve (4.5) denklem sistemi çözümü, dinamik sistem için verilen teorem I ve teorem II göz önünde bulundurulduğunda,

$$6\ddot{R}f_{RR}(R) = -6\dot{R}^2 f_{RRR}(R) + ap_a - f_R(R) \left(-3R + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 12\frac{\ddot{a}}{a} - 3 \left(f(R) - \lambda + \lambda\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) - p \right) - 12\frac{\dot{a}\ddot{R}}{a} \quad (4.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{6} \left[R - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \quad (4.16)$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{3\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{V_\phi}{\lambda} = 0 \quad (4.17)$$

denklem sistemine indirgenir ve bu denklem sistemi boyutsuz 'zaman' bileşenine göre yeniden yazıldığında ve boyutsuz $x^A = \{h = H/H_0, r = R/12H_0^2, X = \dot{r}, \zeta = \log\lambda\}$ parametreleri kullanıldığında,

$$\dot{h} = 2 \left(\frac{r}{h} - h \right) \quad (4.18)$$

$$\dot{r} = X \quad (4.19)$$

$$\dot{X} = -\frac{2X}{h} \left(\frac{r}{h} - h + \frac{6H_0 f_{rrr}}{f_{rr}} \right) - \frac{f_r}{144H_0^4 f_{rr}} \left[-\frac{6r}{h^2} + \frac{4}{h} \left(\frac{r}{h} - h \right) - \frac{3}{2H_0^2 h^2} (f - V(N) - p(N)) \right] - \frac{X}{72H_0^2 f_{rr}} \quad (4.20)$$

$$\dot{\zeta} = -3 - \frac{v(N) e^{-\zeta}}{2H_0 h} \quad (4.21)$$

biçiminde non-otonom denklemlere dönüşürler ($V(\phi) = V(N)$). Kararlı denge noktaları ise,

$$f(r_c) = V(N_c) + p(N_c) = 0, \quad X_c = 0, \quad r_c = h_c^2, \quad \frac{v(N_c) e^{-\zeta}}{2H_0 h_c} = -3 \quad (4.22)$$

şeklindedir. Burada kritik noktalar N'nin fonksiyonu olması sebebiyle, zamana göre hareket etmektedir.

Lineerize bir sistemin Jacobiyesi,

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

şeklindedir. Burada a_μ , d_μ ve c_μ katsayıları,

$$a_\mu = \frac{\partial f_1}{\partial q^\mu}, \quad q^\mu \equiv \{h, r\} \quad (4.24)$$

$$c_\mu = \frac{\partial f_3}{\partial q^\mu}, \quad q^\mu \equiv \{h, r, X\} \quad (4.25)$$

$$d_\mu = \frac{\partial f_4}{\partial q^\mu}, \quad q^\mu \equiv \{h, \zeta\} \quad (4.26)$$

ve

$$f_1 = 2 \left(\frac{r}{h} - h \right) \quad (4.27)$$

$$f_3 = -\frac{2X}{h} \left(\frac{r}{h} - h + \frac{6H_0 f_{rrr}}{f_{rr}} \right) - \frac{f_r}{144H_0^4 f_{rr}} \left[-\frac{6r}{h^2} + \frac{4}{h} \left(\frac{r}{h} - h \right) - \frac{3}{2H_0^2 h^2} (f - V(N) - p(N)) \right] - \frac{X}{72H_0^2 f_{rr}} \quad (4.28)$$

$$f_4 = -3 - \frac{v(N) e^{-\zeta}}{2H_0 h} \quad (4.29)$$

biçiminde alınmıştır ve karakteristik denklem ile λ_μ özdeğerleri sırasıyla,

$$\lambda^4 + (-d_4 - c_3 - a_1)\lambda^3 + (d_4 c_3 + d_4 a_1 - c_2 + c_3 a_1)\lambda^2 + (d_4 c_2 - d_4 c_3 a_1 - c_1 a_2 + c_2 a_1)\lambda - d_4(-c_1 a_2 + c_2 a_1) = 0 \quad (4.30)$$

$$\lambda_1 = d_4 \quad (4.31)$$

$$\lambda_2 = \frac{\Delta^2 + 12c_2 - 4c_3 a_1 + 4c_3^2 + 4a_1^2 + 2c_3 \Delta + 2a_1 \Delta}{6\Delta} \quad (4.32)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{12}\chi - \frac{c_2}{\chi} + \frac{1}{3}\frac{c_3 a_1}{\chi} - \frac{1}{3}\frac{c_3^2}{\chi} - \frac{1}{3}\frac{a_1^2}{\chi} + \frac{1}{3}c_3 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{12}i\sqrt{3}\chi - \frac{i\sqrt{3}c_2}{\chi} + \frac{\frac{1}{3}i\sqrt{3}c_3 a_1}{\chi} - \frac{\frac{1}{3}i\sqrt{3}c_3^2}{\chi} - \frac{\frac{1}{3}i\sqrt{3}a_1^2}{\chi} \quad (4.33)$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3^* \quad (4.34)$$

şeklinde gösterilir. X ile Δ için,

$$\Delta \equiv 12E + 8a_1^3 - 12c_3a_1^2 + (-12c_3^2 - 72c_2)a_1 + 36c_2c_3 + 8c_3^3 + 108c_1a_2 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} E^2 \equiv & 54c_2c_3c_1a_2 - 108c_2a_1c_1a_2 - 18c_3^2a_1c_1a_2 - 18c_3a_1^2c_1a_2 - 12c_2^3 + 81c_1^2a_2^2 \\ & - 3c_2^2c_3^2 + 24c_2^2a_1^2 - 12c_2a_1^4 + 6a_3^3a_1^3 - 3c_3^4a_1^2 - 3c_3^2a_1^4 + 12c_1a_2c_3^3 \\ & + 12c_1a_2a_1^3 - 24c_2^2c_3a_1 - 6c_3^2c_2a_1^2 - 6c_2a_1c_3^3 + 24c_2c_2a_1^3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\chi^3 = 36c_2c_3 - 72c_2a_1 - 12c_3^2a_1 - 12c_3a_1^2 + 108c_1a_2 + 8c_3^3 + 8a_1^3 + 12E^2 \quad (4.37)$$

ifadeleri alınmıştır. Kararlı çözümler için d_4

$$d_4 = -3 + \frac{v(N_c) e^{-\zeta}}{2H_0 h_c} < 0 \quad (4.38)$$

şeklinde alınmalıdır. Burada sabit (kararlı) manifold de-Sitter uzay-zamanı ile tanımlanmakta olup; böylelikle, $N > N_c$ zaman aralığı için verilen model de kararlı de-Sitter çözümlerine sahip olmaktadır.

4.2. MİMETİK F(R) GRAVİTASYON TEORİSİNDE NOETHER SİMETRİ

Noether simetri yaklaşımının kullanımı, teoriye ait birçok bilgi vermektedir. Özellikle $V(\phi)$ potansiyel fonksiyonu için önerilebilecek farklı tipteki yapıların araştırılmasında kullanışlı bir yol sunmaktadır. (2.75) ifadesinin kısıtlayıcı olması sebebiyle, potansiyel zamanın kapalı bir fonksiyonudur; yani dinamik sistem Lagrangiani zamana bağlıdır.

Denklem (2.25)'i, denklem (4.2) mimetik F(R) Lagrangiani için,

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial L}{\partial R} + \gamma \frac{\partial L}{\partial \phi} + \left(\dot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} + \dot{R} \frac{\partial \alpha}{\partial R} + \dot{\phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} + \left(\dot{\alpha} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \dot{R} \frac{\partial \beta}{\partial R} + \dot{\phi} \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} + \left(\dot{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. \dot{R} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \dot{\phi} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

biçiminde yazılır ($\lambda = \lambda(t)$, $p = p(a)$).

Bu bize,

$$-3\alpha R f_R(R) - \beta \alpha R f_{RR}(R) + 3\alpha f(R) - 3\alpha \lambda - 3\alpha V(\phi) - \gamma \alpha V_\phi - \alpha a \dot{p}(a) - 3\alpha p \quad (4.40)$$

$$3\alpha + 2\alpha \gamma_\phi = 0 \quad (4.41)$$

$$2\alpha_a a f_R(R) + \beta a f_{RR}(R) + a^2 \beta_a f_{RR}(R) + \alpha f_R(R) = 0 \quad (4.42)$$

$$\alpha_R f_{RR}(R) = 0 \quad (4.43)$$

$$\lambda a^2 \gamma_a - 6\alpha_\phi f_R(R) - 3a\beta_\phi f_{RR}(R) = 0 \quad (4.44)$$

$$2a\alpha_R f_R(R) + 2a\alpha f_{RR}(R) + \beta a^2 f_{RRR}(R) + a^2 \alpha_a f_{RR}(R) + a^2 \beta_R f_{RR}(R) = 0 \quad (4.45)$$

$$\lambda a \gamma_R - 3\alpha_\phi f_{RR}(R) = 0 \quad (4.46)$$

diferansiyel denklem sistemini verir (α , β ve γ için lineer bir denklem sistemidir ve $\{\dot{\alpha}^2, \dot{R}^2, \dot{\phi}^2, \dot{\alpha}\dot{R}, \dot{\alpha}\dot{\phi}, \dot{\phi}\dot{R}\}$ terimlerinin katsayıları sıfır olarak alınmıştır). Burada farklı $F(R)$ fonksiyon önerileri verilerek çeşitli modeller için çözümler ve modelin sahip olacağı korunum yasaları elde edilebilir [46].

Örneğin; GRT'ye karşılık gelecek $F(R)=R+2\Lambda$ durumu için,

$$V(\phi) = C_4 \quad (4.47)$$

$$\alpha(a, R, \phi) = \frac{1}{3} a^{1+c_1} C_1 \sqrt{c_1 \lambda} \left(C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) \right) \quad (4.48)$$

$$\beta(a, R, \phi) = -\frac{(2c_1+3)C_1 a^{c_1} \sqrt{c_1 \lambda}}{3R} \left(C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) \right) \quad (4.49)$$

$$\gamma(a, R, \phi) = C_1 a^{c_1} \left(C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) + C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) \right) \quad (4.50)$$

$$p(a) = 2\Lambda - \lambda - C_4 + a^3 C_5 \quad (4.51)$$

çözümleri elde edilmektedir (sabit potansiyel biçimi). Noether korunum yükü ise;

$$Q = -4\dot{a} a^{1+c_1} C_1 \sqrt{c_1 \lambda} \left(C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) \right) + 2\lambda C_1 a^{3+c_1} \left(C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) + C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \phi\right) \right) \quad (4.52)$$

biçimindedir. $\phi = \phi(t)$ olması sebebiyle, integrasyon bize ölçek faktörü $a(t)$ 'yi verir ve $Q=0$ için ölçek faktörünün tam çözümü,

$$a(t) = a_0(C_3 \sin(wt) - C_2 \cos(wt))^n, \quad n = \frac{1}{c_1}, \quad w = \frac{\sqrt{c_1 \lambda}}{2} \quad (4.53)$$

şeklinde olur. Eğer, $C_2 = 0, w \rightarrow iw, n = 3/2$ olursa, bu durum Λ CDM modelinde, evrenin son dönemine karşılık gelir.

(4.53)'de verilen ölçek faktörü için, Hubble parametresi (H) ile onun birinci ve ikinci türevleri sırasıyla,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = n\omega \left[\frac{C_3 + C_2 \tan(\omega t)}{C_3 \tan(\omega t) - C_2} \right] \quad (4.54)$$

$$\dot{H} = -n\omega^2 [((C_2)^2 + (C_3)^2) \sec^2(\omega t) (C_3 \tan(\omega t) - C_2)^2] \quad (4.55)$$

$$\ddot{H} = \frac{2n\omega^3 ((C_2)^2 + (C_3)^2) (C_2 \sin(\omega t) + C_3 \cos(\omega t))}{(C_3)^3 \sin^3(\omega t) - (C_2)^3 \cos^3(\omega t) - 3C_2 C_3 (C_3 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))} \quad (4.56)$$

şeklindedir. Burada $H(t_s) = \infty$ için Hubble parametresinin yüksek türevlerinin,

$$\lim_{t \rightarrow t_s} H^n \rightarrow \infty, \quad n=2 \quad (4.57)$$

biçiminde ıraksadığı ve sonlu zamanın,

$$t_2^n = n\pi \pm \arctan \left[\frac{C_{2,3}}{(C_2)^2 + (C_3)^2} \right], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.58)$$

şeklinde olduğu durumlarda çözümler elde edilmektedir. Bu sebeple, (4.53) ifadesi, (2.7.3) bölümünde verilen tip-IV tekilliğine sahip, titreşimli (salınımlı) bir çözümdür ve ölçek faktörü $t \rightarrow t_s$ durumunda sonlu kalmaktadır. Ayrıca tip-IV tekilliğinde, $|p_{\text{etkin}}| \rightarrow 0$ yani;

$$\lim_{t \rightarrow t_s} p(a) = \lim_{a \rightarrow a_s} (2\Lambda - \lambda - C_4 + a^3 C_5) = 0 \quad (4.59)$$

olması sebebiyle, sonlu bir basınç,

$$2\Lambda - \lambda - C_4 + a^3 C_5 = 0 \quad (4.60)$$

ve kozmolojik sabit Λ ,

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\lambda + C_4 - a^3 C_5) \quad (4.61)$$

ölçeklenmiş (calibrated) şekilde elde edilir.

4.2.1. Kuadratik Potansiyel Çözümü

Değiştirilmiş Genel Rölativite Teorileri arasında F(R) Gravitasyon Teorisi'nde, $f(R)=R+2\Lambda+h(R)$ biçiminde, eğrilik için genel bir fonksiyon alınabilir. Çeşitli potansiyel formları, bu teoride farklı modeller verecektir. Örneğin, (4.39)-(4.46) denklem sisteminin bir çözümü olan ağır (massive) skaler için,

$$V(\phi) = C_5 + C_6 \left(\phi + \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \quad (4.62)$$

kuadratik potansiyeli ve

$$\alpha(a, \phi) = -\frac{2}{3} a C_1 \quad (4.63)$$

$$\beta(a, R, \phi) = 2 \frac{C_1}{R} \quad (4.64)$$

$$\gamma(a, R, \phi) = C_1 \phi + C_2 \quad (4.65)$$

$$h(R) = C_3 R + C_4 \quad (4.66)$$

$$p(a) = -C_5 + 2\Lambda + C_4 - \lambda + a^3 C_7 \quad (4.67)$$

katsayıları alınırsa, evrenin Enflasyon Dönemi'ne (Hibrit Enflasyon Dönemi) karşılık gelen sonuç elde edilir. Burada, $C_2 = 0, C_5 = V_0, C_6 = m^2/2$ alındığında potansiyel,

$$V(\phi) = V_0 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (4.68)$$

formunda olur ve bu vakum enerjisidir. Sistem için hareket sabiti,

$$\Sigma^* = 8C_1 C_3 a^2 \dot{a} + 2\lambda a^3 (C_1 t + C_2) \quad (4.69)$$

şeklindedir. $\Sigma^* = 0$ alındığında ölçek faktörü,

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{\lambda t(C_1 t + 2C_2)}{8C_1 C_3}} \quad (4.70)$$

şeklinde olur. Bu model, ölçek faktörünün $a(t) \sim e^{\alpha t^2}$ biçiminde olduğu sıçrayan evren (the bouncing universe) [47-48] modelidir.

Hubble parametresi ve yavaşlama (deceleration) parametresi,

$$H = -\frac{\lambda C_2^2}{4C_3 C_1^2} t, \quad q = -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) = -\left(1 - \frac{4C_3 C_1^2}{\lambda C_2^2 t^2}\right) \quad (4.71)$$

şeklindedir ve ivmelenerek genişleme durumu için,

$$-\frac{\lambda C_2^2}{4C_3 C_1^2} \left(1 - \frac{\lambda C_2^2 t^2}{4C_3 C_1^2}\right) > 0 \quad (4.72)$$

olmalıdır.

Eğer,

$$\frac{\lambda}{C_3} > 0 \quad (4.73)$$

ise, $t \in \left(-\infty, \left|\frac{4C_3}{\lambda}\right|^{1/2} \frac{C_1}{C_2}\right)$ zaman aralığı için bir ivmelenme,

$$\frac{\lambda}{C_3} < 0 \quad (4.74)$$

için ise, $t \in \left(\left|\frac{4C_3}{\lambda}\right|^{1/2} \frac{C_1}{C_2}, \infty\right)$ zaman aralığı için bir ivmelenme elde edilir.

4.2.2. Üstel Potansiyel Çözümü

Hiperbolik enflasyon durumu için olası çözümler,

$$V(\phi) = C_6 + 2C_7 \cosh\left(\frac{2(\phi+C_2)}{C_1}\right) \quad (4.75)$$

$$\alpha(a, \phi) = \frac{2}{3C_1} ia^{1+c_4} \sqrt{C_3} \sinh\left(\frac{2(\phi+C_2)}{C_1}\right) \quad (4.76)$$

$$\beta(a, R, \phi) = -2i \frac{(2c_4+3)a^{c_4} \sqrt{C_3}}{3RC_1} \sinh\left(\frac{2(\phi+C_2)}{C_1}\right) \quad (4.77)$$

$$\gamma(a, R, \phi) = -ia^{c_4} \sqrt{C_3} \cosh\left(\frac{2(\phi+C_2)}{C_1}\right) \quad (4.78)$$

$$p(a) = -(\lambda + C_6 + 6\Lambda + 6C_7 + 3C_5) + C_8 a^3 \quad (4.79)$$

$$h(R) = -\left(\frac{1}{4}\lambda C_4 C_1^2 + 1\right)R + C_5 \quad (4.80)$$

şeklindedir (bütün fonksiyonlar reel olması gerektiği için $C_3 = -M^2$ 'dir, M serbest parametre).

İlgili korunum yükü ise,

$$Q_0 = a^{2+C_4} \left[\dot{a} \frac{2(4-C_4 C_1^2)M}{C_1} \sinh\left(\frac{2(t+C_2)}{C_1}\right) + 2M\lambda a \cosh\left(\frac{2(t+C_2)}{C_1}\right) \right] \quad (4.81)$$

şeklindedir. Özellikle $Q_0 = 0$ olduğunda (4.81) ifadesi tamamen integre edilebilir olmaktadır.

Bu durumda ölçek faktörü,

$$a(t) = C_1 \left[\sinh\left(\frac{2(t+C_2)}{C_1}\right) \right]^n, \quad n = \frac{\lambda C_1^2}{2(-4+C_4 C_1^2)} \quad (4.82)$$

şeklindedir. Burada, $n = 3/2$ durumu Λ CDM modelinde evrenin son dönemine karşılık gelmektedir.

4.2.3. Bianchi Tip-I Kozmolojide Mimetik Madde İçin Potansiyel Çözümleri

Evrenin genişleme senaryolarını yeniden yaratacak bir model elde etmek için mimetik alanı dinamik hale getirmek, dolayısıyla (2.133) ile verilen denkleme bir $V(\phi)$ potansiyeli eklemek gerekmektedir. Böylelikle mimetik model için verilen aksiyon, Lagrange çarpanını da içerecek şekilde yeniden düzenlendiğinde,

$$I = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \lambda(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 1) - V(\phi) + 2L_m] \quad (4.83)$$

biçimini almaktadır.

Φ skaler alanına bağlı bir potansiyel, zamana bağlı bir potansiyele karşılık gelmekte olup, bu tip bir potansiyel, Friedmann denklemlerinin de bir sonucu olarak, değişen Hubble parametresine ve ölçek faktörüne benzer şekilde davranmaktadır [49].

(4.83) aksiyonundan hareketle, teorinin hareket denklemleri,

$$G_{\mu\nu} - 2\lambda \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) = T_{\mu\nu} \quad (4.84)$$

şeklinde elde edilir. (4.84) ifadesinin izi alındığında ise Lagrange çarpanı,

$$\lambda = \frac{1}{2} (G - T - 4V) \quad (4.85)$$

biçiminde bulunur. (4.85)'yi, (4.84)'da yerine yazdığımızda ifadenin yeniden düzenlenmiş hali,

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + (G - T - 4V) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.86)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (G - T - 4V) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.87)$$

biçiminde enerji-momentum tanımlaması yapılırsa, mimetik alan için basınç (p) ve enerji yoğunluğu (ρ) sırasıyla,

$$p = -V, \quad \rho = G - T - 3V \quad (4.88)$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca, (4.83) aksiyonunun mimetik alana göre varyasyonu alındığında,

$$\nabla^\nu [(G - T - 4V) \partial_\nu \phi] = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (4.89)$$

şeklinde bir hareket denklemi daha elde edilebilir. (4.89) ifadesi (4.86) ifadesinde $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$ koşulu ele alınarak da elde edilebilir.

Yay elemanının,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + A^2(t) dx^2 + B^2(t) (dy^2 + dz^2) \quad (4.90)$$

biçiminde verildiği Bianchi tip-I model dikkate alındığında (4.89) ifadesi,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d}{dt} [\sqrt{-g} (\rho - V)] = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (4.91)$$

şeklini alır ($\phi = t$). Burada $A = B^n$ biçiminde alınırsa enerji yoğunluğu için,

$$\rho = \frac{n+2}{B^{n+2}} \int V B^{n+2} dB \quad (4.92)$$

şeklinde elde edilir.

Hubble parametresinin,

$$H = \frac{\dot{B}}{B}, \quad \frac{\dot{A}}{A} = nH \quad (4.93)$$

şeklinde olduğu göz önünde bulundurulursa, alan denklemlerinin çözümü olan Friedmann denklemleri,

$$(n + 1)\dot{H} + (n^2 + n + 1)H^2 = V(t) \quad (4.94)$$

şeklinde elde edilir. Burada $y = B^{\frac{(n^2+n+1)}{(n+1)}}$ alınırsa, (4.94) ifadesi,

$$\ddot{y} - \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}V(t)y = 0 \quad (4.95)$$

şeklinde yeniden yazılır. (4.95) denklemini çözümü için,

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{\phi^2} = \frac{\alpha}{t^2} \quad (4.96)$$

önerildiğinde y çözümleri,

$$y = \left\{ \begin{array}{l} C_1 t^{\frac{1}{2}} \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right) \ln(t) + C_2 \right] \\ C_1 t^{\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right) \right] + C_2 t^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right) \right] \end{array} \right. \begin{array}{l} \alpha < -\frac{(n+1)^2}{4(n^2+n+1)} \\ \alpha \geq -\frac{(n+1)^2}{4(n^2+n+1)} \end{array} \quad (4.97)$$

biçiminde elde edilir (C_1 ve C_2 : integrasyon sabiti).

α 'nın artan negatif değerleri için bu çözüm, tekillığe sahip salınım yapan düz bir evreni ifade etmektedir. Bu salınımın genliği zamanla artmaktadır, ki bu durum, büyük pozitif basınca benzer bir duruma karşılık gelmektedir. İvmelenmenin olduğu bir model için şaşırtıcı bir sonuç değildir.

Düz bir evren için ölçek faktörü normalizasyon katsayısı ile tanımlanmakta olup, bu durum için ölçek faktörünün genel çözümü,

$$B = t^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n^2+n+1} \right) \right] \left\{ 1 + \beta t^{-\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right)} \right\}^{\frac{n+1}{n^2+n+1}} \quad (4.98)$$

şeklinde bulunur ($\beta = \frac{C_2}{C_1}$: integrasyon sabiti, $C_1 \neq 0$; $\alpha \geq -\frac{(n+1)^2}{4(n^2+n+1)}$).

Bu çözüm (4.92) ifadesinde yerine yazılırsa enerji yoğunluğu için,

$$\rho = (1 + 2n)H^2 = \frac{1}{3t^2} \left(1 + \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right) \left[\frac{\left(1 - \beta t^{-\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right)} \right)^{3 \frac{n+1}{n^2+n+1}}}{\left(1 + \beta t^{-\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right)} \right)^{3 \frac{n+1}{n^2+n+1}}} \right] \quad (4.99)$$

ifadesi bulunur. Mimetik madde için durum denklemleri ise ($p = -V = -\alpha/t^2$)

$$w = \frac{p}{\rho} = -3\alpha \left(1 + \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right) \left[\frac{\left(1 - \beta t^{-\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right)} \right)^{-3 \frac{n+1}{n^2+n+1}}}{\left(1 + \beta t^{-\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4\alpha(n^2+n+1)}}{n+1} \right)} \right)^{-3 \frac{n+1}{n^2+n+1}}} \right] \quad (4.100)$$

şeklinde bulunur.

Durum denklemleri zamana bağlı olabilir ve t 'nin büyük ve küçük limitlerinde sabit bir skaler değere yaklaşır. Örneğin; $\alpha = -1/3$ ($n=1$) için durum denklemleri $w=1$ ($p=\rho$, katı akışkan: ses hızı ışık hızına eşit) ve ölçek çarpanı da $B \propto t^{1/3}$ şeklindedir. $\alpha = -1/4$ ($n=1$) ise $w = 1/3$ ($p = 1/3\rho$, $t \rightarrow \infty$ ve $p = 3\rho$, $t \rightarrow 0$) radyasyon akışkanına (rölativist gaz) karşılık gelmektedir. $\alpha \gg 1$ olduğunda durum denklemleri $w=-1$ ($p = -\rho < 0$, ses hızı ışık hızına eşittir, üstel

şışmeli model) efektif olarak Λ kozmolojik sabitine, ayrıca $p = w\rho < 0$ negatif basınç durumu ise fiziksel olmamakla birlikte şışme (enflasyon) modeline karşılık gelmektedir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son dönemlerdeki evrenin geniş ölçekli gözlem verileri bize, evrenin ivmelenecek genişlediği bir dönemde olduğunu göstermektedir. Evrenin girmiş olduğu bu fiziksel dönemi açıklayacak birçok değiştirilmiş gravitasyon teorisi formu önerilmiştir. Bu sunulan modeller içinde en bilindik ve fiziksel olarak onaylanmış modellerden biri $F(R)$ Gravitasyon Teorisi ve onun genişletilmiş biçimlerini içeren teorilerdir. Biz de tezimizde bu teoriden hareketle öne sürülmüş olan Mimetik $F(R)$ Gravitasyon Teorisi'ni ele almış bulunmaktayız. Burada, $F(R)$ ve Mimetik $F(R)$ Gravitasyon Teorileri'nin temel dayanaklarını ve denklemlerinin kısa bir tanıtımını yaparak işe başladık. Düz FLRW metriği için $F(R)$ ve Mimetik $F(R)$ Teorisi'nin hareket denklemlerini elde ettik ve noktasal Lagrangian'lerini yazarak teorilerin Noether simetrisine uyumunu inceledik. Mimetik $F(R)$ Gravitasyon Teorisi için iki önemli çözüm sınıfı bulunmuştur: ilki, bir çeşit arkaplan basıncı gibi davranan genelleştirilmiş üstel bir ölçek faktörünün tam çözüm ailesidir. Diğer çözüm sınıfı ise, elementer fonksiyonlara göre yazılan ölçek faktörü için tam çözümlere sahip ek modellerin genel bir çözüm ailesidir. Bu çözümler GRT modeline benzer biçimde $F(R)=R+2\Lambda$ özel fonksiyonu alınarak elde edilmiştir. Ayrıca, Mimetik $F(R)$ Gravitasyon Teorisi için Noether simetrisine bakıldığında yine iki çözüm ailesi elde edilmiştir. Birincisi, karanlık madde ve ölçeklendirilmiş (calibrated) kozmolojik sabite sahip, GRT'ye eşdeğer çözüm sınıfıdır. Bu durum, Hubble parametresinin (H) yüksek mertebeden türevlerinin iraksadığı, tip-IV gelecek tekilliklerini içeren kozmolojik çözümlerin bir biçimi olarak davranmaktadır [50]. İkinci çözüm sınıfı ise, potansiyel fonksiyonların iki özel sınıfını içeren değiştirilmiş gravitasyon çözüm ailesidir. Elde edilen potansiyellerden ilki, ölçek faktörünün sıçrama senaryosuna evrildiği hibrit enflasyon modeline, ikincisi ise, tam da Λ CDM modelindeki gibi davranan ölçek faktörünün bulunduğu üstel formuna karşılık gelmektedir. Böylelikle, gelecek tekilliklerine sahip, Λ CDM [51], sıçrama ve salınım (oscillatory) gibi bütün kozmolojik durumların çözümleri, Noether simetrik bir Mimetik $F(R)$ Gravitasyon Teorisi ile izah edilebilmiştir. Bu sonuç da bize, Noether simetri yaklaşımının, değiştirilmiş $F(R)$ Gravitasyon Teori'lerinin kozmolojik uygulamalarını çalışmanın en mükemmel yolu olduğunu göstermiş bulunmaktadır. Buna ek, Bianchi tip-1 kozmolojik yapısı içinde, mimetik alan için farklı durumlar elde edilmiştir. Elde edilen en ilgi çekici sonuç mimetik alanın, evrenin genişlemesine kaynaklık eden Λ kozmolojik sabite indirgenebiliyor olmasıdır.

Gelecekte bu çalışmalarımızı eğriliğe ek, Gauss-Bonnet (G) [52-61] ve burulma (T, torsion) terimlerini de içeren $f(R,T)$ ve $f(R,G)$ Değiştirilmiş Gravitasyon Teori'lerine uygulayacağız.



KAYNAKLAR

- [1] Klein, M. and Kox, A. and Schulman, R., 1996, *Volume 6: the berlin years: writings, 1914-1917*, Princeton University Press, USA
- [2] Riess A. et al., 1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astro. J.* 116, 1009.
- [3] Perlmutter S. et al., 1999, Measurements of Omega and lambda from 42 high redshift supernovae - supernova cosmology project, *Astrophys. J.* 517, 565.
- [4] Bernardis P. et al., 2000, A flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation, *Nature* 404, 955.
- [5] Hanany S. et al., 2000, A Measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees , *Astrophys. J.* 545, L5.
- [6] Chamseddine, A. and Mukhanov, V., 2013, Mimetic dark matter, *arXiv:1308.5410*.
- [7] Golovnev, A., 2014, On the recently proposed mimetic dark matter, *Phys. Lett. B* 728, 39 *arXiv:1310.2790*.
- [8] Chaichian, M. and Kluson, J. and Oksanen, M. and Tureanu, A., 2014, Mimetic dark matter, ghost instability and a mimetic tensor-vector-scalar gravity, *arXiv:1404.4008*.
- [9] Momeni, D. and Moraes, S. and Gholizade, H. and Myrzakulov, R., 2018, mimetic compact stars, *arXiv:1505.05113*.
- [10] Malaeb, O., Hamiltonian formulation of mimetic gravity, 2015, *arXiv:1404.4195*.
- [11] Deruelle, N. and Rua, J., 2014, Disformal transformations, veiled general relativity and mimetic gravity, *arXiv:1407.0825*.
- [12] Matsumoto, J. and Odintsov, S. and Sushkov, S., 2015, Cosmological perturbations in mimetic matter model, *arXiv:1501.02149*.
- [13] Momeni, D. and Altaibayeva, A. and Myrzakulov, R., 2014, New modified mimetic gravity, *arXiv:1407.5662*.
- [14] Harko, T. and Lobo, F. and Nojiri, S. and Odintsov, S., 2011, f(R,T) gravity, *arXiv:1104.2669*.
- [15] Capozziello S. and Laurentis, M. and Odintsov, S., 2012, Hamiltonian dynamics and noether symmetries in extended gravity cosmology, *arXiv:1206.4842*.
- [16] Ritis, R. and Marmo, G. and Platania, G. and Rubano, C. and Scudellaro, P. and Stornaiolo C., 1990 New approach to find exact solutions for cosmological models with a scalar field, *Phys. Rev. D* 42, 1091.

- [17] Capozziello, S. and Ritis, R., 1994, Noether's symmetries and exact solutions in flat nonminimally coupled cosmological models, *Class. Quant. Grav.* 11, 107.
- [18] Capozziello, S. and Ritis, R., 1994, Asymptotic freedom from induced gravity cosmology *Phys. Lett. A* 195, 48.
- [19] Capozziello, S. and Ritis, R., 1993, Relation between the potential and nonminimal coupling in inflationary cosmology, *Phys. Lett. A* 177, 1.
- [20] Capozziello, S., 2000, Selection rules in minisuperspace quantum cosmology, *Gen. Relativ. Gravit.* 32, 673.
- [21] Capozziello, S. and Laurentis, M. and Odintsov, S., 2014, Noether symmetry approach in gauss-bonnet cosmology, *arXiv:1406.5652*.
- [22] Paliathanasis, A. and Tsamparlis, M. and Basilakos, S., 2014, Scalar-tensor gravity cosmology: noether symmetries and analytical solutions, *arXiv:1403.0332*.
- [23] Jamil, M. and Momeni, D. and Myrzakulov, R., 2013, Energy conditions in generalized teleparallel gravity models, *arXiv:1211.3740*.
- [24] Kucukakca, Y., 2013, Scalar tensor teleparallel dark gravity via noether symmetry, *arXiv:1404.7315*.
- [25] Aslam, A. and Jamil, D. and Momeni, D. and Myrzakulov, R. and Rashid, M. and Raza, M., 2013, Noether gauge symmetry approach in quintom cosmology, *arXiv:1308.2221*.
- [26] Aslam, A. and Jamil, D. and Momeni, D. and Myrzakulov, R., 2013, Noether gauge symmetry of modified teleparallel gravity minimally coupled with a canonical scalar field, *arXiv:1212.6022*.
- [27] Jamil, D. and Momeni, D. and Myrzakulov, R., 2012, Noether symmetry of $f(R, T)$ cosmology with quintessence and phantom scalar fields, *arXiv:1210.0001*.
- [28] Jamil, D. and Ali, S. and Myrzakulov, R., 2012, Bianchi type I cosmology in generalized saez-ballester theory via noether gauge symmetry, *arXiv:1201.0895*.
- [29] Jamil, D. and Mahomed, F. and Momeni, D., 2011, Noether symmetry approach in $f(R)$ tachyon model, *arXiv:1105.2610*.
- [30] Capozziello, S. and Felice, A., 2008, $f(R)$ cosmology by noether's symmetry, *arXiv:0804.2163*.
- [31] Wainwright, J. and Ellis, G., 1997, *Dynamical systems in cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [32] Güdekli, E., Eylül 2004, *Bianchi tip çözümlerde ufuk-eşyönlüleşme meseleleri*, Doktora, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [33] Harko, T., 2014 Thermodynamic interpretation of the generalized gravity models with geometry - matter coupling, *arXiv:1408.3465*.

- [34] Brans, C. and Dicke, R., 1961, Mach's principle and a relativistic theory of gravitation *Phys. Rev.* 124 925.
- [35] Sciama, D., 1953, *On the origin of inertia*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Volume 113.
- [36] Sotiriou, T. and Faraoni, V., 2010, f(R) Theories of gravity 5 Jun 2010 *arXiv:0805.1726v4*.
- [37] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2005, Inhomogeneous equation of state of the universe: phantom era, future singularity and crossing the phantom barrier, *Phys. Rev. D* 72, 023003 hep-th/0505215.
- [38] Nojiri, S. and Odintsov, S. and Tsujikawa, S., 2005, Properties of singularities in (phantom) dark energy universe, *Phys. Rev. D* 71, 063004 hep-th/0501025.
- [39] Nojiri, S. and Odintsov, S. and Tsujikawa, S., 2005, Properties of singularities in (phantom) dark energy universe, *Phys. Rev. D* 71, 063004 hep-th/0501025.
- [40] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2014, Mimetic f(R) gravity: inflation, dark energy and bounce, *arXiv:1408.3561*.
- [41] Leon, G. and Saridakis, E., 2015, Dynamical behavior in mimetic f(R) gravity, *arXiv:1501.00488*.
- [42] Mehrpooya, M. and Momeni, D., 2010 Spherically symmetric massive scalar fields in general relativity, *arXiv:0903.1185*.
- [43] Landau, L. and Lifshitz, E., 1980, *The classical theory of fields*, fourth edition, Butterworth, Heinemann.
- [44] Bamba, K. and Odintsov, S., 2014, Universe acceleration in modified gravities: f(R) and f(T) cases, *arXiv:1402.7114*.
- [45] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2014 Mimetic f(R) gravity: inflation, dark energy and bounce, *arXiv:1408.3561*.
- [46] Buchdahl, H., 1970 Non-linear lagrangians and cosmological theory , *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 150, 1.
- [47] Brandenberger, R., 2012, The matter bounce alternative to inflationary cosmology, *arXiv:1206.4196*.
- [48] Cai, Y., 2014, Exploring bouncing cosmologies with cosmological surveys, *arXiv:1405.1369*.
- [49] Chamseddine, A. and Mukhanov, V. and Vikman A., 2014, Cosmology with mimetic matter, *arXiv:1403.3961*.
- [50] Nojiri, S. and Odintsov, S. and Tsujikawa, S., 2005, Properties of singularities in (phantom) dark energy universe, *Phys. Rev. D* 71, 063004 hep-th/0501025.

- [51] Odintsov, S. and Sez-Gmez, D., 2013 $f(R, T, R_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$ gravity phenomenology and Λ CDM universe, *arXiv:1304.5411*.
- [52] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2011, Unified cosmic history in modified gravity: from $f(R)$ theory to lorentz non-invariant models, *arXiv:1011.0544*.
- [53] Bamba, K. and Nojiri, S. and Odintsov, S., 2013, Modified gravity: walk through accelerating cosmology, *arXiv:1302.4831*.
- [54] Bamba, K. and Odintsov, S., 2014, Universe acceleration in modified gravities: $f(R)$ and $f(T)$ cases, *arXiv:1402.7114*.
- [55] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2009, Modified gravity as realistic candidate for dark energy, inflation and dark matter, *arXiv:0810.1557*.
- [56] Capozziello, S. and Laurentis, M., 2011, Extended theories of gravity, *arXiv:1108.6266*.
- [57] Capozziello, S. and Laurentis, M. and Consiglio, L. and Rosa, G. and Donato, C., 2011, The missing matter problem: from the dark matter search to alternative hypotheses, *arXiv:1110.5026*.
- [58] Capozziello, S. and Stabile, A., 2010, The weak field limit of fourth order gravity, in frignanni, vincent R. (ed.): classical and quantum gravity: theory and applications, *arXiv:1009.3441*.
- [59] Capozziello, S. and Laurentis, M., 2010, A review about invariance induced gravity: gravity and spin from local conformal-affine symmetry, *arXiv:0910.2881*.
- [60] Capozziello, S. and Francaviglia, M., 2008, Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications, *arXiv:0706.1146*.
- [61] Nojiri, S. and Odintsov, S., 2006, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4, 115 hep-th/0601213.

EKLER

EK 1. Genel Varyasyonlar.

Metrik tensör $g^{\mu\nu}$ 'nin,

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 1.1})$$

biçiminde varyasyonu altında ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$) $n=4$ boyutlu uzay-zaman için Levi-Civita bağlantısı (connection)'nin varyasyonu,

$$\delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}] - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta}] \quad (\text{Ek 1.2})$$

şeklinde verilir. Eğer $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}]$ ifadesi $\delta g^{\beta\alpha}$ 'nın birinci dereceden kuvvetlerine kadar açılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}] &= \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} + \delta g^{\mu\rho}) [\partial_{\nu} (g_{\lambda\rho} + \delta g_{\lambda\rho}) + \partial_{\lambda} (g_{\nu\rho} + \delta g_{\nu\rho}) - \partial_{\rho} (g_{\nu\lambda} + \\ &\delta g_{\nu\lambda})] \approx \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta}] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\partial_{\nu} (\delta g_{\lambda\rho}) + \partial_{\lambda} (\delta g_{\nu\rho}) - \partial_{\rho} (\delta g_{\nu\lambda})] + \frac{1}{2} \delta g^{\mu\rho} [\partial_{\nu} (g_{\lambda\rho}) + \\ &\partial_{\lambda} (\delta g_{\nu\rho}) - \partial_{\rho} (\delta g_{\nu\lambda})] \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.3})$$

elde edilir ve $\delta g^{\mu\nu}$ bir tensör olduğu için,

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} &= \partial_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta g_{\beta\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} \delta g_{\beta\lambda} \\ \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} &= \partial_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta g_{\beta\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\beta} \delta g_{\beta\nu} \\ \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu} &= \partial_{\rho} \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\beta} \delta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} \delta g_{\beta\lambda} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.4})$$

ifadelerinden,

$$\partial_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \delta g_{\lambda\nu} = \nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu} + 2\Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta g_{\beta\rho} \quad (\text{Ek 1.5})$$

elde edilir. Benzer şekilde $g_{\mu\nu}$ için,

$$\nabla_{\nu} g_{\lambda\rho} = \partial_{\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g_{\beta\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} g_{\beta\lambda} \quad (\text{Ek 1.6})$$

$$\nabla_{\lambda} g_{\nu\rho} = \partial_{\lambda} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g_{\beta\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\beta} g_{\beta\nu} \quad (\text{Ek 1.7})$$

$$\nabla_{\rho} g_{\lambda\nu} = \partial_{\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\beta} g_{\beta\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} g_{\beta\lambda} \quad (\text{Ek 1.8})$$

ifadeleri yazılarak elde edilecek,

$$2\Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g_{\beta\rho} = \partial_{\nu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\lambda\nu} \quad (\text{Ek 1.9})$$

ifadesi kullanıldığında, (Ek 1.3) ifadesi,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}] &\approx \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta}] \\ &+ \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu} + 2\Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta g_{\beta\rho}] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g_{\beta\rho} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.10})$$

biçiminde yazılır. Aynı zamanda metriğin,

$$(\delta g^{\mu\rho}) g_{\beta\rho} = -(\delta g_{\beta\rho}) g^{\mu\rho} \quad (\text{Ek 1.11})$$

özelliği kullanılarak (Ek 1.10) ifadesi,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}] &\approx \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta}] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu}] \\ &+ g^{\mu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta g_{\beta\rho} - (\delta g_{\beta\rho}) \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} g^{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu}] \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.12})$$

ve (Ek 1.2) ifadesiyle verilen Levi-Civita bağıntısının varyasyonu,

$$\delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}] - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} [g^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\nu}] \quad (\text{Ek 1.13})$$

şeklinde yazılır [$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ bir tensör olmamasına rağmen, $\delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ bir tensördür].

(Ek 1.1) varyasyonu altında,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \rightarrow \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.14})$$

Levi-Civita bağlantısının varyasyonu ile Ricci eğrilik tensöründeki değişim (varyasyonu) için,

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta} + \delta\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] &= 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + (\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} + \delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu})(\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}) - (\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} + \\
&\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu})(\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} + \delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta}) = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} - \\
&\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta}\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} + O(\delta\Gamma^2) = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} + 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} - \Gamma_{\nu[\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha]\beta}^{\mu} + \\
O(\delta\Gamma^2) &= R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] + 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} - \Gamma_{\nu[\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha]\beta}^{\mu} + O(\delta\Gamma^2) \quad (\text{Ek 1.15})
\end{aligned}$$

sadece $\delta\Gamma$ 'nin birinci derecedeki terimleri alınırsa,

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta} + \delta\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] \approx R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] + 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} - \Gamma_{\nu[\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha]\beta}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.16})$$

yazılır. Böylelikle Ricci eğrilik tensörünün varyasyonu,

$$\delta R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha} = R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta} + \delta\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] - R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}[\Gamma_{\sigma\rho}^{\beta}] = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} - \Gamma_{\nu[\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha]\beta}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.17})$$

olarak bulunur. $\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ ifadesinin de tensör olması sebebiyle,

$$\nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.18})$$

ve,

$$\nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} = \partial_{\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.19})$$

ifadeleri yazılarak,

$$2\nabla_{[\lambda}\Gamma_{\alpha]v}^{\mu} = \partial_{[\alpha}\delta\Gamma_{\lambda]v}^{\mu} + 2\Gamma_{\beta[\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha]v}^{\beta} - \Gamma_{\nu[\lambda}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha]\beta}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.20})$$

elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak Ricci eğrilik tensörünün varyasyonu,

$$\delta R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} - \partial_{\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \quad (\text{Ek 1.21})$$

şeklinde verilir.

Ek olarak $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ifadelerinin varyasyonlarını da hesaplamak yerinde olacaktır.

Birinci ifade için verilecek olan,

$$\delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) = R_{\mu\nu\rho\sigma}\delta R^{\mu\nu\rho\sigma} + \delta R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{Ek 1.22})$$

biçimindeki varyasyonu,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma}\delta R^{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} + 4R_{\mu}{}^{\gamma\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta g^{\mu\alpha} = \\ &R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} + 4R_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.23})$$

şeklindeki terim göz önünde bulundurulduğunda,

$$\delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) = 2R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} + 4R_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 1.24})$$

biçiminde verilir. Dahası (Ek 1.24) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimi için,

$$\begin{aligned} 2R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} &= 2R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} = 2R^{\mu\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha}\delta R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2R^{\mu\nu\rho\sigma}R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha} = \\ &2R_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} - \delta g^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta\gamma\delta}2R^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.25})$$

ifadesi kullanıldığında, (Ek 1.22) varyasyonu,

$$\delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) = 2R_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2R_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 1.26})$$

şeklinde verilir.

Eğer (Ek 1.26) varyasyonu bir F skaleri ile çarpılırsa,

$$F\delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) = 2FR_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2FR_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 1.27})$$

şeklini alır. $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ifadesinin varyasyonu ve varyasyonun skaler bir F ile çarpılmış şekli,

$$\begin{aligned} F\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) &= F[R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}] = F[R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta})] = \\ &F[R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} + R_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}(g^{\nu\beta}\delta g^{\alpha\mu} + g^{\alpha\mu}\delta g^{\nu\beta})] = F[2R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \\ &2R_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu}\delta g^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.28})$$

şeklinde verilir.

EK 2. Bazı Önemli Varyasyonlar.

$g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörün tersi olmak üzere, bunlar ve varyasyonları arasındaki ilişki,

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha} \quad (\text{Ek 2.1})$$

$$0 = (\delta g_{\mu\nu})g^{\nu\alpha} + (\delta g^{\nu\alpha})g_{\mu\nu} \quad (\text{Ek 2.2})$$

şeklindedir [δ_{μ}^{α} matrisi sabittir]. (Ek 2.2) ifadesi $g_{\alpha\beta}$ ile çarpılması ile,

$$0 = (\delta g_{\mu\nu})\delta_{\beta}^{\nu} + (\delta g^{\nu\alpha})g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \quad (\text{Ek 2.3})$$

ve

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}(\delta g^{\nu\alpha}) \quad (\text{Ek 2.4})$$

elde edilir. Bu tip ifadelerin (ilişkilerin) alternatif türetimi,

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \delta(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta}) = (\delta g_{\mu\alpha})g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}(\delta g_{\nu\beta})g^{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\delta g^{\alpha\beta}) \\ &= (\delta g_{\mu\alpha})g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + \delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (\text{Ek 2.5})$$

$$\delta g_{\mu\nu} = (\delta g_{\mu\alpha})g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + \delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\nu\mu} \quad (\text{Ek 2.6})$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{Ek 2.7})$$

şeklinde de yazılır. (Ek 2.1) ifadesinden,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \quad (\text{Ek 2.8})$$

ve

$$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 2.9})$$

yazılır. Bu sonuçlar, n-boyutlu genel bir Riemannian uzayı için de geçerlidir yani,

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c, \quad g_{ab}g^{ab} = n \quad (\text{Ek 2.10})$$

ve böylelikle metrik için,

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd} \quad (\text{Ek 2.11})$$

$$g^{ab}\delta g_{ab} = -g_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2.12})$$

şeklindedir.

g_{ab} metrik tensör olmak üzere,

$$\delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta g \quad (\text{Ek 2.13})$$

biçimindeki varyasyonu için ($g \equiv \det(g_{ab})$), $n \times n$ biçiminde bir A genel matrisi düşünölsün. Bu matris için determinant,

$$\det(A) = e^{\text{Tr}(A)} \quad (\text{Ek 2.14})$$

şeklindedir. g_{ab} için (Ek 2.14) ifadesi,

$$g = \det(g_{ab}) = e^{\text{Tr}(g_{ab})} \quad (\text{Ek 2.15})$$

biçiminde olup, $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ altında varyasyonu,

$$\det(g_{ab} + \delta g_{ab}) = e^{\text{Tr}(g_{ab} + \delta g_{ab})} = e^{\text{Tr}(g_{ab}) + \text{Tr}(\delta g_{ab})} = e^{\text{Tr}(g_{ab})} e^{\text{Tr}(\delta g_{ab})} \quad (\text{Ek 2.16})$$

biçiminde yazılır [izin lineerlik özelliği: $\text{Tr}(g_{ab} + \delta g_{ab}) = \text{Tr}(g_{ab}) + \text{Tr}(\delta g_{ab})$]. δg ifadesi çok küçük olduğu için ($(\delta g)^2 \approx 0$),

$$e^{\text{Tr}(\delta g_{ab})} \approx 1 + \text{Tr}(\delta g_{ab}) \quad (\text{Ek 2.17})$$

ve (Ek 2.4) ifadesi,

$$\det(g_{ab} + \delta g_{ab}) \approx g(1 + \text{Tr}(\delta g_{ab})) \quad (\text{Ek 2.18})$$

şeklinde yazılır. Burada izin,

$$\text{Tr}(\delta g_{ab}) = g^{ab}\delta g_{ab} \quad (\text{Ek 2.19})$$

ifadesi kullanıldığında,

$$\det(g_{ab} + \delta g_{ab}) \approx g(1 + g^{ab}\delta g_{ab}) \quad (\text{Ek 2.20})$$

elde edilir. Buradan varyasyonun tanımını için,

$$\delta g = \delta(\det(g_{ab})) = \det(g_{ab} + \delta g_{ab}) - \det(g_{ab}) \approx g(1 + g^{ab}\delta g_{ab}) - g = gg^{ab}\delta g_{ab} \quad (\text{Ek 2.21})$$

ifadesi elde edilir. (Ek 2.12) eşitliği ile de,

$$\delta g = -gg_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2.22})$$

yazılabilmektedir. Buradan (Ek 2.13) varyasyonu,

$$\delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta g = -\frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{g}}g_{ab}\delta g^{ab} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2.23})$$

biçimini alır. Burada GR için 4-boyutlu pseude-Reimannian uzay-zamanı için (($g \rightarrow -g$) ve $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) benzer,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{Ek 2.24})$$

ifadesi yazılır.

Metriğin determinantının herhangi bir kuvveti için (Ek 2.22) ifadesi,

$$\delta(g^n) = ng^{n-1}\delta g = -ng^{n-1}gg_{ab}\delta g^{ab} = -ng^n g_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2.25})$$

biçiminde genel bir eşitlik ile verilir. Eğer bütün doğal sayılar ($n \in \mathbb{N}$) üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(g^n) = -(\sum_{n=0}^{\infty} ng^n)g_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2.26})$$

olur. (Ek 2.26) ifadesinin sağ tarafındaki toplamı hesaplamak için, $|g| < 1$ koşulu (26 ifadesinin yakınsaması için) kabul edildiğinde,

$$\frac{g}{(1-g)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} ng^n, \quad |g| < 1 \quad (\text{Ek 2.27})$$

elde edilir. Böylelikle (Ek 2.26) ifadesi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(g^n) = -\frac{g}{(1-g)^2} g_{ab}\delta g^{ab}, \quad |g| < 1 \quad (\text{Ek 2.28})$$

şeklini alır.

EK 3. İdeal Akışkan İçin Enerji Momentum Tensörü.

Eğrisel uzay-zamanda, ideal akışkan için verilen enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} \quad (\text{Ek 3.1})$$

şeklindedir. ρ ve p akışkan için sırasıyla, enerji yoğunluğu ve basıncı ifade eder. $g_{\mu\nu}$, uzay-zamanın metrik tensörü ve u_{μ} ise akışkanın hareketini takip eden gözlemcinin 4-lü hız vektör alanını temsil eder. Minkowski uzay-zamanı için $[\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)]$, $T_{\mu\nu}$ 'nün bileşenleri,

$$T_{00} = T^{00} = \rho, \quad T_{ij} = p \delta_{ij} \quad (\text{Ek 3.2})$$

şeklinde verilir. $T_{\mu\nu}$ ikinci dereceden tensör olması sebebiyle onu yine; örneğin geometriden gelen katkılar sebebiyle $g_{\mu\nu}$ metriği gibi; ikinci dereceden tensör ile ifade etmemiz gerekmektedir. Bunun yanında $T_{\mu\nu}$ tensörü, bu uzay-zamanda hareket eden gözlemcinin u_{μ} 4-lü hız vektörü gibi kinematik nicelikleri de içermesi gerekmektedir. Bu birinci dereceden bir tensör, yani bir vektör olması sebebiyle, $u_{\mu} \otimes u_{\nu}$ şeklinde tensörel çarpımı alınarak ikinci derece tensör elde edilir ve böylelikle $T_{\mu\nu}$ tensörü, $g_{\mu\nu}$ metriğin ve $u_{\mu} \otimes u_{\nu}$ biçimindeki tensörün lineer bir bileşimi olarak ifade edilir. Fakat tensör, akışkanın basınç ve yoğunluk gibi bazı özelliklerini de barındırmak zorundadır ve bunlar skaler oldukları için $T_{\mu\nu}$ 'nün barındırdığı tensörlerin katsayıları olarak ifadeye katılırlar. Genel ifade ile enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = A(p, \rho) g_{\mu\nu} + B(p, \rho) u_{\mu} u_{\nu} \quad (\text{Ek 3.3})$$

biçiminde verilir ($A(p, \rho)$ ve $B(p, \rho)$, p ve ρ 'nun türevlenebilir sürekli fonksiyonlarıdır). (Ek 3.3) ifadesi yerel olarak; yani gravitasyonel etkiler ihmal edildiğinde de sağlanmalıdır. Böylelikle $T_{\mu\nu}$ (Ek 3.2) ifadesine indirgenir ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$). Ek olarak, akışkan ile genişleyen ve büzülen eş-hareketli bir gözlemci için,

$$u_{\mu} = (1, 0, 0, 0) = \delta_0^{\mu} = -\delta_{\mu}^0 \quad (\text{Ek 3.4})$$

şeklinde olup, yerel olarak enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu}^{\text{SR}} = A(p, \rho) \eta_{\mu\nu} + B(p, \rho) \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \quad (\text{Ek 3.5})$$

şeklını alır. (Ek 3.5) ifadesi $\eta_{\mu\nu}$ ile çarpıldığında,

$$-\rho + 3p = 4A - B \quad (\text{Ek 3.6})$$

ve $\delta_0^\mu \delta_0^\nu$ ile çarpıldığında da,

$$\rho = -A + B \quad (\text{Ek 3.7})$$

bulunur. A ve B fonksiyonları için ise,

$$A = p, \quad B = \rho + p \quad (\text{Ek 3.8})$$

ifadeleri elde edilir ki bu eğrisel uzaydaki ideal akışkan için verilen (Ek 3.3) ifadesini verir.

EK 4. FLRW Evreni İçin Süreklilik Denkleminin Türetilmesi.

Enerji-momentum tensörünün korunumu için,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Ek 4.1})$$

ifadesi sağlanmalıdır.

İdeal akışkana sahip, uzayca homojen ve izotropik bir evren için verilen,

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu \quad (\text{Ek 4.2})$$

formunda enerji-momentum tensörü ve

$$u_\mu = (1, 0, 0, 0) = \delta_0^\mu = -\delta_\mu^0 \quad (\text{Ek 4.3})$$

biçiminde 4-lü hız vektörüne sahip eş-hareketli bir gözlemci ele alınsın. (Ek 3.3)'in sonucu olarak,

$$u_\mu u^\mu = -1 \quad (\text{Ek 4.4})$$

normalizasyonu elde edilir.

Şimdi, (Ek 4.1) ifadesi,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \nabla^\mu p + u_\nu u_\mu \nabla^\mu (\rho + p) + (\rho + p) [u_\nu \nabla^\mu u_\mu + u_\mu \nabla^\mu u_\nu] \quad (\text{Ek 4.5})$$

ve her bir terim için,

$$u_\nu u_\mu \nabla^\mu (\rho + p) = u_\nu u^\mu \nabla_\mu (\rho + p) = -\delta_\mu^0 \delta_0^\mu \partial_\mu (\rho + p) = -\delta_\nu^0 (\dot{\rho} + \dot{p}) \quad (\text{Ek 4.6})$$

$$u_\mu \nabla^\mu u_\nu = u^\mu \nabla_\mu u_\nu = u^\mu [\partial_\mu u_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u_\alpha] = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u_\alpha u^\mu = +\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\alpha^0 \delta_0^\mu = \Gamma_{0\nu}^0 = 0 \quad (\text{Ek 4.7})$$

$$\begin{aligned} u_\nu \nabla^\mu u_\mu &= u_\nu \nabla_\mu u^\mu = -\delta_\nu^0 (\partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu u^\alpha) = -\delta_\nu^0 \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \delta_0^\alpha = -\delta_\nu^0 \Gamma_{\mu 0}^\mu \\ &= -\delta_\nu^0 (\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{30}^3) = -\delta_\nu^0 3H \end{aligned} \quad (\text{Ek 4.8})$$

$$g_{\mu\nu} \nabla^\mu p = \nabla_\nu p = \partial_\nu p = \delta_\nu^0 \dot{p} \quad (\text{Ek 4.9})$$

hesaplandığında [f gibi bir skaler niceliğin, $\nabla_\mu f = \partial_\mu f = \delta_\mu^0 \dot{f}$ biçiminde herhangi bir uzaysal bağıllığı olmadığı düşünülerek] (Ek 4.5) ifadesi,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -\delta_\nu^0 (\dot{\rho} + \dot{p}) - \delta_\nu^0 3H(\rho + p) + \delta_\nu^0 \dot{p} = -\delta_\nu^0 [\dot{\rho} + 3H(\rho + p)] = 0 \quad (\text{Ek 4.10})$$

şeklinde elde edilir ve bu ifadeden de,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (\text{Ek 4.11})$$

süreklilik denkleminde ulaşılır ($\nu = 0$).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Emre DEMİR
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	16.08.1985
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	emre.demir@ogr.iu.edu.tr
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	10.06.2011

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Makale ve Bildiriler	
Güdekli, E. and Demir, E., 2016, Conformal invariance in mimetic F(R,T) gravity, <i>Turkish Physical Society 32nd International Physics Congress</i> , 2016, Muğla, Turkey.	
Demir, E. and Güdekli, E., 2016, Exact solution of light galileon with translational shift symmetry in spherically symmetric geometry, <i>Turkish Physical Society 32nd International Physics Congress</i> , 2016, Muğla, Turkey.	
Demir, E. and Güdekli, E., 24-27 August 2015, Mimetic F(R) gravity via noether symmetry, <i>9th International Physics Conference of the Balkan Physics Union</i> , 2015, Istanbul, Turkey.	