



**HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK
PSÖDO-METRİK MANİFOLDLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ESENDEMİR

Danışman

Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

Bu tez çalışması 17.FEN.BİL.11 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK
PSÖDO-METRİK MANİFOLDLAR**

Murat ESENDEMİR

**Danışman
Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Murat ESENDEMİR tarafından hazırlanan “Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Psödo-Metrik Manifoldlar” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi,
Fen Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/06/2019

Murat ESENDEMİR

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

**HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK
PSÖDO-METRİK MANİFOLDLAR**

Murat ESENDEMİR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisine adanmıştır. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapıların temel özellikleri verilmiştir. İkinci kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapıların bazı eğrilik özellikleri araştırılmıştır. Üçüncü kısımda, belli bazı paralel tensör alanlarına sahip hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapılarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son kısımda, hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik yapılar üzerinde bazı sonuçlar bulunmuştur.

2019, v + 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Psödo-Riemann metriği, Hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapı, Hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik yapı, Lokal simetri, Eta-paralellik.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ALMOST ALPHA-COSYMPLECTIC
PSEUDO-METRIC MANIFOLDS

Murat ESENDEMİR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter, the almost alpha-cosymplectic pseudo-metric manifolds are investigated. This chapter consists of four subchapters. In the first subchapter, the fundamental properties of almost alpha-cosymplectic pseudo-metric structures are given. In the second subchapter, some curvature properties of almost alpha-cosymplectic pseudo-metric structures are studied. In the third subchapter, some results are related to almost alpha-cosymplectic pseudo-metric structures with some certain parallel tensors are obtained. In the last subchapter, some results on almost alpha-Kenmotsu pseudo-metric structures are found.

2019, v + 56 pages

Keywords: Pseudo-Riemannian metric, Almost alpha-cosymplectic pseudo-metric structure, Almost alpha-Kenmotsu pseudo-metric structure, Lokal symmetry, η -parallelity.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca 17.FEN.BİL.11 numaralı proje ile desteğini esirgemeyen Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Son olarak, bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Murat ESENDEMİR
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR.....	4
2.1 Psödo-Riemann Manifolddar	4
2.2 Hemen Hemen Değme Yapılar	10
2.3 Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Yapılar	13
2.4 Bazı Paralel Tensör Alanları	16
3. H. H. ALFA-KOSİMPLEKTİK PSÖDO-METRİK MANİFOLDLAR.....	19
3.1 Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Psödo-Metrik Yapılar	19
3.2 Bazı Eğrilik Şartları	31
3.3 Bazı Paralellik Şartları	36
3.4 Hemen Hemen Alfa-Kenmotsu Psödo-Metrik Yapılar	43
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	51
5. KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	56

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
$\text{Ind}M$	Psödo-Riemann manifoldun indeksi
div	Diverjans operatörü
δ	Delta operatörü
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
$\Gamma(TM)$	M üzerindeki tanjant demeti
H	Manifoldun ortalama eğriliği
J	Hemen hemen kompleks yapı
ν	g metriğinin indeksi
τ	Torsiyon tensör alanı
C	Weyl konformal eğrilik tensör alanı
K	Manifoldun kesit eğriliği
r	Manifoldun skalar eğriliği
$\oplus$	Devirli toplam

1 GİRİŞ

Değme metrik yapılar pek çok yazar tarafından ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır (Sasaki and Hatakeyama 1962, Tanno 1968, Blair 1977, Duggal 1990). Bu çalışma alanında elde edilen en geniş ve detaylı araştırmalar Blair (1977) ile başlamıştır. η , değme bir 1-form ve g , bir psödo-Riemann metriği olmak üzere, (η, g) yapısı bir değme psödo-metrik yapı olarak adlandırılır. Bu yapı değme metrik yapının doğal bir genelleştirilmesidir. Değme psödo-Riemann yapıların fizik ile ilgisi Duggal (1990) ile vurgulanmıştır. Psödo-Riemann metrikli değme yapılar ilk olarak, Sasakian durumuna odaklanarak Takahashi (1969) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmanın ardından ortaya konulan çalışmaların çoğu Sasakian psödo-Riemann metrikli konularla ilgilidir (Duggal 1990, 1996). Özellikle, $(3, 4r)$ işaretli Sasakian psödo-Riemann metrikler doğal olarak, negatif skalar eğrilikli boyutu $4r \geq 4$ olan bir kuaterniyonik (M, g) Kaehler manifoldu üzerinde $SO(3)$ -demeti $P(M)$ ile verilen Sasakian 3-yapıların bir açıklaması anlamında literatürde yer almışlardır (Konishi 1975, Tanno 1996). Diğer yandan, genel değme psödo-metrik manifoldlar için henüz tam anlamıyla sistematik bir çalışma ortaya konulmamış durumdadır. İşte bu çalışmanın temel başlığını Calvaruso ve Perrone (2010) başlatmıştır. Bu çalışmada $h = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)$ $(1, 1)$ -tipi tensör alanının rolü oldukça önemlidir. Ayrıca, yazarlar bu çalışmada sabit kesit eğrilikli değme psödo-metrik yapıları sınıflandırmışlardır. Bundan başka, Calvaruso (2011) çalışmasında değme Lorentzian manifoldları da ayrıntılı olarak ele almıştır. Uygulamalarıyla birlikte psödo-Riemann geometrisinin detayları O’neil (1983) de verilmiştir. Çoğu yazarın ilham kaynağı bu çalışma olmuştur.

Diğer yandan, hemen hemen değme metrik manifoldların bir analogisi olarak görülen Kenmotsu (1972) manifoldlarının ortaya çıkmasından sonra pek çok yazar farklı geometrik şartlar altında bu tür manifoldları çalışmışlardır (Jun *et al.* 2005, Kim and Pak 2005). Örnek olarak, bu yazarlar Ricci yarı-simetrik ve Weyl konformal yarı-simetrik şartlarını sağlayan Kenmotsu manifoldları için bazı sonuçlar elde etmiştir (Jun *et al.* 2005). Ayrıca, hemen hemen alfa-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılar birlikte düşünülmüş, hemen hemen değme metrik manifoldların bir alt sınıfı olan hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar tanımlanmıştır (Kim and Pak 2005). Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen alfa-kosimplektik yapısı α , herhangi bir reel sayı ve Φ , temel

2-form olmak üzere, $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemleriyle verilmiştir (Kim and Pak 2005).

Diğer yandan, De vd. (2009) çalışmasında ϕ -rekürent Kenmotsu manifoldlarını incelemiştir. İyi bilindiği üzere bir Kenmotsu manifold her zaman bir hemen hemen Kenmotsu manifold olmasına karşın bu önermenin tersi ille de doğru olmak zorunda değildir. Son zamanlarda, Dileo ve Pastore (2007, 2009) bazı lokal simetri koşullarını, eta-paralellliği ve bazı özel dağılımlarla verilen hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını çalışmışlar ve ortaya çok güzel sonuçlar çıkarmışlardır. Bundan başka, Dileo (2011) hemen hemen Kenmotsu manifoldların genelleştirilmiş bazı klasik sonuçlarını hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldları üzerinde incelemiştir. Ayrıca, hemen hemen alfa-Kenmotsu ve hemen hemen alfa kosimplektik manifoldlar Aktan vd. (2013), Öztürk vd. (2010, 2014) ve Öztürk (2009, 2016) tarafından da çalışılmıştır.

Bu çalışmaların ışığında, hemen hemen Kenmotsu psödo-metrik manifoldlarla ilgili bir sistematik çalışma veya sınıflandırma henüz tam olarak yapılamamış durumdadır. İlk sistemli sınıflandırma anlamındaki çalışma Wang ve Liu (2014) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada Riemann ve psödo durumları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konulmuştur. Özellikle, hemen hemen lokal simetrik Kenmotsu psödo-metrik manifoldlarla ilgili bazı sınıflandırıcı teoremler verilmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, hemen hemen Kenmotsu psödo-metrik manifoldların genelleştirilmesiyle elde edilen hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar tarafından ortaya çıkan geometri araştırılmıştır. Burada alfa fonksiyonu sabit bir reel sayı olarak alınmıştır. Ayrıca, $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde düzgün bir fonksiyon olarak da seçilebilir. Hemen hemen alfa-Kenmotsu ve hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar incelenerek, Riemann ve psödo durumlar arasındaki farklılıklar ve benzerlikler bulunmuştur. Bazı özel durumlar için sınıflandırıcı sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci bölümde, manifoldlar teorisi ile bağlantılı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, psödo-Riemann durumuyla ilgili gerekli kavramlar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, hemen hemen değme yapıların temel kavramları sunulmuştur. Üçüncü kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik yapılar

verilmiştir. Son kısım ise bazı paralel tensörlerin tanıtılmasına adanmıştır. Bu paralel tensör alanlarıyla verilen belli bazı manifoldlar için bazı sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapıların temel özellikleri elde edilerek Riemann ve psödo durumlar arasındaki farklılıklar ortaya çıkarılmış ve açıklayıcı iki örnekle izah edilmiştir. İkinci kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapıların temel bazı eğrilik özellikleri araştırılmıştır. Üçüncü kısımda, belli bazı paralel tensör alanlarına sahip hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapılar çalışılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son kısım da ise hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik yapılar ele alınarak bazı sınıflayıcı sonuçlar bulunmuştur.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel kavramlar verilmiştir.

2.1 Psödo-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda, psödo-Riemann manifoldlar için gerekli kavramlar sunulmuştur.

Tanım 2.1.1 Bir V reel vektör uzayı,

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü yardımıyla her $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve her $u, v, z \in V$ için

- (i) $g(u, v) = g(v, u)$,
- (ii) $g(c_1u + c_2v, z) = c_1g(u, z) + c_2g(v, z)$,
- $g(u, c_1v + c_2z) = c_1g(u, v) + c_2g(u, z)$

şartlarını sağlıyorsa g dönüşümüne V üzerinde bir simetrik bilinear form adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2 Bir V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olmak üzere, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- (i) Her $u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) > 0$ ise g pozitif tanımlıdır,
- (ii) Her $u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) < 0$ ise g negatif tanımlıdır,
- (iii) Her $u \in V$ için $g(u, u) \geq 0$ ise g pozitif yarı-tanımlıdır,
- (iv) Her $u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) \leq 0$ ise g negatif yarı-tanımlıdır

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3 V bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde simetrik bilinear form olsun.

O zaman $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere, her $u \in V$ için

$$g(u, \xi) = 0$$

şartı sağlanıyorsa g ye V üzerinde dejenere adı verilir. Aksi halde, g ye dejenere değildir denir. Başka bir deyişle, g nin dejenere olmaması için gerek ve yeter koşul her $u \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

önermesinin sağlanmasıdır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.4 V bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde simetrik bilinear form olsun. O zaman

$$g|_w : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde maksimum boyutlu W altuzayının boyutuna g nin indeksi adı verilir ve v ile sembolize edilir (O’neill 1983).

Tanım 2.1.5 V bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde simetrik bilinear form olsun. O zaman

- (i) $j \neq k$ için $g(\beta_j, \beta_k) = 0$,
- (ii) $1 \leq j \leq \rho$ için $g(\beta_j, \beta_j) = 1$,
- (iii) $\rho + 1 \leq j \leq \rho + v$ için $g(\beta_j, \beta_j) = -1$,
- (iv) $\rho + v + 1 \leq j \leq n = \rho + v + \mu$ için $g(\beta_j, \beta_j) = 0$,

şartlarını sağlayan V nin bir $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ bazı mevcuttur (Duggal 1996).

Tanım 2.1.6 V reel vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan simetrik bilinear forma V üzerinde bir psödo-Öklid metriği veya skalar çarpım adı verilir. Buna göre g , V üzerinde bir psödo-Öklid metriği olmak üzere, (V, g) ikilisi de psödo-Öklid uzayı (skalar çarpım uzayı) olarak adlandırılır. Eğer g pozitif tanımlı ise bu durumda g bir Öklid metriğidir ve dolayısıyla (V, g) ikilisi de Öklid uzayı olarak adlandırılır. Eğer g nin indeksi $v = 1$ ise o zaman g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve (V, g) ikilisine de Lorentz (Minkowski) uzayı denir. Bundan başka, g nin dejenere olması durumunda V uzayına g ye göre dejenere (lightlike) vektör uzayı adı verilir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.7 M , C^∞ sınıfından bir manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olmak üzere,

$$g|_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, dejenere olmayan ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipli tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör alanı adı verilir (O’neill 1983).

Tanım 2.1.8 M , C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M manifoldu bir g metrik tensör alanı ile donatılmış ise M ye psödo-Riemann (yarı-Riemann) manifoldu adı verilir (O’neill 1983).

Tanım 2.1.9 Bir M psödo-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensör alanının indeksine psödo-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile sembolize edilir. Eğer indeks v olarak alınır $0 \leq v \leq boyM$ dir. Özel olarak, $v = 0$ seçilirse her $p \in M$ için metrik tensör T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan M bir Riemann manifoldu olacaktır. Ayrıca, $boyM = n \geq 2$ ve $v = 1$ durumunda ise o zaman M ye bir Lorentz manifoldu adı verilir (O’neill 1983).

Tanım 2.1.10 C^∞ sınıftan n -boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\longrightarrow T_pM \\ p &\longrightarrow \mathcal{D}_p \subset T_pM \end{aligned}$$

biçiminde verilen $\mathcal{D}$ dönüşümüne r -boyutlu bir dağılım ve M üzerindeki tanjant demeti $\Gamma(TM)$ olmak üzere, $X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ oluyorsa X vektör alanına $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ için $\mathcal{D}_p$ üzerinde r tane dif.bilir lineer bağımsız vektör alanı mevcutsa $\mathcal{D}$ ye dif.bilirdir adı verilir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.11 C^∞ sınıftan n -boyutlu bir manifold M olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t, p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

- (i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,
- (ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M nin dif.bilir bir 1-parametrelili grubu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.12 C^∞ sınıftan n -boyutlu bir manifold M ve M üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametrelili grup φ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M$ için

$$(\mathcal{L}_X K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_p - (\varphi_t K)_p]$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nin Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.1 C^∞ sınıfından n -boyutlu bir manifold M olsun. $\mathcal{L}$, M üzerinde tanımlı bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi olmak üzere,

- (i) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, (Y ve Z herhangi tensör alanları)
- (ii) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f , K cismi üzerinde bir fonksiyon)
- (iii) $\mathcal{L}_X V = [X, V]$, (V herhangi bir tensör alanı)
- (iv) $(\mathcal{L}_X \gamma)(Y, Z) = X(\gamma(Y, Z)) - \gamma([X, Y], Z) - \gamma(Y, [X, Z])$, (γ , $(0, 2)$ -tipli bir tensör alanı)

önergeleri sağlanır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.13 C^∞ sınıfından n -boyutlu bir manifold M olsun. M üzerindeki tanjant demeti $\Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\xrightarrow{\text{bilineer}} \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için

- (i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
- (iii) $\nabla_X(f Y) = f \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir konneksiyon denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.14 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

- (i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),
- (ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ konneksiyonuna M nin Levi-Civita konneksiyonu denir. Bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Koszul formülü ile tek bir şekilde karakterize edilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.15 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita

konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan $(1, 3)$ -tipli tensör alanı R ye M nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall X, Y, Z, V, W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

- (i) $g(R(X, Y)Z, V) = -g(R(Y, X)Z, V)$,
- (ii) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,
- (iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (iv) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$,

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.16 (M, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan manifold olsun. Bu durumda, M üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.17 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olmak üzere,

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

değerine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir. Burada eğer $g|_{\Pi}$ pozitif tanımlı ise paralel kenarın alanı pozitif, eğer $g|_{\Pi}$ negatif tanımlı ise paralel kenarın alanı negatiftir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.18 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longrightarrow S(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)Y_p, e_i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı $(0, 2)$ -tipindeki S tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü ve $S(X_p, Y_p)$ değerine de Ricci eğriliği denir. Burada $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ dır.

Ayrıca, $(0, 2)$ -tipli Q Ricci operatörü

$$S(X_p, Y_p) = g(QX_p, Y_p)$$

eşitliği ile tanımlıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.19 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i S(e_i, e_i)$$

değerine M nin skalar eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.20 $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g})$, (M^{n+p}, g) psödo-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O halde, $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\widetilde{M}^n$ üzerinde bir lokal ortonormal baz olmak üzere,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i B(e_i, e_i)$$

ile verilen H vektör alanına $\widetilde{M}^n$ nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Burada B , $\widetilde{M}^n$ nin ikinci temel formudur. Özel olarak, ikinci temel form özdeş olarak sıfır $\widetilde{M}^n$ ye total geodeziktir denir. Eğer $H = 0$ ise $\widetilde{M}^n$ psödo-Riemann altmanifoldu minimaldir denir. H nin normuna $\widetilde{M}^n$ nin ortalama eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.21 (M^{n+p}, g) psödo-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g})$ olsun. O zaman keyfi vektör alanları için

$$B(X, Y) = \widetilde{g}(X, Y)H$$

şartı sağlanıyorsa $\widetilde{M}^n$ ye total umbilik altmanifold denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.22 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu ve R de M nin eğrilik tensör alanı olsun. M nin her noktasında R özdeş olarak sıfır ($R = 0$) ise M flattir. Ayrıca, $\nabla R = 0$ ise o zaman, M ye lokal simetrik uzay denir (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.2 (M, g) bir psödo-Riemann manifoldu olsun. M nin flat olması için gerek ve yeter şart kesit eğrilik fonksiyonu K nin özdeş olarak sıfır olmasıdır (O'Neill 1983).

2.2 Hemen Hemen Değme Yapılar

Bu kısımda, hemen hemen değme yapılar tanıtılmıştır.

Tanım 2.2.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold M olsun. ϕ, ξ, η üçlüsü de M üzerinde, sırasıyla, $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer bu üçlü manifold üzerinde keyfi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.3)$$

denklemlerini sağlıyorsa (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı denir. Bu yapı ile birlikte M ye de bir hemen hemen değme manifold adı verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

eşitliklerini sağlıyorsa g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik ve (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapı denir. ve Bu dördü ile birlikte M de hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır (Yano and Kon 1984).

Sonuç 2.2.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. O halde

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y) \quad (2.5)$$

eşitliği yazılır. Yani, $(1, 1)$ -tipli tensör alanı ϕ ters simetriktir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.3 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. O zaman

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu adı verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.4 n -boyutlu (M, g) bir Riemann manifoldu ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ M nin lokal koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M üzerinde bir hacim formu denir. Burada dx_i , M üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.5 n -boyutlu (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir hacim formu mevcutsa M ye yönlendirilebilirdir denir (Yano and Kon 1984).

Sonuç 2.2.2 Tanım 2.1.3 ve temel 2-formu ters simetrik olduğundan $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ eşitliği sağlar. O halde, Tanım 2.2.5 den dolayı M hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Chien and Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6 M , n -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. w , 1-form olmak üzere,

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y]$$

şeklinde tanımlıdır. w , 2-form olarak seçilirse

$$\begin{aligned} 3dw(X, Y, Z) &= X(w(Y, Z)) + Y(w(Z, X)) + Z(w(X, Y)) \\ &\quad - w([X, Y], Z) - w([Y, Z], X) - w([Z, X], Y) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada X, Y, Z keyfi vektör alanlarıdır (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.2.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ve ∇ da Riemann konneksiyonu olsun. O zaman aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$(i) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z),$$

$$(ii) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z,$$

$$(iii) (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y),$$

$$(iv) 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X,$$

$$(v) 3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z).$$

Burada $\bigoplus_{X, Y, Z}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Bundan başka, M nin açık bir altcümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^n \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\}$$

biçiminde yazılır (Chien and Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7 M , n -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Eğer M nin her q noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_q M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması varsa, bu durumda M üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı denir. Bu yapı ile verilen M bir hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.8 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. O halde, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f \frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alanı; t , $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.9 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. Bu durumda $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.10 M , n -boyutlu bir C^∞ manifold ve M üzerinde $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı G olsun. Keyfi vektör alanları için

$$N_G(X, Y) = G^2[X, Y] + [GX, GY] - G[GX, Y] - G[X, GY]$$

ile verilen N_G tensör alanı G tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanı olarak adlandırılır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.11 J , n -boyutlu bir M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.10 dan M üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanı

$$N_J(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

biçiminde tanımlıdır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.12 (M, J) , $(2n)$ -boyutlu bir hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilir denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.13 M , $(2n)$ -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise o zaman hemen hemen değme yapısı normaldir denir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.2.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. M üzerindeki hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

denkleminin sağlamasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanıdır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.2.14 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. Bu durumda

$$d\Phi = 0 \text{ } (\Phi, \text{kapalıdır}), \quad d\eta = 0 \text{ } (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartları sağlanıyorsa M hemen hemen kosimplektik manifold olarak adlandırılır. Eğer M normal ise M ye kosimplektik manifold denir (Blair 2002).

Teorem 2.2.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Blair 2002).

2.3 Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Yapılar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen alfa-kosimplektik yapılarla ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \tag{2.7}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M ye bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.3.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu M olsun. Bu durumda

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \quad \xi' = \alpha\xi, \quad \phi' = \phi, \quad g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim and Pak 2005).

Teorem 2.3.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. M nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart keyfi vektör alanları için

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \quad \nabla_X \xi = -\phi^2 X$$

dır (Kenmotsu 1972).

Tanım 2.3.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun. Alfa keyfi bir reel sayı olmak üzere, M üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (2.9)$$

denklemleri aynı anda gerçekleşiyor ise M ye hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için yapı hemen hemen kosimplektik ve $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsudur (Kim and Pak 2005).

Önerme 2.3.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. Bu durumda, keyfi vektör alanları için

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi hX, \quad (\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0, \quad \delta\eta = -2\alpha n, \quad \dot{I}z(h) = 0, \quad (2.12)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\phi Y, hX), \quad (2.13)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -\alpha\phi^2, \quad (\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0, \quad (2.14)$$

denklemleri sağlanır (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.3 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned} \quad (2.15)$$

eğrilik özelliği sağlanır (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.4 $(2n + 1)$ -boyutlu bir lokal simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. O zaman $\nabla_\xi h = 0$ denklemi sağlanır (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.5 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. O halde, aşağıdaki eğrilik özellikleri geçerlidir:

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + [\alpha^2 + \xi(\alpha)] [\eta(X)Y - \eta(Y)X], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$R(X, \xi)\xi = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \phi^2 X + 2\alpha \phi hX - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X, \quad (2.17)$$

$$R(X, \xi)\xi - \phi R(\phi X, \xi)\xi = 2 [(\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X - h^2 X], \quad (2.18)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X, \xi)\xi - [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X, \quad (2.19)$$

$$S(X, \xi) = -2n [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \eta(X) - (\operatorname{div}(\phi h))X, \quad (2.20)$$

$$S(\xi, \xi) = - \left[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2) \right], \quad (2.21)$$

burada alfa M üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyon ve $\xi(\alpha)$ gösterimi alfa düzgün fonksiyonunun ξ vektör alanı yönündeki ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevidir (Aktan *et al.* 2013).

Tanım 2.3.3 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun.

Her $p \in M$ için

$$\mathcal{D}_p = \ker \eta_p = \{X \in T_p M : \eta(X_p) = 0\} \quad (2.22)$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ olmak üzere, $\operatorname{boy}(\mathcal{D}_p) = 2n$ olduğundan $\mathcal{D}$, M nin bir $(2n)$ -boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımına $(2n)$ -boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir (Kim and Pak 2007).

Önerme 2.3.6 Bir hemen hemen kosimplektik manifold bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim and Pak 2007).

Teorem 2.3.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu M ve $h = 0$ olsun. O zaman, M manifoldu $M' \times_{f^2} N^{2n}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada N^{2n} bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık M' ve bazı c pozitif sabitleri için $f^2 = ce^{2t}$ dır (Pastore and Dileo 2007).

Önerme 2.3.7 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. Bu durumda,

- (i) $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,
- (ii) $\alpha = 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu total geodeziktir,
- (iii) $\alpha \neq 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter şart $h = 0$ olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Önerme 2.3.8 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. O zaman, M nin alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Önerme 2.3.9 $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldu M olsun. Bu durumda M nin alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$ olmasıdır (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.10 M , 3-boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldu $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$ şartını sağlıyorsa bir alfa-kosimplektik manifoldudur.

2.4 Bazı Paralel Tensör Alanları

Bu kısımda, bazı paralel tensör alanları tanıtılarak hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde özellikle h ve ϕh tensör alanlarının eta-paralelligi ile ilgili bazı sonuçlar hatırlatılmıştır.

Tanım 2.4.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde herhangi simetrik $(1, 1)$ -tipli tensör alanı T olmak üzere, her $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ olmak üzere,

$$g((\nabla_X T)Y, Z) = 0 \quad (2.23)$$

şartını sağlamıyorsa T ye eta-paraleldir denir (Boeckx and Cho 2005).

Tanım 2.4.2 (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde herhangi simetrik $(1, 1)$ -tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \quad (2.24)$$

ise T ye Codazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 2.4.3 (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde herhangi simetrik $(1, 1)$ -tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$g((\nabla_X T)Y, Z) + g((\nabla_Y T)Z, X) + g((\nabla_Z T)X, Y) = 0 \quad (2.25)$$

eşitliği sağlamıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Tanım 2.4.4 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. Her $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ olmak üzere, M üzerinde herhangi simetrik $(1, 1)$ -tipli T tensör alanı

$$g((\nabla_X T)Y, Z) + g((\nabla_Y T)Z, X) + g((\nabla_Z T)X, Y) = 0 \quad (2.26)$$

eşitliği sağlamıyorsa T ye devirli eta-paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Önerme 2.4.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. Eğer ϕh tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \eta(X) [lY - (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 Y - 2\alpha\phi hY + h^2 Y] \\ &\quad - \eta(Y) [\alpha\phi hX - h^2 X] - g(Y, \alpha\phi hX - h^2 X)\xi \end{aligned} \quad (2.27)$$

denklemini geçerlidir (Aktan *et al.* 2013). Burada alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde düzgün bir fonksiyondur.

Önerme 2.4.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. Eğer ϕh tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \quad (2.28)$$

denklemini sağlanır (Aktan *et al.* 2013). Burada alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyondur.

Önerme 2.4.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. Eğer h tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)Y &= -\eta(X) [\phi lY + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi Y + 2\alpha hY + \phi h^2 Y] \\ &\quad -\eta(Y) [-\alpha \phi^2 hX + \phi h^2 X] + g(Y, \alpha hX + \phi h^2 X)\xi \end{aligned} \quad (2.29)$$

denklemini sağlanır (Aktan *et al.* 2013). Burada $l = R(., \xi)\xi$ ve alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyondur.

Tanım 2.4.5 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. Her X, Y vektör alanları için

$$g(\tau X, Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y)$$

eşitliği ile verilen τ tensör alanına torsiyon tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Önerme 2.4.4 $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold M olsun. O zaman, M manifoldu için τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = 2\nabla_X \xi = -2AX \quad (2.30)$$

biçimindedir (Öztürk 2009).

3 HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK PSÖDO-METRİK

MANİFOLDLAR

Bu bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.1 Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Psödo-Metrik Yapılar

Bu kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapılar için temel özellikler elde edilmiştir. Bu tür manifoldlar kullanılarak psödo ve Riemann durumlar arasındaki ilişkiler ortaya çıkarılmıştır.

Tanım 3.1.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M üzerinde bir g psödo-Riemann metriği

$$\begin{aligned}\eta(X) &= \varepsilon g(\xi, X), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \varepsilon \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

eşitliklerini sağlıyorsa g psödo-Riemann metriğine M üzerinde hemen hemen değme psödo-Riemann metrik adı verilir. Bu metrikle verilen (ϕ, ξ, η, g) dörtlü yapısına da hemen hemen psödo-metrik yapı ve bu dörtlüyle birlikte verilen M ye de hemen hemen psödo değme metrik manifold denir. Burada $g(\xi, \xi) = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ olarak alınmıştır (Wang and Liu 2014).

Tanım 3.1.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen psödo değme metrik manifold olsun. O zaman M üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)\tag{3.2}$$

denklemleri sağlanıyorsa M ye hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold denir. Burada alfa reel sabittir.

Hatırlatma 3.1.1 İyi bilindiği üzere hemen hemen değme yapıların normallik şartı ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanının özdeş olarak sıfır olmasıdır. Böylece $\alpha \neq 0$ için bir alfa-Kenmotsu manifoldu bir normal hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik

manifold olur. Burada $\varepsilon = 1$ ve M nin metriği Riemann metriğidir. Benzer olarak, $\alpha = 0$ için bir alfa-kosimplektik manifoldu bir normal hemen hemen alfa-kosimplektik psödo metrik manifolddur. Özel olarak $\alpha = 1$ olmak üzere, bir Kenmotsu manifoldu bir normal hemen hemen Kenmotsu psödo-metrik manifolddur. $\alpha \neq 0$ durumunda bir hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold M bir normal hemen hemen değme yapıya sahip olduğunda artık M manifoldu bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olarak adlandırılır. Bu tez çalışması boyunca ∇ ve $\Gamma(TM)$ sırasıyla, g psödo-Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ve M üzerindeki tüm tanjant vektörlerinin Lie cebiri olsun. Dolayısıyla, Koszul formülünü hesaplamalarımızda kullanabiliriz.

Yardımcı Teorem 3.1.1 $(\phi, \xi, \eta,)$ bir hemen hemen değme yapı ve g de $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir psödo-Riemann metrik olsun. O zaman her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &+ g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X) + \varepsilon N^{(1)}(Y, Z)\eta(X) \\ &+ 2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dir. Burada $N^{(0)}, N^{(1)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(0)}(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (3.4)$$

$$N^{(1)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \quad (3.5)$$

dir. Ayrıca, $\mathcal{L}_X$ de X vektör alanı yönündeki Lie türevidir (Calvaruso and Perrone 2010).

Önerme 3.1.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X - \phi hX \quad (3.7)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0 \quad (3.8)$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \quad (3.9)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha [\varepsilon g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + \varepsilon g(\phi Y, hX) \quad (3.10)$$

$$\dot{I}z(h) = 0, \quad h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -\alpha \phi^2 \quad (3.11)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Öncelikle (3.3) Koszul formülünü göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &+ g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X) + \varepsilon N^{(1)}(Y, Z)\eta(X) \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. Önerme 2.2.1 in (i), (ii) ve (v) şartları kullanılarak Y yerine ξ vektör alanı seçilirse

$$2g((\nabla_X \phi)\xi, Z) = 2g(\phi Z, X) + g(N^{(0)}(\xi, Z), \phi X) + \varepsilon N^{(1)}(\xi, Z)\eta(X) \quad (3.13)$$

elde edilir. Buradan $N^{(0)}$ ve $N^{(1)}$ tensör alanları hesaba katılarak

$$N^{(0)}(\xi, Z) = -[\xi, Z] + \eta([\xi, Z])\xi, \quad N^{(1)}(\xi, Z) = \eta([\phi Z, \xi]) \quad (3.14)$$

yazılır. Böylece (3.14) denklemleri (3.13) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)\xi, Z) &= 2g(\phi Z, X) - g((\mathcal{L}_\xi \phi) Z, X) + \eta(X)\varepsilon(\eta[\xi, \phi Z] + \eta[\xi, \phi Z]) \\ &= -2g(\phi X, Z) - g((\mathcal{L}_\xi \phi) Z, X) \end{aligned}$$

haline indirgenir. Burada özel olarak, h simetrik $(1, 1)$ -tipli tensör alanı her keyfi Z vektör alanı için

$$hZ = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi) Z$$

şeklinde seçilirse

$$g((\nabla_X \phi)\xi, Z) = -g(\alpha \phi X, Z) - g(hZ, X) \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradan

$$g((\nabla_X \phi)\xi, Z) = g(-\alpha \phi X - hX, Z)$$

ve

$$(\nabla_X \phi)\xi = -\alpha \phi X - hX$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X - \phi hX$$

sonucuna ulaşılır. Bu son eşitlikte X yerine ξ vektör alanı seçilirse $\nabla_\xi \xi = 0$ elde edilir. Burada $h(\xi) = 0$ olduğu tanımından açıktır. Bundan başka, (3.12) denkleminde X yerine ξ vektör alanı seçilirse

$$2g((\nabla_\xi \phi)Y, Z) = -2g(\phi Y, Z) - 2g(Y, \phi Z) + \varepsilon N^{(1)}(Y, Z)$$

yazılır. Buradan

$$2g((\nabla_\xi \phi)Y, Z) = \varepsilon N^{(1)}(Y, Z) = 0$$

bulunur ki burada Z vektör alanı sıfırdan farklı olduğundan $\nabla_\xi \phi = 0$ sonucu elde edilir. Şimdi, $(\phi \circ h)$ ve $(h \circ \phi)$ toplamını elde etmeye çalışalım. O halde, her keyfi X ve Y vektör alanları için

$$\begin{aligned} \phi(hX) + h(\phi X) &= \frac{1}{2} (\phi [\xi, \phi X] - \phi^2 [\xi, X] + [\xi, \phi^2 X] - \phi [\xi, \phi X]) \\ &= \frac{1}{2} (-\eta(\nabla_\xi X)\xi + \eta(\nabla_X \xi)\xi + \varepsilon \nabla_\xi g(X, \xi)\xi) \\ &= \eta(\nabla_X \xi)\xi \end{aligned}$$

dır. Buradan $(\phi \circ h)$ ve $(h \circ \phi)$ toplamı özdeş olarak sıfırdır. Bunlara ilaveten, Önerme 2.2.1 in (iii) şartını göz önüne alalım. Bu durumda keyfi X ve Y vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y &= \varepsilon g(Y, \nabla_X \xi) \\ &= \varepsilon g(Y, -\alpha \phi^2 X - \phi hX) \\ &= \varepsilon \alpha g(\phi Y, \phi X) - \varepsilon g(Y, \phi hX) \\ &= \varepsilon \alpha g(X, Y) - \varepsilon^2 \alpha \eta(X)\eta(Y) - \varepsilon g(Y, \phi hX) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\varepsilon^2 = 1$ olduğu aşikardır. Böylece istenen sonuç elde edilir. (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden (3.11) eşitlikleri kolayca elde edilir. Burada h simetrik tensörü self-adjoint olup, $h\phi = -\phi h$, $h^* = -\phi h$ olmak üzere, $h^*\phi = -\phi h^*$, $h^2 = h^{*2}$ ve $h\xi = \dot{I}z(h) = 0$ dır.

Önerme 3.1.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= -2g\alpha(\varepsilon g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X, Z) \\ &\quad + g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X) \end{aligned} \tag{3.16}$$

denklemini geçerlidir.

İspat: $N^{(1)}$ tensör alanının tanımından

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(Y, Z) &= (\mathcal{L}_{\phi Y} \eta)Z - (\mathcal{L}_{\phi Z} \eta)Y \\
&= (\phi Y)(\eta(Z)) - \eta([\phi Y, Z]) - (\phi Z)(\eta(Y)) + \eta([\phi Z, Y]) \\
&= 2d\eta(\phi Y, Z) - 2d\eta(\phi Z, Y)
\end{aligned}$$

yazılır. Biliyoruz ki, M üzerinde η kapalıdır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 3.1.1 göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\
&\quad + g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. Burada Önerme 2.2.1 in (i) ve (ii) şartları kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (3.16) denkleminde ulaşılır.

Yardımcı Teorem 3.1.2 M , $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her keyfi vektör alanları için

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

denklemini sağlar (Blair 2002).

Önerme 3.1.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = -\alpha [\eta(Y)\phi X - 2\varepsilon g(\phi X, Y)\xi] - \eta(Y)hX, \tag{3.18}$$

ve

$$\phi(\nabla_{\phi X} \phi)Y - (\nabla_X \phi)Y = 2\alpha\eta(Y)\phi X - \varepsilon(g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi) \tag{3.19}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat: Hipotezdeki denklemler gereğince ispata ulaşmak için (3.3) denklemiyle verilen Koszul formülünü ele alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 2\eta(X)\Phi(\phi Y, \phi Z) - 2[\eta(X)\Phi(Y, Z) + \eta(Y)\Phi(Z, X) \\
&\quad + \eta(Z)\Phi(X, Y)] + g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

yazılır. Bu son eşitlikte X ve Y sırasıyla, ϕX ve ϕY alınırsa

$$2g((\nabla_{\phi X}\phi)\phi Y, Z) = -2\eta(Z)\Phi(\phi X, \phi Y) + g(N^{(0)}(\phi Y, Z), \phi^2 X) \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.20) ve (3.21) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\phi)Y + (\nabla_{\phi X}\phi)\phi Y, Z) &= 2\{\eta(X)\Phi(\phi Y, \phi Z) - \eta(X)\Phi(Y, Z) - \eta(Y)\Phi(Z, X) \\ &\quad - \eta(Z)\Phi(X, Y) - \eta(Z)\Phi(\phi X, \phi Y)\} \\ &\quad - g(N^{(0)}(\phi Y, Z) + \phi N^{(0)}(Y, Z), X) + \frac{1}{\varepsilon}\eta(X)\eta(N^{(0)}(\phi Y, Z)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. Burada $N^{(0)}(\phi Y, Z) + \phi N^{(0)}(Y, Z)$ toplamı tanımları yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned} N^{(0)}(\phi Y, Z) + \phi N^{(0)}(Y, Z) &= -\phi[Y, Z] - \phi^2[\phi Y, Z] - \phi^2[Y, \phi Z] \\ &\quad + \phi^2[\phi Y, Z] + [\phi^2 Y, \phi Z] - \phi[\phi^2 Y, Z] \end{aligned}$$

denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} N^{(0)}(\phi Y, Z) + \phi N^{(0)}(Y, Z) &= -\varepsilon[g(\phi Y, \nabla_Z\xi)\xi + g(Y, \nabla_{\phi Z}\xi)\xi - g(\phi Y, \nabla_Z\xi)\xi \\ &\quad - g(\phi Z, \nabla_Y\xi)\xi] + \eta(Y)[\phi\nabla_Z\xi - \nabla_{\phi Z}\xi] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik sadeleştirilirse

$$N^{(0)}(\phi Y, Z) + \phi N^{(0)}(Y, Z) = 2\eta(Y)hZ \quad (3.23)$$

denklemine indirgenir. Buna ilaveten,

$$\eta(N^{(0)}(\phi Y, Z)) = \varepsilon g(N^{(0)}(\phi Y, Z), \xi)$$

eşitliği açılır ve düzenlenirse

$$\eta(N^{(0)}(\phi Y, Z)) = \varepsilon[g(\phi Z, \nabla_Y\xi) - g(Y, \nabla_{\phi Z}\xi)]$$

yazılır. Buradan

$$\eta(N^{(0)}(\phi Y, Z)) = -\alpha[g(\phi Z, \phi^2 Y) + g(Y, \phi Z)] + g(Y, hZ) + g(Z, \phi^2 hY)$$

dır. Yani,

$$\eta(N^{(0)}(\phi Y, Z)) = 0 \quad (3.24)$$

dır. (3.23) ve (3.24) denklemleri (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y, Z) &= -2\alpha\eta(Y)g(\phi X, Z) - 2\eta(Y)g(hX, Z) \\ &\quad + 4\varepsilon\alpha\eta(Z)g(\phi X, Y) \end{aligned} \quad (3.25)$$

bulunur. (3.25) eşitliğinden (3.18) denklemi elde edilir. Şimdi, (3.19) eşitliğini de (3.18) eşitliğinin bir sonucu olarak ispatlamaya çalışalım. M üzerinde $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = \nabla_{\phi X} \phi^2 Y - \phi(\nabla_{\phi X} \phi Y)$$

denklemi açılır, her iki tarafına $(\nabla_X \phi)Y$ ilave edilirse ve (3.18) eşitliği yardımıyla

$$(\nabla_X \phi)Y - \phi(\nabla_{\phi X} \phi)Y = -2\alpha\eta(Y)\phi X + \varepsilon g(\alpha\phi X, Y)\xi + \varepsilon g(hX, Y)\xi$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.4 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda her keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} &g(R_{\xi X}Y, Z) - g(R_{\xi X}\phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}\phi Y, Z) \quad (3.26) \\ &= 2(\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z) + 2\alpha^2\eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2\eta(Z)g(X, Y) \\ &\quad - 2\alpha\eta(Y)g(\phi hX, Z) + 2\alpha\eta(Z)g(\phi hX, Y) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $g(R_{\xi X}Y, Z) = R(\xi, X, Y, Z) = g(X, R_{YZ}\xi)$ dır.

İspat: Öncelikle Tanım 2.1.15 de verilen Riemann eğrilik tensör özelliklerinin bu ispatın hesaplamalarında kullanılacağını hatırlatalım. Bundan sonraki kısımda ispatını vereceğimiz

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned}$$

eğrilik şartını göz önüne alalım. R Riemann eğrilik tensör alanının özelliklerini ve yukarıdaki eğrilik şartını hesaba katarak (3.26) eşitliğinin sol tarafı

$$2\alpha^2\eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2\eta(Z)g(X, Y) + K(X, Y, Z) - K(X, Z, Y) \quad (3.27)$$

denklemine indirgenir. Burada $K(X, Y, Z)$

$$\begin{aligned} K(X, Y, Z) = & g(X, -(\nabla_Y \phi h)Z + \phi(\nabla_Y \phi h)\phi Z)) \\ & + g(X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)Z) \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak alınmıştır. Diğer yandan,

$$g((\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z, X) + g(X, \phi(\nabla_{\phi Y} \phi h)Z)$$

ifadesi

$$g(\phi X, \phi(\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) + \eta(X)g(\xi, (\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) - (\nabla_{\phi Y} \phi h)Z \quad (3.29)$$

önermesine denktir. Ayrıca,

$$\phi(\nabla_Y \phi h)\phi Z - (\nabla_Y \phi h)Z$$

ifadesinin eşiti

$$h(\nabla_Y \phi)Z - (\nabla_Y \phi)hZ \quad (3.30)$$

dır. Bundan başka,

$$g(\xi, (\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) = \varepsilon [g(hY, hZ) - g(hZ, \phi Y)] \quad (3.31)$$

yazılır. (3.29), (3.30), (3.31), (3.18) ve (3.19) ifadeleri (3.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K(X, Y, Z) = & -\alpha\eta(X)g(\phi Y, hZ) - \alpha\eta(X)g(hZ, hY) + 2g(hX, (\nabla_Y \phi)Z) \\ & + 2\alpha\eta(Z)g(\phi Y, hX) - \alpha\eta(X)\varepsilon g(hZ, \phi Y) + \alpha\eta(X)\varepsilon g(hZ, hY) \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. Böylece (3.32) denkleminin yardımıyla (3.27) düzenlenir ve $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ ve

$$3d\Phi(Y, Z, hX) = (\nabla_Y \Phi)(Z, hX) + (\nabla_Z \Phi)(hX, Y) + (\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z)$$

denklemleri hesaba katılarak (3.32) denklemi (3.27) ifadesinde Y ve Z vektör alanlarının yer değiştirilerek yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.1.5 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. M üzerinde $(1, 1)$ -tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla\xi$ ve $h = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)$ ile verilsin. O zaman keyfi vektör alanları için

$$A \text{ ve } h \text{ simetriktir, } A\phi + \phi A = -2\alpha\phi \quad (3.33)$$

$$\eta \circ A = 0, \eta \circ h = 0, h = A \circ \phi + \alpha\phi \quad (3.34)$$

$$hA + Ah = -2\alpha h \quad (3.35)$$

$$\dot{I}z(A) = -\alpha \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i, \quad \dot{I}z(\phi A) = 0 \quad (3.36)$$

özellikleri geçerlidir.

İspat: M üzerinde keyfi vektör alanları için $A = -\nabla\xi = \phi^2 + \phi h$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(X, AY) &= g(X, \phi^2 Y + \phi h Y) \\ &= g(X, -Y + \eta(Y)\xi + \phi h Y) \\ &= -g(X, Y) + \eta(Y)\eta(X) - g(\phi X, hY) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(\phi^2 X + \phi h X, Y) \\ &= g(-X + \eta(X)\xi + \phi h X, Y) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) + g(\phi h X, Y) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) - g(h\phi X, Y) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) - g(\phi X, hY) \end{aligned}$$

olduğundan

$$g(X, AY) = g(AX, Y)$$

dir. Böylece A simetriktir. Benzer olarak, h tensör alanının tanımı $h = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\phi)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\phi)X, Y) &= g(X, \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\phi)Y) \\ g(hX, Y) &= g(X, hY) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı olmasaydı yukarıdaki eşitliği yazamazdık. O halde, h simetriktir. Ayrıca, $A\phi = (\alpha\phi^2 + \phi h)\phi$ ve $\phi A = \phi(\alpha\phi^2 + \phi h)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} A\phi + \phi A &= 2\alpha\phi^3 + \phi h\phi + \phi^2 h \\ &= -2\alpha\phi \end{aligned}$$

bulunur. A tensörünün tanımı gereğince

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= \eta(AX) \\ &= \varepsilon g(AX, \xi) \\ &= \varepsilon g(X, A\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\eta \circ h)X &= \eta(hX) \\ &= \varepsilon g(hX, \xi) \\ &= \varepsilon g(X, h\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Burada $A\xi = h\xi = 0$ olduğu açıktır. Bundan başka, AX tensör alanında X yerine ϕX yazılırsa

$$\begin{aligned} A\phi X &= \alpha\phi^3 X + \phi h\phi X \\ &= -\alpha\phi X + hX \end{aligned}$$

yazılır. Burada h tensör alanı çekilirse her X vektör alanı için $A\phi X + \alpha\phi X = hX$ elde edilir. Şimdi, AX tensör alanına h yı uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} hAX &= \alpha h\phi^2 X + h\phi hX \\ &= \alpha\phi^2 hX - \phi h^2 X \\ &= -\alpha hX - \phi h^2 X \end{aligned}$$

ve yerlerini deđiřtirerek

$$\begin{aligned} AhX &= \alpha\phi^2hX + \phi h^2X \\ &= -\alpha hX + \phi h^2X \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hAX ve AhX taraf tarafa toplanırrsa istenen sonuca ulaşılır. Son olarak, A tensörünün izi

$$\begin{aligned} \dot{I}z(A) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(AE_i, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\alpha\phi^2 E_i + \phi h E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha \varepsilon_i g(\phi^2 E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\phi h E_i, E_i) \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\phi E_i, \phi E_i) + \varepsilon_i \dot{I}z(\phi h), \quad \dot{I}z(\phi h) = 0 \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i, \quad \phi\xi = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, ϕA tensörünün izi

$$\begin{aligned} \dot{I}z(\phi A) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\phi A E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\alpha\phi^3 E_i + \phi^2 h E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(-\alpha\phi E_i - h E_i, E_i) \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i [g(\phi E_i, E_i) - g(h E_i, E_i)], \quad \dot{I}z(h) = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Örnek 3.1.1 $\mathbb{R}_1^3$ uzayının standart koordinat sistemi (u, v, z) olmak üzere, 3-boyutlu $M \subset \mathbb{R}_1^3$ manifoldu,

$$M = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}_1^3 : z \neq 0\}.$$

cümlesiyle tanımlansın. Ayrıca, M nin bir bazı

$$e_1 = e^{2z^2} \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = e^{2z^2} \frac{\partial}{\partial v}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olsun. Ayrıca, aşağıdaki denklemlerin varlığını kabul edelim:

$$g = \frac{1}{e^{4z^2}} (\varepsilon_1 du_i^2 + \varepsilon_2 dv^2) + \varepsilon dz^2, \quad \eta = dz,$$

$$\phi(\xi) = 0, \quad \phi(e_1) = e_2, \quad \phi(e_2) = -e_1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)e_3, \quad \eta(X) = \varepsilon g(e_3, X), \quad \eta(e_3) = g(e_3, e_3) = \varepsilon$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \varepsilon \eta(X)\eta(Y), \quad \varepsilon_i = g(e_i, e_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Bu durumda M üzerinde bir hemen hemen değme psödo-metrik yapısı sağlanır. Böylece yapının hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik olduğunu ispatlamak için $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemlerinin varlığını göstermeliyiz. Burada $d\eta = 0$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $\Phi(e_1, e_2) = -\varepsilon_i$ ve bu durumun dışındaki tüm Φ_{ij} ler $i \leq j$ için $\Phi_{ij} = 0$ dır. Bu nedenle,

$$\Phi \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = -\varepsilon_i \frac{1}{e^{4z^2}}$$

ve

$$\Phi = -\varepsilon_i \frac{1}{e^{4z^2}} (du \wedge dv)$$

dır. Buradan

$$d\Phi = \varepsilon_i 8z \frac{1}{e^{4z^2}} (du \wedge dv \wedge dz)$$

dır. O halde, $\eta = dz$ ve son eşitlik göz önüne alınırsa

$$d\Phi = -\varepsilon_i 8z (\eta \wedge \Phi)$$

olup

$$\alpha = -4z$$

şeklinde düzgün bir fonksiyondur. Bundan başka, bu yapı $N_\phi = 0$ denklemini sağladığından üzerinde çalışılan manifold alfa-kosimplektik psödo-metriktir.

Örnek 3.1.2 $\mathbb{R}_p^{2n+1}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, z)$ standart koordinat sistemi ve $M \subset \mathbb{R}_p^{2n+1}$,

$$M = \{(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} : z \neq 0\}.$$

ile verilen $(2n+1)$ -boyutlu bir psödo-metrik manifold olsun. Ayrıca, M nin bir global bazını

$$U_i = 2z \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad V_i = -\frac{2}{z^3} \frac{\partial}{\partial v_i}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ile tanımlayalım. Bundan başka, g metriğini

$$g = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \frac{1}{z^2} du_i^2 + \varepsilon_i z^6 dv_i^2 \right) + \varepsilon dz^2, \quad \eta = dz,$$

şeklinde tanımlayalım. O halde,

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = -\frac{1}{z^4}\frac{\partial}{\partial v_i}, \quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right) = z^4\frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \phi(\xi) = 0,$$

olmak üzere, (ϕ, ξ, η, g) yapısı M bir hemen hemen değme psödo-metrik yapısıdır. Burada seçilen tüm Φ_{ij} ler $\Phi_{ii} = \varepsilon_i g\left(\phi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right), \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \frac{z^2}{4}$ hariç hepsi özdeş olarak sıfırdır. Böylece

$$\Phi = \frac{z^2}{4}\varepsilon_i \sum_{i=1}^n (du_i \wedge dv_i),$$

olduğundan $d\Phi$ dış türevi

$$d\Phi = \frac{1}{2}z(du \wedge dv \wedge dz)$$

elde edilir. Bu nedenle, manifold üzerinde $\alpha(z) = \frac{1}{16z}$ ile verilen bir $\alpha(z)$ düzgün fonksiyonu vardır. Burada N_ϕ sıfırdan farklı olduğundan manifold yapısı bir hemen hemen yapıdadır.

3.2 Bazı Eğrilik Şartları

Bu kısımda, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar için temel eğrilik özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu kısımda elde edilen denklemler son iki kısımin ispatlarında oldukça önemli bir yere sahiptir.

Önerme 3.2.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda M üzerinde keyfi X ve Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned} \quad (3.37)$$

ve

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \quad (3.38)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (3.7) denklemini ve R eğrilik tensörü tanımından

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \\
&= \nabla_X(-\alpha\phi^2 Y - \phi h Y) - \nabla_Y(-\alpha\phi^2 X - \phi h X) \\
&\quad - (-\alpha\phi^2 [X, Y] - \phi h [X, Y]) \\
&= -\alpha\nabla_X \phi^2 Y - \nabla_X \phi h Y + \alpha\nabla_Y \phi^2 X + \nabla_Y \phi h X \\
&\quad + \alpha\phi^2 [X, Y] + \phi h [X, Y]
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\nabla_X(-\alpha\phi^2 Y - \phi h Y)$ kovaryant türev ifadesini açarsak

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y \xi &= \alpha\nabla_X Y - \alpha\eta(\nabla_X Y)\xi - \alpha^2 \varepsilon g(X, Y)\xi + \alpha\varepsilon g(Y, \phi h X) \\
&\quad - \alpha^2 X\eta(Y) + \alpha\eta(Y)\phi h X - \phi h(\nabla_X Y) - \nabla_X \phi h Y
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak, $\nabla_Y \nabla_X \xi$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y \xi &= \alpha\nabla_Y X - \alpha\eta(\nabla_Y X)\xi - \alpha^2 \varepsilon g(Y, X)\xi + \alpha\varepsilon g(X, \phi h Y) \\
&\quad - \alpha^2 Y\eta(X) + \alpha\eta(X)\phi h Y - \phi h(\nabla_Y X) - \nabla_Y \phi h X
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\nabla_{[X, Y]}\xi$ ifadesi de

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X, Y]}\xi &= \alpha\nabla_X Y - \alpha\nabla_Y X - \phi h(\nabla_X Y) + \phi h(\nabla_Y X) \\
&\quad - \alpha\varepsilon\eta(\nabla_X Y)\xi + \alpha\varepsilon\eta(\nabla_Y X)\xi
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\eta(X) = \varepsilon g(\xi, X)$ alınmıştır. O halde, gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapıldığında (3.37) eşitliği elde edilir. (3.37) denkleminin bir sonucu olarak $A = -\nabla \xi$ olmak üzere, (3.38) denkleminde kolayca ulaşılır.

Önerme 3.2.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda M üzerinde keyfi X ve Y vektör alanları için,

$$R(X, \xi)\xi = \alpha^2 \phi^2 X + 2\alpha\phi h X - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X \quad (3.39)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X, \xi)\xi - \alpha^2 \phi X - 2\alpha h X - \phi h^2 X \quad (3.40)$$

$$R(X, \xi)\xi - \phi R(\phi X, \xi)\xi = 2[\alpha^2 \phi^2 X - h^2 X] \quad (3.41)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Hipotez gereğince (3.37) denkleminde Y yerine ξ yazarsak

$$\begin{aligned} R(X, \xi)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)\xi - \eta(\xi)X] - \alpha [\eta(X)\phi h\xi - \eta(\xi)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_\xi \phi h)X - (\nabla_X \phi h)\xi \end{aligned} \quad (3.42)$$

bulunur. Burada $(\nabla_\xi \phi h)X$ ve $(\nabla_X \phi h)\xi$ kovaryant türevlerini sırasıyla, hesaplırsak

$$(\nabla_\xi \phi h)X = \phi(\nabla_\xi h)X$$

ve

$$(\nabla_X \phi h)\xi = h^2 X - \phi h X$$

yazılır. Bulunan bu son iki ifade (3.42) denkleminde kullanılırsa (3.39) denkleminde ulaşılır. M üzerinde Jakobi operatörü her keyfi X vektörü için

$$\begin{aligned} l(X) &= \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_{[X, \xi]} \xi \\ &= R(X, \xi)\xi \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. $l(X)$ operatörüne soldan ϕ tensör alanını tatbik edersek

$$\phi l(X) = -\alpha^2 \phi X - 2\alpha h X - \phi h^2 X - (\nabla_\xi h)X + \eta((\nabla_\xi h)X)\xi \quad (3.43)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$\begin{aligned} \eta((\nabla_\xi h)X)\xi &= \varepsilon g((\nabla_\xi h)X, \xi) \\ &= \varepsilon g(X, (\nabla_\xi h)\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece (3.43) denkleminde $\nabla_\xi h$ çekilirse (3.40) denklemi aşıkardır. Bundan başka, (3.39) denkleminde X yerine ϕX seçilirse

$$R(\phi X, \xi)\xi = \alpha^2 \phi^3 X + 2\alpha \phi h \phi X - h^2 \phi X + \phi(\nabla_\xi h)\phi X \quad (3.44)$$

bulunur. (3.39) ve (3.44) denklemlerinin yardımıyla

$$\begin{aligned} lX - \phi l \phi X &= 2\alpha^2 \phi^2 X - 2h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X + \phi^3(\nabla_\xi h)X \\ &= 2\alpha^2 \phi^2 X - 2h^2 X \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.2.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda M üzerinde keyfi X ve Y vektör alanları için,

$$S(X, \xi) = -2n\alpha^2\eta(X) - (\operatorname{div}(\phi h))X \quad (3.45)$$

$$S(\xi, \xi) = \dot{I}z(l) = - \left[2n\alpha^2 + \dot{I}z(h^2) \right] \quad (3.46)$$

$$\operatorname{div} \xi = 2\alpha n, \quad \operatorname{div} \eta = -2n\alpha\varepsilon, \quad (3.47)$$

önergeleri sağlanır.

İspat: İlk olarak, M üzerinde lokal ϕ -bazı olarak adlandırılan $\{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\} = \{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$ cümlesini göz önüne alalım. Ricci eğrilik tensörü yardımıyla (3.37) denklemi düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} S(X, \xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(E_i, X)\xi, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X)\xi, e_i) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i+n} g(R(\phi e_i, X)\xi, \phi e_i) \\ &\quad + \varepsilon_{2n+1} g(R(\xi, X)\xi, \xi) \end{aligned}$$

yazılır. Burada yukarıdaki denklemin son ifadesi olan

$$\varepsilon_{2n+1} g(R(\xi, X)\xi, \xi) = 0$$

dır. O halde,

$$\begin{aligned} S(X, \xi) &= -2n\alpha^2\eta(X) + \alpha\eta(X) \left[\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i g(\phi h e_i, e_i) + \varepsilon_{i+n} g(\phi h \phi e_i, \phi e_i)] \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i g((\nabla_X \phi h) e_i, e_i) + \varepsilon_{i+n} g((\nabla_X \phi h) \phi e_i, \phi e_i)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i g((\nabla_{e_i} \phi h) X, e_i) + \varepsilon_{i+n} g((\nabla_{\phi e_i} \phi h) X, \phi e_i)] \end{aligned}$$

elde edilir. M üzerinde diverjans operatörü $\operatorname{div}(\phi h)$

$$\operatorname{div}(\phi h) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g((\nabla_{E_i} \phi h) X, E_i)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} S(X, \xi) &= -2n\alpha^2\eta(X) - \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(E_i, X)\xi, E_i) \\ &= -2n\alpha^2\eta(X) - (\operatorname{div}(\phi h))X \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\dot{I}z(\phi h) = 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i g(\phi h e_i, e_i) + \varepsilon_{i+n} g(\phi h \phi e_i, \phi e_i)] = 0$$

dır. Böylece (3.45) denkleminin ispatı tamamlanır. Ayrıca, (3.45) denkleminde X yerine ξ yazarsak

$$S(\xi, \xi) = -2n\alpha^2 - (\operatorname{div}(\phi h))\xi \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada diverjans tanımından

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(\phi h))\xi &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g((\nabla_{E_i} \phi h)\xi, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} [\varepsilon_i g((h^2 E_i, E_i) - \varepsilon_i g(\phi h E_i, E_i))] \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g((h^2 E_i, E_i)) \\ &= \dot{I}z(h^2) \end{aligned}$$

olup, (3.48) denklemi

$$S(\xi, \xi) = -2n\alpha^2 - \dot{I}z(h^2)$$

haline dönüştür. Burada $S(\xi, \xi) = \dot{I}z(l)$ olduğu açıktır. Bu ispat ayrıca kesit eğriliğinin tanımından da verilebilir. M üzerinde tekrardan $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$ ile verilen ϕ -bazımı göz önüne alırsak sırasıyla, $\{\xi, e_i\}$ ve $\{\xi, \phi e_i\}$ dejenere olmayan düzlemlerinde yatan kesit eğrilikleri

$$K(\xi, e_i) = \varepsilon \varepsilon_i R(\xi, e_i, \xi, e_i) = \varepsilon \varepsilon_i g(l(e_i), e_i)$$

ile

$$K(\xi, \phi e_i) = \varepsilon \varepsilon_i R(\xi, \phi e_i, \xi, \phi e_i) = -\varepsilon \varepsilon_i g(\phi l \phi(e_i), e_i)$$

ile tanımlıdır. Burada tüm indisler $i = 1, \dots, n$ için $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = g(\phi e_i, \phi e_i) = \pm 1$ dır. Böylece

$$lX - \phi l\phi X = 2(\alpha^2 \phi^2 X - h^2 X)$$

ve yukarıdaki kesit eğriliği denklemlerinden

$$\begin{aligned} S(\xi, \xi) &= \sum_{i=1}^n R(\xi, e_i, \xi, e_i) + \sum_{i=1}^n R(\xi, \phi e_i, \xi, \phi e_i) \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [K(\xi, e_i) + K(\xi, \phi e_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n g(l(e_i) - \phi l\phi(e_i), e_i) \\ &= -2n\alpha^2 - \dot{I}z(h^2) \end{aligned}$$

bulunur. Bunlara ilaveten,

$$\operatorname{div} \eta = -\dot{I}z(\nabla \eta) = \delta \eta = -\sum_{i=1}^n \{(\nabla_{e_i} \eta)e_i + (\nabla_{\phi e_i} \eta)\phi e_i\}$$

olduğunu biliyoruz. Öncelikle diverjans tanımından

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \xi &= \dot{I}z(\nabla \xi) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [g(\nabla_{e_i} \xi, e_i) + g(\nabla_{\phi e_i} \xi, \phi e_i)] \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [g(e_i - \phi h e_i, e_i) + g(\phi e_i - \phi h \phi e_i, \phi e_i)] \\ &= 2\alpha n \end{aligned}$$

yazılır. Son olarak, $\operatorname{div} \eta$ tanımından

$$\operatorname{div} \eta = -\dot{I}z(\nabla \eta) = -\varepsilon \operatorname{div} \xi$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $\operatorname{div} \xi$ değeri yerine yazılırsa

$$\operatorname{div} \eta = -2n\alpha\varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

3.3 Bazı Paralellik Şartları

Bu kısımda üzerinde çalıştığımız hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar için bazı özel paralel tensör alanları araştırılmıştır.

Önerme 3.3.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, ϕh tensör alanının eta-paralel olması durumunda keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \eta(X) [lY - \alpha^2 \phi^2 Y - 2\alpha \phi h Y + h^2 Y] \\ &\quad - \eta(Y) [\alpha \phi h X - h^2 X] - \varepsilon g(Y, \alpha \phi h X - h^2 X) \xi \end{aligned} \quad (3.49)$$

denklemini sağlar.

İspat: Kabul edelim ki, ϕh tensör alanı eta-paralel olsun. O zaman her keyfi X vektör alanı için

$$X^T = X - \eta(X)\xi$$

olmak üzere, ϕh tensör alanının eta-paralellik tanımından

$$\begin{aligned} g((\nabla_{X^T} \phi h) Y^T, Z^T) &= 0 \\ g((\nabla_{X - \eta(X)\xi} \phi h) (Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi) &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} &g((\nabla_X \phi h) Y, Z) - \eta(X)g((\nabla_\xi \phi h) Y, Z) - \eta(Y)g((\nabla_X \phi h) \xi, Z) \\ &- \eta(Z)g((\nabla_X \phi h) Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y)g((\nabla_\xi \phi h) \xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z)g((\nabla_X \phi h) \xi, \xi) \\ &+ \eta(Z)\eta(X)g((\nabla_\xi \phi h) Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)g((\nabla_\xi \phi h) \xi, \xi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem sadeleştirildiğinde

$$g((\nabla_X \phi h) Y, \phi^2 Z) = -\eta(X)g((\nabla_\xi \phi h) Y, Z) - \eta(Y)g((\nabla_X \phi h) \xi, Z)$$

haline indirgenir. Yukarıdaki denklem (3.7) ve (3.9) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= -\eta(Y) [\alpha \phi h X - h^2 X] + \eta(X) (\nabla_\xi \phi h) Y \\ &\quad + \varepsilon [g(hY, hX)\xi + \alpha g(\phi Y, hX)\xi] \end{aligned}$$

yazılır. Burada $(\nabla_\xi \phi h) Y = \phi(\nabla_\xi h) Y$ eşitliği sağlandığından yukarıdaki denklem düzenlenirse (3.49) eşitliğine ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, h tensör alanı eta-paralellik şartını sağlarsa keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned}
(\nabla_X h)Y &= \eta(X)(\nabla_\xi h)Y - \eta(Y) [\alpha hX + \phi h^2 X] \\
&\quad - \varepsilon g(Y, \alpha hX + \phi h^2 X)\xi,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

denklemini geçerlidir.

İspat: Farz edelim ki, h tensör alanı eta-paralel olsun. Önerme 3.3.1 de kullanılan metodoloji ile

$$\begin{aligned}
&g((\nabla_X h)Y, Z) - \eta(X)g((\nabla_\xi h)Y, Z) - \eta(Y)g((\nabla_X h)\xi, Z) \\
&- \eta(Z)g((\nabla_X h)Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y)g((\nabla_\xi h)\xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z)g((\nabla_X h)\xi, \xi) \\
&+ \eta(Z)\eta(X)g((\nabla_\xi h)Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)g((\nabla_\xi h)\xi, \xi) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$g((\nabla_X h)Y, -\phi^2 Z) - \eta(X)g((\nabla_\xi h)Y, Z) - \eta(Y)g((\nabla_X h)\xi, Z) = 0$$

yazılır. Bu son ifade Z ye göre çekilirse

$$\begin{aligned}
(\nabla_X h)Y &= -\eta(X) [\phi lY + \alpha^2 \phi Y + 2\alpha hY + \phi h^2 Y] \\
&\quad - \eta(Y) [-\alpha \phi^2 hX + \phi h^2 X] + \varepsilon g((\nabla_X h)Y, \xi)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir Yukarıdaki denklem düzenlenirse istenen sonuç olan (3.50) denklemi elde edilir.

Teorem 3.3.1 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, ϕh tensör alanının eta-paralel olması durumunda keyfi vektör alanları için

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{3.51}$$

denklemini geçerlidir.

İspat: Hipotezden dolayı (3.37) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \alpha^2 \eta(X)Y - \alpha^2 \eta(Y)X - \alpha \eta(X)\phi hY + \alpha \eta(Y)\phi hX \\
&- \eta(X)(\nabla_\xi \phi h)Y + \eta(Y)[\alpha \phi hX - h^2 X] + \varepsilon g(Y, \alpha \phi hX - h^2 X)\xi \\
&+ \eta(Y)(\nabla_\xi \phi h)X - \eta(X)[\alpha \phi hY - h^2 Y] - \varepsilon g(X, \alpha \phi hY - h^2 Y)\xi
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= -\eta(X)lY + \eta(Y)lX + \eta(X)\alpha^2\phi^2Y \\
&\quad -\eta(Y)\alpha^2\phi^2X + \eta(X)\alpha^2Y - \eta(Y)\alpha^2X
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Bu da sadeleştirmeye birlikte istenen sonuçtur.

Teorem 3.3.2 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O halde, ϕh tensör alanının eta-paralel olması durumunda M üzerinde ξ vektör alanı Ricci operatörünün bir özvektörüdür.

İspat: $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$ cümlesi tanjant uzayın keyfi bir noktasındaki bir ortonormal baz olsun. Bu durumda (3.51) denkleminin her iki tarafı Z vektör alanı ile iç çarpılır ve $X = Z = e_i, 1 \leq i \leq 2n+1$ için, (3.51) denklemine kontraksiyon uygulanırsa

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(e_i, Y)\xi, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i [\eta(Y)g(le_i, e_i) - \eta(e_i)g(lY, e_i)]$$

elde edilir. Burada Y yerine ξ alındığında

$$S(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(le_i, e_i)$$

bulunur. Q Ricci operatörünün tanımından

$$Q\xi = \dot{I}z(l)\xi$$

yazılır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O zaman M üzerinde τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = 2\nabla_X \xi$$

dır.

İspat: τ tensör alanının tanımı

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = \mathcal{L}_\xi g(X, Y) + g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y)$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= g(-\alpha\phi^2 X - \phi h X, Y) + g(X, -\alpha\phi^2 Y - \phi h Y) \\
&= 2g(-\alpha\phi^2 X - \phi h X, Y)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece her keyfi X vektör alanı için $\tau X = -2A = 2\nabla_X \xi$ elde edilir.

Önerme 3.3.4 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda τ tensör alanı eta-paralel olduğunda

$$(\nabla_X \phi h) Y = \eta(X) (\nabla_\xi \phi h) Y - \eta(Y) \phi h (\nabla_X \xi) + \varepsilon g((\nabla_X \phi h) \xi, Y) \xi \quad (3.52)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: τ tensör alanının eta-parallellik tanımından

$$g((\nabla_{X^T} \tau) Y^T, Z^T) = 0$$

dır. $X^T = X - \eta(X)\xi$ olmak üzere, yukarıdaki eşitlik

$$(\nabla_X \tau) Y = \eta(X) (\nabla_\xi \tau) Y + \eta(Y) (\nabla_X \tau) \xi + g((\nabla_X \tau) Y, \xi) \xi \quad (3.53)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$(\nabla_X \tau) Y = -2\alpha\eta(Y) \nabla_X \xi - 2\alpha\eta(Y) g(\nabla_X \xi, Y) \xi - 2(\nabla_X \phi h) Y \quad (3.54)$$

bulunur. Bu son eşitlikte $Y = \xi$ alınırsa

$$(\nabla_X \tau) \xi = -2\alpha \nabla_X \xi + 2\phi h \nabla_X \xi \quad (3.55)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(\nabla_\xi \tau) Y = -2(\nabla_\xi \phi h) Y \quad (3.56)$$

dır. Burada (3.55) ve (3.56) eşitlikleri (3.53) ve (3.54) eşitliklerinde yerine yazılır, bulunan denklemler birbirlerine eşitlenirse (3.52) denkleminde ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. O zaman M üzerinde τ tensör alanı eta-paralel olduğunda ξ vektör alanı Ricci operatörünün bir özvektörüdür.

İspat: İlk olarak, (3.52) denklemini göz önüne alalım. Bu durumda $(\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y$ farkı

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y &= \eta(Y) (\nabla_\xi \phi h) X - \eta(X) \phi h (\nabla_Y \xi) + \varepsilon g((\nabla_Y \phi h) \xi, X) \xi \\ &\quad - \eta(X) (\nabla_\xi \phi h) Y + \eta(Y) \phi h (\nabla_X \xi) - \varepsilon g((\nabla_X \phi h) \xi, Y) \xi \end{aligned} \quad (3.57)$$

şeklinde yazılır. (3.57) düzenlenirse

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y &= \eta(Y) (\nabla_\xi \phi h) X - \eta(X) \phi h \nabla_Y \xi \\ &\quad - \eta(X) (\nabla_\xi \phi h) Y + \eta(Y) \phi h \nabla_X \xi \end{aligned} \quad (3.58)$$

bulunur. (3.37), (3.40) ve (3.58) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y + \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\ &\quad - \alpha [\eta(X) \phi h Y - \eta(Y) \phi h X] \\ &= \eta(Y) [-\phi^2 l X - \alpha^2 \phi^2 X - 2\alpha \phi h X - \phi^2 h^2 X] \\ &\quad - \eta(X) [-\phi^2 l Y - \alpha^2 \phi^2 Y - 2\alpha \phi h Y - \phi^2 h^2 Y] \\ &\quad - \eta(X) \phi h (-\alpha \phi^2 Y - \phi h Y) + \eta(Y) \phi h (-\alpha \phi^2 X - \phi h X) \\ &\quad + \alpha^2 \eta(X)Y - \alpha^2 \eta(Y)X - \alpha \eta(X) \phi h Y + \alpha \eta(Y) \phi h X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.51) denkleminde ulaşılır. Burada Q Ricci operatörünün tanımının kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda h tensör alanı eta-paralel ve $\nabla_\xi h = 0$ şartları birlikte sağlanıyorsa h nın karakteristik değerleri sabittir.

İspat: h nın bir karakteristik birim vektör alanı $W \in \mathcal{D}$, $h(W) = \mu W$ eşitliğiyle verilsin. Burada μ fonksiyonu, W vektör alanına karşılık gelen karakteristik bir fonksiyonudur. O halde, her $W \in \mathcal{D}$ için (3.50) denklemi

$$\begin{aligned} g((\nabla_X h)W, W) &= \eta(X)g((\nabla_\xi h)W, W) \\ &= \eta(X)\xi(\mu) \end{aligned} \quad (3.59)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$g((\nabla_X h)W, W) = X(\mu) \quad (3.60)$$

dır. Bu son iki denklem birbirine eşitlenirse

$$X(\mu) = \eta(X)\xi(\mu)$$

bulunur. Buradan herhangi bir vektör alanı için

$$d\mu = \eta \otimes \xi(\mu)$$

yazılır. Bundan başka, $\nabla_\xi h = 0$ olduğundan

$$g((\nabla_\xi h)W, W) = 0 = \xi(\mu)$$

dır. Böylece bu son üç denklemden dolayı $d\mu = 0$ olup, bu sonuç teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.5 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda τ tensörü devirli eta-paralel şartını sağladığında ξ vektör alanı Ricci operatörünün bir özvektörüdür.

İspat: Öncelikle devirli eta-paralel şartından dolayı M üzerinde

$$0 = g((\nabla_{X^T} \tau)Y^T, W^T) + g((\nabla_{Y^T} \tau)W^T, X^T) + g((\nabla_{W^T} \tau)X^T, Y^T)$$

denklemini geçerlidir. İspatı gerçekleştirmek için yukarıdaki üç ifadeyi hesaplamalıyız. Burada

$$\begin{aligned} g((\nabla_{X^T} \tau)Y^T, W^T) &= g((\nabla_X \tau)Y, W) - \eta(X)g((\nabla_\xi \tau)Y, W) \\ &\quad - \eta(Y)g((\nabla_X \tau)\xi, W) - \eta(W)g((\nabla_X \tau)Y, \xi) \end{aligned} \quad (3.61)$$

yazılır. Ayrıca, (3.53), (3.54), (3.55) ve (3.56) denklemleri ve basit hesaplamalarla elde edilen

$$g((\nabla_\xi \tau)Y, \xi) = 0, \quad g((\nabla_X \tau)\xi, \xi) = 0, \quad g((\nabla_\xi \tau)\xi, \xi) = 0$$

denklemler birlikte hesaba katılırsa (3.61) yardımıyla devirli toplam

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{X,Y,W} g((\nabla_X \tau)Y, W) - \eta(X) \bigoplus_{Y,W,\xi} g((\nabla_Y \tau)W, \xi) \\ &- \eta(Y) \bigoplus_{W,X,\xi} g((\nabla_W \tau)X, \xi) - \eta(W) \bigoplus_{X,Y,\xi} g((\nabla_X \tau)Y, \xi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\bigoplus_{X,Y,Z}$, X, Y, Z devirli toplamı göstermek üzere, yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{X,Y,Z} g((\nabla_X \phi h)Y, W) - \eta(X) [g((\nabla_\xi \phi h)Y, W) + g((\nabla_Y \phi h)W, \xi) \\ & - g(\phi h(\nabla_W \xi), Y)] - \eta(Y) [g((\nabla_\xi \phi h)W, X) + g((\nabla_W \phi h)X, \xi) \\ & - g(\phi h(\nabla_X \xi), W)] - \eta(W) [g((\nabla_X \phi h)Y, \xi) + g((\nabla_\xi \phi h)X, Y) \\ & - g(\phi h(\nabla_Y \xi), X)] = 0 \end{aligned}$$

haline indirgenir. Bu son eşitliğin her iki tarafına Y ve W ya göre kontraksiyon uygulanır ve sadeleştirilirse

$$\eta(X) \left[2n\alpha^2 + 3\dot{I}z(h^2) + \dot{I}z(l) \right] - 2(\operatorname{div}(\phi h))X = 0 \quad (3.62)$$

bulunur. (3.45) denkleminin yardımıyla (3.62) denklemi Q Ricci operatörünün de kullanılmasıyla

$$Q\xi = -\frac{3}{2} \left[\dot{I}z(h^2) + \frac{1}{3}\dot{I}z(l) + 2\alpha^2 n \right] \xi$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4 Hemen Hemen Alfa-Kenmotsu Psödo-Metrik Yapılar

Bu kısım ise hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifoldlara adanmıştır. Özellikle, lokal simetri şartı altında bazı belirleyici sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.4.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O zaman M nin bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olabilmesi için gerek ve yeter şart her keyfi X ve Y vektör alanları için

$$(\nabla_X \phi)Y, Z) = -\alpha [\varepsilon g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X] \quad (3.63)$$

denkleminin sağlamasıdır.

İspat: Hipotez gereğince öncelikle M nin bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.16) denklemini ve $N^{(0)}(Y, Z) = 0$ olduğunu takiben ispat tamamlanır. Tersine olarak, M nin hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olduğunu farz edelim. (3.63) denkleminde Y yerine ξ aldığımızda

$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X$ denklemini verir. O zaman

$$\begin{aligned}
d\eta(X, Y) &= \varepsilon X(g(Y, \xi)) - \varepsilon Y(g(X, \xi)) - \eta([X, Y]) \\
&= \varepsilon g(Y, \nabla_X \xi) + \varepsilon g(\nabla_X Y, \xi) - \varepsilon g(X, \nabla_Y \xi) - \varepsilon g(\xi, \nabla_Y X) - \eta([X, Y]) \\
&= \varepsilon \alpha g(X, \phi^2 Y) - \varepsilon \alpha g(Y, \phi^2 X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, (3.63) denklemi ve $d\Phi$ tanımı birlikte hesaba katılarak

$$\begin{aligned}
d\Phi(X, Y, Z) &= g(\nabla_X \phi Z, Y) - g(\nabla_Y \phi Z, X) + g(\nabla_Z \phi Y, X) \\
&\quad + g(\nabla_Z X, \phi Y) + g([X, Z], \phi Y) - g([Y, Z], \phi X) \\
&= 2\alpha \eta(Z)g(X, \phi Y) + 2\alpha \eta(X)g(Y, \phi Z) - 2\alpha \eta(Y)g(X, \phi Z)
\end{aligned}$$

denkleminde

$$d\Phi(X, Y, Z) = 2\alpha (\eta \wedge \Phi)(X, Y, Z)$$

bulunur. Son olarak, (3.7) denkleminde $h^* = -\phi h$ alalım. O halde, (3.7) ve $\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X$ denklemleri birlikte düşünülürse

$$h^* = h = 0$$

elde edilir. Böylece (3.1) ve (3.63) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
N_\phi(X, Y) &= \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] \\
&= -\phi(\nabla_X \phi Y) + \phi^2(\nabla_Y X) + \phi(\nabla_Y \phi X) - \phi^2(\nabla_Y X) \\
&\quad + \nabla_{\phi X} \phi Y - \phi(\nabla_{\phi X} Y) + \phi(\nabla_{\phi Y} X) - \nabla_{\phi Y} \phi X \\
&= -\alpha \phi (\varepsilon g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X) + \alpha \phi (\varepsilon g(\phi Y, X)\xi - \eta(X)\phi Y) \\
&\quad - \alpha (\varepsilon g(\phi^2 Y, X)\xi - \eta(X)\phi^2 Y) + \alpha (\varepsilon g(\phi^2 X, Y)\xi - \eta(Y)\phi^2 X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold ve $h = 0$ olsun. Bu taktirde, M manifoldu $M_\xi \times_f \widetilde{M}$ olacak şekilde

lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada $\widetilde{M}$ bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık M_ξ ve bazı c pozitif sabitleri için $f = ce^{\alpha t}$ dir.

İspat: İlk olarak, $\mathcal{D}$ sembolü ile ξ vektör alanına dik olan dağılımı gösterelim. Yani,

$$\mathcal{D} = \ker \eta = \text{Im } \phi$$

dır. Keyfi $X \in \mathcal{D}$ için $h = 0$ olduğunda (3.7) denkleminde

$$\nabla_X \xi = \alpha X$$

yazılır. $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldu ve $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $\widetilde{M}$ den M ye bir psödo-Riemann immersiyonunun ikinci temel formu $B(X, Y)$

$$\eta(B(X, Y)) = \eta(\nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y) = -g(\nabla_Y \xi, X) = -\alpha g(X, Y)$$

ile tanımlıdır. Böylece $\widetilde{M}$ manifoldu M nin bir total umbilik altmanifoldu olup ortalama eğrilik fonksiyonu

$$H = -\alpha \varepsilon \xi$$

ile verilir. (3.7) denklemini takiben $\nabla_\xi \xi = 0$ olduğu açıktır. O halde, M_ξ ξ vektör alanının bir integral eğrisi olmak üzere, M manifoldu $M_\xi \times_g \widetilde{M}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpım uzayıdır. Biliyoruz ki, H ortalama vektör alanı, π izdüşüm fonksiyonu

$$\pi : M_\xi \times_f \widetilde{M} \rightarrow M_\xi$$

bir psödo-Riemann submersiyon olmak üzere, $-\frac{1}{f} \text{grad } f$ ile ilgili bir π izdüşüm fonksiyonudur (Besse 1987). Başka bir değişle,

$$\alpha \varepsilon f \xi = \text{grad } f$$

dır. Burada lokal olarak t koordinatlı $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ ile gösterilsin. Tanım 47 de verilen ifadede dolay $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ dir (O'Neill 1983). Buradan $\text{grad}(f) = \alpha \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} \partial t$ yazılır. Bu denklemin çözümünden pozitif sabit c ler için $f = ce^{\alpha t}$ bulunur. Son olarak, $\mathcal{D}$ değme dağılımının ϕ kısıtlamasında kompleks yapısını J ile sembolize edersek basit bir hesabın ardından $(\widetilde{M}, J)$ nin bir hemen hemen Kaehler manifoldu olduğunu görebiliriz.

Önerme 3.4.1 M , $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O zaman, M nin alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$ denkleminin sağlamasıdır.

İspat: Bu ispatın Riemann durumu Pastore ve Dileo tarafından verilmiştir (Pastore and Dileo 2007). Benzer yolla yapılabilir.

Önerme 3.4.2 M , bir lokal simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O halde, $\nabla_\xi h = 0$ dır.

İspat: Bu ispatın Riemann durumu da aynı yazarlar tarafından ele alınmıştır (Pastore and Dileo 2007). Benzer olarak, psödo-Riemann durumu da gösterilebilir.

Önerme 3.4.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda

- (i) $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,
- (ii) $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır.

İspat: Bu ispatın psödo-Riemann durumu da aynı Riemann durumunun ispatı gibi yapılabilir (Kim and Pak 2005).

Teorem 3.4.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldları $H = -\alpha\varepsilon\xi$ ortalama eğrilik vektör alanı ile verilen bir hemen hemen Kaehler manifoldlardır. Ayrıca, $\mathcal{D}$ nin integral manifoldlarının total umbilik olması için gerek ve yeter şart $h = 0$ olmasıdır.

İspat: $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldu ve $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman $\widetilde{M} \longrightarrow M$ psödo-Riemann immersiyonunu göz önüne alalım. $\widetilde{M}$ den M ye bir psödo-Riemann immersiyonunun ikinci temel formu $B(X, Y)$ olmak üzere,

$$g(B(X, Y), \xi) = g(\nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y, \xi) = -g(Y, \alpha X - \phi h X)$$

ve

$$B(X, Y) = -\varepsilon g(Y, \alpha X - \phi h X) \xi$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece $\widetilde{M}$ manifoldunun M nin total umbilik bir altmanifoldu olması için gerek ve yeter koşulun $h = 0$ olması gerektiğini biliyoruz. Bu nedenle, $B(X, Y) = -\varepsilon \alpha g(Y, X) \xi$ elde edilir. H ortalama eğrilik vektör alanının tanımından $H = -\alpha \varepsilon \xi$ bulunur.

Teorem 3.4.4 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu lokal simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O zaman, aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) M bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold,
- (ii) $h = 0$.

Ayrıca, bu şartlardan herhangi biri sağladığında M^{2n+1} manifoldu $K = -\alpha^2 \varepsilon$ kesit eğrilğine sahiptir. Bu nedenle, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldu bir Kaehler manifold ve $K = 0$ dir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii). M nin bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olduğunu kabul edelim. O zaman keyfi X vektör alanı için (3.63) denkleminde $\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X$ yazılır. Belirtmeliyiz ki,

$$h^* = -\phi h = 0 \Leftrightarrow h = 0$$

önermesinin sağlandığını biliyoruz. Böylece (3.63) denklemi ile $\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X$ denklemi karşılaştırılırsa $h = 0$ elde edilir. (ii) $\Rightarrow$ (i). M , $h = 0$ ile verilen bir hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O halde,

$$R(X, Y) \xi = \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X]$$

yazılır. Buradan keyfi X, Y, W vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X, Y) \xi &= (\nabla_W R)(X, Y) \xi - R(\nabla_W X, Y) \xi - R(X, \nabla_W Y) \xi - R(X, Y) \nabla_W \xi \\ &= -\alpha R(X, Y)W + \alpha^3 \varepsilon [g(X, W)Y - g(Y, W)X] \end{aligned}$$

bulunur. Hipoteze göre M lokal simetrik olduğundan $\nabla R = 0$ olup, yukarıdaki eşitlikten

$$R(X, Y)W = -\alpha^2 \varepsilon [g(Y, W)X - g(X, W)Y] \quad (3.64)$$

olduğu görülür. Burada $\alpha \neq 0$ olduğu açıktır. Böylece M , $K = -\alpha^2 \varepsilon$ kesit eğrilğine sahiptir. Bundan başka, $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldu ve $\widetilde{M}$

nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, $\widetilde{M} \longrightarrow M$ psödo-Riemann immersiyonunu göz önüne alalım. $\widetilde{M}$ den M ye bir psödo-Riemann immersiyonunun ikinci temel formu $B(X, Y)$

$$B(X, Y) = -\varepsilon \alpha g(Y, X) \xi$$

ile tanımlıdır. Başka bir deyişle, $\widetilde{M}$ nın M üzerinde bir total umbilik altmanifoldu yukarıdaki denklemi sağlar. $\widetilde{R}$ da $\widetilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, her $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ için

$$R(X, Y)W = \widetilde{R}(X, Y)W - \alpha^2 \varepsilon [g(Y, W)X - g(X, W)Y] \quad (3.65)$$

bulunur. (3.64) ve (3.65) denklemlerinden $\widetilde{R} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{M}$ flat ve $\widetilde{M}$ nin kesit eğriliği $K = 0$ dır. Bu ise $\widetilde{M}$ nin flat Kaehler manifold olduğu anlamına gelir. Böylece $\nabla \xi = -\alpha \phi^2 \Leftrightarrow h = 0$ olduğunu hatırlatarak Önerme 3.4.1 göz önüne alındığında M bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olur. Bunlara ilaveten, (i) veya (ii) koşulları bir M lokal simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold için sağlarsa yukarıdaki ifadelerden M nin $K = -\alpha^2 \varepsilon$ kesit eğriliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldu $K = 0$ ile verilen bir Kaehler manifoldudur.

Önerme 3.4.4 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O zaman, M nin alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır.

İspat: Benzer yolla, psödo-Riemann anlamındaki ispat, yazarların Riemann anlamı durumunda öngördüğü şekilde yapılabilir (Kim and Pak 2005).

Teorem 3.4.5 Sabit K kesit eğriliği ile verilen $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold bir alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olup, $K = -\alpha^2 \varepsilon$ dır.

İspat: M sabit K kesit eğrilikli $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. Bu ifade M nin lokal simetrik olduğunu gösterir. O

halde, Önerme 3.4.2 den $\nabla_\xi h = 0$ dir. Sabit kesit eğriliğinin tanımından

$$R(X, Y)\xi = \varepsilon K [\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (3.66)$$

denklemini, (3.37) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} 0 &= (\varepsilon K + \alpha^2) (\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \alpha \eta(X)h^*Y \\ &\quad - \alpha \eta(Y)h^*X - (\nabla_Y h^*)X + (\nabla_X h^*)Y \end{aligned} \quad (3.67)$$

elde edilir. Burada $h^* = -\phi h$ dir. (3.67) denkleminde $Y = \xi$ alırsak

$$0 = (\varepsilon K + \alpha^2) (\eta(X)\xi - X) - h^2 X - 2\alpha h^* X \quad (3.68)$$

bulunur. Burada $(\nabla_\xi h^*)X = 0$ dir. $X \in \mathcal{D}$, λ özdeğeri ile verilen h nın bir özvektör alanı olsun. O halde, (3.68) denklemini

$$0 = (\varepsilon K + \alpha^2 + \lambda^2)X - 2\alpha\lambda\phi X = 0$$

yazılır. Ayrıca, X ve ϕX lineer bağımsız olduğundan

$$\varepsilon K + \alpha^2 + \lambda^2 = 2\alpha\lambda = 0, \quad \alpha \neq 0$$

olur. Buradan $\lambda = 0$ ve $K = -\alpha^2\varepsilon$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.6 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu lokal simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. O zaman aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- (i) Eğer Y , μ özdeğeri ile verilen h nın özvektörü ise $K(\xi, Y) = -\varepsilon(\alpha^2 + \mu^2)$,
- (ii) Eğer Y , λ özdeğeri ile verilen h^* nın özvektörü ise $K(\xi, Y) = -\varepsilon(\alpha + \lambda)^2$,
- (iii) $\mathcal{D}$ üzerinde h nın tüm özdeğerleri $\{\pm\rho_i : 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere,

$$S(\xi, \xi) = -2 \sum_{i=1}^n (\alpha^2 + \rho_i^2)$$

dir.

İspat: Önerme 3.4.2 ve (3.39) denkleminde

$$R(Y, \xi)\xi = \alpha^2\phi^2 Y - 2\alpha h^* Y - h^2 Y \quad (3.69)$$

yazılır. Böylece

$$R(Y, \xi, Y, \xi) = -(\alpha^2 + \mu^2)g(X, X)$$

bulunur. Burada Y , μ özdeğeri ile verilen h nın özvektörüdür. Buradan kesit eğriliği tanımından (i) ispatlanır. Benzer olarak, (3.69) denkleminde

$$R(Y, \xi)\xi = -(\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2)X$$

yazılır. Burada Y , λ özdeğeri ile verilen h^* nın özvektörü olmak üzere, (ii) şıkkının ispatı açıktır. Son olarak, M üzerinde $he_i = \rho_i e_i$ şartını sağlayan bir lokal $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$ bazını göz önüne alalım. O halde,

$$\begin{aligned} S(\xi, \xi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^n (K(\xi, e_i) + K(\xi, \phi e_i)) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (\alpha^2 + \rho_i^2). \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.7 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu lokal simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifold olsun. Eğer ϕh veya h tensör alanları Kodazzi şartlarını sağlıyorsa bu durumda, her X, Y, Z vektör alanları için $\mathcal{D}$ dağılımının integral alt-manifoldu total umbiliktir.

İspat: ϕh tensör alanı Kodazzi şartını sağladığından

$$(\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y = 0$$

yazılır. Burada X yerine ξ alınırsa

$$lY = \alpha [\alpha \phi^2 Y + \phi h Y] \quad (3.70)$$

bulunur. O halde, (3.70) denkleminde

$$-2h^2 Y = 0$$

elde edilir. Buradan $h = 0$ yazılır. Böylece, Önerme 3.4.3 yardımıyla ispat tamamlanır. Benzer ispat h tensör alanı için de yapılabilir.

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik manifoldlar tanıtılarak, bazı paralel tensör alanları ve lokal simetri şartları altında bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmadaki asıl amaç özellikle, lokal simetriyi, kesit eğriliğini ve skalar eğriliği kullanarak bu tür manifoldlar için sınıflandırma yapmaktır. Bulduğumuz sonuçlar literatüre bu alanla ilgili oldukça güzel sonuçlar katmıştır.

İlerideki çabamız, özellikle bu çalışmada kullandığımız tensör koşullarına ek olarak, tüm yarı-simetrik durumlar ve psödo-yarı simetrik durumlar için hemen hemen alfa-kosimplektik veya hemen hemen alfa-Kenmotsu psödo-metrik manifoldları daha genel olarak incelemek şeklinde olacaktır. Ayrıca, alfanın düzgün bir fonksiyon olarak alınması da düşünülebilir. Bundan başka, bu tür manifoldları (k, μ, ν) -uzaylarında incelemekte açık problemler arasında yer almaktadır. Başka bir deyişle, psödo-simetrik ve psödo yarı-simetrik gibi özel tensör şartları altında hemen hemen alfa-kosimplektik psödo-metrik yapılar (k, μ, ν) -uzaylarında araştırılabilir.

5 KAYNAKLAR

- Aktan N., Yıldırım M. and Murathan, C. (2013). Almost f -cosymplectic manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **11**: 775-787.
- Bang-Yen, C. (1973). Geometry of submanifolds. M. Dekker Inc., New York.
- Besse, A. L.(1987). Einstein manifolds. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **10**: (3), Springer-Verlag, Berlin.
- Blair, D. E. (1976). Contact manifolds in Riemannian geometry. Springer-Verlag, New York.
- Blair, D. E. (1977). Two remarks on contact metric structures. *Tôhoku Mathematical Journal*, **29**: 319-324.
- Blair, D. E. (2002). Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, Birkhäuser Series, Berlin.
- Boeckx, E. and Cho, J.T. (2005). η -parallel contact metric spaces. *Differential Geometry and its Applications*, **22**: 275-285.
- Boeckx, E. and Cho, J.T. (2006). Locally symmetric contact metric manifolds. *Monatsh Mathematics*, **148**: 269-281.
- Calvaruso, G. (2011). Contact Lorentzian manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, **29**: 41-51.
- Calvaruso, G. and Perrone, D. (2010). Contact pseudo-metric manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, **28**: 615-634.
- Chinea, D. and Gonzalez, C. (1990). A classification of almost contact metric manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **156**: 15-36.
- De, U.C., Yıldız, A. and Yılmaz, A. F. (2009). On ϕ -recurrent Kenmotsu manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, **33**: 17-25.

- Dileo, G. (2011). On the geometry of almost contact metric manifolds of Kenmotsu type. *Differential Geometry and its Applications*, **29**: 58-64.
- Dileo, G. (2011). A classification of certain almost α -Kenmotsu manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, **34**: 426-445.
- Dileo, G. and Pastore, M. (2007). Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **14**: 343-354.
- Dileo, G. and Pastore, M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η -parallelism. *Differential Geometry and its Applications*, **27**: 671-679.
- Dileo, G. and Pastore, M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions. *Journal of Geometry*, **93**: 46-61.
- Duggal, K. L. (1990). Space time manifolds and contact structures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **13**: 545-553.
- Duggal, K. L. and Bejancu, A. (1996). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifold and applications. Kluwer, Dordrecht.
- Janssens, D. and Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, **4**: 1-27.
- Jun, J., De, U.C and Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42**: 435-445.
- Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tôhoku Mathematical Journal*, **24**: 93-103.
- Kim, T.W. and Pak, H.K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, **21**: 841-846.
- Konishi, M. (1975). On manifolds with Sasakian 3-structure over quaternion Kaehler manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, **26**: 194-200.
- O'Neill, B. (1983). Semi Riemannian Geometry, Academic Press, London.

- Öztürk, H. (2009). Hemen Hemen α -Kosimplektik (κ, μ, ν) -Uzayları, Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.
- Öztürk H., Aktan N. and Murathan C. (2010). On α -Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sciences*, **12**: 115-126.
- Öztürk, H., Aktan, N., Murathan, C. and Vanlı, A.T. (2014). Almost α -cosymplectic f -Manifolds. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, **60**: 211-226.
- Öztürk, H. (2016). Some notes on almost α -cosymplectic manifolds. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, **25** (1): 1-12.
- Öztürk, H. (2016). On almost α -Kenmotsu manifolds with some tensor fields. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering* **16**: 256-264.
- Pastore, A. M. and Saltarelli, V. (2011). Almost Kenmotsu manifolds with conformal Reeb foliation. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **18**: 655-666.
- Sasaki, S. and Hatakeyama, Y. (1962). On differentiable manifolds with contact metric structures. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **14**: 249-271.
- Sharpe, R.W. (1997). Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.
- Takahashi, T. (1969). Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric, *Tôhoku Mathematical Journal*, **21**: 271-290.
- Tanno, S. (1968). The topology of contact Riemannian manifolds. *Illinois Journal of Mathematics*, **12**: 700-717.
- Tanno, S. (1996). Remarks on a triple of K -contact structures. *Tôhoku Mathematical Journal*, **48**: 519-531.
- Vaisman, I. (1980). Conformal changes of almost contact metric manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, **792**: 435-443.

- Wang, Y. and Liu, X. (2014). Almost Kenmotsu pseudo-metric manifolds. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, DOI: 10.2478/aicu-2014-0030.
- Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corporation, Singapore.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat ESENDEMİR
Doğum Yeri ve Tarihi : Sandıklı / 20.12.1979
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : 0535-4475411/esendemir0379@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sandıklı Lisesi, 1994-1996
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 1996-2001

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Milli Eğitim Bakanlığı, Şehit Er Taner Karadeniz ÇPL, 2002-2007
Milli Eğitim Bakanlığı, Şuhut Sağlık Meslek Lisesi, 2007-2008
Milli Eğitim Bakanlığı, Şuhut Anadolu Lisesi, 2008-2010
Milli Eğitim Bakanlığı, Osmangazi Anadolu Lisesi, 2010-...

Yayınları (SCI ve Diğer):

17.FEN.BİL.11 numaralı Proje Kapsamındaki Etkinlikler:

1. Öztürk, H., Kalkan, Ö., Öztürk, S. ve Esendemir, M. (2018). On almost α -cosymplectic pseudo-metric manifolds. Uluslararası 16. Geometri Sempozyumu, Poster bildirisi, 4-7 Temmuz, Manisa, Türkiye.