

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LOGARİTMİK PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
AZALMASI**

Zeynep ÇALIŞIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran - 2019

T.C
DİCLE UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Zeynep ÇALIŞIR tarafından yapılan “Logaritmik Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Azalması” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Doç.Dr. Halis YILMAZ

Üye : Doç.Dr. Erhan PIŞKIN

Üye : Dr.Öğr.Üyesi Mahmut MODANLI

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 27/06/2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans eğitimin boyunca bana yol gösterip destek olan, akademik bilgileri ve tecrübesi ile tezimin hazırlanmasında yardımcı olan ayrıca bana her türlü olanağı sağlayan, çok değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Erhan PİŞKİN'e en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli aileme, gösterdikleri sabır için biricik oğluma özellikle eşime sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
2.1. Logaritmik Kaynak Terim İçeren Denklemler.....	5
2.2. Petrovsky Denklemi.....	6
3. MATERYAL VE METOT.....	7
3.1. Normlu Uzak, İç Çarpım Uzakı ve Hilbert Uzakı.....	7
3.2. Lebesgue Uzakı.....	10
3.3. Sobolev Uzakı.....	10
3.4. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler.....	12
3.5. Konkavlık Metodu.....	15
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	17
4.1. Zayıf Damping Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Asimptotik Davranışı.....	17
4.1.1. Giriş.....	17
4.1.2. Lokal Varlık.....	18
4.1.3. Global Varlık.....	25
4.1.4. Asimptotik Davranış.....	28
4.2. Güçlü Damping Terimli Logaritmik Petrovsky Denklemi.....	31
4.2.1. Giriş.....	31
4.2.2. Enerji Azalması.....	37
4.2.3. Sonsuzdaki Patlama.....	44
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
6. KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	53

ÖZET

LOGARİTMİK PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep ÇALIŞIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan diferansiyel denklemlere kısaca değinilmiş ve çözümlerin azalması ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çözümlerin azalması ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda zayıf damping terimli Petrovsky denkleminin lokal varlığı, global varlığı ve asimptotik davranışı çalışılmıştır. İkinci kısımda ise güçlü damping terimli Petrovsky denkleminin çözümlerinin enerji azalması ve sonsuzdaki patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Petrovsky denklemi, Damping terim, Patlama, Enerji azalması

ABSTRACT

DECAY OF SOLUTIONS OF LOGARITHMIC PETROVSKY EQUATION

MASTER THESIS

Zeynep ÇALIŞIR

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2019

In the first chapter of this thesis, differential equations emerging in applied sciences, such as engineering and science, are briefly dealt with, and the basic information regarding energy decay of solutions is given.

In the second chapter, the historical developments of the decay of solutions are investigated.

In the third chapter, basic definitions, lemma, theorems, inequalities that will be used throughout the thesis are given

In the fourth chapter is composed of two sections. In the first section local and global existence and asymptotic behavior of solutions are for a Petrovsky equation with weak damping term are studied. In the second section, decay energy and blow up for a Petrovsky equation with strong damping term are studied.

Keywords: Petrovsky equation, Damping term, Blowup, Energydecay

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial \Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	: p . mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
∇	: Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	: Laplace operatörü

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler bilinmeyen bir fonksiyon ve onun kısmi türevleri arasındaki ilişki olarak tanımlanır. Bu denklemler fizik ve mühendisliğin hemen hemen tüm alanlarında ortaya çıkar. Ayrıca biyoloji, kimya, bilgisayar ve ekonomi gibi birçok alanda kısmi diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Aslında bağımsız değişkenler arasındaki etkileşimin olduğu her alanda kısmi diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak, bilinmeyen fonksiyonların belirli bir noktadaki değeri, yalnızca bu noktanın komşuluğundaki noktaların değerlerine bağlı oluyorsa kısmi diferansiyel denklemleri elde ederiz. Bir $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemin genel formu,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \dots) = 0$$

şeklinde dir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler, u bilinmeyen fonksiyon ve $u_{x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ nin kısmi türevini göstermektedir. Genel olarak denklem, başlangıç ve sınır koşulları gibi ek koşullarla birlikte verilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin fiziğin farklı dallarındaki muazzam önemi nedeniyle, yeni bir kısmi diferansiyel denklem sınıfının çözümünü mümkün kılan her matematiksel gelişmeye, fizikteki önemli gelişmeler katkı sağlamıştır. Bu nedenle, Hamilton tarafından bulunan karakteristikler metodu, optik ve analitik mekanikte büyük gelişmelere yol açmıştır. Fourier yöntemi, ısı transferi ve dalga yayılımının çözümüne olanak sağladı ve Green metodu, elektromanyetizma teorisinin geliştirilmesinde etkili oldu. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analizi pek çok özelliği barındırmaktadır. 19. yüzyılda egemen olan klasik yaklaşım açık çözümleri bulmak için çeşitli metodları geliştirmektir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin pek çok özelliği vardır. Teknik ilerlemeleri, çözümün yapısını anlamayı amaçlayan teorik gelişmeler takip eder. Amaç, işlem yapmadan hatta açık çözüm bulmadan çözümün bazı özelliklerini bulmaktır. Kısmi diferansiyel denklemlerin teorik incelenmesi sadece akademik amaçla değildir, aynı zamanda bir çok uygulaması vardır. İleri teknolojik araçlarla bile çözülemeyen karmaşık denklemler vardır. Bu durumda yapabileceğimiz tek şey, çözüm hakkında

1. GİRİŞ

nitel (qualitative) bilgi edinmeye çalışmaktır. Genel olarak denklem mühendislik ve fiziksel problemin modellenmesiyle oluşur. Kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için bir kaç yol vardır. Her yol belirli bir denklem türüne uygulanabilir. Bu yüzden denklemi çözerken ve çözmeden önce denklemin tam olarak analiz edilmesi önemlidir. Temel teorik soru denklemi ve ilgili yan koşullarını oluşturan problemin iyi konulmuş olup olmadığıdır.

Fransız matematikçi Jacques Hadamard (1865-1963) göre bir problem aşağıdaki koşulları sağlarsa iyi konulmuştur.

I) Varlık: problem bir çözüme sahip olmalı,

II) Teklik: problemin çözümü tek olmalı,

III) Kararlılık: başlangıç ve/veya sınır koşullarındaki küçük bir değişiklik çözümde küçük bir değişikliğe sebep olmalıdır.

Eğer yukarıdaki koşulların bir ya da daha fazlası yoksa problemin kötü konumlu olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi basit bir örnek verelim:

Örnek:

$$u_t + u_{xx} = 0$$

denkleminin

$$u_1(x, 0) = 0$$

başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü

$$u_1(x, t) = 0$$

dır. Başlangıç koşulu

$$u_2(x, 0) = \frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

olarak alınırsa, çözüm

$$u_2(x, t) = \frac{e^{n^2 t} \sin(nx)}{10^{50}}$$

elde edilir. Yukarıda görüldüğü üzere başlangıç verilerinde küçük

$$|u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| = \frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

bir değişiklik yapıldığında, çözümde

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \left| \frac{e^{n^2 t} \sin(nx)}{10^{50}} \right|$$

$$n \longrightarrow \infty \text{ için } \left| \frac{e^{n^2 t} \sin(nx)}{10^{50}} \right| \longrightarrow \infty$$

büyük değişikliğe yol açmaktadır. Dolayısıyla verilen problem iyi konulmuş değildir.

Matematiksel problemlerin çoğunun iyi konumlu olduğu açıkça söylenebilir. Günümüz ileri teknoloji sistemlerindeki gelişmeler matematiksel modellemelerden ayrı düşünülemez. Yani matematik bilimi başta mühendislik olmak üzere birçok alanda karşılaşılan problemlere yönelik matematiksel yöntemler sunarak sorunların daha anlaşılır olup gerçek dünyaya uygulanabilir olmasına olanak sağlar.

Esasen matematik bilimi için doğada karşılaşılan her olay matematiksel olarak bir problem olabilmektedir. Ve problemlere yönelik matematiksel modellemeler oluşturmak yadsınamaz derecede bilimin gelişmesine katkı sağlayacaktır.

Bu modellemeler öncelikli olarak karşılaşılan problemi matematiksel ifadelerle formülize eder. Sonrasında ise bu probleme yönelik yaklaşık bir çözüm bulur. Veya çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmamızı sağlar. Denklemleri başlangıç ve sınır koşullarıyla sınırlandırarak iyi tanımlı bir çözüm bulmak için öncelikli olarak çözümün varlığını, çözüm varsa eğer çözümün tekliğini ve başlangıç verilerine bağımlılığını araştırılmış olur.

Yapılan çalışmalar gösteriyor ki lineer olmayan diferansiyel denklemler lineer olan denklemlere oranla gerçek dünyayla daha çok bağlantılı olduğu için elde edilen matematiksel modellemelerin çoğu lineer olmayan diferansiyel denklemlerle olur (Pinchover ve Rubinstenin 2005).

Bu çalışmamızda enerji azalmasına yoğunlaşacağımızdan dolayı, enerji azalması ile ilgili basit bir örnek verelim:

$E(t)$ denkleminin enerji fonksiyoneli olmak üzere; $\forall t > 0$ ve $c_1, c_2, \alpha, \beta > 0$ için

I) $E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t}$ oluyorsa üstel enerji azalması,

II) $E(t) \leq \beta t^{-\alpha}$ oluyorsa polinomal enerji azalması vardır denir.

1. GİRİŞ

Şimdi çözümlerin enerji azalmasına adi diferansiyel denklemler için bir örnek verelim;

$$\begin{cases} u'(t) = -u^p(t), \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ise } u(t) = e^{-t} \\ p = 2 \text{ ise } u(t) = (1 + t)^{-1} \end{cases}$$

dir. Görüldüğü gibi her iki durumda da $t \rightarrow \infty$ iken $u \rightarrow 0$ olur. Burada $p = 1$ için üstel azalma, $p = 2$ için polinomal azalma vardır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde amacımız aşağıdaki

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = u \ln |u|^2$$

denkleminin çözümlerinin üstel ve polinomal olarak azalmasını incelemektir. Şimdi bu denklem ile ilgili temel çalışmaları verelim:

2.1. Logaritmik Kaynak Terim İçeren Denklemler

Kaynak terimi logaritmik olan denklemler nükleer fizik, optik, süpersimetri ve geofizik gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır (Birula ve Mycielski 1976).

Birula ve Mycielski (1976)

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u \ln u^2$$

denklemi çalıştılar. Cazenave ve Haraux 1980 yılında

$$u_{tt} - \Delta u = u \ln |u|^k$$

denkleminin varlık ve tekliğini inceledi.

Hiramatsu, Kawasaki ve Takahashi (2010) teorik fizikte Q-ball dinamiğini çalışırken

$$u_{tt} - u_{xx} + u + u_t + u |u|^2 = u \ln u$$

denklemini elde etti. Han 2013 yılında elde edilen denklemin R^3 te global varlığını çalıştı. Hu, Zhang ve Liu (2019)

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t = u \ln |u|^k$$

denkleminin asimptotik davranışını çalıştılar. Ma ve Fang (2018) güçlü damping terimli

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = u \ln |u|^2$$

denkleminin çözümlerinin global varlığını, asimptotik davranışını ve sonsuz zamanda

patlamasını çalıştılar. Al-Gharabli ve Messaoudi (2017, 2018)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u + u_t = u \ln |u|^k$$

denkleminin çözümlerinin lokal ve global varlığını, asimptotik davranışını çalıştılar.

2.2. Petrovsky Denklemi

Dördüncü mertebeden terim $(\Delta^2 u)$ içeren denklemler Petrovsky denklemi olarak adlandırılır.

$$u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u$$

Petrovsky denkleminin varlık-teklik ve patlaması Messaoudi (2002) tarafından çalışılmıştır.

Daha sonra farklı yöntemler kullanılarak patlaması ve enerji azalması Wu ve Tsai (2009), Chen ve Zhou (2009), Li, Sun ve Liu (2012), Pişkin ve Polat (2014) tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünün ikinci kısmında beşinci mertebeden damping $(\Delta^2 u_t)$ ve logaritmik kaynak terim $(u \cdot \ln |u|^2)$ içeren

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = u \cdot \ln |u|^2$$

Petrovsky denkleminin çözümlerinin üstel ve polinomal azalması için yeter koşullar elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler ve çözümlerin patlaması ile ilgili bazı lemmalara yer verilecektir. [Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Kesavan 1989, Polat 2005, Pişkin 2013, Pişkin 2017, Pişkin 2018].

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den R ye tanımlanan bir d fonksiyonu

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

verilsin. d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisinde metrik uzay denir.

$\forall x, y, z \in X$ için

$$\text{I) } d(x, y) \geq 0$$

$$\text{II) } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{III) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{IV) } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Burada (IV) e üçgen eşitsizliği denir. (IV) şartı tekrar tekrar uygulanırsa $\forall x, y, z_1, \dots, z_n$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + d(z_3, y) \\ &\quad \dots \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y) \end{aligned}$$

şeklindeki ifadeye genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.

Tanım 3.1.2. X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olmak üzere $x \rightarrow \|x\|$ dönüşümünü sağlayan

$$\|\cdot\| : X \rightarrow R$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Ve $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ ve $\forall a \in R$ için

- I) $\|\vec{x}\| \geq 0$; $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$;
- II) $\|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|$;
- III) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (üçgen eşitsizliği)

X uzayı I), II), III) özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde normdur denir. Ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir. $\|x\|$ sayısının $x \in X$ elemanının normu denir.

Tanım 3.1.3. (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow \varepsilon$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.4. (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir. Ve bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.5. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X uzayının bir elemanına yakınsıyorsa bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.6. K cismi üzerinde tanımlanan bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K$$

bir fonksiyonun $\forall x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyona iç çarpım denir;

I) $(x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

II) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (burada $\bar{c}, c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

III) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z).$

$K = R$ durumunda $(x, y) = (y, x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır.

Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya iç çarpım uzayı denir.

Tanım 3.1.7. Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir ögesine yakınsak olması halinde bu uzaya Hilbert uzayı denir. Başka bir deyişle normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya Hilbert Uzayı denir.

Tanım 3.1.8. (x_n) , X normlu uzayına ait bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine güçlü yakınsak dizi denir. Bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.9. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. $\forall f \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \rightarrow f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine zayıf yakınsak dizi denir. Bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.10. (a) (f_n) , X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine güçlü yakınsaktır denir. $f_n \rightarrow f$ şeklinde

yazılır.

(b) $\forall x \in X$ için

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine zayıf* yakınsaktır denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

3.2. Lebesgue uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω da tanımlı tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı aşağıdaki koşullar altında

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ uzayı olarak adlandırılır. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2. X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer;

I) X in tüm elemanları Y de ise ($X \subset Y$) ve

II) u dan bağımsız bir c sabiti ve $\forall u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

3.3. Sobolev Uzayı

Tanım 3.3.1. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

normları ile Banach uzayıdır.

Burada açıktır ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.3.2. $p = 2$ için $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm ise

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.3. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpım $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımı ifade etmektedir. Ve burada tanımlanan iç çarpım bir Hilbert uzayıdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayındaki iç çarpım ise

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

eşitliğiyle tanımlanır. Ve $H_0^1(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2}$$

eşitliğiyle verilir.

Tanım 3.3.4. (Sobolev Gömülme Teoremi). Ω , R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şartları altındaki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olacak şekilde;

I) $mp > n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

II) $mp = n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$

veya

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Burada $p = 1$ alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

III) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

dır. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır. $W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olacaktır.

3.4. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1. (Young Eşitsizliği). Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada $p = q = 2$ seçilirse

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

yazılabilir.

Lemma 3.4.2. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği). $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

için

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

dır.

Lemma 3.4.3. (Logaritmik Sobolev Eşitsizliği). [Chen, Luo, Liu 2015;

Gross 1975] $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $\alpha > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$\int_{\Omega} u^2 \ln |u| dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \ln \|u\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2\pi} \|\nabla u\|_2^2 - (1 + \ln \alpha) \|u\|_2^2$$

dır.

Sonuç 3.4.1. $u \in H_0^2(\Omega)$ ve α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$\int_{\Omega} u^2 \ln |u| dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \ln \|u\|_2^2 + \frac{c_p \alpha^2}{2\pi} \|\Delta u\|_2^2 - (1 + \ln \alpha) \|u\|_2^2$$

dır.

Lemma 3.4.4. (Logaritmik Gronwall Eşitsizliği) [Cazenave, Haraux 1980].

$w : [0, T] \rightarrow [1, \infty)$ bir fonksiyon, $c > 0$ ve $\gamma \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ için

$$w(t) \leq c \left(1 + \int_0^t \gamma(s) w(s) \ln w(s) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

eşitsizliği sağlanıyorsa

$$w(t) \leq c \exp \left(c \int_0^t \gamma(s) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T$$

dır.

Lemma 3.4.5. (Green Özdeşliği).

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır.

İspat. Tek boyutta

$$(vu_x)_x = v_x u_x + v_x u_{xx}$$

tir. Aynı durum yüksek boyutlara uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \nabla (v \nabla u) &= \nabla v \nabla u + v \Delta u, \\ v \Delta u &= \nabla (v \nabla u) - \nabla v \nabla u \end{aligned}$$

dır. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla (v \nabla u) dx - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

olur. Burada

$$\int \int \int \dots dx dy dz = \int_{\Omega} \dots dx$$

olarak gösterilmiştir. Diverjans teoreminden $\int_{\Omega} \nabla F dx = \int_{\partial\Omega} F n ds$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\Omega} \nabla (v \nabla u) dx - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx, \\ \int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx \end{aligned}$$

olur.

3.5. Konkavlık Metodu

Lemma 3.5.1. $t > 0$, $\alpha > 0$ sabitleri için, $G(t)$ iki kez diferansiyellenebilen ve

$$G''(t)G(t) - (1 + \alpha) [G'(t)]^2 \geq 0 \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere eğer; $G(t) > 0$ ve $G'(t) > 0$ ise bu durumda öyle bir $T^* \leq \frac{G(t)}{\alpha G'(t)}$ zamanı vardır ki $\lim_{t \rightarrow T^*} G(t) = \infty$ olur. (Levine 1974)

İspat. $\phi(t) = G^{-\alpha}(t)$ olsun. ϕ nin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (G^{-\alpha}(t))' \\ &= -\alpha G^{-\alpha-1}(t) G'(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= (-\alpha G^{-\alpha-1}(t) G'(t))' \\ &= -\alpha(-\alpha - 1) G^{-\alpha-2}(t) [G'(t)]^2 - \alpha G^{-\alpha-1}(t) G''(t) \\ &= -\alpha G^{-\alpha-2}(t) [G''(t)G(t) - (1 + \alpha) G'(t)^2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

olur. (3.1) eşitsizliğinden

$$G''(t)G(t) - (1 + \alpha) [G'(t)]^2 \geq 0$$

kabulünü göz önünde bulundurulsa

$$\phi''(t) \leq 0 \quad (3.4)$$

olur. Yani $\phi(t) = G^{-\alpha}(t)$ konkav fonksiyondur.

(3.2.) eşitliğinde $\phi'(t)$ fonksiyonu negatiftir, dolayısıyla $\phi(t)$ azalan bir fonksiyondur.

$\phi(t)$ fonksiyonunun $(0, \phi(0))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$\phi(t) - \phi(0) = \phi'(0)(t - 0)$$

ise

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(0) + \phi'(0)(t - 0) \\ &= G^{-\alpha}(0) - \alpha G^{-\alpha-1}(0)G'(0)t\end{aligned}\tag{3.5}$$

olur. Bu teğet doğrusunun t eksenini kestiği nokta $(T^*, 0)$ ise

$$0 = G^{-\alpha}(0) - \alpha G^{-\alpha-1}(0)G'(0)T^*$$

dır. Buradan $T^* = \frac{G(0)}{\alpha G'(0)}$ olarak bulunur.

(3.5) den

$$\begin{aligned}G^{-\alpha}(t) &= G^{-\alpha}(0) - \alpha G^{-\alpha-1}(0)G'(0)t, \\ \frac{1}{G^{\alpha}(t)} &= \frac{1}{G^{\alpha}(0)} - \frac{\alpha G'(0)t}{G^{\alpha+1}(0)}, \\ G^{\alpha}(t) &= \frac{G^{\alpha+1}(0)}{G(0) - \alpha G'(0)t}\end{aligned}$$

dır. Burada $t \rightarrow T_c^-$ iken $\phi(t) \rightarrow 0$ olur. Böylece $\lim_{t \rightarrow T_c^-} G(t) = \infty$ olarak bulunur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Zayıf Damping Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Asimptotik Davranışı

Bu kısımda Al-Gharabli ve Messaoudi (2017) nin çalışması detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Bu çalışmada

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u + u_t = ku \ln |u|, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

zayıf damping terimli logaritmik Petrovsky denklemi incelenecektir. Burada Ω , R^2 de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve k pozitif reel sayıdır.

4.1.1. Giriş

k aşağıdaki şartı sağlasın:

(A) c_p sayısı

$$\|\nabla u\|^2 \leq c_p \|\Delta u\|^2, \forall u \in H_0^2(\Omega),$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif reel sayı olmak üzere (4.1) denklemindeki k pozitif reel sayısı

$$\sqrt{\frac{2\pi}{k_0 c_p}} = e^{\frac{-3}{2} - \frac{1}{k_0}} \quad (4.2)$$

şartını sağlayan k_0 reel sayısı için $0 < k < k_0$ aralığındadır.

Not 4.1.1.1. $(0, \infty)$ aralığında sürekli ve azalan

$$f(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{c_p s}} - e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{s}}$$

fonksiyonu için

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \infty \text{ ve } \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = -e^{-\frac{3}{2}}$$

dır. Bu durumda $f(k_0) = 0$ olacak şekilde $k_0 > 0$ vardır. Ayrıca $\forall s \in (0, k_0)$ için

$$e^{\frac{-3}{2} - \frac{1}{s}} < \sqrt{\frac{2\pi}{c_p s}} \quad (4.3)$$

dır. (4.1) probleminin Enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u\|_2^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \right) + \frac{k}{4} \|u\|^2 \quad (4.4)$$

dır. Ayrıca

$$E'(t) = - \|u_t\|^2 \quad (4.5)$$

dır.

4.1.2. Lokal Varlık

Bu kısımda (4.1) probleminin lokal varlığı ispatlanacaktır.

Tanım 4.1.2.1.

$$C([0, T], H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0, T], H^{-2}(\Omega))$$

uzayındaki u fonksiyonu $\forall w(x) \in H_0^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_{tt}(x, t)w(x)dx + \int_{\Omega} \Delta u(x, t)\Delta w(x)dx + \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx \\ \quad + \int_{\Omega} u_t(x, t)w(x)dx = \int_{\Omega} u(x, t)w(x) \ln |u(x, t)|^k dx, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (4.6)$$

şartını sağlıyorsa (4.1) probleminin zayıf çözümü olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2.2. $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda (4.1) probleminin lokal zayıf çözümü

$$u \in C([0, T], H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0, T], H^{-2}(\Omega)) \quad (4.7)$$

dır.

İspat. İspatı standart Faedo-Galerkin methodu yardımıyla yapacağız. $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $L^2(\Omega)$ de ortonormal olan ayrılabilir $H_0^2(\Omega)$ uzayında ortogonal bir tabanı olsun

$$V_m = \text{span} \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

ve V_m uzayının sonlu boyutlu alt uzayında başlangıç verilerinin projeksiyonları

$$u_0^m(x) = \sum_{j=1}^m a_j w_j(x), \quad u_1^m(x) = \sum_{j=1}^m b_j w_j(x)$$

olsun. Burada $m \rightarrow \infty$ için

$$\begin{cases} u_0^m \rightarrow u_0, & H_0^2(\Omega) \text{ uzayında,} \\ u_1^m \rightarrow u_1, & L^2(\Omega) \text{ uzayında} \end{cases} \quad (4.8)$$

dır. V_m de

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (u_{tt}^m w + \Delta u^m \Delta w + u^m w + u_t^m w) dx = \int_{\Omega} w u^m \ln |u^m|^k dx, & w \in V_m \\ u^m(0) = u_0^m = \sum_{j=1}^m (u_0, w_j) w_j \\ u_t^m(0) = u_1^m = \sum_{j=1}^m (u_1, w_j) w_j \end{cases} \quad (4.9)$$

probleminin

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m h_j^m(t) w_j(x)$$

şeklinde bir yaklaşık çözümünü bulmaya çalışacağız. Bu ise bilinmeyen $h_j^m(t)$ fonksiyonu için bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşturur. Adi diferansiyel denklemlerdeki standart çözümlerin varlık teorisinden (Lions 1969), $t_m \in (0, T]$ için $[0, t_m)$ maksimum aralığında (4.9) denklemini sağlayan

$$h_j : [0, t_m) \rightarrow R, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

fonsiyonu elde edilir. Şimdi $t_m = T$ olduğunu ve lokal çözümün m ve t den bağımsız olarak düzgün sınırlı olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla (4.9) daki w nın yerine u_t^m yazarsak ve integrallersek

$$\frac{dE^m(t)}{dt} \leq 0 \quad (4.10)$$

olur. Burada

$$E^m(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t^m\|_2^2 + \|\Delta u^m\|_2^2 + \frac{k+2}{2} \|u^m\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^m|^2 \ln |u^m|^k dx \right) \quad (4.11)$$

dır. (4.10) dan

$$E^m(t) \leq E^m(0)$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlik ve Logaritmik Sobolev Eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \|u_t^m\|^2 + \left(1 - \frac{k\alpha^2 c_p}{2\pi}\right) \|\Delta u^m\|^2 \\ & + \left[\frac{k+2}{2} + k(1 + \ln \alpha)\right] \|u^m\|^2 \\ & \leq C + \frac{k}{2} \|u^m\|^2 \ln \|u^m\|^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

yazılabilir. Burada $C = 2E^m(0)$ dır. (A) koşulundan

$$1 - \frac{k\alpha^2 c_p}{2\pi} > 0 \text{ ve } \frac{k+2}{2} + k(1 + \ln \alpha) > 0$$

seçilebilir. Buradan

$$e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{k}} < \alpha < \sqrt{\frac{2\pi}{kc_p}} \quad (4.13)$$

olur. Böylece

$$\|u_t^m\|^2 + \|\Delta u^m\|^2 + \|u^m\|^2 \leq c(1 + \|u^m\|^2 \ln \|u^m\|^2) \quad (4.14)$$

elde ederiz.

$$u^m(., t) = u^m(., 0) + \int_0^t \frac{\partial u^m}{\partial s} ds$$

ifadesinin normu alınıp, Cauchy-Schwarz Eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|u^m(t)\|^2 & \leq 2 \|u^m(0)\|^2 + 2 \left\| \int_0^t \frac{\partial u^m}{\partial s}(s) ds \right\|^2 \\ & \leq 2 \|u^m(0)\|^2 + 2T \int_0^t \|u_t^m(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.14) eşitsizliğinden

$$\|u^m\|^2 \leq 2 \|u^m(0)\|^2 + 2cT \left(1 + \int_0^t \|u^m\|^2 \ln \|u^m\|^2 ds \right) \quad (4.16)$$

yazılabilir.

Eğer, $C_1 = \max \{cT, \|u^m(0)\|^2\}$ alırsak (4.16) dan

$$\|u^m\|^2 \leq 2C_1 \left(1 + \int_0^t \|u^m\|^2 \ln \|u^m\|^2 ds \right)$$

olur. Genelliği kaybetmeden $C_1 \geq 1$ alınırsa

$$\|u^m\|^2 \leq 2C_1 \left(1 + \int_0^t (C_1 + \|u^m\|^2) \ln (C_1 + \|u^m\|^2) ds \right)$$

elde edilir. Burada Logaritmik Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u^m\|^2 \leq 2C_1 e^{2C_1 T} = C_2$$

kestirimini elde ederiz. (4.14) deki eşitsizlikten

$$\|u_t^m\|^2 + \|\Delta u^m\|^2 + \|u^m\|^2 \leq c(1 + C_2 \ln C_2) = C_3$$

dır. Burada C_3 , m ve t den bağımsız pozitif bir sabittir. Bu durumda

$$\sup_{t \in (0, t_m)} \|u_t^m\|^2 + \sup_{t \in (0, t_m)} \|\Delta u^m\|^2 + \sup_{t \in (0, t_m)} \|u^m\|^2 \leq 3C_3 \quad (4.17)$$

sağlanır. Böylece, yaklaşık çözüm m ve t den bağımsız olarak düzgün sınırlıdır. Yani t_m yi T ye genişletebiliriz. Ayrıca (4.17) den

$$\begin{cases} u^m, & L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ da düzgün sınırlıdır.} \\ u_t^m, & L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega)) \text{ da düzgün sınırlıdır.} \end{cases} \quad (4.18)$$

elde ederiz. Buradan u^m nin

$$\left\{ \begin{array}{l} u^m \rightarrow u, \quad L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak,} \\ u_t^m \rightarrow u_t, \quad L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak,} \\ u^m \rightarrow u, \quad L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak,} \\ u_t^m \rightarrow u_t, \quad L^2(0, T; L_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

olacak şekilde alt dizisi vardır (bu alt dizileride yine u^m olarak gösteriyoruz).

Aubin-Lions'ın teoremi kullanılırsa sırasıyla

$$u^m \rightarrow u, \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ uzayında güçlü yakınsak}$$

ve

$$u^m \rightarrow u, \quad \Omega \times (0, T) \text{ da hemen hemen her yerde}$$

olacak şekilde alt dizilerini buluruz.

R de $s \rightarrow s \ln |s|^k$ dönüşümü sürekli olduğundan

$$u^m \ln |u^m|^k \rightarrow u \ln |u|^k, \quad \Omega \times (0, T) \text{ daki hemen hemen her yerde}$$

yakınsamasını elde ederiz. $\Omega \subset R^2$ olduğundan $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_0^2(\Omega)$ gömülmesini kullanırsak $L^\infty(\Omega \times (0, T))$ uzayında $u^m \ln |u^m|^k$ nin sınırlı olduğu açıktır. Lebesgue sınırlı yakınsama teoremi dikkate alınarak (Ω sınırlıdır)

$$u^m \ln |u^m|^k \rightarrow u \ln |u|^k, \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ uzayında güçlü yakınsak} \quad (4.20)$$

elde edilir. Şimdi $\forall w \in V_m$ için (4.9) u $(0, t)$ aralığında integrallersek

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t^m w dx - \int_{\Omega} u_1^m w dx + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u^m(s) \Delta w dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^m(s) w dx ds \\ &= \int_{\Omega} \int_0^t w u^m(s) \ln |u^m(s)|^k ds dx \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur. $m \rightarrow \infty$ iken (4.21) in limiti alınırsa $\forall w \in V_m$ ve $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t w dx &= \int_{\Omega} u_1 w dx - \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u(s) \Delta w dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} u(s) w dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u(s) w \ln |u(s)|^k ds dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) eşitliği $\forall w \in H_0^2(\Omega)$ için sağlanır. (4.22) nin sağ tarafındaki terimler $(0, t)$ aralığında mutlak süreklidir. Böylece $t \in (0, T)$ ve $\forall w \in H_0^2(\Omega)$ için (4.22) i diferansiyellersek

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_{tt}(x, t) w(x) dx + \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \Delta w(x) dx + \int_{\Omega} u(x, t) w(x) dx \\ &= \int_{\Omega} w(x) u(x, t) \ln |u(x, t)|^k dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde ederiz. Başlangıç koşulları göz önüne alınırsa

$$\begin{cases} u^m \rightarrow u, & L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak,} \\ u_t^m \rightarrow u_t, & L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak} \end{cases} \quad (4.24)$$

olur. Böylece Lions'un Lemmasını (Lions 2002) kullanarak

$$u^m \rightarrow u, \quad C([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında} \quad (4.25)$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$u^m(x, 0) \rightarrow u(x, 0), \quad L^2(\Omega) \text{ uzayında}$$

dır. Ayrıca

$$u^m(x, 0) = u_0^m(x) \rightarrow u_0(x), \quad H_0^2(\Omega) \text{ uzayında}$$

dır. Böylece

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

olur. Şimdi $w \in V_m$ için (4.9) u $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ ile çarpıp $(0, T)$ üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\Omega} u_t^m(t) w \phi'(t) dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u^m(t) \Delta w \phi(t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} u^m w \phi(t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} u_t^m w \phi(t) dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} w u_m \ln |u_m|^k \phi(t) dx dt
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde ederiz. $m \rightarrow +\infty$ iken $w \in H_0^2(\Omega)$ ve $\phi \in C_0^\infty((0, T))$ için

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\Omega} u_t(t) w \phi'(t) dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta w \phi(t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} u w \phi(t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} u_t w \phi(t) dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} w \phi(t) u \ln |u|^k dx dt
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde ederiz. Yani (Therese ve Sonrier 1998) den

$$u_{tt} \in L^2([0, T], H^{-2}(\Omega))$$

olur. $u_t \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$ olduğundan

$$u_t \in C([0, T], H^{-2}(\Omega))$$

elde ederiz. Böylece

$$u_t^m(x, 0) \rightarrow u_t(x, 0), \quad H^{-2}(\Omega) \text{ uzayında}$$

dır. Fakat

$$u_t^m(x, 0) \rightarrow u_1^m(x) \rightarrow u_1(x), \quad L^2(\Omega) \text{ uzayında}$$

olduğundan

$$u_t(x, 0) = u_1(x)$$

dır.

4.1.3. Global Varlık

Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım

$$J(u) = J(u(t)) = \frac{1}{2} \left(\|\Delta u\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \right) + \frac{k}{4} \|u\|^2, \quad (4.28)$$

$$I(u) = I(u(t)) = \|\Delta u\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx. \quad (4.29)$$

Not 4.1.3.1.

i. Yukarıdaki tanımlardan

$$J(u) = \frac{1}{2} I(u) + \frac{k}{4} \|u\|^2, \quad (4.30)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + J(u) \quad (4.31)$$

olduğu açıktır.

ii. Logaritmik Sobolev eşitsizliğine göre $J(u)$ ve $I(u)$ iyi tanımlıdır.

Potansiyel derinlik metodundan

$$0 < d = \inf_u \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in H_0^2(\Omega), \|\Delta u\|^2 \neq 0 \right\} \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlanır. Nehari manifoldu

$$N = \{u : u \in H_0^2 : I(u) = 0, \|\Delta u\|^2 \neq 0\} \quad (4.33)$$

dır. (Chen ve Liu 2012; Liu 2006; Payne ve Sattinger 1975) elde edilen sonuçlara

benzer olarak

$$0 < d = \inf_{u \in N} J(u) \quad (4.34)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$W = \{u : u \in H_0^2 : I(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{o\}$$

olsun.

Lemma 4.1.3.2. $\forall u \in H_0^2, \|u\|_2^2 \neq 0$ için $g(\lambda) = J(\lambda u)$ olsun. Bu durumda

$$I(\lambda u) = \lambda g'(\lambda) \begin{cases} > 0, & 0 \leq \lambda < \lambda^*, \\ = 0, & \lambda = \lambda^*, \\ < 0, & \lambda^* < \lambda < +\infty \end{cases}$$

dır. Burada

$$\lambda^* = \exp \left(\frac{\|\Delta u\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx}{k \|u\|^2} \right)$$

dır.

İspat. $\|u\|_2 \neq 0$ dıĝı için, $g(0) = 0, g(+\infty) = -\infty$ ve

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= J(\lambda u) \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \|\Delta u\|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx + \lambda^2 \left(\frac{k+2}{4} - \frac{k}{2} \ln |\lambda| \right) \|u\|^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \lambda \frac{dJ(\lambda u)}{d\lambda} \\ &= \lambda g'(\lambda) \\ &= \lambda^2 \|\Delta u\|^2 - \lambda^2 \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx + \lambda^2 (1 - k \ln \lambda) \int_{\Omega} u^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3.3. (4.32) daki d sabiti

$$d \geq \frac{\pi}{k} e^{2+\frac{2}{k}}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. $\forall \alpha > 0$ için Logaritmik Sobolev eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} I(u) &= \|\Delta u\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \\ &\geq \left(1 - \frac{k\alpha^2 c_p}{2\pi}\right) \|\Delta u\|^2 + \|u\|_2^2 \\ &\quad + k(1 + \ln \alpha) \|u\|^2 - \frac{k}{2} \|u\|^2 \ln \|u\|^2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur. $\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{kc_p}}$ alınırsa

$$I(u) \geq \left(1 + k \left(1 + \ln \sqrt{\frac{2\pi}{kc_p}}\right) - \frac{k}{2} \ln \|u\|^2\right) \|u\|^2 \quad (4.36)$$

elde edilir. Buradan

$$d = \inf_u \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(u), u \in H_0^2(\Omega), \|\Delta u\|^2 \neq 0 \right\} \quad (4.37)$$

ve

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) = J(\lambda^* u) = \frac{1}{2} I(\lambda^* u) + \frac{1}{2} (\lambda^*)^2 \|u\|^2 = \frac{1}{2} (\lambda^*)^2 \|u\|^2 \quad (4.38)$$

yazılabilir. (4.36) dan ve Lemma 4.1.3.2 den

$$0 = I(\lambda^* u) \geq 1 + k \left[1 + k \left(1 + \ln \sqrt{\frac{2\pi}{kc_p}}\right) - \frac{k}{2} \ln \|\lambda^* u\|^2 \right] \|\lambda^* u\|^2$$

olur. Buradan

$$\lambda^* \|u\| \geq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{1+\frac{1}{k}} \quad (4.39)$$

elde edilir. Böylece (4.37) ve (4.39) dan

$$d \geq \frac{\pi}{k} e^{2+\frac{2}{k}}$$

olur.

Lemma 4.1.3.4.

$$(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

ve

$$0 < E(0) < d, \quad I(u_0) > 0$$

olsun. Bu durumda (4.1) probleminin çözümü $u \in W$ dir.

İspat. u nun zayıf çözümünün maksimal zamanı T olsun. (4.31) ve (4.11) dan

$$\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + J(u) \leq \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + J(u_0) < d, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.40)$$

dir. $\forall t \in [0, T)$ için $u(t) \in W$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aksi halde, öyle bir $t_0 \in (0, T)$ vardır ki $u(t_0) \in \partial W$ dır, bundan dolayı ya $I(u(t_0)) = 0, \|\Delta u(t_0)\|^2 \neq 0$ veya $J(u(t_0)) = d$ dir.

(4.40) dan $J(u(t_0)) < d$ dir. Böylece $I(u(t_0)) = 0$ ve $\|\Delta u(t_0)\|^2 \neq 0$ dir. Oysa ki (4.34) den $J(u(t_0)) \geq d$ dır, bu (4.40) daki ifadeyle çelişir. Bu durumda $\forall t \in [0, T)$ için $u(t) \in W$ dir.

4.1.4. Asimptotik Davranış

Bu bölümde (4.1) probleminin çözümlerinin azalmasını ele alacağız.

Lemma 4.1.4.1.

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

fonksiyoneli için

$$L'(t) \leq -(1 - \varepsilon) \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 - \varepsilon \|u\|_2^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx$$

ve

$$L \sim E \quad (4.41)$$

dır.

İspat. $L(t)$ yi diferansiyelleyerek (4.1) ve (4.5) i kullanırsak

$$L'(t) \leq -(1 - \varepsilon) \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 - \varepsilon \|u\|_2^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \quad (4.42)$$

elde ederiz. Diğer bir ifadeyle ε u yeteri kadar küçük seçersek $L \sim E$ olur.

Teorem 4.1.4.2. $u_0 \in W$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ve $0 < E(0) < \alpha \ell < d$ olsun. Burada

$$\ell = \left(\frac{\pi}{k}\right) e^{2+\frac{2}{k}} \quad \text{ve} \quad 0 < \sqrt{\frac{2}{k}} e^{\frac{1}{k}} \alpha^{\frac{1}{2}} < 1$$

dır. Bu durumda c_1, c_2 iki tane pozitif sabittir, öyle ki $t \geq 0$

$$0 < E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t} \quad (4.43)$$

dır.

İspat. $E(t)$ nin tanımını kullanarak ve herhangi bir m pozitif sabiti için

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -m\varepsilon E(t) + \left(\frac{m\varepsilon}{2} + \varepsilon - 1\right) \|u_t\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1\right) \|\Delta u\|^2 \\ & + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1\right) \|u\|^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{2}\right) \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^k dx \end{aligned} \quad (4.44)$$

dır. Logaritmik Sobolev eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -m\varepsilon E(t) + \left(\frac{m\varepsilon}{2} + \varepsilon - 1\right) \|u_t\|^2 \\ & + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1\right) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{2}\right) \frac{k\alpha^2 c_p}{2\pi} \|\Delta u\|^2 \\ & + \varepsilon \left(\frac{m(k+2)}{4} - 1\right) \|u\|^2 + \varepsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{m}{2}\right) \|u\|^2 \ln \|u\|^2 \\ & - \varepsilon k \left(1 - \frac{m}{2}\right) (1 + \ln \alpha) \|u\|^2 \\ = & -m\varepsilon E(t) + \left(\frac{m\varepsilon}{2} + \varepsilon - 1\right) \|u_t\|^2 - \varepsilon \left(1 - \frac{m}{2}\right) \left(1 - \frac{k\alpha^2 c_p}{2\pi}\right) \|\Delta u\|^2 \\ & + \varepsilon \left[\frac{m(k+2)}{4} - 1 + k \left(1 - \frac{m}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \ln \|u\|^2 - (1 + \ln \alpha)\right)\right] \|u\|^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde ederiz. (4.4), (4.5) ifadeleri ve $u \in W$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 \ln \|u\|^2 &< \ln \left(\frac{4}{k} E(t) \right) \\
 &< \ln \left(\frac{4}{k} E(0) \right) \\
 &< \ln \left(\frac{4}{k} \alpha \ell \right) \\
 &= \ln \left(\frac{4\pi}{k^2} \alpha e^{2+\frac{2}{k}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. Buradan

$$0 < m < \frac{4}{k+2}$$

ve

$$2 \frac{\sqrt{\pi}}{k} e^{\frac{1}{k}} \alpha^{\frac{1}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$$

seçersek

$$\frac{m(k+2)}{4} - 1 < 0$$

ve

$$\left(1 - \frac{m}{2}\right) \left[\frac{1}{2} \ln \|u\|^2 - (1 + \ln \alpha) \right] < 0,$$

elde ederiz. Böylece

$$L'(t) \leq -m\varepsilon E(t) + \left(\frac{m\varepsilon}{2} + \varepsilon - 1 \right) \|u_t\|^2 \tag{4.47}$$

dır. Şimdi $\varepsilon > 0$ yeterince küçük sayısı için

$$\frac{m\varepsilon}{2} + \varepsilon - 1 < 0$$

olur. Böylece (4.47) eşitsizliği

$$L'(t) \leq -m\varepsilon E(t) \tag{4.48}$$

olur. (4.48) ifadesi $(0, t)$ aralığındaki integrallenir ve (4.41) göz önünde bulundurulursa (4.43) ispatlanmış olur.

4.2. Güçlü Damping Terimli Logaritmik Petrovsky Denklemi

Bu bölümde doğrusal olmayan, logaritmik kaynak terim ve güçlü damping terim içeren

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = u \ln |u|^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.49)$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω, R^n ($n \geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir.

4.2.1. Giriş

Önce denkleminize ait enerji fonksiyoneli bulalım:

(4.49) denklemini u_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde integrallersek

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_{tt} u_t dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \Delta^2 u u_t dx}_{A_2} + \underbrace{\int_{\Omega} \Delta^2 u_t u_t dx}_{A_3} = \underbrace{\int_{\Omega} u \ln |u|^2 u_t dx}_{A_4} \quad (4.50)$$

olur. Şimdi terimleri ayrı ayrı hesaplayalım:

A_1 terimi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. A_2 terimine Green özdeşliği uygulanırsa ve $u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0$ sınır koşullarını göz önüne bulundurursak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u u_t dx &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 \end{aligned}$$

olur. A_3 terimi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u_t u_t dx &= \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\ &= \|\Delta u_t\|^2 \end{aligned}$$

dır. A_4 terimi için

$$(u^2 \ln u^2)' = 2uu_t \ln u^2 + \frac{u^2}{u^2} 2u \cdot u_t$$

olduğundan, bu ifadeyi integrallersek

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = \int_{\Omega} uu_t \ln u^2 dx,$$

$$\int_{\Omega} uu_t \ln u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2$$

elde edilir. Bulduğumuz A_1 , A_2 , A_3 ve A_4 ifadelerini (4.1.2) de yazarsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 + \|\Delta u_t\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2,$$

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\|\Delta u_t\|^2,$$

$$E'(t) = -\|\Delta u_t\|^2 \leq 0 \quad (4.51)$$

olur. Burada

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx \quad (4.52)$$

dır. Şimdi

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx, \quad (4.53)$$

$$I(u) = \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx \quad (4.54)$$

olarak tanımlayalım. Burada

$$J(u) = \frac{1}{2} I(u) + \frac{1}{2} \|u\|^2 \quad (4.55)$$

yazılabilir.

Nehari manifoldu ve potansiyel derinlik sırasıyla

$$\aleph = \left\{ u \in H_0^2(\Omega) : I(u) = 0, \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \neq 0 \right\} \quad (4.56)$$

ve

$$d = \inf \left\{ \sup_{\mu \geq 0} J(\mu u) : u \in H_0^2(\Omega), \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \neq 0 \right\} \quad (4.57)$$

olarak tanımlanır. Kararlı W ve kararsız V kümelerini tanımlayalım

$$\begin{aligned} W &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\}, \\ V &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I(u) < 0, J(u) < d\}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} J_{\delta}(u) &= \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx, \\ I_{\delta}(u) &= \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx, \\ \mathfrak{N}_{\delta} &= \left\{ u \in H_0^2(\Omega) : I_{\delta}(u) = 0, \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \neq 0 \right\}, \\ d(\delta) &= \inf_{u \in \mathfrak{N}_{\delta}} J(u) \end{aligned} \quad (4.58)$$

ve

$$\begin{aligned} W_{\delta} &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I(u) > 0, J(u) < d(\delta)\} \cup \{0\} \\ V_{\delta} &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I(u) < 0, J(u) < d(\delta)\} \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial W_{\delta} &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I(u) = 0, \|\nabla u\| \neq 0\} \cup \{u \in H_0^2(\Omega) : J(u) = d(\delta)\} \\ \partial V_{\delta} &= \{u \in H_0^2(\Omega) : I_{\delta}(u) = 0\} \cup \{u \in H_0^2(\Omega) : J(u) = d(\delta)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 4.2.1.1. $r(\delta) = (\pi\delta)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{n}{2}}$ olmak üzere, eğer $0 < \|u\| < r(\delta)$ ise $I_{\delta}(u) > 0$ dir.

İspat.

$$I_{\delta}(u) = \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx$$

ifadesine $\int_{\Omega} u^2 \ln \|u\|^2 dx$ terimini ekleyip çıkartırsak

$$I_{\delta}(u) = \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u^2 \ln \|u\|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 \ln \|u\|^2 dx - \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx \quad (4.59)$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} I_{\delta}(u) &= \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u^2 \ln \|u\|^2 - \int_{\Omega} u^2 \ln \frac{u^2}{\|u\|^2} dx \\ &= \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u^2 \left(\ln \frac{u}{\|u\|} + \ln \|u\| \right) dx \end{aligned}$$

olur. Logaritmik Sobolev eşitsizliğini uygularsak $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_{\delta}(u) &\geq \delta \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \frac{\alpha^2}{\pi} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + n(1 + \ln \alpha) \|u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^2 \ln \|u\|^2 dx \\ &\geq \left(\delta - \frac{\alpha^2}{\pi} \right) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + n(1 + \ln \alpha) \|u\|^2 - 2 \|u\|^2 \ln \|u\| \end{aligned}$$

olur. $\alpha = \sqrt{\pi\delta}$ seçilirse

$$I_{\delta}(u) \geq \left(n \left(1 + \ln \sqrt{\pi\delta} \right) - 2 \ln \|u\| \right) \|u\|^2 \quad (4.60)$$

olur.

$$\|u\|^2 < (\pi\delta)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{n}{2}}$$

dır. Bu ifade (4.61) de göz önünde bulundurulursa $I_{\delta}(u) > 0$ olur. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.1.2. $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$, $\|u\| \neq 0$ ve $g(\mu) = J(\mu u)$ olsun. Bu durumda

$$I(\mu u) = \mu g'(\mu) \begin{cases} > 0, & 0 < \mu < \mu^*, \\ = 0, & \mu = \mu^*, \\ < 0, & \mu^* < \mu < \infty \end{cases},$$

dır. Burada

$$\mu^* = \exp \left[\frac{\|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u|^2 dx}{2 \|u\|^2} \right]$$

dır.

İspat. $J(u)$ nun tanımından

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln \mu^2 dx$ terimi ekleyip çıkartılırsa

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - u^2 \ln u^2 + u^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln \mu^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln \mu^2 dx$$

ve u nun yerine μu yazılırsa

$$\begin{aligned} J(\mu u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta \mu u|^2 - (\mu u)^2 \ln (\mu u)^2 + (\mu u)^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mu u|^2 \ln \mu^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mu u|^2 \ln \mu^2 dx \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} g(\mu) &= J(\mu u) \\ &= \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln (\mu u)^2 dx + \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln (\mu)^2 dx - \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln \mu^2 dx \\ &= \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 (\ln (\mu u)^2 - \ln \mu^2) dx - \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln \mu^2 dx \\ &= \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u|^2 dx - \frac{\mu^2}{2} \ln \mu^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx \end{aligned} \tag{4.61}$$

olur. $\|u\| \neq 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} g(\mu) = 0$ ve $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} g(\mu) = -\infty$ olduğundan $I(u)$ nun tanımı göz

önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} I(\mu u) &= \mu g'(\mu) \\ &= \mu^2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \mu^2 \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u|^2 dx - 2\mu^2 \ln \mu \int_{\Omega} |u|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.62)$$

olduğu görülür. (4.63) ifadesinden

$$\mu^* = \exp \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u|^2 dx}{2 \|u\|^2}$$

için $I(\mu^* u) = 0$ olur. Böylece işaret tablosundan

$$I(\mu u) = \mu g'(\mu) \begin{cases} > 0, & 0 < \mu < \mu^* \\ = 0, & \mu = \mu^* \\ < 0, & \mu^* < \mu < \infty \end{cases}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.1.3. (4.57) de tanımlanmış olan potansiyel derinlik d için

$$d \geq M = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} e^n}{2}$$

dır.

İspat. Lemma 4.2.1.2 den

$$\begin{aligned} \sup_{\mu > 0} J(\mu u) &= J(\mu^* u) \\ &= \frac{1}{2} I(\mu^* u) + \frac{1}{2} (\mu^*)^2 \|u\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} (\mu^*)^2 \|u\|^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

dır. (4.61) den

$$\begin{aligned} I_{\delta}(u) &= (n(1 + \ln \sqrt{\pi \delta}) - 2 \ln \|u\|) \|u\|^2 \\ &= \left[\frac{n(2 + \ln \pi)}{2} - 2 \ln \|u\| \right] \|u\|^2 \end{aligned}$$

dır. Burada $\delta = 1$ alınır, ve türevden

$$\begin{aligned} 0 &= I(\mu^*u) \\ &\geq \left[\frac{n(2 + \ln \pi)}{2} - 2 \ln \|\mu^*u\| \right] \|\mu^*u\|^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

yazılabilir. Buradan

$$\mu^* \|u\| \geq e^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{4}} \quad (4.65)$$

olur. Sonuç olarak (4.57), (4.64) ve (4.66) dan

$$d \geq M = \frac{1}{2} \pi^{\frac{n}{2}} e^n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.2. Enerji Azalması

Teorem 4.2.2.1. $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $E(0) \leq M$ ve $I(u_0) \geq 0$ olsun. Bu durumda (4.49) denkleminin

$$u, u_t \in C(0, \infty; H_0^2(\Omega))$$

uzayında bir tek zayıf çözümü vardır. Bu durumda $t \in [0, +\infty)$ ve c_0, c_1, c_2 pozitif sabitleri için

1. *Durum:*

$$E(t) \leq \frac{c_0}{1+t} \quad (4.66)$$

polinomal enerji azalması ve

2. *Durum:* $0 < \varsigma < 1$ için $E(0) \leq \varsigma M$ ise

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t} \quad (4.67)$$

üstel enerji azalması vardır.

İspat.

1. *Durum:* $E(0) \leq M$ ve $I(u_0) \geq 0$ kabülümüzden ve $E(t)$, $I(u)$ nun tanım-

larından

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx$$

ifadesinin $(0, t)$ aralığında integrali alınır

$$E(t) - E(0) = - \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u_{\tau}|^2 dx d\tau,$$

$$\begin{aligned} E(0) &= E(t) + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx d\tau, \\ &= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u_{\tau}|^2 dx d\tau \end{aligned} \quad (4.68)$$

olur. $I(u_0) = \|\Delta u_0\|^2 - \int_{\Omega} u_0^2 \ln u_0^2 dx \geq 0$ olduğundan

$$E(0) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx dt \quad (4.69)$$

olur. $E(0) \leq M$ ve $\|u\|^2 \leq \lambda_1 \|\Delta u\|^2$ gömülmesinden

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_{\tau}|^2 dx d\tau \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u_{\tau}|^2 dx d\tau \leq \frac{M}{\lambda_1} \quad (4.70)$$

dır. Burada λ_1 özdeğerdir. (4.49) denklemini u ile çarpıp $\Omega \times (0, t)$ bölgesinde integralleyelim

$$\underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} u u_{tt} dx dt}_{B_1} + \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx dt}_{B_2} + \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} u \Delta^2 u_t dx dt}_{B_3} = \int_0^t \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx dt. \quad (4.71)$$

Şimdi B_1 , B_2 , B_3 ifadelerini hesaplayalım.

B_1 ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^t \int_{\Omega} u u_{tt} dx dt = \int_{\Omega} u u_t dx - \int_{\Omega} u_0 u_1 dx - \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt$$

olur. B_2 ifadesine Green özdeşliği uygulanırsa

$$\int_0^t \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt$$

olur. B_3 ifadesine Green özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} u \Delta^2 u_t dx dt &= \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta u dx dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 dx dt \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler (4.72) de yazılırsa

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u u_t dx - \int_{\Omega} u_0 u_1 dx - \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 dx dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - u^2 \ln u^2) dx dt &= - \int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 dx dt \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t I(u)dt &= - \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |u_{\tau}|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta_0 u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.72)$$

elde edilir. $u \in L^{\infty}(0, \infty; H_0^2(\Omega))$ olduğundan

$$\int_0^t I(u(\tau))d\tau < c \quad (4.73)$$

yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} [(1+t)E(t)] = (1+t)E'(t) + E(t) \leq E(t) \quad (4.74)$$

ifadesinin $(0, t)$ aralığında integrali alınır

$$\int_0^t \frac{d}{dt} [(1+t)E(t)] dt \leq \int_0^t E(t) dt$$

$$(1+t)E(t) - E(0) \leq \int_0^t E(t) dt,$$

$$(1+t)E(t) \leq E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t I(u(\tau))d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_{\tau}\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|u\|^2 d\tau \quad (4.75)$$

elde edilir. $E(0) \leq M$, (4.73) ve $u \in L^{\infty}(0, \infty; H_0^2(\Omega))$ olduğundan

$$E(t) \leq \frac{c_0}{1+t} \quad (4.76)$$

olur.

2. Durum:

$$\begin{aligned} L(t) &= E(t) + \varepsilon(u, u_t)_{L^2(\Omega)} \\ &= E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \end{aligned} \quad (4.77)$$

olsun. Burada ε pozitif bir sabittir. Young eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right| \leq \int_{\Omega} |uu_t| dx \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2$$

olur. α_1 ve α_2 iki pozitif sabit olmak üzere, $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$\alpha_1 E(t) \leq L(t) \leq \alpha_2 E(t) \quad (4.78)$$

dır. Yani $L(t)$ ve $E(t)$ denktir.

Şimdi

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx$$

ifadesinin türevi alınıp, (4.49) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} L'(t) &= E'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} uu_{tt} dx \\ &= - \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx - \varepsilon \int_{\Omega} u \Delta^2 u_t dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_t dx - \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx \\ &\quad + \varepsilon \sigma \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4\sigma} \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \varepsilon(\sigma - 1) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.80)$$

olur. Burada σ pozitif bir sabittir. (4.80) ifadesinin sağ tarafına $B\varepsilon E(t)$ ifadesini

ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & -B\varepsilon E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \varepsilon(\sigma - 1) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\
 & + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
 & - \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

olur. $\|u_t\|^2 \leq c \|\Delta u_t\|^2$ gömülmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & -B\varepsilon E(t) + \varepsilon c \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx + \varepsilon(\sigma - 1) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\
 & + \frac{B\varepsilon c}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
 & - \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\
 \leq & -B\varepsilon E(t) + \left(\varepsilon c + \frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 + \frac{B\varepsilon c}{2} \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\
 & + \left(\varepsilon(\sigma - 1) + \frac{B\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
 & + \left(\varepsilon - \frac{B\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir. Baştan 4. terime Logaritmik Sobolev eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq -B\varepsilon E(t) + \left(\frac{B\varepsilon c}{2} + \varepsilon c + \frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t| dx \\
&\quad + \left[\frac{B\varepsilon}{2} + \varepsilon(\sigma - 1) \right] \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\
&\quad + \left(\varepsilon - \frac{B\varepsilon}{2} \right) \left(\frac{\alpha^2}{\pi} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + u^2 \ln \|u\|^2 - n(1 + \ln \alpha) \|u\|^2 \right) \\
&= -B\varepsilon E(t) + \left[\frac{B\varepsilon}{2} + \varepsilon(\sigma - 1) \right] \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
&\quad + \frac{B\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \left(\frac{B\varepsilon c}{2} + \varepsilon c + \frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\
&\quad + \left(\varepsilon - \frac{B\varepsilon}{2} \right) \frac{\alpha^2}{\pi} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \left(\varepsilon - \frac{B\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 \ln \|u\|^2 dx \\
&\quad - \left(\varepsilon - \frac{B\varepsilon}{2} \right) n(1 + \ln \alpha) \|u\|^2 \\
&= -B\varepsilon E(t) + \left(\frac{B\varepsilon c}{2} + \varepsilon c + \frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u_t|^2 dx \\
&\quad + \varepsilon \left[\frac{B}{2} + (\sigma - 1) + \left(1 - \frac{B}{2} \right) \frac{\alpha^2}{\pi} \right] \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\
&\quad + \varepsilon \left[\frac{B}{2} - \left(1 - \frac{B}{2} \right) n(1 + \ln \alpha) + \left(1 - \frac{B}{2} \right) \ln \|u\|^2 \right] \|u\|^2 \quad (4.83)
\end{aligned}$$

olur. $I(u) \geq 0$ ve $E(t) \leq E(0) \leq \varsigma M$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\ln \|u\|^2 &\leq \ln (2J(u)) \\
&\leq \ln (2E(t)) \\
&\leq \ln (2E(0)) \\
&\leq \ln (2\varsigma M) \quad (4.84)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\varsigma^{\frac{1}{n}}\pi < \alpha < \pi^{\frac{1}{2}}$, $0 < B < 1$ şeklinde seçilirse, yeterince küçük $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ sayıları için

$$\frac{B}{2} - \left(1 - \frac{B}{2} \right) n(1 + \ln \alpha) \ln (2\varsigma M) + \left(1 - \frac{B}{2} \right) \ln (2\varsigma M) < 0,$$

$$\frac{B\varepsilon c}{2} + \varepsilon c + \frac{\varepsilon}{4\sigma} - 1 < 0,$$

$$\frac{B\varepsilon}{2} + \varepsilon(\sigma - 1) + \varepsilon \left(1 - \frac{B}{2} \right) \frac{\alpha^2}{\pi} < 0$$

yazılabilir. Böylece $L(t) \sim E(t)$ olduğundan

$$L'(t) \leq -\beta\varepsilon E(t) \leq -\frac{\beta\varepsilon}{\alpha_2} L(t),$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{L'(t)}{L(t)} dt &\leq \int_0^t -\frac{\beta\varepsilon}{\alpha_2} dt, \\ \ln \frac{L(t)}{L(0)} &\leq -\frac{\beta\varepsilon}{\alpha_2} t, \end{aligned}$$

$$L(t) \leq L(0) e^{-\frac{\beta\varepsilon}{\alpha_2} t}$$

olur. Burada $c_1 = L(0)$ ve $c_2 = \frac{\beta\varepsilon}{\alpha_2}$ alınırsa, $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.3. Sonsuzdaki Patlama

Teorem 4.2.3.1. $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $E(0) \leq 0$ ve $I(u_0) < 0$ olsun. Bu durumda (4.49) denkleminin u zayıf çözümü sonsuzda patlar (blow up) olur. Yani

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta u(., t)\| = \infty \quad (4.85)$$

dır.

İspat. $0 \leq t < T$ için

$$\begin{aligned} G(t) &= \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2 d\tau + (T-t) \|\Delta u_0\|^2 \\ &= \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u(\tau)|^2 dx d\tau + (T-t) \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 dx \end{aligned} \quad (4.86)$$

olsun. $G(t)$ nin birinci ve ikinci mertebeden türevlerini hesaplayalım

$$G'(t) = 2 \int_{\Omega} u_t u dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u(\tau) \Delta u_{\tau}(\tau) dx d\tau - \|\Delta u_0\|^2 \quad (4.87)$$

ve

$$G''(t) = 2 \int_{\Omega} (u_{tt}u + |u_t|^2) dx + 2 \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_{\tau} dx d\tau$$

olur. Burada (4.49) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} G''(t) &= 2 \int_{\Omega} [(u \ln |u|^2 - \Delta^2 u - \Delta^2 u_t) u + |u_t|^2] dx + 2 \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_t dx \\ &= 2 \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx - 2 \int_{\Omega} u \Delta^2 u_t dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_{\tau} dx \\ &= 2 \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned} \quad (4.88)$$

olur.

$$I(u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 - u^2 \ln u^2 dx$$

olduğundan

$$G''(t) = -2I(u) + 2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \quad (4.89)$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} &G''(t)G(t) - (G'(t))^2 \\ &= 2G(t) \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 \ln |u|^2 dx \right) \\ &\quad + 4 [\eta(t) - (G(t) - (T-t) \|\Delta u_0\|^2) \\ &\quad \cdot \left(\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \right)] \end{aligned} \quad (4.90)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \left(\|u\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \right) \cdot \left(\|u_t\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_{\tau} dx d\tau \right)^2 \end{aligned}$$

dır.

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2) \cdot (b^2 + d^2)$$

formundaki Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_{\tau} dx d\tau \right)^2 \\ & \leq \left(\|u\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \right) \left(\|u_t\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \right) \end{aligned}$$

olduğundan $0 \leq t \leq T$ için $\eta(t) \geq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$G''(t)G(t) - (G'(t))^2 \geq G(t)\xi(t) \quad (4.91)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \xi(t) &= -2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - 2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u|^2 dx - 4 \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \\ &= -4E(t) + 2 \int_{\Omega} |u|^2 dx - 4 \int_0^t \|\Delta u_{\tau}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq -4E(0) + 2 \int_{\Omega} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.92)$$

dır. $E(0) \leq 0$ ve $I(u_0) \leq 0$ olduğundan $\xi(t) \geq 0$ olduğundan

$$G''(t)G(t) - (G'(t))^2 \geq 0 \quad (4.93)$$

elde edilir. Böylece Konkavlık metodu gereğince teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada logaritmik kaynak terim içeren

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = u \ln |u|^2$$

Petrovsky denkleminin çözümlerinin enerji azalması sınırlı bir Ω bölgesinde başlangıç ve sınır koşulları ile çalışılmıştır.

Ele alınan denklemin çözümlerinin enerji azalması farklı şartlar altında ve/veya farklı metotlar ile çalışılabilir. Ayrıca denklemin çözümlerinin farklı matematiksel davranışları sınırlı veya sınırsız bölgede çalışılabilir.



.



6. KAYNAKLAR

- Adams, R. A. 2003. Fournier, J. J. F., Sobolev Spaces. Academic Press. New York.
- Al-Gharabli, M.M., Messaoudi, S.A. 2017. The existence and the asymptotic behaviour of a plate equation with frictional damping and a logarithmic source term. **J. Math. Anal. Appl.** 454: 1114-1128.
- Al-Gharabli, M.M., Messaoudi, S.A. 2018. Existence and a general decay result for a plate equation with nonlinear damping and a logarithmic source term. **J. Evol. Equ.**, 18(1) 105-125.
- Brezis, H. 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.
- Bialynicki-Birula, I., Mycielski, J. 1976. Nonlinear wave mechanics, **Ann. Physics** 100 (1-2):62-93.
- Cezenave, T., Haraux, A. 1980. Equations d'évolution avec non-linéarité logarithmique. **Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.** 2 (1): 21-51.
- Chen, W., Zhou, Y. 2009. Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equation, **Nonlinear Anal.** A 70 (9): 3203-3208.
- Chen, H., Lio, G. 2012 Global existence and nonexistence for semilinear parabolic equations with conical degeneration, **J. Pseudo – Differ. Oper. Appl.** 3: 329-349.
- Chen, H., Luo, P., Liu, G. W. 2015. Global solutions and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity, **J. Math. Anal. Appl.** 422: 84-98.
- Evans, L. C. 1998. Partial differential equations, **Graduate Studies in Mathematics** : vol. 19.

Gross, L. 1975. Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.* 97 (4):1061-1083.

Han, X.S. 2013. Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equations arising from Q-ball dynamics, *Bull. Korean Math. Soc.* 50 (1): 275-283.

Hiramatsu, T., Kawasaki, M., Takahashi, F. 2010. Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation. *J. Cosmol Astropart. Phys.*, 6(8).

Hu, Q., Zhang, H., Liu, G. 2019. Asymptotic behaviour for a class of logarithmic wave equations with linear damping. *Appl. Math. Optim.*, 79: 131-144.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications, John Wiley Sons, India.

Levine H. A. 1974. Instability and nonexistence of global solution to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192, 1-21.

Lions, J. 1969. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, second edition, Dunod, Paris.

Lions, J. 2002. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod Gauthier-Villars, Paris.

Li, G., Sun, Y., Liu, W. 2012. Global existence and blow up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping, *Appl. Anal.*, 91(3): 575-586.

Liu, Y. 2006. On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations, *Nonlinear Anal.* 64: 2665-2687.

Ma, L., Fang, Z.B. 2018. Energy decay estimates and infinite blow-up phenomena for a strongly damped semilinear wave equation with logarithmic nonlinear source, *Math Math. Appl. Sci.*; 41 2639-2653.

Marie-Therese Lacroix-Sonrier, 1998 Distributions Espace de Sobolev Application, Ellipses Edition Marketing S. A.

Messaoudi, S. A. 2002. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky, *J. Math. Anal. Appl.*, 265(2): 296-308.

Payne, L., Sattinger, D. 1975. Saddle points an instability of nonlinear hyperbolic eqation, *Israel J. Math.* 226: 273-303.

Pinchover, Y., Rubinstein, J. 2005. An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press.

Pişkin, E. 2013. Doğrusal olmayan evölüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. 2018. Kısmi Türevli Denklemler, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E., Polat, N. 2014. On the decay of solutions for a nonlinear Petrovsky equation, *Math. Sci. Lett.*, 3(1): 43-47.

Polat, N. 2005. Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu , Doktora Tezi, Dicle Ünivesitesi

Wu, S.T., Tsai, L.Y. 2009. On global solutions and blow up of solutions for a nonlinearly damped Petrovsky system, *Taiwanese J. Math.*, 13(2A): 545-558.



ÖZGEÇMİŞ

1985 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2012 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümünden mezun oldum. 2012 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir orta okulda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. Evliyim ve bir çocuğum var.

Bildiri:

Erhan Pişkin, Zeynep Çalışır, Decay of solutions for a nonlinear Petrovsky equation with nonlinear damping term, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016), 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey, pp 301.



DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	Zeynep ÇALIŞIR
ÖĞRENCİ NO	13804014
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2018-2019
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Logaritmik Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Azalması

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	60
BENZERLİK ORANI	%22
RAPORLAMA TARİHİ	08/07/ 2019

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 60 sayfalık kısmına ilişkin, 08/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %22 ‘tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar hariç/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları’nı inceledim ve bu Uygulama Esasları’nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Zeynep ÇALIŞIR
08/07/2019

Doç.Dr. Erhan PİŞKİN
Tez Danışmanı
08/07/2019

Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY
Anabilim Dalı Başkanı V.
08/07/2019

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.