

**SPİN-0 VE SPİN-1/2 PARÇACIKLARININ ENERJİYE BAĞLI
POTANSİYELLERDEN SAÇILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAKAN TİLAVER

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
TEMMUZ - 2019**

**SPİN-0 VE SPİN-1/2 PARÇACIKLARININ ENERJİYE BAĞLI
POTANSİYELLERDEN SAÇILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAKAN TİLAVER

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK
ANABİLİM DALI**

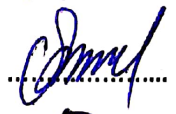
**Danışman
Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU**

**İkinci Danışman
Doç. Dr. Mustafa SALTİ**

**MERSİN
TEMmuz - 2019**

ONAY

Hakan TİLAVER tarafından, Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU danışmanlığında ve Doç. Dr. Mustafa SALTİ ikinci danışmanlığında hazırlanan "Spin-0 ve Spin-1/2 Parçacıklarının Enerjiye Bağlı Potansiyellerden Saçılması" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Unvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Doç. Dr. Murat KORUNUR	
Üye	Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU	
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Özgür MIZRAK	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02.08.2019 tarih ve 2019.30/129 sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Prof. Dr. Cahit BİLİM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

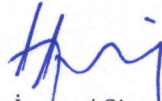
beyan ederim.

ETHIC DECLARATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions,

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with academic rules,
- I presented all the visual, auditory and written information and results in accordance with scientific ethics,
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of the others works,
- I used all of the referred works as the references,
- I did not do any tampering in the used data,
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university,
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

18 Temmuz 2019/18 July 2019



İmza / Signature

HAKAN TİLAVER

Öğrenci Adı ve Soyadı / Student Name and Surname

ÖZET

Atomlar, moleküller veya temel parçacıkların doğasını anlayabilmenin en kullanışlı yollarından biri olan saçılma problemi birçok cevapsız soruyla birlikte hala araştırılmaktadır. Saçılma problemini araştırmanın yollarından biri atom, molekül veya parçacığın bir potansiyel enerji fonksiyonu ile etkileşmesidir. Diğer taraftan, parçacığın enerjisine bağlı potansiyel enerji fonksiyonu, dinamo etkisinin manyeto-hidrodinamik modeli, hidrodinamik, görelî kuantum mekaniğinin Hamiltonyen formülasyonu, kuantum kuyuları, yarıiletkenler ve ağır kuark sistemlerinin modellenmesi gibi fiziğin birçok alanında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında ilk önce literatürde iyi bilinen tek boyutlu basamak, bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyel enerji fonksiyonlarının parçacığın enerjisine bağlı formları oluşturulmuştur. Daha sonra, Klein-Gordon (görelî spin-0) ve Dirac (görelî spin-1/2) parçacıklarının enerjiye bağlı potansiyelden saçılma problemi araştırılmıştır. Bunun için, Klein-Gordon ve Dirac denklemlerin standart yöntem ile çözülerek saçılma durumu dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Saçılma durumu dalga fonksiyonları ve her bir etkileşme için tanımlanan sınır koşulları kullanılarak geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların nümerik analizleri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Saçılma, enerjiye bağlı potansiyeller, Klein-Gordon denklemi, Dirac denklemi.

Danışman: Doç. Dr. Oktay Aydoğdu, Mersin Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı, Mersin.

İkinci Danışman: Doç. Dr. Mustafa Saltı, Mersin Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

Scattering which is one of the most useful ways to understand the nature of atoms, molecules or basic particles is still under investigation with many unanswered questions. One of the ways to research the scattering problem is the interaction an atom, molecule or particle with a potential energy function. On the other hand, energy-dependent potential energy function is frequently used in many areas of the physics such as the magneto-hydrodynamic model of the dynamo effect, hydrodynamic, Hamiltonian formulation of the relativistic quantum mechanics, quantum wells, semiconductors and modelling of heavy quark systems. In this thesis, energy-dependent shapes of the one dimensional step, barrier, Hulthen, Woods-Saxon potential energy functions which are well-known in the literature have been firstly formed. Then, the problem of scattering of the Klein-Gordon (relative spin-0) and the Dirac (relative spin-1/2) particles from energy-dependent potential has been investigated. For this, the Klein-Gordon and Dirac equation have been solved by using standard method and then wave functions of the scattering state have been obtained. Transmission and reflection probability densities have been calculated by using the wave functions of the scattering state and boundary conditions defined for the each interaction. Numerical analyzes of the results obtained have been made.

Keywords: Scattering, energy-dependent potentials, Klein-Gordon equation, Dirac equation.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Oktay AYDOĞDU, Department of Physics, University of Mersin, Mersin.

Co-Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa SALTİ, Department of Physics, University of Mersin, Mersin.

TEŞEKKÜR

Kendilerini tanıdığım ilk günden beri bana akademik anlamda bilgi, birikim ve deneyimlerini aktarmakta hiç tereddüt etmeyen, ufkumu genişleten ve üzerimdeki emeklerini asla ödeyemeyeceğim aziz hocalarım Sayın Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU ve Sayın Doç. Dr. Mustafa SALTI'ya en derin kalbi duygularıyla teşekkürü bir borç bilirim. Fizik kürsüsünden Sayın Prof. Dr. Ali HAVARE ve Sayın Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT hocalarıma ve doktora öğrencisi Hilmi YANAR abime yüksek lisansım boyunca göstermiş oldukları yakın ilgi ve alakalarına tüm samimiyetimle ayrıca teşekkür ederim.

Bu tezi yazmamdaki süreçte bana olan inanç ve desteklerinden asla taviz vermeyen değerli aileme, eşime ve güzel kızım *Hafsa Betül*'e sevgilerimle...



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR ve SİMGELER	x
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	4
2.1. Saçılma Problemi	4
2.2. Enerjiye Bağlı Potansiyel Kavramı	5
2.3. Basamak Potansiyeli	7
2.4. Bariyer Potansiyeli	8
2.5. Hulthen Potansiyeli	9
2.6. Woods-Saxon Potansiyeli	10
3. MATERYAL VE METOT	12
3.1. Hulthen Potansiyeli Tarafından Bir Klein-Gordon Parçacığının Saçılması	12
3.2. Tek Boyutta Hulthen Potansiyeli İçin Dirac Denkleminin Çözümü	14
3.2.1. Geçiş Rezonansı Koşulu	17
4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR	19
4.1. Enerjiye Bağlı Basamak Potansiyeli	19
4.1.1. Klein-Gordon Parçacıkları	19
4.1.1.1. Nümerik Analiz	20
4.1.2. Dirac Parçacıkları	22
4.1.2.1. Nümerik Analiz	23
4.2. Enerjiye Bağlı Bariyer Potansiyeli	26
4.2.1. Klein-Gordon Parçacıkları	26
4.2.1.1. Nümerik Analiz	28
4.2.2. Dirac Parçacıkları	31
4.2.2.1. Nümerik Analiz	33
4.3. Enerjiye Bağlı Hulthen Potansiyeli	35
4.3.1. Klein-Gordon Parçacıkları	35
4.3.1.1. Nümerik Analiz	38
4.3.2. Dirac Parçacıkları	42
4.3.2.1. Nümerik Analiz	45
4.4. Enerjiye Bağlı Woods-Saxon Potansiyeli	49
4.4.1. Klein-Gordon Parçacıkları	49
4.4.1.1. Nümerik Analiz	51
4.4.2. Dirac Parçacıkları	55
4.4.2.1. Nümerik Analiz	56
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Basamak potansiyelinin konuma göre değişim grafiği	7
Şekil 2.2. Bariyer potansiyelin konuma göre değişim grafiği	9
Şekil 2.3. Bir boyutta Hulthen potansiyelin konuma göre değişim grafiği	10
Şekil 2.4. Bir boyutta Woods-Saxon potansiyelinin konuma göre değişim grafiği	11
Şekil 4.1. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	21
Şekil 4.2. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	21
Şekil 4.3. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	22
Şekil 4.4. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	24
Şekil 4.5. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	25
Şekil 4.6. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi ve Klein paradoksu	26
Şekil 4.7. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	26
Şekil 4.8. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	29
Şekil 4.9. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	30
Şekil 4.10. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	30
Şekil 4.11. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının a parametresine göre değişimi	31
Şekil 4.12. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	33
Şekil 4.13. parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	34
Şekil 4.14. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	34
Şekil 4.15. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının a parametresine göre değişimi	35
Şekil 4.16. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	38
Şekil 4.17. $a = 1$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	39
Şekil 4.18. $a = 0.5$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	39
Şekil 4.19. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	40
Şekil 4.20. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	40
Şekil 4.21. $a = 1$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	41
Şekil 4.22. $a = 0.5$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	41
Şekil 4.23. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	42

	Sayfa
Şekil 4.24. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	45
Şekil 4.25. $a = 1$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	46
Şekil 4.26. $a = 0.5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	46
Şekil 4.27. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	47
Şekil 4.28. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	47
Şekil 4.29. $a = 1$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	48
Şekil 4.30. $a = 0.5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	48
Şekil 4.31. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	49
Şekil 4.32. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	51
Şekil 4.33. $a = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	51
Şekil 4.34. $a = 10$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	52
Şekil 4.35. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	52
Şekil 4.36. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	53
Şekil 4.37. $a = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	53
Şekil 4.38. $a = 10$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	54
Şekil 4.39. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	54
Şekil 4.40. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	56
Şekil 4.41. $a = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	57
Şekil 4.42. $a = 5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	57
Şekil 4.43. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi	58
Şekil 4.44. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi	58
Şekil 4.45. $a = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	59
Şekil 4.46. $a = 5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	59
Şekil 4.47. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi	60

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\hbar$	Planck Sabiti
c	Işık Hızı
m	Kütle
E	Enerji
p	Momentum
ψ	Dalga Fonksiyonu
V_g	Grup Hızı
T	Geçiş Olasılık Yoğunluğu
R	Yansıma Olasılık Yoğunluğu
$\mathcal{H}$	Hamiltonyen
$V(x)$	Potansiyeli Enerji Fonksiyonu
$V_{Bas}(x, E)$	Enerjiye Bağlı Basamak Potansiyeli
$V_{Bar}(x, E)$	Enerjiye Bağlı Engel Potansiyeli
$V_H(E, x)$	Enerjiye Bağlı Hulthén Potansiyeli
$V_{WS}(E, x)$	Enerjiye Bağlı Woods-Saxon Potansiyeli
A^μ	Vektör Potansiyeli
STM	Taramalı Tünelleme Mikroskopi
δ	Potansiyelin Tarama Parametresi
V_0	Potansiyel Derinliği
α	Yüzey Kalınlığı
$F(y)$	Hipergeometrik Fonksiyon
J	Elektriksel Akı Yoğunluğu
j_{in}	Gelen Dalganın Elektriksel Akı Yoğunluğu
j_{refl}	Yansıyan Dalganın Elektriksel Akı Yoğunluğu
j_{trans}	Geçen Dalganın Elektriksel Akı Yoğunluğu

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\sigma_z, i\sigma_x$	Pauli Matrisleri
γ_0, γ_x	Dirac Matrisleri
DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
$\Theta(x)$	Heaviside Basamak Fonksiyonu
$\eta^{\alpha\beta}$	Metrik Tensör



1. GİRİŞ

Fizikte 19. yüzyıl sonlarından 20. yüzyıl başlarına kadar klasik fizik kuramlarının, doğadaki tüm fiziksel olayları ve etkileşmelerini açıklamakta yeterli olduğu düşünülmüştür. Mekanik olaylar Newton yasalarıyla, elektriksel ve optiksel olaylar Maxwell denklemleriyle ve termodinamik olaylar ise İstatistik Mekanik kuramı kullanılarak açıklanmıştır. Fakat 20. yüzyıl başlarında yapılan bazı deneyler (Siyah Cisim Işıması, Fotoelektrik Olay, Compton Saçılması, Elektronun Kırınım ve Girişimi, vs.), bu kuramlar çerçevesinde açıklanamamıştır. Bu deneysel sonuçların açıklanabilmeleri için yeni kuramlara ihtiyaç duyulmuştur. Bu kuramlardan biri de mikro dünyayı (parçacık, atom ve molekül gibi) açıklamak için kullanılan “Kuantum Mekaniği” kuramıdır.

Kuantum mekaniğinin ortaya çıkışıyla, nükleer fizik, atom ve molekül fizik gibi fiziğin birçok alanında parçacıklar, atomlar, moleküller, elektron-çekirdek, çekirdek-çekirdek arası etkileşmeler Schrödinger denkleminin bir dış potansiyel varlığında çözümünden elde edilen dalga fonksiyonunun analiz edilmesiyle araştırılmıştır. Örneğin, çekirdek içi etkileşmeleri açıklamak için Yukawa [1], Woods-Saxon [2] ve Hulthen [3] potansiyel enerji fonksiyonları kullanılmıştır. Bir parçacığın engel veya basamak potansiyelleri ile etkileşmesi ise çözümleri tam olarak elde edilen ve iyi bilinen fiziksel süreçlerdir. Enerjisi engel potansiyelin yüksekliğinden daha düşük olan bir parçacığın potansiyel engeli geçerek karşı tarafa sızması klasik olarak imkansız bir süreç olmasına rağmen kuantum mekaniksel olarak belirli bir olasılıkla mümkündür [4]. Bu sonuç taramalı tünelleme mikroskobunun keşfine temel oluşturmuştur.

Atomlar, moleküller veya temel parçacıkların doğasını anlayabilmek adına en kullanışlı yollardan biri de saçılma yöntemidir. Bununla birlikte, *saçılma ve bağlı durumlar* problemi fizikte önemli sonuçlar veren ve halen güncelliğini koruyan bir araştırma alanıdır. Saçılma probleminde temel olarak, bir noktaya sabitlenmiş hedef parçacık üzerine belirli bir enerjiye sahip başka bir parçacık gönderilerek saçılan parçacıkların yön ve enerjileri incelenir. Gelen ve hedefteki parçacıklar arasındaki etkileşim potansiyeli, saçılan parçacıkların açısal dağılımını ve enerjilerini etkileyen başlıca faktördür. Benzer şekilde çekirdek içi etkileşimleri, diatomik moleküler yapıları ve temel parçacıkların doğasını anlayabilmek adına yukarıdaki tüm süreçlerle birlikte saçılma ve bağlı durumların önemi fizikte çok daha fazla yer tutmaktadır. Neredeyse tüm fiziksel süreçlerde saçılma ve bağlı durumlar konusunun etkin rol alıyor olması bunun başlıca nedenlerinden bir tanesidir.

Saçılma süreci, iki veya daha fazla parçacığın birbiri ile çarpışması veya saçılması biçiminde olabileceği gibi bir parçacığın herhangi bir potansiyelden saçılması biçiminde de

gerçekleşebilir. Saçılma durumları, etkileşen parçacığın enerjisine ve potansiyelin biçimine bağlı olarak oluşmaktadır. Bir parçacığın bir potansiyelle etkileşmesi ile gerçekleşen saçılma probleminde temel amaç dalga denkleminin çözümünden elde edilen dalga fonksiyonunu kullanarak geçiş ve yansıma katsayılarını bulmaktır. Bu katsayılar parçacığın potansiyel ile etkileşmesi sonucunda hangi olasılıklar ve hangi enerjiler ile saçıldığını belirlememizi sağlar.

Bir parçacığı betimlemenin yollarından bir tanesi de parçacığa uygun dalga denklemini bir dış potansiyel varlığında çözmektir. Spinsiz ve görelili olmayan parçacıkları Schrödinger denklemi, spin-0 ve görelili parçacıkları Klein-Gordon denklemi, spin-1/2 ve görelili parçacıkları Dirac denklemi, spin-1 ve spin-0 ve görelili parçacıkları Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi, spin-1/2 ve görelili olmayan parçacıkları Pauli denklemi ile betimlenir.

Diğer taraftan parçacığın enerjisine bağlı bir potansiyel enerji fonksiyonu kavramı fiziğin çeşitli alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Ters saçılma yöntemi kullanılarak enerjiye bağlı potansiyellerin Schrödinger denklemindeki çözümü [5]; tek nükleon spektrumunda enerjiye bağlı efektif kütlelerin türetilmesi [6]; D-boyutlu Dirac denkleminin enerjiye bağlı pseudo-harmonik ve Mie-tipi potansiyeller varlığında çözümlerinin elde edilmesi [7]; Klein-Gordon denklemi için Darboux dönüşümlerinin enerjiye bağlı potansiyeller varlığında bulunması [8]; enerjiye bağlı tekil potansiyellerin varlığında bağlı durumların incelenmesi [9]; Dirac denkleminde enerjiye bağlı potansiyel kullanılarak, basit benzerlik dönüşümü ve asimptotik iterasyon yöntemleri ile çekirdekdeki SU(2) simetrisinin dejenerasyonunun ve kuantumsallığının doğru bir şekilde kavranması [10]; enerjiye bağlı potansiyel kullanılarak Schrödinger denkleminin, temel bir sistemdeki $(0; +\infty)$ aralığında ki matris çözümleri aracılığıyla asimptotik formüllerinin bulunması [11]; $^{40}_{20}\text{Ca}$ ve $^{46,48,50}_{22}\text{Ti}$ sistemlerinin alt-bariyer füzyonunu inceleyerek füzyon dinamiklerinin tanımlanması [12] bunlardan bazılarıdır.

Bu tez çalışmasında; olağan potansiyel kavramından yola çıkılarak literatürde sıklıkla kullanılan Basamak, Bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyellerinin enerjiye bağlı formları oluşturulacaktır. Daha sonra, elde edilen enerjiye bağlı potansiyellerden Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının saçılma durumları ayrıntılı olarak tartışılacaktır. Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin enerjiye bağlı potansiyellerin varlığında tam çözümlerinin elde edilebilmesi için standart yöntem kullanılacaktır. Elde edilen saçılma durumu dalga fonksiyonları ve her bir etkileşme için tanımlanan sınır koşulları kullanılarak geçiş ve yansıma katsayıları hesaplanacaktır. Bu hesaplar sonunda elde edilecek sonuçların nümerik analizleri bilgisayar programı [13] aracılığıyla yapılacak ve bu sonuçlar tablo ve grafik olarak sunulacaktır. Geçiş olasılıklarının hangi enerjilerde gerçekleştiği, hangi parametrelere bağlı olduğu, bu olasılıkların sıklığı ve benzeri durumlar detaylı olarak araştırılacaktır. Ayrıca, fizikte birçok alanda kullanılan

ve dalga denklemi çözümleri literatürde var olan Basamak, Bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyellerinin enerjiye bağlı biçimleri yazılırken bilinen formlarına indirgenebilecek şekilde seçilecektir. Böylece bu çalışmada elde edilecek sonuçların literatürde var olan çözümlere indirgenebilmesi ve sonuçların kıyaslanabilmesi sağlanacaktır.

Enerjiye bağlı potansiyellerden saçılma durumunun bir boyutta görelî parçacıklar için henüz çalışılmadığı literatür taraması sonucunda tespit edilmiştir. Tez çalışmasının sonuçlarının, literatüre yeni sonuçlar ve yeni bir bakış açısı kazandıracığı, bununla birlikte gelecekte bu konuda yapılacak çalışmalara da temel oluşturacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasının bir sonraki kaynak araştırması bölümünde saçılma problemi ve enerjiye bağlı potansiyeller hakkında kısa bilgi verildikten sonra, basamak, bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyel enerji fonksiyonları tanıtılacaktır. Bu bölümde ayrıca enerjiye bağlı potansiyellerin kullanıldığı çalışmalardan bahsedilecektir. Materyal ve Metot bölümünde ise tez çalışmasına kaynaklık eden iki çalışma ayrıntılı olarak verilecektir. Bulgular ve Tartışmalar kısmında enerjiye bağlı basamak, bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyelleri için Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin çözümleri elde edilerek geçiş ve yansıma katsayıları hesaplanacaktır. Elde edilen dalga fonksiyonlarının, geçiş ve yansıma katsayılarının nümerik analizi yine bu bölümde detaylı olarak sunulacaktır. Son bölümde ise Sonuç ve Öneriler sunulacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

2.1. Saçılma Problemi

Atomlar, moleküller veya temel parçacıkların doğasını anlayabilmenin en güzel yollarından birinin saçılma yöntemi olduğundan bahsetmiştik. Bir parçacığın, atomun veya molekülün bir potansiyel ile etkileşmesi sonucunda bağlı veya saçılma durumları ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Ancak, tüm fiziksel sistemleri betimleyen evrensel bir potansiyel enerji olmadığından farklı fiziksel sistemler için farklı potansiyeller kullanılmıştır. Burada, bir parçacığı, atomu veya molekülü betimlemek için kullanılacak potansiyel enerji fonksiyonunun belirlenmesi büyük önem arz etmektedir. Potansiyel enerji fonksiyonu belirlenirken var olan deneysel veriler ile uyumlu sonuçlar vermesi ve geleceğe dair yeni sonuçlar ve tahminler ortaya koyması dikkate alınır. Deneysel süreçlerdeki hassasiyet arttıkça bu süreçleri açıklamaya çalıştığımız kuramsal süreçler de ya yenilenmeli ya da güncellenmelidir. Sonuç olarak evrensel bir potansiyel enerji fonksiyonunun olmaması, deneysel süreçlerin her geçen gün daha nitelikli ve daha detaylı sonuçlar vermesi ve yeni fiziksel süreçlerin ortaya çıkması saçılma probleminin de güncelliğini korumasını sağlamıştır.

Kuantum mekaniği kuramının oluşturulmasından beri güncelliğini koruyan ve her dönem çalışılan problemlerden biri olan saçılma problemi ile ilgili literatürde yüzlerce çalışma yapılmıştır. Burada özellikle son zamanlarda yapılan ve tez konusu ile yakından ilişkili olan çalışmalardan bahsedilecektir. 2002 yılında Kennedy bir boyutlu Dirac denklemini Woods-Saxon potansiyeli varlığında çözerek saçılma ve bağlı durumları elde etmiştir [14]. Bu çalışmada yazar geçiş rezonansları ($T = 1$) ve süperkritiklik ($E = -m$) için koşulları türetmiştir. Aynı yıl yayınlanan bir diğer çalışmada Dirac parçacıklarının düşük momentumlu saçılmaları çalışılmıştır [15]. Yazarlar keyfi olarak çok düşük momentuma sahip Dirac parçacıklarının bir potansiyel bariyerinden yansımada geçebileceklerini göstermişlerdir. Çalışmada geçiş ve yansıma katsayılarının yanında sıfır yansıma koşulunun potansiyelin şekline bağlılığı belirlenmiştir. Bir boyutlu Hulthen potansiyeli varlığında Dirac denkleminin çözümleri hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden hesaplanmıştır [16-17]. Geçiş ve yansıma katsayıları ile geçiş rezonansı koşulu ise dalga fonksiyonunun sürekliliğinden elde edilmiştir. Ref. [18]'de çift bariyer potansiyelinden saçılan Dirac parçacıkları için geçiş ve yansıma katsayıları saçılma matrisi metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Fonksiyonel analiz metodunun kullanıldığı çalışmada yazarlar Dirac parçacıklarının saçılma ve bağlı durum çözümlerini Jacobi polinomları cinsinden bulmuşlardır [19].

Rojas ve Villalba görelî ve spin-0 parçacıkların Woods-Saxon potansiyelinden saçılmasını bir boyutta araştırmışlardır [20]. Cusp potansiyeli ile etkileşen bir görelî skaler parçacığın saçılma durumları Ref. [21]'de belirlenmiştir. Bu çalışmada geçiş rezonanslarının varlığının şartı Klein-Gordon parçacıkları için elde edilmiştir. l -dalga Klein-Gordon denkleminin saçılma durum çözümleri merkezci terim için kullanılan uygun bir yaklaşıklık altında analitik olarak eşit vektör ve skaler Hulthen potansiyeli varlığında hesaplanarak faz kaymaları bulunmuştur [22]. Hassanabadi ve çalışma arkadaşları Woods-Saxon potansiyelinden saçılan görelî ve spinsiz parçacıklar için bir boyutta geçiş ve yansıma katsayılarını hesaplamışlardır [23].

3 boyutlu l -dalga Schrödinger denkleminin Manning-Rosen potansiyelli çözümleri merkezci terim için uygun bir yaklaşıklık kullanılarak Wei ve arkadaşları tarafından bulunmuştur [24]. l -dalga saçılma durumlarını temsil eden normalize dalga fonksiyonu elde edildikten sonra Schrödinger parçacıkları için faz kayması hesaplanmıştır. Aydogdu ve arkadaşları tarafından bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemi asimetrik Hulthen potansiyeli için çözülmüş ve dalga fonksiyonları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bulunmuştur [25]. Bu dalga fonksiyonları kullanılarak spinsiz ve görelî olmayan parçacıklar için birimsellik koşulunun ($T + R = 1$) asimetrik potansiyel varlığında da sağlandığı gösterilmiştir. Bir diğer çalışmada ise parabolik tek potansiyel tarafından saçılan Schrödinger parçacıklarının Gamov durumlarının ve rezonanslarının varlığı tartışılmıştır [26].

Asimetrik Cusp potansiyeli varlığında Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin (1+1) boyutta çözümleri Ref. [27]'de verilmiştir. Bu çözümler kullanılarak Duffin-Kemmer-Petiau parçacıklarının rezonans ve süperkritiklik koşulları araştırılmıştır.

2.2. Enerjiye Bağlı Potansiyel Kavramı

Enerjiye bağlı potansiyel kavramı, bir dış Coulomb alanı varlığında Klein-Gordon denklemi kullanılarak skaler bir parçacığın görelî tanımlanması yapılmaya çalışıldığından beri bilinmektedir [28]. Her ne kadar başlangıçtaki potansiyel enerjiye bağlı olmasa da dalga denklemine indirgendiği zaman etkin potansiyel enerjiye bağlı hale gelmektedir [29-30]. Diğer taraftan enerjiye bağlı potansiyel kavramı fiziğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Dinamo etkisinin manyeto-hidrokinamik modelinde [31], hidrokinamikte [32-33], görelî kuantum mekaniğinin Hamiltonyen formülasyonunda [34-35], kuantum kuyuları ve yarıiletkenlerde [36-39] ve ağır kuark sistemlerinin modellenmesinde [40] enerjiye bağlı potansiyeller kullanılmaktadır.

Ernst ve çalışma arkadaşları, elastik saçılma faz kaymalarından $V(E) = \lambda(E)|n\rangle\langle n|$ formunda enerjiye bağlı ayrılabilir potansiyel inşa etmek için bir metot sunmuşlardır [41]. Potansiyel enerji

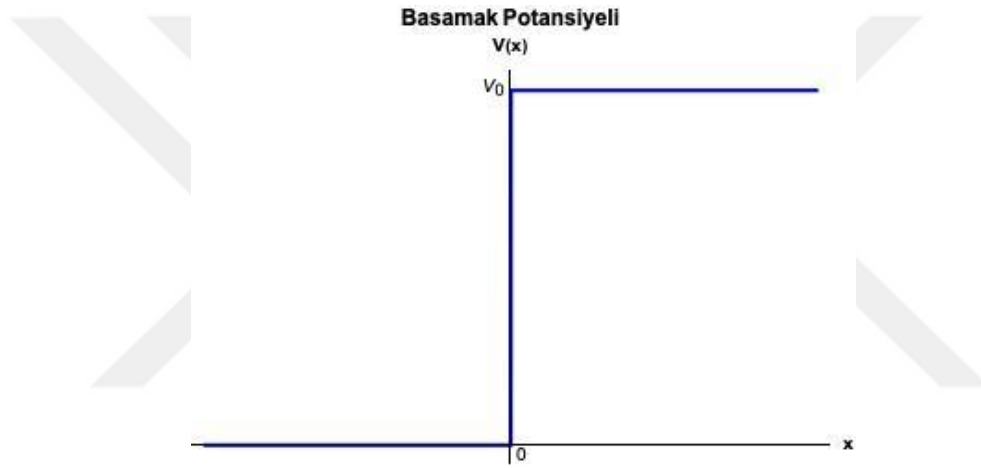
fonksiyonları spektral parametrelere bağlı olan Schrödinger spektral problemleri ile ilişkili tam olarak integrallenebilir çizgisel olmayan Hamiltonyen gelişim denklemlerinin sonsuz ailesini türetmek için bir metot Ref. [5]'de sunulmuştur. Füzyon reaksiyonlarını betimlemek için Coulomb bariyerinin enerjiye bağlı formu Dasso ve çalışma arkadaşları tarafından önerilmiştir [42]. Ters saçılma probleminde enerjiye bağlı potansiyel kavramı ise [43] çalışmasında yer almıştır.

Enerjiye bağlı potansiyel varlığında Schrödinger denkleminin özdeğerlerinin bazı özellikleri bir boyutta tartışılmıştır [44]. Dalga denklemlerinin enerjiye bağlı potansiyel çerçevesinde tartışılması ise [45] ve [46] çalışmalarında tartışılmıştır. Enerjiye bağlı Schrödinger denkleminin iki Darboux dönüşümlerini araştıran Lin ve arkadaşları bu çalışmada özfonksiyonları da hesaplamışlardır [47]. Yeni bir metot oluşturarak enerjiye bağlı potansiyel çerçevesinde Schrödinger denkleminin tam çözümlerini Martinez ve arkadaşları oluşturmuştur [48]. Nabiev polinom biçimli enerjiye bağlı potansiyel göz önüne alarak matris Schrödinger denkleminin çözümlerinin bir temel sistemini vermiştir [11]. Bir terimi enerjiye çizgisel olarak bağlı diğer terimi ise enerjiden bağımsız bir potansiyel enerji fonksiyonu varlığında Schrödinger denklemi için tam kuantizasyon formülü Halberg tarafından oluşturulmuştur [49]. Nikiforov-Uvarov metodu kullanılarak Schrödinger denkleminin D-boyutta çözümlerinin elde edildiği çalışmada enerjiye çizgisel olarak bağlı bir potansiyel enerji fonksiyonu kullanılmıştır [50]. Bir boyutlu uzayda enerjiye bağlı potansiyellerin süpersimetri özellikleri Yekken ve çalışma arkadaşları tarafından araştırılmıştır [51]. D-boyutta, sanki-Coulomb artı yüzük biçimli ve enerjiye bağlı potansiyel ile etkileşen Schrödinger parçacığının saçılma durumları Ref. [52]'de elde edilmiştir. Enerjiye bağlı parametreler içeren kompleks Scarf ve ti-tipi potansiyellerin genelleştirilmiş biçimleri Halberg ve Roy tarafından oluşturulmuştur [53].

Diğer taraftan son zamanlarda literatürde, bilinen potansiyellerin enerjiye bağlı formları oluşturularak Dirac ve Klein-Gordon denklemlerinin çözümleri sıklıkla çalışılmıştır. Barakat ve Alhendi, çekici vektör ve itici enerjiye bağlı Lorentz skaler ile bir tensör potansiyel varlığında genelleştirilmiş Dirac denkleminin çözümlerini hem benzerlik dönüşümünü hem de asimptotik iterasyon metotlarını kullanarak elde etmişlerdir [10]. Spin ve sanki-spin simetrileri altında Dirac denkleminin enerjiye bağlı potansiyel çerçevesinde tam çözümleri [54]'de elde edilmiştir. Bu çalışmada enerjiye bağlılığın spin-1/2 parçacıkların dalga fonksiyonlarına ve enerji özdeğerlerine etkisi incelenmiştir. Ikot ve çalışma arkadaşları, enerjiye bağlı sanki-harmonik ve Mie-tipi potansiyelli Dirac denkleminin yaklaşık çözümlerini spin ve sanki-spin simetrileri altında süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemini kullanarak elde etmişlerdir [7]. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı potansiyel varlığında araştırılması ise [8] ve [55]'de verilmiştir.

2.3. Basamak Potansiyeli

Fiziğin tüm alanlarında karmaşık bir yapıyı araştırmadan önce en temel ve basit durumdan başlanır. Bu bakımdan bir boyutlu potansiyel enerji fonksiyonlarının kullanıldığı problemler kuantum mekaniğinde birçok karmaşık yapının anlaşılmasında büyük rol oynamıştır. Şekil 2.1’de verilen basamak potansiyeli bu potansiyel enerji fonksiyonlarından biridir. Klasik olarak soldan gelen ve enerjisi basamak potansiyelden büyük olan bir parçacık potansiyelden etkilenmeden geçerken kuantum mekaniksel olarak geri yansıma olasılığı sıfırdan farklıdır. Benzer olarak soldan gelen parçacığın enerjisi basamak potansiyelin yüksekliğinden daha az ise klasik olarak kesinlikle potansiyelin içine nüfuz edemez. Oysa kuantum mekaniğinde parçacığın potansiyel engeli nüfuz etme olasılığı her zaman vardır. Bu çözümler fiziğin farklı alanlarında gerçek fiziksel sistemlerin anlaşılmasına temel oluşturmuştur.



Şekil 2.1. Basamak potansiyelinin konuma göre değişim grafiği.

Basamak potansiyeli için Schrödinger ve Klein-Gordon denklemlerinin çözümleri birçok ders kitabında bulunabilir. Bu potansiyel için görelî ve spin-1/2 parçacıkları betimleyen Dirac denkleminin bir boyutlu çözümleri ilk kez Klein tarafından 1929 yılında yapılmıştır [56]. Bu çalışmada, Dirac parçacıkları için basamak potansiyelinden geçiş ve yansıma katsayıları,

$$R = \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right)^2, \quad (2.1)$$

$$T = \frac{4\kappa}{(1+\kappa)^2}, \quad (2.2)$$

olarak bulunmuştur. Burada $\kappa = \frac{p}{k} \frac{E+m}{E+m-V}$, $p^2 = (V-E)^2 - m^2$ ve $k^2 = E^2 - m^2$ dir. $E + m < V$ için yansıma katsayısı $R > 1$ ve geçiş katsayısı $T < 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bunun anlamı gelen parçacıktan daha fazlası potansiyel engelden geri yansımıştır. Bu durum literatürde Klein paradoksu olarak bilinmektedir. Klein, Pauli'nin uyarısı ile bu durumu şöyle açıklamıştır; $x > 0$ bölgesinde parçacığı temsil eden momentum $p = \sqrt{(V-E)^2 - m^2}$ ve grup hızı $V_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{E-V}$

olduğundan, soldan sağa hareket eden parçacıkların pozitif grup hızına sahip olabilmeleri için $p = -\sqrt{(V - E)^2 - m^2}$ olmalıdır. Bu seçimle geçiş ve yansıma katsayıları pozitif olur ve toplamaları birimsellik koşulunu sağlar. Bu sonucu açıklamak için literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır [57-58].

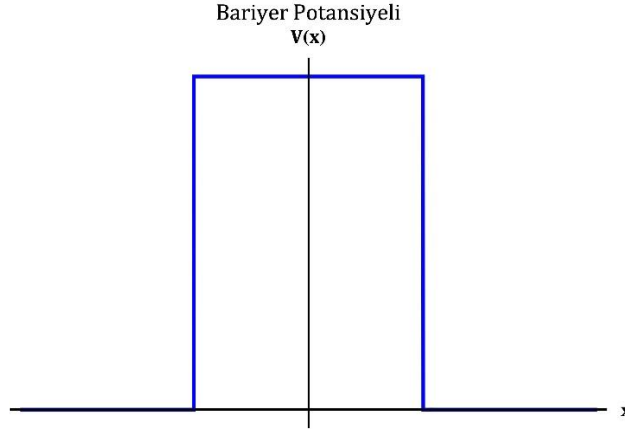
Tez çalışmasında basamak potansiyelinin enerjiye bağlı durumu literatürdeki çalışmalardan faydalanılarak

$$V_{Bas}(x, E) = \begin{cases} V_0(1 + \gamma E) & x \geq 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanarak hem tek boyutta Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı potansiyelden saçılma problemi tartışılacak hem de enerjiye bağlı potansiyelin Klein paradoksuna etkileri araştırılacaktır. Burada γ pozitif ve reel bir sayıdır. $\gamma \rightarrow 0$ limitinde potansiyel enerji fonksiyonu bilinen formuna indirgeneceğine dikkat edilmelidir.

2.4. Bariyer Potansiyeli

Bariyer potansiyeli kuantum mekaniğindeki bir diğer önemli tek boyutlu potansiyel enerji fonksiyonudur. Enerjisi potansiyel engelin en tepe noktasından daha düşük olan bir parçacık klasik olarak engeli aşamaz. Ancak kuantum mekaniğinde bu parçacığın bariyerin içerisine nüfuz etme ve oradan bariyerin diğer tarafına geçme olasılığı vardır. Bu geçiş olasılığı bariyer potansiyelin genişliği ve yüksekliği ile gelen parçacığın enerjisi ve kütlesine bağlıdır. Bir modelleme olan bu sistem birçok fiziksel süreci anlamak için kullanılmakla beraber birçok yeni fiziksel süreçlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bir elektronun bir metalden sökülmesi ya metal üzerine foton düşürülmesi (fotoelektrik) yada metalin ısıtılması ile gerçekleştirilebilir. Bunların dışında oda sıcaklığında metal bir dış elektrik alan içerisine konulduğunda da elektron metalden sökülebilir. Bu olaya soğuk emisyon denir. Soğuk emisyon tünelleme modeli kullanılarak açıklanan bir süreçtir. Dış alan elektronun göreceği potansiyeli değiştirerek tünelleme olayının gerçekleşmesini sağlar. Böylece elektron metalden kurtulur [59]. Soğuk emisyonun bir versiyonu olarak önemli bir uygulaması olan taramalı tünelleme mikroskopu (STM) fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır.



Şekil 2.2. Bariyer potansiyelin konuma göre değişim grafiği.

Biçimi Şekil 2.2’de verilen bariyer potansiyeli ile ilgili literatürde çok fazla sayıda çalışma yapılmıştır. Bu potansiyel için Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemlerinin çözümleri ders kitaplarında verilmiştir. Dirac parçacıklarının bariyer potansiyeli ile etkileşimi ise Dosch ve çalışma arkadaşları tarafından araştırılmıştır [60]. Geçiş ve yansıma katsayılarının hesaplandığı bu çalışmadaki kritik bir nokta ise daha sonraki çalışmalarda tartışılmıştır [61-62]. Gelen parçacığın kütlesi, enerjisi ile potansiyel engelin yüksekliği sabit tutularak bariyerin genişliği çok büyütüldüğünde yansıma ve geçiş katsayıları basamak potansiyelindekine benzememektedir. Yani, tek taraflı bir potansiyel basamağı ile çift taraflı bir potansiyel basamağı aynı sonucu üretmemektedir.

Tez çalışmasında bariyer potansiyelinin enerjiye bağlı durumu literatürdeki çalışmalardan faydalanılarak

$$V_{Bar}(x, E) = \begin{cases} V_0(1 + \gamma E) & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.4)$$

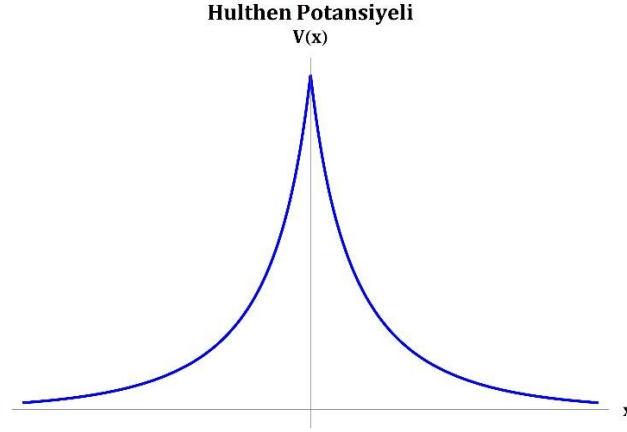
biçiminde tanımlanarak hem tek boyutta Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı potansiyelden saçılma problemi tartışılacak hem de potansiyel engelin genişliğinin çok çok büyük olduğu durumda geçiş ve yansıma katsayıları araştırılacaktır.

2.5. Hulthen Potansiyeli

Fizikteki en önemli kısa erimli potansiyellerden biri de Hulthen potansiyelidir. Bu potansiyel ilk kez Hulthen tarafından [3],

$$V_H(r) = \frac{-Z\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} \quad (2.5)$$

biçiminde önerilmiştir. Burada δ potansiyelin tarama parametresidir.



Şekil 2.3. Bir boyutta Hulthen potansiyelin konuma göre değişim grafiği.

Atom ve molekül fiziği alanında çalışma yapılıyorsa Z atom numarasını temsil eder. Hulthen potansiyeli, atom ve molekül fiziğinde, nükleer ve parçacık fiziğinde, katıhal fiziğinde ve kimyasal fizikte kullanılmıştır (detaylar ve diğer referanslar [63]'te bulunabilir.). Göreli ve göreli olmayan dalga denklemlerinin çözümleri Hulthen potansiyelinin varlığında elde edilmiş ve bağlı durumlar ile bu durumlara karşılık gelen dalga fonksiyonları araştırılmıştır ([64], [65] ve [66] kaynaklarından ve bu kaynaklarda yer alan kaynaklardan daha fazla detay okunabilir.). Biçimi Şekil 2.3'de verilen bir boyutta Hulthen potansiyeli

$$V_H(x) = V_0 \left(\frac{\Theta(-x)}{e^{-ax}-q} + \frac{\Theta(x)}{e^{ax}-q} \right) \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. Burada a potansiyelin biçiminden sorumlu bir parametre iken $\Theta(x)$ Heaviside basamak fonksiyonudur. Bir boyutlu Hulthen potansiyelinden Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının saçılması problemleri sırasıyla Guo ve Fang [67] ve Zhang [68] tarafından araştırılmıştır. Bu çalışmalar ile ilgili detaylı bilgiler Materyal ve Metot bölümünde sunulacaktır. Sunulan tez çalışmasında yine literatürde kullanılan enerjiye bağlı potansiyellerden faydalanılarak enerjiye bağlı bir boyutlu Hulthen bariyeri

$$V_H(E, x) = V_0(1 + \gamma E) \left(\frac{\Theta(-x)}{e^{-ax}-q} + \frac{\Theta(x)}{e^{ax}-q} \right) \quad (2.7)$$

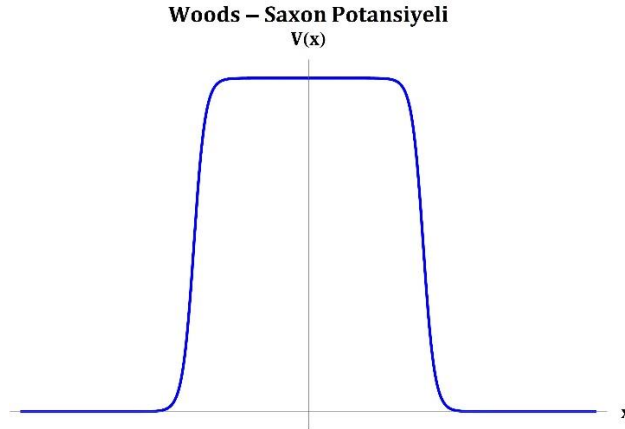
biçiminde tanımlanacaktır. Enerjiye bağlılığın geçiş ve yansıma rezonanslarına ve saçılma durumu dalga fonksiyonlarına etkisi araştırılacaktır.

2.6. Woods-Saxon Potansiyeli

Nükleon ile ağır çekirdek etkileşmesini tanımlamak için kullanılan Woods-Saxon potansiyeli ilk kez [2]'de küresel simetrik olarak tanımlanmıştır:

$$V_{WS}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{-(r-R)/\alpha}} \quad (2.8)$$

Burada, V_0 , α ve R sırasıyla potansiyel derinliği, yüzey kalınlığı ile ilişkili yayınım ve potansiyel genişliği parametreleridir.



Şekil 2.4. Bir boyutta Woods-Saxon potansiyelinin konuma göre değişim grafiği.

Woods-Saxon potansiyeli literatürde birçok alanda kullanılmasına rağmen karşımıza en çok nükleer ve mikroskobik fizik alanında çıkar. Woods-Saxon potansiyeli ile etkileşen Schrödinger, Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının bağlı ve saçılma durumları ile bunlara karşılık gelen dalga fonksiyonları literatürde sıklıkla çalışılmıştır ([69], [70] ve [71] kaynakları ile bu çalışmalarda sunulan kaynaklardan detaylı bilgi alınabilir.). Diğer taraftan biçimi Şekil 2.4’de verilen bir boyutlu Woods-Saxon potansiyelinden Klein-Gordon parçacıklarının saçılması problemi Rojas ve Villalba tarafından araştırılmıştır [72]. Bu çalışmada Klein-Gordon parçacıkları için geçiş rezonansları hesaplanmıştır. Göreli, spin-1/2 parçacıklarının saçılma ve bağlı durum çözümleri ile bu parçacıkların Woods-Saxon potansiyelinden geçiş rezonans koşulları ise Kennedy tarafından bulunmuştur [73]. Tez çalışmasında ise Hulthen potansiyelinde olduğu gibi yine literatürden faydalanılarak enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli

$$V_{WS}(E, x) = V_0(1 + \gamma E) \left(\frac{\Theta(-x)}{e^{-a(x+L)} + 1} + \frac{\Theta(x)}{e^{a(x-L)} + 1} \right), \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanarak rezonans koşulları ve saçılma durumu dalga fonksiyonlarının enerjiye bağlı değişimleri araştırılacaktır.

3. MATERYAL VE METOT

Tez çalışmalarına kaynaklık eden iki çalışma bu bölümde verilecektir. Klein-Gordon parçacıklarının Hulthen potansiyelinden saçılması problemi Guo ve Fang tarafından “Scattering of a Klein-Gordon particle by a Hulthen potential” adlı çalışmada tartışılmıştır [67]. Bu bölümün ilk kesiminde bu çalışma göz önüne alınacaktır. İkinci kesimde ise görelî ve spin-1/2 parçacıklarının incelendiği “Scattering and Transmission Resonances in One-Dimensional Hulthen Potential Barrier” adlı çalışma ayrıntılarıyla verilecektir [68].

3.1. Hulthen Potansiyeli Tarafından Bir Klein-Gordon Parçacığının Saçılması

Bir A^μ vektör potansiyeline çiftlenmiş tek boyutlu Klein-Gordon denklemi aşağıdaki gibi yazılır [72];

$$\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha + ieA_\alpha)(\partial_\beta + ieA_\beta)\phi + \phi = 0, \quad (3.1)$$

burada metrik $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1)$ dir. Basitlik için doğal birimler $\hbar = c = m = 1$ olarak kabul edilir ve gerekli işlemler yapılırsa, denklem (3.1)’in basitleştirilmiş formu

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \left[(E - V(x))^2 - 1\right]\phi(x) = 0, \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. (3.2) denkleminde $V(x)$ potansiyel enerji fonksiyonu genel Hulthen potansiyeli olarak seçilebilir;

$$V(x) = \theta(-x)\frac{V_0}{e^{-ax}-q} + \theta(x)\frac{V_0}{e^{ax}-q}, \quad (3.3)$$

burada V_0 , a ve q parametreleri reel ve pozitif olup potansiyelin biçimini belirlerler. Hulthen potansiyelinin ıraksamasını ortadan kaldırmak için $q < 1$ olması gerekmektedir. Eğer $q = -1$ alınırsa, Hulthen potansiyeli Woods-Saxon potansiyeline dönüşür.

Biçimi Şekil 2.3’de verilen Hulthen potansiyelinin $x < 0$ bölgesinde $E^2 > 1$ için saçılma durumları aşağıdaki diferansiyel denklem çözülerek elde edilir:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \left[\left(E - \frac{V_0}{e^{-ax}-q}\right)^2 - 1\right]\phi(x) = 0. \quad (3.4)$$

Bu denklem, $y = qe^{ax}$ dönüşümü altında

$$a^2y^2\frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + a^2y\frac{d\phi(y)}{dy} + \left[\left(E - \frac{V_0y}{q(1-y)}\right)^2 - 1\right]\phi(y) = 0 \quad (3.5)$$

biçimini alır. (3.5) denklemi $y = 0$ ve $y = 1$ noktalarında ikinci dereceden tekilliğe sahiptir. Bu nedenle, dalga fonksiyonu $\phi(y) = y^\mu(1-y)^\lambda f(y)$ biçiminde alınırsa denklem (3.5) aşağıdaki hipergeometrik denkleme dönüşür:

$$y(1-y)f''(y) + [1 + 2\mu - (2\mu + 2\lambda + 1)y]f'(y) - \left(\lambda(1 + 2\mu) + \frac{2EV_0}{a^2q}\right)f(y) = 0, \quad (3.6)$$

burada ' işareti y 'ye göre türevi belirtirken $\mu, k, \lambda_{\pm}$ ve ν parametreleri;

$$\mu = ik/a, \quad k^2 = \sqrt{E^2 - 1}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2V_0}{aq}\right)^2}, \quad \nu = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 - \lambda - \frac{2EV_0}{a^2q}}, \quad (3.7)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem (3.6)'nın genel çözümü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir:

$$f(y) = AF(\mu - \nu + \lambda, \mu + \nu + \lambda, 1 + 2\mu; y) + By^{-2\mu}F(-\mu - \nu + \lambda, -\mu + \nu + \lambda, 1 - 2\mu; y), \quad (3.8)$$

burada A ve B normalizasyon katsayılarıdır. Sonuç olarak $x < 0$ bölgesinde saçılmayı temsil eden dalga fonksiyonu

$$\phi_L(y) = Ay^{\mu}(1-y)^{\lambda}F(\mu - \nu + \lambda, \mu + \nu + \lambda, 1 + 2\mu; y) + By^{-\mu}(1-y)^{\lambda}F(-\mu - \nu + \lambda, -\mu + \nu + \lambda, 1 - 2\mu; y) \quad (3.9)$$

biçiminde elde edilir. $\phi_L(y)$ fonksiyonunun $y \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$)'daki asimptotik davranışı,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_L(x) = Aq^{ik/a}e^{ikx} + Bq^{-ik/a}e^{-ikx} \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi, $x > 0$ bölgesinde denklem (3.2)'nin çözümü (3.3) ile verilen potansiyel enerji fonksiyonu varlığında aranacaktır. Bu durumda, diferansiyel denklem

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \left[\left(E - \frac{V_0}{e^{ax}-q}\right)^2 - 1\right]\phi(x) = 0, \quad (3.11)$$

biçimine dönüşür. $z = qe^{-ax}$ için diferansiyel denklem,

$$a^2z^2\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + a^2z\frac{d\phi(z)}{dz} + \left[\left(E - \frac{V_0z}{q(1-z)}\right)^2 - 1\right]\phi(z) = 0 \quad (3.12)$$

formunu alır. Daha sonra, dalga fonksiyonu $\phi(z) = z^{\mu}(1-z)^{\lambda}g(z)$ olarak yeniden tanımlandığında;

$$z(1-z)g(z)'' + [1 + 2\mu - (2\mu + 2\lambda + 1)z]g(z)' - \left(\lambda(1 + 2\mu) + \frac{2EV_0}{a^2q}\right)g(z) = 0, \quad (3.13)$$

hipergeometrik denklemi elde edilir. ' işareti z 'ye göre türevleri temsil etmektedir. Bu durumda denklem (3.11)'in genel çözümü aşağıdaki gibi olur;

$$g(z) = CF(\mu - \nu + \lambda, \mu + \nu + \lambda, 1 + 2\mu; z)$$

$$+Dz^{-2\mu}F(-\mu - \nu + \lambda, -\mu + \nu + \lambda, 1 - 2\mu; z). \quad (3.14)$$

Sonuç olarak $x > 0$ bölgesinde çözümleri temsil eden dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi_R(z) = Cz^\mu(1-z)^\lambda F(\mu - \nu + \lambda, \mu + \nu + \lambda, 1 + 2\mu; z) \\ + Dz^{-\mu}(1-z)^\lambda F(-\mu - \nu + \lambda, -\mu + \nu + \lambda, 1 - 2\mu; z), \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Denklem (3.15)'te sadece geçen dalga çözümü alındığından $C = 0$ seçilir. Bu durumda $\phi_R(z)$ fonksiyonunun $z \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$)'daki asimptotik davranışı;

$$\phi_R(x) \rightarrow Dq^{-ik/a} e^{-ikx} \quad (3.16)$$

olur.

Bir boyutta Klein-Gordon denklemi için elektriksel akı yoğunluğu aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi \frac{d\phi^*}{dx} - \phi^* \frac{d\phi}{dx} \right). \quad (3.17)$$

$x \rightarrow -\infty$ gittiği zaman akı $j_L = j_{in} - j_{refl}$ şeklinde ayrıştırılabilir ki burada j_{in} gelen akıyı ve j_{refl} yansıyan akıyı temsil eder. Benzer şekilde, sağ bölgede, $x \rightarrow \infty$ gittiği zaman, akı $j_R = j_{trans}$ olur ve burada j_{trans} geçen akıdır. j_{refl} ve j_{trans} akıları kullanılarak yansıma katsayısı R ve geçiş katsayısı T , A , B ve D katsayıları cinsinden bulunur:

$$R = \frac{j_{refl}}{j_{in}} = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad (3.18)$$

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{in}} = \frac{|D|^2}{|A|^2}. \quad (3.19)$$

Geçiş ve yansıma katsayıları aşağıdaki birimsellik koşulunu sağlarlar:

$$R + T = 1. \quad (3.20)$$

R ve T 'yi hesaplamak için $x = 0$ 'da sağ (ϕ_R) ve sol (ϕ_L) dalga fonksiyonlarının ve birinci türevlerinin sürekliliği kullanılır. Bu süreklilik altında A ve B katsayılarının D 'ye bağlı olduğu bir denklemler sistemi elde edilir. Elde edilen denklemler sisteminden R ve T katsayıları kapalı formda elde edilir ve bu katsayılar nümerik olarak analiz edilir.

3.2. Tek Boyutta Hulthen Potansiyeli İçin Dirac Denkleminin Çözümü

γ_x ve γ_0 gama matrisleri sırasıyla $i\sigma_x$ ve σ_z Pauli matrisleri olarak alındığında, tek boyutlu Dirac denklemi konuma bağlı bir dış potansiyel $V(x)$ varlığında aşağıdaki gibi yazılabilir ($\hbar = c = 1$) [14],

$$\left(\sigma_x \frac{d}{dx} - (E - V(x))\sigma_z + m\right)\psi(x) = 0. \quad (3.21)$$

Dirac spinörü,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

biçiminde tanımlanırsa tek boyutlu Dirac denklemini çözme problemi (3.21), çiftlenimli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmaya indirgenir:

$$\frac{d}{dx}u_1(x) = -(m + E - V(x))u_2(x), \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dx}u_2(x) = -(m - E - V(x))u_1(x). \quad (3.24)$$

[4] ve [14] kaynaklarında verilen yöntem takip edildiğinde, spinörler için aşağıdaki kombinasyonlar tanımlanır,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u_1(x) + iu_2(x), \\ \chi(x) &= u_1(x) - iu_2(x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bu tanımlar (3.23) ve (3.24) denklemlerinde kullanılıp, denklemler yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -im\chi(x) + i(E - V(x))\phi(x), \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dx}\chi(x) = im\phi(x) - i(E - V(x))\chi(x), \quad (3.27)$$

elde edilir. Denklem (3.26) ve (3.27) kullanılarak $\phi(x)$ ve $\chi(x)$ için aşağıda verilen ikinci dereceden çiftlenimsiz diferansiyel denklemler bulunur:

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \left[(E - V(x))^2 - m^2 + iV'(x)\right]\phi(x) = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\chi(x) + \left[(E - V(x))^2 - m^2 - iV'(x)\right]\chi(x) = 0. \quad (3.29)$$

Burada, ' işaretleri x 'e göre türevi betimlemektedir. Bu denklemlerden bir tanesinin çözülmesi yeterlidir. Örneğin, $\phi(x)$ 'in sağladığı denklem çözülür ve bu çözüm Denklem (3.26)'da yerine konularsa $\chi(x)$ elde edilir. Buna göre; Denklem (3.8)'deki eşitlik, ile $|E| > m$ için saçılma çözümlerini dikkate alacağız.

Denklem (3.3) ile verilen Hulthen potansiyelin varlığında Dirac parçacıkları için sağ ve sol çözümler araştırılacaktır. Bu bağlamda, ilk önce $x < 0$ bölgesinde $|E| > m$ için saçılma çözümleri göz önüne alınacaktır. Denklem (3.28), bir boyutlu Hulthen potansiyeli varlığında ve $y = e^{-x/a}$ dönüşümü altında

$$y^2 \frac{d^2 \phi_L(y)}{dy^2} + y \frac{d\phi_L(y)}{dy} + a^2 \left\{ \left[E + \frac{V_0}{1-y} \right]^2 - m^2 + i \frac{V_0 y}{a(1-y)^2} \right\} \phi_L(y) = 0, \quad (3.30)$$

biçimini alır. $\phi_L(y) = y^\mu (1-y)^{-\lambda} f(y)$ ayarlaması ile bu denklem hipergeometrik denkleme dönüşür

$$y(1-y) \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + [(1+2\mu) - (1-2\mu-2\lambda)y] \frac{df(y)}{dy} - (\mu-\lambda-\nu)(\mu+\lambda-\nu)f(y) = 0 \quad (3.31)$$

burada

$$\mu = iap, \quad p^2 = (E^2 - V_0^2) - m^2, \quad \nu = iak, \quad k^2 = (E^2 - m^2), \quad \lambda = -iaV_0, \quad (3.32)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem (3.32)'nin genel çözümü;

$$f(y) = AF(\mu - \nu - \lambda, \mu + \nu - \lambda, 1 + 2\mu; y) + By^{-2\mu} F(-\mu - \nu - \lambda, -\mu + \nu - \lambda, 1 - 2\mu; y), \quad (3.33)$$

olduğundan, $x < 0$ bölgesindeki çözüm

$$\phi_L(y) = Ay^\mu (1-y)^{-\lambda} F(\mu - \nu - \lambda, \mu + \nu - \lambda, 1 + 2\mu; y) + By^{-\mu} (1-y)^{-\lambda} F(-\mu - \nu - \lambda, -\mu + \nu - \lambda, 1 - 2\mu; y), \quad (3.34)$$

olarak bulunur. $x < 0$ bölgesindeki dalga fonksiyonunun $x \rightarrow -\infty$ 'daki asimptotik davranışı, hipergeometrik fonksiyonların

$$F(y) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-y)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-y)^{-b}, \quad (3.35)$$

asimptotik davranışı ile $x \rightarrow -\infty$ limitinde $y^{\pm\nu} \rightarrow e^{\mp ikx}$ ve $(1-y)^{-\lambda} \rightarrow (-y)^{-\lambda}$ göz önüne alındığında

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (3.36)$$

biçiminde olur. Burada,

$$A = \frac{\Gamma(1+2\mu)\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(\mu-\nu-\lambda)\Gamma(1+\mu-\nu+\lambda)} e^{(ka-i\mu)\pi}, \quad (3.37)$$

$$B = \frac{\Gamma(1+2\mu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\mu+\nu-\lambda)\Gamma(1+\mu+\nu+\lambda)} e^{-(ka+i\mu)\pi}, \quad (3.38)$$

olarak tanımlanmıştır.

Denklem (3.26) kullanılarak diğer bileşen $\chi(x)$ hesaplanırsa, bu bileşenin $x \rightarrow -\infty$ 'daki asimptotik davranışı

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \chi_L(x) = A \left(\frac{E-k}{m} \right) e^{ikx} + B \left(\frac{E+k}{m} \right) e^{-ikx}, \quad (3.39)$$

olur.

Şimdi de $x > 0$ bölgesinde saçılma çözümleri (3.28)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemin (3.3) ile verilen potansiyel enerji fonksiyonu için elde edilecektir. Bu durumda, $z = e^{-x/a}$ seçerek (3.28)'de yerine yazarsak diferansiyel denklem,

$$z^2 \frac{d^2 \phi_R(z)}{dz^2} + z \frac{d\phi_R(z)}{dz} + a^2 \left\{ \left[E - V_0 \frac{z}{1-z} \right]^2 - m^2 - i \frac{V_0 z}{a(1-z)^2} \right\} \phi_R(z) = 0, \quad (3.40)$$

formuna dönüşür. $\phi_R(z) = z^{-\nu}(1-z)^\lambda g(z)$ alınıp (3.40) denkleminde yerine yazıldığı zaman aşağıdaki hipergeometrik denklem elde edilir:

$$z(1-z) \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + [(1-2\lambda) - (1-2\nu+2\lambda)z] \frac{dg(z)}{dz} - (\lambda-\nu+\mu)(\lambda-\nu-\mu)g(z) = 0. \quad (3.41)$$

Bu denklemin genel çözümü;

$$g(z) = d_1 F(-\nu+\lambda+\mu, -\nu+\lambda-\mu, 1-2\nu; z) + d_2 z^{2\nu} F(\nu+\lambda+\mu-1, \nu+\lambda-\mu-1, 1+2\nu; z), \quad (3.42)$$

olmak üzere, $x > 0$ bölgesindeki çözüm

$$\phi_R(z) = d_1 z^{-\nu}(1-z)^\lambda F(-\nu+\lambda-\mu, -\nu+\lambda+\mu, 1-2\nu; z) + d_2 z^\nu(1-z)^\lambda F(\nu+\lambda+\mu-1, \nu+\lambda-\mu-1, 1+2\nu; z). \quad (3.43)$$

olur. Bu bölgede sadece geçen parçacıklar olduğundan $d_2 = 0$ alınır ve sağ taraftaki çözüm,

$$\phi_R(z) = d_1 z^{-\nu}(1-z)^\lambda F(-\nu+\lambda-\mu, -\nu+\lambda+\mu, 1-2\nu; z), \quad (3.44)$$

olur. Benzer şekilde $x > 0$ bölgesinde dalga fonksiyonun bileşenlerinin asimptotik davranışları,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_R(x) = d_1 e^{ikx}, \quad (3.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi_R(x) = d_1 \left(\frac{E-k}{m} \right) e^{i\pi\nu} e^{ikx} \quad (3.46)$$

biçiminde elde edilir.

3.2.1. Geçiş Rezonansı Koşulu

Geçiş rezonans koşulunu bulmak için akı yoğunluğunu tartışmakla başlanmalıdır. Tek boyutlu Dirac denklemi (3.21) için elektriksel akı yoğunluğu [14] aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$j = \bar{\psi}(x) \gamma_x \psi(x) = \frac{1}{2} (|\phi(x)|^2 - |\chi(x)|^2). \quad (3.47)$$

$x \rightarrow -\infty$ gittiği zaman akı yoğunluğu $j_L = j_{in} - j_{refl}$ olur ki burada j_{in} gelen dalganın, j_{refl} ise yansıyan dalganın akı yoğunluğunu temsil eder. Benzer şekilde $x \rightarrow \infty$ 'da akı yoğunluğu $j_R = j_{trans}$ biçiminde olup j_{trans} geçen dalganın akı yoğunluğudur. (3.36), (3.39), (3.45) ve (3.46) denklemlerini (3.47) denkleminde yerine koyarsak j_L ve j_R akı yoğunlukları;

$$j_L = |A|^2 \frac{k}{m^2} (E - k) - |B|^2 \frac{k}{m^2} (E + k), \quad (3.48)$$

$$j_R = |d_1|^2 \frac{k}{m^2} (E - k), \quad (3.49)$$

olarak elde edilir. Yük korunumundan ($j_L = j_R$) faydalanılarak yansıma (R) ve geçiş (T) katsayıları aşağıdaki gibi bulunur;

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \left(\frac{E+k}{E-k} \right), \quad (3.50)$$

$$T = \frac{|d_1|^2}{|A|^2}. \quad (3.51)$$

Dalga fonksiyonunun ve birinci türevinin $x = 0$ noktasındaki sürekliliğinden faydalanılarak yansıma ve geçiş katsayıları,

$$R = \left| \frac{(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu - \lambda)}{(\mu + \nu + \lambda) \Gamma(\mu + \nu + \lambda) \Gamma(\mu + \nu - \lambda)} e^{-2ka\pi} \right|^2 \left(\frac{E+k}{E-k} \right), \quad (3.52)$$

$$T = 1 - \left| \frac{(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu - \lambda)}{(\mu + \nu + \lambda) \Gamma(\mu + \nu + \lambda) \Gamma(\mu + \nu - \lambda)} e^{-2ka\pi} \right|^2 \left(\frac{E+k}{E-k} \right), \quad (3.53)$$

biçiminde elde edilir.

Geçiş katsayısının 1 olması durumunda tüm parçacıklar düşük enerjili dahi olsalar potansiyel engele nüfuz ederler. Bu duruma geçiş rezonansı denir. Göz önüne alınan fiziksel sistem için geçiş rezonans koşulu (3.53) denkleminde;

$$|(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu + \lambda) \Gamma(\mu - \nu - \lambda)| e^{-2ka\pi} = 0, \quad (3.54)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Denklem (3.54)'de eşitliği sağlayan tüm enerji değerlerinde geçiş rezonansı gözlemlenir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMALAR

4.1. Enerjiye Bağlı Basamak Potansiyeli

Bu kesimde denklem (2.3) ile verilen enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılan Klein-Gordon ve Dirac parçacıkları incelenecektir.

4.1.1. Klein-Gordon Parçacıkları

Görelî ve spin-0 parçacıklar, (3.1)'de verilen Klein-Gordon denklemi ile betimlenirler. Klein-Gordon parçacıklarının denklem (2.3)'de verilen enerjiye bağlı basamak potansiyelinden saçılma durumlarını tartışmak için ilk önce $x < 0$ ve $x > 0$ bölgelerindeki çözümleri elde edeceğiz.

$x < 0$ bölgesinde (2.3) potansiyeli (3.1) denkleminde yerine yazıldığında (3.1) denklemi

$$\frac{d^2 \phi_L(x)}{dx^2} + \{E^2 - m^2\} \phi_L(x) = 0 \quad (4.1)$$

biçimine indirgenir. $k^2 = E^2 - m^2$ tanımlamasıyla bu denklemin çözümü

$$\phi_L(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx} \quad (4.2)$$

olur.

Diğer taraftan $x > 0$ bölgesinde (2.3) potansiyeli (3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{d^2 \phi_R(x)}{dx^2} + \{[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2\} \phi_R(x) = 0, \quad (4.3)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 > m^2$ için aşağıdaki gibi bulunur;

$$\phi_R(x) = t e^{iqx}. \quad (4.4)$$

Burada $q^2 = (E - V_0(1 + \gamma E))^2 - m^2$ olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse, $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 < m^2$ için çözümler $iq \rightarrow \kappa$ değişimi yapılarak kolaylıkla elde edilebilir.

Klein-Gordon parçacıkları için (3.17) denklemi ile verilen elektriksel akı yoğunluğu (4.2) ve (4.4) denklemleri ile kullanıldığında aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$J_L = \frac{k}{m} (1 - |r|^2), \quad (4.5)$$

$$J_R = \frac{q}{m} |t|^2. \quad (4.6)$$

Elektriksel akı yoğunluğunun $(1 = |r|^2 + \frac{q}{k}|t|^2)$ ve dalga fonksiyonu ile türevinin $x = 0$ noktasındaki sürekliliğinden, geçiş ve yansımaya katsayıları,

$$T = \frac{q}{k} \left| \frac{2k}{k+q} \right|^2, \quad (4.7)$$

$$R = \left| \frac{k-q}{k+q} \right|^2, \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. Burada birimsellik koşulunun $T + R = 1$ sağlandığı açıkça görülmektedir.

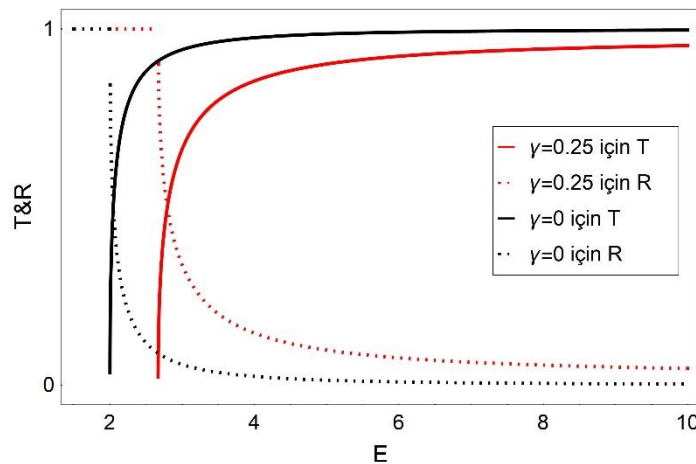
Diğer taraftan, sabit V_0 yüksekliğine sahip bir basamak potansiyeli için geçiş rezonans $(T = 1, R = 0)$ koşulu $E = \frac{V_0}{2}$ iken enerjiye bağlı basamak potansiyeli için bu koşul,

$$E = \frac{V_0}{2 - \gamma V_0}, \quad (4.9)$$

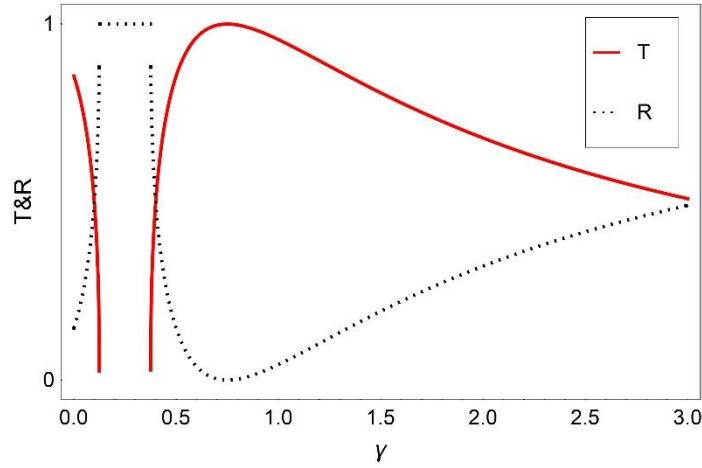
olur. $\gamma = 0$ için bu sonuç olağan basamak potansiyelinin sonucuna indirgenir.

4.1.1.1. Nümerik Analiz

Klein-Gordon parçacıklarının bir boyutlu enerjiye bağlı basamak potansiyelinden saçılmasında geçiş ve yansımaya katsayılarının nümerik analizi bu kesimde yapılacaktır. $m = 1, V_0 = 1, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri göz önüne alınarak çizilen Şekil 4.1'de görüldüğü gibi birimsellik koşulu $(T + R = 1)$ enerjiye bağlı basamak potansiyeli için sağlanmaktadır. Potansiyel yüksekliği skaler parçacığın enerjisine bağlı olduğundan geçiş ve yansımaya olasılık yoğunlukları olağan duruma göre farklı değerler almıştır.



Şekil 4.1. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

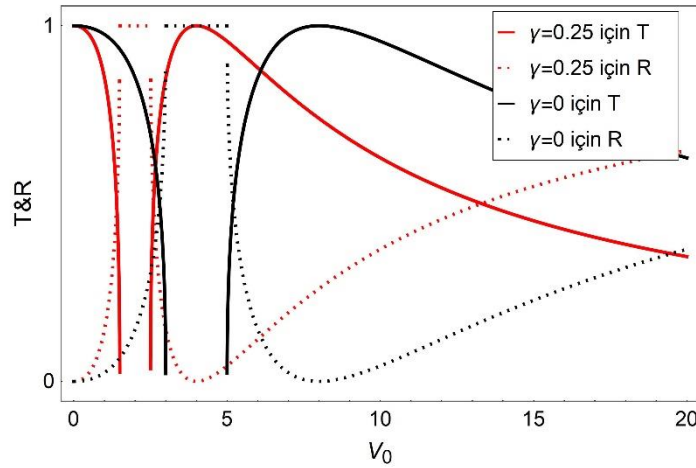


Şekil 4.2. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

Gama parametresine bağlı olarak geçiş ve yansımaya katsayılarının değişimi Şekil 4.2’de $m = 1, E = 4$ ve $V_0 = 2$ için verilmiştir. $q \rightarrow 0$ limitinde ($T \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow 1$),

$$\frac{E-m-V_0}{EV_0} \leq \gamma \leq \frac{E+m-V_0}{EV_0}, \quad (4.10)$$

elde edilir. Şekil 4.2 için kullanılan nümerik değerler bu eşitlikte yerine yazıldığında gama parametresi için $0.125 \leq \gamma \leq 0.375$ bulunur. Grafikte görüldüğü gibi bu değer aralığında gelen parçacıkların tamamı yansımıştır.



Şekil 4.3. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Basamak potansiyelinin yüksekliği ile ilişkili olan V_0 parametresinin geçiş ve yansımaya katsayılarına olan etkisi hem $\gamma = 0$ (bilinen basamak potansiyeli) hem de $\gamma = 0.25$ (enerjiye bağlı basamak potansiyeli) için Şekil 4.3’te $m = 1$ ve $E = 4$ alınarak sunulmuştur. γ parametresinde olduğu gibi $\frac{E-m}{1+\gamma E} \leq V_0 \leq \frac{E+m}{1+\gamma E}$ aralığında gelen parçacıkların tamamının enerjiye

bağlı potansiyel engelden yansıdığı Şekil 4.3'te açıkça görülmektedir. Ayrıca, potansiyel yüksekliği V_0 arttıkça geçiş olasılık yoğunluğunun enerjiye bağlı durumda beklenildiği gibi daha hızlı sıfıra gittiği görülmektedir.

4.1.2. Dirac Parçacıkları

Bir boyutta Dirac Hamiltonyeni bir dış potansiyel varlığında $\gamma_0 = \sigma_z$, $\gamma_1 = i\sigma_x$ ve $\hbar = c = 1$ için [73],

$$\mathcal{H} = -\sigma_y P + V(x) + \sigma_z m, \quad (4.11)$$

olur. Dirac spinörü $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Xi_1(x) \\ \Xi_2(x) \end{pmatrix}$ biçiminde tanımlanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d\Xi_2(x)}{dx} + \{m - E + V(x)\}\Xi_1(x) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d\Xi_1(x)}{dx} + \{m + E - V(x)\}\Xi_2(x) = 0, \quad (4.13)$$

elde edilir. Denklem (4.12) ve Denklem (4.13)'ten spinörün bir bileşeni için

$$\frac{d^2\Xi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{E+m-V(x)} \frac{dV(x)}{dx} \frac{d\Xi_1(x)}{dx} + \{[E - V(x)]^2 - m^2\}\Xi_1(x) = 0 \quad (4.14)$$

ikinci dereceden diferansiyel denklem bulunur. Denklem (2.3) ile verilen enerjiye bağlı basamak potansiyelinden $\frac{1}{2}$ spinli ve göreceli Dirac parçacıklarının saçılmasını tartışmak için $x < 0$ ve $x > 0$ bölgelerindeki çözümleri kullanılacaktır.

$x < 0$ bölgesinde (2.3) denklemi (4.14) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{d^2\Xi_{1L}(x)}{dx^2} + \{E^2 - m^2\}\Xi_{1L}(x) = 0, \quad (4.15)$$

formuna dönüşür. $k^2 = E^2 - m^2$ tanımlaması yapıldıktan sonra Denklem (4.15) ve Denklem (4.13)'de spinörün $x < 0$ bölgesindeki bileşenleri

$$\Xi_{1L}(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}, \quad (4.16)$$

$$\Xi_{2L}(x) = \frac{-ik}{m+E} (e^{ikx} - r e^{-ikx}), \quad (4.17)$$

biçiminde elde edilir.

Diğer taraftan $x > 0$ bölgesinde (2.3) potansiyeli (4.14) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{d^2\Xi_{1R}(x)}{dx^2} + \{[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2\}\Xi_{1R}(x) = 0, \quad (4.18)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 > m^2$ için aşağıdaki gibidir;

$$\Xi_{1R}(x) = te^{iqx}. \quad (4.19)$$

Burada $q^2 = (E - V_0(1 + \gamma E))^2 - m^2$ olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse, $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 < m^2$ için çözümler $iq \rightarrow \kappa$ değişimi yapılarak kolaylıkla elde edilebilir. Spinörün diğer bileşeni ise yine Denklem (4.13)'ten

$$\Xi_{2R}(x) = \frac{-iqte^{iqx}}{m+E-V_0(1+\gamma E)}, \quad (4.20)$$

olarak hesaplanır. Dalga fonksiyonunun sürekliliği ($\Psi_L(x)|_{x=0} = \Psi_R(x)|_{x=0}$) kullanıldığında t ve r katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$t = \frac{2}{\kappa+1}, \quad (4.21)$$

$$r = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}. \quad (4.22)$$

Burada $\kappa = \frac{q}{k} \frac{m+E}{m+E-V_0(1+\gamma E)}$ dir. Denklem (3.47) ile verilen Dirac denklemini için elektriksel akı yoğunluğu ifadesinde (4.16), (4.17), (4.19) ve (4.20) denklemleri yerine yazıldığında,

$$J_L = \frac{2k}{m+E} (-1 + |r|^2), \quad (4.23)$$

$$J_R = \frac{2q}{V_0(1+\gamma E)-m-E} |t|^2, \quad (4.24)$$

elde edilir. Elektriksel akı yoğunluğunun sürekliliğinden ($1 = |r|^2 + \kappa|t|^2$), geçiş ve yansıma katsayıları,

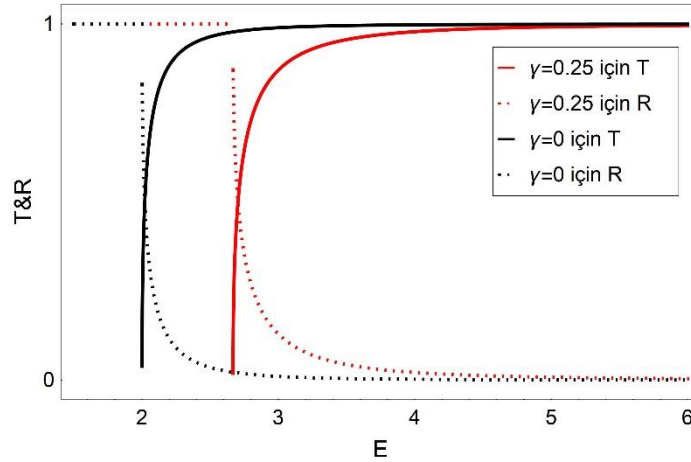
$$T = \kappa \left| \frac{2}{1+\kappa} \right|^2, \quad (4.25)$$

$$R = \left| \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right|^2, \quad (4.26)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $T + R = 1$ koşulunun analitik olarak sağlandığı açıkça görülmektedir.

4.1.2.1. Nümerik Analiz

Şekil 4.4'te $m = 1, V_0 = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri için geçiş ve yansıma olasılık yoğunluklarının enerjiye göre değişimi sunulmuştur. Birimsellik koşulunun potansiyelin enerjiye bağlı durumunda da sağlandığı şekilden görülmektedir.



Şekil 4.4. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

$\kappa \rightarrow 1$ limitinde ($T \rightarrow 1$ ve $R \rightarrow 0$),

$$\sqrt{\frac{(E-V_0(1+\gamma E)-m)(E+m)}{(E-V_0(1+\gamma E)+m)(E-m)}} = 1, \quad (4.27)$$

elde edilir ki bu koşul gelen tüm parçacıkların potansiyel engelden geçmeleri için gerekli koşuldur.

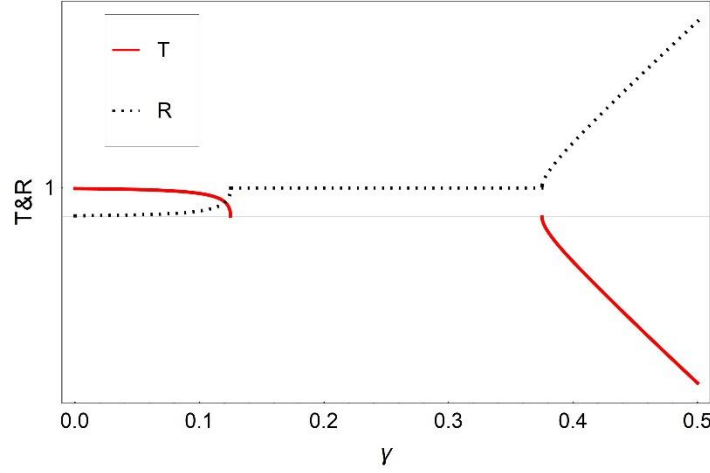
Geçiş ve yansıma katsayılarında tanımlanan κ ifadesi $\gamma = 0$ için $\kappa = \frac{q}{k} \frac{m+E}{m+E-V_0}$ olur. Bu ifade olağan basamak potansiyelinden Dirac parçacıklarının saçılması probleminde elde edilen sonuç ile aynıdır. Bu ifadede, $V_0 > E + m$ için $\kappa < 0$ olur. Bu durumda $T < 0, R > 1$ ve $R - T = 1$ olur ki bu sonuç literatürde Klein paradoksu olarak bilinir. Yani gelen parçacıktan daha fazlası geri yansıtılmıştır! Bu durum potansiyel süreksizliğinde parçacık-anti-parçacık yaratma ile açıklanmıştır (okuyucu Klein paradoksu ile ilgili detaylı bilgiye [73] kaynağından ve bu kaynaktaki referanslardan ulaşabilir.). Yine de bu paradoksun orijine göre asimetric basamak potansiyelinin elektron-pozitron çiftini yayınlamasından mı yoksa saçılmadan mı kaynaklandığı henüz tam olarak açıklanamamıştır. Klein paradoksu, basamak potansiyelinin enerjiye bağlı ($\gamma \neq 0$) olması durumunda ise $V_0 > \frac{E+m}{1+\gamma E}$ koşulu altında ortaya çıkmaktadır.

$q \rightarrow 0$ limiti altında $T \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow 1$ gider ki bu durumda γ parametresi

$$\frac{E-m-V_0}{EV_0} \leq \gamma \leq \frac{E+m-V_0}{EV_0}, \quad (4.28)$$

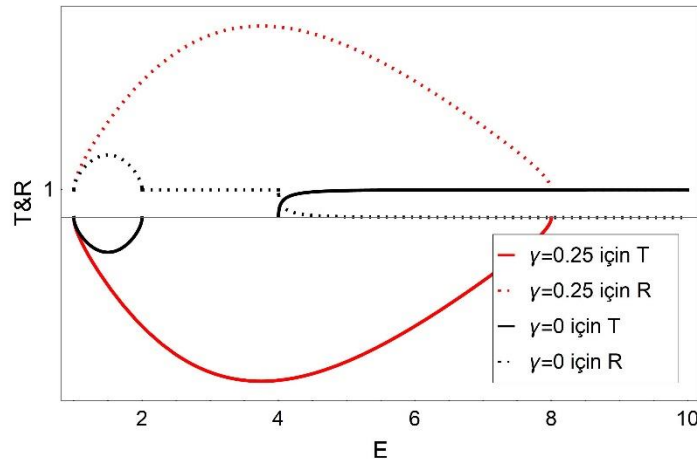
aralığında değer alır. Saçılmanın γ parametresine göre değişiminin verildiği Şekil 4.5'de $m = 1, E = 4$ ve $V_0 = 2$ için bu aralık $0.125 \leq \gamma \leq 0.375$ olarak elde edilir ve bu değer aralığı Denklem (4.28) ile uyumludur. Diğer taraftan $\gamma > 0.375$ olması durumunda $V_0 > \frac{E+m}{1+\gamma E}$ olacaktır.

Bu durumda $T < 0, R > 1$ ve $R - T = 1$ olması beklenmektedir. Şekil 4.5'e bakıldığında $\gamma > 0.375$ Klein paradoksu gözlenmektedir.

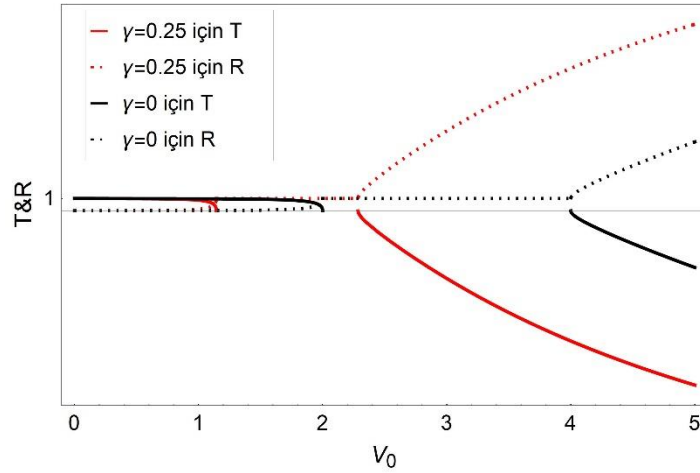


Şekil 4.5. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

$m = 1, V_0 = 3, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ parametreleri kullanılarak çizilen Şekil 4.6'da görüldüğü gibi $E < \frac{V_0 - m}{1 - \gamma V_0}$ koşulunun sağlandığı $E < 8$ durumunda Klein paradoksu görülmektedir. Enerjiye bağlı potansiyel olması durumunda olağan potansiyele göre enerjinin daha büyük değerlerinde gelen parçacık sayısı yansıyan parçacıktan daha az olduğu ($R > 1$) Şekil 4.6'da açıkça görülebilir.



Şekil 4.6. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi ve Klein paradoksu.



Şekil 4.7. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı basamak potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Son olarak, enerjiye bağlı basamak potansiyelinden Dirac parçacıklarının saçılmasına potansiyel enerjinin yüksekliği ile ilişkili olan V_0 parametresinin etkisine bakılmıştır. $m = 1, E = 4, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ için çizilen Şekil 4.7’de $V_0 > \frac{E+m}{1+\gamma E}$ şartının sağlandığı $V_0 > 2.5$ değerinden itibaren Klein paradoksunun gerçekleştiği, bu değerden daha küçük değerlerde birimsellik koşulunun sağlandığı görülmektedir.

4.2. Enerjiye Bağlı Bariyer Potansiyeli

Bu kesimde denklem (2.4) ile verilen enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılan Klein-Gordon ve Dirac parçacıkları incelenecektir.

4.2.1. Klein-Gordon Parçacıkları

$x \leq -a$ ve $x \geq a$ bölgesinde (2.4) potansiyeli (3.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2\Omega(x)}{dx^2} + \{E^2 - m^2\}\Omega(x) = 0, \quad (4.29)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki bölgedeki çözümleri $k^2 = E^2 - m^2$ olmak üzere,

$$\Omega_I(x) = e^{ikx} + re^{-ikx} \quad (x \leq -a), \quad (4.30)$$

$$\Omega_{III}(x) = t e^{ikx} \quad (x \geq a), \quad (4.31)$$

biçiminde bulunur.

$-a \leq x \leq a$ bölgesinde ise Denklem (3.1), (2.4) ile verilen potansiyel varlığında,

$$\frac{d^2\Omega(x)}{dx^2} + \{[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2\}\Omega(x) = 0, \quad (4.32)$$

olur. (4.32) denkleminin çözümü ise $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 > m^2$ için

$$\Omega_{II}(x) = \chi_1 e^{iqx} + \chi_2 e^{-iqx}, \quad (4.33)$$

olarak bulunur. Burada $q^2 = [E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2$ 'dir. Ayrıca, $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 < m^2$ olması durumunda çözümün $iq \rightarrow \kappa$ haritalaması ile elde edilebileceği açıktır.

Klein-Gordon parçacıkları için (3.17) denklemi ile verilen elektriksel akı yoğunluğu (4.30) ve (4.31) denklemleri ile kullanıldığında

$$J_L = \frac{k}{m}(1 - |r|^2), \quad (4.34)$$

$$J_R = \frac{k}{m}|t|^2, \quad (4.35)$$

elde edilir. Burada elektriksel akı yoğunluğunun sürekliliğinden $1 = |r|^2 + |t|^2$ bulunur. Diğer taraftan, dalga fonksiyonunun ve türevinin $x = -a$ ve $x = a$ noktalarındaki sürekliliğinden,

$$e^{-ika} + re^{ika} = \chi_1 e^{-iqa} + \chi_2 e^{iqa}, \quad (4.36)$$

$$k e^{-ika} - k r e^{ika} = q \chi_1 e^{-iqa} - q \chi_2 e^{iqa}, \quad (4.37)$$

$$t e^{ika} = \chi_1 e^{iqa} + \chi_2 e^{-iqa}, \quad (4.38)$$

$$k t e^{ika} = q \chi_1 e^{iqa} - q \chi_2 e^{-iqa}, \quad (4.39)$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.34)-(4.39) denklemleri kullanılarak enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden Klein-Gordon parçacıklarının yansıma ve geçiş olasılık yoğunlukları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur;

$$R = \frac{(q^2 - k^2)^2 (\sin 2qa)^2}{4k^2 q^2 + (q^2 - k^2)^2 (\sin 2qa)^2}, \quad (4.40)$$

$$T = \frac{4k^2 q^2}{4k^2 q^2 + (q^2 - k^2)^2 (\sin 2qa)^2}. \quad (4.41)$$

Geçiş ve yansıma olasılık yoğunluklarının toplamının bir olması şartının sağlandığı (4.40) ve (4.41) denklemleri kullanılarak kolaylıkla görülür.

Geçiş ve yansıma olasılık yoğunluklarında $2qa = n\pi$ olması durumunda $T = 1$ $R = 0$ olur. Daha açık olarak,

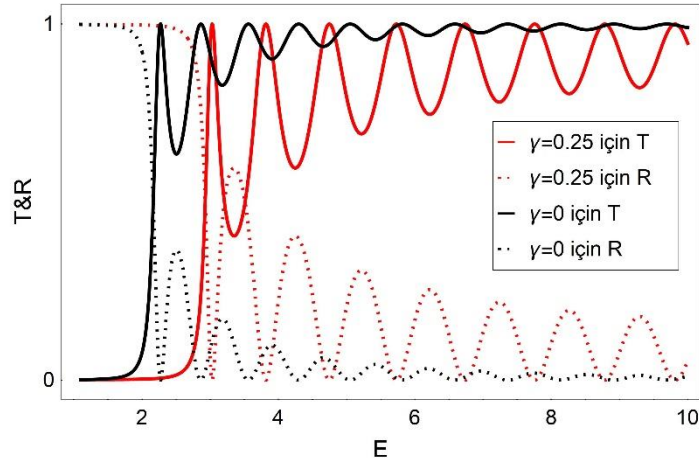
$$E_n = \frac{V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4a^2}}}{1 - \gamma V_0}, \quad (4.42)$$

koşulunun sağlandığı her enerji değerinde gelen tüm parçacıklar enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden tünelleyerek karşı tarafa geçecektir. $\gamma = 0$ olması durumunda bu koşul $E_n = V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2\pi^2}{4a^2}}$ biçimini alır ki bu ifade bilinen bariyer potansiyeli için geçiş rezonans koşuludur.

Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin genişliği dışındaki tüm parametreleri sabit alınıp a parametresi çok çok büyük alındığında $2qa$ 'da çok büyük olur ve $\sin 2qa$ çok hızlı salınım yapar. Bu durumda, $T \rightarrow \frac{8k^2q^2}{8k^2q^2 + (q^2 - k^2)^2}$ ve $R \rightarrow \frac{(q^2 - k^2)^2}{k^2q^2 + (q^2 - k^2)^2}$ elde edilir. Bariyer potansiyelin genişliği ne kadar büyük olursa olsun skaler parçacıklar için geçiş olasılık yoğunluğu sıfırdan farklıdır. Buna göreli parçacıkların Klein tünellemesi denir [73]. Burada farklı bir duruma daha değinmek önemlidir. Potansiyel genişliği çok büyük alınmasına rağmen geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları basamak potansiyelinde elde edilen sonuca indirgenememiştir. Bunun nedeni, basamak potansiyeli x -eksenine göre asimetrik iken bariyer potansiyelinin simetrik olması olabilir. Bu fiziksel problemin detayı için [74] numaralı kaynak incelenebilir.

4.2.1.1. Nümerik Analizler

Skaler parçacıkların enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden saçılmalarında birimsellik koşulunun sağlandığı Şekil 4.8'de gösterilmiştir. $m = 1, V_0 = 1, a = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri göz önüne alınarak çizilen Şekil 4.8'den açıkça görüldüğü gibi geçen ve yansıyan parçacıkların olasılık yoğunlukları enerjiye bağlı bariyer potansiyeli için bilinen bariyer potansiyelinden beklenildiği gibi farklılıklar göstermiştir. Burada parametreler için kullanılan nümerik değerler (4.42) denklemi ile verilen rezonans koşulunda yerine yazıldığında enerjiye bağlı bariyer potansiyeli için $E_1 = 3.028, E_2 = 3.814, E_3 = 4.744$ ve $E_5 = 6.733$ elde edilir. Bu sonuçlar Şekil 4.8'de verilen grafikteki $T \rightarrow 1$ pik değerleri ile aynıdır.

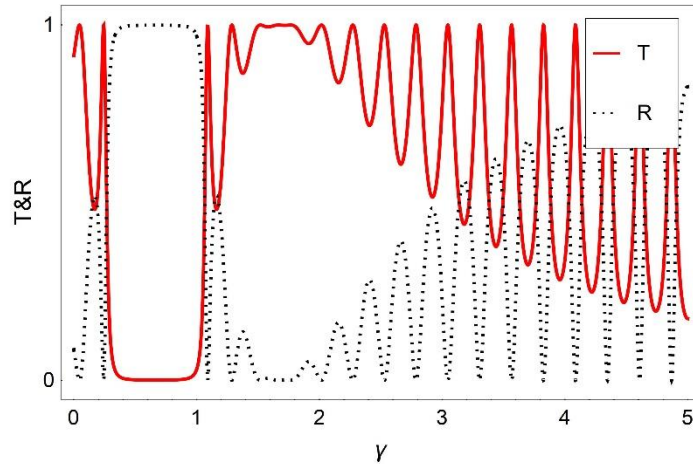


Şekil 4.8. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Enerjiye bağlılığı belirleyen γ parametresinin değişiminin geçiş ve yansıma olasılık yoğunluğunu nasıl etkilediği Şekil 4.9’da sunulmuştur. Burada $m = 1, E = 3, a = 2$ ve $V_0 = 1$ alınmıştır. Gelen tüm skaler parçacıkların enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden yansıtılması ($R \rightarrow 1$) durumunda, Denklem (4.40)

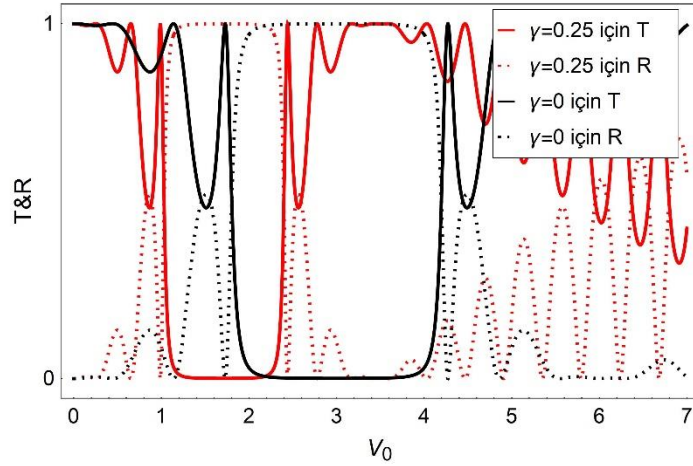
$$\frac{E-m-V_0}{EV_0} \leq \gamma \leq \frac{E+m-V_0}{EV_0}, \quad (4.43)$$

verir. Şekil 4.9’da kullanılan nümerik değerler göz önüne alındığında $0.33 \leq \gamma \leq 1$ bulunur ki bu aralık Şekil 4.9’daki skaler parçacıkların potansiyele sızmadığı bölgedir.



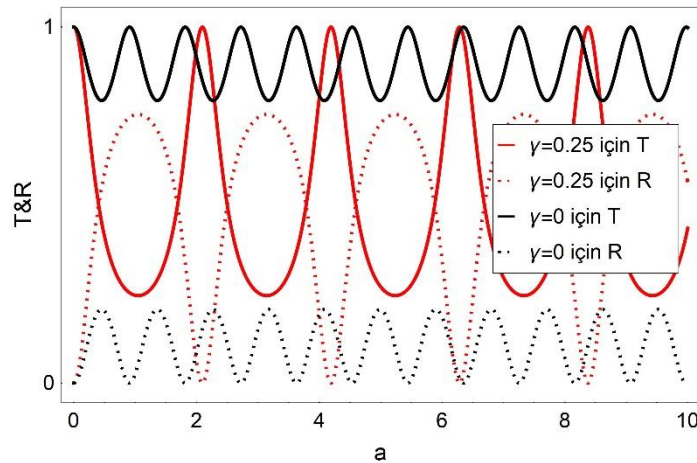
Şekil 4.9. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin $m = 1, E = 3, a = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ parametreleri sabit tutularak V_0 parametresinin skaler parçacıkların saçılmasına etkisi Şekil 4.10'da gösterilmiştir. Enerjiye bağlı durumda skaler parçacıkların potansiyele sızmadığı ve tamamının yansıdığı bölge bilinen bariyer potansiyeline göre küçülmüştür.



Şekil 4.10. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Son olarak enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin genişliğine göre değişimi Şekil 4.11'de $m = 1, V_0 = 1, E = 3, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ alınarak çizdirilmiştir. Daha önce analitik olarak gösterdiğimiz gibi potansiyel genişliği artmasına rağmen skaler parçacıklar Klein tünellemesi yapmaya devam etmektedirler.



Şekil 4.11. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının a parametresine göre değişimi.

4.2.2. Dirac Parçacıkları

Denklem (2.4) ile verilen enerjiye bağlı bariyer potansiyeli $-a \leq x$ ve $x \geq a$ için Denklem (4.14)'de yerine yazıldığında $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(x) \\ \Lambda_2(x) \end{pmatrix}$ spinörünün bir bileşeni için

$$\frac{d^2 \Lambda_1(x)}{dx^2} + \{E^2 - m^2\} \Lambda_1(x) = 0, \quad (4.44)$$

elde edilir. Burada $k^2 = E^2 - m^2$ 'dir. Dolayısıyla bariyer potansiyelinin sağındaki ve solundaki çözümler spinörün her iki bileşeni için,

$$\Lambda_{1L}(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}, \quad (4.45)$$

$$\Lambda_{2L}(x) = \frac{-ik}{m+E} (e^{ikx} - r e^{-ikx}), \quad (4.46)$$

$$\Lambda_{1R}(x) = t e^{ikx}, \quad (4.47)$$

$$\Lambda_{2R}(x) = \frac{-ikt e^{ikx}}{m+E}, \quad (4.48)$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan $-a \leq x \leq a$ aralığı için enerjiye bağlı bariyer potansiyeli varlığında (4.14) denklemi,

$$\frac{d^2 \Lambda_{1M}(x)}{dx^2} + \{[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2\} \Lambda_{1M}(x) = 0, \quad (4.49)$$

$q^2 = [E - V_0(1 + \gamma E)]^2 - m^2$ olmak üzere spinör çözümleri $[E - V_0(1 + \gamma E)]^2 > m^2$ için

$$\Lambda_{1M}(x) = \Sigma_1 e^{iqx} + \Sigma_2 e^{-iqx}, \quad (4.50)$$

$$\Xi_{2M}(x) = \frac{-iq}{m+E-V_0(1+\gamma E)} (\Sigma_1 e^{iqx} + \Sigma_2 e^{-iqx}), \quad (4.51)$$

biçiminde bulunur.

Dalga fonksiyonunun $x = -a$ ($\Psi_L(x)|_{x=-a} = \Psi_M(x)|_{x=-a}$) ve $x = a$ ($\Psi_M(x)|_{x=a} = \Psi_R(x)|_{x=a}$) noktalarındaki sürekliliği kullanıldığında t ve r katsayıları,

$$t = \frac{2\kappa e^{-2ika}}{2\kappa \cos(2qa) - i(1+\kappa^2)\sin(2qa)}, \quad (4.52)$$

$$r = \frac{i(\kappa^2 - 1)\sin(2qa)e^{-2ika}}{2\kappa \cos(2qa) - i(1+\kappa^2)\sin(2qa)}. \quad (4.53)$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\kappa = \frac{q}{k} \frac{m+E}{m+E-V_0(1+\gamma E)}$ 'dir.

Denklem (3.47) ile verilen Dirac denklemi için elektriksel akı yoğunluğu ifadesinde (4.45)-(4.48) denklemleri kullanılırsa sol ve sağ bölgelerdeki akı yoğunluğu,

$$J_L = \frac{2k}{m+E} (-1 + |r|^2), \quad (4.54)$$

$$J_R = \frac{-2k}{m+E} |t|^2, \quad (4.55)$$

elde edilir. Elektriksel akı yoğunluğunun sürekliliği ($1 = |r|^2 + |t|^2$) ve (4.52) ve (4.53) denklemleri kullanılarak geçiş ve yansıma katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$T = \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 + (1-\kappa^2)^2 \sin^2(2qa)}, \quad (4.56)$$

$$R = \frac{(1-\kappa^2)^2 \sin^2(2qa)}{4\kappa^2 + (1-\kappa^2)^2 \sin^2(2qa)}. \quad (4.57)$$

Gelen ve yansıyan parçacıkların olasılık yoğunluklarının bir olması şartının sağlandığı Denklem (4.56) ile Denklem (4.57)'nin toplanması ile kolaylıkla görülür.

Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden saçılması durumunda geçiş rezonans ($T = 1$ ve $R = 0$) koşulunu, (4.56) denkleminde $2qa = n\pi$ olarak elde edebiliriz. Bu durumda, potansiyel engele soldan gelen tüm parçacıklar

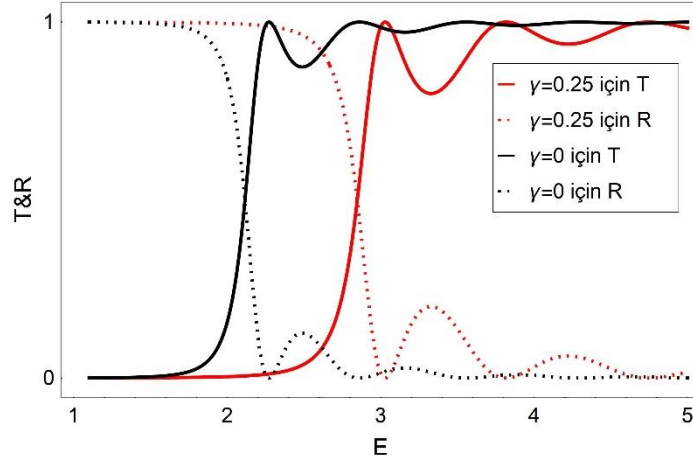
$$E_n = \frac{V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2\pi^2}{4a^2}}}{1 - \gamma V_0}, \quad (4.58)$$

enerjisiyle engeli tünelleyerek geçebilirler. Yani, bu enerji değerlerinde potansiyel engelden yansıma olmaz. Dirac parçacıkları için elde edilen geçiş rezonans koşulu (4.58), $\gamma = 0$ için $E_n = V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2\pi^2}{4a^2}}$ indirgenir. Bu ifade literatürde bariyer potansiyeli için elde edilen geçiş rezonans koşulu ile aynıdır.

Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin genişliği dışındaki tüm parametreler sabit tutulup a parametresi çok çok büyük alınırsa $2qa$ 'da çok büyük olur ve bu $\sin 2qa$ 'nın çok hızlı salınım yapmasına neden olur. Bu limit altında, $T \rightarrow \frac{8\kappa^2}{8\kappa^2 + (1-\kappa^2)^2}$ ve $R \rightarrow \frac{(1-\kappa^2)^2}{8\kappa^2 + (1-\kappa^2)^2}$ olur. Yani, bariyer potansiyelin genişliği ne kadar büyük olursa olsun Dirac parçacıkları için geçiş olasılık yoğunluğu her zaman sıfırdan farklıdır. Bu olaya göreli parçacıkların Klein tünellemesi denir [73]. Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi burada da potansiyel genişliği çok büyük alınmasına rağmen geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları basamak potansiyelinde elde edilen sonuca indirgenmez. Bunun nedeni, basamak potansiyelinin x -eksenine göre asimetric, bariyer

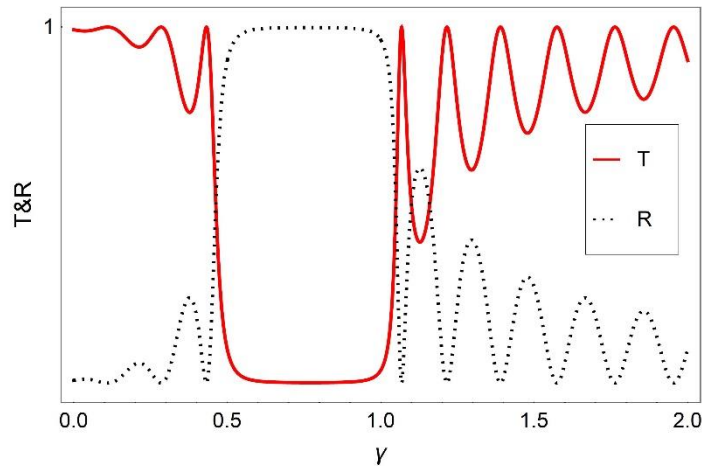
potansiyelinin ise simetrik olması olabilir. [74] numaralı kaynakta bu fiziksel problem detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.2.2.1. Nümerik Analizler



Şekil 4.12. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden göreceli ve spin-1/2 parçacıkların saçılmasında birimsellik koşulunun sağlandığı Şekil 4.12’de sunulmuştur. Şekil 4.12’de $m = 1, V_0 = 1, a = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri göz önüne alınmıştır. Dikkat edilmelidir ki geçme ve yansıma katsayıları enerjiye bağlı bariyer potansiyeli için bilinen bariyer potansiyelinden beklenildiği gibi farklılıklar göstermiştir. Denklem (4.58)’de verilen rezonans geçiş koşulu ifadesinde Şekil 4.12’de kullanılan nümerik değerler kullanılırsa $E_1 = 3.028, E_2 = 3.814$ ve $E_3 = 4.744$ olarak hesaplanır. Şekil 4.12’den de açıkça görülebileceği gibi bu değerlerde soldan gelen tüm Dirac parçacıkları potansiyel engelden sızarak karşı tarafa geçmiştir.

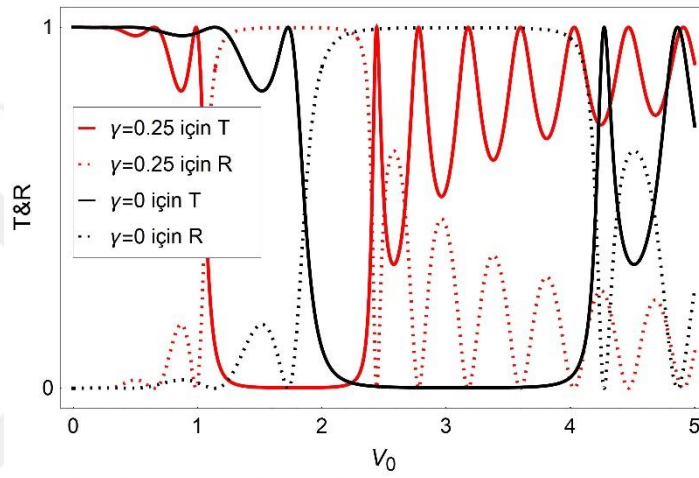


Şekil 4.13. parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

$m = 1, E = 4, a = 2$ ve $V_0 = 1$ alınarak çizilen Şekil 4.13, enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden Dirac parçacıklarının saçılmasını enerjiye bağlılığı belirleyen γ parametresine göre değişimini vermektedir. Soldan gelen tüm parçacıkların enerjiye bağlı bariyer potansiyelinden yansıtılması ($R \rightarrow 1$) için γ parametresi

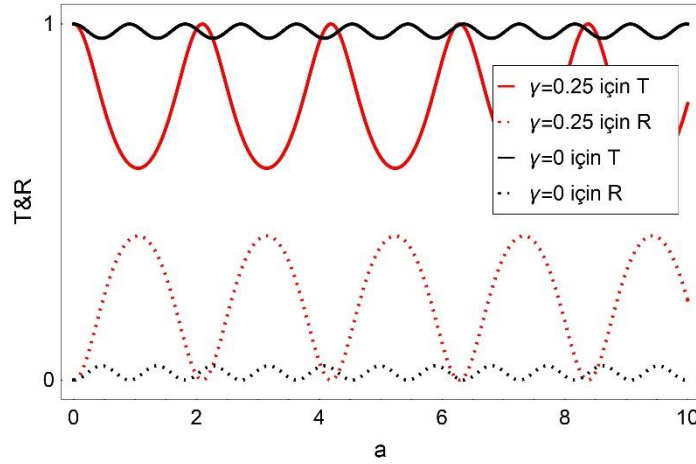
$$\frac{E-m-V_0}{EV_0} \leq \gamma \leq \frac{E+m-V_0}{EV_0}, \quad (4.59)$$

aralığında değerler almalıdır. Şekil 4.13’de kullanılan nümerik değerler için Denklem (4.43)’ten $0.5 \leq \gamma \leq 1$ bulunur ki bu aralık grafikte Dirac parçacıklarının potansiyel engele nüfuz edemediği aralıkla aynıdır.



Şekil 4.14. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin yüksekliği ile ilişkili V_0 parametresinin geçiş ve yansıma katsayılarına etkisi $m = 1, V_0 = 1, E = 3, a = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ alınarak Şekil 4.14’de verilmiştir. Bilinen bariyer potansiyeline göre enerjiye bağlılık parçacıkların potansiyele sızamadığı aralığı küçültmüş ve geçiş rezonans sayısını arttırmıştır.



Şekil 4.15. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının a parametresine göre değişimi.

Potansiyel engelin genişliği ne kadar büyük olursa olsun göreceli parçacıkların engele nüfuz edebildiği analitik olarak gösterilmiştir. Şekil 4.15’de $m = 1, V_0 = 1, E = 3, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ alınarak potansiyel genişliğinin geçiş ve yansıma katsayıları çizdirilmiştir. Şekil 4.15’den de kolaylıkla görülebileceği gibi a parametresi büyümesine rağmen Dirac parçacıkları beklendiği gibi potansiyel engele nüfuz etmeye devam etmektedir.

4.3. Enerjiye Bağlı Hulthen Potansiyeli

Bu kesimde denklem (2.7) ile verilen enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılan Klein-Gordon ve Dirac parçacıkları incelenecektir.

4.3.1. Klein-Gordon Parçacıkları

Tek boyutta enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli (2.7), Denklem (3.2) ile verilen Klein-Gordon denkleminde $x < 0$ için göz önüne alındığında,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left\{ \left(E - \frac{V_0(1+\gamma E)}{e^{-ax}-q} \right)^2 - m^2 \right\} \psi(x) = 0, \quad (4.60)$$

elde edilir. Bu denklemde $z = qe^{ax}$ dönüşümü ve ardından $\psi(z) = z^\mu(1-z)^\lambda\zeta(z)$ tanımlaması yapılırsa Denklem (4.60) aşağıdaki gibi olur;

$$z(1-z)\frac{d^2\zeta(z)}{dz^2} + (1+2\mu-(1+2\mu+2\lambda)z)\frac{d\zeta(z)}{dz} - (\mu+\lambda-\nu)(\mu+\lambda+\nu)\zeta(z) = 0. \quad (4.61)$$

Burada,

$$\mu = \frac{ik}{a}, \quad (4.62)$$

$$k^2 = E^2 - m^2 \quad (4.63)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4V_0^2(1+\gamma E)^2}{q^2 a^2}}, \quad (4.64)$$

$$v = \frac{i}{a} \sqrt{\left(E + \frac{V_0(1+\gamma E)}{q}\right)^2 - m^2}, \quad (4.65)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem (4.61) literatürde iyi bilinen hipergeometrik fonksiyonları veren Gauss diferansiyel denklemidir. Bu denklemin çözümü [75]

$$\begin{aligned} \zeta(z) = & \eta_1 F(\mu + \lambda - v, \mu + \lambda + v, 1 + 2\mu; z) \\ & + \eta_2 z^{-2\mu} F(-\mu + \lambda - v, -\mu + \lambda + v, 1 - 2\mu; z), \end{aligned} \quad (4.66)$$

olur. Dolayısıyla $x < 0$ için genel çözüm

$$\begin{aligned} \Phi_L(z) = & \eta_1 z^\mu (1 - z)^\lambda F(\mu + \lambda - v, \mu + \lambda + v, 1 + 2\mu; z) \\ & + \eta_2 z^{-\mu} (1 - z)^\lambda F(-\mu + \lambda - v, -\mu + \lambda + v, 1 - 2\mu; z), \end{aligned} \quad (4.67)$$

biçiminde elde edilir. $x < 0$ 'da genel çözüm $x \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow 0, (1 - z)^\lambda \rightarrow 1$) için;

$$\Phi_L(x) \rightarrow \eta_1 q^{ik/a} e^{ikx} + \eta_2 q^{-ik/a} e^{-ikx}, \quad (4.68)$$

biçimine indirgenir.

Diğer taraftan $x > 0$ için enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli (2.7), Denklem (3.2) ile verilen Klein-Gordon denkleminde yerine yazılıp $y = qe^{-\alpha x}$ ve ardından $\Phi(y) = y^\mu (1 - y)^\lambda \zeta(y)$ dönüşümleri yapıldığında,

$$y(1 - y) \frac{d^2 \zeta(y)}{dy^2} + (1 + 2\mu - (1 + 2\mu + 2\lambda)) \frac{d\zeta(y)}{dy} - (\mu + \lambda - v)(\mu + \lambda + v) \zeta(y) = 0, \quad (4.69)$$

elde edilir. Bu denklem yine Gauss diferansiyel denklemi olup çözümü hipergeometrik fonksiyonlardır. Sonuç olarak, $x > 0$ için genel çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \eta_3 y^\mu (1 - y)^\lambda F(\mu + \lambda - v, \mu + \lambda + v, 1 + 2\mu; y) \\ & + \eta_4 y^{-\mu} (1 - y)^\lambda F(-\mu + \lambda - v, -\mu + \lambda + v, 1 - 2\mu; y). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Saçılma probleminde $x > 0$ 'da sadece geçen parçacıklar olacağından $\eta_3 = 0$ alınacaktır. Ayrıca, $x \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow 0, (1 - y)^\lambda \rightarrow 1$) durumunda sağ taraf için çözüm,

$$\Phi_R(x) \rightarrow \eta_4 q^{-ik/a} e^{ikx}, \quad (4.71)$$

olur.

Denklem (3.17) ile verilen Klein-Gordon parçacıkları için akı yoğunluğu kullanıldığında,

$$x < 0 \text{ için } J_L = \frac{k}{m} (|\eta_1|^2 - |\eta_2|^2), \quad (4.72)$$

$$x > 0 \text{ için } J_R = \frac{k}{m} |\eta_4|^2, \quad (4.73)$$

elde edilir. Dolayısıyla geçiş ve yansıma katsayıları aşağıdaki biçimde bulunur:

$$T = \frac{|\eta_4|^2}{|\eta_1|^2}, \quad (4.74)$$

$$R = \frac{|\eta_2|^2}{|\eta_1|^2}. \quad (4.75)$$

Dalga fonksiyonunun ve birinci türevinin $x = 0$ 'daki sürekliliğinden $(\Phi_R(x)|_{x=0} = \Phi_L(x)|_{x=0}$,

$$\left. \frac{d\Phi_R(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\Phi_L(x)}{dx} \right|_{x=0}) \eta_1, \eta_2 \text{ ve } \eta_4 \text{ arasındaki ilişki,}$$

$$\frac{\eta_4}{\eta_1} = -\frac{q^{2\mu}}{2} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)F_1 F_2 + \sigma_2 F_2 F_3 - \sigma_4 F_4 F_1}{F_2(\sigma_3 F_2 + \sigma_4 F_4)} \right], \quad (4.76)$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = -\frac{q^{2\mu}}{2} \left[\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)F_1 F_2 + \sigma_2 F_2 F_3 + \sigma_4 F_4 F_1}{F_2(\sigma_3 F_2 + \sigma_4 F_4)} \right], \quad (4.77)$$

olarak hesaplanır. Burada kullanılan kısaltmalar,

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{q} - \frac{\lambda}{1-q}, \quad (4.78)$$

$$\sigma_2 = \frac{(\mu - \nu + \lambda)(\mu + \nu + \lambda)}{1 + 2\mu}, \quad (4.79)$$

$$\sigma_3 = -\frac{\mu}{q} - \frac{\lambda}{1-q}, \quad (4.80)$$

$$\sigma_4 = \frac{(-\mu - \nu - \lambda)(-\mu + \nu + \lambda)}{1 - 2\mu}, \quad (4.81)$$

$$F_1 = F(\mu - \nu + \lambda, \mu + \nu + \lambda, 1 + 2\mu; q), \quad (4.82)$$

$$F_2 = F(-\mu - \nu + \lambda, -\mu + \nu + \lambda, 1 - 2\mu; q), \quad (4.83)$$

$$F_3 = F(1 + \mu - \nu + \lambda, 1 + \mu + \nu + \lambda, 2 + 2\mu; q), \quad (4.84)$$

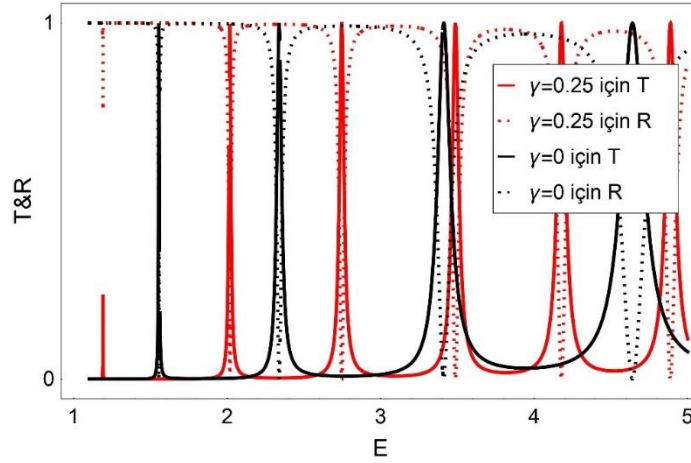
$$F_4 = F(1 - \mu - \nu + \lambda, 1 - \mu + \nu + \lambda, 2 - 2\mu; q), \quad (4.85)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Denklem (4.76) ve Denklem (4.77) kullanılarak geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları kolaylıkla hesaplanır. Ancak analitik olarak birimsellik koşulunun sağlandığını göstermek oldukça zahmetli ve güç bir iştir. (4.74) ve (4.75) denklemlerinde

Denklem (4.76) ve Denklem (4.77) kullanılarak geçiş ve yansıma katsayıları nümerik olarak bir sonraki kesimde incelenecektir.

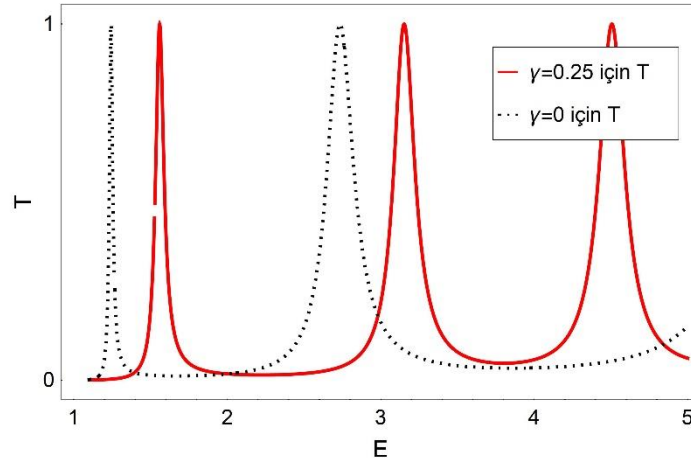
4.3.1.1. Nümerik Analizler

Geçiş ve yansıma olasılık yoğunluklarının toplamının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli varlığında da geçerliliğini koruduğu Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Bu grafik oluşturulurken $m = 1$, $V_0 = 4$, $a = 1$, $q = 0.9$, $\gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri kullanılmıştır.



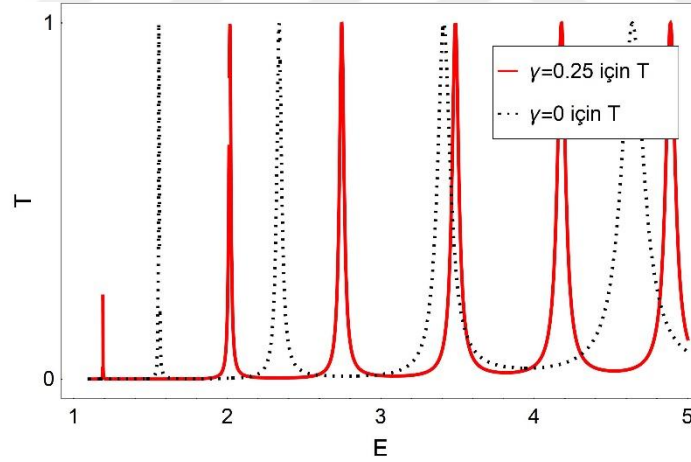
Şekil 4.16. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Şekil 4.17'de ise aynı grafik sadece geçiş olasılık yoğunluğu için oluşturulmuştur. Bu grafikten potansiyel engelde skaler parçacıkların geçiş rezonansı gerçekleştireceği ilk enerji değeri artmasına rağmen enerjiye bağlı durumda geçiş rezonans sayısının aynı enerji aralığında arttığı gözlemlenmiştir.



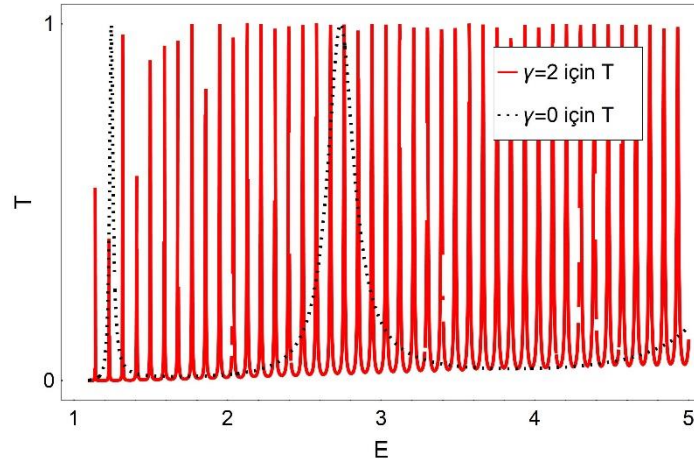
Şekil 4.17. $a = 1$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Potansiyel genişliği ile ilgili olan a parametresi 0.5 alınarak elde edilen geçiş olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi Şekil 4.18’de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi potansiyel enerjinin genişliği azaldığı zaman hem enerjiye bağlı durumda hem de enerjiden bağımsız durumda geçiş rezonans sayısı artmıştır.



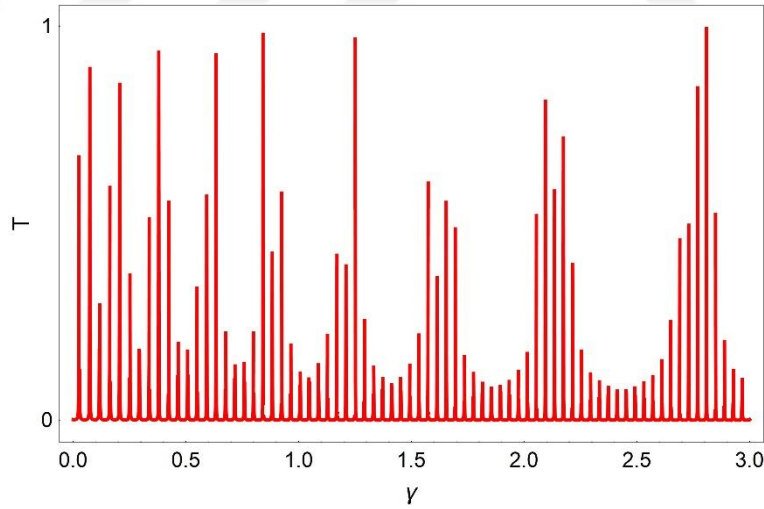
Şekil 4.18. $a = 0.5$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Skaler parçacıkların enerjilerinin geçiş ve yansıma katsayılarına etkisine son olarak $\gamma = 2$ seçilerek bakılmıştır. Bu durumda enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinden gelen skaler parçacıkların tamamının geçtiği enerji değerinin sayısının oldukça arttığı Şekil 4.19’da görülmektedir.



Şekil 4.19. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

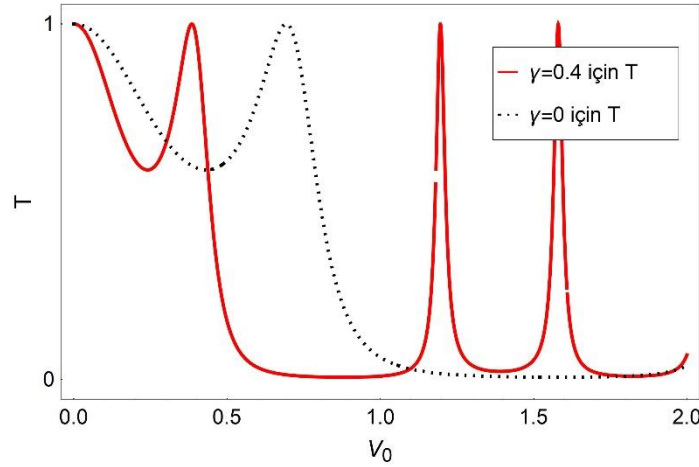
Potansiyel engelin enerjiye bağlılık derecesini ve biçimini belirleyen γ parametresinin skaler parçacığın saçılmasına etkisi Şekil 4.20’de $m = 1, V_0 = 4, a = 0.5, q = 0.9$ ve $E = 2$ sunulmuştur. γ parametresinin belirli değerlerinde geçiş rezonansı yaşandığı görülmektedir. Bununla birlikte potansiyel engelin yüksekliği ile ilgili bu parametre ne kadar büyürse büyüsün geçişin ve geçiş rezonanslarının, beklenildiği gibi, her zaman gerçekleştiği Şekil 4.20’den açıkça görülmektedir.



Şekil 4.20. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

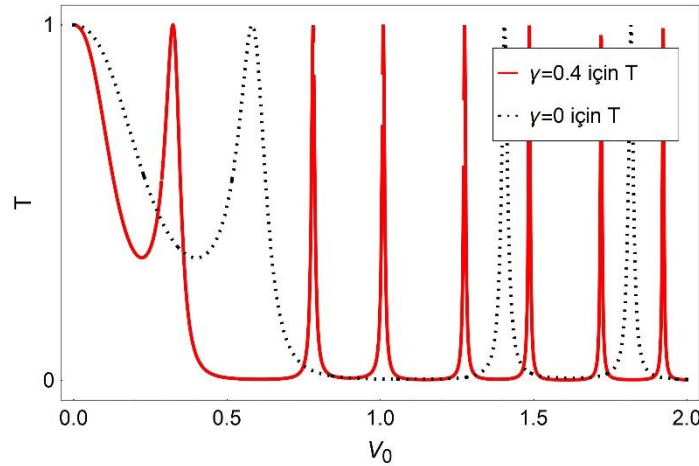
$m = 1, E = 2, a = 1, q = 0.9, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.4$ değerleri göz önüne alınarak potansiyelin yüksekliği ile ilişkili V_0 parametresinin değişiminin skaler parçacıkların enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinden saçılmasına etkileri Şekil 4.21’de analiz edilmiştir. Şekil 4.21’den görüldüğü gibi geçiş rezonans sayısı burada da enerjiye bağlı durumda daha fazladır. Bununla birlikte olağan

durumda skaler parçacıkların Hulthen potansiyeline sızamadıkları enerji değerlerinde enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinde geçiş olduğu gözlenmektedir.



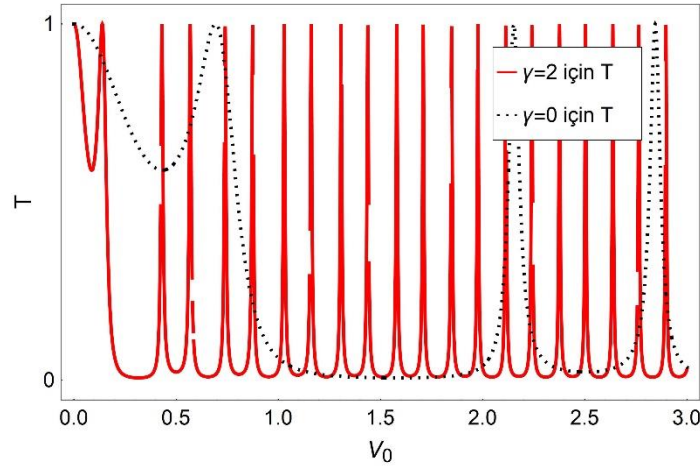
Şekil 4.21. $a = 1$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Şekil 4.22'de ise bu etkinin potansiyel genişliğini belirleyen a parametresi azaltıldığındaki değişimi sunulmuştur. Beklenildiği gibi potansiyel genişliği azaldığında her iki durumda da geçiş rezonans sayısı artmıştır. Bu artışın enerjiye bağlı durumda daha fazla gerçekleştiği sunulan grafikten kolayca görülmektedir.



Şekil 4.22. $a = 0.5$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

γ parametresi potansiyel engelin enerjiye bağıllık derecesini ve biçimini belirlemekte olup skaler parçacığın saçılmasına etkisi Şekil 4.23'de sunulmuştur. $\gamma = 2$ için enerjiye bağlı potansiyelden çok sayıda geçişin yaşandığı gözlenmektedir.



Şekil 4.23. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

4.3.2. Dirac Parçacıkları

$x < 0$ bölgesinde (2.7) ile verilen enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli Dirac spinörlerinden birinin sağladığı ikinci dereceden çiftlenimsiz (3.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \left[\left(E - \frac{V_0(1+\gamma E)}{e^{-ax}-q} \right)^2 - m^2 + i \frac{d}{dx} \left(\frac{V_0(1+\gamma E)}{e^{-ax}-q} \right) \right] \phi(x) = 0, \quad (4.86)$$

elde edilir. $y = qe^{ax}$ dönüşümü ve ardından $\phi(y) = y^\mu(1-y)^\lambda\Gamma(y)$ yapıldığında Denklem (4.86),

$$y(1-y) \frac{d^2\Gamma(y)}{dy^2} + (1+2\mu - (1+2\mu+2\lambda)y) \frac{d\Gamma(y)}{dy} - (\mu+\lambda-\nu)(\mu+\lambda+\nu)\Gamma(y) = 0, \quad (4.87)$$

denklemine indirgenir ki bu denklemin çözümleri hipergeometrik fonksiyonlar olup $x < 0$ için genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \phi_L(y) = & Ay^\mu(1-y)^\lambda F(\mu+\lambda-\nu, \mu+\lambda+\nu, 1+2\mu; y) \\ & + By^{-\mu}(1-y)^\lambda F(-\mu+\lambda-\nu, -\mu+\lambda+\nu, 1-2\mu; y). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Burada,

$$\mu = \frac{ik}{a}, \quad (4.89)$$

$$k^2 = E^2 - m^2, \quad (4.90)$$

$$\lambda = \frac{iV_0(1+\gamma E)}{aq}, \quad (4.91)$$

$$v = \frac{i}{a} \sqrt{\left(E + \frac{V_0(1+\gamma E)}{q}\right)^2 - m^2}, \quad (4.92)$$

olarak tanımlanmıştır. $x < 0$ 'da genel çözümün $x \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow 0, (1-y)^\lambda \rightarrow 1$)'daki davranışı

$$\phi_L(x) \rightarrow Aq^{ik/a} e^{ikx} + Bq^{-ik/a} e^{-ikx}, \quad (4.93)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, Denklem (3.26)'dan spinörün diğer bileşeninin $x \rightarrow -\infty$ 'daki davranışı

$$\chi_L(x) = \left(\frac{E-k}{m}\right) Aq^{\frac{ik}{a}} e^{ikx} + \left(\frac{E+k}{m}\right) Bq^{-ik/a} e^{-ikx}. \quad (4.94)$$

$x > 0$ bölgesinde enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli (2.7) Denklem (3.28)'de yerine yazıldıktan sonra $z = qe^{-\alpha x}$ dönüşümü ve ardından $\phi(z) = z^\mu (1-z)^\lambda \Sigma(z)$ tanımlaması yapılırsa denklem yine Gauss diferansiyel denklemine dönüşür. Bu durumda sağ taraf için genel çözüm,

$$\begin{aligned} \phi_R(z) = & Cz^\mu (1-z)^{-\lambda} F(\mu - \lambda - \nu, \mu - \lambda + \nu, 1 + 2\mu; z) \\ & + Dz^{-\mu} (1-z)^{-\lambda} F(-\mu - \lambda - \nu, -\mu - \lambda + \nu, 1 - 2\mu; z), \end{aligned} \quad (4.95)$$

olur. $x > 0$ bölgesinde sadece geçen dalgalarla ilgileneneğimizden $C = 0$ alınır. $x \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow 0, (1-z)^\lambda \rightarrow 1$) limitinde spinörlerin davranışları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_R(z) = Dq^{-\frac{ik}{a}} e^{ikx}, \quad (4.96)$$

$$\chi_R(z) = D \left(\frac{E-k}{m}\right) q^{-\frac{ik}{a}} e^{ikx}. \quad (4.97)$$

Denklem (3.47)'de verilen elektriksel akı yoğunluğu (4.93), (4.94), (4.96) ve (4.97) denklemleri ile birlikte kullanılarak Dirac parçacıkları için geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları sırasıyla

$$T = \frac{|D|^2}{|A|^2}, \quad (4.98)$$

$$R = \left(\frac{E+k}{E-k}\right) \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad (4.99)$$

biçiminde elde edilir.

Dalga fonksiyonunun ve birinci türevinin $x = 0$ 'daki sürekliliğinden ($\phi_R(x)|_{x=0} = \phi_L(x)|_{x=0}$,

$$\left. \frac{d\phi_R(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\phi_L(x)}{dx} \right|_{x=0} \Big) A, B \text{ ve } D \text{ arasındaki ilişki,}$$

$$\frac{B}{A} = -\varepsilon_1 \left[\frac{\varepsilon_2 F_1 F_2 + \varepsilon_3 F_3 F_4}{\varepsilon_4 F_1 F_5 + \varepsilon_5 F_6 F_4 + \varepsilon_6 F_5 F_4} \right], \quad (4.100)$$

$$\frac{D}{A} = \varepsilon_7 \left[\frac{\varepsilon_8 F_6 F_2 + \varepsilon_9 F_3 F_5 + \varepsilon_{10} F_2 F_5}{\varepsilon_4 F_1 F_5 + \varepsilon_5 F_6 F_4 + \varepsilon_6 F_5 F_4} \right], \quad (4.101)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\varepsilon_1 = -\frac{q^{1+2\mu}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \nu^2)}{1+2\mu}, \quad (4.102)$$

$$\varepsilon_2 = 1 + 2\mu, \quad (4.103)$$

$$\varepsilon_3 = 1 - 2\mu, \quad (4.104)$$

$$\varepsilon_4 = q(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \nu^2), \quad (4.105)$$

$$\varepsilon_5 = q(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 - \nu^2), \quad (4.106)$$

$$\varepsilon_6 = -2\mu(1 - 2\mu), \quad (4.107)$$

$$\varepsilon_7 = \frac{(1-q)^{2\lambda} q^{2\mu}}{1+2\mu}, \quad (4.108)$$

$$\varepsilon_8 = q(1 + 2\mu)(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 - \nu^2), \quad (4.109)$$

$$\varepsilon_9 = -q(1 - 2\mu)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \nu^2), \quad (4.110)$$

$$\varepsilon_{10} = -(1 - 2\mu)2\mu(1 + 2\mu), \quad (4.111)$$

$$F_1 = F(1 - \lambda - \mu - \nu, 1 - \lambda - \mu + \nu, 2 - 2\mu; q), \quad (4.112)$$

$$F_2 = F(\lambda + \mu - \nu, \lambda + \mu + \nu, 1 + 2\mu; q), \quad (4.113)$$

$$F_3 = F(1 + \lambda + \mu - \nu, 1 + \mu + \lambda + \nu, 2 + 2\mu; q), \quad (4.114)$$

$$F_4 = F(-\lambda - \mu - \nu, -\lambda - \mu + \nu, 1 - 2\mu; q), \quad (4.115)$$

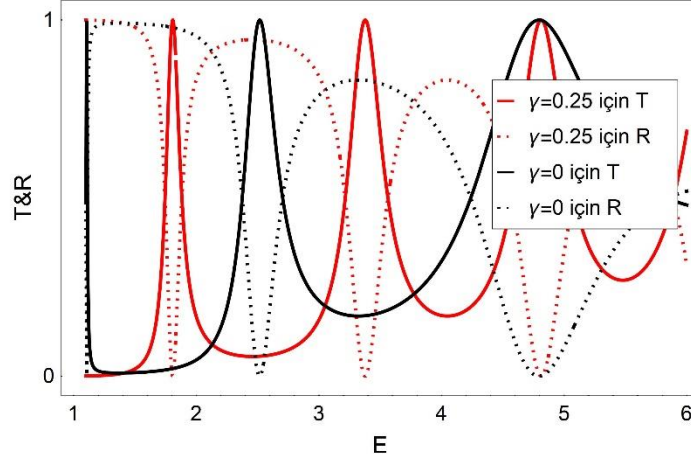
$$F_5 = F(\lambda - \mu - \nu, \lambda - \mu + \nu, 1 - 2\mu; q), \quad (4.116)$$

$$F_6 = F(1 + \lambda - \mu - \nu, 1 + \lambda - \mu + \nu, 2 - 2\mu; q), \quad (4.117)$$

tanımlamaları yapılmıştır. (4.102)-(4.117) denklemleri, Denklem (4.100) ve Denklem (4.101)'de yerine yazıldığında geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları için birer analitik ifade elde edilir. Bu ifadeler oldukça komplike olduğundan analitik olarak incelemek oldukça güçtür. Dolayısıyla, geçiş ve yansıma katsayıları nümerik olarak analiz edilecektir.

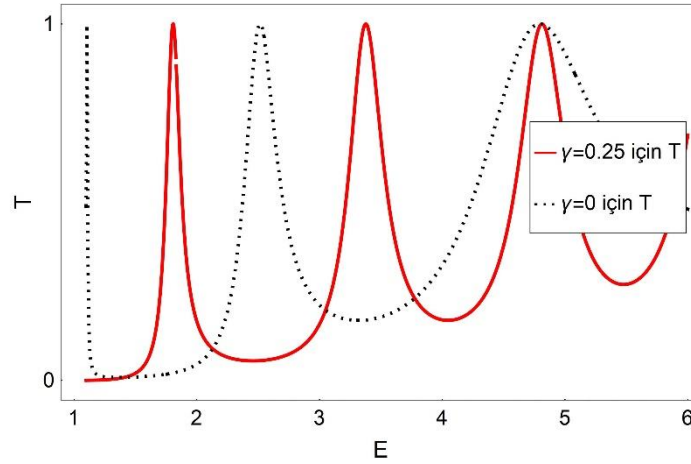
4.3.2.1. Nümerik Analizler

Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinden saçılma durumları analitik olarak Denklem (4.100) ve Denklem (4.101)'de verilmiştir. Saçılma probleminde birimsellik koşulu $m = 1, V_0 = 4, a = 1, q = 0.9, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri kullanılarak Şekil 4.24'de araştırılmıştır. Saçılma probleminde $T + R = 1$ şartı enerjiye bağlı durumda da geçerliliğini koruduğu Şekil 4.24'den görülmektedir.

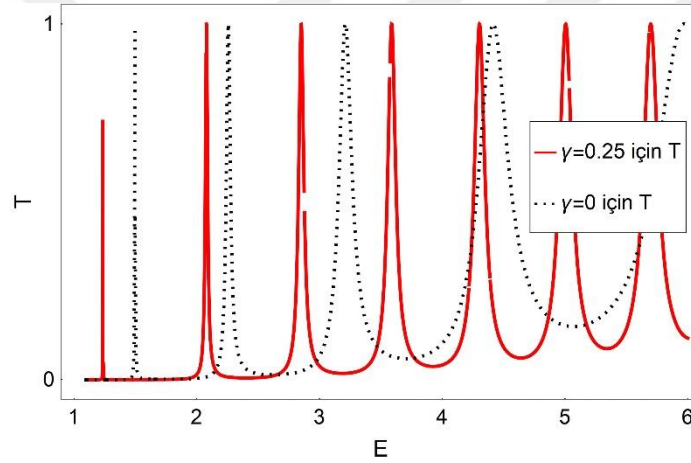


Şekil 4.24. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Geçiş olasılık yoğunluğunun enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinin genişliği ile ilişkili olan a parametresine göre değişimi Şekil 4.25 ve 4.26'da sırasıyla $a = 1$ ve $a = 0.5$ için sunulmuştur. Sunulan grafiklerden potansiyel engelin genişliği değiştiğinde geçiş rezonans sayısının da değiştiği açıkça görülmektedir. Enerjiye bağlı potansiyel engel durumunda geçiş rezonans sayısı olağan duruma göre daha fazladır.

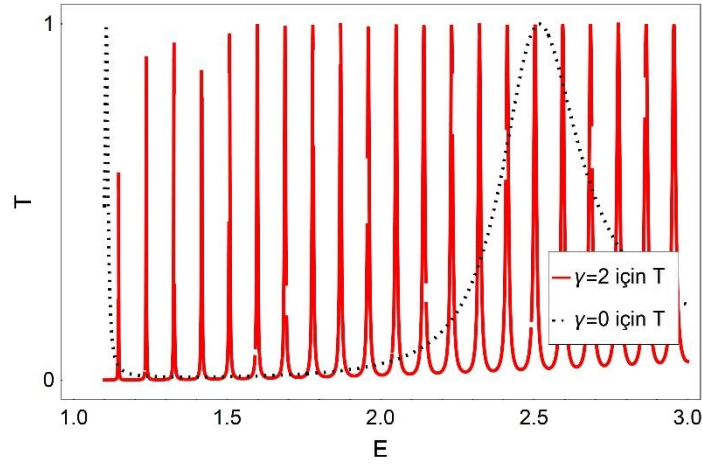


Şekil 4.25. $a = 1$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.



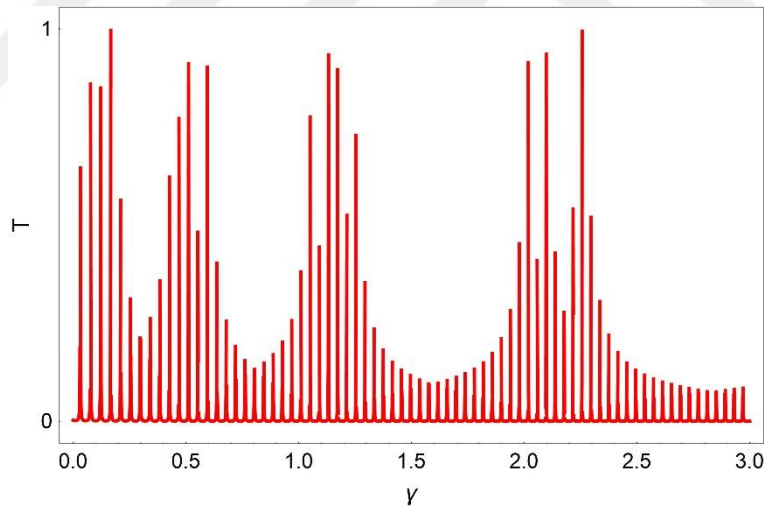
Şekil 4.26. $a = 0.5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Enerjiye bağlılığı belirleyen γ parametresinin geçiş rezonans sayısına etkisi ise Şekil 4.27'de sunulmuştur. $\gamma = 2$ ve $m = 1, V_0 = 4, a = 1, q = 0.9, E = 2$ alınarak çizilen grafikten de görüldüğü gibi rezonans sayısı olağan duruma göre çok fazla artmıştır.



Şekil 4.27. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

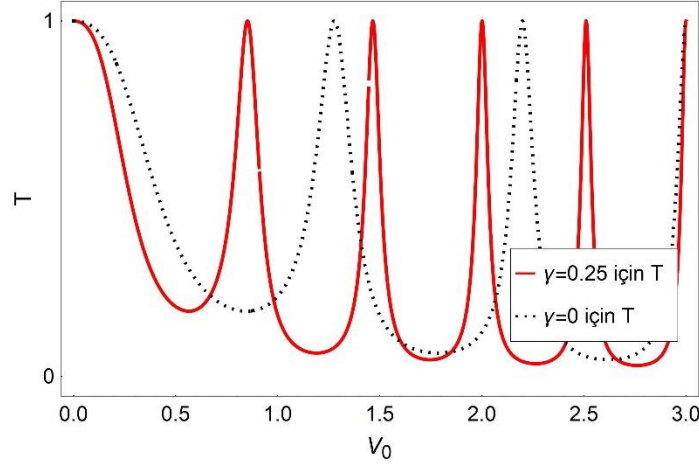
γ parametresinin Dirac parçacığının saçılmasına etkisi $m = 1, V_0 = 4, a = 0.5, q = 0.9$ ve $E = 2$ değerleri kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.28’de sunulmuştur. γ parametresi potansiyel engelin yüksekliği ile ilişkili bir parametre olup bu parametre ne kadar büyürse büyüsün geçişin ve geçiş rezonanslarının her zaman gerçekleştiği Şekil 4.28’den açıkça görülmektedir.



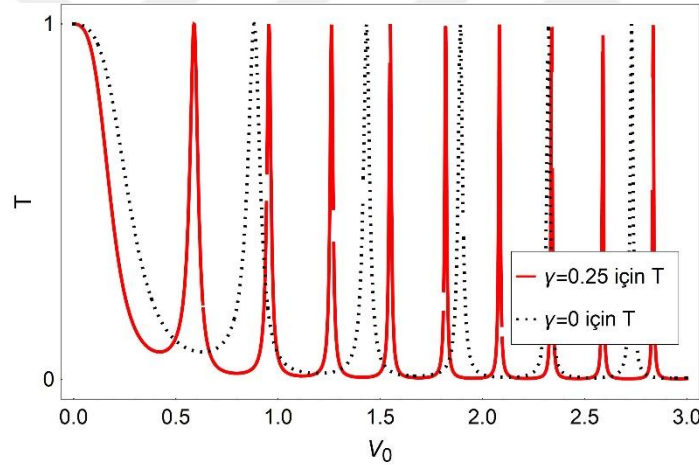
Şekil 4.28. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

Potansiyel engelin yüksekliğini belirleyen parametrelerden biri olan V_0 parametresinin değişiminin Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinden saçılmasında geçiş olasılık yoğunluğuna etkisi Şekil 4.29, 4.30 ve 4.31’de sunulmuştur. Potansiyel engelin genişliği ile ilgili a parametresinin 1 ve 0.5 alındığı Şekil 4.29 ve 4.30 ve enerjiye bağlılığı belirleyen γ parametresinin 2 alındığı Şekil 4.31’den açıkça görüldüğü gibi potansiyel engelin enerjiye

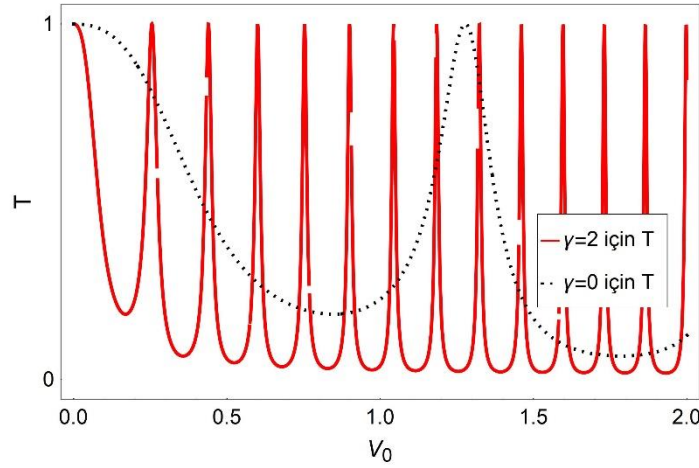
bağılılığı her durumda olağan durumdan daha fazla geçiş rezonansının gerçekleşmesine neden olmaktadır.



Şekil 4.29. $a = 1$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.



Şekil 4.30. $a = 0.5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı bariyer potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.



Şekil 4.31. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Hulthen potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

4.4. Enerjiye Bağlı Woods-Saxon Potansiyeli

Bu kesimde denklem (2.9) ile verilen enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinden Klein-Gordon ve Dirac parçacıkların saçılması incelenecektir.

4.4.1. Klein-Gordon Parçacıkları

Enerjiye bağlı Hulthen potansiyelinde izlenen yöntem kullanılarak Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinden saçılmalarında geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukları sırasıyla,

$$T = \left| \left[\frac{C_{11}C_7F_2(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)-C_4C_{12}F_3(C_5F_2+C_6\bar{F}_5)}{C_1C_{12}F_3(C_2F_1+C_3\bar{F}_4)-C_7C_{10}F_1(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)} \right] \frac{C_{10}F_1}{C_{12}F_3} + \frac{C_{11}F_2}{C_{12}F_3} \right|^2, \quad (4.118)$$

$$R = \left| \left[\frac{C_{11}C_7F_2(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)-C_4C_{12}F_3(C_5F_2+C_6\bar{F}_5)}{C_1C_{12}F_3(C_2F_1+C_3\bar{F}_4)-C_7C_{10}F_1(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)} \right] \right|^2, \quad (4.119)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$C_1 = ae^{-aL}(-e^{-aL})^\mu(1+e^{-aL})^{-\lambda_1}, \quad (4.120)$$

$$C_2 = \frac{-\mu}{e^{-aL}} + \frac{\lambda_1}{1+e^{-aL}}, \quad (4.121)$$

$$C_3 = \frac{(\mu-\nu-\lambda_1)(\mu-\nu-\lambda_1)}{1+2\mu}, \quad (4.122)$$

$$C_4 = ae^{-aL}(-e^{-aL})^{-\mu}(1+e^{-aL})^{-\lambda_1}, \quad (4.123)$$

$$C_5 = \frac{\mu}{e^{-aL}} + \frac{\lambda_1}{1+e^{-aL}}, \quad (4.124)$$

$$C_6 = \frac{(-\mu-\nu-\lambda_1)(-\mu+\nu-\lambda_1)}{1-2\mu}, \quad (4.125)$$

$$C_7 = -a(1 + e^{-aL})^{-2+\nu+\mu}(e^{-aL})^{1-\mu}, \quad (4.126)$$

$$C_8 = \frac{-\nu}{(e^{-aL})^{-1}} + \frac{\mu}{e^{-aL}(1+e^{-aL})^{-1}}, \quad (4.127)$$

$$C_9 = \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu-\mu-\lambda_1\right)\left(\frac{1}{2}-\nu-\mu+\lambda_1\right)}{1-2\nu}, \quad (4.128)$$

$$C_{10} = (-e^{-aL})^\mu(1 + e^{-aL})^{-\lambda_1}, \quad (4.129)$$

$$C_{11} = (-e^{-aL})^{-\mu}(1 + e^{-aL})^{-\lambda_1}, \quad (4.130)$$

$$C_{12} = e^{aL\mu}(1 + e^{-aL})^{\mu+\nu}, \quad (4.131)$$

$$F_1 = F(\mu - \nu - \lambda_1, \mu + \nu - \lambda_1, 1 + 2\mu; -e^{-aL}), \quad (4.132)$$

$$F_2 = F(-\mu - \nu - \lambda_1, -\mu + \nu - \lambda_1, 1 - 2\mu; -e^{-aL}), \quad (4.133)$$

$$F_3 = F\left(\frac{1}{2} - \nu - \mu - \lambda_1, \frac{1}{2} - \nu - \mu + \lambda_1, 1 - 2\nu; \frac{1}{1+e^{-aL}}\right), \quad (4.134)$$

$$\widetilde{F}_4 = \frac{dF_1}{dy}, \quad (4.135)$$

$$\widetilde{F}_5 = \frac{dF_2}{dy}, \quad (4.136)$$

$$\widetilde{F}_6 = \frac{dF_3}{dz}, \quad (4.137)$$

$$\nu = \frac{ik}{a}, \quad (4.138)$$

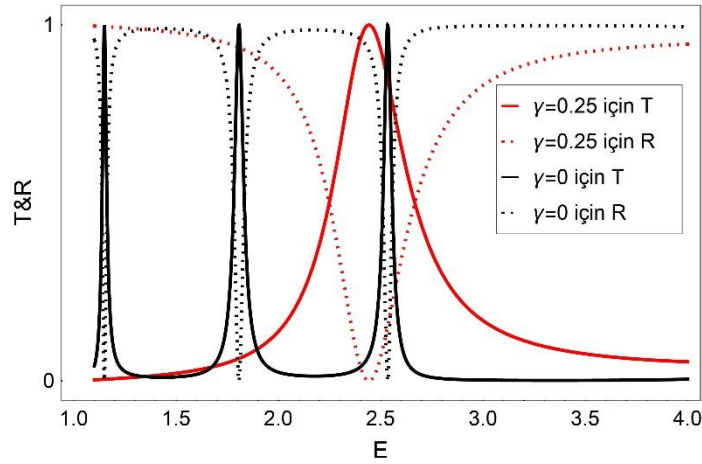
$$k^2 = E^2 - m^2, \quad (4.139)$$

$$\mu = \frac{1}{a}\sqrt{m^2 - (E - V_0(1 + \gamma E))^2}, \quad (4.140)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4V_0^2(1+\gamma E)^2}{a^2}}, \quad (4.141)$$

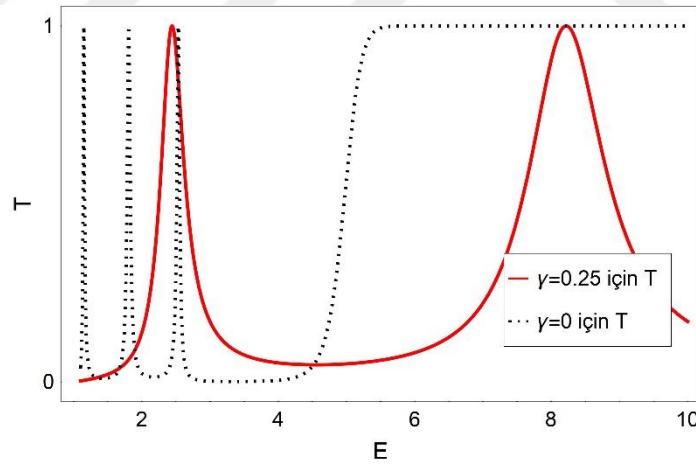
biçiminde tanımlanmıştır. (4.120)-(4.141) denklemleri geçiş (4.118) ve yansıma (4.119) olasılık yoğunlukları ifadelerinde yerine yazıldığında geçiş ve yansıma katsayıları için birer analitik ifade elde edilir. Bu ifadeler oldukça karmaşık bir yapıya sahip olduğundan Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinden saçılması nümerik olarak analiz edilecektir.

4.4.1.1. Nümerik Analizler



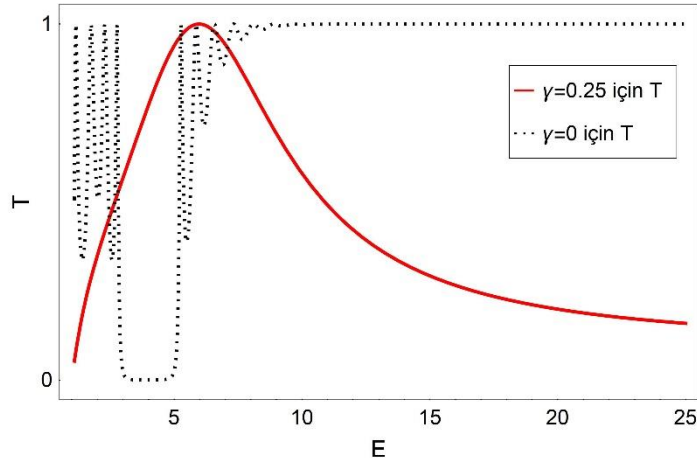
Şekil 4.32. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Woods-Saxon potansiyel enerji fonksiyonunun parçacığın enerjisine bağlı olması durumunda görelî spin-0 parçacıklarının saçılmasında birimsellik koşulunun sağlandığı Şekil 4.32’de gösterilmiştir. Burada, parametreler için $m = 1, V_0 = 4, a = 10, L = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri kullanılmıştır.



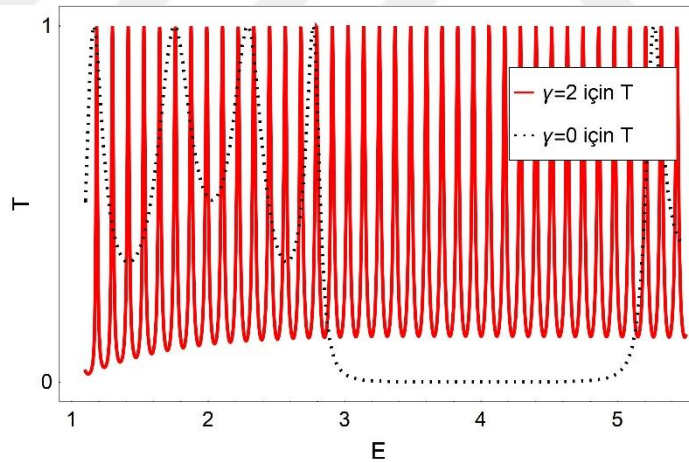
Şekil 4.33. $a = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinin genişliğini belirleyen parametrelerden biri olan a parametresi 2 seçildiğinde geçiş olasılık yoğunluğunun değişimi Şekil 4.33’de çizilmiştir. Enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli için geçiş rezonans sayısı olağan duruma göre azalmıştır.



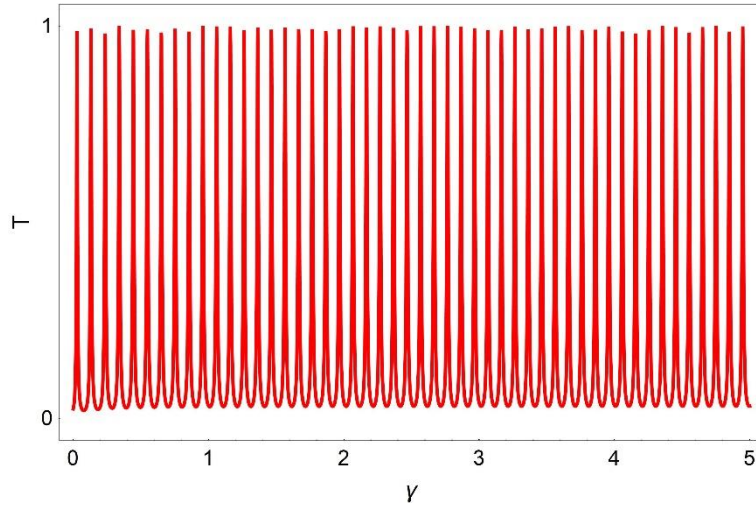
Şekil 4.34. $a = 10$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

a parametresi 10 seçildiğinde ise görelî spin-0 parçacıkların potansiyel engele sızamadıkları bölgede enerjiye bağlı durumda sızma gerçekleştiği Şekil 4.34’de görülmektedir. Bununla birlikte beklenildiği gibi parçacıkların enerjisi arttıkça olağan durumda potansiyel engelle çok az etkileşirken enerjiye bağlı durumda bu etkileşme her enerji değerinde gerçekleşmeye devam etmektedir.



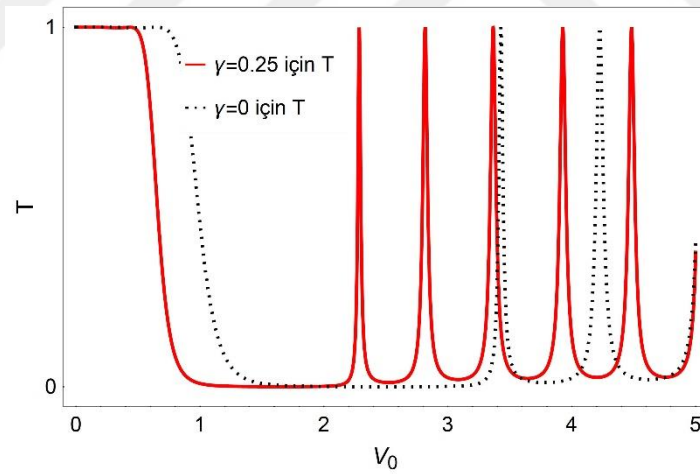
Şekil 4.35. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Potansiyel engelin genişliğini belirleyen a parametresinin aksine enerjiye bağlılığı ve yüksekliği ile ilgili γ parametresinin değişimi geçiş rezonans sayısını arttırdığı Şekil 4.35’den görülmektedir. Ayrıca olağan durumda $3 < E < 5$ değerleri arasında Klein-Gordon parçacıkları potansiyel engele nüfuz edemezken enerjiye bağlı durumda her enerji değerinde nüfuz etmiştir.



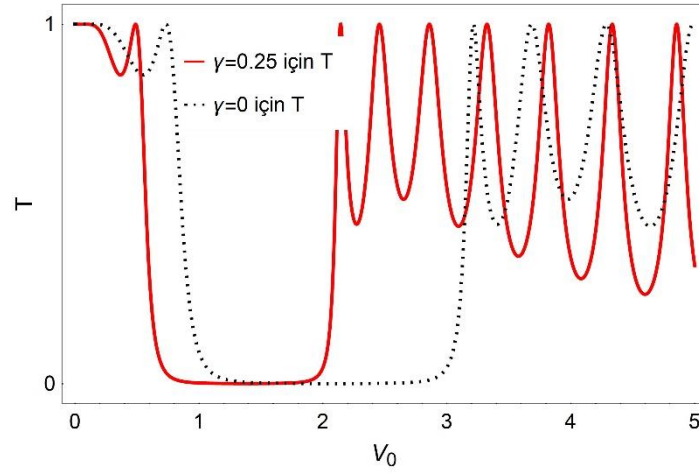
Şekil 4.36. Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

Potansiyel parametreleri, göreceli spin-0 parçacıkların enerjisi ve kütlesi $m = 1, V_0 = 4, a = 2, L = 2$ ve $E = 2$ alınarak Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı potansiyel engelden saçılmalarında geçiş olasılık yoğunluğuna γ parametresinin etkisi Şekil 4.36'da sunulmuştur. Parçacıkların tümünün geçebildiği değer sayısı artmıştır.



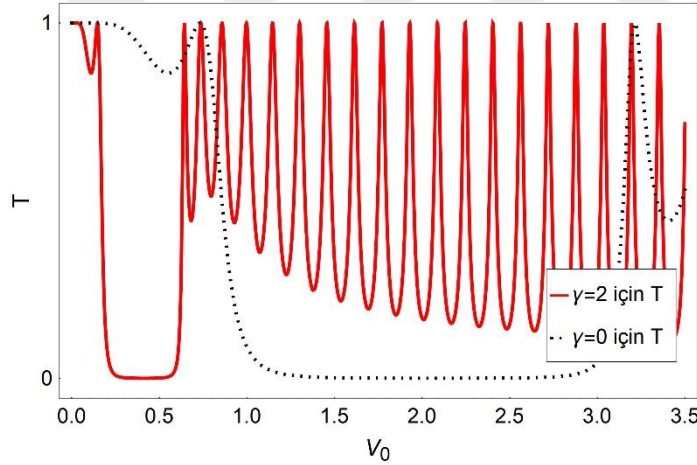
Şekil 4.37. $a = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Şekil 4.37'de potansiyel yüksekliğinin saçılmaya etkisi $m = 1, L = 2, E = 2, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ için elde edilmiştir. Klein-Gordon parçacıklarının bilinen Woods-Saxon potansiyel engeline nüfuz edemediği bölgede enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyel engeline nüfuz edebildikleri görülmektedir. Ayrıca geçiş rezonans sayısı da enerjiye bağlı durumda olağan duruma göre artmıştır.



Şekil 4.38. $a = 10$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Potansiyel genişliği arttırıldığında saçılma durumlarındaki değişim Şekil 4.38’de sunulmuştur. Potansiyel genişliğinin artması hem enerjiye bağlı hem de olağan durumda potansiyel engele nüfuz edilemeyen V_0 aralığının kaymasına neden olmuştur.



Şekil 4.39. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Son olarak γ parametresi 2 seçildiğinde potansiyel yüksekliği ile ilgili V_0 parametresine göre geçiş katsayısının değişimi Şekil 4.39’da verilmiştir. Enerjiye bağlı durumda geçiş rezonans sayısının oldukça arttığı ve potansiyel engele nüfuz edilemeyen aralığın çok azaldığı Şekil 4.39’dan görülmektedir. Ayrıca enerjiye bağlı potansiyel durumunda potansiyel engele sızmanın gerçekleşmediği bölge olağan duruma göre farklı bir aralığa taşınmıştır. Bu bölge $\frac{E-m}{1+\gamma E} \leq V_0 \leq$

$\frac{E+m}{1+\gamma E}$ aralığı ile belirlenmektedir.

4.4.2. Dirac Parçacıkları

Görelî spin-1/2 parçacıkların enerjiye bağılı Woods-Saxon potansiyelinden saçılması için 4.3.2 kesiminde izlenen yöntem takip edildiğinde geçiş ve yansıma katsayıları sırası ile,

$$T = \left| \left[\frac{C_{11}C_7F_2(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)-C_4C_{12}F_3(C_5F_2+C_6\bar{F}_5)}{C_{11}C_{12}F_3(C_2F_1+C_3\bar{F}_4)-C_7C_{10}F_1(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)} \right] \frac{C_{10}F_1}{C_{12}F_3} + \frac{C_{11}F_2}{C_{12}F_3} \right|^2, \quad (4.142)$$

$$R = \left| \left[\frac{C_{11}C_7F_2(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)-C_4C_{12}F_3(C_5F_2+C_6\bar{F}_5)}{C_{11}C_{12}F_3(C_2F_1+C_3\bar{F}_4)-C_7C_{10}F_1(C_8F_3+C_9\bar{F}_6)} \right] \right|^2, \quad (4.143)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$C_1 = ae^{-aL}(-e^{-aL})^\mu(1+e^{-aL})^{-\lambda}, \quad (4.144)$$

$$C_2 = \frac{-\mu}{e^{-aL}} + \frac{\lambda}{1+e^{-aL}}, \quad (4.145)$$

$$C_3 = \frac{(-\mu-\nu-\lambda)(-\mu+\nu-\lambda)}{1-2\mu}, \quad (4.146)$$

$$C_4 = ae^{-aL}(-e^{-aL})^{-\mu}(1+e^{-aL})^{-\lambda}, \quad (4.147)$$

$$C_5 = \frac{\mu}{e^{-aL}} - \frac{\lambda}{1+e^{-aL}}, \quad (4.148)$$

$$C_6 = \frac{(\mu-\nu-\lambda)(-\mu+\nu-\lambda)}{1+2\mu}, \quad (4.149)$$

$$C_7 = -a(1+e^{-aL})^{-2+\nu+\mu}(e^{-aL})^{1-\mu}, \quad (4.150)$$

$$C_8 = \frac{-\nu}{(e^{-aL})^{-1}} + \frac{\mu}{e^{-aL}(1+e^{-aL})^{-1}}, \quad (4.151)$$

$$C_9 = \frac{(1-\mu-\nu-\lambda)(-\mu-\nu+\lambda)}{1-2\nu}, \quad (4.152)$$

$$C_{10} = (-e^{-aL})^\mu(1+e^{-aL})^{-\lambda}, \quad (4.153)$$

$$C_{11} = (-e^{-aL})^{-\mu}(1+e^{-aL})^{-\lambda}, \quad (4.154)$$

$$C_{12} = (e^{aL})^\mu(1+e^{-aL})^{\mu+\nu}, \quad (4.155)$$

$$F_1 = F(-\mu-\nu-\lambda, -\mu+\nu-\lambda, 1-2\mu; -e^{-aL}), \quad (4.156)$$

$$F_2 = F(\mu-\nu-\lambda, \mu+\nu-\lambda, 1+2\mu; -e^{-aL}), \quad (4.157)$$

$$F_3 = F\left(1-\mu-\nu-\lambda, -\mu-\nu+\lambda, 1-2\nu; \frac{1}{1+e^{-aL}}\right), \quad (4.158)$$

$$\widetilde{F}_4 = \frac{dF_1}{dy}, \quad (4.159)$$

$$\widetilde{F}_5 = \frac{dF_2}{dy}, \quad (4.160)$$

$$\widetilde{F}_6 = \frac{dF_3}{dz}, \quad (4.161)$$

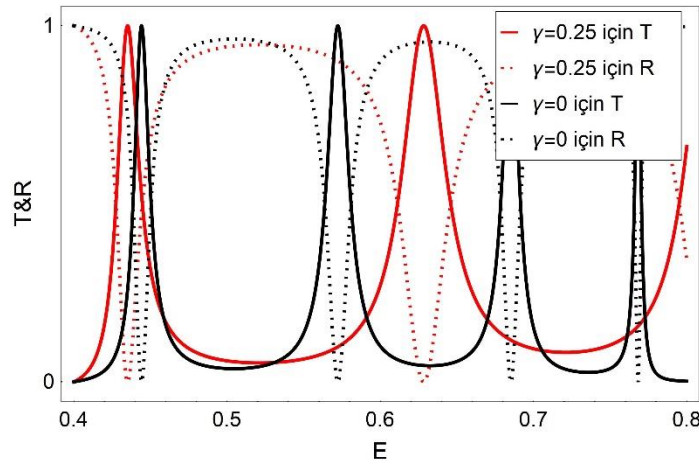
$$\lambda = \frac{iV_0(1+\gamma E)}{a}, \quad (4.162)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Saçılma durumlarını analitik olarak incelemek için geçiş (4.142) ve yansıma (4.143) olasılık yoğunlukları için elde edilen denklemlerde (4.138)-(4.140) ile (4.144)-(4.162) denklemleri yerine yazılmalıdır. Açıkça görüldüğü gibi bu ifadeler çok komplike ve analitik olarak incelemek oldukça zordur. Bu nedenle görelî spin-1/2 parçacıkların enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinden saçılması nümerik olarak analiz edilecektir.

4.4.2.1. Nümerik Analizler

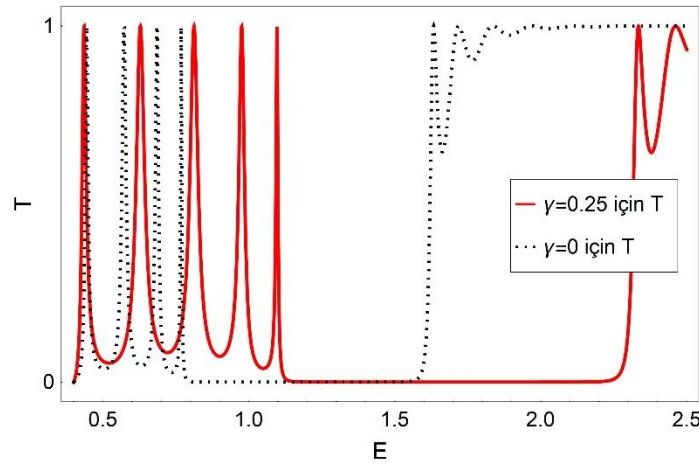
Görelî spin-1/2 parçacıkların enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılması durumunda $T + R = 1$ birimsellik koşulunun sağlandığı $m = 0.4, V_0 = 1.2, a = 2, L = 10, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri kullanılarak Şekil 4.40'da analiz edilmiştir.



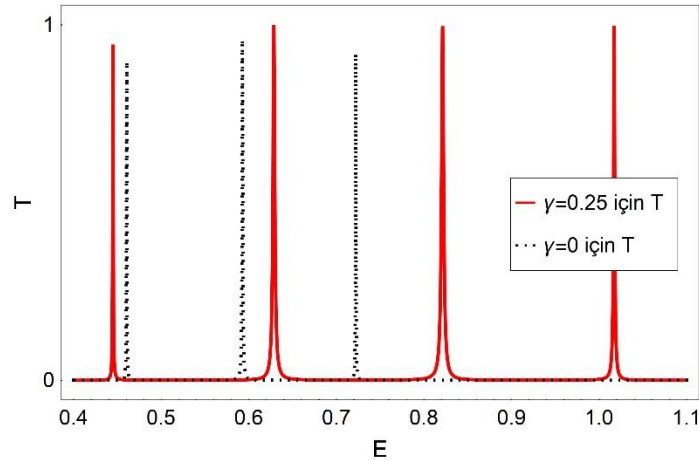
Şekil 4.40. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

Dirac parçacıklarının enerjisinin geçiş olasılık yoğunluğuna etkisi potansiyel engelin genişliği ile alakalı a parametresinin farklı iki değeri ve hem potansiyel engelin genişliği hem de enerjiye bağlılığı ile ilgili γ parametresi için sırasıyla Şekil 4.41, Şekil 4.42 ve Şekil 4.43'de sunulmuştur. Şekil 4.41 ve Şekil 4.42'den potansiyel engelin genişliği arttığında görelî spin-1/2

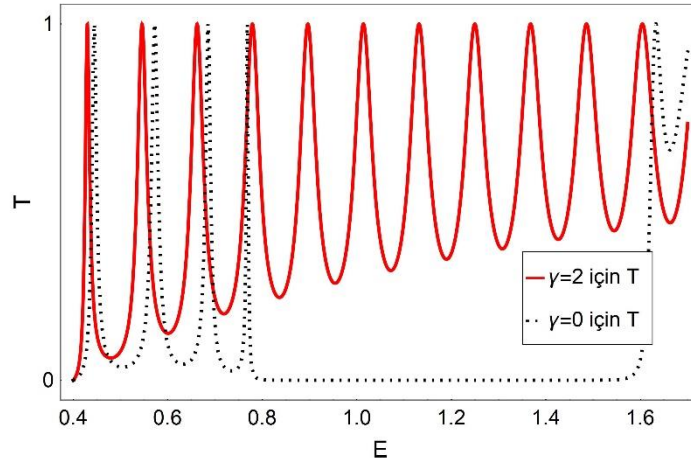
parçacıkların enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeline nüfuz edemedikleri enerji aralığı ortadan kalkmıştır. Bununla birlikte potansiyel engelin enerjiye bağlılığı geçiş rezonans sayısını arttırmıştır. Şekil 4.43’de ise Woods-Saxon potansiyelinin enerjiye bağlılığını belirleyen ve aynı zamanda yüksekliğine de katkıda bulunan γ parametresi 2 değerini aldığında geçiş olasılık yoğunluğunun parçacığın enerjisine göre değişimi incelenmiştir. Bu grafikten görüldüğü gibi göreceli spin-1/2 parçacıklarının potansiyel engele nüfuz edemedikleri geniş enerji aralığı ortadan kalkmıştır. Analitik olarak enerjiye bağlı durumda bu aralık $\frac{V_0-m}{1-\gamma V_0} \leq E \leq \frac{V_0+m}{1-\gamma V_0}$ ile belirlenir. Bununla birlikte geçiş rezonans sayısı artmıştır.



Şekil 4.41. $a = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

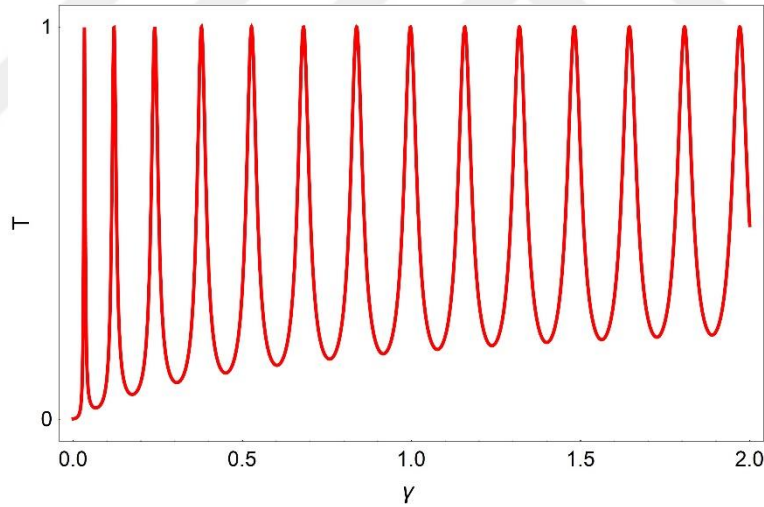


Şekil 4.42. $a = 5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.



Şekil 4.43. $\gamma = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının enerjiye göre değişimi.

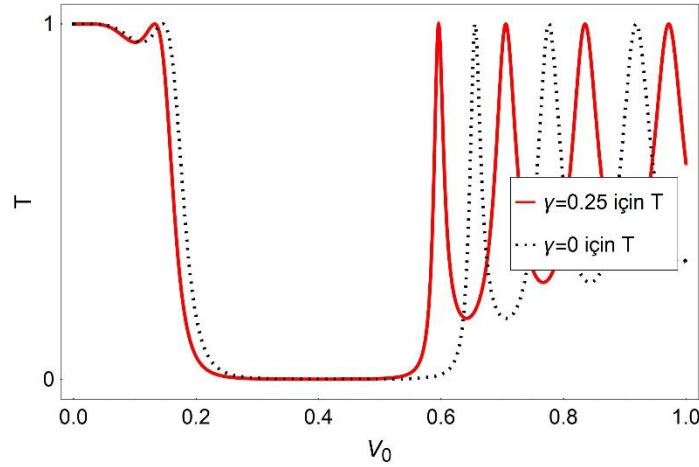
Enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyel engelinden Dirac parçacıklarının saçılmasına γ parametresinin etkisi $m = 0.4, V_0 = 1.2, a = 2, L = 10$ ve $E = 0.8$ değerleri kullanılarak Şekil 4.44'de araştırılmıştır. Geçiş rezonanslarının γ parametresinin belirli değerlerinde olduğu sunulan grafikten açıkça görülmektedir.



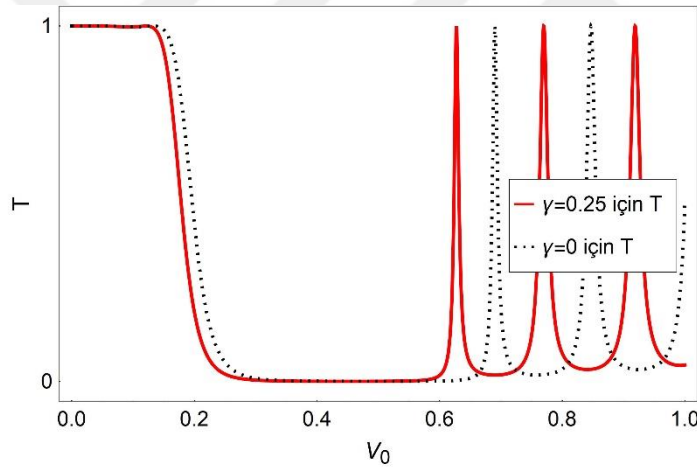
Şekil 4.44. Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının γ parametresine göre değişimi.

Enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyelinin yüksekliği ile ilgili V_0 parametresinin geçiş olasılık yoğunluğuna etkisi 4.45 ve 4.46 şekillerinde $m = 0.2, L = 10, E = 0.4, \gamma = 0$ ve $\gamma = 0.25$ değerleri ile potansiyel engelin genişliği parametresinin 2 ve 5 değerlerine göre incelenmiştir. Şekil 4.45'den görüldüğü gibi Dirac parçacıklarının potansiyel engele nüfuz edemedikleri V_0 aralığı bir miktar azalmıştır. Bu aralık $\frac{E-m}{1+\gamma E} \leq V_0 \leq \frac{E+m}{1+\gamma E}$ ifadesi ile uyushmaktadır. Şekil 4.46'da

ise potansiyel engelin genişliği arttırıldığında geçiş rezonans sayısının hem bilinen Woods-Saxon hem de enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli için arttığı görülmektedir.

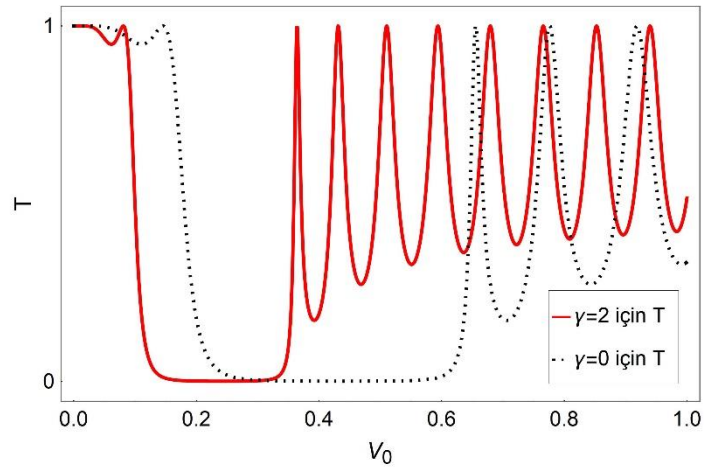


Şekil 4.45. $a = 2$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.



Şekil 4.46. $a = 5$ için Dirac parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

Son olarak, $m = 0.2, a = 2, L = 10, E = 0.4, \gamma = 0$ ve $\gamma = 2$ değerleri için çizilen geçiş olasılık yoğunluğunun potansiyel engelin yüksekliğine göre değişimi Şekil 4.47'de sunulmuştur. Şekil 4.47'den görüldüğü gibi Dirac parçacıklarının potansiyel engele nüfuz edemediği V_0 aralığı hem azalmış hem de farklı bir bölgeye kaymıştır. Ayrıca aynı V_0 aralığında geçiş rezonans sayısının arttığı açık olarak görülmektedir.



Şekil 4.47. $\gamma = 2$ için Klein-Gordon parçacıklarının enerjiye bağlı Woods-Saxon potansiyeli tarafından saçılmasının V_0 parametresine göre değişimi.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında görelî ve spin-0 ve spin-1/2 parçacıkların enerjiye bağılı potansiyelden saçılması araştırılmıştır. Fiziğin farklı alanlarında sıklıkla kullanılan ve literatürde iyi bilinen basamak, bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyellerinin enerjiye bağılı formları oluşturulmuştur. Bu enerjiye bağılı potansiyeller varlığında Klein-Gordon ve Dirac denklemleri standart yöntem kullanılarak çözülmüştür. Çözümlerden elde edilen saçılma dalga fonksiyonları ve her bir etkileşme için ayrı ayrı betimlenen fiziksel sınır koşulları kullanılarak geçiş ve yansıma katsayıları analitik olarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar için nümerik analizler yapılmıştır. Geçiş ve yansıma olasılık yoğunlukların potansiyelin parçacığın enerjisine bağılı olması durumunda nasıl değiştiği, bu değişimin potansiyelin diğer parametreleri ve parçacığın kütlesine nasıl bağılı olduğu araştırılmıştır. Sunulan tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

1. Enerjiye bağılı basamak, bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyelinden saçılan Klein-Gordon ve Dirac parçacıkları birimsellik ($T + R = 1$) koşulunu sağlamıştır.
2. Enerjisi potansiyel engelin yüksekliğinden daha küçük olan bir parçacığın potansiyel engele sızma olasılığı 1 olabilir. Buna geçiş rezonansları denir. Enerjiye bağılı durumda geçiş rezonans koşulları elde edilmiştir:

- a. Basamak potansiyelinden saçılan;

- i. Klein-Gordon parçacıkları için $E = \frac{V_0}{2 - \gamma V_0}$,
- ii. Dirac parçacıkları için $\sqrt{\frac{(E - V_0(1 + \gamma E) - m)(E + m)}{(E - V_0(1 + \gamma E) + m)(E - m)}} = 1$.

- b. Bariyer potansiyelinden saçılan;

- i. Klein-Gordon parçacıkları için $E_n = \frac{V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4a^2}}}{1 - \gamma V_0}$,
- ii. Dirac parçacıkları için $E_n = \frac{V_0 + \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4a^2}}}{1 - \gamma V_0}$.

- c. Hulthen potansiyelinden saçılan;

- i. Klein-Gordon parçacıkları için $|q^{2\mu}[(\sigma_1 + \sigma_3)F_1 F_2 + \sigma_2 F_2 F_3 + \sigma_4 F_4 F_1]|^2 = 0$,
- ii. Dirac parçacıkları için $|\varepsilon_1(\varepsilon_2 F_1 F_2 + \varepsilon_3 F_3 F_4)|^2 = 0$.

- d. Woods-Saxon potansiyelinden saçılan;

- i. Klein-Gordon parçacıkları için $|C_{11}C_7F_2(C_8F_3 + C_9\widetilde{F}_6) - C_4C_{12}F_3(C_5F_2 + C_6\widetilde{F}_5)|^2 = 0$,
- ii. Dirac parçacıkları için $|C_{11}C_7F_2(C_8F_3 + C_9\widetilde{F}_6) - C_4C_{12}F_3(C_5F_2 + C_6\widetilde{F}_5)|^2 = 0$.

3. Potansiyelin enerjiye bağılılığını belirleyen γ parametresinin aldığı değerlerin ilk rezonans enerjisini ve rezonans sayısını değiştirdiği gözlenmiştir.

4. Dirac parçacıklarının basamak potansiyelinden saçılması problemin karşımıza çıkan Klein-Paradoksunun enerjiye bağlı potansiyel varlığında da gerçekleştiği tespit edilmiştir. Yansıyan parçacığın gelen parçacıktan daha fazla olduğu Klein paradoksunun gerçekleştiği enerji değerleri $E < \frac{V_0 - m}{1 - \gamma V_0}$ olarak hesaplanmıştır. Bu koşul $\gamma = 0$ için bilinen sonuca indirgenebilmektedir.
5. Enerjiye bağlı bariyer potansiyelin genişliği ne kadar büyük olursa olsun geçiş olasılık yoğunluğunun sıfır olmaması durumunun (ki buna Klein sızma (tünelleme) denir.) enerjiye bağlı potansiyel varlığında da geçerliliğini koruduğu görülmüştür.
6. Enerjiye bağlı bariyer potansiyelinin genişliği çok büyük alındığı durumda elde edilen sonuçlar basamak potansiyelinden elde edilen sonuçlara indirgenememiştir. Bunun nedeni olarak bariyer potansiyelinin simetrik, basamak potansiyelinin asimetrik olması olduğu düşünülmüştür.
7. Olağan bariyer, Hulthen ve Woods-Saxon potansiyellerine Klein-Gordon ve Dirac parçacıkların sızma gerçekleştiremediği enerji aralığı, potansiyelin enerjiye bağlı olması durumunda küçülmüş ve aralığın yeri değişmiştir. Olağan durumda potansiyel engele sızma gerçekleştirilemezken enerjiye bağlı durumda aynı bölgede geçiş rezonansları gerçekleşmiştir.
8. Potansiyel parametrelerinin ve parçacığın kütlesinin enerjiye bağlı potansiyelden Klein-Gordon ve Dirac parçacıklarının saçılmasında geçiş ve yansıma olasılık yoğunluklarını etkilediği tespit edilmiştir.
9. Enerjiye bağlı basamak, bariyer ve Woods-Saxon potansiyelinden saçılan Klein-Gordon ve Dirac parçacıkları için tam yansıma ($T = 0$ ve $R = 1$) koşulu $\frac{E - m}{1 + \gamma E} \leq V_0 \leq \frac{E + m}{1 + \gamma E}$ biçiminde elde edilmiştir.
10. Elde edilen tüm sonuçlar $\gamma = 0$ için bilinen sonuçlara indirgene bildiği görülmüştür.

Gerek saçılma probleminin güncelliğini koruması gerekse enerjiye bağlı potansiyel kavramının fiziğin farklı alanlarında aktif bir şekilde kullanılması bu çalışmanın gelecek çalışmalara kaynaklık edeceğine işaret etmektedir. Bununla birlikte, 3-boyutlu fiziksel sistemlerde saçılma probleminin enerjiye bağlı potansiyel varlığında tartışılmasının önemli katkılar sunacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Yukawa, H., On the Interaction of Elementary Particles I. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **1935**, 17, 48-57. Yukawa, H., Sakata, S., On the Interaction of Elementary Particles II. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **1939**, 19, 1084-1093.
- [2]. Woods. R. D., Saxon, D. S., Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering. *Phys. Rev.* **1954**, 95, 577-578.
- [3]. Hulthen, L., Über die Eigenlösungen der Schrödingergleichung des Deuterons. *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, **1942**, 28, 1-12.
- [4]. Flugge, S., *Practical Quantum Mechanics*, 2nd ed.; Springer-Verlag, Berlin, 1992. Newton, R. G., *Scattering Theory of Waves and Particles.*; Berlin: Springer, 1982.
- [5]. Alonso, L. M., Schrödinger spectral problems with energy-dependent potentials as sources of nonlinear Hamiltonian evolution equations. *J. Math. Phys.* **1980**, 21, 2342-2349.
- [6]. Nikšić, T., Vretenar, D., Ring, P., Relativistic nuclear energy density functionals: Adjusting parameters to binding energies. *Phys. Rev. C* **2008**, 78, 034318, pp19.
- [7]. Ikot, A. N., Hassanabadi, H., Maghsoodi, E., Zarrinkamar, S., D-Dimensional Dirac Equation for Energy-Dependent Pseudoharmonic and Mie-type Potentials via SUSYQM. *Commun. Theor. Phys.* **2014**, 61 (4), 436-446.
- [8]. Schulze-Halberg, A., Darboux Transformations for Energy-Dependent Potentials and the Klein-Gordon Equation. *Math. Phys. Anal. Geom.* **2013**, 16, 179-183.
- [9]. Yekken, R., Lassaut, M., Lombard, R. J., Bound States of Energy Dependent Singular Potentials. *Few-Body Syst.* **2013**, 54, 2113-2124.
- [10]. Barakat, T., Alhendi, H. A., Generalized Dirac Equation with Induced Energy Dependent Potential via Simple Similarity Transformation and Asymptotic Iteration Methods. *Found. Phys.* **2013**, 43, 1171-1181.

- [11]. Nabiev, A. A., On a Fundamental System of Solutions of the Matrix Schrödinger Equation with a Polynomial Energy-Dependent Potential. *Math. Meth. Appl. Sci.* **2010**, 33, 1372-1383.
- [12]. Gautam, M. S., Role of Neutron Transfer in the Enhancement of Sub-Barrier Fusion Excitation Functions of Various Systems Using an Energy-Dependent Woods-Saxon Potential. *Phys. Rev. C* **2014**, 90, 024620, pp.9. Gautam, M. S., Isotopic dependence of fusion enhancement of various heavy ion systems using energy dependent Woods-Saxon potential. *Nucl. Phys. A* **2015**, 933, 272-289.
- [13]. Wolfram Research Inc., Mathematica 9.0, **2012**.
- [14]. Kennedy, P., The Woods-Saxon Potential in the Dirac Equation, *J. Physics A: Math. Gen. Phys.* **2002**, 35, 689-698.
- [15]. Kennedy, P., Dombey, N., Low Momentum Scattering in the Dirac Equation. *J Phys. Math. Gen.* **2002**, 35, 6645-6657.
- [16]. You, J., Guo, Y. Yu, Y., Jin, S. W., Transmission Resonance for a Dirac Particle in a One-Dimensional Hulthen Potential. *Cent. Eur. J. Phys.* **2009**, 7 (1), 168-174.
- [17]. Candemir, N., Bayrak, O., Massive Dirac equation in asymmetric Hulthen potential. *J. Math. Phys.* **2013**, 54, 042104.
- [18]. Villalba, V. M., Gonzalez-Arraga, L. A., Tunneling and Transmission Resonances of a Dirac Particle by a Double Barrier. *Phys. Scr.* **2010**, 81, 025010, pp. 6.
- [19]. Yazarloo, B. H., Mehraban, H., The Relativistic Transmission and Reflection Coefficients for Woods-Saxon Potential. *Acta Phys. Pol. A* **2016**, 129, 1089-1092.
- [20]. Rojas, C., Villalba, V. M., Scattering of a Klein-Gordon Particle by a Woods-Saxon Potential. *Phys. Rev. A* **2005**, 71, 052101.
- [21]. Villalba, V.M., Rojas, C., Scattering of a Relativistic Scalar Particle by a Cusp Potential. *Phys. Lett. A* **2007**, 362, 21-25.

- [22]. Wei, G. F., Long, Liu, X. Y., Chen, W. L., The Relativistic Scattering States of the Hulthen Potential with an Improved New Approximate Scheme to the Centrifugal Term. *Int. J. Theor. Phys.* **2009**, 48, 1649-1658.
- [23]. Hassanabadi, H., Maghsoodi, E., Zarrinkamar, S., Salehi, N., Scattering of Relativistic Spinless Particles by the Woods-Saxon Potential. *Few-Body Syst.* **2013**, 54, 2009-2016.
- [24]. Wei, G. F., Long, C. Y., Dong, S. H., The Scattering of the Manning-Rosen Potential with Centrifugal Term. *Phys. Lett. A* **2008**, 372, 2592-2596.
- [25]. Arda, A., Aydogdu, O., Sever, R., Scattering and Bound State Solutions of Asymmetric Hulthen Potential. *Phys. Scr.* **2011**, 84, 025004.
- [26]. Ferreira, E. M., Sesma, J., One Dimensional Quantum Scattering by a Parabolic Odd Potential. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2012, 45, 415302, pp. 14.
- [27]. Sogut, K., Havare, A., Transmission Resonances in the Duffin-Kemmer-Petiau Equation in (1+1) Dimensions for an Asymmetric Cusp Potential. *Phys. Scr.* **2010**, 82, 045013, pp. 6.
- [28]. Rizov, V. A., Sazdjian, H., Todorov, I. T., On the Relativistic Quantum Mechanics of Two Interacting Spinless Particles. *Ann. Phys.* **1985**, 165, 59-97.
- [29]. Todorov, I. T., Quasipotential Equation Corresponding to the Relativistic Eikonal Approximation. *Phy. Rev. D* **1971**, 3, 2351-2356.
- [30]. Lepage, G. P., Analytic Bound-State Solutions in a Relativistic Two-Body Formalism with Applications in Muonium and Positronium. *Phys. Rev. A* **1977**, 16, 863-876.
- [31]. Gunther, U., Samsonov, B. F., Stefani, F., Globally Diagonalizable α^2 -Dynamo Operator, SUSY QM and the Dirac Equation. *J. Phys. A.* **2007**, 40, F169-f176.
- [32]. Li, Y., Some Water Wave Equations and Integrability. *J. Nonlin. Math. Phys.* **2005**, 12, 466-481.
- [33]. Zhang, J. E., Li, Y., Bidirectional Solitons on Water. *Phys. Rev. E* **2003**, 67, 016306, pp. 8.
- [34]. Crater, H. W., van Alstine, P., Two-Body Dirac Equations for Particles Interacting Through World Scalar and Vector Potentials. *Phys. Rev. D.* **1987**, 36, 3007-3036.

- [35]. Mourad, J., Sazdjian, H., The Two-Fermion Relativistic Wave Equations of Constraint Theory in the Pauli-Schrödinger form. *J. Math Phys.* **1994**, 35, 6379-6406.
- [36]. Belyavskii, V. ,I., Goldfarb, M. V., Kopaev, Y. V., Binding Energy of Coulomb Acceptors in Quantum-Well Sytems. *Fiz. The. Poluprovodn.* **2007**, 31, 1095-1099.
- [37]. Milanovic, V., Ikonic, Z., On the Optimization of Resonant Intersubband Nonlinear Optical Susceptibilities in Semiconductor Quantum Wells. *IEEE J. Quantum Electron.* **1996**, 32, 1316-1323.
- [38]. Pavlov, B. S., Strepetov, A. V., Exactly Solvable Model of Electron Scattering by an Inhomogeneity in a Thin Conductor. *Theor. Math. Phys.* **1992**, 90, 152-156.
- [39]. Tomic, S., Milanovic, V., Ikonic, Z., Optimization of Intersubband Resonant Second-Order Susceptibility in Asymmetric Graded $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ Quantum Wells Using Supersymmetric Quantum Mechanics. *Phys. Rev. B* **1997**, 56, 1033-1036.
- [40]. De Sanctis, M., Quintero, P., A New Energy-Dependent Quark Interaction from a Tamm-Dancoff Reduction of an Effective Field Theory Quark Model. *Eur. Phys. J. A.* **2009**, 39, 145-148.
- [41]. Ernst, D. J., Londergan, J. T., Moniz, E. J., Thaler, R. M., Energy-Dependent Separable Potentials. *Phys. Rev. C* **1974**, 10, 1708-1720.
- [42]. Dasso, C. H., Landowne, S., Pollarolo, G., Comment on Energy Dependent Barriers For Heavy-Ion Fussion. *Phys. Lett. B.* **1989**, 217, 25-27.
- [43]. van der Mee, C., Pivovarchik, V., Inverse Scattering for a Schrödinger Equation with Energy-Dependent Potential. *J. Math. Phys.* **2001**, 42, 158-181.
- [44]. van der Mee, C., Pivovarchik, V., Some Properties of the Eigenvalues of a Schrödinger Equation with Energy-Dependent Potential. *Cont. Amth.* **2002**, 307, 305-310.
- [45]. Formánek, J., Lombard, R. J., Mareš, J., Wave Equations with Energy-Dependent Potentials. *Czech. J. Phys.* **2004**, 54, 289-315.
- [46]. Lombard, R. J., Mares, J., Volpe, C., Wave Equation with Energy-Dependent Potentials for Confined Systems. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **2007**, 34, 1-11.

- [47]. Lin, J., Li, Y. S., Qian, X. M., The Darboux Transformation of the Schrödinger Equation with an Energy-Dependent Potential. *Phys. Lett. A* **2007**, 362, 212-214.
- [48]. García-Martínez, J., García-Ravelo, J., Peña, J. J., Schulze-Halberg, A., Exactly Solvable Energy-Dependent Potentials. *Phys. Lett. A* **2009**, 373, 3619-3623.
- [49]. Schulze-Halberg, A., Exact Quantization Formula for Affine Linearly Energy-Dependent Potentials. *Cent. Eur. J. Phys.* **2011**, 9, 57-64.
- [50]. Hassanabadi, H., Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., Exact Solutions of D-Dimensional Schrödinger Equation for an Energy-Dependent Potential by NU Method. *Commun. Theor. Phys.* **2011**, 55, 541-544.
- [51]. Yekken, R., Lassaut, M., Lombard, R. J., Applying Supersymmetry to Energy Dependent Potentials., *Ann. Phys.* **2013**, 318, 195-206.
- [52]. Eshghia, M., Mehraban, H., Non-Relativistic Continuous States in Arbitrary Dimension for a Ring-Shaped Pseudo-Coulomb and Energy-Dependent Potentials. *Math. Meth. App. Sci.* **2016**, 39, 1599-1606.
- [53]. Schulze-Halberg, A., Roy, P., Pseudo-Hermitian and Symmetric Quantum Systems with Energy-Dependent Potentials: Bound State Solutions and Energy Spectra. *Ann. Phys.* **2017**, 380, 78-92.
- [54]. Hassanabadi, H., Maghsoodi, E., Oudi, R., Zarrinkamar, S., Rahimov, H., Exact Solution Dirac Equation for an Energy-Dependent Potential. *Eur. Phys. J. Plus* **2012**, 127, 120, pp.9.
- [55]. Benchikha, A., Chetouani, L., Spinless Relativistic Particle in Energy-Dependent Potential and Normalization of the Wave Function. *Cent. Eur. J. Phys.* **2014**, 12, 392-405.
- [56]. Klein, O., Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der Relativistischen Dynamik von Dirac. *Z. Phys.* **1929**, 53, 157-165.
- [57]. Grib, A. A., Mamayev, S. G., Mostepanenko, V. M., *Vacuum Effects in Strong Fields*. Friedmann: St. Petersburg, 1994.
- [58]. Greiner, W., Muller, B., Rafelski, J., *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*. Springer: Berlin, 1985.

- [59]. Gasiorowicz, S., *Quantum Physics*. 3rd ed.; Wiley International Edition, 2003.
- [60]. Dosch, H. G., Jensen, J. H. D., Müller, V. F., Einige Bemerkungen Zum Klein's Chen Paradoxon. *Phys. Norv. J.* **1971**, 5, 151.
- [61]. Su, R. K., Siu, G. G., Chou, X., Barrier Penetration and Klein Paradox. *J. Phys. A: Math. Gen.* **1993**, 26, 1001-1005.
- [62]. Dombey, N., Calogeracos, A., Seventy Years of Klein Paradox. *Phys. Rep.* 1999, 315, 41-58.
- [63]. Varshni, Y.P., Eigenenergies and Oscillator Strengths for the Hulthen Potential. *Phys. Rev. A* **1990**, 41, 4682-4689.
- [64]. Bayrak, O., Boztosun, I., Bound State Solutions of the Hulthen Potential by Using the Asymptotic Iteration Method. *Phys. Scr.* **2007**, 76, 92-96.
- [65]. Haouat, S., Chetouani, L., Approximate Solutions of Klein-Gordon and Dirac Equation in the Presence of the Hulthen Potential. *Phys. Scr.* **2008**, 77, 025005.
- [66]. Ikhdair, S. M., Sever, R., Approximate Bound State Solutions of Dirac Equation with Hulthen Potential Including Coulomb-Like Tensor Potential. *App. Math. Comp.* **2010**, 216, 911-923.
- [67]. Guo, J. Y., Fang, X. Z., Scattering of a Klein-Gordon particle by a Hulthen potential. *Can. J. Phys.* **2009**, 87, 1021-1024.
- [68]. Zhang, M. C., Scattering and Transmission Resonances in One-Dimensional Hulthen Potential Barrier. *Int. J. Theor. Phys.* **2009**, 48, 1688-1694.
- [69]. Badalov, V. H., Ahmadov, H. I., Ahmadov, A. I., Analytical Solutions of the Schrödinger Equation with the Woods-Saxon Potential for Arbitrary l-State. *Int. J. Mod. Phys. E.* **2009**, 18, 631-641.
- [70]. Badalov, V. H., Ahmadov, H. I., Badalov, S. V., Any l-State Analytical Solutions of the Klein-Gordon Equation for the Woods-Saxon Potential. *Int. J. Mod. Phys. E.* **2010**, 19, 1463-1475.
- [71]. Aydogdu, O., Sever, R., Pseudospin and Spin Symmetry in the Dirac Equation with Woods-Saxon Potential and Tensor Potential. *Eur. Phys. J. A* **2010**, 43, 73-81.

- [72]. Villalba, V. M., Rojas, C., Bound States of the Klein-Gordon Equation in the Presence of Short Range Potential. *Int. J. Mod. Phys. A* **2006**, 21, 313–325.
- [73]. De Leo, S., Rotelli, R. P., Barrier Paradox in the Klein Zone. *Phys. Rev. A* **2006**, 73, 042107.
- [74]. Calogeracos, A., Dombey, N., History and Physics of the Klein Paradox, *Contemp. Phys.* **1999**, 40, 313-321.
- [75]. Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B., *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhauser: Basel, 1988.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Hakan TİLAVER
Doğum Tarihi : 12 Aralık 1990
E - mail : hakantilaver@hotmail.com
Öğrenim Durumu : Yüksek Lisans

<u>Derece</u>	<u>Bölüm/Program</u>	<u>Üniversite</u>	<u>Yıl</u>
<u>Lisans</u>	<u>Fizik Bölümü</u>	<u>İstanbul Üniversitesi</u>	<u>2009-2013</u>
<u>Yüksek Lisans</u>	<u>Fizik Anabilim Dalı</u>	<u>Mersin Üniversitesi</u>	<u>2015-2019</u>
<u>Doktora</u>			

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Hakan TİLAVER, Oktay AYDOĞDU, Mustafa SALTİ, “Transmission resonances of relativistik particles in view of energy-dependent potentials”, (Sözlü Bildiri), 1st. International Meditarrenaen Science and Engineering Congress (IMSEC), Çukurova Üniversitesi, Adana, Türkiye, 2016.