

34717

T.C
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

34717

SONLU ELEMAN METODU

Şerife KARAKAYA

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR

T.C. YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTANBUL, 1994

İçindekiler

GİRİŞ	1
1.1 Sonlu Eleman Metodunda Temel Kavramlar	1
1.2 Faaliyet Alanı	2
II. BÖLGENİN PARÇALANMASI	4
2.1 Sonlu Elemanların Tipleri	4
2.1.1 Bir Boyutlu Elemanlar	4
2.1.2 İki Boyutlu Elemanlar	5
2.1.3 Üç Boyutlu Elemanlar	5
2.2 Bölgenin Elemanlara Bölünmesi	6
2.3 Dügümlerin Etiketlenmesi	9
2.4 Özet	10
III. LİNEER ENTERPOLASYON POLİNOMLARI	12
3.1 Bir Boyutlu Simpleks Eleman	12
3.2 İki Boyutlu Simpleks Eleman	15
3.3 Üç Boyutlu Simpleks Eleman	19
3.4 Vektörel Büyüklükler İçin Enterpolasyon	22
3.5 Yerel Koordinat Sistemleri	23
3.5.1 Bir Boyutlu Eleman	25
3.5.2 Alan Koordinatları	26
3.5.3 Hacim Koordinatları	28
3.6 Enterpolasyon Polinomunun Özellikleri	28
3.6.1 Yakınsaklık	29
3.6.2 Süreklilik	30
IV. PARÇALANMIŞ BİR BÖLGE İÇİN ENTERPOLASYON POLİNOMLARI	32
4.1 Skaler Büyüklükler	32
4.2 Vektörel büyüklükler	35
4.3 Özet	36
V. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ENTERPOLASYON POLİNOMLARI	37
5.1 Bir Çubuktaki Isı İletimiyle İlgili Bir Örnek	37
5.2 Örnek Problemin Tekrar İncelenmesi	41
5.3 Sonlu Eleman Denklemleri : Alan Problemleri	42
VI. KONVEKSİYON VE KONDÜKSİYON YOLUYLA ISI TRANSFERİ	44
6.1 Isı Transfer Denklemleri	44
6.2 Bir Boyutlu Isı Transferi	45
SONUÇLAR	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde ve çalışmalarımın yönlendirilmesinde, yardımcı olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hikmet ÇAĞLAR'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında, yardımlarını esirgemeyen tüm arkadaşlarıma, özellikle de Araştırma Görevlisi arkadaşım Sayın Reşat KÖŞKER'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Şerife KARAKAYA

HAZİRAN, 1994

ÖZET

Sonlu eleman metodu, özellikle fizik ve mühendislikte karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik bir işlemdir. Sonlu eleman metodunda temel kavram; sıcaklık, basınç veya yer değiştirme gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün, sonlu sayıdaki alt bölgeler üzerinde tanımlanan parçalı sürekli fonksiyonlardan oluşan, diskrit bir model yardımıyla tahmin edilmesidir.

Sonlu eleman metodunun günümüzdeki uygulama alanı oldukça geniştir ve diferansiyel denklemlerle ifade edilebilen, fiziksel problemlerin tamamını içerir.

ABSTRACT

The finite element method is numerical procedure for solving the differential equations of physics and engineering. The fundamental concept of the finite element method is that any continuous quantity, such as temperature, pressure, or displacements, can be approximated by a discrete model composed of set of piecewise continuous defined over a finite number of subdomains.

The present-day application of the finite element method is very extensive and it includes all the physical problems that are governed by differential equations.

I

GİRİŞ

Sonlu eleman metodu, fizik ve mühendislikteki diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik bir işlemdir. Metodun doğuşu, 1950 yılının başında endüstride olmuştur ve ilk olarak 1956' da Turner, Clough, Martin ve Topp' un yayınlarında görülmüştür. Bu yayınlar başka araştırmacılarca da teşvik edilmiş ve teknikle ilgili bir çok yayında metodun mekanikteki uygulamaları tartışılmıştır. Teorik anlamda önemli bir adım, 1963' te Melosh'un sonlu eleman metodunun, aslında iyi bilinen Raleigh-Ritz işleminin bir varyasyonu olduğunu göstermesiyle atılmıştır. Yapısal problemlerde metod, sistemin potansiyel enerjisini minimize ederek lineer denge denklemlerinin bir kümesini üretir.

Sonlu eleman metodu ile minimizasyon işlemi arasındaki ilişki, metodun mühendisliğin diğer alanlarında kullanılmasını da mümkün kılar. Metod, Laplace veya Poisson denklemleriyle ifade edilebilen problemlere uygulanır. Çünkü; bu denklemler, bir fonksiyonelin minimizasyonu ile yakından ilgilidir. İlk yayınlar (Zienkiewicz ve Cheung, 1965), (Visser, 1965) ve (Wilson ve Nickel, 1965), sonlu eleman metodunun iletim ısı transferine uygulanışını gösterdi. Ardından akışkanlar mekaniğine uygulandı.

Diğer araştırmacılar (Szabo ve Lee, 1969), (Zienkiewicz, 1971), yapısal mekanik, ısı transferi ve akışkanlar mekaniği ile ilgili eleman denklemlerinin aynı zamanda, Galerkin metodu veya en küçük kareler yaklaşımı gibi bir ağırlıklı kalan işlemi kullanarak da çıkarılabildiğini gösterdiklerinde, sonlu eleman metodunun uygulama alanı genişlemiştir. Bu bilgi, sonlu eleman metodunun herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanabilmesini mümkün kıldığı için, teoriye önemli bir katkıdır. Daha genel teorik bir ilke, fiziksel problemin fonksiyonel formülasyonunun gerekliliğini ortadan kaldırır.

Sonlu eleman metodu, yapısal problemleri çözen nümerik bir işlemken, 15 yıllık bir zaman içerisinde, bir diferansiyel denklemi veya diferansiyel denklemler sistemini çözen genel bir nümerik işlem olmuştur. Bu ilerleme, yüksek hızlı dijital bilgisayarların gelişmesiyle başarılmıştır. Dijital bilgisayarlar, gereken bir çok hesaplamaların hızlı bir şekilde yapılmasını sağladı. Uzay keşfi, temel araştırmalar için para sağladı ve çok amaçlı bilgisayar programlarının gelişmesini teşvik etti. Uçaklar, füzeler, uzay kapsülleri ve benzerlerinin dizaynleri, teori için uygulama alanı oluşturdu.

1.1 SONLU ELEMAN METODUNDA TEMEL KAVRAMLAR

Sonlu eleman metodunda temel kavram; ısı, basınç veya yer değiştirme gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün, sonlu sayıdaki alt bölgeler üzerinde tanımlanmış parçalı sürekli fonksiyonların bir kümesinden ibaret olan diskrit bir model yardımıyla tahmin edilebilmesidir. Parçalı sürekli fonksiyonlar, kendi bölgelerindeki noktalar üzerinde sürekli büyüklüğün aldığı değerleri kullanarak tanımlanırlar.

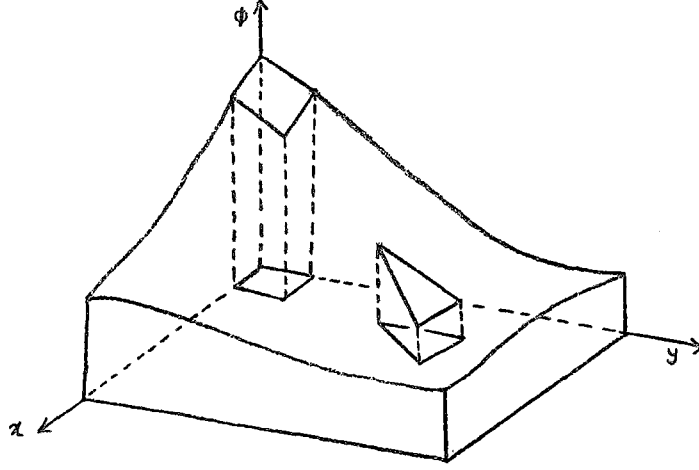
Genellikle sürekli büyüklükler bilinmez ve bölge içindeki belli noktalarda bu büyüklüklerin alacağı değerleri belirlemek isteriz. Bu, genel bir durumdur. Bölge içindeki her noktada büyüklüğün nümerik değerlerini bildiğimizi varsayarsak, diskrit modelin yapısı çok kolay açıklanabilir. Diskrit model aşağıda açıklanan yapıdadır:

1. Bölge içinde, düğüm adı verilen sonlu sayıda nokta tanımlanmıştır.
2. Her bir düğüm noktasında sürekli büyüklüğün alacağı değer, daha sonra belirlenecek bir değişken olarak tanımlanır.
3. Bölge, elemanlar olarak adlandırılan sonlu sayıdaki alt bölgelere bölünür. Bu elemanlar ortak düğüm noktalarıyla birbirlerine bağlıdır.
4. Sürekli büyüklüğün düğüm değerlerini kullanarak her eleman için, ayrı bir polinom tanımlanır ve bu polinom yardımıyla her bir eleman üzerinde sürekli büyüklük tahmin edilir. Ancak eleman polinomları, eleman sınırları boyunca süreklilik şartı korunacak şekilde seçilmelidir.

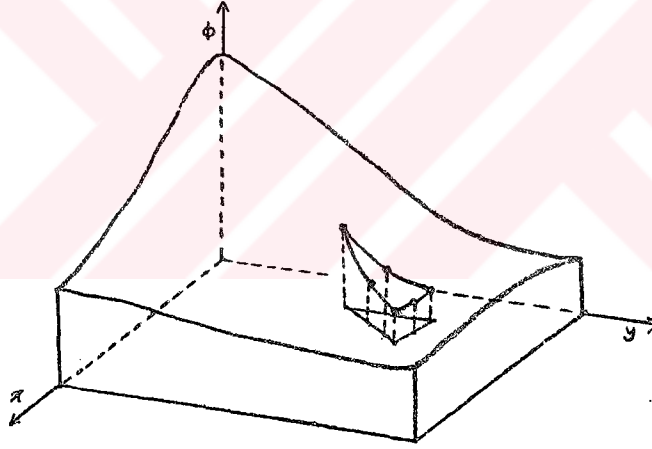
Sonlu eleman metoduna ait temel kavram, iki ve üç boyutlu bölgelere de uygulanabilir. İki boyutlu bölgede elemanlar x ve y ' nin fonksiyonlarıdır ve genellikle ya üçgen yada dörtgen şeklindedirler. Eleman fonksiyonu, bir düzlem (şekil 1.5) veya bir eğrisel yüzey (şekil 1.6) olur. Düzlem, eleman düğümlerinin minimum sayısı (üçgen için üç ve dörtgen için dört) ile ilişkilidir.

Düğümün minimum sayısından fazlası kullanıldığı zaman, eleman fonksiyonu eğrisel bir yüzey olabilir. Düğümlerin sayısındaki bir fazlalık, elemanların eğrisel sınırlara sahip olmasını mümkün kılar.

İki boyutlu sürekli $\Phi(x, y)$ fonksiyonuna son yaklaşım, her biri bir eleman üzerinde, $\Phi(x, y)$ 'nin düğüm noktalarında aldığı değerleri kullanarak tanımlanan yüzeylerin parçalı sürekli bir topluluğudur.



Şek. 1.5 Üçgensel veya dörtgensel elemanlar kullanarak, iki boyutlu skaler bir fonksiyonun modellenmesi.



Şek. 1.6 Kuadratik üçgensel bir eleman kullanarak, iki boyutlu skaler bir fonksiyonun modellenmesi.

Eleman fonksiyonunun tanımına uygun olarak, elemanlar topluluğundan tipik bir elemanın ayrılabilirliği, sonlu eleman metodunun önemli bir yönüdür. Bu özellik, eleman fonksiyonunun bağlantılı modelde, elemanın son konumundan ve diğer eleman fonksiyonlarından bağımsız olduğunu gösterir. Düğüm değerlerin keyfi bir kümesi ve koordinat yerlerinin keyfi bir kümesi cinsinden, eleman fonksiyonunun formülasyonu, eleman enterpolasyon fonksiyonunun orjinal geometriye yaklaşımın yapılanmasında istenildiği kadar sık kullanılmasını mümkün kılar.

1.2 FAALİYET ALANI

Buradaki amaç, sonlu eleman metodunun, özellikle ısı transferi gibi mühendisliğin yapısal olmayan alanlarındaki problemlerin çözümleriyle ilgili olan yönlerini tartışmaktır. Esas amaç, fiziksel bir problem için nümerik bir çözüm elde etmek olduğundan, temel teori kadar, bilgisayar uygulaması da önemlidir.

Metodun temel kavramsal özellikleri, aşağıdaki gibidir:

- 1. Bölgenin parçalanması; elemanların ve düğüm noktalarının tanımlanması.*
- 2. Her bir eleman için, eleman fonksiyonunun tanımlanması.*
- 3. Bölgenin tümü için parçalı sürekli bir fonksiyonun eldesinde, eleman fonksiyonlarının birleştirilmesi.*
- 4. Fiziksel problemlerle ilgili bir fonksiyonelin minimizasyonunu kullanarak, denklemler sisteminin hesaplanması.*
- 5. Düğüm değerler için denklemler sisteminin çözümü.*
- 6. Eleman sonuçlarının hesaplanması.*

II

BÖLGENİN PARÇALANMASI

Bölgenin alt bölgelere parçalanması, bir problem çözülürken yapılması gereken işlerin başında gelir. Bu özel adım teorik bir temele sahip değildir. Bu, daha çok bir sanattır ve mühendislik bilgilerinin kullanımına bağlıdır. Sonraki adımların tümü titizlikle geçilse de, bu bilgilerin doğru kullanılmadığı bir uygulama, hatalı sonuçlar üretecektir.

Bölgenin parçalanması, kullanılacak alt bölgelerin sayısı, şekilleri ve boyutları gibi kararları içerir. Mühendisler, elemanları kullanılabilir sonuçlar verecek kadar küçük ve hesap işlemlerini mümkün olduğunca azaltacak kadar büyük seçmenin hassas dengesi ile karşı karşıyadırlar. Sonuç değerleri hakkında, genel bir fikre sahip olmalıyız ki, arzu edilen sonucun nispeten sabit olduğu bölgelerde, elemanın boyutunu büyütebilmemiz ve istenen sonucun oldukça hızlı değişebildiği bölgelerde, elemanın boyutunu küçülebilmemiz.

Bir bölgenin doğru şekilde parçalanması, tecrübe ile olur. Bununla birlikte, birkaç genel kural deneyimsiz olanlara kılavuzluk edebilir. Bu kurallar ve parçalamanın fiziksel yönüyle ilgili bazı genel öğütler, bu bölümde verilmiştir.

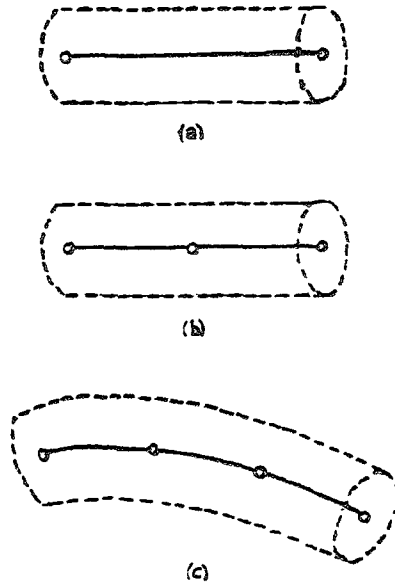
2.1 SONLU ELEMANLARIN TIPLERİ

Sonlu eleman metodunda, farklı elemanlar kullanılmıştır. Daha yaygın olanlardan bazıları, bu bölümde tartışılmıştır.

2.1.1 Bir Boyutlu Elemanlar

İlk ve en basit sınıfı, bir boyutlu elemanlardır. Karşılaşılan problemlerin çoğu, sabit bir alana sahip olacaktırlarsa da uzunluk boyunca, alan kesiti değişebilir. Bu elemanın en yaygın kullanışı, bir boyutlu ısı transfer problemleri ve iki kuvvet bileşenini içeren problem yapılarındadır.

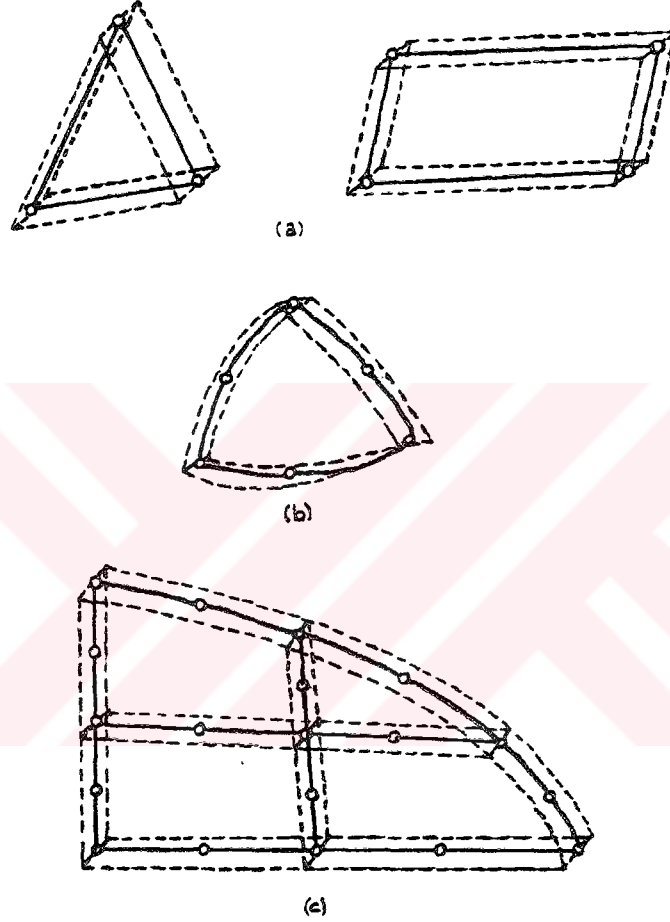
En basit bir boyutlu eleman, herbiri bir uçta olmak üzere iki düğümlüdür. Daha yüksek dereceden elemanların en yaygın olanları, üç düğümlü (kuadratik) ve dört düğümlü (kübik) elemanlar, Şek. 2.1b ve 2.1c'de gösterilmişlerdir. Bir boyutlu eleman aynı zamanda, yay uzunluğunun, eleman denklemlerini formüle etmesi için kullanılmış olması şartıyla, eğik bir çizgi olabilir (Şek. 2.1c).



Şek 2.1 Bir boyutlu sonlu elemanlara örnekler.

2.1.2 İki Boyutlu Elemanlar

İki boyutlu bölge modelinde kullanılan, iki genel eleman ailesi vardır. Bunlar üçgen ve dörtgendir. Her bir ailedeki lineer elemanlar doğrusal kenarlara sahiptirler (Şek. 2.2a), fakat kuadratik ve kübik gibi daha yüksek dereceden elemanlar, ya doğrusal ya eğrisel ya da her ikisine birden sahiptirler, (Şek. 2.2b). Eğrisel elemanların modellenmesi, kenar ortalarına düğümler ilave edilmesiyle mümkündür. Elemanların her iki ailesi, her ikisinin bir kenar boyunca, eşit sayıda düğüme sahip olmaları koşuluyla, aynı bölge içinde kullanılabilir (Şek. 2.2c). Eleman sıklığı ya sabittir ya da koordinatların bir fonksiyonudur.



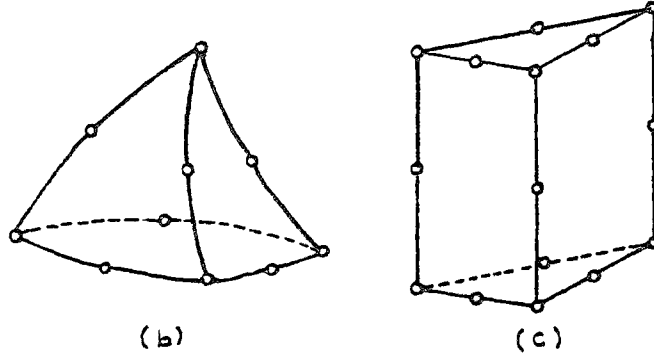
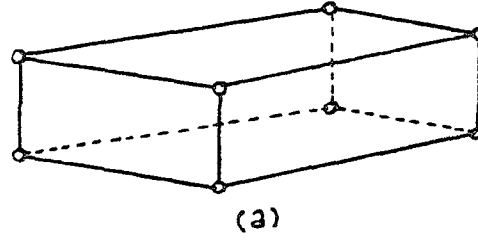
Şek. 2.2 İki boyutlu sonlu elemanların bazıları.

2.1.3 Üç Boyutlu Elemanlar

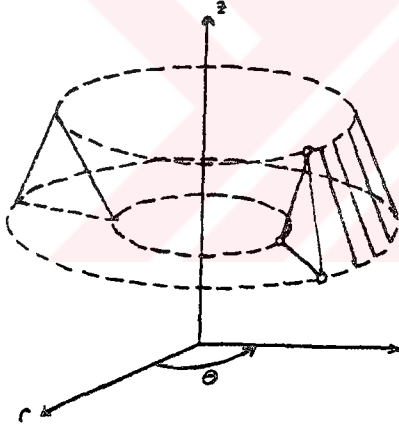
En yaygın üç boyutlu elemanlar, tetrahedron ve paralelepiped (Şek. 2.3a ve b) gibi iki boyutlu elemanların varyasyonlarıdır. Daha yüksek dereceden elemanlar, kenarlar yerine, eğrilmiş yüzeylere sahip olabilirken, her ikisinde lineer elemanlar, düzgün doğrularla sınırlanmışlardır. Üç boyutlu bölge parçalanmak istendiğinde bu elemanların gözde canlandırılabilmesi zordur, bu yüzden, paralelepiped, bu iki tipten en çok tercih edilendir.

Silindirik şekiller içeren problemlerde yararlı olan üç boyutlu elemanların başka bir grubu, Şek. 2.3c' de gösterilmiştir. Bu elemanlar, üçüncü koordinat boyutunda bilinmeyen büyüklüğün bir varyasyonuna izin vermeleri dışında, iki boyutlu üçgene benzerler.

Eksene simetrik problemlerde kullanılan popüler bir eleman, Şek. 2.4'de gösterilmiştir. Bu eleman, bir üçgen 360 derece döndürülerek elde edilmiştir. Benzer bir eleman, bir dörtgen döndürülerek elde edilebilir.



Şek. 2.3 Üç boyutlu elemanlara örnekler.



Şek. 2.4 Eksene simetrik bir sonlu eleman.

2.2 BÖLGENİN ELEMANLARA BÖLÜNMESİ

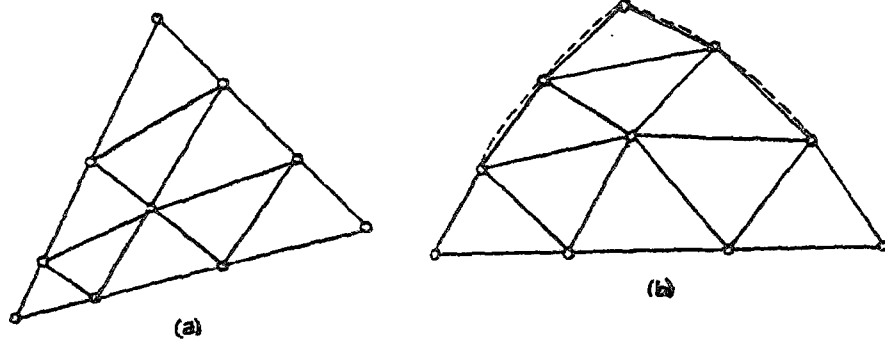
Asıl parçalama işlemi, iki genel bölüme ayrılabilir ; Bölgenin elemanlara bölünmesi, elemanların ve düğümlerin etiketlenmesi. İkincisi oldukça basit görünür, fakat bizim hesaplama etkinliğini artırma isteğimizden dolayı, karmaşık bir hal alır.

Bu bölümde iki boyutlu bölgenin, lineer üçgen elemanlara bölünmesi gösterilmiştir. İki boyutlu bölge, yakınsamayı göstermek için seçilmiştir, ancak burada verilen kavramlar, üç boyutlu bölge için de genellenebilir. Bir boyutlu bölgenin parçalanması sadece, bir doğru parçasının daha kısa doğru parçalarına bölünmesini içereceğinden önemsiz olduğu söylenilebilir.

Analitik olarak, iki boyutlu elemanların en basiti olduğu için, iki boyutlu bölgenin lineer üçgenlere parçalanması üzerinde durulmuştur. Elemanın basitleştirilmesi, bir bölgenin modelini kurmak için, çok sayıda eleman kullanılmasını gerektirir. Bu yüzden, bir bölgenin, lineer üçgenlere bölünmü kullanılabilecek en son alt bölümü gösterebilir.

Herhangi bir iki boyutlu bölgenin elemanlara bölünmesi işlemine, bölgenin dörtgen ve üçgen elemanlara bölünmesiyle başlanmalı, sonra bu bölgeler tekrar üçgenlere bölünmelidir. Uygulanan yükte veya meteryal özelliklerde veyahut da her ikisinde birden olmak üzere, geometride bir değişiklik olduğu yerlerde bölgeler arasına alt bölümler veya alt bölgeler yerleştirilmelidir.

Üçgensel bir bölge, herbir kenar boyunca eşit sayıda düğüm belirlenerek, uygun düğümler doğrularla birleştirilerek ve düğümler kesişim noktalarına yerleştirilerek, kolayca elemanlara bölünebilir. Şek. 2.5'a gösterilen üçgen bölge, bir kenar üzerine dört düğüm yerleştirilerek, dokuz elemana bölünmüştür. Düğümler bir kenar boyunca, eşit aralıklı olmak zorunda değildir. Uzayda bir varyasyon, elemanların boyutunun değiştirilebilmesini mümkün kılar.

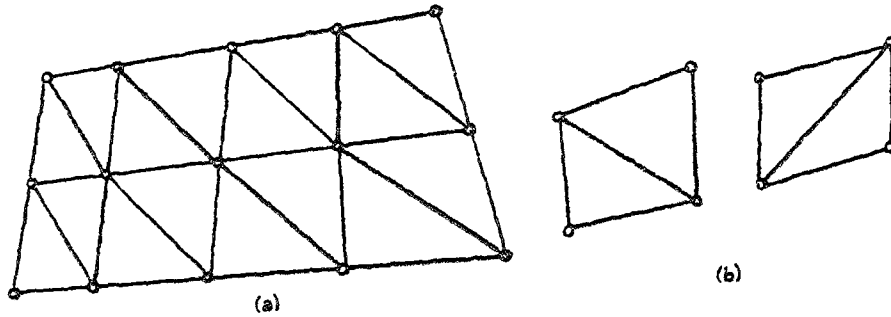


Şek. 2.5 Üçgen bir bölgenin lineer üçgen elemanlara bölünmesi.

Eğer üçgensel bölgenin eğrisel bir kenarı varsa, sınır boyunca elemanlar, düzgün doğru parçaları kullanılarak eğrilik modellenir. Bir eğrisel üçgen bölgenin lineer üçgen elemanlara bölünmesi, Şek. 2.5'te gösterilmiştir. Kesikli çizgi, orjinal şekli gösterir ve sürekli çizgi, elemanları gösterir.

Bir kenar üzerinde ki düğümlerin sayısı n olmak üzere, üçgen bir bölgede $(n-1)^2$ adet, üçgen bölge vardır.

Dörtgen bölge, karşılıklı kenarlar üzerindeki düğümleri bağlamak suretiyle kolaylıkla elemanlara bölünebilir, (Şek. 2.6a). İç dörtgenler elemanlar olarak kalabilir veya, herbir iç dörtgenin içine, en kısa diyagonali çizilerek, üçgen elemanlara bölünebilir, (Şek. 2.6b). Eşkenara benzeyen elemanlar, uzun ve dar üçgenlerden daha doğru sonuçlar ürettikleri için, en kısa diyagonali kullanarak yapılan bölme tercih edilir.

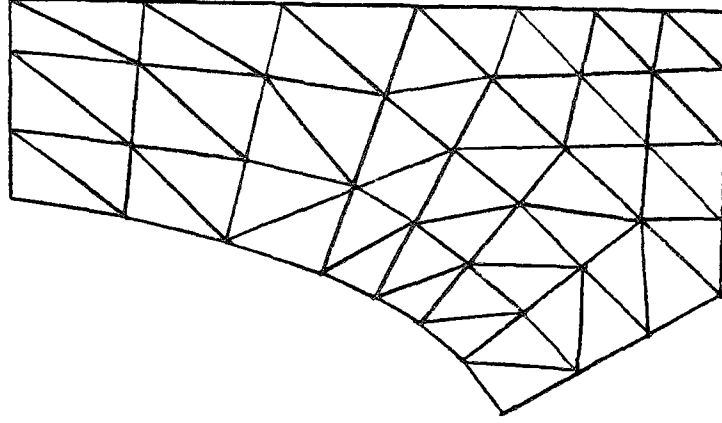


Şek. 2.6 Dörtgen bir bölgenin lineer üçgen elemanlara bölünmesi.

Komşu kenarlar boyunca, düğümlerin sayısı aynı olmak zorunda değildir, fakat karşı kenarlar üzerindeki düğümlerin sayısı, ızgara inceltildiği sürece eşit olmalıdır. Sınır düğümler arasındaki uzaklık, farklı boyutta elemanlar üretmek için değişik olabilir. n ve m komşu kenarlar üzerinde ki düğümlerin sayıları olmak üzere, bir dörtgen üzerinde ki elemanların sayısı, $2(n-1)(m-1)$ olacaktır.

Üçgen ve dörtgen bölgeler, ortak bir sınırı paylaşabilirler. Bu kenar üzerindeki düğümler, sayıca eşit ve pozisyon olarak da aynı konumda olmalıdır. Bu özellik, elemanın sınırı boyunca, sürekliliği sağlamak için gereklidir.

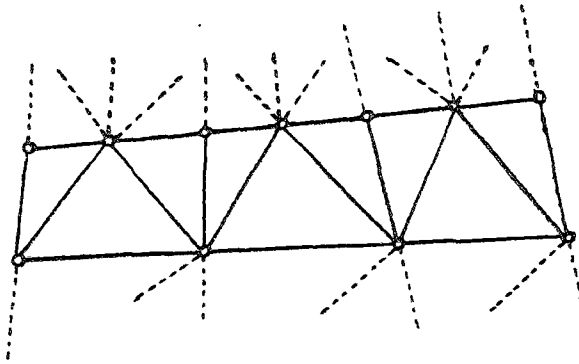
Bölgenin parçalanmasıyla ilgili kavramların uygulaması, Şek. 2.7' de gösterilmiştir. Düğüm aralığı, çizgisel sınırların civarında daha küçük elemanlara sahip olmak için, dörtgenin kenarları boyunca değiştirilmiştir.



Şek. 2.7 Bölgenin üçgensel ve dörtgensel bölgelere bölünmesi ve sonra da üçgenlere bölünmesi.

Aynı boyut ve şekle sahip elemanlardan oluşan, düzgün bir ağ, bölge içinde değişen, basınç yoğunlukları, ısı gradyanları, v.b.'den dolayı genellikle pratik değildirler. Eleman boyutunun değiştirilebilmesi, sonlu eleman metodunun önemli bir avantajıdır. Eleman boyutunda büyük bir değişiklik yapmanın en kolay yolu, karşılıklı iki kenarı üzerinde ki düğümlerin sayısı eşit olan, dörtgen bir bölge kullanmaktır. İyi bir kombinasyon, karşı kenar üzerindeki her üç düğüm için, bir kenar üzerine iki düğümün yerleştirilmesidir. Böyle bir bölge, Şek. 2.8'de gösterilmiştir.

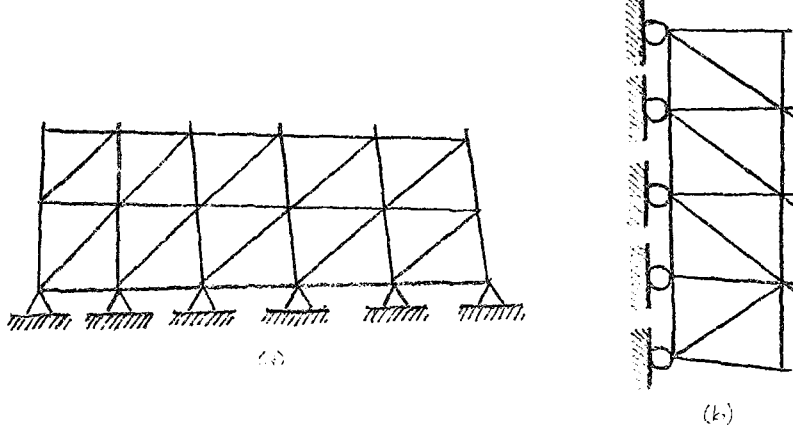
Katı mekanik problemlerinde, yerdeğiştirmeleri belirleyen bu düğümlerin dizaynı, bir gerekliliktir. Bağlantı pimi, sabit düğümler olarak gösterilmiştir (Şek. 2.9a).



Şek. 2.8 Açık bir bölgenin, lineer üçgen elemanlara bölünmesi.

Düğüm, sadece bir bileşenin doğrultusunda hareket edebildiği zaman, silindir kullanılır. Şek.2.9b'deki silindirler, sadece dikey doğrultudaki hareketi mümkün kılarlar. Bu düğüm koşullarının gerçek uygulaması, düğüm değerler için çözülen, denklemler sistemi değiştirilerek elde edilir.

Fiziksel problemlerin çoğu, kolaylıkla tanımlanan sınırlara sahip değildir. Ortam, kaldırımın altındaki sonsuz uzaklık için' gelişir ve ısı kablolarının yeri, tanımlanmamış birkaç uzaklık için, sağa ve sola genişler. Bir veya daha fazla doğrultuda sonsuza genişleyen bölgelerin modellenmesi, mühendislere büyük zorluklar çıkarır, çünkü bunu sonlu modelle yapmak zorundadırlar.



Şek. 2.9 Sabitlenmiş düğümler.

Amaç, sınırlar boyunca hesaplanan değerlerin bunlarla uyduğu, fiziksel problemlerde var olan yeteri kadar büyük bir bölge seçmektir. Kaldırımın içine gömülen ısı kabloları için, bunun anlamı, aynı değere sahip ısı kablosundan uzaklaşmış düğüm değerleri olan yeteri kadar derin bir bölge seçmektir.

Tecrübe artı benzer sonsuz bölgelerin nasıl modellendiği konusundaki bir araştırma, en iyi klavuzdur.

2.3 DÜĞÜMLERİN ETİKETLENMESİ

Düğüm sayıları, bir çözüm elde etmeyle birlikte, hesaplama etkinliğini, etkilemezse, düğümlerin etiketlenmesi (bir sayı atama), önemsiz bir işlem olacaktır. Sonlu eleman metodu, kullanıldığı zaman, ortaya çıkan, lineer denklemlerin kümesi, çok sayıda sıfır olan katsayıya sahiptir. Denklemlerin bir listesi, sıfırdan farklı bütün değerlerin ve sıfır olan bazı değerlerin, ana diyagonale paralel kurulabilen, iki doğrunun arasına düşer (Şek. 2.10). Diyagonalden doğruya olan uzaklık, bandwidth olarak adlandırılır. Bandwidthin dışındaki bütün katsayılar sıfırdır ve saklanmak zorunda değildirler. Uygun bilgisayar programı, sadece bandwidth içindeki katsayıları kullanır. Bandwidthdeki bir azaltma, hem hesaplama zamanında hem de bilgisayar hafızasında tasarruf sağlar. B bandwidthı,

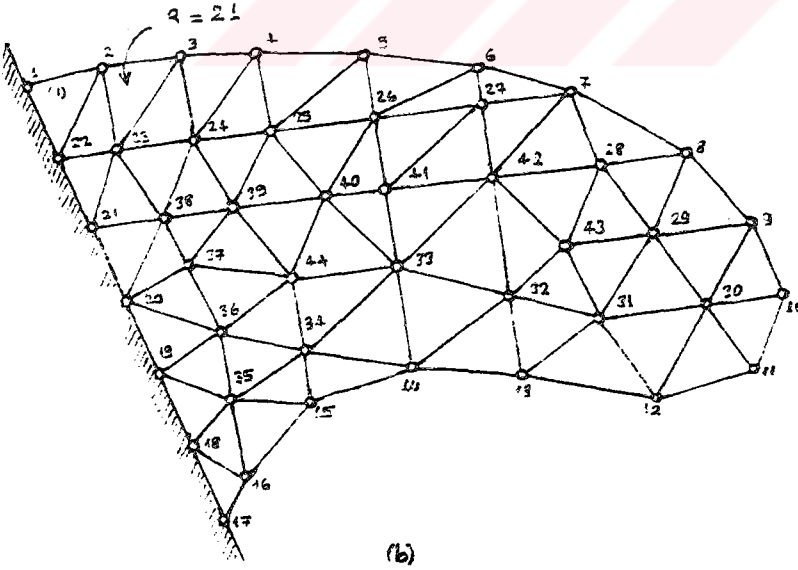
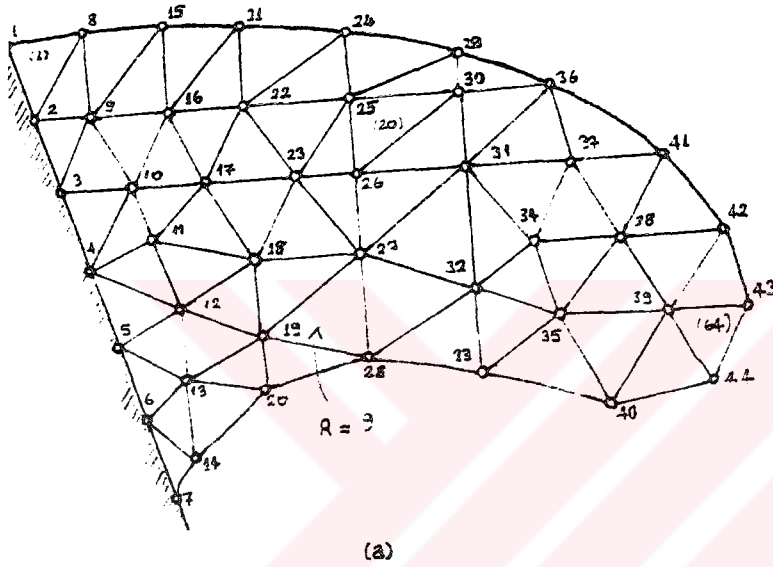
$$B=(B+1) \text{ NDOF} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} C & C & C & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & C & C & C & C & C & 0 & 0 & 0 \\ C & C & C & C & 0 & C & C & 0 & 0 \\ 0 & C & C & C & C & C & C & C & 0 \\ C & C & 0 & C & C & C & C & 0 & C \\ 0 & C & C & C & C & C & C & C & C \\ 0 & 0 & C & C & C & C & C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & C & C & C & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & C & 0 & C & C \end{bmatrix}$$

Şek. 2.10 Denklemler sistemi bandwidth. C, sıfırdan farklı katsayıları gösteriyor.

ilanılarak hesaplanmıştır. Burada R , bir tek elemandaki düğüm sayıları arasındaki en büyük fark (tüm elemanlar, determinantında düşünülmüştür) ve $NDOF$, herbir düğümdeki bilinmeyenlerin sayısıdır (DOF , serbestlik derecesi). B 'nin minimizasyonu, bölgenin en küçük boyutuna karşı, düğümlerin etiketlenmesiyle kısmen başarılabilen R 'nin minimizasyonuna bağlıdır. Bir bölge içindeki düğümlerin farklı biçimde etiketlenmesi, Şek. 2.11a ve b'de gösterilmiştir. Şek. 2.11a ve b'deki birinci eleman, R 'nin değerleri sırasıyla 7 ve 21'dir. Elemanlar topluluğunun tamamı için R 'nin en büyük değerleri, 9 ve 21'dir. R 'nin en büyük değeri, eğer her bir düğümde bir bilinmeyen varsa, 10 ve 22'dir ve eğer her bir düğümde iki bilinmeyen varsa, 20 ve 44'dür. Bu örnekte düğümlerin uygun bir şekilde etiketlenmesi, bilgisayar acminde %50'den fazla tasarruf sağlar.

Elemanların etiketlenmesi, kolay bir işlemdir. Eleman numaraları, burada, düğüm numaralarıyla arışıklığı engellemek için, parantez içine alınmıştır. Bir nolu eleman, 1,2 ve 8 düğüm numaralarına sahiptir (Şek. 2.11a). Elemanların numaralanmasının, problemin hesaplanmasında bir etkisi yoktur.



Şek. 2.11 İki boyutlu bir bölgede düğümlerin etiketlenmesini gösteren iki örnek.

2.4 ÖZET

Sonlu eleman metodunu kullanarak, problemleri çözmek için, farklı elemanların birkaçını kullanılmıştır. Daha önemli olanların bazıları, parçalamaya işlemi süreciyle birlikte bu bölümde verilmiştir.

Burada daha çok simpleks elemanlarla ilgilenilmiştir. Bu grupta, lineer iki düğümlü doğrusal eleman ve lineer dört düğümlü tetrahedronu içerir. Bu elemanlar, bir çok sebep için vurgulanırlar. Onlar teorik olarak basittirler, uygulamalarının daha kolay gösterilmesini sağlayan, bir karakteristiktirler. Üçgen ve dörtyüzlü elemanlar, düzensiz sınırlara yaklaşmak için kullanılabilirler, çünkü onlar istenildiği gibi ölçeklendirilebilirler. Bir başka önemli sebep, mevcut bilgisayar programlarının çoğunun bu elemanları kullanmasıdır.

Daha yüksek dereceden elemanların uygulaması, onların uygulamalarını daha karışık yapan, nümerik entegrasyonu içerir.



III

LİNEER ENTERPOLASYON POLİNOMLARI

Sonlu eleman metodu; elemanlar olarak adlandırılan alt bölgeler üzerinde tanımlanan, parçalı sürekli fonksiyonların bir kümesinden oluşan diskrit bir model vasıtasıyla, bir sürekli fonksiyon yaklaşımı kavramı üzerine dayandırılmıştır. Eleman fonksiyonlarının en popüler formu, polinomlardır. Polinomun mertebesi, her bir eleman düğümünde sürekli fonksiyon için, bilinen olayların sayısına bağlıdır.

Sonlu elemanlar, elemanın derecesine göre üç gruba ayrılırlar. Bunlar, simpleks, kompleks ve multipleks'dir, (Oden, 1972). Simpleks elemanlar, sabit terim artı lineer terimleri içeren bir yaklaşım polinomuna sahiptir. Polinomdaki katsayıların sayısı, koordinat uzayı artı bire eşittir.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y \quad (3.1)$$

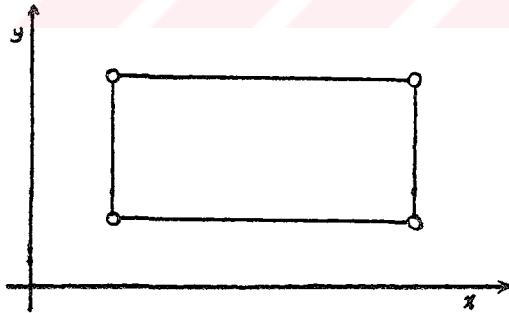
polinomu, iki boyutlu üçgen eleman için, simpleks fonksiyondur. Polinom, x ve y'ye göre lineerdir ve üçgen üç düğümlü olduğundan, üç katsayı içerir.

Kompleks elemanlar, sabit ve lineer terimler artı ikinci, üçüncü ve gerektiği kadar yüksek dereceden terimleri içeren bir polinom fonksiyonu kullanır. Kompleks elemanlar, simpleks elemanlarla aynı şekillere sahip olabilirler, fakat kompleks elemanlar ilave olarak, sınır düğümlerine sahiptirler ve aynı zamanda iç düğümlere de sahip olabilirler. Simpleks ve kompleks elemanlar arasındaki asıl farklılık, bir kompleks elemandaki düğüm sayısının, bir artı koordinat uzayının boyutundan büyük olmasıdır. İki boyutlu kompleks üçgen eleman için enterpolasyon polinomu;

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu denklem, altı katsayıya sahiptir bu yüzden, eleman altı düğümlü olmak zorundadır ve aynı zamanda ikinci dereceden açılımın bütün terimlerini içerir.

Multipleks elemanlar sa, daha yüksek dereceden terimleri içeren polinomları da kullanır fakat, elemanlar arası sürekliliği sağlamak için, eleman sınırları koordinat eksenlerine paralel olmak zorundadır. Simpleks ve kompleks elemanların eleman sınırları, bu kısıtlamaya dahil değildir. Şek. 3.1'deki dikdörtgen eleman, multipleks eleman için, mükemmel bir örnektir.

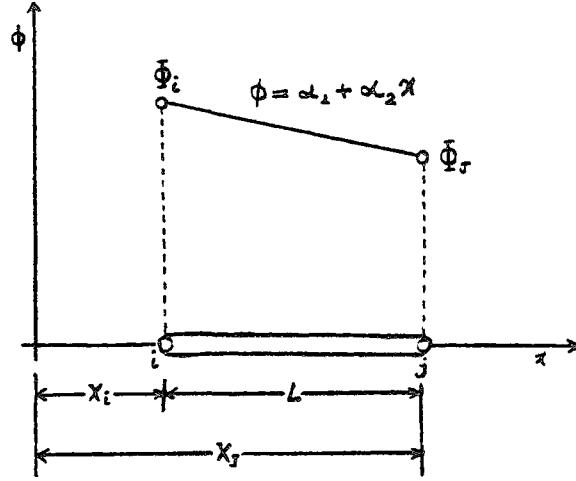


Şek. 3.1 Dikdörtgen, iki boyutlu multipleks eleman.

Burada simpleks elemanlar göz önüne alınmıştır. Kompleks ve multipleks elemanlarsa, aşağıdaki uygulamalar bölümünde, isoparametrik elemanlarla birlikte tartışılacaktır.

3.1 BİR BOYUTLU SİMPEKS ELEMAN

Bir boyutlu simpleks eleman, herbiri bir ucunda olmak üzere, iki düğümü olan, L uzunluğunda bir doğru parçasıdır, (Şek. 3.2). Düğümler i ve j ile tanımlanırken, düğüm değerler de Φ_i ve Φ_j ile gösterilmiştir. Koordinat sisteminin orijini, elemanın dışındadır. Skaler bir büyüklük için, ϕ polinomal fonksiyonu,



Şek. 3.2 Bir boyutlu simpleks eleman.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.3)$$

şeklinde. a_1 ve a_2 katsayıları,

$$x=x_i \text{ için } f=F_i$$

ve

$$x=x_j \text{ için } f=F_j$$

düğüm koşullarını kullanarak belirlenebilir. Bu düğüm koşulları,

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_j x_j - \Phi_i x_i}{L}$$

ve

$$\alpha_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \quad (3.4 a, b)$$

için çözülebilen,

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$$

denklem çifti çözüldükten sonra, ortaya çıkar. a_1 ve a_2 değerleri, (3.3) 'de yerlerine konularsa ;

$$\phi = \left(\frac{\Phi_j x_j - \Phi_i x_i}{L} \right) + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x$$

elde edilir. Bu, tekrar düzenlenirse ;

$$\phi = \left(\frac{x_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - x_i}{L} \right) \Phi_j \quad (3.5)$$

olduğu görülür.

(3.5) ifadesinde yer alan x 'in lineer fonksiyonları, şekil fonksiyonları veya enterpolasyon fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu şekil fonksiyonları, N ile gösterilir. Her bir şekil fonksiyonu, ilgili olduğu düğümü gösteren bir indise sahip olmalıdır. N_β , keyfi bir şekil fonksiyonunu gösteriyor olsun. (3.5) 'deki şekil fonksiyonları;

gösteren bir indise sahip olmalıdır. N_β , keyfi bir şekil fonksiyonunu gösteriyor olsun. (3.5) 'deki şekil fonksiyonları;

$$N_i = \frac{\chi_j - x}{L} \quad \text{ve} \quad N_j = \frac{x - \chi_i}{L}$$

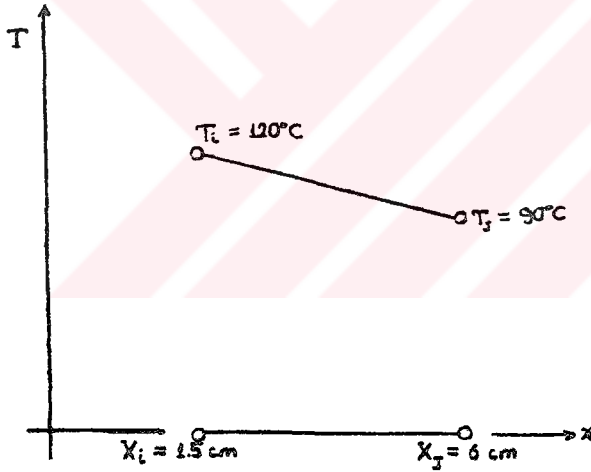
dir. $[N] = [N_i N_j]$, bir satır matris ve $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$, bir sütun matris olmak üzere; (3.5) denklemi,

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\} \quad (3.6)$$

şeklinde matris notasyonları kullanılarak da yazılabilir. (3.5) ifadesi incelendiğinde, $N_i = \frac{(\chi_j - x)}{L}$ 'nin, j düğümünde sıfır değerini ve i düğümünde de bir değerini aldığı görülür. Benzer şekilde N_j 'nin de, i düğümünde sıfır ve j düğümünde bir değerine sahip olacağı açıktır. Bu değerler, şekil fonksiyonlarının karakteristiğidir ve düğümlerden sadece bir tanesinde bir değerini alırken, diğer düğümlerin her birinde sıfır değerine eşittir.

Örnek Problem.

7. Bir fin içindeki ısı dağılımını tahmin etmek için, bir boyutlu simpleks bir eleman kullanılmıştır. Çözüm, i ve j düğümlerindeki ısıların sırasıyla, 120°C ve 90°C olduğunu gösterir. Elemanın içindeki gradyeni ve orjinden 4 cm uzaklıktaki bir noktadaki ısmı belirleyelim. i ve j düğümleri orjinden 1.5 ve 6 cm uzaklığa yerleştirilmişlerdir.



Problem 7

Eleman içindeki t sıcaklığı,

$$t = \left(\frac{\chi_j - x}{L} \right) T_i + \left(\frac{x - \chi_i}{L} \right) T_j$$

ile verilmiştir. Eldeki eleman verileri,

$$\chi_i = 1.5 \text{ cm} \quad T_i = 120^\circ \text{C}$$

$$\chi_j = 6.0 \text{ cm} \quad T_j = 90^\circ \text{C}$$

$$x = 4.0 \text{ cm} \quad L = \chi_j - \chi_i = 4.5 \text{ cm}$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılırsa;

$$t = \left(\frac{6.0-4.0}{4.5} \right) 120 + \left(\frac{4-1.5}{4.5} \right) 9$$

$$t = 103.33^{\circ} C$$

elde edilir. Isı gradyanı ise,

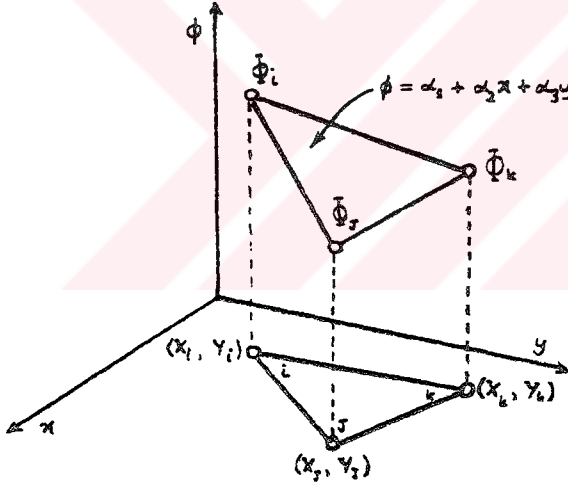
$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{L}T_i + \frac{1}{L}T_j = \frac{1}{L}(T_j - T_i)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{90-120}{4.5} = \frac{-6.67^{\circ} C}{cm}$$

ile verilmiştir.

3.2 İKİ BOYUTLU SİMPLEKS ELEMAN

Şek. 3.3'de gösterilen üçgen, iki boyutlu simpleks bir elemandır. Bu eleman doğru kenarlara ve herbiri bir köşesinde olmak üzere, üç düğüme sahiptir. Düğümlerin uygun şekilde etiketlenmesi gereklidir ve genellikle etiketleme, keyfi olarak seçilen bir i düğümünden itibaren, saat yelkovanının tersi yönünde hareket edilerek yapılır. Φ skaler büyüklüğünün düğüm değerleri ; Φ_i , Φ_j ve Φ_k ile gösterilirken, üç düğümün koordinat çiftleri de (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) ve (X_k, Y_k) ile ifade edilmiştir.



Şek. 3.3 İki boyutlu simpleks eleman.

Düğüm koşulları,

$$x = X_i, y = Y_i \quad \text{için} \quad \Phi = \Phi_i$$

$$x = X_j, y = Y_j \quad \text{için} \quad \Phi = \Phi_j$$

ve

$$x = X_k, y = Y_k \quad \text{için} \quad \Phi = \Phi_k$$

olmak üzere; enterpolasyon polinomu,

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.7)$$

şeklindedir. Bu koşullar (3.7) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\
\Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\
\Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k
\end{aligned} \tag{3.8}$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemler sistemi ise;

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A} \left[(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k \right] \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A} \left[(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k \right] \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A} \left[(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k \right]
\end{aligned}$$

değerlerini verecektir. Burada A , üçgenin alanıdır ve determinant;

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A$$

şeklinde dir.

α_1 , α_2 ve α_3 denklemleri, (3.7) ifadesinde yerlerine yazılır ve tekrar düzenlenirse, (3.6) ifadesine benzeyen bir denklem elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i &= Y_j - Y_k \\ c_i &= X_k - X_j \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_j &= \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j &= Y_k - Y_i \\ c_j &= X_i - X_k \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_k &= \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k &= Y_i - Y_j \\ c_k &= X_j - X_i \end{aligned}
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \tag{3.10}$$

ile ifade edilen eleman denklemi, her bir düğüm için bir tane olmak üzere, üç şekil fonksiyonuna sahiptir.

i düğümünde N_i 'nin hesaplanması;

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$= \frac{1}{2A} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i)$$

şeklinde yapılır. Parantez içindeki terimler, (3.9) 'daki determinantın değerini verir ve bundan dolayı da i düğümünde,

$$N_i = \frac{1}{2A}(2A) = 1$$

dir. İkinci ve üçüncü düğümde ve bu düğümlerden geçen doğru üzerindeki bütün noktalarda ise, N_i sıfırdır.

ϕ skaler büyüklüğü, x 'e ve y 'ye göre lineer olan şekil fonksiyonları kümesinin bir fonksiyonudur. Bu ise, ya x 'in yada y 'nin doğrultusundaki gradyenin sabit olacağı anlamına gelir. x doğrultusundaki gradyen,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{N_i}{dx}\Phi_i + \frac{N_j}{dx}\Phi_j + \frac{N_k}{dx}\Phi_k \quad (3.11)$$

fakat,

$$\frac{dN_\beta}{dx} = \frac{b_\beta}{2A} \quad \beta = i, j, k$$

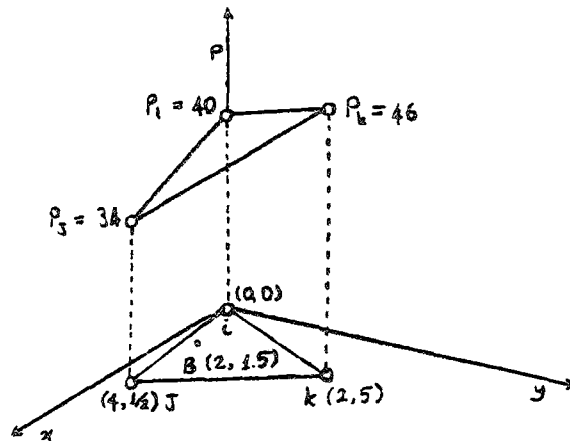
olduğundan,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \quad (3.12)$$

dir. b_i, b_j, b_k birer sabit ve ϕ_i, ϕ_j ve ϕ_k , uzay koordinatlarından bağımsız oldukları için türev, sabit bir değere sahiptir. Herhangi bir eleman içindeki sabit bir gradyen, ϕ 'nin değerindeki ani bir değişikliğin tahmininde pek çok küçük elemanın kullanıldığı gösterir.

Örnek Problem.

8. Düğüm değerleri, $P_i = 40 \text{ N/cm}^2$, $P_j = 34 \text{ N/cm}^2$ ve $P_k = 46 \text{ N/cm}^2$ olarak verildiğine göre, eleman denklemini kurunuz ve A noktasındaki basıncın değerini hesaplayınız. B noktası, $(2, 1.5)$ 'ya yerleştirilmiştir.



Problem 8

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y)$$

ve

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)$$

olmak üzere, p basıncı;

$$p = N_i P_i + N_j P_j + N_k P_k$$

ile verilir. (3.10) ifadesinde, koordinat değerleri yerlerine yazılırsa;

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4(5) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 19$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k = 2(0) - 0(5) = 0$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0\left(\frac{1}{2}\right) - 4(0) = 0$$

$$b_i = Y_j - Y_k = \frac{1}{2} - 5 = -4.5$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2$$

$$c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2$$

$$c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4$$

Örnek Problem.

9. Problem 8'de kullanılan üçgen eleman için, eşyükselti çizgisini 42 N/cm^2 olarak belirleyin.

42 N/cm^2 için basınç düzey çizgisi, ik ve kj kenarlarını keser. Basınç, bu kenarların her biri boyunca lineer olarak değiştiğinde, koordinat değerlerini elde etmek için basit oranlar kurarız. jk kenarı için;

$$\frac{46-42}{46-34} = \frac{2-x}{-2} \quad \text{veya} \quad \frac{4}{12} = \frac{2-x}{-2}$$

$$x = 2.67 \text{ cm}$$

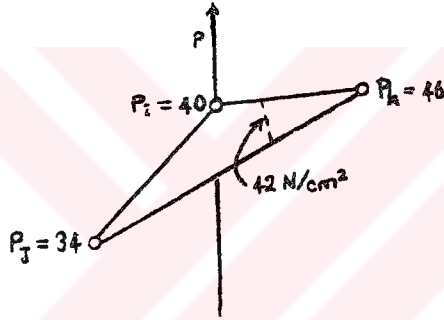
ve

$$\frac{46-42}{46-34} = \frac{5-y}{5-0.5} \quad \text{veya} \quad y = 3.5 \text{ c}$$

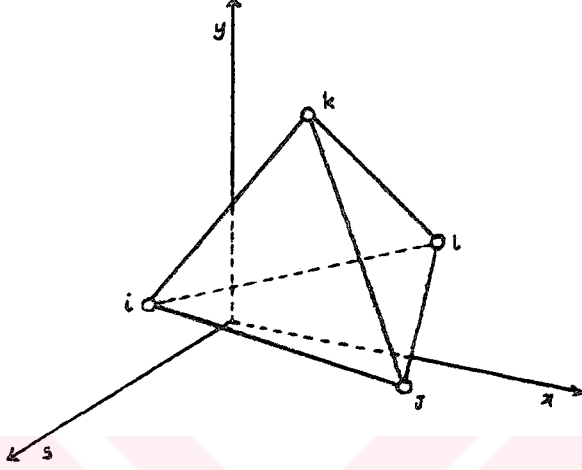
dir. ik kenarı için benzer oranlar;

$$x = \frac{2}{3} \text{ cm} \quad \text{ve} \quad y = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

değerlerini verir. Eş yükselti çizgisi, aşağıda gösterilmiştir.



$$\begin{aligned}
\Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i \\
\Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j \\
\Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k \\
\Phi_l &= \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l
\end{aligned} \tag{3.14}$$



Şek. 3.4 Üç boyutlu simpleks eleman.

(3.14)'de ifade edilen denklemler sistemi, Cramer kuralı kullanılarak çözülebilir. Bu işlem, hesaplanması gereken beş tane determinant üretecektir. Fakat hesaplamalar için bilgisayar kullanmak daha kolay bir yaklaşımdır. (3.14) ile başlanır ve bu denklemler matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\{\Phi\}^T &= [\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l] \\
\{\alpha\}^T &= [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ve

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

olmak üzere,

$$\{\Phi\} = [C]\{\alpha\} \tag{3.15}$$

elde edilir.

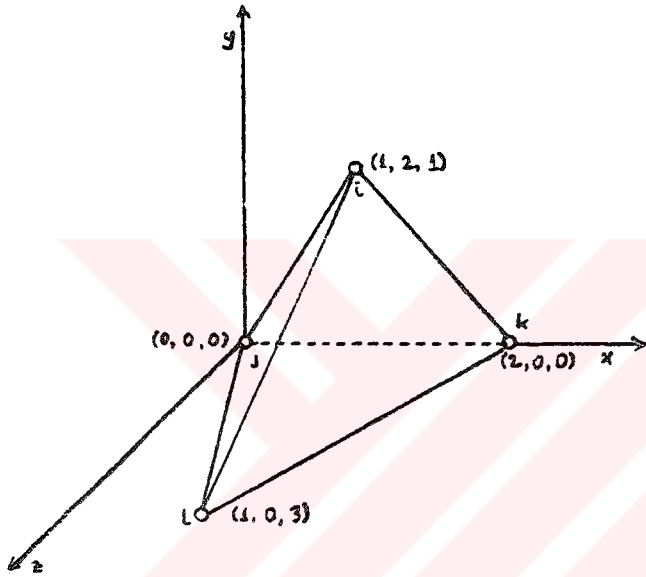
Örnek Problem.

10. Bir dört yüzlü elemanın koordinat noktaları gösterildi. Matris inversiyonu işlemi kullanarak şekil fonksiyonlarını belirleyiniz. Katsayı matrisi;

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

İnversi,

$$[C]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Problem 10

ve enterpolasyon polinomu,

$$\phi = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1}\{\Phi\}$$

dir. Fakat, $\phi = [N]\{\Phi\}$ olduğundan şekil fonksiyonlarının,

$$[N] = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1}$$

şeklinde çarpım olarak verildiği açıktır. Bu çarpımı yapıldığında,

$$[N] = \frac{1}{6} [1 \ x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

veya

$$[N] = \left[\frac{y}{2}, \frac{1}{6}(6 - 3x - y - z), \frac{1}{6}(3x - y - z), \frac{1}{6}(-y + 2z) \right]$$

Bu elemanlar için şekil fonksiyonları;

$$N_i = \frac{y}{2}$$

$$N_j = \frac{6-3x-y-z}{6}$$

$$N_k = \frac{3x-y-z}{6}$$

$$N_l = \frac{-y+2z}{6}$$

şeklindedir.

3.4 VEKTÖREL BÜYÜKLÜKLER İÇİN ENTERPOLASYON

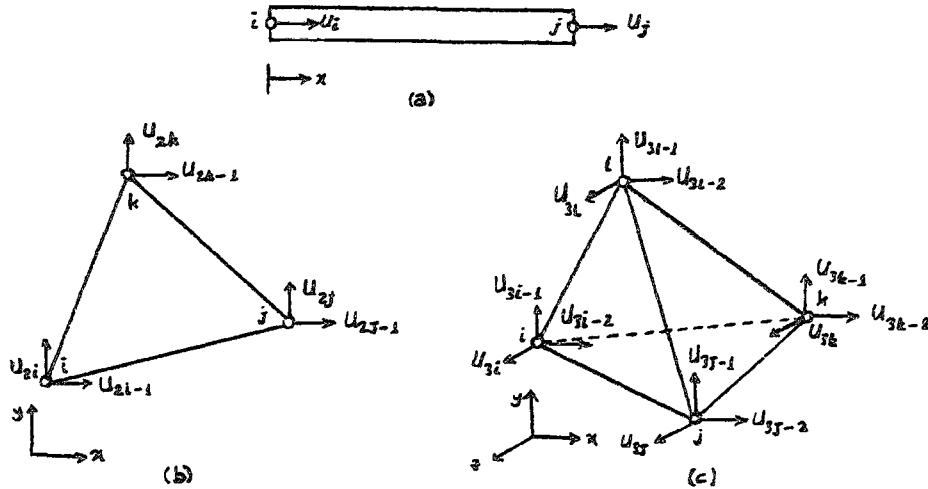
Önceki bölümlerdeki enterpolasyon denklemleri, skaler bir büyüklüğün ifadesiyle ilgiliydi. Vektörel bir büyüklük, örneğin yerdeğiştirme, hem büyüklük hem de doğrultuya sahiptir. Bu yüzden bir düğümde, genellikle birden fazla bilinmeyen (serbestlik derecesi) vardır. Genel işlem, vektörün bileşenlerine karar verilmesi ve bu bileşenlerin bilinmeyen büyüklükler olarak işlemden geçirilmesidir. Düğüm, problemin bir, iki veya üç boyutlu oluşuna bağlı olarak, bir, iki veya üç bilinmeyene sahiptir.

Burada kullanılan vektör bileşenlerinin niteliği, Şek. 3.5'te gösterilmiştir. Bütün bileşenler aynı sembolle, U harfiyle gösterilirler. Bir indis, sadece bir bileşeni göstermek için kullanılır. İndisler, x ekseninden başlayarak, bir x , y , z dizisinde sıralanmışlardır. Pozitif bir bileşen pozitif koordinat doğrultusundadır. u, v ve w küçük harfleri, x , y ve z doğrultusundaki yer değiştirmelere ait genel denklemlerin gösterilmesinde kullanılır.

Her bir düğümde sadece bir bilinmeyen olduğu için, bir boyutlu bir problemin vektörel büyüklük olarak ifadesi, skaler bir ilişkiye özdeştir. u , elemana paralel bir yerdeğiştirme olmak üzere;

$$u = N_i U_i + N_j U_j = [N_i N_j] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

dir. Burada kullanılan şekil fonksiyonları, (3.5) ifadesindekilerle aynıdır.



Şek. 3.5 Simpleks elemanlar için düğüm vektörleri. (a) Bir boyutlu.

(b) İki boyutlu. (c) Üç boyutlu.

kullanılarak yaklaşmıştır. Bu iki denklem, verilen tüm düğüm değerler cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} u &= N_i U_{2i-1} + 0U_{2i} + N_j U_{2j-1} + 0U_{2j} + N_k U_{2k-1} + 0N_{2k} \\ v &= 0U_{2i-1} + N_i U_{2i} + 0U_{2j-1} + N_j U_{2j} + 0U_{2k-1} + N_k U_{2k} \end{aligned}$$

Matris notasyonları kullanılırsa,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

olarak ifade edilir. (3.23)'deki şekil fonksiyonları, (3.10)'da verilenlerle aynıdır.

Bu işlem üç boyutlu için yapılırsa, (3.24)'de verilen denklemler sistemi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

3.5 YEREL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Düğüm değerler için denklemler sisteminin belirlenmesi, şekil fonksiyonlarının eleman üzerinde integrasyonunu veya türevlerini veyahut da her iki işlemi birden içerir. Enterpolasyon denklemi, bir eleman koordinat sistemi (: Elemanın sınırları içine veya üzerine bir koordinat sistemi yerleştirilir.) cinsinden yazıldığında, bu integrasyon daha kolay hesaplanır. Bu koordinat sistemine, yerel bir koordinat sistemi olarak sık sık başvurulur.

Enterpolasyon denklemleri, küresel koordinat sisteminde türetilen denklemlerin dönüştürülmesiyle yerel koordinat sistemi cinsinden yazılabilirler. (3.10) ifadesinde tanımlanan şekil fonksiyonları ve

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

şeklindeki üçgen elemanı göz önüne alalım. Lokal koordinat sistemini, Şek. 3.6'da gösterildiği gibi elemanın merkezine yerleştirelim. \bar{X} ve \bar{Y} ;

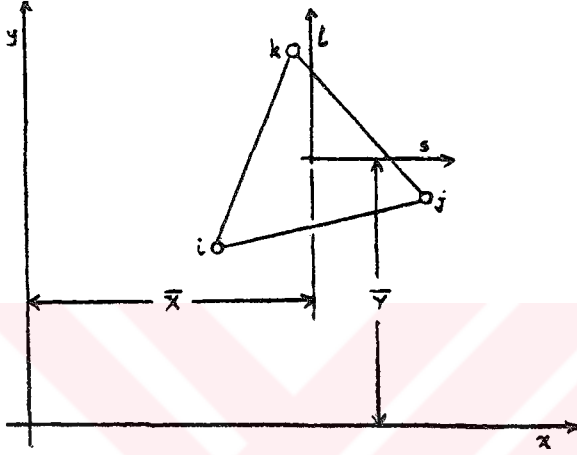
$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{X_i + X_j + X_k}{3} \\ \bar{Y} &= \frac{Y_i + Y_j + Y_k}{3} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{X_i + X_j + X_k}{3} \\ \bar{Y} &= \frac{Y_i + Y_j + Y_k}{3}\end{aligned}\quad (3.26)$$

ile verilen merkezi koordinatlar olmak üzere, koordinat dönüşüm denklemleri;

$$\begin{aligned}x &= \bar{X} + s \\ y &= \bar{Y} + t\end{aligned}\quad (3.25)$$

şeklindedir.



Şek.3.6 Üçgen eleman için, yerel koordinat sistemi.

N_i şekil fonksiyonunun küresel koordinatlardaki ifadesi;

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

şeklindedir. x ve y 'nin, s ve t cinsinden değerleri yerlerine yazılırsa;

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[a_i + b_i (\bar{X} + s) + c_i (\bar{Y} + t) \right]$$

veya

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[(a_i + b_i \bar{X} + c_i \bar{Y}) + b_i s + c_i t \right] \quad (3.27)$$

elde edilir. b_i ve c_i terimleri değişmeden kalır ve yine koordinat değişkenleriyle çarpılır. a_i sabit terimi değiştirilir. (3.10)'dan, a_i , b_i ve c_i 'nin tanımı hatırlanarak, bunlar (3.26)'da yerlerine yazılırsa, $(a_i + b_i x + c_i y)$ ifadesi, $2A/3$ 'e sadeleşir. Eleman koordinat sisteminde şekil fonksiyonu,

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[\frac{2A}{3} + (Y_j - Y_k) s + (X_k - X_j) t \right] \quad (3.28)$$

olur. Benzer işlemlerle,

$$N_j = \frac{1}{2A} \left[\frac{2A}{3} + (Y_k - Y_i) s + (X_i - X_k) t \right]$$

ve

$$N_k = \frac{1}{2A} \left[\frac{2A}{3} + (Y_i - Y_j)s + (X_j - X_i)t \right] \quad (3.29)$$

olarak diğer şekil fonksiyonları elde edilir. Global koordinat sisteminde, bir fonksiyonun integrali,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R^*} f[x(s, t), y(s, t)] |J| ds dt \quad (3.30)$$

ilişkisi kullanılarak, lokal koordinat sisteminde hesaplanabilir. Burada R , eski bölge; R^* , yeni bölge ve $|J|$, dönüşüm determinantının mutlak değeridir ve fiziksel olarak, iki koordinat sisteminde alanların $A_{xy}/A_{s,t}$ oranını gösterir. Sistemlerin her ikisi de dikdörtgenel olduğundan, $|J| = 1$ 'dir. Elemanın şekli değiştirilmediğinden, aynı zamanda $R = R^*$ 'dir. (3.30) integrasyon bağıntısı,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R^*} f[x(s, t), y(s, t)] ds dt \quad (3.31)$$

ifadesine indirgenir. Eğer (3.31)'in sol tarafındaki $f(x, y)$ fonksiyonu, küresel koordinat sisteminde eleman şekil fonksiyonu ise, bu takdirde $f[x(s, t), y(s, t)]$ yerel koordinat sisteminde eleman şekil fonksiyonudur. (3.32) denklemi, küresel bir şekil fonksiyonunun, küresel koordinatlardaki integralinin, yerel koordinatlarda yerel şekil fonksiyonunun integrali ile aynı olduğunu ifade eder. (3.31) denklemi sonradan kullanacağız, lokal koordinat sistemlerini sağlar.

3.5.1 Bir Boyutlu Eleman

Bir boyutlu eleman düşünüldüğünde, bu elemanın enterpolasyon denklemi kolay integrasyonu sağladığından, bir lokal koordinat sistemine fazla ihtiyacımız olmaz. İntegrasyon, eleman koordinat sistemi i düğümüne yerleştirilerek, biraz daha basitleştirilebilir, (Şek. 3.7). Koordinat dönüşümü;

$$x = X_i + s$$

dir ve bu, şekil fonksiyonlarını ifade eden (3.5) 'de yerine yazılırsa;

$$N_i = \frac{X_j - X_i - s}{L} = 1 - \frac{s}{L} \quad (3.32)$$

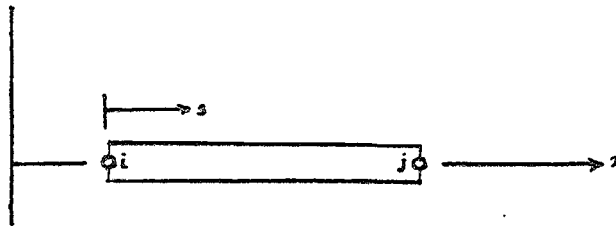
ve

$$N_j = \frac{X_i + s - X_i}{L} = \frac{s}{L} \quad (3.33)$$

elde edilir. Bu elemanın denklemi,

$$\phi = \left(1 - \frac{s}{L}\right) \Phi_i + \left(\frac{s}{L}\right) \Phi_j \quad (3.34)$$

olur.



Şek. 3.7 Bir boyutlu eleman için yerel koordinat sistemi.

3.5.2 Alan Koordinatları

Üçgen eleman için popüler bir koordinat sistemi, Şek. 3.8a'da gösterilen L_1 , L_2 ve L_3 gibi üç koordinat oranını tanımlayarak elde edilen, doğal koordinat sistemidir. Her bir koordinat, bir kenardan dik uzaklık olan s 'nin, yine aynı kenarın yüksekliği olan h 'a oranıdır. Bu, Şek. 3.8b'de gösterilmiştir. 'in, $0 \leq L_1 \leq 1$ şeklinde, 0 ile 1 arasında değişen bir uzunluk oranı olduğu açıktır. Aynı şey L_2 ve L_3 için de geçerlidir. L_1 sabitinin doğrusu, Şek.3.8c'de gösterilmiştir. Bu doğruların herbiri, L_1 'in kendisinden ölçülen kenara paraleldir.

L_1 , L_2 ve L_3 koordinatlarının değerleri, alt üçgenlerin alanlarının, toplam alana oranını verdiği için, alan koordinatı olarak isimlendirilirler. Şek.3.8b'deki B noktasını, Şek.3.9'da gösterildiği gibi düşünelim. Gölgeleştirilmiş (B,j,k) üçgeninin alanı olan A_1 ,

$$A_1 = \frac{bs}{2} \quad (3.36)$$

iken, (i, j, k) üçgeninin alanı olan A_t ,

$$A_t = \frac{bh}{2} \quad (3.35)$$

ile verilir. A_1/A_t oranını oluştururularsa,

$$\frac{A_1}{A_t} = \frac{s}{h} = L_1$$

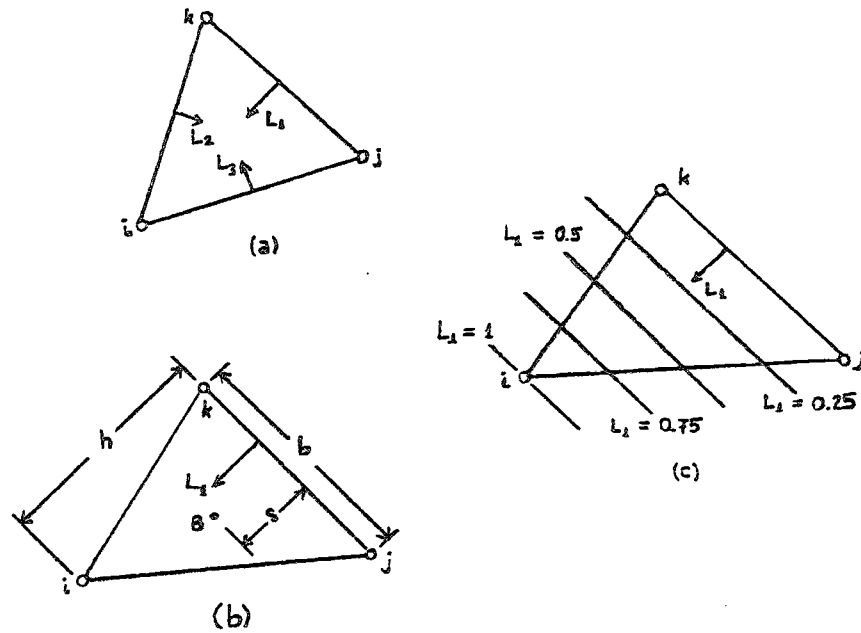
olur. L_1 alan koordinatı,

$$L_1 = \frac{A_1}{A_t} \quad (3.37)$$

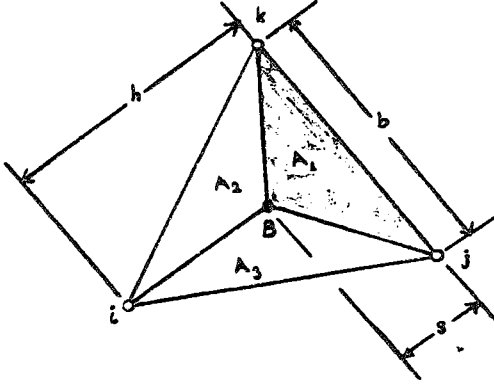
ifadesinden de görüldüğü gibi, Şek. 3.9'daki gölgeli alanın toplam alana oranıdır. Benzer denklemler, L_2 ve L_3 için de

$$L_2 = \frac{A_2}{A_t} \quad \text{ve} \quad L_3 = \frac{A_3}{A_t} \quad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. $A_1 + A_2 + A_3 = A_t$ olduğundan, $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ 'dir.



Şek. 3.8 Bir üçgen için alan koordinat sistemi.



Şek. 3.9 Bir üçgen içindeki bir noktayla ilişkili üç alan.

(3.39) denklemi, üç koordinat değeri arasındaki ilişkiyi verir. Bu üç koordinat bağımsız olduğundan, bu tip bir denklemin beklenmesi gerekir. Herhangi bir noktanın konumu, bu koordinatların sadece ikisi kullanılarak tam olarak belirlenebilir. (3.39) ile beraber L_1 , L_2 ve L_3 'ün özelliklerinin bir incelemesi, oldukça ilginç sonuçlar verir. Koordinat değişkenleri olan, L_1 , L_2 ve L_3 aynı zamanda bu simpleks lineer eleman için,

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3 \quad (3.40)$$

denklem formuyla ifade edebileceğimiz, şekil fonksiyonlarıdır. Şek.3.8a'dan,

$$L_1 = \begin{cases} 1 & i \text{ düğümü için} \\ 0 & j, k \text{ düğümleri için} \end{cases}$$

olduğu açıktır ve benzer özellikler L_2 ve L_3 için de geçerlidir. İlaveten (3.39) denklemi bize, herhangi bir nokta için şekil fonksiyonlarının toplamının bir'e eşit olduğunu gösterir ve bu yüzden yaklaşım için, bu bölümde sonra tartışılacak olan kriter sağlanır. Gerçekte, eğer aşağıdaki ilişkiler ile başlanır

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_i + L_2 X_j + L_3 X_k \\ y &= L_1 Y_i + L_2 Y_j + L_3 Y_k \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

ve bu ilişkiler L_1 , L_2 ve L_3 için çözümlerse, (3.30)'a özdeş denklemler elde edilecektir. (3.41)'deki ilk iki denklem, düğüm değerlerin bir fonksiyonu olarak x ve y 'nin koordinat yerlerini verir. Bu denklemler, x ve y uzaklık bileşenleri olduklarından ve bir vektörün bileşenlerinin düğüm değerlerinin bir fonksiyonu olarak açıklanabildiğini daha önce gördüğümüzden, geçerlidir.

Bu alan koordinat sistemini kullanmanın avantajı, alan integrallerinin ve uzunluğunun hesaplanmasını basitleştiren integral denklemlerinin varlığıdır. Bu integral denklemler aşağıda özetlenmiştir.

$$\int_{\zeta} L_1^a L_2^b d\zeta = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} \zeta \quad (3.42)$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A \quad (3.43)$$

(3.43) denkleminin kullanımı, N_i ve N_j , x ve y 'nin fonksiyonları olmak üzere,

$$\int_A N_i N_j dA$$

çarpımı hesaplanarak görülebilir. Bu alan integrali,

$$\begin{aligned}\int_A N_i N_j dA &= \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1! 2! 0!}{(1+1+0+2)!} 2A \\ &= \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}\end{aligned}$$

dir. L_1 ve L_2 alan koordinatları, Şek. 3.8a'da gösterildiği gibi, N_i , N_j şekil fonksiyonlarına karşı gelir. N_k çarpımında olmadığından, c 'yi sıfır yapan, L_3 'ün sıfırinci kuvvetini alırız.

(3.42) denklemi, elemanın bir kenarı boyunca, uzunluğunun bir fonksiyonu olan integralleri hesaplamak için kullanılır. Böylece ζ büyüklüğü, bahsedilen kenarı tanımlayan iki düğümün arasındaki uzaklıktır. (3.42) ve (3.43)'ün gerçek uygunluğu, özel uygulamalar düşünüldüğünde, ortaya çıkacaktır.

3.5.3 HACİM KOORDİNATLARI

Tetrahedron eleman için doğal koordinat sistemi, alan koordinatlarının geliştirilmesinde kullanılan ile hemen hemen aynı yöntemle geliştirilir. Her biri bir kenara dik dört uzaklık oranı olan, L_1 , L_2 , L_3 ve L_4 kenardan dik uzaklığa uzaklığın, karşı tepeye oranıdır. Bu sonuç koordinatlar, hacim koordinatları olarak adlandırılır (3.10) ve

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (3.44)$$

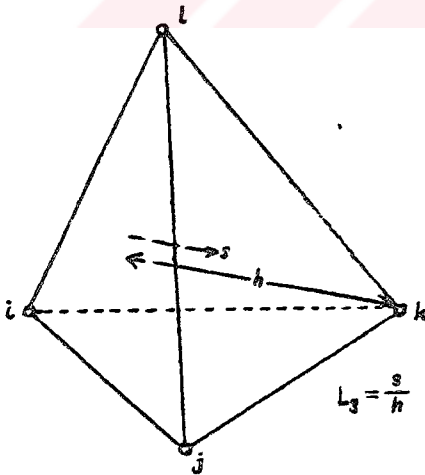
ile ilişkilidir. Lineer tetrahedral için şekil fonksiyonları, hacim koordinatlarıdır veya

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3, \quad N_l = L_4 \quad (3.45)$$

dir. Hacim koordinatlarını kullanmanın avantajı,

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a! b! c! d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (3.46)$$

olduğundan, hacim integrallerinin hesaplanmasındaki kolaylıktır.



Şek. 3.10 Dörtüzlü bir eleman için, L_3 hacim koordinatı.

3.6 ENTERPOLASYON POLİNOMUNUN ÖZELLİKLERİ

(3.3), (3.7) ve (3.13) polinom denklemleri, eleman içindeki vektörel ve skaler büyüklüklere yaklaşım için, kullanılmışlardır. Çünkü, çok önemli özelliklere sahiptirler: Düğüm değerler eşit olduğunda doğru sonuçlar verirler ve aynı zamanda elemanlar arasındaki sürekliliği sağlarlar.

Sonlu eleman metodu; düğüm değerlerin nümerik olarak özdeş olması halinde, enterpolasyon denklemine, elemanın her yerinde sabit bir değer verecek şekilde, elemanın boyutu küçültülürse, doğru cevaba yakınsayacaktır. Sabit bir değer varlığı aynı zamanda, gradyenin yok olması gerektiğini gösterir.

Eleman enterpolasyon denklemi, eğer öyle bir değer varsa, sabit bir değer modelini yapmalıdır. Bu kriter, şekil fonksiyonlarına bir kısıt koyar. C , r düğümüne sahip eleman içinde skaler sabit bir değer olmak üzere, eleman düğüm değerlerinin $\Phi_i = \Phi_j = \Phi_k = \dots = \Phi_r = C$ olduğunu kabul edelim. ϕ için genel form,

$$\phi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k + \dots + N_r\Phi_r$$

ir bu,

$$\phi = (N_i + N_j + N_k + \dots + N_r)\Phi_i$$

olarak da yazılabilir. Fakat, $\phi = C = \Phi_i$ olduğundan,

$$\sum_{\beta=1}^r N_{\beta} = 1 \quad (3.47)$$

ir. Eleman içindeki her bir noktada, şekil fonksiyonlarının toplamı, bire eşit olmalıdır. Eğer bu kriter ihkate alınmazsa, ϕ 'nin yaklaşım polinomu, böyle bir şart var olduğunda, sabit bir değer vermeyecektir.

Bir boyutlu elemanlar için (3.35)'te verilen,

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad \text{ve} \quad N_k = \frac{x - X_i}{L}$$

olarak ifade edilen şekil fonksiyonları hatırlanır ve bunlar toplanırsa,

$$N_i + N_j = \frac{X_j - x}{L} + \frac{x - X_i}{L} = \frac{X_j - X_i}{L} = \frac{L}{L} = 1$$

ilde edilir. Şekil fonksiyonlarının toplamı 1 eder. İki ve üç boyutlu simpleks elemanların bir analizi, bu elemanlara ait şekil fonksiyonlarının aynı zamanda (3.47)'yi sağladığını gösterecektir.

Bir eleman içindeki ϕ (veya yerdeğiştirme, vs.) için sabit bir değer varlığı, herhangi bir doğrultudaki değişimin, sıfır olma zorunluluğunu gösterir. x doğrultusundaki gradyeni düşünelim.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dN_i}{dx}\Phi_i + \frac{dN_j}{dx}\Phi_j + \dots + \frac{dN_r}{dx}\Phi_r$$

Eğer Φ_{β} , C gibi sabit bir değere eşitse, o zaman,

$$\frac{d\phi}{dx} = \left[\sum_{\beta=i}^r \frac{dN_{\beta}}{dx} \right] C = 0 \quad (3.48)$$

ılır. C 'nin sıfır olması gerekmediğinden, (3.48) sadece

$$\sum_{\beta=i}^r \frac{dN_{\beta}}{dx} = 0 \quad (3.49)$$

ldüğünde sağlanır. (3.49)'u açıp tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=i}^r \frac{dN_{\beta}}{dx} &= \frac{dN_i}{dx} + \frac{dN_j}{dx} + \dots + \frac{dN_r}{dx} = \frac{d}{dx} (N_i + N_j + \dots + N_r) \\ &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{\beta=i}^r N_{\beta} \right] \end{aligned}$$

erir. Bununla birlikte, $\sum_{\beta=1}^r N_{\beta} = 1$ olduğundan, x 'e göre türev sıfır olacaktır. Eğer (3.47)'deki kriter sağlanırsa, gradyen üzerindeki kriter otomatik olarak sağlanır.

verir. Bununla birlikte, $\sum_{\beta=1}^r N_{\beta} = 1$ olduğundan, x 'e göre türev sıfır olacaktır. Eğer (3.47)'deki kriter sağlanırsa, gradyen üzerindeki kriter otomatik olarak sağlanır.

3.6.2 Süreklilik

Sürekliliğimiz için diskrit model, herbiri tek bir eleman üzerinde tanımlanmış olan, parçalı sürekli fonksiyonların bir kümesinden oluşur. Bu parçalı sürekli fonksiyonların integre edilebilmesi için, elemanlar arası süreklilik şartının sağlanması gerekir. Adım adım sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun integrali, $f(x)$ sınırlı kaldığı sürece tanımlıdır (Kaplan, 1952). İntegral için,

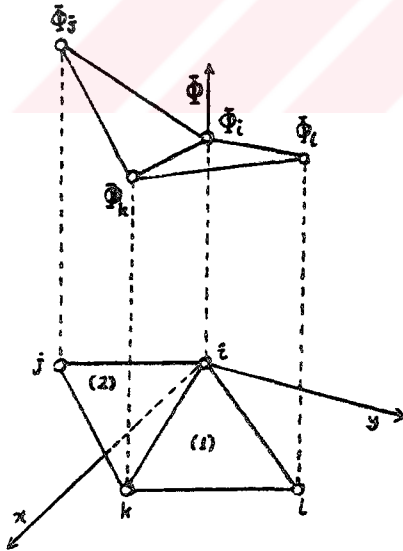
$$\int \frac{d^n \phi}{dx^n} dx$$

tanımlanmıştır. ϕ , sadece n . mertebeden türevde sonlu sıçrama süreksizlikleri var olduğundan emin olmak için, $(n-1)$. dereceye kadar sürekli olmak zorundadır. Konumuz ile bu gereklilik arasında ilişki kurarak şuna varırız: Eğer ifade edilen denklem, ikinci mertebeden türevi ($n=2$) içerirse, yaklaşım fonksiyonunun birinci türevi, elemanlar arasında sürekli olmak zorundadır. Bu teksteki denklemlerin hepsi, birinci mertebeden türevler cinsinden formüle edilebilir, dolayısıyla da enterpolasyon denklemleri, elemanlar arasında sürekli olmalıdır, fakat türevleri de öyle olmak zorunda değildir.

Herhangi iki komşu elemanın ortak bir düğümü olduğundan, bir boyutlu eleman için sürekliliğin varlığı aşikardır. Bununla birlikte, üçgenel eleman daha karışıktır. Şek. 3.11'de gösterilen gibi, merkezi i düğümünde olan koordinat sistemiyle iki komşu eleman düşünelim. Düğüm değerleri, Φ_i , Φ_j , Φ_k ve Φ_l 'dir. Üst indis notasyonu elemanı tanımlamak üzere, ϕ için yaklaşım fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= N_i^{(1)} \Phi_i + N_k^{(1)} \Phi_k + N_l^{(1)} \Phi_l \\ \phi^{(2)} &= N_i^{(2)} \Phi_i + N_j^{(2)} \Phi_j + N_k^{(2)} \Phi_k \end{aligned} \quad (3.50)$$

şekindedir.



Şek. 3.11 İki üçgen eleman arasındaki ortak bir sınırın sürekliliği.

Eğer alan koordinatlarını kullanırsak, ispat çok daha kolay olur. $L_1^{(1)}$ ve $L_2^{(2)}$ alan koordinatlarını kullanarak, i düğümünün karşısındaki kenarlardan ölçülmüştür. Alan koordinatlarını kullanarak, (3.50)'yi tekrar yazarsak,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= L_1^{(1)} \Phi_i + L_2^{(1)} \Phi_k + L_3^{(1)} \Phi_l \\ \Phi^{(2)} &= L_1^{(2)} \Phi_i + L_2^{(2)} \Phi_j + L_3^{(2)} \Phi_k\end{aligned}\quad (3.51)$$

elde edilecektir. $L_3^{(1)}$ ve $L_2^{(2)}$ alan koordinatları ortak sınırdan ölçülmüştür, böylece bu sınır boyunca, $L_3^{(1)} = L_2^{(2)} = 0$ 'dır.

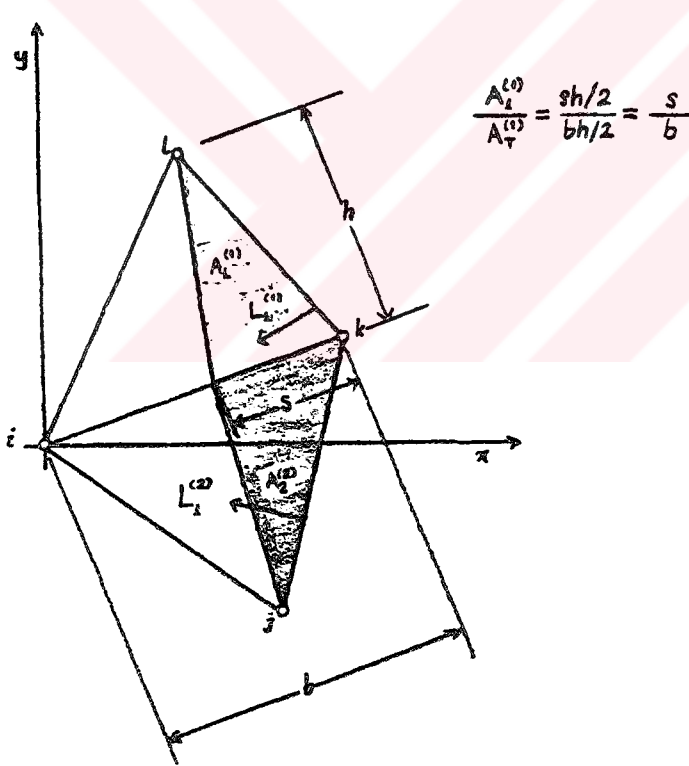
$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} = 1 \quad \text{ve} \quad L_1^{(2)} + L_3^{(2)} = 1$$

olduğundan, (3.51)'deki denklemler,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= L_1^{(1)} \Phi_i + L_2^{(1)} \Phi_k = L_1^{(1)} \Phi_i + (1 - L_1^{(1)}) \Phi_k \\ \Phi^{(2)} &= L_1^{(2)} \Phi_i + L_3^{(2)} \Phi_k = L_1^{(2)} \Phi_i + (1 - L_1^{(2)}) \Phi_k\end{aligned}\quad (3.52)$$

ifadesine indirgenir.

İspat, k düğümünden bir s uzaklığına yerleştirilmiş, ortak sınır üzerinde keyfî bir nokta düşünülerek tamamlanmıştır (Şek. 3.12). $A_1^{(1)}/A_T^{(1)}$ oranı, aynı zamanda $A_1^{(2)}/A_T^{(2)}$ nin değeri olan s/b 'dir. Bu oranların her biri, $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$ kendi alan koordinatlarına eşit olduğundan, ortak sınır üzerindeki, herhangi bir nokta için $L_1^{(1)} = L_1^{(2)}$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu eşitliği (3.52)'de yerine koyarsak, sınır boyunca $\phi^{(1)} = \phi^{(2)}$ elde edilir.



Şek. 3.12 Elemanın bir kenarı üzerindeki bir noktaya ait alan koordinatının değeri.

IV

PARÇALANMIŞ BİR BÖLGE İÇİN ENTERPOLASYON POLİNOMLARI

Bir önceki bölümde, simpleks elemanlar için enterpolasyon polinomları tartışılırken düğümsel koordinatlar hiç bir zaman nümerik olarak belirtilmemiştir. Bu yüzden, eleman boyutu ve yönelimi, eldeki ihtiyaçları karşılamak için değişebilir. Bu özellik, sonlu eleman metodunun önemli bir avantajıdır. Boyut ve yönelim seçmedeki serbestlik, çeşitli elemanlar için, çok genel bilgisayar alt rutinlerinin yazılabilmesini ve gerektiği kadar sık kullanılabilmesini mümkün kılar. Bu alt rutinler, düzenli veya düzensiz sınırlı bölgeler üzerinde, değiştirilmeksizin kullanılabilir.

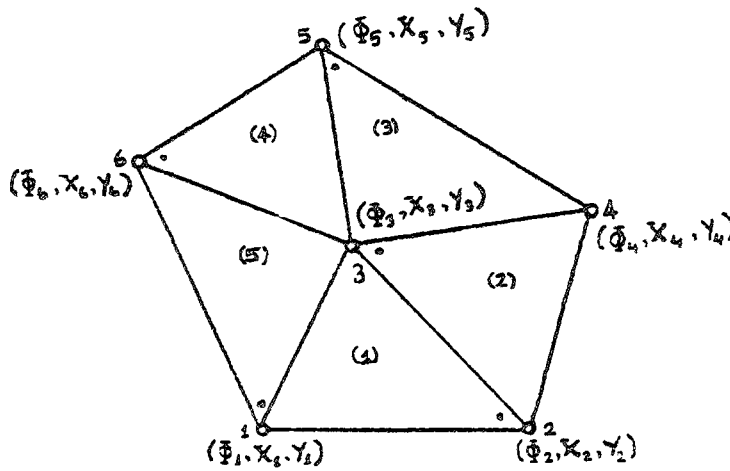
Şimdi, bir tek elemanı değil, bölgenin tamamını temsil eden denklemler kümesini göz önüne alalım. Daha da özel olarak, her bir elemanı bölgenin içine alınması ve enterpolasyon denklemini global koordinatlar ve global düğüm değerler cinsinden açıklanması istenir. Skaler büyüklüklerle başlanır ve sonra sonuçlar vektörel büyüklükleri içerecek şekilde genelleştirilir.

4.1 SKALER BÜYÜKLÜKLER

Önceki bölümde bahsedilen enterpolasyon polinomunun genel formu; e , r düğümlü keyfi bir elemana ait indis olmak üzere,

$$\phi^{(e)} = [N] \{ \Phi \} = \left[N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, N_k^{(e)} \dots N_r^{(e)} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \vdots \\ \Phi_r \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

şekindedir. Elemanı bölgenin içine koyma tekniği, Şek. 4.1'de gösterilen basit beş elemanlı şema kullanılarak gösterilebilir. Düğümler, birden sekize kadar numaralanmıştır. Global serbestlik dereceleri, $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ ve Φ_6 'dır. (X_β, Y_β) , $\beta = 1, 2, \dots, 6$ düğümsel koordinatların bulunduğu varsayılmıştır. Eleman numaraları, parantezler içinde verilmiştir.



Şek. 4.1 Uygun şekilde etiketlenmiş beş-elemanlı bölge.

i, j ve k eleman indisleri, her bir elemanda başlangıç düğümünün yeri belirlenir belirlenmez, düğüm sayıları ile bağlantı kurulabilir. Her bir elemanın i düğümü, bir * işaretiyle tanımlanmıştır. Bu düğümün

çimi tamamen keyfidir, fakat kullanıcı her defasında kendini aynı ilişkideki konumda başlarken olacaktır. j ve k düğümleri, i düğümünü, saat yelkovanının tersi yönünde takip eder. i düğümünün zayı, bize, bir eleman için, aşağıdaki eşitlikleri yazma hakkını verir.

$$i=2, \quad j=3, \quad k=1 \quad (4.2)$$

bu tip bir karşılaştırma, diğer elemanlar için de aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$\begin{aligned} 2 \text{ nolu eleman için, } & i=3, \quad j=2, \quad k=4 \\ 3 \text{ nolu eleman için, } & i=5, \quad j=3, \quad k=4 \\ 4 \text{ nolu eleman için, } & i=6, \quad j=3, \quad k=5 \\ 5 \text{ nolu eleman için, } & i=1, \quad j=3, \quad k=6 \end{aligned} \quad (4.2b,c,d,e)$$

bu denklemler, elemanı bölgenin içine koyar, çünkü bu eşitlikler, bir elemanın i, j, k indisleri ile global düğüm sayılarını ilişkilendirir. Bu işlem, eleman düğümlerinin koordinatlarını yerleştirir.

i, j ve k 'nin değerleri, aşağıdaki eleman denklemlerinin kümesini üreten (4.1) ifadesinde yerine azılabilir:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= N_2^{(1)} \Phi_2 + N_3^{(1)} \Phi_3 + N_1^{(1)} \Phi_1 \\ \phi^{(2)} &= N_3^{(2)} \Phi_3 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_4^{(2)} \Phi_4 \\ \phi^{(3)} &= N_5^{(3)} \Phi_5 + N_3^{(3)} \Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4 \\ \phi^{(4)} &= N_6^{(4)} \Phi_6 + N_3^{(4)} \Phi_3 + N_5^{(4)} \Phi_5 \\ \phi^{(5)} &= N_1^{(5)} \Phi_1 + N_3^{(5)} \Phi_3 + N_6^{(5)} \Phi_6 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3)'de, düğüm değerleriyle çarpılan şekil fonksiyonları, i, j, k için nümerik değerleri şekil fonksiyon denklemlerinde yerine koyarak hesaplanabilir. i, j, k notasyonları ile $N_k^{(e)}$ şekil fonksiyonu,

$$N_k^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} [a_k^{(e)} + b_k^{(e)}x + c_k^{(e)}y] \quad (4.4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned} a_k^{(e)} &= X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k^{(e)} &= Y_i - Y_j \\ c_k^{(e)} &= X_j - X_i \end{aligned}$$

dir. Eğer beşinci elemanı düşünürsek, $i=1, j=3$ ve $k=6$ 'dır (4.2e). Bu değerler (4.4)'de yerlerine yazılırsa,

$$N_6^{(5)} = \frac{1}{2A^{(5)}} [a_6^{(5)} + b_6^{(5)}x + c_6^{(5)}y] \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} a_6^{(5)} &= X_1 Y_3 - X_3 Y_1 \\ b_6^{(5)} &= Y_1 - Y_3 \\ c_6^{(5)} &= X_3 - X_1 \end{aligned}$$

dir. (4.3)'deki $N_6^{(5)}$ ve $N_6^{(4)}$ şekil fonksiyonları, $A^{(4)}$, $A^{(5)}$ 'e eşit olabilse de tamamen farklı büyüklüklere sahiptir. $N_6^{(4)}$ 'deki sabitler,

$$a_6^{(4)} = X_3 Y_5 - X_5 Y_3$$

$$b_6^{(4)} = Y_1 - Y_3 \quad (4.6)$$

$$c_6^{(4)} = X_5 - X_3$$

r. (4.5) ve (4.6)'nın karşılaştırılırsa, $N_6^{(4)}$ ile $N_6^{(5)}$ 'in aynı olmadıkları açıkça görülür.

(4.3) denklemi, asıl amacımızı sağlar. Aynı elemanlar, tek bir bölge içinde birleştirilmiştir ve interpolasyon fonksiyonları, 3. bölümde kullanılan i, j, k keyfi değerleri yerine, global koordinatlar ve lokal düğüm değerleri cinsinden yazılmışlardır.

4.3 denklemi, belirli bir elemana ait global düğüm değerler cinsinden yazılabilir. 4.3'ü oluşturan denklemler, aynı zamanda, bütün global düğüm değerlerin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Biz bunu, eleman denklemlerinin açık formu olarak yazmayı tercih ederiz. (4.3)'ün açık formu,

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2 + N_3^{(1)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6 \\ \phi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_3^{(2)} \Phi_3 + N_4^{(2)} \Phi_4 + N_4^{(2)} \Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6 \\ \phi^{(3)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(3)} \Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4 + N_5^{(3)} \Phi_5 + 0\Phi_6 \\ \phi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(4)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + N_5^{(4)} \Phi_5 + N_6^{(4)} \Phi_6 \\ \phi^{(5)} &= N_1^{(5)} \Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(5)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + 0\Phi_5 + N_6^{(5)} \Phi_6 \end{aligned} \quad (4.7)$$

eklinde dir. Bu denklemler topluluğu, aynı zamanda,

$$\begin{Bmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \\ \phi^{(3)} \\ \phi^{(4)} \\ \phi^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} & N_4^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(3)} & N_4^{(3)} & N_5^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} & N_6^{(4)} \\ N_1^{(5)} & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & N_6^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

olarak da yazılabilir. Metod dijital bilgisayarlar üzerinde uygulandığı zaman, enterpolasyon denklemlerinin kısaltılmış formu kullanılır. Eleman matrislerinin çıkarılması ile ilgili minimizasyon işlemi düşündüğümüz zaman, açık form avantajlıdır.

(4.8)'e bir alternatif olarak, E elemanların sayısı olmak üzere,

$$\phi = \sum_{e=1}^E \phi^{(e)} \quad (4.9)$$

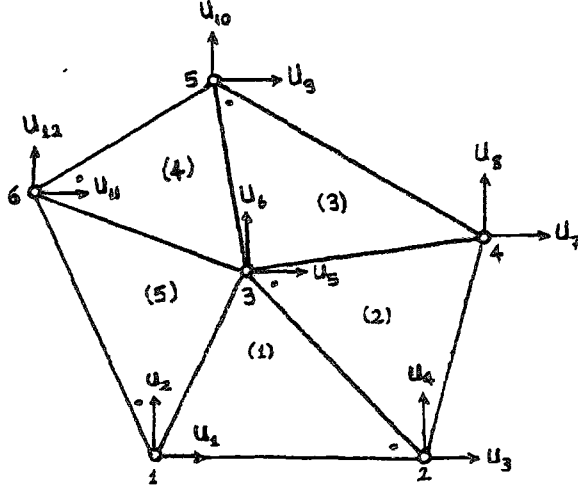
eklinde, sadece eleman denklemlerini toplayarak elde edilen tek bir bölge denklemi içinde, eleman denklemlerini birleştirmektedir. (4.8)'deki denklemler topluluğuna (4.9) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \phi &= [N_1^{(1)} + N_1^{(5)}] \Phi_1 + [N_2^{(1)} + N_2^{(2)}] \Phi_2 \\ &+ [N_3^{(1)} + N_3^{(2)} + N_3^{(3)} + N_3^{(4)} + N_3^{(5)}] \Phi_3 \\ &+ [N_4^{(2)} + N_4^{(3)}] \Phi_4 + [N_5^{(3)} + N_5^{(4)}] \Phi_5 \\ &+ [N_6^{(4)} + N_6^{(5)}] \Phi_6 \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) denklemi, bu tekste kullanılmamıştır. Sadece, varlığından haberdar olunması için, sözü edilmiştir.

4.2 VEKTÖREL BÜYÜKLÜKLER

Vektörel büyüklükler söz konusu olduğu zaman, bir elemanın yerleştirilmesi, skaler büyüklük için gösterilenle aynı sonucun bir doğrusunu takip eder. Şek. 4.1'deki bölge için, uygun şekilde etiketlenmiş düğümsel yerdeğiştirmeler, Şek. 4.2'de gösterilmiştir. (3.23) genel eleman denklemi, kolaylık için burada tekrar yazılmıştır.



Şek. 4.2 Yerdeğiştirme bileşenleri ile gösterilen beş elemanlı bölge.

$$\begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & N_j^{(e)} & 0 & N_k^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 & N_j^{(e)} & 0 & N_k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

i, j ve k eleman düğümleri ile global düğümler arasındaki ilişki, aynı başlangıç düğümlerini kullanmamız şartıyla (4.5)'dekilerle özdeştir. $i=6, j=3, k=5$ olan dört nolu eleman için, yerleştirme denklemleri, aşağıdaki denklemler kümesini üretir:

$$\begin{Bmatrix} u^{(4)} \\ v^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_6^{(4)} & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} & 0 \\ 0 & N_6^{(4)} & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_5 \\ U_6 \\ U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

(4.12) denklemi, $u^{(4)}$ ve $v^{(4)}$ denklemlerinin kısaltılmış formudur. U_1, \dots, U_{12} düğüm değerlerinin hepsini, açık form kapsamıştır. Şek. 4.2'deki bölge için, eleman denklemlerinin açık formu, (4.13)'de verilmiştir.

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 u^{(1)} \\
 v^{(1)} \\
 u^{(2)} \\
 v^{(2)} \\
 u^{(3)} \\
 v^{(3)} \\
 u^{(4)} \\
 v^{(4)} \\
 u^{(5)} \\
 v^{(5)}
 \end{array} \right\} =
 \begin{array}{cccccccccccc}
 N_1^{(1)} & 0 & N_2^{(1)} & 0 & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & N_1^{(1)} & 0 & N_2^{(1)} & 0 & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & N_2^{(2)} & 0 & N_3^{(2)} & 0 & N_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & N_2^{(2)} & 0 & N_3^{(2)} & 0 & N_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(3)} & 0 & N_4^{(3)} & 0 & N_5^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(3)} & 0 & N_4^{(3)} & 0 & N_5^{(3)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 & N_5^{(4)} & 0 & N_6^{(4)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 & N_5^{(4)} & 0 & N_6^{(4)} \\
 N_1^{(5)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6^{(5)} & 0 \\
 0 & N_1^{(5)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6^{(5)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8 \\
 U_9 \\
 U_{10}
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}$$

(4.13)



SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Önceki iki bölümde, tek bir eleman üzerindeki sürekli bir fonksiyona nasıl yaklaşılacağını tartıştık. Sonra bölgenin tamamı üzerinde, bu sürekli fonksiyona yaklaşmak için, parçalı sürekli denklem kümesinin eldesinde, bir çok eleman için sonuçları nasıl birleştirebileceğimizi düşündük. Amacımız, eleman denklemleri, bizim için önemli olan bazı fiziksel parametrelere çok yaklaşacak şekilde, parçalı sürekli fonksiyonların bu kümesini tanımlayan düğümsel büyüklükler için nümerik değerler elde etmektir. Sonlu eleman metodunun ilk kullanılmaya başlandığı dönemlerde, düğüm değerleri, bahsedilen fiziksel işlemlerle ilgili bir integral büyüklüğü minimize ederek, belirleniyordu. Katı mekanik problemlerinde, sistemin potansiyel enerjisi minimize edilmiştir. Bu, eleman denklemlerini, düğümsel yer değiştirmeler için çözülebilen, cebirsel denge denklemlerinin bir kümesine dönüştürür. Alan problemlerinde (ısı transferi, yeraltı suları, manyetik alanlar, v.b.), bir fonksiyonelin integrali, minimize edildi. Bu fonksiyonel, onu minimum yapan ve aynı zamanda sınır koşullarını ve diferansiyel denklem ifadesini sağlayan herhangi bir fonksiyon özelliğine sahiptir. Son zamanlarda, düğüm denklemleri sistemi, bir ağırlıklı kalan yaklaşımı kullanılarak çıkarılmıştır.

Bir integral büyüklüğün minimizasyonunu kullanarak, sonlu eleman denklemlerinin çıkarılması, bu bölümde açıklanmıştır. Alan problemleri için düğümsel denklemlerin çıkarılmasını gösteren, kısa bir örnek düşünerek başlıyoruz. Bu örnek, eleman integrallerinin hesaplanmasından önce, minimizasyon işleminin bitirilebileceğini göstermek için tekrar çalışılmıştır. Üç boyutlu alan problemleri için, sonlu eleman denklemlerinin genel olarak çıkarılması, aşağıdaki örnek problemde verilmiştir. Bölüm, katı elastikiyet problemleri için, sonlu eleman denklemlerinin genel olarak çıkarılmasıyla sonuçlandırılmıştır. Alan ve elastikiyet problemlerinin her ikisi için, son sonuçlar, özel uygulama alanları düşünüldüğünde hesaplanabilen hacim ve yüzey integralleri cinsinden bırakılmıştır.

Konunun standart terminolojisine ait, önceki bazı bilgiler burada da geçerlidir. Onların kabul edilen işaretleri ile birlikte, değişik büyüklüklerin birleşimleri, uygulama bölümünde tartışılmıştır.

5.1 BİR ÇUBUKTAKİ ISI İLETİMİYLE İLGİLİ BİR ÖRNEK

Minimizasyon işleminin tümü, bir çözümde adım adım ilerleyerek ve basit bir şema düşünülerek, en iyi şekilde gösterilebilir. Kısa bir analiz için kullanılan şema, yalıtılmış bir çubukta bir boyutlu ısı akışıdır (Şek. 5.1a). Çubuk bir duvara monte edilmiştir ve belirli bir q ısı girişine sahiptir. Diğer ucu sabittir ve bir h iletim katsayısına ve ortamın çevresinde T_{∞} °C sıcaklığına sahiptir. Çubuk yalıtılmıştır, bu yüzden, dairenin yüzeyinde hiç bir ısı kaybı olmaz.

Çubuk içindeki ısı dağılımı için, diferansiyel denklem ifadesi,

$$K_{xx} \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (5.1)$$

dir. Sınır koşullarıysa,

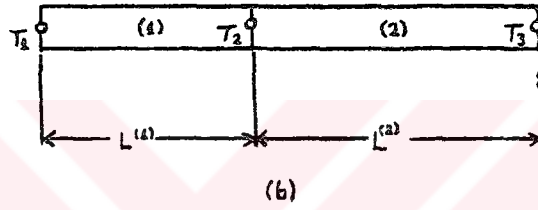
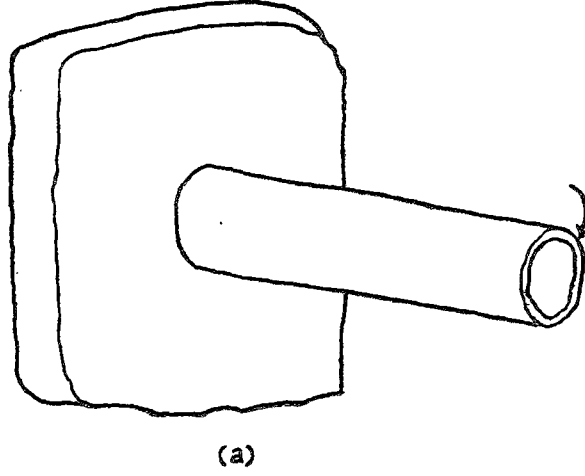
$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad x = 0 \quad (5.2)$$

ve

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + h(T - T_{\infty}) = 0, \quad x = L \quad (5.3)$$

dir. Burada K_{xx} , maddenin termal iletkenliğidir. Eğer ısı çubuğun dışına doğru hareket ediyorsa, q ısı akışı, pozitifdir.

Sınır koşulları ile birlikte 5.1 denklemi, ifade ettiği problemleri tek şekilde tanımlar ve sonlu fark tekniği kullanılarak bulunan nümerik çözümler için başlangıç noktasıdır. Varyasyonların hesabı, bu ısı transfer probleminin formüle edilmesi için alternatif bir metod sağlar.



Şek. 5.1 Bir findeki ısı transferinin, iki elemanla modellenmesi.

$$x = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2}h(T - T_\infty)^2 \right] dS \quad (5.4)$$

fonksiyonelinin minimizasyonunu bulmamıza yarayan hesaplamalar,

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + q + h(T - T_\infty) = 0 \quad (5.6)$$

sınır koşulları sağlanmak üzere,

$$K_{xx} \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (5.5)$$

diferansiyel denkleminin ihtiyacı duyar. 5.5 ve 5.6 diferansiyel denklemleri, 5.1, 5.2 ve 5.3 denklem ifadelerine özdeşdir. Bundan dolayı, (5.4)'deki x 'i bir minimum yapan herhangi bir ısı dağılımı, aynı zamanda diferansiyel denklem ifadesini sağlar ve bu yüzden çalışılan problem için bir çözümdür. (5.2) ve (5.3) sınır koşullarının her ikisi, (5.4)'deki yüzey integrali, çubuğun her bir ucunda birer tane olacağı şekilde iki parçaya ayrılmak zorunda olduğundan, (5.6) içinde yer alır.

5.4 denklemi, her bir düğümde, ısıyı belirlemek için başlangıç noktasıdır. Her biri tek bir eleman

$$T^{(2)} = N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3 \quad (5.7)$$

dir. Şekil fonksiyonları, (3.5)'te tanımlandığı gibidir:

$$N_i^{(1)} = \frac{X_j - x}{L^{(1)}}, \quad N_j^{(1)} = \frac{x - X_i}{L^{(1)}}$$

Örneğimiz için fonksiyonel formülasyon, q ve h belirli ve S_1 ve S_2 yüzey alanları olmak üzere, şu şekilde ayrılabilir:

$$x = \int_V \frac{1}{2} K_{xx} \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]^2 dV + \int_{S_1} q T(x) dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [T(x) - T_\infty]^2 dS \quad (5.8)$$

x 'in değeri, $T(x)$ ısı değeri yerine yazılarak ve enterpolasyon hesaplanarak elde edilir.

Yüzey integralleri, yüzeyler düğüm noktalarında yerleştirildiklerinden, kolayca hesaplanabilirler. A_1 , bir nolu düğümdeki alan olmak üzere, q ısı akışını içeren integral ile başlanırsa,

$$\int_{S_1} q T(x) dS = q T_1 \int_{S_1} dS = q T_1 A_1 \quad (5.9)$$

elde edilir. $T(x)$ ısı fonksiyonu, yüzey bir nolu düğümde olduğundan, T_1 'e indirger. h iletim katsayısını içeren yüzey integrali A_3 ve T_3 , sırasıyla 3 nolu düğümdeki, alan ve sıcaklık olmak üzere şöyledir:

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{h}{2} [T(x) - T_\infty]^2 dS &= \frac{h}{2} (T_3 - T_\infty)^2 \int_{S_2} dS \\ &= \frac{h A_3 (T_3 - T_\infty)^2}{2} = \frac{h A_3}{2} (T_3^2 - 2 T_3 T_\infty + T_\infty^2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

İsının türevi, (5.8) hacim integraline dahil edilir. (5.7) diferansiyellenirse,

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2) \quad (5.11)$$

ve

$$\frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)$$

elde edilir. dT/dx için denklem, bölgenin tümü üzerinde sürekli olmadığından, hacim integrali, iki integrale bölünmelidir. Ayrılma, yerine koyma ve integrasyon sonucunda,

$$\int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV = \frac{K_{xx}^{(1)} A^{(1)}}{2 L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + \frac{K_{xx}^{(2)} A^{(2)}}{2 L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2 \quad (5.12)$$

elde edilir. Alanın sabit bir kesiti, her bir elemanda kabul edildi ve $dV = A^{(e)} dx$ eşitliği, integral hesaplanırken kullanıldı.

Hacim integralinin, bir integral polinomuna ayrılmasında gereklilik (her bir eleman için bir tane olmak üzere), sonlu eleman metodunun önemli bir karakteristiğini üretir, ki bu karakteristik, meteryal özelliklerinin bir elemandan diğerine değiştirilmesini mümkün kılar.

χ fonksiyonelinin değeri, (5.9), (5.10) ve (5.12) toplanarak elde edilir. Sonuç, düğümsel ısıların bir fonksiyonu olan bir denklemdir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{C^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2 T_1 T_2 + T_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2 T_2 T_3 + T_3^2) \\ &+ q A_1 T_1 + \frac{h A_3}{2} (T_3^2 - 2 T_2 T_\infty + T_\infty^2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Burada $C^{(1)} = A^{(1)} K_{xx}^{(1)} / L^{(1)}$ ve $C^{(2)} = A^{(2)} K_{xx}^{(2)} / L^{(2)}$ 'dir.

T_1 , T_2 ve T_3 'ün doğru değerleri, x 'i minimum yapar. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{dT_1} &= C^{(1)}T_1 - C^{(1)}T_2 + qA_1 = 0 \\ \frac{d\chi}{dT_2} &= -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - C^{(2)}T_3 = 0 \\ \frac{d\chi}{dT_3} &= -C^{(2)}T_2 + [C^{(3)} + hA_3]T_3 - hA_3T_\infty = 0\end{aligned}\quad (5.14)$$

5.14 denklemleri tekrar düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & [C^{(1)} + C^{(2)}] & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(3)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ hA_3T_\infty \end{Bmatrix}\quad (5.15)$$

veya daha genel olarak, matris formu,

$$[K]\{T\} = \{F\}\quad (5.16)$$

elde edilir. (5.16)'daki $[K]$ katsayılar matrisine genellikle, global katılık matrisi olarak baş vurulur. Daha uygun bir isim, ısı transferi problemiyle ilgilendiğimizden, global yönetim matrisi olabilir. $\{F\}$ sütun vektörü, global kuvvet vektörüdür.

Analizimizdeki son adım, fiziksel karakteristikler için bazı değerler kabul etmek ve T_1 , T_2 ve T_3 ısıları için nümerik değerler elde etmektir.

$$K_{xx} = 75 \text{ W/cm} - ^\circ\text{C}$$

$$h = 10 \text{ W/cm}^2 - ^\circ\text{C}$$

$$A = \pi \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ cm çap})$$

$$L = 7.5 \text{ cm}$$

$$q = -150 \text{ W/cm}^2 \quad (\text{Isı bölgesinin içine doğru hareket ettiği için, negatif})$$

ve $T_\infty = 40 ^\circ\text{C}$ olduğunu farz edelim. Katsayılar,

$$C^{(1)} = \frac{\pi(75)}{3.75} = 20\pi = C^{(2)}$$

$$hA_3 = 10\pi$$

$$-qA_1 = -(-150)\pi = 150\pi$$

ve

$$hA_3T_\infty = 10(\pi)(40) = 400\pi$$

olur. Denklemlerin son hali,

$$\pi \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \pi \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 400 \end{Bmatrix}\quad (5.17)$$

dir. Bu denklemleri sağlayan dögümsel ısı değerleri, $T_1 = 70$, $T_2 = 62.5$ ve $T_3 = 55$ 'tir.

5.2 ÖRNEK PROBLEMİN TEKRAR İNCELENMESİ

5.15 denklemi, minimizasyon işleminin, düğüm değerler için çözülebilen lineer denklemlerin bir kümesini ürettiğini oldukça net olarak gösterir. Bu işlem, bu denklemleri elde etmek için kullanıldı, fakat dijital bilgisayar üzerinde uygulanmaya hazır değildir. Bu denklemler kümesinin eldesi için, alternatif bir işlem vardır. χ integral büyüklüğü, ait olduğu elemanın bileşenlerine ayrılır ve bu bileşenler, integraller hesaplanmadan önce, düğüm değerlere göre minimize edilir. Sonuç, elemanlar üzerinde hesaplanabilen ve sonra da toplanabilen integrallerin bir kümesidir.

$\chi^{(1)}$, bir nolu eleman için integrallerin toplamı ve $\chi^{(2)}$ de, iki nolu eleman için benzeri bir toplam olmak üzere, χ 'i,

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} \quad (5.18)$$

şeklinde, iki bileşenin toplamı olarak tekrar göz önüne alalım. $C^{(1)} = A^{(1)}K_{xx}^{(1)} / L^{(1)}$ ve $C^{(2)} = A^{(2)}K_{xx}^{(2)} / L^{(2)}$ olmak üzere,

$$\chi^{(1)} = \int_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{2L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 dx + \int_{S^{(1)}} qT_1 dS \quad (5.19)$$

$$\chi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{2L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2 dx + \int_{S^{(2)}} \frac{h}{2} (T_3 - T_\infty)^2 dS$$

şeklinde. Burada, bütün düğüm değerlere göre, χ 'in her bir bileşeninin diferansiyelini alalım. $\chi^{(1)}$ ile başlayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi^{(1)}}{dT_1} &= \int_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2)(-1) dx + \int_{S^{(1)}} q dS \\ \frac{d\chi^{(1)}}{dT_2} &= \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2) dx \\ \frac{d\chi^{(1)}}{dT_3} &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

İntegraller hesaplandığında,

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\{T\}} = \begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

olarak yazılabilen, denklemler kümesi elde edilir. İkinci bileşenin diferansiyeli alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d\chi^{(2)}}{dT_1} &= 0 \\ \frac{d\chi^{(2)}}{dT_2} &= \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)(-1) dx \\ \frac{d\chi^{(2)}}{dT_3} &= \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)(-1) dx + \int_{S^{(2)}} h(T_3 - T_\infty) dS \end{aligned}$$

veya

$$\frac{d\chi^{(2)}}{d\{T\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -hA_3T_\infty \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

elde edilir.

Düğüm değerlere göre χ 'in minimizasyonu,

$$\frac{d\chi}{d\{T\}} = \frac{d\chi^{(1)}}{d\{T\}} + \frac{d\chi^{(2)}}{d\{T\}} = 0 \quad (5.23)$$

şeklinde dir. Bu yüzden, eğer (5.21) ve (5.22) ifadelerini toplar ve sıfıra eşitlersek, istenen denklemler sistemini elde ederiz. Bu toplam, (5.15)'deki denklemler sistemine özdeş olan,

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & [C^{(1)} + C^{(2)}] & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ -hA_3T_\infty \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

ifadesini verir.

Biraz önce tartışılan işlemde önemli kavram, denklem sisteminin bir defada bir eleman için kurulabilmesidir. (5.23)'de gösterilen elemanlar toplamı, çok sistemli bir işlemdir ve dijital bilgisayarlarda kullanım tercih edilir.

5.3 SONLU ELEMEN DENKLEMLERİ: ALAN PROBLEMLERİ

Önceki bölümlerde tartışılan bir boyutlu ısı transfer problemi, kısmi diferansiyel denklemlere benzer şekilde ifade edilen bir kaç önemli fiziksel problemten sadece biridir. Sınır koşulları;

$$\phi = \phi_B, \quad S_1 \text{ üzerinde} \quad (5.26)$$

ve / veya

$$K_{xx} \frac{d\phi}{dx} \rho_x + K_{yy} \frac{d\phi}{dy} \rho_y + K_{zz} \frac{d\phi}{dz} \rho_z + q + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad S_2 \text{ üzerinde} \quad (5.27)$$

olmak üzere, bu fiziksel işlemlerin herbiri için, diferansiyel denklem ifadesi,

$$\frac{d}{dx} \left(K_{xx} \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(K_{yy} \frac{d\phi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(K_{zz} \frac{d\phi}{dz} \right) + Q = 0 \quad (5.25)$$

şeklindeki, genel quasi-harmonik denklem tarafından kapsanılır. S_1 ve S_2 'nin birleşimi, sınırın tamamını çizer. K_{xx} , K_{yy} ve K_{zz} katsayıları ve q büyüklüğü; x , y ve z 'nin fonksiyonları olabilirler, fakat ϕ 'nin bağımsız olduğu kabul edilmiştir. (5.27)'deki ρ_x , ρ_y ve ρ_z büyüklükleri, yüzeye normal olan bir vektörün doğrultu kosünüsleridir. 5.25 denklemi, ya isotropik yada anisotropik bölgelere uygulanabilir. Koordinat eksenleri, bununla birlikte anisotropik bölgelerde, ana metaryal doğrultularına paralel olmak zorundadır.

Sınır koşulları ile birlikte 5.25 denklemi, üç boyutlu ısı transferi için denklem ifadesidir (Kreith, 1973). Bu durumda K_{xx} , K_{yy} ve K_{zz} , termal iletkenlerdir. Q , kaynağın iç ısı veya kaynaktan yayılan ısı, yüzeyin bir parçası üzerindeki ısı akışı ve h da konveksiyon katsayısıdır. ϕ alan değişkeni, sıcaklıktır. Bir ve iki boyutlu ısı transferi için denklem ifadeleri, $\frac{d\phi}{dy} = 0$ ve / veya $\frac{d\phi}{dz} = 0$ olduğu belirtilerek,

(5.25)'den elde edilebilir. ϕ 'nin belirsiz olduğu bir sınır parçası üzerinde, eğer q ve h 'ın her ikisi de sıfırsa, bu takdirde (5.27), sıfır ısı transferi (yalıtılmış bir sınır) için koşul olan,

$$K_{xx} \frac{d\phi}{dx} \rho_x + K_{yy} \frac{d\phi}{dy} \rho_y + K_{zz} \frac{d\phi}{dz} \rho_z = 0 \quad (5.28)$$

fadesine indirgenir.



VI

KONVEKSİYON VE KONDÜKSİYON YOLUYLA ISI TRANSFERİ

Bir bölge içindeki ısı dağılım bilgisi, mühendislik problemlerinin çoğu için önemli bir yer tutar. Bölge içinde yer değiştiren veya uzaklaşan ısının miktarı, ısı dağılımı bilindiğinden hesaplanabilir. Isı dağılımı, aynı zamanda basınç dağılımını da etkiler. Termal basınçlar, bazı denge durumundan bir ısı gradyeni durumuna geçen ve her yönde genişlemeye izin vermeyen, her bölgede meydana gelirler. Bu basınçlar, jet motorları ve buhar jeneratörleri gibi döner aletlerin dizaynında önemli bir yer tutar. Termal basınçların hesaplanmasında ilk adım, bölge içindeki ısı dağılımının belirlenmesidir.

Bu bölümdeki amaç, iletken bir bölge içindeki ısı dağılımının belirlenmesinde sonlu eleman metodunun kullanılmasını tartışmaktır.

6.1 ISI TRANSFER DENKLEMLERİ

Katlarda ısı iletimi için kısmi diferansiyel denklem ifadesi,

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} + K_{yy} \frac{d^2 T}{dy^2} + K_{zz} \frac{d^2 T}{dz^2} + Q = 0 \quad (6.1)$$

eklinde olup, burada T , sıcaklık; K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} , x , y ve z doğrultularındaki $kW/m \cdot ^\circ K$ cinsinden verilen iletkenlikler; Q , bölge içinde üretilen ve kW/m^3 olarak ifade edilen ısıdır. Isı, bölgenin içine yönderilirse Q , pozitifdir.

(6.1) ile birleştirilen sınır koşulları, iki farklı formda ifade edilebilirler. Eğer sınırın bir kısmı boyunca, ısı biliniyorsa, bu takdirde,

$$T = T_B(s) \quad (6.2)$$

dir. Bu ifadede T_B , s uzunluklu yüzeyin bir fonksiyonu olabilen sınır ısıdır. Eğer ısı, sınırdan $h(T - T_\infty)$ konveksiyondan veya bir q ısı akışından dolayı artarsa veya düşerse, bu takdirde

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} l_x + K_{yy} \frac{dT}{dy} l_y + K_{zz} \frac{dT}{dz} l_z + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (6.3)$$

dir. Burada h , $kW/m^2 \cdot ^\circ K$ olarak konveksiyon katsayısı;

T sınır ısı (bilinmiyor), $^\circ K$;

T_∞ akışkan ısı (biliniyor), $^\circ K$;

l_x , l_y ve l_z doğrultu kosünüsleri

ve q , eğer ısı bölgenin dışına doğru hareket ediyorsa, pozitif olan ve kW/m^2 olarak verilen ısı akışıdır. q ısı akışı ve $h(T - T_\infty)$ konveksiyon ısı kaybı, aynı sınır parçası üzerinde oluşmaz. Eğer konveksiyon ile ısı kaybı varsa, bu halde q ile ısı kaybı veya artışı olmaz, bunun tersi de doğrudur.

6.1 ve 6.3 denklemleri, istenmeyen koordinatlarla birlikte şu terimler silinerek basit bir şekilde, bir ve iki boyutlu problemlere uygulanabilir. Bir boyutlu problemin denklem ifadesi,

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} l_x + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (6.5)$$

sınır koşulu olmak üzere,

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0 \quad (6.4)$$

şekindedir. Eğer konveksiyon yoluyla veya sızıntı yoluyla ısı transferi sıfırsa; (6.3) ifadesi,

$$\frac{dT}{dn} = 0$$

adesine indirgenir. Bu iletken olmayan, yalıtılmış sınırlarda var olan koşuldur (n , dışarıya doğru normaldir).

(6.1) ile ilgili bir fonksiyonelin minimizasyonu, 5. bölümde tartışılmıştır. Bir boyutlu ısı transferini tartışmaya başlamadan önce, bu işlemin sonuçlarının özetlenmesi uygun olur. Eleman kondüksiyon matrisi,

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_1^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad (6.6)$$

eklinde dir. $[N^{(e)}]$ matrisi şekil fonksiyonlarından oluşur ve

$$T^{(e)} = [N^{(e)}] \{T\} \quad (6.7)$$

ir. $[N^{(e)}]$, x , y ve z 'e göre diferansiyellendirilerek, $[B^{(e)}]$ elde edilirken, iletkenlik değerlerinden oluşan $[D^{(e)}]$ matrisi,

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} K_{xx}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

eklinde dir. $[B^{(e)}]$ ile olan ilişki,

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{dT}{dx} \\ \frac{dT}{dy} \\ \frac{dT}{dz} \end{Bmatrix} = [B^{(e)}] \{T\} \quad (6.9)$$

olarak tanımlanır.

$\{f^{(e)}\}$ eleman matris denkleminin kolon vektörü olan kısmı, (5.46)'da

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV + \int_{S_1^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS - \int_{S_2^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_{\infty} h dS \quad (6.10)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada Q , q , T_{∞} bilinen nümerik değerlerdir.

Biz şimdi, iletim ısı transferi için eleman matrislerinin hesaplanmasını düşünmeye hazırız. Bundan sonra önemle üzerinde duracağımız şey, tek bir eleman üzerindeki denklemler olacaktır. Bu yüzden iki farklı elemanı belirtmek zorunda olduğumuz durumlar hariç, eleman matrislerinin hepsinde bulunan (e) alt indisini atacağız.

6.2 BİR BOYUTLU ISI TRANSFERİ

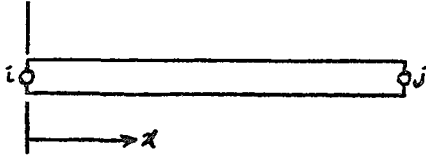
Bir boyutlu lineer eleman için enterpolasyon polinomu,

$$N_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{ve} \quad N_j = \frac{x}{L}$$

olmak üzere,

$$T = N_i T_i + N_j T_j \quad (6.11)$$

dir. Bu şekil fonksiyonları, Şek. 6.1'de gösterildiği gibi, lokal koordinat sistemine bağlı olarak, tanımlanmışlardır. Eleman, bir L uzunluğuna sahiptir.



Şek. 6.1 Lineer bir boyutlu eleman.

(6.7) ve (6.9)'daki matrisler,

$$[N] = [N_i \ N_j] = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right]$$

$$\{g\} = \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{L}T_i + \frac{1}{L}T_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

olur, bu yüzden

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

dir. $[D]$ materyal matrisi,

$$[D] = [K_{xx}] \quad (6.14)$$

şeklindedir.

(6.6)'daki integrallerin hesaplanması, alan kesiti sabit varsayılarak aşağıdaki şekilde yapılır.

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [K_{xx}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A dx$$

$$= \frac{AK_{xx}}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

P , perimetre olmak üzere, $dS = P dx$ olduğundan,

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS = hP \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx \quad (6.16)$$

dır. (6.16)'daki integralin çarpılması ve hesaplanmasından sonra,

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS = \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

ifadesi elde edilir.

Eleman iletkenlik matrisi, (6.15) ve (6.17)'nin toplamıdır veya

$$[k^{(e)}] = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{PhL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

olarak da ifade edilebilir. h , elemanın sınırı üzerinde sıfır olduğundan, (6.18)'in konveksiyon kısmı ortadan kalkar.

(6.10) eleman kuvvet vektöründeki integrallerin hesaplanması,

$$\int_V [N]^T Q dV = QA \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{QAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

ve

$$\int_{S_1} [N]^T q dS = qP \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

ifadelerini verir. Üçüncü integral, form olarak ikincisine özdeş olduğundan, hemen

$$\int_{S_2} [N]^T hT_{\infty} dS = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

yazılabilir. $\{f^{(e)}\}$ için bütün ifade,

$$\{f^{(e)}\} = -\frac{QAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

dir veya $\{f^{(e)}\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ ile kullanmak için yazıldığında,

$$\{f^{(e)}\} = -\left(\frac{QAL - qPL + hT_{\infty}PL}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

şeklindedir.

Bir boyutlu ısı transfer problemi için çok yaygın bir örnek, bir finden ısı kaybıdır. Finin bir ucu, ısı kaynağına bağlanmıştır ve ısı yüzey sınırlarına doğru çevreye yayılarak biter. (6.18) ve (6.23) denklemleri, konveksiyon ile ısı kaybının sadece yüzeyin bir ucundan değil, yüzeyin tamamında oluştuğunu kabul eder. Bir boyutlu elemanın ucundaki ısı transferi ile birleştirilen eleman denklemlerini göz önüne alalım.

Isının sağ uçtaki (j düğümü) yüzeyden kaybolduğu varsayalım. Isı, konveksiyon yoluyla veya belirli bir q ısı akışıyla ya düşer yada artar; Bu yüzden sadece yüzey integralleri göz önüne alınmışlardır. kondüksiyon matrisindeki yüzey integrali,

$$\int_S h[N]^T [N] dS = \int_S h \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} dS$$

olarak ifade edilir. j düğümündeki yüzeyle ilgilendiğimizden, $N_i = 0$, $N_j = 1$ 'dir ve integral,

$$\int_S h[N]^T [N] dS = \int_S h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} dS = \int_S h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dS$$

veya

$$\int_S h[N]^T [N] dS = hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

şeklinde. Açık bir uçtan ısı kaybı olduğu zaman bu matris, (6.18)'e ilave edilmelidir. (6.24)'deki konveksiyon katsayılarının yüzey perimetresi için, bundan farklı olabilmesi akla uygundur.

$\{f^{(e)}\}$ matrisindeki yüzey integralleri,

$$\int_S [N]^T h T_{\infty} dS = h T_{\infty} A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

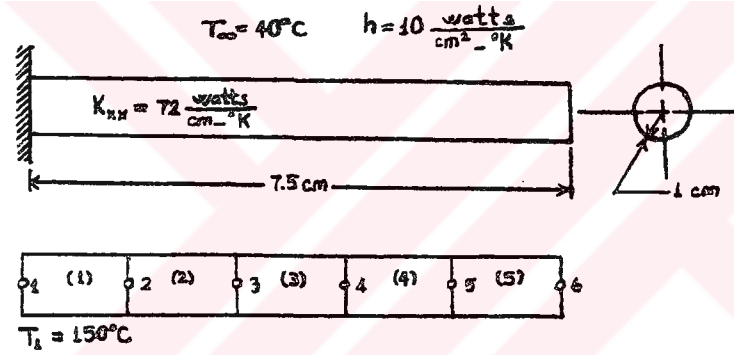
ve

$$\int_S [N]^T q dS = qA \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

olur. (6.18) ve (6.23) ile birlikte (6.24), (6.25) ve (6.26)'nın kullanımı, aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek Problem.

59. Aşağıda gösterilen fiziksel özelliklerle birlikte bir boyutlu bir fin içindeki ısı dağılımını hesaplayın.



Problem 59

Bölge, herbiri 1.5 cm uzunluklu beş elemana bölünür. İlk dört elemana ait eleman matrisleri özdeşdir ve (6.18) ve (6.23) kullanılarak hesaplanabilir. Bu denklemlerde çeşitli parametrelerin değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{AK_{xx}}{L} = 48\pi$$

$$\frac{hPL}{6} = 5\pi$$

$$hT_{\infty}PL = 1200\pi$$

$$hA = 10\pi$$

$$hT_{\infty}A = 400\pi$$

Bir nolu eleman için $[k^{(1)}]$ konduksiyon matrisi,

$$[k^{(1)}] = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

veya

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 48\pi & -48\pi \\ -48\pi & 48\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10\pi & 5\pi \\ 5\pi & 10\pi \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 58 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. İki, üç ve dört nolu elemanlara ait conduction matrisi, $[k^{(e)}]$ 'e özdeşdir. (6.23) eleman kuvvet matrisi, q ve Q sıfır olduklarından,

$$\{f^{(1)}\} = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \quad \text{veya} \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 600\pi \end{Bmatrix}$$

ifadesine indirgenir.

Beş nolu eleman için matrisler, bir nolu eleman artı sağ uca doğru kaybedilen ısı için hesaplanan terimler için belirlenmiş olanlardan ibarettir. $[k^{(e)}]$ conduction matrisiyle başlayalım, yukarıda hesaplanmış olanlara (6.24)'deki sonuçları ilave etmemiz gerekir. $hA=10\pi$ olduğundan, toplam matris,

$$hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10\pi \end{bmatrix}$$

ve

$$[k^{(5)}] = [k^{(1)}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10\pi \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 68 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Beş nolu eleman için eleman kuvvet matrisi,

$$\{f^{(5)}\} = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + hAT_{\infty} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

veya

$$\{f^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 600\pi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 400\pi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 1000\pi \end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

Direkt katılık metodu kullanılarak, eleman matrislerinin hepsi (*) aşağıdaki denklemler sistemini üretir:

$$\begin{bmatrix} 58 & -43 & & & & \\ -43 & 116 & -43 & & & \\ & -43 & 116 & -43 & & \\ & & -43 & 116 & -43 & \\ & & & -43 & 116 & -43 \\ & & & & -43 & 68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

π çarpanı denklemin her iki tarafında da olduğu için kaldırılır. $[K]$ 'daki yazısız boşluklar, sıfır olan katsayıları ifade ederler.

T_1 'in değeri, 150°C olarak bilinir, böylece denklemler sistemi, çözmeden önce değiştirilmiştir. Bu değişiklik, sağ taraftaki kolon matrisini

$$\{F\}^T = \begin{bmatrix} 8700 & 7650 & 1200 & 1200 & 1200 & 1000 \end{bmatrix}$$

aline getirir. Çözüm,

$$\{T\}^T = \begin{bmatrix} 150 & 82.6 & 59 & 48.6 & 44.2 & 42.6 \end{bmatrix}$$

olarak T'yi verir. Teorik değerler (Krieth, 1973, denklem 2-47),

$$\{T_{\text{Teorik}}\}^T = \begin{bmatrix} 150 & 89.9 & 62.8 & 50.6 & 45.2 & 43.3 \end{bmatrix}$$

eklinde ifade olunur. Sonlu eleman metodunun sonuçları, düzgün bir elemanın alt bölümü kullanılmak suretiyle iyi düşünülmüştür. Sonlu eleman çözümü, duvara yakın daha kısa elemanlar kullanılarak iyileştirilebilirdi.

Önceki örneğin alan kesiti sabitti. Bu bir gereklilik değildir. Alan aynı zamanda eleman uzunluğunun bir fonksiyonu olabilir. Eğer eleman alanı, uzunlukla değişirse, bu takdirde eleman matrisleri de değiştirilmelidir. Şimdi bu değişikliği tartışacağız.

Şek. 6.2'de gösterilen elemanı düşünelim. Alan kesiti sol uçtaki A_i 'den sağ uçtaki A_j 'ye kadar değişir. Tartışmamızı, lineer varyasyonu kısıtlayarak, hemen alan için denklemi,

$$A = N_i A_i + N_j A_j \quad (6.27)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada N_i ve N_j , şekil fonksiyonlarıdır.



Şek. 6.2 Değişken alanlı, bir boyutlu eleman.

Sonraki adım, eleman matrislerinin hesaplanmasıdır. $[k^{(e)}]$ ile başlanırsa, (6.15)'in ilk kısmı kullanılarak,

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{K_{xx}}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L A dx \quad (6.28)$$

yazılabilir. (6.28)'deki A bir sabit olmadığından, fakat x 'in bir fonksiyonu olduğundan, A integralden atılamaz. (6.27), yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{K_{xx}}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) A_i + \frac{x}{L} A_j \right] dx$$

veya

$$\frac{K_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{A_i + A_j}{2} \quad (6.29)$$

de edilir. $(A_i + A_j)/2$, ortalama alan olduğundan, (6.29) aynı zamanda

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{K_{xx} \bar{A}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

olarak da yazılabilir. Burada \bar{A} , ortalama alandır. 6.30 denklemi, alan teriminin şimdi ortalama bir değer olması dışında, (6.15)'e özdeştir.

Perimeter içeren yüzey integralleri, benzer bir yolla ele alınabilirler. Perimeter,

$$P = N_i P_i + N_j P_j \quad (6.31)$$

e

$$h \int_S [N]^T [N] dS = h \int_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j^2 \end{bmatrix} P dx \quad (6.32)$$

olarak yazılabilir. İntegral çözümlü, N_i ve N_j yerlerine yazıldıktan sonra, (6.32)'deki ilk katsayı,

$$\int_0^L N_i^2 P dx = \int_0^L \left(N_i^3 P_i + N_i^2 N_j P_j \right) dx = \frac{L}{12} \left(3P_i + P_j \right) \quad (6.33)$$

eklindedir. Yüzey elemanlarına ait bütün denklemler,

$$h \int_S [N]^T [N] dS = \frac{hL}{12} \begin{bmatrix} (3P_i + P_j) & (P_i + P_j) \\ (P_i + P_j) & (P_i + 3P_j) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

e

$$hT_\infty \int_S [N]^T dS = \frac{hT_\infty L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

ür. (6.30) ve (6.34) denklemleri toplandığında, $[k^{(e)}]$ oluşur. Ortalama perimetrenin, gittikçe incelen bir elemanın, eleman denklemlerini elde etmek için, (6.17) veya (6.21)'de yerine konulamayacağı, (6.34) ve (6.35)'den açıkça görülür.

SONUÇLAR

Sonlu eleman metodunun günümüzdeki uygulama alanı oldukça geniştir ve diferansiyel denklemlerle ifade edilebilen, fiziksel problemlerin tamamını içerir. Sonlu eleman metodunun çok sayıdaki avantajlı özellikleri, onun geniş kullanımına katkıda bulunmuştur. Bu özellikleri şöyle sıralayabiliriz:

- *Komşu elemanların meteryal özelliklerinin aynı olması gerekli değildir. Bu, bir çok meteryalden oluşan bir bölgeye, metodun uygulanabilmesini mümkün kılar.*
- *Düzensiz şekilli sınırlara, düzgün kenarlı elemanlar kullanılarak yaklaşılabilir veya eğrisel sınırlı elemanlar kullanılarak da yaklaşılabilir. Bu yüzden metod sınırları kolayca tanımlanan şekillerle sınırlı değildir.*
- *Elemanların boyutları değişebilir. Bu özellik, eleman sıklığının gerektiği kadar azaltılmasını veya çoğaltılmasını mümkün kılar.*
- *Süreksiz yüzeylerin sınır koşulları metod için zorluk teşkil etmez. Karışık sınır koşulları kolaylıkla kullanılabilir.*
- *Yukarıdaki özellikler bir bilgisayar programı içinde kapsanabilir. Bir problem çözülürken, bilgisayar hafızasının kullanılabilirliği ve hesapsal maliyetler, sınırlayıcı koşullardır.*

Sonlu eleman metodunun asıl dezavantajı, bilgisayar imkanlarının ve bilgisayar tesisatının gerekli olmasıdır. Sonlu eleman metodunda hesaplamalar, çok küçük bir problem için bile, elle yapılan hesaplamalar çok fazladır. Dijital bilgisayar, bir ihtiyaçtır ve geniş hafızalı bilgisayarlar, çok karmaşık problemlerin çözümü için gereklidir.

Günümüz teknolojisi, büyük bilgisayarların yapılmasını mümkün kılmuş ve çeşitli ticari ve idari organizasyonlar, bilgisayar programlarının gelişmesine sebep olmuştur. Bu gelişmeler sonlu eleman metodunun önemli sayılan dezavantajlarının hafiflemesini sağlamıştır.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 1 Ocak 1965
Doğum yeri Kargı
İlk öğrenimi Bahçelievler Yıldıztepe İlkokulu
Orta öğrenimi Bahçelievler Bağcılar Lisesi
Yüksek öğrenimi Trakya Üniversitesi ve Yıldız Teknik Üniversitesi
Görevi Araştırma görevlisi