

**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ÖĞRENCİLERİNİN
MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ**

Derya MİRAL

Yüksek Lisans Tezi

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi

Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

2013

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ
ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ
HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ

*(The Ideas About Mathematical Proving Methods of The Students of Secondary
Education Mathematics Teaching)*

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya MİRAL

Danışman: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

ERZURUM
Temmuz, 2013

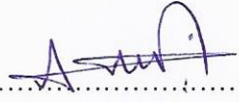
KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ danışmanlığında, Derya MİRAL tarafından hazırlanan “Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin Matematiksel İspat Yöntemleri Hakkındaki Görüşleri” başlıklı çalışma 15 / 07 / 2013 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

İmza: .....

Jüri Üyesi : Doç Dr. Abdullah KAPLAN

İmza: .....

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

İmza: .....

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.. / .. /

17-07-2013


Prof. Dr. H. Ahmet KIRKKILIÇ

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin Matematiksel İspat Yöntemleri hakkındaki Görüşleri” başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- Tezim sadece Atatürk Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

10/07/2013

İmza 

Ad- Soyad: Derya MİRAL

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışması olarak sunduğum bu çalışma, Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ yöneticiliğinde Atatürk Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında gerçekleştirilmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde ve yürütülmesinde beni yönlendiren, desteğini, yakın ilgisini ve değerli bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ' ye en içten şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bilgi, görüş ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN' e, Arş. Gör. Gürsel GÜLER' e, Arş. Gör. Ercan ÖZDEMİR' e ve Arş. Gör. Aysun YEŞİLYURT' a, çalışmam süresince bana her konuda yardımcı olan tüm değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Gönüllü olarak araştırmama katılan ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman ve tüm çalışma süresince yanımda olup desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında her türlü maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince bana destek veren TÜBİTAK' a teşekkürü borç bilirim.

Erzurum-2013

Derya MİRAL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ

Derya MİRAL

2013, 169 sayfa

Bu araştırmada, matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmanın verileri Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu ve Kişi Tanıtım Formu yardımıyla elde edilmiştir.

Araştırmanın çalışma grubunu amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenen ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 10 ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmada her bir öğrenci ile 2012-2013 eğitim öğretim yılı bahar döneminde klinik mülakat yapılmıştır. Araştırmada elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz ve içerik analizi kullanılmıştır.

Araştırmada elde edilen bulgular, öğrencilerin matematiksel ispat yöntemlerini belirleyerek ispat yapmanın gerekliliği hakkında genellikle olumlu görüşlere sahip olduklarını göstermiştir. Ayrıca araştırma sonuçları ile ilgili alan yazında yer alan çalışmalarla karşılaştırılarak tartışılmış ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel İspat Yöntemleri, Ortaöğretim Matematik Öğrencileri, İspat Yöntemlerine Yönelik Görüş

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

THE IDEAS ABOUT MATHEMATICAL PROVING METHODS OF THE STUDENTS OF SECONDARY EDUCATION MATHEMATICS TEACHING

Derya MİRAL

2013, 169 pages

In this study, the ideas about mathematical proving methods of the students of secondary education mathematics teaching were examined. In the research, of qualified research methods, the design of situational study was used. The data of the study were obtained by means of Personal Introduction Form and Idea Form as to mathematical proving methods.

The participants of the study consisted of 10 voluntary secondary mathematics students who desired of participating in the study, and determined according to Criterion Sampling method, one of purposed sampling methods. In the study, clinic interviews were made with each student in the spring somestry of 2012-2013 academic year. Descriptive and Content Analysis were used in the evaluation of the data obtained from the study.

The findings obtained from the study indicate that the students had generally positive ideas about the necessity of proving, detecting mathematical proving methods. In addition, the study was compared with those placing in the literature about study results, and discussed, and some recommendations were made.

Key Words: Mathematical Proving Methods, Secondary Education Mathematics Students , Ideas About Proving Methods.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	ix

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	3
1.2. Problem Cümlesi	5
1.3 Çalışmanın Amaç ve Önemi	5
1.4. Varsayımlar	6
1.5. Sınırlılıklar	6

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE İLE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	7
2.1 Kuramsal Çerçeve	7
2.1.1. Matematiksel İspat Yöntemleri	7
2.2. İlgili Araştırmalar	11
2.2.1. Matematiksel İspat Hakkında Görüş Çalışmaları.....	11
2.2.2. Matematiksel İspat Yöntemleri ile İlgili Çalışmalar	16

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM.....	19
3. 1. Araştırmanın Modeli	19
3.2. Katılımcılar	19

3.3. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması	27
3.3.1. Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu.....	27
3.3.2. Kişi Tanıtım Formu	28
3.3.3. Klinik Mülakatlar	28
3.4. Verilerin Analizi.....	29

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM.....	30
4.1. Beşinci Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	30
4.2. Dördüncü Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	52
4.3. Üçüncü Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum	71
4.4. İkinci Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum	89
4.5. Birinci Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum.....	113

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	140
KAYNAKÇA	148
EKLER.....	155
EK 1. Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu	155
EK 2. Kişi Tanıtım Formu	156
ÖZGEÇMİŞ.....	158

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Matematiksel ispat yöntemleri.....	7
Şekil 5.1 Öğrencilerin ispat yöntemleri hakkında verdikleri bilgi.....	141
Şekil 5.2 Öğrenciler için ispat yöntemlerinin ne anlam ifade ettiği.....	142
Şekil 5.3 Kullanılması gereken ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi	144
Şekil 5.4 İspat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları	146

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

- MEB : Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM : National Council of Teachers of Mathematics

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Matematik, sıkça değinildiği gibi, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Matematik eğitimin en önemli amaçlarından birisi matematiksel düşünmenin ve muhakemenin gelişimini sağlamaktır. Matematiksel düşüncesi ve muhakeme yeteneği gelişmiş bir birey üzerinde çalıştığı matematiksel bir etkinlik ya da problemle ilgili konuşabilir, tahminlerde veya varsayımlarda bulunabilir, vardığı sonuçların doğruluğunu ispatlayabilir ve genelleme yapabilir (Baki, 2008). Aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, teoremler ve ispatlar matematik disiplininin iskeletini oluşturur (Heinze ve Reiss, 2003).

İspat matematiğin temelidir (Mingus ve Grassl, 1999; Tall, 1998a) ve matematikte çok önemli bir yere sahiptir (Coe ve Ruthven, 1994; Hanna, 2000; Martin ve Harel, 1989). Matematiksel ispat, matematiği diğer bilim dallarından ayıran en önemli özelliklerinden biridir (Hanna ve Jahnke, 1996; National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000).

Bugün anlaşıldığı anlamıyla ispatın yazılı kaynağını M.Ö. IV. yüzyılda yayınlanan, Euclid'in "Elements"i oluşturmaktadır. İspat bugün kullandığımız anlamına ise, 19. yy. da Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange, Wierstrasse gibi matematikçiler tarafından getirilmiştir (Almeida, 2003). İspatla ilgili olarak; Knuth (2002a) ispatın öğrenmede bir araç olduğunu belirtirken; Ross (1998) matematik öğretiminde ispatın bilimsel doğrularından çok eğitimsel değerleri üzerinde durulması gerektiğini belirtmektedir. Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi ispatı matematik eğitiminin önemli bir parçası (Özer ve Arıkan, 2002); hatta matematiğin kalbi olarak değerlendirmektedir (Senk vd., 2009 akt. Albayrak-Bahtiyari, 2010; Turner, 2010). İspatı kullanarak bir şeyin niçin doğru olduğu gösterilebilir, açıklanabilir ve yeni

matematiksel bilgiler keşfedebilir veya oluşturulabilir (Almeida, 2000; de Villiers, 1990; Knuth, 2002b; Weber, 2003).

Thomas Thucker'ın (1999) araştırma sonuçlarına göre ispatın başlıca faydaları şunlardır:

- İspatlar, öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasını ve sonuçlara inanmasını sağlar.
- Genel matematik dersinde ispatın görülmesi ilerdeki matematik dersleri için faydalı olacaktır.
- İspatlar, matematikçilerin yaptıkları şeyleri öğrencilerin görmelerini sağlayan bir araçtır.
- İspat matematiksel düşünce yapısını geliştirir.

Matematiksel ispat bu kadar önemli olmasına ve lisans eğitiminde üzerinde durulmasına rağmen üniversitede yüksek matematik gören öğrenciler ispat yapmada güçlük çekmektedirler (Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio ve Godino, 2001; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2001; Weber, 2004). Öğrencilerin ispat yaparken düştükleri hataların nedenini anlamak için öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemek gerekmektedir (Weber, 2001).

Üniversitede okutulan matematik dersleri genellikle insanların ilk bakışta zor anlayacağı ispatlarla doludur. Bu yüzden öğrencilerin çoğu dersi geçebilmek için ispatı anlamadan ezberlerler. Çoğu zaman, temel teoremlerin ispatları verilir ve uygun yorumlar detaylı bir şekilde ele alınabilir. Bu durumun bir sonucu olarak testlerde ve sınavlarda öğrencinin teorik kısma hakimiyetini ölçmeye, değerlendirmeye çalışmak gerekir. Genellikle öğrencilerden birtakım anlaşılması zor sonuçların ispatı istenir. Öğrencinin kabiliyeti ne olursa olsun bu tip sorulara cevap vermek için bazı ezberlenmiş bilgiler gereklidir. En başarılı öğrenciler bile temel bir sonucun ispatını kendi kendine nadiren yapabileceklerdir. Bundan dolayı ispatın temel yapısını ve hesaplama sırasındaki bir takım incelikleri ezberlemeleri gerekebilir. Öte yandan zayıf öğrenciler muhtemelen bütün ispatı (büyük olasılıkla hiçbir şey anlamadan) kelime kelime ezberlemeye çalışacaklardır (Condradie ve Firth, 2000).

Öğrencilerin zorlandıkları bir başka husus da nasıl ispatlayacağını, ispat yapmaya nereden başlaması gerektiğini, ispat yapma sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri ve bunların nasıl kullanılması gerektiğini bilmemeleridir (Weber, 2001).

Öğrencilerin sahip oldukları bu zorluklarının nedenlerinden biride onların ispatın doğasını, matematiksel kuralları, ispat teknik ve stratejilerini anlayamamalarıdır (Gibson 1998; Weber 2006).

İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşmaktadır. İspat yapma ana hatlarıyla tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yolla yapılmaktadır (Çallıalp, 1999). Tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat ve dolaylı ispat (olmayana ergi, çelişki bulma, aksine örnek verme ve deneme yöntemiyle ispat) gibi çeşitli yollarla yapılmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Son yıllarda matematik öğretimine verilen önemin artmasıyla birlikte, matematik öğretiminin daha iyi öğretilmesine yönelik çalışmalar yapılmıştır (Tall, 1998b). Bu kapsamda, matematik öğretiminin temel amaçları arasında, mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirmek gibi öğrencilerin matematiksel düşünme becerisi hedef alınarak matematiksel ispat sürecinin önemi vurgulanmıştır (Albayrak -Bahtiyari, 2010).

Ülkemizde, Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından hazırlanan öğretim programlarına bakıldığında; ilköğretim ikinci kademedeki (6–8. sınıf) matematik öğretiminde teorem, aksiyom gibi kavramların olmaması sebebiyle açıkça ispat yapmaktan bahsetmek güçtür. Mevcut durumdaki ilköğretim matematik öğretim programının genel hedeflerinden birinin, “mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir” olduğu göze çarpmaktadır (MEB, 2005a). Ayrıca MEB tarafından yenilenen ortaokul matematik dersi (5-8. sınıf) öğretim programının genel amaçları içerisinde kazandırılması öngörülen temel beceriler arasında; “Problem çözme ve Matematiksel süreç becerileri (İletişim, Akıl yürütme, İlişkilendirme)” yer almaktadır. Buna göre ilköğretim düzeyinde sistemli bir şekilde ispat yapmak yerine problem çözme becerisi ve akıl yürütme (muhakeme) sonunda elde edilen bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve

düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci üzerinde durulmaktadır (MEB, 2013a).

NCTM (2000) standartlarında matematiğin amaçları arasında ortaöğretim döneminin sonunda öğrencilerin, muhakemenin değişik tiplerini ve ispat metotlarını seçip kullanma becerisi kazanmasının beklenmesi vardır.

Ülkemizdeki ortaöğretim matematik programına bakıldığında ise “Mantık Öğrenme Alanı” içerisinde, “İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı” nda ispat kavramına yönelik iki kazanıma rastlanmaktadır. Bunlar “tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir” ve “ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar” ifadeleridir (MEB, 2005b). Bununla birlikte MEB tarafından 2013 yılında yenilenen ortaöğretim matematik dersi öğretim programının öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlilik ve beceriler arasında “Matematiksel Süreç Becerileri” içerisinde “matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme” becerilerinin yer aldığı görülmektedir. Ayrıca yenilenen öğretim programında 9. sınıfta “İspatlama, orantısal akıl yürütme ve olasılıklı düşünme becerisi kazanma” ve 11. sınıf düzeyinde “Matematiksel ispat yöntemlerini (aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat, çelişki ve tümevarım) kullanarak ispatlar yapma” şeklinde iki kazanıma rastlanmaktadır (MEB, 2013b).

Matematiksel ispat tekniklerinden matematiksel tümevarım, ortaöğretimde öğrenilmesi oldukça zor olan bir kavramdır ve öğrenciler bu kavramı öğrenirken sorun yaşamaktadırlar (Genthew, 2005). Bu konuda öğretmenlere büyük bir sorumluluk düşmektedir. Eğer öğretmen matematiksel tümevarım yöntemi ile ilgili zorlukları ihmal ederse, öğrencilerin matematiksel tümevarım yöntemini öğrenme süreci, konuyu anlamadan öğretmeni taklit etmenin ötesine geçemez (Baker, 1996). Matematiksel tümevarım, üniversite matematik müfredatının da merkezinde olmasına rağmen, lisans seviyesindeki birçok öğrencinin bu ispat metodunu anlamada eksikliklerinin olduğu yapılan birçok araştırmada gözlenmiştir (Dubinsky, 1989; Dubinsky ve Lewin, 1986; Dunlap, Erdoğan ve Kılıç, 2008; Genthew, 2005; Harel, 2002; Knuth 2002c; Movshovitz-Hadar, 1993; Schoenfeld, 1994)

Alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmanın kaçınılmaz olduğu matematikte, bu konuya lisans eğitiminin başlangıcında yer verilmesinin nedenlerinin

başında; öğrencilerin diğer derslerde herhangi bir ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemin kullanıldığını ayırt etmelerini ya da hangi yöntemin kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak gelmektedir (Moralı ve diğerleri, 2006).

Tall (1979), genelleyici ispatların hatırlanmasının metotların doğru kullanılması açısından önemli olduğunu belirtmektedir. $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğinin ispatı da olmayana ergi metodu ile ilgili genelleyici bir ispat olarak kullanılmaktadır ve ispat yöntemleri ile ilgili kitapların çoğunda bulunmaktadır. Öğrenciler ile yapılan çalışmalarda bu ispatı daha önceden gören öğrencilerin düşünmek yerine anısal hafızalarını zorladıkları gözlenmiştir. Bu durum ispatın nesne şekline dönüştüğünü destekler niteliktedir (Tall ve Barnard, 2003).

Matematiksel ispat ile ilgili ülkemizde yapılan araştırmaların özellikle son on yıl içinde geliştiği bilinmektedir (Güler ve Dikici, 2012). Fakat, ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri üzerine yurtdışında ve ülkemizde bir çalışmaya rastlanılmamıştır. İspat yöntemleri öğrencilerin ispat yapmasında önemli bir faktördür. Bu yüzden bu çalışmada üniversite öğrencilerinin ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alınması amaçlanmıştır. Bu yolla öğrencilerin ispat yöntemleri ile ilgili karşılaştıkları zorluklar belirlenecek ve bu zorlukların giderilmesi yönünde fayda sağlanacaktır.

1.2. Problem Cümlesi

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri nasıldır?

1.3 Çalışmanın Amaç ve Önemi

Bu çalışmanın amacı, ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin belirlenmesidir. Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri, ispat yöntemlerini kullanırken yaşadıkları sorunları gidermeye yardımcı olacak bilgiler sağlayacaktır.

Ülkemizdeki ortaöğretim matematik programında; "Mantık Öğrenme Alanı" içerisinde, "İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı" nda ispat kavramına yönelik kazanımlardan biri, "ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar" ifadesidir (MEB,

2005b). Ayrıca yenilenen öğretim programında 11. sınıf düzeyinde "Matematiksel ispat yöntemlerini (aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat, çelişki ve tümevarım) kullanarak ispatlar yapma" şeklinde kazanıma rastlanmaktadır (MEB, 2013b). Bu nedenle geleceğin ortaöğretim matematik öğretmenleri olacak öğrencilerin ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri önemlidir. Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri adı altında yurtdışında ve ülkemizde bir çalışma bulunmadığından bu çalışmanın bulguları önemli olacaktır. Ayrıca bu çalışma bundan sonra yapılacak çalışmalar için önemli bir referans niteliğine sahiptir. Bu yüzden literatüre önemli bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4. Varsayımlar

1. Klinik mülakatlara katılan matematik öğretmenliği öğrencilerinin mülakat boyunca tüm sorulara içtenlikle cevap verdikleri ve kişi tanıtım formunu içtenlikle doldurdukları kabul edilmektedir.
2. Klinik mülakatta ve kişi tanıtım formunda kullanılan soruların uygunluğu konusunda alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.
3. Araştırma sonuçlarının objektif olarak yansıtıldığı kabul edilmektedir.

1.5. Sınırlılıklar

1. Bu çalışma, öğrencilerin kişi tanıtım formuna yazdıkları ve mülakat sorularına verdikleri cevaplar ile sınırlıdır.

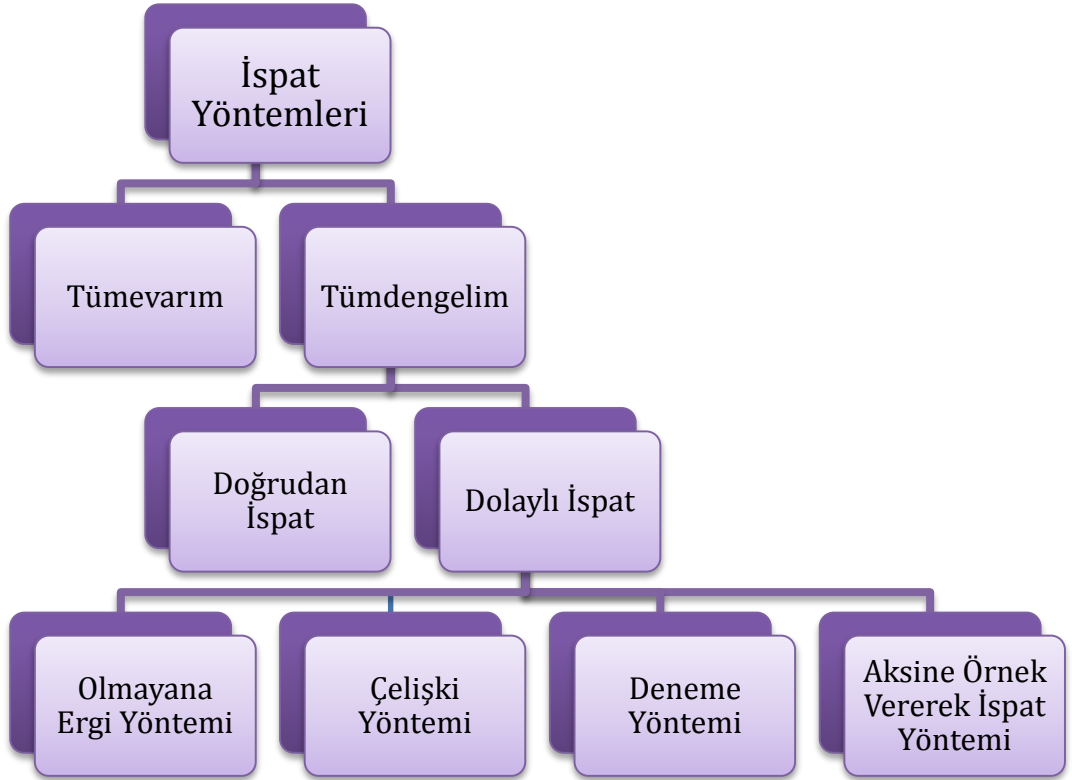
İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE İLE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde; kuramsal temeller ve kuramsal temellerle ilgili yapılan araştırmalar üzerinde durulmuştur.

2.1 Kuramsal Çerçeve

2.1.1. Matematiksel İspat Yöntemleri



Şekil 2.1 Matematiksel ispat yöntemleri

İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşmaktadır. İspat yapma ana hatlarıyla tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yola yapılmaktadır (Çallıalp, 1999). Tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat ve dolaylı

ispat (olmayana ergi, çelişki bulma, aksine örnek verme ve deneme yöntemiyle ispat) gibi çeşitli yollara yapılmaktadır. Bu ispat yöntemleri aşağıda ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Tümevarım Yöntemiyle İspat

$S \subset \mathbb{N}$ ve $1 \in S$ olsun. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ gerektirmesi doğru ise $S = \mathbb{N}$ dir.

Pozitif tamsayılar hakkında bir $P(n)$ önermesi gözönüne alalım.

1) $n = 1$ için $P(1)$ önermesi doğru ise

2) Önermenin n için doğruluğu $n + 1$ doğruluğunu gösteriyorsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Örneğin; Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in P, x \neq 1$ için

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir.

1) $n = 1$ için

$$1 = \frac{1 - x^1}{1 - x} = 1$$

olduğu gösterilir.

2) $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

doğru olduğu kabul edilir.

3) $n + 1 \in \mathbb{N}^+$ 'in doğruluğunu göstermek için 2'deki eşitliğin iki tarafına x^n ilave edelim:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} + x^n$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^n + x^n - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

olur. Böylece $n + 1 \in \mathbb{N}^+$ içinde ifadenin doğruluğu gösterildi.

Doğrudan İspat Yöntemi

Tümdengelim ispat yöntemlerinden biri olan doğrudan ispat yönteminde, $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremin ispatı için, p önermesi doğru kabul edilir ve diğer bilgileri de kullanarak q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır.

Örneğin; "Bir tek ve bir çift tamsayının toplamı tektir." önermesini $p \Rightarrow q$ şeklinde yazarsak, "Bir sayı tek bir çift sayı ise, toplamları da tektir." önermesi elde edilir. Buna göre;

Önce m ve n gibi iki tamsayı alalım. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = 2m + 1$ tek tamsayı ve $y = 2n$ çift tamsayı olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x + y &= 2m + 1 + 2n \\ &= 2(m + n) + 1 \quad (m + n = k \in \mathbb{N}) \\ &= 2k + 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Olmayana Ergi Yöntemi ile İspat

Dolaylı ispat yöntemlerinden biri olan olmayana ergi yönteminde $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkliğinden yararlanılır. Başka bir deyişle teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanmasıdır.

Örneğin; $x \neq 6$ iken $5x + 33 \neq 33$ olduğunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim.

$$p: "x \neq 6" \text{ (Hipotez)}$$

$$q: "5x + 3 \neq 33" \text{ (Hüküm)}$$

önermeleri için, $(p \Rightarrow q)$ yu ispatlamak yerine $(q' \Rightarrow p')$ yü ispatlamak yeterli olacaktır. Buna göre;

$$q: "5x + 3 = 33" \text{ (Hipotez)}$$

$$p: "x = 6" \text{ (Hüküm)}$$

olduğundan;

$$5x + 3 = 33$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Çelişki Yöntemi ile İspat

Bu yöntemde verilen bir $(p \Rightarrow q)$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q)'$ denkleğinden yararlanılır ve $(p \wedge q) \equiv 0$ olduğu gösterilir. Bir başka deyişle, bir teoremde hükmün değılinden hareketle genel bir çelişki elde etme yöntemidir. Örneğın; "Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı bunlara komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir." teoremini ele alalım ve bu teoremi çelişki bulma yöntemiyle ispatlayalım.

p : ABC bir üçgendir.

q : $m(A) + m(B) = m(ACD)$ olsun.

$p \wedge q'$ önermesinin yani q' önermesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$m(A) + m(B) \neq m(ACD)$ olsun.

r : $m(C) + m(ACD) = 180$ dir.

$m(A) + m(B) \neq m(ACD)$ kabul ettiğimizden, r önermesinde $m(ACD)$ yerine, $m(A) + m(B)$ değıerini koyduğumuzda $m(A) + m(B) + m(C) \neq 180$ bulunur.

Bu ise

r' : Bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180 derecedir.

önermesiyle çelişir. O halde q' önermesi yanlış ve $(p \wedge q)'$ yanlış olur.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q)'$$

teoremi ispatlanmış olur.

Deneme Yöntemi ile İspat

Deneme ispat yönteminde, farklı değıerlerin değışkене ayrı ayrı yazılmasıyla, önermenin doğruluğı kontrol edilir.

Örneğin; $\forall x \in \{3,4,6\}$ için $5x + 28 < 74$ eşitsizliğinin doğruluğunu veya yanlışlığını deneme yöntemi ile gösterebiliriz.

$$5x + 28 < 74$$

$$5x < 46$$

eşitsizliği $x = 3, x = 4$ ve $x = 6$ için sağlanıyor. Demek ki $5x + 28 < 74$ eşitsizliği $\forall x \in \{3,4,6\}$ için doğrudur.

Aksine Örnek Vererek İspat

Bu yöntem iki şekilde uygulanabilir. Verilen bileşik önermenin hipotezini kabul ederek hükmüyle çelişkili bir sonuca varmamıza yarayacak en az bir örnek bulmak ya da aynı mantığı içeren $(p \Rightarrow q') \equiv 1$ olacak şekildeki bir örnek verme şeklindedir. Örneğin; $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$p: (5|m \wedge 7|n) \text{ ve } q: (5 + 7)|(m + n)$$

önergeleri için $(p \Rightarrow q) \equiv 1$ olup olmadığını araştıralım. Bunun için $p \equiv 1$ iken $q \equiv 0$ olacak şekilde en az birer tane $m, n \in \mathbb{N}$ sayılarını bulmamız yeterli olacaktır. Buna göre, $m = 15 \wedge n = 14$ için p önermesi doğrudur. Ama $(5 + 7)|(15 + 14)$ önermesi yanlıştır. O halde $(p \Rightarrow q) \equiv 0$ olur.

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde matematiksel ispat ile ilgili görüş ve ispat yöntemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalardan oluşan bir derleme sunulacaktır. İspat ile ilgili görüşlere literatürde rastlamak mümkünken, ispat yöntemleri ile ilgili literatür kısıtlıdır.

2.2.1. Matematiksel İspat Hakkında Görüş Çalışmaları

Bu bölümde matematiksel ispat hakkındaki görüş çalışmalarının bir derlemesi sunulmuştur.

İskenderoğlu (2010) 'un çalışması, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları üzerinedir. Çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmek, farklı sınıf seviyelerinde kullanılan kanıt şemalarının nasıl farklılaştığını ortaya koymak, öğretmen adaylarının matematiksel

kanıta yönelik görüşlerini belirlemek, bu görüşlerinin farklı sınıf düzeylerine göre nasıl değiştiğini ortaya koymak ve öğretmen adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları arasında paralellik olup-olmadığını tespit etmektir. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için yazılı sınav ve klinik görüşmeler uygulanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerini tespit etmek için “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” adı altında geliştirilmiş olan bir ölçek kullanılmıştır. Gelişimci araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışmada ölçek farklı sınıf seviyelerinden 187, yazılı sınav 158 ve klinik görüşmelerde 16 ilköğretim matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır. Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının kanıta yönelik olumlu bakış açılarının olduğu ve sınıf seviyesi arttıkça da kanıt şemalarında en üst düzey olarak kabul edilen analitik şemaların kullanımında bir artış olduğu ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemalarının sınıflara göre farklılaştığı ve ölçekte yer alan bazı faktörler ile şemalar arasında paralellik olduğu tespit edilmiştir.

Baştürk (2010) çalışmasında, matematik eğitimi ve matematik açısından öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini araştırmak istemiştir. Araştırma verileri araştırmacı tarafından geliştirilen bir anket ve öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Araştırma öğretmen adaylarının ispatı matematik ve matematik eğitiminin en önemli parçası olarak düşündüklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca öğretmen adayları, ortaöğretim ve üniversite seviyesinde matematik eğitimi arasında önemli bir farklılık olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarına göre, ortaöğretimde matematik eğitiminde ispattan çok örnekler ve algoritmaların kullanılması üniversite seviyesinde yapılan ispatlarda güçlük yaşanmasına sebep olmaktadır. Bu yüzden öğretmen adayları ortaöğretim ve üniversite matematiği arasında bir köprü kurulması gerektiğini vurgulamışlardır.

Varghese (2009), ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini araştırmıştır. Araştırmada öğretmen adaylarının ispatın anlamı, ispat öğretim yöntemleri hakkındaki düşünceleri ve matematik derslerinde ispat etkinliklerinin kullanılması hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerinin sınırlı olduğu, ortaöğretim ve üniversite

seviyesinde öğrencilerin ispat becerilerinin sınavlarla belirlenemeyeceği görüşünde oldukları görülmüştür.

İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) çalışmalarında, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini belirlemeye yönelik bir ölçek geliştirmeye çalışmışlardır. Çalışmada farklı sınıf seviyelerinden 187 ilköğretim matematik öğretmeni adayına ait ölçek formu değerlendirmeye alınmıştır. Yapılan analizler sonucunda ölçekte 29 likert türü ve 3 tanede açık uçlu soru yer almıştır. Bu çalışma sonucunda geliştirilen “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” ile ileride öğretmen olarak karşımıza çıkacak ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının okullarda eğitim-öğretim sırasında kanıtla yönelik güven, tutum-inanç, öz değerlendirme ve zihinsel süreçlerinin daha kolay ortaya çıkarılabileceğine vurgu yapılmıştır. Ayrıca ölçeğin sadece ilköğretim matematik eğitimi alanında değil, diğer konu alanlarındaki öğretmen ve öğretmen adaylarına da uygulanabileceği belirtilmiştir.

Kayagil (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini ve bu görüşlerin cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre farklılık gösterip göstermediğini incelemiştir. Araştırma ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 357 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri ispata ilişkin görüş ölçeği yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşlerinin olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu görüşleri arasında cinsiyete ve matematikle ilgili bilimsel etkinliğe katılma durumuna göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık bulunamamıştır. Ayrıca sınıf ve mezun olunan lise türü değişkenlerine göre de gruplar içi ve gruplar arası anlamlı farklılık tespit edilememiştir.

Frasier (2010) doktora tez çalışmasında, lise matematik öğretmenlerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerini ve deneyimlerini araştırmıştır. Çalışmada araştırmacı tarafından geliştirilen online bir anket 374 lise matematik öğretmenine uygulanmıştır. Çalışmada elde edilen bulgular öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerinin dört bileşenden oluştuğunu göstermiştir. Bunlar; öğretmenlerin matematiksel ispatın önemini anlama, üretme ve kavrama yeteneği, öğretmenlerin matematiksel ispatın önemi hakkındaki görüşleri, öğretmenlerin öğrencilerin ispatı anlamalarına yönelik

algıları, öğretmenlerin dünya görüşü, geçmişi, matematik öğrenme ve öğretme standartları hakkında entelektüel farkındalıkları şeklindedir. Bununla birlikte öğretmenlerin sınıf içindeki ispatla ilgili uygulamaları öğrencilerin akademik başarıları ile ilgili olduğu kadar matematiğin benzer alt disiplinleri ile de alakalı olduğunu göstermiştir. Bu bulguların öğretmenleri, öğretmen eğitimcilerini, ders kitabı yazarlarını, öğrenme ve öğretme standartlarını belirleyen kurumları ilgilendirdiği ifade edilmiştir.

Köğce (2012) çalışmasını, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik öğretime katkısı ile ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemek amacıyla yapmıştır. Veriler, toplam 99 birinci sınıf öğretmen adayına iki açık uçlu sorudan oluşan bir anket formu uygulanarak elde edilmiştir. Çalışma sonunda, öğretmen adaylarının büyük bir kısmının tümdengelimsel muhakeme içeren ve ispatlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı İspat A türüne uygun ispatı tercih ettikleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca, çok az öğretmen adayı hariç önemli bir kısmının ispat yapmanın matematik öğretime katkı sağlayacağına inandıkları ortaya çıkmıştır.

Öçal ve Güler (2010) çalışmalarında, matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini kavram haritası yöntemi ile incelemiştirlerdir. Bu amaçla 22 öğretmen adayının katılımı ile ispat hakkında yirmi dakika süren beyin fırtınası etkinliği yapılmıştır. Adaylar ispat hakkındaki düşüncelerini sesli bir şekilde belirtmişler ve her bir adayın düşüncesi tahtaya yazılmıştır. Beyin fırtınası etkinliğinde adaylar ispat hakkında toplam 21 farklı anahtar kelime türetmişlerdir. Araştırmanın ikinci aşamasında bu anahtar kelimelerini kavram haritası ile göstermeleri ve anahtar kelimeler arasındaki ilişkileri göstermeleri istenmiştir. Adayların geliştirdikleri kavram haritaları kullandıkları anahtar kelimeler ve aralarındaki ilişkilere göre incelenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının ispat hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ve ispat hakkındaki düşünceleri arasındaki ilişkileri net olarak ortaya koyamadıkları görülmüştür.

Gökkurt ve Soylu (2012) çalışmalarında, fen bilgisi ve ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerinin ne olduğunu araştırmışlardır. Araştırmanın örneklemini, 150'si fen bilgisi, 94'ü matematik öğretmenliğinde olmak üzere, toplam 244 birinci sınıf öğrencisi

oluşturmaktadır. Çalışmanın sonucunda, her iki bölümde öğrenim gören öğrencilerin ispata yönelik görüşleri arasında anlamlı bir farklılığın olmadığı ve ispatla ilgili düşüncelerinin yetersiz olduğu görülmüştür.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006), matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları bir çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğu araştırılmıştır. Çünkü ispata ilişkin görüşler öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin varsa sorunları ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacak bilgileri sağlayacaktır. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Güler (2013) çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın verileri pilot çalışma sonucunda son şeklini alan Matematiksel İspata Yönelik Görüş Mülakat Formu (MİYGMF) ve etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla elde edilmiştir. Çalışma grubunu 10 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Çalışmada her bir öğretmen adayı ile 2011-2012 eğitim öğretim yılı güz döneminde 6 klinik mülakat yapılmıştır. Bu mülakatlardan birincisi öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek için diğer 5 klinik mülakat ise cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerini belirlemeye yönelik olarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik genellikle olumlu görüşlere sahip olduklarını göstermiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde; kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde sahip oldukları güçlüklerin literatürde yer alan güçlüklerle paralel olduğu görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yapma süreci içerisinde değerlendirilen problem çözme süreci içerisinde problemi anlama ve kümeden eleman seçme, ispat yapma süreci içerisinde ispata nasıl başlayacağını belirleme ve ispatın doğruluğunu değerlendirme süreci içerisinde ise kavram kullanımını inceleme kategorilerinin ispat sürecinde kilit rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Güler ve Dikici (2012) çalışmalarında, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Araştırmanın

katılımcılarını, ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfında öğrenim gören 12 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri yarı-yapılandırılmış "Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu" (MİGMF) yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel ispata yönelik olumlu görüşlere sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca araştırma sonuçları ilgili alan yazında yer alan çalışmalarla karşılaştırılarak tartışılmış ve öneriler sunulmuştur.

2.2.2. Matematiksel İspat Yöntemleri ile İlgili Çalışmalar

Bu bölümde matematiksel ispat yöntemleri ile ilgili çalışmaların bir derlemesi sunulmuştur.

Özer ve Arıkan (2001), "Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri" adlı araştırmalarında, Miyazaki ve Balacheff'in ispat konusunda yapmış oldukları çalışmalardan yararlanarak, lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin ispat düzeylerini incelemiştir. Ayrıca materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları gözlenmiştir. 110 öğrenci üzerinde araştırma yapılmıştır. Ayrıca 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Araştırma sonucunda lise 2 öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır.

İmamoğlu (2010) doktora tez çalışmasında, öğrencilerin matematiksel ispat konusundaki tutum ve inançlarını, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini, ayrıca başkaları tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini araştırmayı hedeflemiştir. Araştırmada kullanılmak üzere üç ölçek geliştirilmiştir: Tutum ve İnanç Ölçeği (TİÖ), İspat Sınavı (İS) ve İspat Değerlendirme Sınavı (İDS). Araştırma sonuçları, birinci sınıf ve son sınıf öğrencilerinin altyapı, tutum, öz yeterlik ve inanç puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğunu ortaya çıkarmıştır. Birinci sınıfların altyapı puanları son sınıflara göre daha yüksekken, diğer alt boyutlarda son sınıflar daha yüksek puanlar elde etmişlerdir. Son sınıf öğrencilerinin İS puanları da birinci sınıflara göre anlamlı derecede yüksek çıkmıştır. Farklı programların birinci sınıfları arasında TİÖ ve İS'ye göre anlamlı farklılıklar gözlemlenmemiştir. Son sınıflarda ise İS ve İDS puanlarında ve TİÖ'nün bazı alt

boyutlarında anlamlı farklılıklar ortaya çıkmıştır. Ayrıca birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yaparken tümevarımsal akıl yürütme kullanımına eğilimli oldukları, son sınıf öğrencilerinin ise daha çok genelleme isteği duyduklarından tümdengelsel yöntemler kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Bununla birlikte son sınıf öğrencilerinin ispat yapma ve değerlendirmede zorluklar yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır.

Baker (1996), lise ve üniversite öğrencilerinin matematiksel tümevarım ispat tekniğini öğrenirken karşılaştıkları güçlüklerin ne olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla yaptığı çalışmada, araştırmasını iki kısımdan oluşturmuştur. Birinci kısım, matematiksel tümevarımın anlatıldığı yaklaşık iki haftalık bir öğretimden sonra tamamlanmıştır. Öğrencilere, temel matematik, ispat ve matematiksel tümevarım, ispat-yazma ve ispat-analiz ile ilgili sorulardan oluşan bir test uygulanmıştır. Çalışmanın ikinci kısmında ise, öğrencilerin teste vermiş oldukları yazılı cevapları açıklığa kavuşturmak ve ayrıntılarına girmek amacıyla bireysel mülakatlar yapılmıştır. Sonuç olarak, çalışmaya katılan lise ve üniversite öğrencilerinin ispat teknikleri ile ilgili hem kavramsal hem de işlemsel olarak önemli güçlüklerle sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu güçlüklerde öğrencilerin matematik bilgisinin eksikliğinin önemli bir rol oynadığı kanısına varılmıştır. Çoğu öğrencinin matematiksel tümevarımın kavramsal yönünden daha çok işlemsel yönüne odaklandığı belirlenmiştir. Doğrulama, çoğu öğrenci için örneklerin önemli bir role sahip olduğu bulunmuştur.

Altıparmak ve Öziş (2005), bu çalışmalarında matematiksel ispat ve muhakeme üzerinde durmuşlardır. Konuyla ilgili olarak NCTM standartları doğrultusunda, okulöncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat kavramı ile ilgili bilgiler ve örnekler verilmiştir. Okul öncesi, ilköğretim ve lise yıllarında muhakemenin gelişimi incelenmiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama kavramları çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel kavramlardır. Bu bazda önermeler verilerek, mantıklı düşünmenin oluşması istenmiştir. İlköğretim döneminin birinci kademesinde, birey somut düşünme dönemdedir. Bu doğrultuda parça-bütün ilişkileri ele alınarak, tümevarım ilkeleri için örnekler verilmiştir. İkinci kademe ise muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenmektedir. Lise yılları soyut düşünebilme evresinin geliştiği yıllardır bu yıllarda tümdengelim ve tümevarım oluşmuştur. Bu doğrultuda ispat çeşitleri incelenerek, örnekler verilmiştir.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve aralarındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Araştırmanın verileri İspat Görüş Anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu saptanmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

3. 1. Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinde, araştırmaların doğal ortamlarında meydana gelen olgu, olay ya da davranışlar üzerine odaklanılarak araştırmalar gerçekçi ve bütüncül bir şekilde sürdürülmektedir. Bu yüzden nitel araştırma yöntemleri esas alınarak yapılan araştırmalarda olay, olgu ya da davranışlarla ilgili derinlemesine bilgi elde edilebilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Nitel araştırma yöntemleri araştırma konularının derinlemesine incelenmesine olanak sağladığı için ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemleri seçilmiştir.

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli kullanılmıştır. Durum çalışmasında, bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır, bu etkenlerin ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

3.2. Katılımcılar

Katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme sayesinde genellemeyi kolaylaştırmak değil maksimum düzeyde bilgi edinmek hedeflenmektedir (Lincoln ve Guba, 1985). Ölçüt örnekleme yöntemindeki temel anlayış ise önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu yüzden araştırma, 2012-2013 öğretim yılı bahar döneminde Doğu Anadolu Bölgesi'nde bir devlet üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören her bir sınıf düzeyinden 2 öğrenci alınarak toplam 10 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin seçimi, başarı düzeyi yüksek, kendini ifade edebilen ve kolay ulaşılabileme

özelliğine sahip öğrenciler arasından gönüllülük esasına göre belirlenmiştir. Başarılı ve kendini ifade edebilen öğrencilerin belirlenmesinde danışman hocalarından yardım alınmıştır. Katılımcıların beşi kız, beşi erkek olup yaş ortalamaları yirmi ikidir. Araştırmada kullanılan isimler katılımcıların kendi isimleri değildir. Kullanılan isimler araştırmacı tarafından belirlenen takma isimlerdir.

Katılımcıları tanımak amaçlı klinik mülakattan önce katılımcılara yazılı olarak verilen kişi tanıtım formundan elde edilen veriler aşağıdaki gibidir:

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5. Sınıf öğrencisi olan Canan, 10.08.1990 tarihinde doğmuştur. Memleketi Kayseri'dir. Canan, ilköğretim ve lise hayatının oldukça başarılı geçtiğini, büyük hedefleri olan ve o yönde çabalayan bir öğrenci olduğunu; fakat üniversite sınavını kendisi için bir başarısızlık olarak gördüğünü ve daha sonrasında istemediği bir bölümde okuduğu için fazla başarılı olamadığını; ama her zaman okumayı, öğrenci olmayı sevdiğini, öğrencilikte kendini başarılı göremese de öğretmenlikte başarılı olacağına inandığını belirtmiştir. Matematiği kendisi için çok özel bir ders olarak görmüştür. Daha ilkokuldayken annesinin yönlendirmesiyle x 'li y 'li denklemlerle uğraştığını, bu konuda ilkokul hocasının da ona destek olduğunu, beden eğitimi gibi dersleri hiç bilmediğini, liseye geçene kadar hiç geometri dersi görmediğini, lisede ki hocası sayesinde geometri tutkusu oluştuğunu ifade etmiştir. Matematik bölümünü yazarken bu bölümden beklentilerinin farklı olduğunu, belki farkında olmadan çok şey öğrenseler de derslerin öğretim şeklinin matematiğe karşı tutumlarını olumsuz yönde etkilediğini anlatmıştır. Fakat matematik gibi soyut ve herkesin korkulu rüyası olmuş bir dersi insanlara öğretmekten zevk aldığını, özellikle de geometri anlatmayı sevdiğini söylemiştir. Üniversite de kalma imkanı olsa analiz ve topoloji alanlarına yönelmeyi isteyeceğini dile getirmiştir. Şu andaki tek ilgi alanının sinema olduğunu belirtmiştir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 5. Sınıf öğrencisi olan Gökhan, 28.07.1988 tarihinde doğmuştur. Memleketi Gaziantep'tir. Gökhan, ilköğretimi birincilikle bitirdiğini, kendisinin de katıldığı okullar arası bilgi yarışmasında il 3.sü olduklarını; fakat lisede hazırlık sınıfı okuduğu için bilgilerini biraz unuttuğunu, bu yüzden lisede aynı başarıyı sürdüremediğini fakat buna rağmen lisede de takdir teşekkür alamadığı bir dönem olmadığını belirtmiştir. ÖSS'ye girdiği yıl sınav sisteminin

değiştirdiğini, o yüzden iyi bir yere yerleşemediğini, hedefinde tıp fakültesi olduğunu, tıp fakültesine girebilmek için 3 yıl sınava girdiğini, fakat 3. yılında tercih hatasından dolayı 21. tercihi olan matematik öğretmenliğine yerleştiğini, tercih hatası da olsa matematiği sevdiğini ve bu bölümde çok sorun çekmediğini söylemiştir. İlköğretimde matematiğinin çok iyi olduğunu ve matematiği çok sevdiğini, liselere giriş sınavında çok iyi matematik yaptığını, lisede de aynı matematik başarısının devam ettiğini, matematik dersinin 5 üzerinden 4 geldiği bir dönemi hatırlamadığını ifade etmiştir. Geometriyi ve cebiri çok sevdiğini, futbol oynamak, kitap okumak, köşe yazıları okumak ve spor yapmaktan hoşlandığını dile getirmiştir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 4. Sınıf öğrencisi olan Hümeysra, 01.07.1991 tarihinde doğmuştur. Memleketi Erzurum'dur. Hümeysra ilkokulda 5. sınıfa kadar başarılı bir öğrenci olmadığını, teşekkür dahi alamadığını, 5. sınıfta takdir aldığını, ortaokulda başarılı bir öğrenci olduğunu ve her dönem takdir aldığını, ortaokulu 7. olarak bitirdiğini, lisede orta halli bir öğrenci olduğunu, hep teşekkür aldığını, üniversite 1. sınıfta orta halli, 2. 3. ve 4. sınıflarda başarılı bir öğrenci olduğunu ve şu anda sınıf birincisi olduğunu ifade etmiştir. İlkokulda matematikten nefret ettiğini ve başarısız olduğunu, karnesine 2 düştüğünü, ortaokulda matematiği sevmeye başladığını ve bundan sonraki dönemlerde matematiğin en sevdiği ve en başarılı olduğu ders olduğunu belirtmiştir. Üniversite sınavına hazırlanırken tıp ve diş hekimliği gibi bölümleri kazanmak için çalıştığını ve eğer daha düşük bir puan alırsa matematik öğretmenliğini yazmayı tercih edeceğini düşündüğünü, ilk üç tercihinin tıp, diş hekimliği ve eczacılık olduğunu, 4. tercihinin ilköğretim matematik öğretmenliği olduğunu ve 5. tercih olarak ortaöğretim matematik öğretmenliğini tercih ettiğini, matematik öğretmenliğini seçim amacının matematiği çok sevmesinden ve matematik öğretmenliğini diğer öğretmenliklerden üstün görmesinden kaynaklandığını dile getirmiştir. Lisede türev ve integral konularını, üniversitede analiz derslerini çok sevdiğini, soyut cebir, topoloji ve soyut matematik gibi soyut ve teorem ağırlıklı derslerden nefret ettiğini vurgulamıştır. Kitap okumayı çok sevdiğini, yılda yaklaşık 33 roman okuduğunu ve bu romanları o yıl Türkiye ve yurtdışındaki popüler romanlardan seçtiğini, aynı zamanda gezmekten çok hoşlandığını anlatmıştır.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 4. sınıf öğrencisi olan Taner, 27.09.1990 tarihinde doğmuştur. Memleketi Adıyaman'dır. Taner ilköğretim ve ortaöğretimi

başarılı bir öğrenci olarak tamamladığını, 8 yıl boyunca her dönem takdir belgesi aldığını, ilköğretimi 5.00 diploma notu ile bitirdiğini, lisede de bu başarıyı devam ettirmeye çalıştığını ve yine her dönem takdir belgesi aldığını ve 3. ve 4. sınıfta onur belgesi aldığını, liseyi de 100 üzerinden 96 puan ortalamaıyla tamamladığını belirtmiştir. Sayısal derslere karşı tutum ve ilgisinin sözel derslere göre çok daha fazla olduğunu, ilköğretimde matematik dersinde oldukça başarılı olduğunu, her dönem matematik notunun 5 olduğunu, lisede matematiğe karşı ilgi ve tutumunun daha da arttığını, matematik öğretmeninin de etkisiyle matematik konularındaki kavramsal temelin tam olarak oluşmaya başladığını, başarısı arttıkça ilgisinin de arttığını ve lisede matematik notunun her dönem 5 olduğunu dile getirmiştir. Sayısal bölüm ve sayısal derslere olan ilgisinden dolayı matematik öğretmenliğini seçtiğini, üniversite tercihlerinde bazı matematik öğretmenliği seçimlerinin olduğunu ve şu anda öğrenim gördüğü bölümün 21. tercihi olduğunu ifade etmiştir. Matematikte düzlem geometri ve analitik geometriye karşı oldukça ilgisinin olduğunu, ilgi alanlarının spor, tarihi romanlar ve sinema olduğunu vurgulamıştır.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 3. sınıf öğrencisi olan Berke, 1991 tarihinde doğmuştur. Memleketi Samsun'dur. Berke, ilkokulu birleştirilmiş sınıflarda okuduğunu ve kendisini geliştirmek için çabaladığını, ilkokulda okul birincisi olduğunu, ortaokul ve lisede okul birincisi olmasa da ilk on içerisinde yer aldığını, liselere giriş sınavında Anadolu Lisesi'ni kazandığını, liseler arası bilgi yarışmasında sınıfını temsil ederek birincilik kazandığını, genel olarak ilköğretimde takdir, lisede teşekkür belgesi aldığını ifade etmiştir. Matematik derslerinin ilkokuldan başlayıp lise bitene kadar beşlik sistemde hep beş geldiğini, düşünmeyi sevdiği için matematik problemlerini de çözmeyi sevdiğini, matematik derslerinde arkadaşlarının anlamadığı yerleri onlara anlattığını, genel olarak işlemsel bilgide daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Şu anda okuduğu bölüme 2. kez girdiği ÖSS ile yerleştiğini, matematik becerisine güvendiği için, matematik dersini ilkokuldan bu yana sevdiği için, matematiksel işlemlerle uğraşmak bazen sonuca ulaşmasa bile zevkli geldiği için ve matematiğin farkındalık yarattığını düşündüğü için matematik öğretmenliğini seçtiğini, bu bölümü seçiminde ailesinin de büyük bir etkisi olduğunu fakat ilk gitmek istediği bölümün elektrik elektronik mühendisliği olduğunu söylemiştir. Üniversitede genel manada analiz derslerinde başarılı olduğunu, matematikte genel olarak işlemsel bilgiye dayanan matris,

determinant konularının ve türev, integral problemlerinin ilgisini çektiğini vurgulamıştır. Futbol ve satrançla uğraşmayı sevdiğini, teknolojik aletleri sökmekten hoşlandığını ifade etmiştir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 3. sınıf öğrencisi olan Eda, 31.03.1989 tarihinde doğmuştur. Memleketi Mersin'dir. Eda 8. sınıfa kadar hep takdir aldığını 4. 5. 7. 8. sınıflarda özel öğretmen ve dershaneden yardımcı eğitim aldığını ve okuldan 4.95 ile mezun olduğunu, liseyi Nevşehir'de Anadolu Öğretmen Lisesi'nde yatılı okuduğunu, yatılı okumanın, hazırlık sınıfı okumanın ve ailevi sorunlarının derslerine olumsuz etki ettiğini ve derslerine odaklanamadığını, eğitim, edebiyat ve matematik derslerinin çok iyi olduğunu, lise 2. sınıfta sayısal seçtiğini, lise 2 ve lise 3'te dershaneye gittiğini, yatılı okuduğu için dersane dışında özel öğretmen ve dersane etütlerine genel olarak izin olmadığını, liseden 79.87 ile mezun olduğunu, ilk senede ÖSS'yi kazanamadığını, 2008'de Ondokuz Mayıs Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini kazandığını ancak ailevi nedenlerden dolayı bu bölümü dondurduğunu, 2010'da tekrar sınava girip şu anda okuduğu bölümü kazandığını belirtmiştir. 8. sınıfa kadar matematiği aşırı olmamakla birlikte sevdiğini ve matematikte başarılı olduğunu, 8. sınıfta LYS'nin verdiği stresle matematikten nefret ettiğini ve nefret ettikçe başarısının düştüğünü, bir gün babasının 'matematiği oyun gibi gör, bulmaca gibi düşün öyle çözmeye çalış' demesi üzerine babasının dediklerini denediğini ve matematiği sevmeye başladığını, bir süre sonra matematikten özel ders aldığını ve matematik başarısının ve sevgisinin çok çok iyi olduğunu, lise sona kadar matematik öğretmenini çok sevdiğini ve öğretmeninden çok şey öğrendiğini, dolayısıyla başarısının arttığını, lise son sınıfta öğretmenini sevmediğini ve derslerden hiçbir şey anlamadığını, mezun olduktan sonra iki matematik sitesinden çok şey öğrendiğini ve bu sitelerden biri sayesinde matematiğe olan ilgisinin arttığını, üniversite sınavında matematik netlerinin iyi olduğunu, ezber yapamadığını, üniversitede matematik derslerinde anladığı kadar başarılı olduğunu ifade etmiştir. Aklında asıl olan mesleklerin tıp ve eczacılık olduğunu; fakat eşi memur olduğu için kendisinin de en sevdiği dersin öğretmeni olmayı tercih ettiğini söylemiştir. Analiz konularını, özellikle türev ve integrali çok sevdiğini; ilgi alanlarının kitap okumak ve internet olduğunu dile getirmiştir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf öğrencisi olan Pınar, 10.12.1992 tarihinde doğmuştur. Memleketi Kars'tır. Pınar ilkokul 1. sınıftan lise son sınıfa kadar

hep sınıf birincisi olduğunu, ilköğretimde girdiği okullar arası yarışmalarda hep ilk üçe girdiğini, lise son sınıfa kadar hiç dershaneye gitmediğini, son sınıfta dershanenin düzenlediği sınava girdiğini ve ücretsiz dershaneye gitme hakkı kazandığını ifade etmiştir. Sözel derslerin pek ilgisini çekmediğini, çünkü ders çalışırken kağıda bakıp okumayı, ezber yapmayı sevmediğini, kağıt kalemle uğraşmayı sevdiğini ve olaylarda hep bir mantık aradığını, bu yüzden kendisine en cazip gelen dersin matematik olduğunu, matematiği sevdiği içinde hep başarılı olduğunu, üniversite sınavına hazırlanırken kendi kendine formül çıkardığını, bir şeyi körü körüne kabul etmenin unutmaya yol açacağını belirtmiştir. Matematik öğretmenliğinin her zaman aklında olduğunu; fakat ikinci planda yer aldığını, çoğu öğrencinin anlamakta zorlandığı, korkuyla baktığı matematik dersinin o kadar da zor olmadığını, matematiğe sadece önyargıyla yaklaşıldığını göstermek için matematik öğretmenliğini tercih ettiğini; fakat şu anda kafasında yüksek lisans yapma fikrinin de oluştuğunu vurgulamıştır. Matematikte en çok analiz konularının ilgisini çektiğini, eğer bir gün yüksek lisans yapma gibi bir durumu olursa analiz alanında yapmak isteyeceğini söylemiştir. Sosyal ortamlarda ve sosyal aktivitelerde yer almayı sevdiğini; fakat daha çok sakin ortamlarda kendini dinleyip kitap okumayı ve müzik dinlemeyi tercih ettiğini, yalnız kalmaktan çok hoşlandığını dile getirmiştir.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf öğrencisi olan Erkan, 11.10.1992 tarihinde doğmuştur. Memleketi Osmaniye'dir. Erkan, 7 yaşına kadar köyde büyüdüğünü, okul çağına gelince annesinin köydeki okulu yetersiz bulması üzerine il merkezine taşındıklarını, il merkezinde bir okula kayıt olduğunu; fakat okuldaki arkadaşlarının çoğu doğru düzgün konuşamazken öğretmenlerinin onlara okuma yazma öğretiyor olmasını kendisi için bir talihsizlik olarak gördüğünü, ailesinin merkezde bir okulda olduğu için sorunları farketmediklerini; ancak 5 yıl sonra annesinin durumu farkettiğini ve kaydını başka okula aldirttiğini, yeni okulunun eskiye nazaran daha iyi olduğunu; fakat yeni okulundaki matematik öğretmenin çok yaşlı ve artık görevini yapamayacak durumda olduğunu, tüm bu talihsiz durumlara karşın Anadolu Lisesine yerleştiğini ifade etmiştir. Matematiğin ailesinde hiç sevilmeyen ve başarısız olunan bir ders olduğunu, kendisinin de lise 1. sınıfa kadar matematikte çok başarılı olmadığını, 8. sınıfa geldiğinde yapılan OKS denemelerinde sorulan 25 soruluk matematik kısmında genelde 3 veya 4 net yapabildiğini, bu durum sonrasında birebir matematik dersleri

almaya başladığını, aslında anlamaya başlayınca matematiğin kendisi için daha sevilir ve daha çekici bir hal almaya başladığını, bu şekilde çalışmalara devam ederek sene başındaki 3-4 netlik ortalamasının sınavda 14 net olarak bir artış gösterdiğini ve Anadolu Lisesini kazandığını, bu olaydan sonra babasının bir şeyler yapabileceği konusunda kendisine inanmaya başladığını, ancak temelinde olan yetersizliklerin hala kendisini matematik konusunda düşündürdüğünü, lise 2. sınıfa geçtiğinde matematik öğretmeni sayesinde aslında matematiği başarabileceğini ve kendisi için çok zevkli olabileceğini görmeye başladığını, yaptığı tüm üniversite tercihlerinde matematik öğretmenliklerini yazdığını, bundan sonraki idealinin de matematikçi olmanın aslında çok basit olduğunu insanlara göstermek olduğunu dile getirmiştir. Aslında amacının matematik bölümünü seçip ileride akademik matematik çalışmak olduğunu; ancak babasının matematik öğretmenliği konusunda ısrarları üzerine bu bölümü yazmak zorunda kaldığını, toplamda 7 tercih yaptığını ve okuduğu bölümün 4. tercihi olduğunu, babasının her ne kadar bu bölümü bitirince öğretmen olacağı yönünde beklentileri olsa da, kendisinin akademik matematik çalışmak konusunda hala ısrarcı olduğunu ve ideallerinin arkasından koşmaya devam edeceğini vurgulamıştır. Aslında matematiği ilk olarak problem çözme tarzında düşündüğünü ve kendisine eğlenceli geldiğini, bu durum bir süre devam ettikten sonra soruları sorgulamaya başladığını ve ondan sonra matematikte eğlenceli olan kısmın problemler ve bunların hesabından çok teori kısmı olduğunu farkettiğini, böylece teorik kısımları ile ilgilenmeye başladığını, bu durumun ise kendisini ispat yapma gibi bir sorunla karşı karşıya getirdiğini, bu durum üzerinde biraz inceleme yaptıktan sonra aslında matematiğin tanım ve teoremler üzerine kurulu olduğunu anladığını, bugün hala matematikte çözülen problemlerin teoremlerin özel kabul ispatları olduğunu düşündüğünü, matematikte cebirsel işlemler yaparak bir şeyleri ispat edebilmenin kendisine o konu ile ilgili örnekleri çözmekten daha eğlenceli geldiğini belirtmiştir. Köy hayatı içinde yetiştiği için ilgi alanlarının genel olarak bu tarz yaşama yönelik olduğunu, tarlada gezmek, çalışmak ve hayvancılıkla uğraşmanın kendisine her zaman daha cazip geldiğini; ancak son zamanlarda, okullarda öğretilenleri günlük hayata uygulamanın kendisi için eğlenceli bir iş olduğunu farkettiğini ve bu özelliğini farkettilikten sonra neden matematiği sevdiğini, daha kolay ve eğlenceli bulduğunu anlamaya başladığını anlatmıştır.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıf öğrencisi olan Selim, 19.11.1993 tarihinde doğmuştur. Memleketi Giresun'dur. Selim, öğretim hayatında başarılı bir öğrenci olduğunu ve her dönem takdir veya teşekkür aldığını, yanlış yönlendirme sonucu meslek lisesinde okuduğunu, liseden 78 diploma notuyla mezun olduğunu, güverte bölümünü bitirdiğini, alan bilgisi olmadığını düşündüğü öğretmenleri yüzünden kendi bölümünden soğuduğunu, üniversitede bu bölüme devam etmemeye karar verdiğini, kendisi için en büyük başarının meslek lisesini bitirip, öğretmenlerinin kendisine güvenmemelerine rağmen böylesine güzel bir üniversite ve bölümü kazanmak olduğunu ifade etmiştir. Matematiğe ilkokulda aşık olduğunu, ilkokulda matematik öğretmeni olmak istediğini, meslek lisesinin kendisini biraz matematikten uzaklaştırdığını; örneğin türev limit gibi konuları bir derste bitirdiklerini, integral konusunu ve geometri dersini ise lisede hiç görmediklerini, bütün eksikliklerini dershanede tamamladığını, matematiği hep çok sevdiğini, matematik okuduğu için çok mutlu olduğunu, kendini matematik alanına uygun bulduğunu, matematik öğretmenliğine matematiği sevdiği için geldiğini ve bu bölümün 1. tercihi olduğunu dile getirmiştir. Analiz dersinin tüm konularına ilgi duyduğunu, soyut matematik ve düzlem geometri derslerini sevmediğini, bu derslerde matematiğin ezber bir dersmiş gibi yansıtıldığını düşündüğünü, bu derslerin anlatımındaki yanlış metodun kendisini bu derslere karşı soğuttuğunu belirtmiştir. İlgi alanlarının bisiklet sürmek, kitap okumak, müzik dinlemek ve bilgisayar oyunları oynamak olduğunu vurgulamıştır.

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıf öğrencisi olan Zeynep, 15.10.1994 tarihinde doğmuştur. Memleketi Trabzon'dur. Zeynep, ilkokul 1. sınıfta okuma ve yazmayı öğrenmesinin çok zor olmadığını; fakat sene sonunda tüm notlarının 4 gelmesinin kendisini çok etkilediğini, daha küçük yaşta belki de hırs nedir bilmeden hırs yaptığını ve sonrasının hep iyi olduğunu, ortaokulda hep takdir aldığını, iyi bir öğrenci olduğunu; ama en iyi öğrenci olmadığını, liseyi kazanınca rahatlayacağını düşündüğünü fakat hiçte öyle olmadığını, çok çalıştığını ve lise 1. sınıfta sınıfın en iyi öğrencisi olduğunu, alan seçiminde çok kararsız kaldığını, hocalarının her alanı yapabileceğini düşündüğünü, kendisinin sayısalı seçtiğini, 2. sınıfta ikinci, 3. sınıfta üçüncü ve son sınıfta yedinci olarak liseyi bitirdiğini, hocalarının sevdiği başarılı bir öğrenci olduğunu dile getirmiştir. Daha ilkokul yıllarında haftanın çoğunu matematik dersi işleyerek geçirdikleri için ister istemez matematiğe karşı iyi bir tutum geliştirdiğini, matematik

temelinin sağlam olduğunu, matematiği sevdiğini ve eğlenceli bulduğunu, işlem yapmanın, bir soruyla uğraşmanın, silip silip kağıt yırtılana kadar yılmadan çözenin kendisine eğlenceli geldiğini, kitapları her karıştırdığında değişik semboller gördüğünü ve onların nasıl bir şey olduğunu hep merak ettiğini, özellikle integral ve toplam-çarpım sembollerinin çok ilgisini çektiğini, daha sonradan bu sembollerin hep karşısına çıktığını ve böyle soruları severek yaptığını, onlarla uğraştığını, matematik alanında hüsrana uğramadığını; çünkü yapabildiğini, o yüzden başarılı olduğunu, boş kaldığında elinde hep bir matematik sorusu olduğunu, matematiği gerçekten sevdiğini ve matematikte başarılı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Matematik öğretmenliğini yazmanın hiç aklında olmadığını, son anda hocasının 'sen matematiği seviyorsun, seni matematik öğretmeni yapalım' demesi üzerine matematik öğretmenliğinin aklında yer ettiğini, bu fikrin kendisine mantıklı geldiğini, matematiği sevdiğini ve anlattığı bir şeyi de karşısındaki kişinin çok iyi anladığını düşününce bu bölümün kendisine göre olduğunu düşündüğünü ve yaptığı toplam 4 tercihin ilk üçünü matematik öğretmenliğinin oluşturduğunu ve şu anda okuduğu fakültenin 3. tercihi olduğunu ifade etmiştir. Matematikteki ilgi alanının daha çok işlem gerektiren ve zevkli ispatları olan analiz dersi olduğunu, işlem yoğunluğunu sevdiğini, işlem olmayan bir matematiği düşünemediğini, soyut matematikte işlem az olduğu için o dersi hiç sevmediğini, soyut matematiğin harf yoğunluğu ve karmaşadan oluştuğunu, bazen dersi sevmemesinin hocadan kaynaklandığını düşündüğünü, geometriyi zamanında çok sevdiğini, çizilen bir çizgiyle soruyu çözüme kavuşturmanın kendisine ayrı bir haz verdiğini; ama düzlem geometri dersiyle birlikte geometrinin bilmediği farklı yönlerini gördüğünü ve geometriden soğuduğunu, genel manada matematiğin işlemler olduğu sürece kendini çektiğini vurgulamıştır. İlgi alanlarının gezip görülecek yerleri arkadaşlarıyla beraber gidip görmek, eğlenmek, topluca etkinliklerde bulunmak, müzik dinlemek, internete girmek olduğunu ve en büyük ilgi alanının matematik olduğunu; matematik için en iyi yerde olmanın şu andaki tek amacı olduğunu söylemiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

3.3.1. Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu

Araştırmada, katılımcıların matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerini alabilmek için "Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu" kullanılmıştır.

Görüş formu, araştırmacı tarafından ilgili alan yazında ispat ile ilgili yapılmış çalışmalardan yararlanılarak 5 soru olacak şekilde hazırlanmış ve üç öğretim üyesi tarafından gözden geçirilmiştir. Uzman görüşleri doğrultusunda gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Görüş formunun, ispat yöntemleri konusunda öğrencilerin görüşlerini ifade edebilecekleri sorulardan oluştuğuna uzman görüşleri ile karar verilmiştir. Bu sayede görüş formunun kapsam geçerliliği sağlanmaya çalışılmıştır. Sorular yarı yapılandırılmış tarzda sorulmuştur ve gerektiğinde katılımcılara sonda sorular yöneltilmiştir. Araştırmanın geçerliliğini artırmak için, her öğrenciyle yapılan klinik mülakata bulgular kısmında yer verilmiştir.

3.3.2. Kişi Tanıtım Formu

Öğrencileri genel anlamda tanıyabilmek, geçmişteki başarı durumlarını öğrenebilmek ve klinik mülakatta verdikleri cevaplarla geçmişleri arasında varsa ilişki yakalayabilmek için uzman görüşü alınarak hazırlanan kişi tanıtım formu öğrencilere verilmiştir ve formda yöneltilen soruları uygun bir zamanda cevapladıktan sonra getirmeleri istenmiştir.

3.3.3. Klinik Mülakatlar

Araştırmada, ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerini alabilmek için onlarla klinik mülakat yapılmıştır.

Klinik mülakat, çalışılan bir konu ile ilgili bireyin sahip olduğu bilgileri derinlemesine öğrenmeye çalışmak ve karakteristik bilgilerini ortaya çıkarmak için araştırmacı ve birey arasında yapılan karşılıklı görüşmeler olarak tanımlanabilir (Zazkis ve Hazzan, 1999). Aynı zamanda klinik mülakat, araştırmacının görüşme sırasında verdiği cevaplar doğrultusunda sorularını çeşitlendirmesine fırsat veren bir araştırma metodudur (Tall, 1979).

Katılımcılar ile yapılan klinik mülakattan önce araştırmanın tamamen gönüllük ilkesine göre yürütüleceği, çalışmaya devam etmek istemeyen katılımcıların istedikleri anda çalışmadan ayrılacakları araştırmacı tarafından açıklanmıştır. Ayrıca, katılımcılar ile yapılan görüşmelerin ses kaydına alınacağı ve bu durumun kendileri için bir sakıncasının olup olmadığı katılımcılara sorulmuş ve bu konudaki izinleri alınmıştır.

Araştırmacı tarafından katılımcıların isimlerinin ve bilgilerinin kimseyle paylaşılmayacağı ve araştırma sonucunda kendi isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Katılımcılarla yapılan mülakat 20-40 dakika sürmüştür. Mülakatların tamamı araştırmacı ile her bir katılımcının birebir görüşebilecekleri bir ortamda gerçekleştirilmiştir.

3.4. Verilerin Analizi

Katılımcıların görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde hem betimsel analiz hem de içerik analizi kullanılmıştır.

Betimsel analize göre; elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Betimsel analizde; bireylerin görüşlerini yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmektedir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları, düzenlenmiş ve yorumlanmış bir şekilde okuyucuya sunmaktır. Buna göre toplanan veriler ilk olarak betimlenir. Daha sonra yapılan betimlemeler yorumlanır, neden-sonuç ilişkileri irdelenir ve sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

İçerik analizi, elde edilen ham verilerin anlamlandırılarak belirli bir çerçeve oluşturulması ve beliren durum netlik kazandıktan sonra düzenlenerek kod ve kategorilerin ortaya çıkarak somutlaşmasını sağlamaktadır (Patton, 2002). Araştırmada, içerik analizi yöntemlerinden "kategorisel analiz" kullanılmıştır. Kategorisel analiz sürecinde; verilerin kodlanması, kategorilerin oluşturulması, kategorilerin düzenlenmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması aşamaları izlenmiştir (Corbin ve Strauss, 2007).

Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesinin ardından elde edilen veriler özetlenmiş ve yorumlanmıştır. Daha sonra kod ve kategori yapmaya uygun 4 soruda kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Ancak "Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?" sorusunun çözümlenmesinde kod ve kategoriler oluşturulmamıştır.

Araştırmada oluşturulan kategoriler incelendiğinde; bazı kategorilerde sadece bir katılımcı bulunurken bazı kategorilerde birden fazla katılımcının bulunduğu görülmüştür. Bunun yanında bazı katılımcıların görüşleri birden fazla kategoride yer almıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM

4.1. Beşinci Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Canan ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Canan: Bildiğim yani az ispat yöntemleri var. Tümevarım, tümdengelim, doğrudan, dolaylı, olmayana ergi vardı en çok kullandığımız mesela bizim. 5 tane... başka bilmiyorum sanki. Çok hatırlamıyorum. İspat yöntemleri şöyle hani üniversiteye geldikten sonra öğrendik biz bunları. Genelde soyut matematik, soyut cebir derslerinde gördük.

Mülakatçı: Bunlar mı geliyor aklına?

Canan: Evet.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.

Canan: Mesela ben şu aksine örnek vererek, olmayana ergi hani... aynı gibi hissettim ama... Hani kendi kafamda olmayana ergi deyince bir şey veriyor bize aksini kabul edip ispat ediyoruz ya, olmadığını... Hani mesela bunu aksine örnek vererek ispat yöntemini sanki buymuş gibi...

(Mülakatçı aradaki farkı anlatır)

Mülakatçı: Derslerinizde hangi yönteme ne kadar sıklıkla yer veriyorsunuz?

Canan: Soyut cebir dersinde tümevarım çok kullandık, olmayana ergi çok kullandık. Bide soyut matematik dersi almıştık 1. sınıfta ondada bu doğrudan ve dolaylı olarak gördük, hani olmayana ergi olarak özelleştirmedikte doğrudan ve dolaylı ispat hani nasıl diyeyim mantık görüyorduk sanırım orda, o dediğiniz gibi $p \Rightarrow q$ larda mesela hoca sınavlarda diyordu ki bunu dolaylı ispat yöntemiyle yapınız.

Mülakatçı: Yani özelleştirmediniz, dolaylı ispat olarak...

Canan: Aynen, böyle hani direkt ismini mesela olmayana ergi yoluyla demedi ya da hani buraya 4'e ayırmışsınız ya yöntemleri çelişkiyi kullanın demiyordu da dolaylı ispat yöntemiyle yapınız diyordu. Soruyu hani veriyordu bize, mantıkta daha çok. Mesela bu tümevarımda benim hatırladığım liseden diziler vardı, dizilerde çok kullanıyorduk sanki diziler seride. Bide türevde mesela 1. türevi 2. türevi mesela 30. türevinin kuralını istiyordu bizden. Fonksiyonu vermiş mesela ne diyeyim mesela $n!$ gibi bir fonksiyon var bunun türevini alın diyor mesela bize. Bunun işte 30. türevini alırken 1. 2. 3. yü yapıyorduk mesela biz kural oluşturuyorduk n . türevi şöyle olur, tümevarımı böyle kullanıyorduk yani lisede de, onun haricinde...

Mülakatçı: Lisede yer veriyor muydunuz?

Canan: Ya tümevarım diyor muyduk onu hatırlamıyorum ama şu an kullanılıyor mesela ben ders veriyorum hocam mesela. Ders verirken bunu tümevarım yöntemiyle yapın diyor, ilkokul çocukları mesela biliyor, tümevarım tündengelim biliyorlar. Hani şu bizim bildiğimiz olmayana ergiyi falan bilmiyorlar da tümevarım yöntemi olarak bir ispat yöntemi olduğunu biliyorlar mesela ama biz kullanıyor muyduk onu hatırlamıyorum, işlemleri hatırlıyorum da isim olarak hani biraz daha hani ÖSS ye dönük olduğu için isim çok önemsememiş olabilirim yani o yüzden hatırlamıyor olabilirim.

Mülakatçı: Peki sen derslerde, sınavlarda falan en çok hangisini kullanıyorsun?

Canan: Hocam şu olmayana ergi var ya ben mesela ona takmış durumdayım. Hatta böyle u kitapların arkasında alıştırmalar var ya onları mesela hep olmayana ergiyle, mesela hepsi onla çözülmezmiş, bende özellikle hani çözerdim, nasıl çözerdim bilmiyorum ama hani yanlış oluyor sonuç olarak mesela bu yöntemi kullanamıyorsun, ben ama takmış durumdaydım yani, hoşuma gidiyordu. Sonuç çıkartıyordum ama hani yanlış çıkıyordu ama nasıl yapıyorsam artık hani birazda uyduruyordum tabi ama yani

olmayana ergi yöntemini çok seviyorum niyeyse. Lisans yapsam bunun üzerine bir şey uydururum herhalde olmayana ergi. Diğer mesela çelişki yöntemini hiç kullanmadım, belki de kullandım hani farkında değilim, deneme yöntemi dediğinizde herhalde deneme yanılma gibi bir şey mi yapacağım yani şöyle olsa böyle olsa...

Mülakatçı: *Evet evet, değerler verip deneye deneye...*

Canan: *O zaman bu yöntemi de test çözerken kullanıyoruz yani çok... Özellikle kar-zarar problemlerinde mesela çok deneme yanılma kullanırım yani şıklardan gitme, belki de olur. Hani sondan başlarım sağlatma yöntemi vardı ya, hatırlıyorum ben mesela verilenler istenenler sağlaması vardı, mesela o yöntem olabilir deneme yanılma yöntemi. Hani bir değer veriyorum sağlamasını yaptırıyorum uyduysa tamam uymadıysa gidiyor.*

Mülakatçı: *Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?*

Canan: *Şöyle hocam ben gereksiz olduğunu düşünürdüm önceden ama hani mesela bunları öğrendikten sonra hani bu ÖSS'deki sorular var ya direkt yerine yaz çıksın, mesela ben bunu önceden pek umursamazdım hani yerine yazayım, önemli olan benim için sonuçtu ama şimdi şimdi böyle uı niye böyle oluyor, niye yapmış yani, bunu buradan nasıl getirmiş, mesela formüllerde özellikle n , x çok kullanılıyor, neye n demiş neye genellemiş mesela n yi, hani bunları öğrenmek için ispat yöntemlerine bakıyorum yani özellikle, kitap karıştırırım mesela bakarım hani bu formül nerden gelmiş, zaten genelde de söylüyorlar başında şu ispat yöntemini kullanıyoruz diye, biraz meraklıyım ama yinede gereksizde görüyorum açıkçası ileriki hayatımda işime yaramayacak diye düşünüyorum, hani vereceğim... ben yine lisede hoca olduktan sonra yine bunları vermeyeceğim yani diye düşünüyorum bilmiyorum yanlış mı ama... İşte biraz ihtiyaca yönelik ya o yüzden. Yoksa mesela hoşuma gidiyor bir formülün nereden geldiğini bulmak. Biz mesela ilk geldiğimizde genel matematik dersi vardı analiz 1 hani kümelerden integrale kadar bütün matematiği genel görmüştük analiz 1 dersinde mesela orda çarpımın türevi bölümün türevlerini mesela ne yapıyoruz çarpımın türevinde birincinin türevi çarpı ikinci artı işte ikincinin türevi çarpı birinci diye formülize ediyoruz ya bunu hoca mesela bize ispatla yaptırtmıştı sınavda da sormuştu*

ha dedim bu buradan mı geliyormuş falan ya ilginç buluyorum ama gerekli midir orda hala biraz şüpheliyim.

Mülakatçı: İspatları yapabilmenin her zaman tek bir yöntemi mi vardır yoksa birden fazla yöntem kullanılabilir mi bir ispat için?

Canan: Kullanırız bence ama... Şöyle bir şey mesela tümevarım yoluyla yaptığım bir ispatı tümdengelimle yapamıyorum. Yani ben mesela dediğim gibi olmayana ergiyi çok kullanıyorum ya mesela bu yöntemi kullanıyorsam o işte ispatta tümevarım kullanamıyordum. Yanlış mı bilmiyorum ama böyle bir bilgi edindim. Ama ben mesela ikisini de kullanılabilir diye düşünüyorum. Sonuçta ispat ne kabul edersen ona göre gider. Hani mesela ben tümevarımı yapmak istiyorum, işte $n=1$ için k için diye onları kabul ederim sonra tümevarıma giderim mesela. Olmayana ergide de başka bir şey kabul ederim. Yani ikisini de aslında bir soruda birleştirebilirim ama olmuyormuş sanırım.

Mülakatçı: Yani mesela bir soruyu tümevarımla çözdün olmayana ergiyle olmuyor mu diyorlar, sen mi öyle düşünüyorsun?

Canan: Yani ben hocam birine sanki böyle bir şey sormuştum hocada bana dedi ki olmayana ergi yöntemi kullanılıyorsa bu soruda yani çözümünde sen tümevarım yapamazsın. Ya da mesela tümevarımla çözülyorsa aynı şekilde olmayana ergiyi kullanamazsın demişti. Çünkü hep olmayana ergiden çözüyordum ben hani bunda bunun ispatı tümevarımla yapılır demişti yani öbür türlü yapılamaz demişti, yanlış çıkar demişti ama bilmiyorum yani bence ikisinde... sonuçta kabul önemli. Yani başta neye göre hani şöyle, şu taraftan gidiyorsun mesela sağ taraftan gidiyorsun o yola çıkıyor tümevarım yoluna çıkıyor, soldan gidiyorsun olmayana ergiye çıkıyor mesela. Yani hangi yolu tercih edeceğine bağlı, aslında ikisinin çözümü de bence olmalı diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki dolaylı ispatın alt başlıklarını düşündüğünde mesela olmayana ergi yöntemini kullandığında deneme yöntemini kullanabilir misin?

Canan: Kullanırım hocam niye kullanamayayım ki. Sonuçta tümdengelim yönteminin şeyleri değil mi bu u basamak gibi düşünsem yani aynı dediğim gibi hani bu yolu seçersem olmayana ergiyle çözmüş olurum. İkisini de kullanabilirim diye düşünüyorum

ama... çıkar yani çünkü deneme yönteminde mesela değer vererek çıkartıyorum, olamayana ergide de tersini kabul edip yapıyorum, ikisi de aynı sonuca çıkabilir.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Canan: Mesela ne istediğine önce bakmam...mı lazım yoksa ne verdiği mi bakmam lazım, şimdi kafam karıştı. Benden mesela genel bir yargı istiyorsa ifadede mesela genel bir sonuca ulaşmamı istiyorsa tümevarım kullanırım. Yani sonuca bakarım diye düşünüyorum, olabilir yani, nasıl diyeyim, örnek vermeye çalışıyorum kafamda da bulamıyorum örnek gelmiyor aklıma. Mesela bir soru verdi diyelim, mesela $x=2$ için bir formül bulmuş, bana diyor ki bu formül her reel sayı için geçerli midir diyorsa ben bunu tümevarımla yaparım, hani genel bir yargıya ulaşmam gerekiyor ama aynı şekilde genel yargıyı vermişse $x=2$ için doğru mudur diyorsa tümdengelim yapabilirim.

Mülakatçı: Önem olarak nasıl düşünürsün? Mesela ispat yöntemini bilmeden ispat yapılamaz mı?

Canan: Hocam yani adını bilmem gerekmez, ya da basamaklarını bilmem gerekmez, mesela dediğim gibi biz hiç tümevarım diye bir şey görmedik ama ben genelleye genelleye bir sonuca varabilirim yani, önemli olan doğru yapabilmek işlemleri. Hani illa ben hani tümevarımı biliyorum bu yöntemi kullanacağım diye bir şey olmaz herhalde. Ya da mesela bir çocuğa sorsam diyelim ki Ankara'dan İstanbul'a gideceksin bunu bana hani bu yolun doğru olup olmadığını bana ispat et desem oradan mesela İstanbul'dan Ankara'ya geliyorsa o yol Ankara'dan da İstanbul'a gider der mesela, olmayana ergi mi olur acaba bu? Tersini kabul ediyorum ya hani, (mülakatçı olmayana erginin özelliğini hatırlatır) hu o olmaz yani tamam. Yani misal çocuk bana öyle bir şey diyo aslında bir ispat yöntemi kullanmıştır o ama bilmiyordur hani onun ispat yöntemi olduğunu bilmiyordur, adını bilmiyordur ama kendince... hani ben hep şey derim matematikte biz bunu her ne kadar göremediysek de yani çok fazla çözüm yolu var, insan kişiliğine göre bile çözüm yolu üretebilir yani, mesela çok genel düşünen bir insandır çok açık düşünen bir insandır öyle bir yöntem seçer, ya da böyle kapalı içine dönüktür verilen öğrenilen yöntemi seçer bence. Hocam mesela öğrendikten sonrada ben mesela bu yöntemleri biliyorum neyin ne olduğunu mesela bilmeden önce daha güzel yapabiliyordum ispatları, hani uydurma şeyim vardı, diyordum ki ya böyle olsa

şöyle olur, böyle olsa böyle olur diyordum, şimdi hani biliyorum, basamaklarını biliyorum, olmayacağını biliyorum yani uyduramıyorum bir şey orda, ispata giderken mesela ilk basamakta $k=1$ için sonra 2 için alıyoruz ya mesela sonra n için alıyoruz, ben biliyorum ki 1 den sonra 2 için almak zorundayım hani araya bir şey yeni hani biraz sanki bunları bilmek yaratıcılığı böyle sınırlıyormuş gibi geliyor. Hani sınırladım sonuçta, tümevarım var tümdengelim var başkada ispat yapamam diyorum, bunları bildiğim için işte bana bir soru geldi mesela ikisinden de çözemedim diyorum ki yapamadım bırakıyorum yani ama bunu bilmeden önce hani bu iki yöntemi bilmeden önce daha çok uğraşmışım, biraz sınırlıyor düşünceleri bence. Öğrencilere verilmeme sebebi de bu olabilir, lisede ki öğrenciler daha böyle şey ya yaratıcılar ya kafaları daha böyle çalışıyor, üniversiteye geldikçe hocam bilgiler... bilmiyorum ben köreldiğini düşünüyorum yani çok fazla bilgi verildiği için hani onun dışına çıkamıyoruz, bana ispat yöntemlerini veriyor ama hani kafamda onları oturtturduktan sonra yok yani başka bir yöntemle çözemiyorum soruyu, o pratiklik mesela kayboluyor bunları öğrendiğimiz için. İlla yani bir sayfa ispat yapmazsam o sorunun çözümü sanki yanlışmış gibi geliyor sanki şu kadarlık bir ispat olmayacakmış gibi geliyor, biraz öyle düşünüyorum yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz? Biraz önce az çok bahsettin nasıl karar verdiğine ama doğrudan dolaylı ispat açısından düşünsek.

Canan: Hocam dediğim gibi mesela hani benden ne istiyor ben önce ona bakarım. Hani benden dediğim gibi genel bir yargı istiyorsa ona göre hani tümevarım mı yapacağım tümdengelim mi yapacağım önce onu ayırırım sonra tümdengelimden işte dolaylı mı doğrudan mı... Aslında kolaylığa da gidebilirim yani, dolaylı ispattan direkt çıkıyorsa diğeriyle uğraşmam yani. Direkt mesela dolaylı olarak ispat edebiliyorsam ya da artık aksiyon mu olsun diye yani dolaylıda yaptım hadi bari çelişkide yapayım diye düşünebilirim ama hani hiç böyle kullanmadım ispat yöntemlerini.

Mülakatçı: Nasıl karar veriyorsun mesela sen?

Canan: Genelde kitaplarda mesela genel bir ifade vardır o onla çözülmüşse ona benzer ifadeyi de ben o ispat yöntemiyle çözüyorum. Mesela hocam en çok yaptığımız ispatlardan biri 1. sınıftan beri şu $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunu gösteriyoruz ya rasyonel

kabul edip, mesela olmayana ergiyle yapıyoruz onu, ben mesela onu başka bir yöntemle yapmıyorum ama hani birkaç yöntemle daha... $\sqrt{2}$ nin yedi farklı ispat yöntemi varmış hatta hoca bize bir kere yaptırmıştı onları tek tek, yedi tane ispat yöntemiyle yapılabiliyormuş $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunu ama sadece olmayana ergi gördük ne bileyim 1. sınıftan beri kitapları açtığımızda da direkt o var bende mesela herhangi bir köklü sayının irrasyonel olduğunu hep bu yöntemle yapıyorum, başka bir yöntemle başvurmuyorum yani. Biraz ezbere oluyor herhalde, karar verirken öyle yani. İu dediğim gibi mesela tümevarım yaparken de bu genel formüller veriyorlar ya her reel sayı için geçerlidir dediği anda benim kafamda bir kalıp oluşmuş direkt tümevarım yapıyorum, mesela onu tümdengelimle hiç çözmedim, hani bilmiyorum nasıl çözülür çözüliyorsa da, öyle hocam yani biraz kalıp yargılar üzerine gidiyor ispat yöntemleri.

Mülakatçı: *Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?*

Canan: *Biraz çok bilmek lazım herhalde yani hakim olmak lazım bir kere konuya, hani matematiğin her alanında özellikle cebir ve analizde çok ispat... Gerçi biz geometride de iddia sebepler vardı ispat yöntemi olarak o neye giriyor bilmiyorum da böyle iddialar ve sebepler olarak ayırıyorduk ispat yöntemi olarak gördük yani onu, kafamda öyle kurmuşum, iddia sebeple çözüyorum, o benim ispat yöntemim olmuş yani... Soruyu unuttum hocam...*

Mülakatçı: *Ben sana hatırlatayım. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?*

Canan: *Dediğim gibi çok bilmek, hakim olmak lazım. Bide mesela ispat yöntemlerinde de aşamaları var ya hepsinin hani bir yerde ben mesela yaparken bunun aşaması... bundan sonra ne geliyordu ne yapmam lazım çok düşünürüm mesela ya da karşılaştırırım mesela yazılı olanlarla hani bundan sonra bunu almış bende bunu almalıyım, aslında neden onu aldığını bilmiyorum, hani ispat yöntemini iyi bilmek lazım, nerelerde kullanılacağını yani mesela bunu tümevarım yerine tümdengelim kullanılıyor mu, aralarındaki farkları özellikle bence bilmek lazım ki hani soru geldiği zaman ben hı bu yöntemi kullanabilirim burada diye bir kere ayırmam lazım ondan sonra alt basamaklara işlemlerine dökmem lazım. Yani özetlersem hocam çok karıştırdım. Dediğim gibi alan bilgim iyi olacak, yani ben alanıma hakim olacağım,*

yani matematiği iyi bilmem lazım, matematikte kullanılan yöntem... yani ben tutup da deney yapmam matematikte mesela o yüzden hani mutlaka bir soyut bir yöntem kullanmam lazım o yüzden matematikte kullanılan yöntemleri, işlemlerini, basamaklarını iyi bilmem lazım diye düşünüyorum. Başka... bide yaparken muhakeme yeteneğinin de iyi olması lazım herhalde hani ezbere değil de şunu buradan ben çıkartabilirim... mesela bir cümle var orda, diyelim ki soyut matematikten ispat yapıyorum ama analiz bilgisi lazım o cümlede, hani ben o iki ders arasında biraz git gel yaparak hani nasıl diyeyim ilişkilendirme yapmam lazım oradaki dediğim gibi muhakeme bilgimi kullanmam lazım, demek ki ben analizde bunu öğrenmiştim burada bunu kullanabilirim, hani parantez içi açıp böyle açıklamalar yapabilirim mesela ispat yöntemleri arasına güzel olabilir mesela o hocam, aklıma gelmişken söyleyeyim mesela ispat yöntemlerini okuyoruz ya hani şöyle olmuştur bundan bu gelmiştir $k=2$ için bu doğrudur diyor. Mesela niye 2 için kabul etmiş hani onu bir parantez açıp oraya açıklayabilir, bu da benim daha iyi öğrenmeme mesela sebep olabilir. Ramazan hoca öyle yapardı hatta sınavlarında da bizden öyle istiyordu hani siz bu cümleyi niye buraya yazdınız, u mesela sürekli olan fonksiyon mu türevlenebiliyordu? Her sürekli fonksiyon türevlenebilir diyemem değil mi? Türevlenebilen her fonksiyon sürekli dir derim evet öyle derim, mesela türevlenebilen bir fonksiyon var buldum onun türevlenebilir olduğunu o halde bu fonksiyon sürekli dir yazmış ama niye sürekli dir, mesela ben oraya bir parantez açıp türevlenen her fonksiyon sürekli dir ifadesini bildiğim için bunu diyebilirim mesela, hani bu da aslında şeye giriyor alan bilgisine hakim olmakla bi alakası var hani ben analizi çok iyi bileceğim ki soyut matematiği de yapayım ya da dediğim gibi geometriyi bileceğim ki mesela düzlemlerle analitik geometri ilişkili dersler... öyle hocam yani. Yani tek bir yöne gitmemek lazım ben bu yöntemleri sonuçta analizde de uyguluyorum uygulamalı matematikte de uyguluyorum ne gördük başka biz mesela u bir ders gördük ama şu an hatırlayamadım... kompleks fonksiyonlar teorisi vardı mesela karmaşık sayılar daha çok gördük mesela orda da uygulayabilirim bu yöntemleri e bunların hepsini bütün derslerde uygulayabiliyorsam o derslerinde hani hepsini ayrıntılı olarak bilmem tabi ki mümkün değil ama en azından bu genel yargılara hakim olmam lazım bence.

Mülakatçı: Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?

Canan: Hocam daha önce gördüğüm bir şeyse yaparım ama ilk defa karşılaşıyorsam pek güvenmiyorum yani o yönden kendime hani ilk defa hani teoremlerin belli başlı bir ifadesi var ya hani kalıplar genelde o kalıpla ben karşılaştıysam yani yapabilirim en azından şu yöntemle yaparım derim yani uydurabilirim bir şeyler ama onun harici zannetmiyorum karşılaştığım bir şeyse zor.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?

Canan: Yapabilirim sanırım sonuçta u mesela siz bir başlamışsınız tümevarıma en azından ben onun tümevarımla yapılacağını bildiğim için gerisini de düzenleyebilirim yani.

Mülakatçı: Yani ispat yöntemlerine hakimsen onu devam ettirebilirsin ama başlangıçta hani hangi yöntem olduğuna mı karar vermekte zorluk yaşarsın?

Canan: Biraz olabilir, çünkü hani dediğim gibi ilk defa karşılaşıyorsam hani bazı sorular var başka bi yöntem yapmış yani adam bazen hani hatta ben hangi yöntemi yaptığını da anlayamıyorum okurken, diyorum ki bu ona da çok benziyor buna da çok benziyor hani hangisi karıştırdığım çok oluyor, başlarken de dediğim gibi eğer benim... daha önce benzer bir ifade varsa ya da orda hani ayırım noktasını yakaladıysam yapabilirim ama onun haricinde zannetmiyorum, hani ne kadar hakim olsam da hakim değilim zaten ama farzedelim hepsini çok iyi biliyorum yöntemlerin yani zannetmiyorum direkt şu yöntemdir diyemem herhalde soruya başlarken, deneme yanılma yaparım hakimsem eğer mesela başlarım tümevarımla olmadı tündengelim, tündengelim yöntemiyle çıkamadım işin içinden o zaman ayırırım dolaylı yaparım doğrudan yaparım, ikisini de mesela çıkamadım daha da ayrıntıya indiririm mesela olmayana ergi yaparım o şekilde gider yani hakimsem eğer bu konulara ama onun haricinde zannetmiyorum hocam.

Mülakatçı: Sonuca ulaşabilir misin?

Canan: Sonuca ulaşmada... hocam o soruya göre değişir yani mesela öyle bilgiler oluyor ki dediğim gibi ortada çok farklı bir şey yazıyor sonuna diyor ki budur ispat budur diyor yani hiçbir açıklama yapmamış mesela ama yapabilirim herhalde ya sonuçta hangi yöntem olduğu belli olacak başlangıcı verilmiş nasıl gidildiği de belli bi sonuç çıkartabilirim doğru yanlış bilmiyorum nasıl olur sonuçlanır ama bir sonuç çıkartabilirim yani.

Mülakatçı: *Mesela en başta hangi yöntemle yapacağın söylense diğer basamaklarda sorun yaşar mısın?*

Canan: *Vallaha hiç bilmiyorum hocam, yani yaşamam diye düşünüyorum ama şimdi güvendirmeyeyim de, çalışıp geleyim bunlara diyormuşum, yani çok şey yapamıyorum kendime şu an güvenmiyorum yani bu konuda ama verseniz en azından yorumlarım hocam hani, direkt mesela atıyorum $z=1$ için işte şu yöntemi kullanarak bunu yaptım şundan şurayı çıkarttım diye hani yorumlarım ama hani tek tek basamaklarını yazamam ama en azından siz yöntemi verdiğiniz zaman getiririm yani biraz uydurma yeteneğimde var sallayabilirim yani ha şöyle mi böyle mi diye hani yaparım ama vermediniz diyelim baya düşünürüm yani acaba hangi yöntemi kullanmam lazım ama bir yerden başlarım hocam hani seçemedim yöntemi bilemedim işte yok yapmayacağım demem hani bir yerden başlarım kafamda en yakın gelen yöntemi seçerim ondan başlarım yanlışsa da artık yapacak bir şey yok başa döneceğiz.*

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Canan: *Yok hocam ben mesela mülakat olmasa bu yöntemleri bilmiyordum (önceden bir hocanın ispatla ilgili bir çalışmasına katılmış). Şu an bu kadar konuşamazdım mesela yani. O zaman demiştim ki ben tümevarım var hocam tümdengelim var başka ispat yöntemi yok ki bize bunları öğrettiniz ben öyle dedim ama hani derslerde de çok üzerinde durulmuyor.*

Mülakatçı: *Mesela soyut matematik dersinde normalde ispat yöntemlerinin anlatılması gerekiyor.*

Canan: *Ayrı mesela ispat yöntemleri diye ayrı bir dersin olması lazım bence, sonuçta matematikte hatta bunu 1. sınıfta verseler ayrı bir ders olarak aynı nasıl diyeyim genel kültür dersi gibi ya, sonuçta ben bunu lisede öğretmen olunca da uygulayacağım hani çocuklara direkt aaa çocuklar ben işte size çelişki yöntemini kullanarak ispat yapıyorum demeyeceğim ama hani çocuklara anlatırken hem kafamda daha iyi bilgi oturacak onun ispatını bildiğim için formül ezberlemek zorunda kalmayacağım ya da hani genel kültür dersi olarak konsa bence çok iyi olur, 5 yıl boyunca gördüğümüz bütün derslerde temel oluşturur en azından. Aynı genel matematik dersi gibi nasıl ki bize oradan kümeleri genel veriyorlar ne bileyim türevi genel anlatıyorlarsa bunları da bence anlatmalılar yani, bilmem lazım ki ben mesela soyut cebir dersi aldım yarısı*

olmayana ergi yöntemiyle çözüliyor o ispatların ya ben bu yöntemi bilmiyorum ezberledim girdim mesela sınavlara ha sen bilseydin eğer tabi birazda hocam bilsek de yapamıyoruz oda ayrı bir şey de yani biraz ezber gerektiriyor, nasıl oluyor bilmiyorum ben mesela biliyorum bu yöntemi ama o basamaklar var ya mesela ne nerden gelmiş yani öyle bir şey almış ki adam orda ispatı yaparken ne olduğunu bilmiyorsa e mecburen bide n ler r ler sayı zaten hiç yok hani bir rakam göreyim özlüyorum bazen rakam görmeyi mecburen ezberliyorsun ama en azından mantığı kafanda oturtturursun yani ezbere yüzde yüz çözümler bulamazsında.

Mülakat: *Yani onları ezberlerken mantığa da oturtabiliyor muyuz?*

Canan: *Yani, en azından unutman biraz daha azalır. Ben mesela Ramazan hoca biraz anlatarak çözerdi ispat yöntemlerini, hani direkt tahtaya yazıp gitmezdi ha ben yine ezberledim ezberlemedim değil ama hala mesela 3 sene oldu o dersi alalı 2 sene oldu hocam pardon, 2 sene oldu o dersi alalı ama hani hatırlıyorum uı bunda bunu yapmıştık ha böyle bir yöntem vardı bana geldiği zaman hani basamaklarını tek tek hatırlamıyorum ama genel bir yargısını hatırlıyorum en azından hangi yöntemde çözüldüğünü hatırlıyorum. 1. sınıfta da böyle bir ders verilse ben zorlanmam yani diye düşünüyorum; çünkü bir kere böyle hani birazda matematikçi olduğumuzu da hissederiz demi biraz ben mesela hep diyorum bu mülakatlar bizim toplu oldu mesela diyorum hocam ilk defa üniversite okuduğumu hissettim yani öyle bir şey ki lisedeki çocuklar gibi geliyorsun defter tutmak zorunlu yani yaz çiz ezberle derse gir sınava gir yani biraz böyle yöntemler daha soyut böyle daha güzel anlatılsa biraz üniversite mantığı da oturur, güzel olurdu yani bu yöntemler şöyle ayrı bir ders.*

Mülakatçı: *Peki ispatları bakıp ezberlemeden önce kendin yapma yoluna gidiyor muydun hiç?*

Canan: *Bunu öğrendikten sonra yaptım hocam. Yani bu ders bittikten sonra kendi kendime yani 3. sınıfta aldık mesela bu dersi 4. sınıfta bazı şeyler geliyordu önüme ben diyordum geçen sene böyle bir şeyle karşılaşmıştım bir yapayım bakayım doğru yapabilecek miyim, yöntemi anlamış mıyım ya da basamakları aklımda kalmış mı diye hani yapmaya çalışırdım ama bu derse ilk başladığımda yoktu yani öyle bir şey, hem zaman kısıtlı hem çok bilgi var yani anlamaya vakit kalmıyor ezberliyoruz.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Canan: *Vallaha hocam çok soyut ya hani, bize sadece yol gösterecekler bence yeterli. Hani birebir vermelerindense çünkü bu yöntemler kitaplarda bilmiyorum gerçi hiç araştırmadım ama mesela doğrudan ispat şöyle şöyle yapılır diye yazılıyor mu bilmiyorum hani bize böyle direkt vermek yerine dolaylı ispatı nasıl yapabiliriz arkadaşlar sizce nasıl olabilir mesela hani bir orda bir beyin fırtınası yaratsalar bizde aaa hocam şöyle mi yapsak böyle mi yapsak desek mesela bunu ayrı bir ders olarak düşünüyorum tabi ondan sonra mesela şu bir tane teorem verdi tahtaya yazdı hadi bunu dolaylı ispatla yapalım saçma sapan ispatlarda yapsak en azından biz onun mantığını anlarız ondan sonra hani deseler şöyle şöyle şöyle yapılıyor, direkt bunu verdikleri zaman dediğim gibi yaratıcılığı biraz öldürüyor direkt biz basamaklara kendimizi yönlendiriyoruz hani at gözlüğü takıp ben başka bir tarafa bakamıyorum mesela ondan sonra bize böyle yaklaşımlar daha güzel olur bence biraz daha böyle nasıl yapabiliriz sizce nasıl olmalı bize sorsunlar yani hocam.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenilmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musun? Bunlar nelerdir?*

Canan: *Hımm hiç böyle düşünmemiştim de... Hocam yani sonuçta görüş almak var ya bize direkt bilgi sormamanız güzel mesela bana, ben mesela ilk başlarken Gürsel hocayla dedim acaba direkt bilgi hani tümevarımı anlat dese ne diyecem hani bilmiyorum çünkü tam olarak hala 5. sınıfım tek tek yazıpta tümevarım şudur diyemem sadece kafamda belli şeyler var onları mesela kurmuşum ona göre hani böyle olur şöyle olur ayırt edebiliyorum yöntemleri hani sizin böyle yaklaşmanız güzel bilgi sormamanız. Onun haricinde hani görüş alma olduğu için daha fazla ne olabilir, daha fazlada hocam bir şey düşünemiyorum yani.*

Canan ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Canan, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim, doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi yöntemlerini hatırlamıştır. Canan'a ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Canan şemayı inceledikten sonra aksine örnek verme yöntemi ve olmayana ergi yöntemlerini aynı yöntemler olarak düşünmüştür.

Özellikle olmayana ergi yöntemini her soruda kullanmaya çalıştığını, çelişki yöntemini hiçbir soruda kullanmadığını ya da kullanıyorsa bile farkında olmadığını belirtmiştir. İspatı yapılan soruların hangi ispat yöntemiyle yapıldığını merak ettiğini fakat yinede ispat yöntemlerini bilmenin gereksiz olduğunu, gelecekte işine yaramayacağını düşündüğünü ifade etmiştir. Bir ispatın birbirinden farklı ispat yöntemleriyle yapılabileceğini iddia etmiştir. İspat yöntemini belirleyerek ispat yapmanın yaratıcılığı öldürdüğünü vurgulamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kolaylığa göre karar vereceğini, örneğin doğrudan ispatla yapabildiği bir ispatta diğer yöntemleri denemediğini, benzer ispatlara bakarak benzer kalıp yargılar üzerinden ispat yöntemini seçtiğini ve bu seçimin birazda ezbere dayandığını söylemiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yollarını düşündüğünde, konuya hakim olmak gerektiğini, ispat yöntemlerini, ispat yöntemlerinin aralarındaki farkı ve nerede kullanıldıklarını iyi bilmek gerektiğini ve dersler arasındaki muhakeme yeteneğinin iyi olması gerektiğini belirtmiştir. Bir ispata başlangıç yapması gerektiğinde eğer önceden karşılaştığı bir ispatsa ya da o ispat kalıbını daha önceden görmüşse doğru bir başlangıç yapabileceğini fakat ilk defa karşılaştığı bir ispatsa onu ispatlamakta zorluk yaşayacağını düşündüğünü; eğer yarıda bırakılmış ve tamamlanması istenen bir ispatsa, hangi ispat yönteminin kullanıldığını bildiği için ispatı devam ettirebileceğini düşündüğünü beyan etmiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, bu yüzden ezber yapıldığını ve ispat yöntemleri adı altında bir dersin olması gerektiğini; ispat yöntemlerini daha iyi anlayıp uygulayabilmek için öğrencilere yol gösterilmesi gerektiğini ve ispatı direkt vermektense derslerde beyin fırtınası yapılması gerektiğini dile getirmiştir.

Canan ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Canan, 5. Sınıf öğrencisi olmasına rağmen matematiksel ispat yöntemleri ile ilgili yeterli bir bilgiye sahip değildir. Olmayana ergi yöntemini her ispatta uygulamaya çalışmaktadır. Bunun sebebi Canan'ın olmayana ergi yöntemiyle diğer yöntemlerden daha çok karşılaşmış olmasıdır. İspat yöntemleri ile ilgili hocalarından aldığı fikirlere rağmen kendi düşüncesinin doğruluğunu savunmaktadır. İspat yöntemlerini bilmenin gerekliliği konusunda şüphelidir. Bu düşüncesine, istemediği bir bölümü okuması sebep olmuş olabilir. İspat yöntemlerini kavramaktan ziyade önceden karşılaştığı ispatlarda

kullanılan belli kalıpları kullanmakta ve genelde ispatları ezber yolunu seçmektedir. Geçtiğimiz yıllarda ispat ile ilgili bir çalışmaya katılmış olması ispat yöntemleri hakkındaki farkındalığını arttırmıştır.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Gökhan ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Gökhan: Matematikteki bir kavramı ispat etmek için kullandığımız yöntemler vardı işte onları söyleyeyim mi şimdi?

Mülakatçı: Evet, hangi ispat yöntemleri vardı?

Gökhan: Bu şey vardı işte tümevarım, tümdengelim ondan sonra olmayana ergi metodu vardı, başka... bunlar vardı yani... doğrudan ispat yöntemi vardı bide... Başka... bilmiyorum.

Mülakatçı: Bunlar mı geliyor aklına?

Gökhan: Evet.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.

Bu yöntemleri hatırladık mı? Biraz bilgi verebilir misin bu yöntemler hakkında.

Gökhan: Tümevarımda işte $k=1$ için $k=2$ için k için doğruluğunu gösteriyoruz $k+1$ için ispatlıyoruz. Yani k için doğru kabul ediyoruz $k+1$ için ispatlıyoruz, yani 1 için gösterdik 2 için gösterdik 3 için gösterdik, 3 e gerek yokta yani k için doğru diyoruz $k+1$ için ispatlıyoruz.

Mülakatçı: Mesela tümdengelimle doğrudan ispat ve dolaylı ispat...

Gökhan: Doğrudan ispat zaten şey uı nasıl diyeyim bu mesela uı şeyi örnek verebilir miyiz acaba, mesela üçgenin iç açılarının toplamının 360 olması yani onu mesela şey

yaparız uu köşegenleri uzatırız köşegenleri değil de o kenarların uç kısımlarını uzatırız işte hani tam açı yapıyor ya orası 180° olması lazım, bunu doğrudan ispata örnek verebiliriz belki.

Mülakatçı: Peki derslerinizde en çok hangi yöntemi kullanıyorsunuz?

Gökhan: En çok kullandığımız... bilmiyorum da benim en çok iyi hatırladığım tümevarım varda doğrudan ispatı daha çok galiba. Tümevarımı ben daha iyi hatırladığım için belki, ben kendim hep tümevarım kullanıyorum. Deneme yöntemi var mesela yine olmayana ergi mesela çok kullanılıyor matematikte, diyelim ki bir tane yanlış bulursak direkt çiziyoruz mesela o şekilde, aksine örnek vererek ispat oda aynı. Yani tümevarımla şey diyebiliriz yani aksine örnek vererek ispat yöntemi diyebiliriz en çok kullandığıma.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Gökhan: Ya mesela o biraz daha şey yani nasıl diyeyim matematiksel olarak ispatlamış olmak insana biraz belki güven veriyor yani, diyoruz doğruymuş mesela. Bide daha iyi anlamamızı sağlıyor en azından yani şimdi üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu ispat eden bir öğrenci üçgenin iç açıları toplamının 180 olduğunu unutmaz yani, o şekilde bir faydası var diye düşünüyorum.

Mülakatçı: İspat yöntemleri olarak düşündüğünde ne anlam ifade ediyor?

Gökhan: Ayır ayrı mı mesela tümevarım, olmayana ergi gibi mi? (onaylandı)

Tümevarım zaten biraz daha şey yani, yani normal hayatla ilişkilendirirsek mesela yani 1 için doğruysa 2 için doğruysa 3 içinde doğruysa diğerleri içinde doğrudur diye bir mantık vardır ya yani o şekilde veya bir aksine örnek vererek ispat yöntemi de yani eğer adam bir tane yalan söylemişse yani hiç yalan söylememiş diyemeyiz yani.

Mülakatçı: Peki mesela bunların etkili ispat yapmada rolü oluyor mu?

Gökhan: Şimdi mesela etkili ispat yapmamda şu şekilde, tümevarımın etkisi var illaki ya diyorum ya ben tümevarımı çok kullandığım için belki bu uu mesela şeyi belki ya bunları öğrenmemizin etkisi oldu mesela biz tümevarımı ben 1. sınıfta 2. sınıfta da görmüştüm de bide işte Ramazan hocadan almıştım soyut cebir dersinde orda baya bi pekiştirmiştik yani soyut cebir dersinde, sayılar teorisi var ya orda yani gördükten

sonra bi daha şey yapmadım yani hep tümevarımı kullanmaya çalıştım ilk görür görmez mesela. Ama sonradan mesela, belki daha önceden farkında olmayarak da kullanıyormuşuz aksine örnek vererek ispat yöntemi falan var ya ismini bilmiyoruz ama kullanıyormuşuz onları da o şekilde.

Tümevarım ufkumu açtı falan diyormuşum ispat yöntemiyle ilgili. Onu öğrendikten sonra mesela direkt başlıyorum özellikle cebirsel bir ifade gördüğüm zaman. belki çok geometride kullanamayız da onu geometride genelde doğrudan ispat yöntemi, belki çelişki yöntemi yok doğrudan ispat geometride yani mesela tümevarımı gördükten sonra elime bir ispat sorusu geçtiği zaman ilk baktığım şey yani tümevarımla ispatlanıyor mu ispatlanamıyor mu yani veya işte o gerek ve yeter şartlı sorular var ya onların ilk kısmında mesela... öyle.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?

Gökhan: O mesela şeye göre değişir sorunun şekline göre değişir belki uu misal bir soruyu olmayana ergi yöntemiyle de çelişki yöntemiyle de gerçi bunlar birbirine yakın gibide misal tümevarımla tümdengelimde aynı anda ispatlanacak sorular var yani. Ama ilk kullanacağım yöntem şu olur tümevarım olur onla bir ispatlarım tümdengelimle de bir uğraşırım yani ispatlayamazsam o şekilde bırakırım doğruymuş zaten derim yani çok araştırmam belki.

Mülakatçı: Yani diğer yöntemleri kullanır mısınız? Mesela tümevarıma baktın, tümdengelimde baktın olmadı, diğer yöntemleri de dener misin?

Gökhan: Yani işte bi şeyi denerim belki onu denemişsem tümevarımla tümdengelimii uu aksine örnek vererek ispat yöntemi var ya onu zorlarım ki eğer mesela yanlıştır diyorsa öyle bi şans yok yani, yani işte bu buna eşit değildir diyorsa aksine örnek vererek yapamayız onu ya belki onunda doğru olduğunu göstermek olurda veya işte olabilirli sorular var ya böyle ispatlar var ya yani çalışırım yine de, tümevarım, tümdengelim, en fazla aksine örnek vererek, daha yok yani.

Mülakatçı: Yani demek istediğin şey bir sorunun ispatı için tek bir ispat yöntemi yoktur, demek istediğin bu mu yoksa tek bir tane mi vardır...

Gökhan: Yok, yani şimdi tümevarımla ispatlanan tümdengelimle ispatlanamayan sorular da var yani biliyorum onları, mesela tümdengelimle ispatlanıyor tümevarımla ispatlanamıyor yani.

Mülakatçı: Peki mesela tümdengelimle ispatlanıyorsa tümevarımla ispatlanabilir mi aynı soru? Yoksa bu soru tümdengelimle ispatlanıyorsa başka bir yolla ispatlanamaz mı deriz?

Gökhan: Başka yolla ispatlanabilir yani tümdengelimle ispatlanıyorsa tümevarımla ispatlanabilir yani ama tümdengelimle ispatlanmış olması tümevarımla da ispatlanacağını göstermez yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmek önemli midir?

Gökhan: Tabi ki mesela şimdi bu tümdengelim biraz daha karışık geliyordu bana, Tümevarımla ispatlanacak bir soruyu mesela tümdengelimle ispatlamak vakit kaybıdır belki ya bu kendi şahsım için söylüyorum da bunu veya işte doğrudan ispat yöntemiyle ispatlanacak bir soruyu tümevarımla ispatlamak yine aynı şekilde yani, niye 1 yazacak 2 yazacak 3 yazacak tek tek deneyecek ama doğrudan ispatta belki yani bir aksiyom falan vardır ispatlanmış işte ona benzetip belki yapabiliyorsa belki direkt doğrudan ispat der yazar yani, o şekilde, doğru mu hatırlıyorum bilmiyorum da...

Mülakatçı: İspat yöntemi belirlemeden de ispat yapılamaz mı?

Gökhan: İspat yapacağı soru vardır yapamayacağı soru vardır. Şimdi mesela tümevarımı bilmeden mesela hani diyelim ki hani şey var ya "1 den büyük her sayının asal bir böleni vardır." mesela dimi orda mesela o soruda hani mesela k için gösteriyoruz $k+1$ için diyoruz ki işte bir asal daha vardır kesinlikle. Hani o şey var ya saymanın temel teoremi miydi neydi öyle bir şey vardı yani "Her asal sayıdan daha büyük bir asal sayı vardır." a göre mesela ispatlıyorduk belki onu. Eğer tümevarımı bilmezse adam belli bir yerden sonra tıkanacaktır yani. Yani 1, 2 der 3 der 4 der 5 der belki 10 için yanlıştır yani. Onu genellemezse eğer ispat yöntemiyle ki bunun genellemesini belki ispat yöntemi kullanmadan yapabilir ama ispat yöntemini bilirse daha basit yapar yani. Mesela k için doğru kabul eder $k+1$ için doğru daha genel bir ifade. Belki şu da olabilir yani biz farkında olmadan mesela tümevarımı da kullanmış olabiliriz yani, onu öğrenmeden önce yani, hani çünkü mantık odur yani. Mesela 1 için

ispatlarsın 2 için ispatlarsın bide x için ispatlarsın, mesela x'ede işte doğal sayılar deriz veya işte çalıştığımız kümeye göre artık tam sayılar deriz, eğer x içinde doğruysa zaten bu tümevarım oluyor yani. Belki ismini koymamışızdır ama, tümevarım yöntemiyle ispatlamışız dememişizdir ama o şekilde ispatlamış olabiliriz yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Gökhan: O mesela şeye göre değişiyor genelde konuya göre değişiyor yani. Şimdi eğer değer vererek mesela çıkaracağın bir şeyse, 1 2 3 4 diye ispatlayabiliyorsan mesela bunu direkt diyorum mesela tümevarımdır bu, o şekilde kestiriyorum mesela onu. Yok eğer mesela genel bir ifade vermişse özel bir ifade istiyorsa mesela, diyelim ki işte, şimdi örnek veremiyorum da genel bir ifade versin mesela, versin de nasıl versin, soyut cebir şeyi olsaydı şimdi ya genel bir ifade verdiği zaman...

Mülakatçı: Mesela üçgenin iç açıları toplamının 180° olması olabilir mi?

Gökhan: Aslında onu kastetmedim de ben, şunu diyorum mesela hani $1+2+3+4+5+\dots+n=(n*(n+1))/2$ yazdı ya bunun toplamına dese ki mesela $(n*(n+1))/2$ sağlıyor mesela bunu mesela 2 için mesela doğrudur. Gerçi oda saçma oldu biraz neyse... u... Ya soruyu tekrar alsam.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Gökhan: Ha işte o mesela matematikteki konuya göre ya genelde bide mesela eğer veriyorsam işte 1 2 3 4 diye gidiyorsa işte dediğim gibi biraz öncede ona diyorum ki tümevarımla ispatlanabilir bu. Yok eğer geometriyle ilgili bir şeyse mesela çelişki yöntemi bulmaya çalışıyorum mesela hani geometride ne yaparız, belki vermiştir üçgen vermiştir kenar bağıntıları var ya onunla ilgili bir bağıntı vermiştir oraya mesela direkt onu şey yapabiliriz yani oradan bir kenar daha çekeriz belki şu kenar şundan daha uzun çıkıyorsa bu yanlıştır yani çelişkidir, orda onu seçerim mesela çelişki yöntemiyle ispatlamaya çalışırım o şekilde yani.

Mülakatçı: Doğrudan-dolaylı ispat açısından nasıl düşünürsün?

Gökhan: Ya o soru aslında mesela soruya göre değişirde ilk başta bakarım işte eğer doğrudan mesela ispatta zaten direkt gözükiyordur mesela kesinlik vardır orada, belki

şeydir yani ama dolaylı ispatta başka bir şeyden yararlanıp mesela yapma olduğu için belki orda kestirebiliriz ama benim mesela kendi yaptığım yöntem tümevarımla mesela ispatlanamayacağını mesela direkt bakıyorum mesela diyelim üçgenin iç açıları toplamı dedik ya hep ondan gidiyoruz da neyse dikdörtgenin iç açıları toplamı diyeyim bu seferde, ya mesela orda mesela şey yapabilirim yani tümevarım kullanmam yani, e saçma olur çünkü. Ne diyeceğim mesela 1 açı için, 2 açı için, 3 açı için, 4 açı için saçma olur, orda direkt mesela diyorum yani doğrudan ispat yöntemiyle ispatlayacağım. Ama şu var yani doğrudan mı dolaylı mı olduğuna da doğrudan ispatla ispatlamaya çalışırım baktım oradan çıkmıyorsa ondan sonra diğerlerine başvururum yani.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Gökhan: Çok soru çözmektir, bunun başka bir şeyi yok. Mesela soru tiplerini bilirse insan yani nasıl bir ispat yöntemi izleyeceğinin de farkına varır yani. Yani diyorum ya belki mesela bir şeydir insan, insan diyorum öğrenci işte mesela şey yapar yani ilk başta bir soruda doğrudan ispat yöntemiyle uğraşır mesela çıkartamaz oradan sonra derki çelişki yöntemiyle bulmaya çalışayım o şekilde bulur ya ona benzer bir soru geldiği zaman direkt belki çelişkiyle başlar oradan ispatlar bitirir yani soruyu. Çok soru çözmeye bağlıdır yani.

Mülakatçı: Başka bir şey ekleyebilir miyiz?

Gökhan: Başka bir şey... ya bide ispat yöntemlerinin hepsini bilmeye bağlı yani, yani şimdi oda var şimdi eğer olmayana ergi yöntemini bilmiyorsa belki olmayana ergiyle çıkacaksa o soru yani eksik kalır. Yani hem ispat yöntemlerini bilecek hem de çok soru çözecek.

Mülakatçı: Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?

Gökhan: Yaparım, ispatına göre değişir de o, en kötü ihtimal mesela hani dedim ya ilk benim baktığım ispat yöntemi tümevarım, verdiğiniz soruya göre 1 için eğer öyle denenecek bir soruysa 1 için denerim 2 için denerim baktım mesela doğru sonuçlar alıyorsam devam ederim, zaten 1 için denedim 2 için yanlışsa direkt orda aksine örnek vererek ispat yöntemi ile ispatlamış olurum belki, neyse öyle yani. Başlatabilirim yani veya o gerek yeter şartlı ispatlarda var mesela gerek şartı veya yeter şartı çıkarabilirim

yani. Niye mesela yeter şart mesela gerek şarttan daha kapsamlı olduğu için, olmazsa olmaz dediğimiz için mesela yeter şart için onu çıkarması daha kolay geliyor yani.

İspata başlarken ilk başta şunu yapıyorum zaten, eğer karışık bir şey vermişse mesela, diyelim polinom vermiş veya işte bir fonksiyon vermiş diyelim yani $n^3+n^2+\dots$ falan falan, onu sadeleştirme falan yapabiliyorum mu bakarım yani orda mesela soruyu görür görmez eğer çözmeye imkanım varsa, bu yanlıştır deme imkanım varsa direkt mesela o şekilde yapmaya çalışırım, eğer yanlıştır diyemiyorsam mesela yanlışığını gösteremiyorsam o biraz şeye giriyor galiba olmayana ergi veya çelişki veya aksine örnek vererek ispatlayamıyorsam tümevarıma geçerim mesela sorunun tipine göre, yok tümevarımla da çıkmıyorsa doğrudan ispatı denerdim oda olmuyorsa artık zaten bilmiyorum daha denemezdim herhalde.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?

Gökhan: Tabi mesela az çok ispat yöntemlerini gördüğümüz için mesela biz, yani tahmin edebilirim hangi ispat yöntemiyle gittiğinizi, bir tümevarım mı, tündengelim mi olduğunu mesela kafamda tasarlarım ona göre devam ettiririm. Eğer gerek ve yeter şartlı bir teoremse gerek şartı ispatlamışsanız direkt yeter şarta geçebilirim yani orda, yarıda bırakmışsınız ya. Ama şu vardır geçemeyeceğimiz ispatlarda vardır yani, deneme yöntemi mesela 2-3 kere denemişsinizdir, denemeye devam etmem çok doğru olmaz belki. Sizin ispat yönteminizden devam etmeye çalışırım çıkmıyorsa sonuç değiştiririm yani, farklı bir şekilde ispatlamaya çalışırım.

Mülakatçı: Sonuca ulaşabilir misin?

Gökhan: Sonuca ulaşmada sorun yaşayıp yaşamamak şundan kaynaklanıyor oda çok soru çözmekten kaynaklanıyor yani, çok soru çözmekten kaynaklanıyor diyeyim artık.

Mülakatçı: Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?

Gökhan: Aslında o hocanın kendisine göre değişiyor yani, kimi hoca oluyor tek seferde anlatabiliyor yani, belki sınavda yapamasanız anlamamanızdan değil yani çok soru çözmekten yapamıyorsunuzdur yani. Kimi hocada 50 kerede anlatsa belki anlamam yani, çünkü anlatamıyor yani. Bu hocanın kendisine göre değişiyor. Süre konusuna gelince, sürede aslında bunla ilişkili bence, hoca çabuk anlatabiliyorsa, bildiklerini çabuk aktarabiliyorsa çabuk anlıyor öğrenciler yani, ben çabuk anlıyorum mesela. Yok

eğer yani anlatamıyorsa kendisi veya bilmiyorsa işte böyle kalıyor yani olay, süreyi çok uzatsak da belki bir şey değişmez yani. Süre önemli ama hoca daha önemli bence.

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Gökhan: *Yani hocadan kaynaklanan bir durum olduğu için, biraz öncede söyledim onu ben, bir hoca gelsin mesela böyle herkes mesela dediğim gibi tek seferde anlatabiliyorsa tümevarımı, şimdi tabi sadece hocadan değil yani, benim anladığım bir konuyu belki başka bir arkadaşım anlamamış olabilir yani, o biraz frekans tutmasından kaynaklanıyor olabilir de ama diğer taraftan şu da var, şimdi 1. sınıfta gösterilmesi gereken bir konu bence bunun yani tümevarım, tümdengelim, doğrudan ispat var ya. Biz soyut matematik dersinde gördük bunu normalde 1. sınıfta da hoca iyi anlatamadığı için mesela belki eksik kaldığı için bazı şeyler, doğal sayılar reel sayılar tanım yaptık bıraktık biz soyut matematikte, sonradan gördüğümüz zaman soyut matematikte bir sürü şey var yani, bu ispat yöntemlerinin hepsi varmış yani. Ama ben 3. sınıfta soyut cebir dersinde öğrendim yani tümevarımı.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?*

Gökhan: *Yani şimdi tam kestiremiyorum da onu bence yeterli yani ben ispat yöntemleriyle ilgili bildiğim ne kadar şey varsa size aktardım yani sorularınızla, bütün düşüncelerimi söyledim diye tahmin ediyorum.*

Gökhan ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Gökhan, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim, doğrudan ispat ve olmayana ergi yöntemini hatırlamıştır. Diğer ispat yöntemlerini de hatırlaması için Gökhan'a ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Gökhan, özellikle tümevarımla ispat yöntemini çok kullandığını dile getirmiştir. Matematiksel bir ispat yapmanın insana güven verdiğini, ispat yöntemlerinin kendisi için doğrulamayı ve kalıcılığı ifade ettiğini anlatmıştır. Herhangi bir ispatın bir yöntemle yapılmış olmasının diğer yöntemlerle yapılamayacağı anlamına gelmediğini, yani bir ispat yöntemiyle yapılan ispatın farklı ispat yöntemleriyle de yapılabileceğini; fakat bir ispat yöntemi ile yapılan ispatın diğer ispat yöntemleri ile de yapılacağına garantisini

olmadığını düşünmüştür. Bir ispatı yaparken ispat yöntemini belirlemenin zaman kaybını önleyeceğini, bu yüzden yöntemi belirlemenin önemli olduğunu, belki ispat yöntemini belirlemeden de ispatın yapılabileceğini fakat ispat yöntemi belirlendiğinde daha basit yapılabileceğini belirtmiştir. Sayısal değer verilerek yapılabilecek ispatlarda tümevarımı, geometri sorularında çelişki bulma yöntemini, kesin ifadelerin yer aldığı sorularda doğrudan ispatı, başka ifadelerden yararlanılıp yapılabilecek ispatlarda dolaylı ispatı kullandığını ve genelde doğrudan ispatla mı yoksa dolaylı ispatla mı ispatlayacağına karar vermesi gereken durumlarda öncelikle ispatın doğrudan ispatla yapılıp yapılmayacağına baktığını, eğer doğrudan ispatla yapılamıyorsa dolaylı ispat yöntemlerine başvurduğunu ifade etmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yollarının çok soru çözmek ve ispat yöntemlerini iyi bilmek olduğunu açıklamıştır. Bir ispata başlangıç yapması gerektiğinde, ilk olarak sorunun tümevarımla ispatlanıp ispatlanmayacağına baktığını, daha sonra diğer ispat yöntemlerini deneyerek başlangıç yapabileceğini, yarıda bırakılan bir ispatı tamamlaması istendiğinde ise hangi ispat yönteminin kullandığını anlayıp ona göre devam ettirebileceğini beyan etmiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin önemli olduğunu düşünmesinin yanı sıra anlatım tarzının da önemli olduğunu düşünmektedir. Öğrencilerin ispat yöntemlerini daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için bu yöntemlerin 1. sınıfta etkili bir şekilde anlatılması gerektiğini vurgulamıştır.

Gökhan ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Gökhan, ispat yöntemlerine tam anlamıyla hakim olamamasının yanında yöntemler ve yöntemlerin kıyaslanması konusunda farklı ve güzel fikirlere sahiptir. Yöntemleri tam olarak bilmesede yorumlama konusunda başarılıdır. 5. sınıf öğrencisi olması ve 5 yıldır çeşitli ispatlarla karşılaşması Gökhan'ın ispat yöntemleriyle ilgili farkındalığını artırmış olabilir. Matematiksel ispat yöntemlerini bilmenin ve kullanmanın gerekliliği hakkındaki görüşleri genel olarak olumludur. Okuduğu fakülte ve bölüme tercih hatasıyla gelmesine rağmen matematiği sevmesi ve geçmişteki matematik başarısı belki de onun okuduğu bölümde ve ispat konusunda ki fikirlerine olumlu yansımıştır. İspat yöntemlerine neden tam hakim olamadığının farkındadır.

4.2. Dördüncü Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Hümeysra ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Hümeysra: Bildiğim 2 ye ayrılıyor galiba hani tümevarım tümdengelim, tümdengelim de kendi içerisinde hani olmayana ergi, çelişki bulma bide aksine örnek bulma bildiğim hani bu kadar genel olarak.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır. Bunlar hakkında genel olarak bir fikrin var mı?

Hümeysra: Şimdi olmayana ergi metodunda bildiğim hani önermeni buna denk olan önermenin yani nasıl söyleyeyim karşıt zıttını galiba ispatlıyoruz önermenin kendisinden mesela $p \Rightarrow q$ ise önermemiz $q \Rightarrow p'$ nü ispatlayarak sonucu buluyoruz diye, çelişki bulmada burada da mesela $p \Rightarrow q$ da denk oluyordu $p' \vee q$ ya hani bu özel öğretimden gördüklerim, deneme sonlu kümeler içindi galiba hani önermenin doğru olduğunu küme elemanlarını kullanarak gösteriyorduk, aksine örnek vermede de hani önermenin yanlış olduğunu gösterecek bir örnek vermek yeterliydi.

Mülakatçı: Peki hangi yönteme derslerinizde ne kadar sıklıkla yer veriyorsunuz?

Hümeysra: Hangi yönteme... soyut matematikte hatırladığım 1. sınıfta bunları kullandık baya, soyut cebir dersinde, daha çok hani olmayana ergi metodu, mesela topolojide aksine örnek vermeyle hani ispat daha çok ön planda başkada o kadar.

Mülakatçı: Aksine örnek verme bide olmayana ergi mi dedin, onu da genel olarak mı derslerde kullanıyorsunuz?

Hümeysra: Mesela analizde hiç kullandık mı pek hatırlamıyorum hani kullandığımızı ama işte dediğim gibi soyut matematik ve soyut cebir derslerinde daha çok hani bu tarz

ispatları, topolojide daha çok aksine örnek vererek mesela kompaktlık konusunda hani kümeyi gösteremediğin için aksine örnek vermek daha kolay olduğu için.

Mülakatçı: Peki sen kendin ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanıyorsun?

Hümeysra: Ben herhalde dolaylı ispat, mesela topoloji sınavımız vardı geçen dönem orda hani olmayana ergi metoduyla ona denk bir önermeyi ispatlayarak çözmüştüm soruyu doğru olmuştu, ya başkada öyle pek kullandığım söylenemez açıkçası hani bu tarz sorularda çünkü hani hocaların sorduğu daha çok işte böyle ispatı olan ve bizimde çalıştığımız hani tarz şeyler, kendim değil de yani direkt var olan ispatı yazabiliyorum.

Mülakatçı: Hiç karşılaşmadığın bir ispat geldiğinde?

Hümeysra: İşte mesela topolojide vardı hani benzer bir önermeden yola çıkılarak yapılıyordu onda bi kullandım, başka... soyut cebirde vardı şu tümevarım toplam formüllerinde işte tümevarımı kullanıyorduk $n=1$ için doğru olduğunu kabul edip, başkada genel olarak analizde çok kullanmıyoruz, diğerlerinde de hatırlamıyorum çok.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığımız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Hümeysra: Nasıl yani biraz açsak.

Mülakatçı: Mesela ispat yöntemleri niçin gerekli sence?

Hümeysra: Niçin gerekiyor... Mesela ders olarak düşünsek ezberden değil de hani öğrencinin buluş yoluyla öğrenmesi için belki hani benzer şeyleri vererek öğrencinin hani o tanımı tam olarak kavraması ve o yorumu yapması için hani sorular... hani ezberden uzaklaşması için olabilir. Hani birebir moda mod hani teoremi verip ispatını vermektense hani mesela olmayana ergiyle ve benzeri yöntemlerle yapıldığında hani ezberden daha çok öğrencinin kavraması daha kolay olur diye düşünüyorum, hani akılda kalıcı olur bu şekilde.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?

Hümeysra: Yani şu ana kadar bir yöntem kullandım hani iki yöntemi aynı soruda hiç kullanmadım, hiç karşılaşmadım da.

Mülakatçı: Peki kullanılabilir mi sence?

Hümevra: Hani olabilir mesela hani gerek ve yeter şartlarda mesela iki kısımlılarda birini farklı bir yoldan diğerini farklı bir yoldan ispatı olabilir hani bölüm bölüm ama bilmiyorum çok karşılaşmadım ya da hatırlamıyorum.

Mülakatçı: Peki etkili bir ispat yapmada bir rolü var mıdır ispat yöntemlerinin?

Hümevra: Yani etkili... akılda kalıcı olması için mi?

Mülakatçı: Yani evet ya da başka türlü bir etkileri var mıdır senin için?

Hümevra: Ya benim için ispat yöntemi teoremi anlamamı sağlar ya da konuyu, hani böyle ezberlemek yerine teoremi verip ispatını zaten ezberlediğin zaman bir süre sonra unutuyorsun ama mesela kendin ispat yaptığın zaman hani neyin nereden geldiğini tam olarak oturtmuş oluyorsun veya anlamadığın bir yer varsa yeniden bakabiliyorsun, hani ezberden uzaklaştırıyor, kavramın tam olarak öğrenilmesini sağlıyor herhalde, o teoremin oturması diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Hümevra: Güzel soru uı şeydir herhalde zaman kaybetmeden yani tam olarak ne istediğine uygun bulabilmek galiba, hani böyle kafamıza göre mesela çelişki yöntemi diyelim uygulasak hani soruya uygun değilse hani bir sonuca ulaşamayız herhalde diye düşünüyorum hani sonuca ulaşabilmek için ya da o şeyi tam olarak ifade edebilmek için önemli olabilir.

Mülakatçı: İspat yöntemini belirlemeden de ispat yapılamaz mı?

Hümevra: Yani yapılamaz gibi geliyor, hani ismini söylemesen bile kullandığın şey aslında hani o ispat yöntemlerinden birine girmesi gerekiyor diye düşünüyorum. Hani mesela sen olmayana ergi metodu demezsin ama kullandığın yöntem odur aslında, hani o yüzden de yapılamaz herhalde diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Hümevra: Sorunun şekline göre herhalde...

Mülakatçı: Tümevarım-tümdengelim açısından düşünsek.

Hümevra: Mesela işlemselse hani tümevarım mantıklı gibi geliyor hani $n=1$ için gösteriyorsun k için diyelim kabul ediyorsun, ama mesela daha sözelse doğrudan ya da dolaylıyı kullanırım gibi geliyor.

Mülakatçı: Sözel ve işlemsel oluşuna göre mi?

Hümevra: Yani öyle düşünüyorum. Birazda hani sorunun geliş şeklide nasıl olur onu da çok bilmiyorum.

Mülakatçı: Mesela tümdengelimi nasıl sorularda kullanırsın.

Hümevra: Tümdengelimi... Yani aklıma pek bir şey gelmiyor. Hani çelişki yönteminde mesela yine topoloji üzerinden örnek vereceğim ama mesela orda diyelim ki işte kompaktlık konusunu görüyorsun ya da işte ayırma aksiyomları var işte uzaylar mesela tezfur uzayıdır diyorsun ondan sonra hani ispatladığında bulduğun sonuç işte bu bir çelişki olduğundan hani farklı bir şey bulduğunda kabul ettiğini hani çelişkiyle direkt çözebiliyorsun. Mesela buna tümevarımı diyelim uygulayamazsın hani topoloji açısından bakarsan, mesela orda hani tezfur uzayı için daha sözel hani onun için mesela tümevarımla işte $n=1$ için gösterebileceğin bir şey yok hani yapısına uyan pek bir şey olmadığı için hani daha çok tümdengelim olur. Hani verilen teoremin ya da sorunun yapısına göre değişir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Doğrudan ve dolaylı ispat açısından düşünürsek.

Hümevra: Mesela dolaylıda aksine örnek vermede hani bulabiliyorsam direkt onu bulmaya çalışırım hani varsa doğrudan ya da dolaylıda soru için, başka bildiğim şeyler varsa herhalde çelişkiden giderim. Şimdi doğrudan ispatta hani onun doğru olduğunu bilip hani başka bir şeyin doğruluğundan onun doğruluğunu göstereceğin için hani pek bir fikrin yoksa açıkçası dolaylı ispat daha mantıklı geliyor, hani aksine bir örnek bulabilirsin mesela düşündüğünde, ya da mesela kümeler sonluysa deneme yöntemini kullanırsın bu şekilde olabilir gibi, başkada gelmiyor gibi pek aklıma.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Hümevra: Hani bunla ilgili çok herhalde alıştırmak yapmak gerekli ya da hani bu ispat yöntemlerini tam olarak hani oturtmuş olmak gerekli yani tam olarak öğrenmiş olman gerekli diye düşünüyorum çünkü mesela bazen hani öyle sorular geliyor hiç

farkedemiyorsun hani o yöntemi uygulayacağını ya da ispat yöntemini, yani herhalde soruya bağlı birazda yine burada ya da kavramı işte tam olarak bilmen gerekiyor hani ispat yöntemlerini tam olarak neyi nerede kullanabileceğini kavramış olman gerekli diye düşünüyorum.

Mülakatçı: *Mesela derslerde hocaların sorduğu tarzda soruları yapmakta herhalde çok zorlanmıyorsunuz...*

Hümevra: *Hani zaten hep aynı tarz çözüp aynı tarz sordukları için hani yapmakta çok zorlanmıyoruz ama farklı bir şey çıksa yine benzer yollardan yapılabilir mesela, soyut cebir açısından konuşursak mesela tümevarımlı sorularda hani hocanın çözdüğüne benzer tarzda sorular çıkabiliyor hani oradan akıl yürüterek yapabiliyorsun mesela tümevarımda, bu şekilde. Hani genelde bize aslında ispatta çok sormuyorlar hani birebir ispatını istedikleri için kendimiz değil de hani orda var olanı aslında ezberleyip yazdığımız için çok fazlada kullanamıyoruz hani bu yöntemi.*

Mülakatçı: *Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Hümevra: *Yani şey kendim mi ispat yapacağım.*

Mülakatçı: *Hı hı evet sana bir ispat verilse doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Hümevra: *Hiç bir fikrim yok hani doğru yapabilir miyim belki yaparım diyeyim.*

Mülakatçı: *Mesela nasıl bir yol izlersin ispatı eline aldığında?*

Hümevra: *Yani ispatı aldığımda mesela bildiğim bir şey mi ya da ona mesela yorum yapabiliyor muyum yani aslında yorum yapmak önemli hani onu yorumlayabiliyorsan aslında ispat yöntemini de bulabilirsin, mesela hiçbir fikrin yoksa diyelim verilen ispat için herhalde hiçbir yöntemi uygulayamam.*

Mülakatçı: *Dener misin peki?*

Hümevra: *Ha denerim...*

Mülakatçı: *Yani bu yöntemlere kendin karar verirken nasıl yapıyorsun?*

Hümevra: *Yani dediğim gibi mesela soruya göre hani daha çok işlemselse tümevarımı uygulamayı seçiyorum, hani böyle çok sözel bir ifadeyse hani böyle hiç işlem yapabileceğim bir şey yoksa tümevarımı uygulayabileceğim o tarzlarda hani*

tümdengelimini seçiyorum. Mesela aksine örnek verme çok fazla kullandığım olabilir daha çok.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlamada sorun yaşar mısın?

Hümevra: Yani yaşayabilirim, yani belki yorum yaparım ama doğru olur mu çok ondada pek sanmıyorum olmayabilir yani yanlış şeylerde yapabilirim.

Mülakatçı: Peki nasıl bir yol izlersin?

Hümevra: Hani ilk kısma bakarım bir yöntem uygulanmış mı hani bu ispat yöntemlerinden, eğer hani biri uygulandıysa bende onun hani devamı şeklinde devam etmeye çalışırım, yani farklı bir yöntem kullanır mıyım çok sanmıyorum hani yine baş kısmına göre ilk verilen kısma göre hareket ederim herhalde.

Mülakatçı: Sonuca ulaşmada sorun yaşar mısın?

Hümevra: Normal ispatlar için mi yoksa...

Mülakatçı: Yani baş ve orta kısmının yapıldığını kabul edersek sonuç kısmını devam ettirmede sorun yaşar mısın?

Hümevra: Hani başı verilmişse aslında bulunabilir hani sonuç çünkü gidişat aslında belirlenmiştir hani o giriş yapmak daha zor bence hani hangi yöntemi kullanacağını sonuca ulaşabilirim herhalde diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?

Hümevra: Yani yöntemleri anlatışları mı?

Mülakatçı: Evet...

Hümevra: Bence yetersiz hani çok bahsettiler mi uu mesela dördüncü sınıfa kadar çok az diyebilirim hani belki 1-2 tane örnekle böyle açıklamışlardır, çünkü genelde hani başkalarının yaptığı direkt hani böyle tümevarım tümdengelimle değil de çok önceden bulunmuş teorem ve ispatlarını gördüğümüz için hani bu tarz yöntemler kullanılmıyor mesela ben bunu soyut matematikte galiba biraz anlatılmıştı bide mesela şimdi özel öğretim yöntemlerinde hani konu olarak sözel olarak gördük, bu şekilde, yani yetersiz.

Mülakatçı: Peki 4. sınıfa kadar çok üzerinde durulmadıysa o zamana kadar nasıl yapıyordunuz ispatları?

Hümeýra: Yani mesela soyut cebirde daha çok teorem ispat ağırlıklı hani biz kendimiz yapmıyoruz bi kaç hani soruda öyle olmayana ergi metodu kullanalım vesayre ya da direkt veriyor hani hoca kendisi yazdığı için birazda hani bizde ezberleyip geçtiğimiz için belki birazda bizde çok hani durmuyoruz olmayana ergi metodunu kullanmış gibisinden hani daha çok böyle hani işlemler sorularda hani hoca mesela alıştırmalar olarak çözdüğünde hani biz kendimizi o tarz ispat yöntemlerini kullanıyoruz diyeyim hani diğerlerine de çok dikkat ettiğimizi sanmıyorum hani çünkü hocalar mesela moda mod hani yazdırdığını direkt istediği için çoğu öğrencide hani benim gibi ezberleyerek geçiyor diye düşünüyorum hani ezberlediğini yazıyor sınavda hani hiç o yöntemleri ispat yöntemlerine dikkat ettiğini de çok sanmıyorum ama mesela böyle alıştırma tarzı sorulduğu zaman onlarda mesela dikkat edebiliyoruz hani nasıl yapılmış nerden gelmiş hangi yöntem uygulamış gibisinden

Mülakatçı: Size yöneltildiğinde mi, yani hocalar çözmeden size yönelttiğinde mi?

Hümeýra: Hı hı yani alıştırma olarak çözüldüğünde.

Mülakatçı: Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?

Hümeýra: Mesela hocaların direkt teoremi verip ispatı kendilerinin yazıp bizden de hani ezberleyip yazmamızı istememeleri gerekir, mesela çoğu hoca onu yapıyor, bir mesela notasyonu bile değiştirdiğin zaman hani onu yanlış olarak kabul eden hocalarımızda oldu mesela bunu yapmadıkları zaman ya da işte ne bileyim ispatı hani işte kendileri derste hani siz uğraşın şeklinde sorabilir hani direkt ispatı yazıp geçmektense hani burada hangi yöntem uygulanabilir hani alıştırma tarzında teoremleri de diyelim ispatlattırabilir, hani bu şekilde daha çok akılda kalır ya da bu tarz hani konularda örnekler verilebilir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Örnekler yeterli mi peki verilen?

Hümeýra: Şu anda verilen örnekler mi?

Mülakatçı: Mesela soyut matematik dersinde ispat yöntemlerini gördünüz orda verilen örnekler yeterli oldu mu?

Hümeýra: Verilen örnekler... çok az diyeyim, yani çok hatırlamıyorum aslında ama hani çok yeterli oldu mu aslında hayır olmadı. Hani mesela ben özel öğretim

yöntemlerinde şu anda gördüm ispat yöntemlerini hani tek tek hani bu şekilde bir ayırım şeklinde hani gördük mü ben hatırlamıyorum hani tümevarım diye ayrılıyor, tümdengelim şu şekilde ayrılıyor diye hani bu şekilde detaylı görmedik sadece hani mesela soruda geldiğinde işte olmayana ergi metodu başlığı altında hani bu yolla çözeceğiz hani ona göre yapılır hani oradan anladığım kadarıyla ama detaylı bir şekilde hani özel öğretim 1 de yeni gördük yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?

Hümeyra: Yeterli bence hani ekleme ne yapılabilir belki hocalarla görüşülebilir diye düşünüyorum hani onlar daha çok kullandıkları için özellikle üniversite hocaları, hani bu konuda daha bilinçli yaklaşımları sağlanırsa hani öğrencilerinde daha iyi kavrayıp hani ezberden daha çok kendileri ispatlayarak hem daha kolay öğrenmiş olurlar hem de hani ezberleyip mesela unutuyoruz çoğu şeyi hani hiçbir işe yaramıyor, 1-2 hafta geçtikten sonra hani vizeden sonra bile unutuyorsun, hani belki onlarla da bir hani dikkat daha dikkatli olmalarını mesela bu konular üzerinde daha çok durmalarını sağlanabilir bu tarz derslerde.

Mülakatçı: Peki sorular olarak düşünüürsen?

Hümeyra: Yok genelde hani aklıma gelenleri de sordunuz yeterli bence bunlarda, başkada yok.

Hümeyra ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Hümeyra, matematiksel ispat yöntemlerinin tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrıldığını, tümdengelimin de kendi içerisinde olmayana ergi, çelişki bulma ve aksine örnek bulma yöntemleri olarak ayrıldığını hatırlamıştır. Hümeyra'ya hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlayabilmesi için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Hümeyra, soyut cebir derslerinde genelde olmayana ergi yöntemini, topolojide aksine örnek verme yöntemini kullandıklarını, kendi kendine pek ispat yapmadığı için genelde tercih ettiği bir ispat yöntemi olmadığını söylemiştir. İspat yöntemleri, ezberden kurtulmaya ve kalıcılığı sağlamaya yardımcı olduğu için ispat yöntemlerinin gerekli olduğunu düşünmektedir. Şu ana kadar karşılaştığı ispatlarda tek bir ispat yöntemi kullanıldığını, birden fazla yöntemin de belki kullanılabileceğini ifade

etmiştir. Bir ispatı yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirlemenin zaman kaybını önlemek ve ispatı tam ifade edebilmek açısından önemli olduğunu, ispat yöntemini belirlemeden ispat yapılamayacağını düşündüğünü belirtmiştir. İşlemsel sorularda tümevarım, daha sözel sorularda doğrudan ve dolaylı ispat, pek fikir sahibi olmadığında dolaylı ispat, başka bir şeyin doğruluğundan faydalanabildiğinde doğrudan ispat, çelişki bulabildiğinde çelişki yöntemi, aksine örnek bulabildiğinde aksine örnek verme yöntemi, verilen küme sonluysa deneme yöntemi kullanılması gerektiğini vurgulamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirebilmenin yollarının çok alıştırmaya yapmak ve ispat yöntemlerini tam bilmek olduğunu açıklamıştır. Verilen ispatları ezberleyerek sınavlarda yaptıkları için ispat yöntemlerini çok fazla kullanmadıklarını dile getirmiştir. Verilen bir ispata başlangıç yapılması istendiğinde soruyu yorumlamanın çok önemli olduğunu, yorum yapılırsa ispat yönteminin de bulunabileceğini, eğer yarıda bırakılmış bir soruysa başlangıç yapılmış ispat yöntemini anlayıp ispatı devam ettirme yolunu seçebileceğini anlatmıştır. İspat yöntemlerine 4. sınıfa kadar çok az yer verildiğini, ispat yöntemini anlamak yerine ispatları ezberlediklerini; öğrencilerin bu yöntemleri daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için ezberden uzak durulması gerektiğini, ispatların öğrencilere yaptırılması gerektiğini, yöntemlerin irdelenmesi gerektiğini ve örneklerle konunun desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir.

Hümeysra ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Hümeysra, matematiksel ispat yöntemlerini 4. sınıfta tekrar gördüğü için ispat yöntemlerini hatırlamakta fazla sorun yaşamamıştır, genelde her dersin kendine has bir ispat yöntemi olduğunu düşünmektedir. İspat yöntemlerinin gerekliliğinin farkında olmasına rağmen, ispatlarda daha çok ezber yolunu seçmekte ve bu yöntemleri çok fazla irdelememektedir. Geçmişteki başarısızlığının zamanla başarıya dönüşmesine ve bu başarıyı devam ettirmeyi başarmasına bilgisinin yanı sıra ezber yapmasının da sebep olabileceği gözönüne alınabilir. Teori ağırlıklı dersleri sevmemesi de onu ezber yapmaya yönelten bir etken olabilir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Taner ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Taner: Yapma yöntemimiz olarak mı?

Mülakatçı: Evet.

Taner: Yani biz daha çok hani ispat zaten lisede çok kullanılmadı, daha doğrusu herhalde yeni milli eğitim sisteminde şu an başladı ve sadece fen liseleri falan kullanıyor yani derslerde kavramsal temel oturulması için sırf ispat yöntemlerinden bazıları kullanılıyor, bizde derslerde daha çok hani bazı soyut derslerde zaten bir kaç tekniği kullanıyoruz. Yani bir kısmı mecburen ezberlememiz gerekiyor çünkü bu konuda kavramsal temelimiz hiç yok yani ispatın nasıl yapılacağına dair, bunun için bir kısmını mecburen ezberlememiz gerekiyor sınavlara çalışırken öyle çalışıyoruz yani bir kısmıyla da kendimiz yani yapmaya çalışıyorduk.

Mülakatçı: Peki hangi yöntemler vardı?

Taner: En çok kullandığımız olmayana ergi yöntemini daha çok kullandık, tümevarım, tümdengelim yöntemlerini daha çok kullandık, en çok bunları kullandık yani.

Mülakatçı: Diğer yöntemleri peki hatırlıyor musun?

Taner: İddia sebep yöntemi kullandık düzlem ve analitik geometride, tablo oluşturup iddia ve sebebini de teoremler ve aksiyomlar gereği öyle oluşturduk o tür ispat yaptık başka yapmadık sanırım.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.

Bu yöntemlerin hepsini biliyor musun?

Taner: Hepsini evet. Sadece deneme yöntemi, hani hepsini gördük ben olmayana ergiyi dolaylı ispat olarak herhalde bir başlık altında söyledim yani yoksa aksine örnek

göstermeyi de çelişki yönteminde hepsini şey yaptık yani gördük (Deneme yöntemi açıklandı).

Mülakatçı: *Peki sen ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanıyorsun?*

Taner: *En çok yani kendime oturtabildiğim olmayana ergi yöntemi daha çok, yani yapabildiğimi düşünüyorum u ve aksine örnek bulma, aksine örnek bulma zordur ama tek aksine örnek bulduğumuzda çürütebiliriz o iddiayı, ondan dolayı aksine örnek bulmada daha çok kolay geliyor. Tümevarımla da ilgili soyut matematik derslerinde baya işledik yani tümevarımda en çok yaptığım ispatlardan.*

Mülakatçı: *Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?*

Taner: *Benim için daha çok genellemeyi ifade ediyor, aslında hani o konuda u aksine bir örnek bulamayacağımız bir şey ortaya çıkarmış oluyoruz, yani şöyle mesela çoğu kişi şunu düşünüyordur yani reel sayılar atıyorum sonsuzdur, yani biz bu teoremi sadece burada denedik ama işte atıyorum ilk bir milyar sayı için doğru bir milyardan sonraki sayılar için yanlış mı falan diye, mesela tümevarım için bunu söylesek bütün sayılar için sağladığımızı gösteriyor zaten ispat bize yani çalışma alanımız dar oluyor ama bulduğumuz sonuç çok geniş oluyor bana göre, yani tüm konuya genellebiliyoruz ispat sayesinde.*

Mülakatçı: *İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?*

Taner: *Bence öyle değildir kesinlikle yani atıyorum belki yanlıştır bu bilgin ama aksine örnek bulmayla olmayana ergi birbirine çok yakın gibi geliyor bana hani olmayana ergide sonuçta bir kabulümüz olur ve bu kabulden aksini buluruz, kabulün aksini buluruz, yani bize verdiği hipotezin tersini kabul ederek gideriz, bir bakıma bence olmayana ergi yönteminde de öyle yani ispatın tersini gösterecek yani bize daha doğrusu söylediği hipotezin tersini gösterecek bir örnek bulmamız yetiyor aksine örnek bulmada da, yani bir kaç yolla ispatlanabilir bence.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?*

Taner: İspat yöntemleri çok fazla biraz öncede söylediğimiz gibi hani bir kaç yoldan ispatlanabilir ama u hani mesela bazı konu sadece tümevarımdan ispatlanabilir yani aksine bir örnek bulmamız yetmez, belki aynı örnek olacak ama mesela yine reel sayılar ya da karmaşık sayılar için aksine örnekler bulabiliriz belki ama bu hepsi için doğru olduğunu söylemez bize ama tümevarımı kullanabilirsek mesela bütün sayılar için doğru olduğunu gösteririz yani tek bir u yani tümevarımla daha doğrusu ispat tam olarak gösterir, olmayana ergi mesela bir kaç yolu gösterir ama hepsini göstermeyebilir gibi.

Mülakatçı: Yani yöntemi belirleyebilmenin önemi olarak ne söyleyebiliriz?

Taner: Yani u ispat tekniğini seçmemiz hani u yani atıyorum mesela tümevarımla ispat yapacağız o tekniği seçmemiz yani belki diğer yolla ispatlayamayacağımız bir şeyi o yolla ispatlayabiliriz yani nasıl anlatayım yani hipoteze göre belki seçeriz bunu ama yani hipotez bize de söyler aslında hangi yöntemi seçmemiz gerektiğini o yöntemle göre hipotezden yola çıkarak belirleriz yani bunun olmaması belki ispatı yani doğru olan bir teoremin yanlış olacağını gösteriyor bize, yani doğru ispat yapamadığımız için.

Mülakatçı: İspat yöntemi belirlemeden de ispat yapılamaz mı?

Taner: Yani yapılabilir u bazı yöntemlerde hani aksine bir örnek buluruz ama bazı yöntemlerde binlerce yani tümevarım için yani sonsuz örnek bulduğumuz için tümevarımdan dolayı ispat doğrudur deriz yani bu sonuç doğrudur deriz. Yani ispat yöntemini belirleyemesek bile doğruya ulaşabiliriz bence.

Mülakatçı: Aslında sanki orda yine belirlemiş gibi olduk ismine tümevarım diyerek. Dediğin acaba aynı yöntemi uygularız ama ismini mi bilmeden uygularız?

Taner: Hı hı ismini kullanmasakda... yani bence öyle olur gibi. Hani ispat yöntemleri bellidir yani sonuçta hani başka bir ispat yöntemiyle mi bulamayız diye sordunuz?

Mülakatçı: Yok, hiç belirlemeden, bir ispata başladın ispat yöntemini bilmiyorsun belirlemedin, o şekilde ispatı yapamaz mısın? İspat yöntemlerini kullanmadan.

Taner: Bu konuda bir bilgim yok açıkçası da yani yapabiliriz diye düşünüyorum ben, yani sonuçta mesela atıyorum sadece bir aralıkta çalışsak matematik için, belli bir sayı kümesinde çalışsak ya da o sayıların hepsinin gösterdiği sağlanabilir yani o teoremin yani teorem olup olmadığının daha doğrusu, o şekilde ispata gidebiliriz bence.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Taner: İu bu konuda hani hocalarımız hiç ispat görmediğimiz için önce hipotezden başlamamız gerektiğini söylediler hani hipoteze baktıktan sonra yani hipotez bize belli bir yargı cümlesi verir, bu yargı cümlesinden bizim aksine örnek mi bulacağımız ya da işte tümevarımla mı yola çıkacağımız bu konuda sadece hipotez cümlesiyle başlarım ilk olarak, yani hipotez cümlesine göre yöntemimi seçerim ondan sonra ispata başlarım.

Mülakatçı: Peki hipotez cümlesine baktıktan sonra tümevarımla mı tümdengelimle mi yapacağına nasıl karar verirsin?

Taner: Yani hipotezler bana belki çok açık geliyor ama uu kendini gösterir yani hani, her sayı için sağladığını söyler atıyorum biz aksine bir örnek bulmamız istenir oradan ya da yargı cümlesi kesindir atıyorum doğru diktir der işte ya da bu iki doğru paraleldir der burada hani yargı kesinse ben aksini yani olmayana ergi yapıp doğruların paralel olmadığını düşünüp oradan ispata gidebilirim. Yani kesin yargıda olmayana ergi kullanabilirim mesela, aksini kabul edip oradan yola çıkabilirim, yani yargı kesinse o şekilde seçerim, yargı bütünlemeye gidiyorsa tümdengelimi seçerim. Yani yargıya göre seçerim ben genelde.

Mülakatçı: Mesela tümevarımı nasıl ifadelerde kullanıyorsun?

Taner: Tümevarım hani uu atıyorum bir dizi için genel bir terim verilir bu genel terimin toplamı mesela verilir uu bu dizinin hani genel terimi sonuçta belli bir terime kadar sağlamalı yani biz ilk üç terim ya da beş terim, on terim için sağladığını görebiliriz ya da sonlu bir sayı için yine sağladığını görebiliriz ama bize bütün sayı kümesi lazımdır hani bütün sayı kümesinde sağlayıp sağlamadığı, yani sayı kümesinin hepsini kullanmam gerektiği için tümevarım kullanırım. Tümdengelim içinde bana bir bütün verilir bu bütünden parçalara gitmem lazım yani sayı kümesinde herhangi bir sayı seçtiğim zaman o formülü sağlıyor mu onu görmem lazım. Yani tüm sayı kümesinden bu parçaların...

Mülakatçı: Peki doğrudan dolaylı ispat açısından düşünsek.

Taner: Tam bi örnek gelmiyor şu an aklıma da, ya ben daha doğrusu dolaylı ispatla daha çok herhalde olmayana ergiyi bağdaştırdığım için hep aklıma olmayana ergi

geliyor, herhalde onu bağdaştırdığım için sürekli dolaylı ispatta o geliyor aklıma yani, olmayana ergiyle de söylediğim gibi yani sürekli yargı kesinse aksine giderek bulmaya çalışırım dolaylı ispatta.

Mülakatçı: *Doğrudan ispatta nasıl düşünürsün?*

Taner: *Doğrudan ispatta da direkt dediğim gibi hani genellemeye gitmeye çalışırım, yani direkt formülü kullanarak genellemeye gitmeye çalışırım.*

Mülakatçı: *Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?*

Taner: *Yani bence hani bir ispat ya da bir ders gördük diye hani o ispatı kavramamız mümkün değil gibi benim için hani uı ispatlar bize kavramsal bir temel oturtur ama bize ispatında kavramsal temeli lazımdır bence yani kavramsal temel dediğim bir ispata başlamak çok önemli hani yöntemi seçmek falan çok önemli uı ama onu da uı yani ispatları yaptıkça daha çok kavramsal temelin oturacağını düşünüyorum oda nasıl olabilir dediğim gibi ben şu an hani sadece mesela bir ispat belki yapamam ama yani profesyonel bir öğretmen gibi yapamam ama uı en azından yargı cümlesini gördüğüm zaman hangi ispat tekniğinin kullanılacağı hakkında yorum yapabilirim. Yani ispat yaptıkça daha çok yani ispat yapmaya yönelinebilir yani.*

Mülakatçı: *Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin? Ya da nasıl bir başlangıç yaparsın?*

Taner: *Herhangi bir mesela teorem verdiniz bana onun üzerinden.*

Mülakatçı: *Evet onun ispatına başlangıç yapacaksınız...*

Taner: *Hı hı. Önce uı yani daha çok ispat yaptığımız belki bu 4 sene içinde topoloji dersidir en fazla ispat yaptığımız o derste de her zaman önce bir yargıyla başlarız yani bizden istenen ne, ben teoreme ilk başladığım zaman her zaman istenenle başlarım daha sonra onu göstermeye çalışırım onu göstermeyi de dediğim gibi önce yargı cümlesine bakarım yani teorem genelde benden ne istiyor ya da teorem neyi genellemiş önce bu cümleye bakarım ondan sonra ispat tekniğimi seçerim, öyle devam ederim yani ilk uı benden isteneni yazarım sonra yargı cümlesi ondan sonra ispat, öyle başlarım.*

Mülakatçı: *İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?*

Taner: *Siz ispatın yarısına kadar yaptınız(onaylandı), önce ispatı hani okurum benden ne istiyor hani teoremi hiç görmemiş olsak bile ispatın başında bir bilgi verir yani hangi yolu izleyeceğimiz ya da hangi sonucu bulacağımız hakkında bir bilgi verir ispata başlarken, daha sonra bir yöntem kullanılmıştır hani en azından yarısına kadar geldiği için o yöntemi görebilirim yani olmayana ergi mi kullanılmış, dolaylı ispat mı, doğrudan ispat mı hangi ispatın kullanıldığını oradan görebilirim, atıyorum tümevarım kullanılmış ispatta hani belli bir basamağa kadar gelinmiş oradan sonra genellemeyi götürebiliriz yani.*

Mülakatçı: *Sonuca ulaşabilir misin? Sorun yaşar mısın?*

Taner: *İki ispatın sonuç kısmında uı genelde yaptığım ispatlarda yaşamam hani kavramsal temelini oturtmaya çalışıyorum daha çok, mesela uı herhangi bir ispat yöntemi başladı ortasına kadar ben devam ettirdim, en sonunda bir yargı bulmam lazım, bu yargıda zaten teoremin yargısıdır, yani ben bu genellemeyi ya da aksine örneği bulduktan sonra o yargıyı yazmam sadece sonucu oluşturur, yani teorem yargısını elde etmiş olurum en son.*

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Taner: *Yani uı şöyle bir şey uı bizim bölüm milli eğitim için matematik öğretmenliği yetiştiriyor ama uı tabi akademisyen yetiştirmekte buradan başlıyor uı bence hani bu ayrılabilir yani milli eğitim sistemimiz buna müsait mi tartışılır ama hani ayrılabilir akademisyen olmak isteyen ya da milli eğitimde öğretmen olmak isteyen hani milli eğitim öğretmenleri için çok ispata gerek yok ama kavramsal temelin oturması içinde öğrencinin yani bunu öğrenmesi içinde tabi ki ispat gerekir hani bir formülü direkt öğrenciye vermek yerine o formülün çıkış yöntemini göstermek aslında bir nevi ispattır benim için çünkü formülün nereden geldiğini gösteriyor uı yani bunu yani her öğretmenin bilmesi gerekir ama genel başlıklar altında yani milli eğitim müfredatında olmayan bir ispatı da görmemize gerek yok, eğer bir milli eğitim öğretmeni olacaksak. Ha bu bir milli eğitim öğretmenin bile olsa yani matematiksel bakış açısını geliştirir ama hani çok fazlada hiç görülmemiş yani hiç milli eğitim müfredatında olmayan ve şimdiye kadar olmamış bir teoreminde gösterilmesine gerek yok bence.*

Mülakatçı: Peki 1. sınıfta ispat yöntemlerini soyut matematik dersinde öğrendiniz, ondan sonra ispatları yapmanız kolaylaştı mı yani yoksa yeterli olmadı mı o aldığınız ders?

Taner: Yani ben Anadolu Lisesi çıkışlıyım bizde de hani ispat yöntemleri hakkında hiç bir şey söylenmedi, atıyorum bir integral konusu için yani hoca derse girdi elinde bir formül kağıdı formülleri tahtaya yazdı işte integral bunun integrali budur falan diye öyle geçtik hani hiç sorgulamadık çünkü önümüzde bir ÖSS sistemi vardı hiç sorgulamadık ama burada da hani onun için 1. sınıfta geldiğimiz için ilk uı yani tabi ki tuhaf gelmeye başladı yani bunun ispatı niye bu olsun ki dedim ya da bu niye bunu ispatlasın ki hani her şey için sağlar mı falan diye yani sürekli aksi şeyler yani aksi düşünceler oluştu ama ileriki yıllarda yani ispatları yaptıkça onun matematiksel kavramın anlamını yani ilerlettikçe daha da kolay olmaya başladı yani 1. sınıfta belki bize yapılan ispatların çoğunu anlamamışızdır ama yıllar ilerledikçe yani daha çok ispat yaptıkça daha iyi anlamaya başladık yani bence.

Mülakatçı: Bir ispata başlarken yöntemi belirlerken önce ispatlanan sorulardan mı yola çıkarak yapıyorsun yoksa farklı bir mantık mı yürütüyorsun?

Taner: Yani herhangi bir soru için mi?

Mülakatçı: Evet.

Taner: Yani ikisini bağdaştırmaya çalışıyorum açıkçası şöyle ispat yöntemleri formül ezberlememi azaltıyor, hani bir şeyin kavramsal temelini öğrendiğin zaman bir bakıma formülleri kendin çıkarabiliyorsun onun için hani çok aşına olduğum bir şeyse lise bilgilerimle hemen yapabilirim ama unuttuğum bir şeyse de üniversitede gördüğüm bazı tekniklerle hemen onun formülünü yakalayabilirim yani hemen geliştirebilirim o anda, yani bence ikisi bağdaştırılarak çözüyorum daha çok yani.

Mülakatçı: Sınavlarda sorulan sorularda ezber yoluna mı gidiyorsun yoksa mantığını anlayarak mı?

Taner: Yani kesinlikle mesela bazen uı hani hocanın derste çözdüğü atıyorum 20-25 tane teorem oluyor vizeye kadar 1 ay içinde 20 teoremin yanında tanımlar oluyor ezber şey uı sorular falan oluyor yani hepsi hakkında bilgim olması gerekiyor onun için hiçbir zaman yani hepsini birebir ezberlemem hepsini birebir ezberlersem zaten bu öğrenmeye

de girmez yani hiç bir z... yani 1 ay sonra olmadan bile yani finaller gelmeden bile unutturum direkt, onun için mutlaka hani bir kısmını yani büyük bir kısmını daha doğrusu mesela bir teoremin %75 kadarını önce mantıkla oturtarak kendim yapmaya çalışırım, ondan sonra arada kalan eksiklerim varsa onlara göz atarım.

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Taner: *Bence ıı yani bir konunun herhangi bir konu yani ilköğretim yani ilkokul 1 dede olsa bir konunun kavramsal temeli çok önemli yani o konu nerden nasıl yani bu soruların hepsi öğrencinin aklında canlanacak onun için önce bunlara cevap verilmesi lazım onun için bence önce ispat tekniklerini yani neden bir ispat tekniği olduğu hani bunlar anlatılabilir, daha sonra bunların gerçekten bir ispat tekniği olduğu yani bir şeyi gerçekten sağladığı öğrenciye gösterilebilir, onun sonra öğrenci zaten hani bunun sebebini öğrendikçe teoreme de şey ispat yöntemine de aşına olup teorem gördüğü zaman hemen ispat yöntemini yakalayabilir yani teoremlerin önce yani bu neden bir ispat tekniği yani mesela tümevarım neden bir ispat tekniği, önce bunların sebepleri ve kavramsal temelleri anlatılırsa ondan sonra diğer konular çok daha basit olur bence yani bir teoremi belki hocanın ispatlamasına bile gerek kalmaz, direkt öğrenci kendi yapabilir.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musun? Bunlar nelerdir?*

Taner: *Yani bence hani ben sürekli ıı aksi şeyleri düşünürüm yani kendimde hani sorgulayıcıyım daha doğrusu onun için hani bu sorularda tam benim düşündüğüm tipten oldu hani ıı yani öğrenci nasıl daha iyi öğrenebilir mesela, niye bu ispat tekniği kullanılsın yani kullanılırken niye böyle başlansın bence tam sorular irdelemeye dönüktü yani her şeyi.*

Mülakatçı: *Peki "hocam şunu da ekleseniz daha fazla görüşümüzü alabilirdiniz" diyebileceğin bir şey var mı?*

Taner: *Mesela bazı matematikçiler tarafından tümevarım hala bir ispat tekniği olarak kabul edilmiyor yani dünya genelinde, aslında bunun neden kabul edilmediği ya da size göre bu niye bir teorem şey ıı bir ispat yöntemidir falan soruları da olabilirdi. Yani*

kendi öğrenci bunu nasıl benimsemiş ya da nasıl kabul etmiş bunlar biraz daha irdelenebilir belki.

Mülakatçı: *Peki sorulsa sana, neden sence?*

Taner: *İu yani bunu bir matematikçi olarak düşünmem belki çok abes olur yani şöyle abes olur, ben gerçek bir matematikçi olduğumu düşünmüyorum zaten, ki benim hocalarım bile hani matematiğin bir deniz olduğunu ve tek damlasını bildiklerini söylüyorlar yani matematikte her şeyi bilmem mümkün değil ya onun için hani tümevarım bir ispat mıdır değil midir hani hala tartışılıyordur doğrudur ama bence bu bir ispattır hani benim görüşüm olarak çünkü belli bir genellemeyi sağlar biz matematikte zaten bütün kavramlar soyut olduğu için tamamen mantık üzerinden gideriz yani belli bir genellemeyle gideriz onun için hani bence bu ispat yöntemleri gerçek bir ispat yöntemidir yani benim için, olması gereken yani.*

Mülakat: *Eklemek istediğin veya söylemek istediğin bir şey var mı?*

Taner: *Yani hep merak ettiğim şeydi hani başka ispat yöntemleri olamaz mı ya da bulunamaz mı diye hani belki hala bulunabilir ama yani sanırım bunlarda şu anki matematik için yetiyor yani belki başka yöntemler hakkında da düşünülebilir ya da öğrenciye sorulabilir sen olsan yani bunların hiçbirini bilmesen ne kullanırdın, bir teorem önüne gelse ve ispatlamak zorunda olsan, yani öyle şeyler belki öğrenci var olan yöntemlerden birini bulacak ama sonuçta kendi keşfi olduğu için onu bir daha hiç unutmayacak, yani onları daha iyi oturtabilir.*

Taner ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Taner, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim, olmayana ergi ve iddia sebep yöntemlerini hatırlamıştır ve derslerde en çok bu yöntemleri kullandıklarını belirtmiştir. Taner'e hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlatmak için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir ve Taner bu yöntemlerden deneme yöntemini bilmediğini, kendisi ispat yaparken olmayana ergi, aksine örnek bulma ve tümevarım yöntemlerini daha çok kullandığını, aksine örnek bulma ve olmayana ergi yöntemlerinin birbirine çok yakın yöntemler olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir. Matematiksel bir ispatı yaparken kullanılan ispat yöntemlerinin genellemeyi sağladığını ve formül ezberini azalttığını açıklamıştır. Bir ispatın birkaç yöntemle yapılabileceğini düşünmüştür. İspat yaparken kullanılacak yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin

doğru ispat yapabilmek açısından önemli olduğunu; fakat ispat yöntemini belirlemeden de ispat yapılabileceğini söylemiştir. Matematiksel bir ispat yaparken hipoteze bakarak yöntem seçtiğini, her sayı için sağlandığını söylese aksine örnek bulma yöntemini, yargı kesinse olmayana ergi yöntemini, yargı bütünden parçaya gidiyorsa tümdengeli mi, dizinin genel terimlerinden bahsediyorsa tümevarımı, direkt formül kullanarak genellemeye gidebileceği durumlarda doğrudan ispat yöntemini kullandığını vurgulamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmek için çok ispat yapmak gerektiğini dile getirmiştir. Bir ispata başlangıç yapması istendiğinde ilk olarak isteneni yazacağını, sonra yargı cümlesine bakacağını ve ardından ispat yöntemini seçeceğini; yarıda bırakılmış ve tamamlanması istenen bir ispatı tamamlamak için ispatın başındaki bilgiyi okuyup hangi yöntemin kullanıldığına bakıp sonra genellemeyi sürdüreceğini belirtmiştir. Öğretmen olacaklar için milli eğitim müfredatında olmayan bir ispatı öğrenmenin çok gerekli olmadığını; ancak kavramsal temelin oturtulması için ispatın gerekli olduğunu beyan etmiştir. Lisede ispat yöntemleri hakkında bir fikre sahip olmadıkları için üniversite 1. sınıfta yapılan ispatları çok anlamadıklarını, zaman geçtikçe bu ispatları daha iyi anlamaya başladıklarını, ispatları ezberlemediğini yani ispatların mantığını kavrayarak öğrendiğini, öğrencilerin bu yöntemleri daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için ispat yöntemlerinin kavramsal temellerinin iyi kavratılması gerektiğini ve ispatta kullanılan yöntemin öğrenci tarafından farkedilmesinin sağlanması gerektiğini ifade etmiştir.

Taner ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağdaki gibidir,

Taner'in, matematiksel ispat yöntemleri hakkında genel bir bilgisi vardır. Yöntemleri irdeleme ve aralarında ilişki kurma konusunda belli düşüncelere sahiptir. Öğretmen olacak kişiler için bu yöntemlerin fazla önemli olmadığını düşünmesi lisede ispat yöntemlerini bilmenin bir önemi olmadığını düşündüğünün göstergesidir. İspatlara çalışırken ezber yapmamakta ve ispatların mantığını kavramaya çalışmaktadır. Geçmişten gelen ve devam eden başarısının sebebi belki de ezber yapmaktan kaçınmasından kaynaklanıyordur. Sözel derslere karşı ilgisinin az olması da belki yine ezber yapmamasındandır.

4.3. Üçüncü Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Berke ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Berke: Matematiksel ispat yöntemleri olarak biz iki yöntem olarak tümevarım ve tümdengelim o tümevarım zaten kendi başına bir ispat yöntemi tümdengelim de biz ikiye ayırdık doğrudan dolaylı ispat olarak, doğrudan ispatta yani o adı üstünde zaten doğrudan yapılan, dolaylı ispatları da tekrar kendi altında dörde ayırdık olmayana ergi, çelişki bide neydi deneme deneme yanılma vardı galiba bide uı sonlu kümelerde adı gelmiyor aklıma şu anda sonlu kümelerde işte kümenin elemanlarıyla deneyerek yapıyorduk uı aksine aksine örnek bulma olarak bu şekilde ayırmıştık, yani bu şekilde ayırdığımız ispatları olmayana ergide karşıt tersi önermeyi kullanıyorduk olmayana ergi yaparken uı denk önermesinden yola çıkıyorduk uı şeyde de uı bu olmayana ergide onu çelişki bulmada da onun şey $p \Rightarrow q$ nun p denk veya $p \vee q$ denk önermesinden yola çıkarak bunun yanlış olduğunu gösteriyorduk, bunun yanlış olduğunu gösterdiğimizde de uı önermemizin doğru olduğunu yani bir çelişki buluyorduk o şekilde gösteriyorduk yani benim bildiğim bu kadar bu konuda.

Mülakatçı: Tümevarımda nasıl yapılıyordu?

Berke: Tümevarımda kümenin en küçük pozitif elemanı için doğru olduğunu gösteriyorduk küme uı önermemizin bu eleman için doğru olduğunu gösteriyorduk sonra bi k elemanı için bu kümenin doğru olduğunu kabul edip $k+1$ elemanı içinde k ya bağlı olarak bunun doğru olduğunu gösteriyorduk $n=k$ için doğru kabul ettiğimiz için bunun $k+1$ içinde doğru olduğunu gösteriyorduk uı kümenin ispatı tamam olmuş oluyorduk ama ilk olarak kümenin ilk elemanının o kümede sağlandığını gösteriyorduk yani ispat yöntemi olarak.

Mülakatçı: Derslerinizde hangi yöntemi ne kadar sıklıkla kullanıyorsunuz?

Berke: Genelde olmayana ergiyle çelişki bulma kullanıyoruz desek yeri hani tümevarım olarak da şeyleri deneme yanılma o uı adı o deneme yanılma yöntemini aksine örnek bulmayı genelde kullanmıyoruz matematikte çünkü sonsuz kümelerde çalıştığımız için ve

sonlu kümelerde çalışsak bile bunlar bir r elemanına kadar gidiyor genelde hani bir deneme şansımız yok ya böyle bir 3, 5 gibi bir örnekleme çalışmıyoruz genelde, genelde olmayana ergi, çelişki bunları kullanıyoruz hani tündengelim olarak, tümevarım olarak ya kullandığımız yerlerde oluyor, tümevarım... ya bu üç yöntemi kullanıyoruz genelde tümevarım, olmayana ergi, çelişki bu üç yöntemi kullanıyoruz genelde. Aksine örnek vererek ya genelde hani şöyle söyleyeyim lisede belki hani bu kümeyi sağlamıyor diye gösterebiliyorduk aksine örnek vererek ama üniversiteye geldiğimizde genelde hani küçük kümelerde çalışmadığımız için aksine örnek vermeyi kullanmayı fazla kullanmıyoruz yani.

Mülakatçı: Kendin ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanıyorsun?

Berke: Daha çok hangi yöntem... tümevarım bana kolay geliyor hani ispat yöntemi açık ve net olduğu için kolay geliyor, olmayana ergi ve çelişki bulma hani bunlarda kolay geliyor ama bunlarda ben hani işleme başladığımız zaman işlemde hani birkaç şey katmamız gerekiyor içine oradan buradan onlar biraz daha zoruma gidiyor ya genelde tümevarım daha kolayıma geliyor.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Berke: Kullandığım ispat yöntemleri... Yani ispat yöntemleri ulaşamayacağım bir şeyi yani o konunun doğru olduğunu gösteriyor hani bir şekilde, tam olarak ifade edemedim ama. İspat yöntemleri şöyle de diyebilirim hani ben matematikte işlemsel bilgiyi daha çok severim açıkçası işlemsel bilgiyi ispatlar hani biraz daha teoriye kaçıyor, teori hani fazlada bir ilgilendiğim bir şey değil yani hani hocam, bu konuda ne diyebiliriz ki ne ifade ediyor, formüllerin nerden geldiğini bize açıklıyor hani biz onları işlemde kullanıyoruz ama nerden geldiğini, nasıl geldiğini daha iyi açıklamamıza yardımcı oluyor, bu şeylerin uı işlediğimiz konuların nereye dayandığını gösteriyor bize bu kadar hocam yani o konuda fazla bir düşüncem yok yani.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?

Berke: Birden fazla yöntemi tabi olabilir bence, dediğim demin sorduğunuz soru gibi siz daha çok hangisini kullanırsınız, herkes kendisi hangisini kullanırsa onu yapabilir mesela şöyle bir şey ben bir teorem ispatladığımda birebir ve örtenlikten, birebir ve

örtenlik normal moda mod şekilde yapılabilir yani hani birebir ve örtenliğin tanımından ama bide birebir ve örtenliğin getirdiği uı bize sağladığı kolaylıklardan da yapılabilir işte birebir ve örtense bunun tersi vardır, tersi varsa bunların tersinden yola çıkarak gidebiliriz yani bu kümede olduğundan işte ya bir ispatı olmayana ergiyle yaptığınızda da yapılabilir işte karşıt tersini uı öbür türlü çelişki bulmayla da yapabilirsiniz yani iki eleman alırsınız bunların birbirine eşit ya da değil, çelişki bulmayla da bunu yapabilirsiniz, ya bence birden fazla yolu vardır yani.

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?*

Berke: *Belirleyebilmenin önemi... ya bir kere ispat yöntemini belirleyemediğimiz zaman nasıl başlayacağımızı bile belirleyemiyoruz ya en başta nasıl konuya giriş yapabileceğimizi belirleyemiyoruz, ispat yöntemi belirlemek bu konudan önemli yani, yöntemi belirlerseniz yöntemin nasıl başladığını bildiğiniz için oradan yola çıkarak yani bir ispata başlamak ispatı yapmaktan daha önemli gibi bir şey yani. İşte tümevarımla bir uı kümenin ilk elemanın doğru olduğunu göstermezseniz bu kümede belki ilk eleman sağlamıyordur bu kümeyi hani nasıl başladığınızı kafadan yanlış bir işlem yapmış olabilirsiniz yani ispata nasıl başlayacağınız önemlidir, onun için hangi yolu hangi ispat yöntemini bilmek ispata başlamadan önce bence önemlidir yani.*

Mülakatçı: *Ekleyebileceğin bir şeyler var mı?*

Berke: *Başka... önemi... ispatın nasıl sürdürülebileceği yani o küme üzerinde öyle bir eleman tanımlı mı değil midir yani kümenin ispatımıza nasıl uygun olduğu... işte... bu konuda başka bir düşüncem yok hocam.*

Mülakatçı: *İspat yöntemi belirlemeden de ispat yapılamaz mı?*

Berke: *İspat yöntemini bilmeden şöyle bir şey yapabilirsiniz, bu hani matematikte ne kadar geçerli olur onu bilemem, işte size bir önerme verildiğinde bunun siz kafanıza göre işte 10 a kadar 20 ye kadar doğru olduğunu gösterebilirsiniz hani deneyerek de yani bu öğrenciye biraz saçma gelebiliyor hani hocam işte apaçık belli ispatı bunu neden ispatlıyoruz ya bu hani zaman zaman bize de geliyor önerme açık biz bunu neden ispatlıyoruz ama bunun sonsuz yani sonsuzu ifade edemediğimiz için sonsuza bir genelleme olarak yaptığımız için ispatı o yönden ispat yöntemleri önemlidir. Bir öğrenci*

bunu deneyerek de görebilir ama sonsuza kadar da deneme şansı olmadığı için bunu ispata dökmesi genellemesi daha önemlidir yani ispatta genelleme amaçlı yapılır.

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?*

Berke: *Hangi yöntemin kullanılacağına uı sorunun kendisi gösterebilir, işte... doğrudan isp... dolaylı ispat olsa...*

Mülakatçı: *O şekilde düşünebilirsin yani doğrudan ve dolaylı ispat açısından veya tümevarım ve tümdengelim açısından.*

Berke: *Bu hani tanımlı kümeden kümeye göre olabilir uı bir teklik falan soruluyorsa teklik hani tektir genelde ispatta teklik soruluyorsa bir çelişki bulabilirsiniz burada çelişkiyle işte ifadelerden yola çıkarak...*

Mülakatçı: *Teklikten kastımız nedir?*

Berke: *Yani hani bu önermenin işte birim eleman tektir, birim elemanın tek olduğunu göstermek için bir çelişki yakalayabiliriz buradan çelişkiden yola çıkarak birim elemanın tek olduğunu gösterebiliriz, ya dolaylı ispat şöyle tersini kabul edebileceğimiz bir örnek varsa burada dolaylı ispat yapabiliriz uı şöyle, ki olmayana ergi dolaylı ispatta olmayana ergi olarak kullanabiliriz tersini teşkil ed... mesela bir sayı tekse karesi tektir gibi burada uı olmayana ergi kullanabiliriz, işte bir sayı çiftse karesi çifttir önermesinden yola çıkarak bunun doğru olduğunu göstermemizde bizim önermemizde doğrudur, bu olmayan bir şeyi kabul edip elimizde olmayan bir şeyi kabul edip onu gösterdiğimizde ispatımızı tamamlamış oluruz yani hani ters bir örnek bulabiliyorsak hani bunun karşıt tersinden bahsedebiliyorsak elimizdeki verilen önermenin bunu olmayana ergi ile yapabiliriz, teklikten işte tektir o dediğim birim eleman gibi, öyle bir örnek önerme verebiliyorsa bunu çelişkiden yapabiliriz uı bir dizinin genel terimini bulduğumuzda bir dizinin giden dizinin uı bunu da tümevarım yöntemiyle yapabiliriz çünkü genel sonsuza diziler genel sonsuza gittiği için işte mesela 1 den n ye kadar sayıların toplamı $n(n+1)/2$ bir genellemeye tabiyse bunu da tümevarım yöntemiyle yapabiliriz. Yani benim gördüğüm kadarıyla hani bu zamana kadar bildiğim şeyler hakkında böyle bir yorum yapabilirim hocam.*

Mülakatçı: *Doğrudan ispat yöntemini hangi durumlarda kullanıyoruz?*

Berke: Doğrudan ispatlarda direkt bir önermenin işte $p \Rightarrow r_1$, $r_1 \Rightarrow$ ya hani bu genel bir tanım $p \Rightarrow r_1$, $r_1 \Rightarrow r_2$ yani hani genel bir ifade uı ancak ve ancak şeklinde işte doğrudan ispat hem baştan sona hem sondan başa doğru bir ispat yaparak doğrudan bir şekilde hani çalıştığımız küme üzerinde uı şu ispatı doğrudan da yapabiliriz tekse karesi tektir ya bu ispatı doğrudan tek sayıları $2n+1$ şeklinde karesini alarak karesinin de tektir olduğunu göstererek bunu doğrudan bir ispat yapabiliriz yani elimizdekenden yola çıkarak karşıdaki ifadenin doğru olduğunu göstermek gibi diyebiliriz.

Mülakatçı: Tümdengelim ispat yöntemi olarak nasıl düşünürsün?

Berke: Tümdengelim... hocam tümdengelim işte bütünden parçaya uı tümdengelim o dediğimiz alt başlıklar olarak demiştim ama ben hani... tümevarımın alt başlıklarına döneriz alt başlıktaki ispat yöntemlerini ele alırız, tümdengelimde hani genel bir ifade bu zamana kadar görmedim sadece alt başlıklar olarak gördüm uı işte olmayana ergi çelişki bunları gördüm ben alt başlık olarak tümdengelim diye bir is... şöyle diyebiliriz matematik olarak düşünmediğimiz zaman işte insanlar iki ayaklıdır yani misal insanlar iki ayaklıdır uı şunlar nasıl diyebiliriz onu genel bir ifadeyi özele doğru gitmek uı nasıl bir örnek verebiliriz ona tüm insanlar iki ayaklıdır şu insan iki ayaklıdır o zaman insanlar iki ayaklıdır hani tümünden genelden özele doğru bir iniş yaparız diye düşünüyorum hocam.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Berke: Çok ispat yapmak bence, ben hani şunu da söyleyebilirim matematiğin uı hani kimse bunu kabul etmez ama bir dersin anlatılmasında ben matematiğin bol örnek yapılarak çözülmesi taraftarıyım hani kendim olarak tabi bunu kimse çoğu insan kabul etmiyor zaten bunu hani matematik örnekle anlatılmaz diyorlar ama ben örnekle anlatılması taraftarıyım, yani ispatta da farklı ispatlar yaparak bunun işte şu ispatın nasıl başlayacağı yani ispatların çok yapılması çok örnek çözülmesi diyebiliriz.

Mülakatçı: Başka eklemek istediğin var mı?

Berke: Başka işte az önce dediğimiz gibi uı sorudaki önermelerdeki kelimelerden yola çıkarak işte şöyle kullanılırsa hani böyle bir genellemesine gidebilirdi şu ispat yöntemi kullanılabilir genellemesine. Başka da konuya göre değişebilir konuya göre hani işlenen konuya göre işte gerçi o fazla değişmeyebilir ama çünkü bir ispatın birden çok

yöntemi var bir ispat yapmanın ve bunu kullanmanın en iyi yolu da ispat yöntemlerini iyi bilmektir, iyi bilmekte olabilir. Nasıl ispat... ispat yöntemini iyi bilerseniz sorunun soruyu da anlayabildiğiniz zaman bu ispat yöntemini buna uygulayabilirsiniz manasında ama genel olarak çok soru çok ispat yapılması taraftarıyım yani.

Mülakatçı: *Sence ispat yöntemleri niçin gerekli?*

Berke: *İspat yöntemleri... bu zamana kadar hani kabul ettiğimiz şeylerin doğru mu ya da yanlış mı direkt ben bunu kabul ediyorum ama neden kabul ediyorum, bunu sorgulamamıza yardımcı olabilir, yardımcı oluyordur yani.*

Mülakatçı: *Sana bir ispat versem buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Berke: *Şimdi şöyle bir şey hani ben ispat yöntemini hani öyle çokta seven biri değilim yani açık konuşmak gerekirse ama genel olarak hani yüzdeye vurursak % 60, %70 yapabileceğimi düşünüyorum yani.*

Mülakatçı: *İspat yöntemlerini neden sevmiyorsun?*

Berke: *İspat yöntemlerini neden sevmiyorum... ispat bir mantığa oturtulabilen bir şey ama ya mantığa oturtuyoruz şimdi bir ispat yaparken hani dediğim gibi çok örnek çözmek daha mantıklı oluyor burada çünkü bir ispat yaparken bir yere hani başka bir yerden gelen başka bir konudan gelen bir şeyi ilave etmek zorunda kalıyorsunuz hani genel çok kapsamlı düşünmeniz gerekiyor o yüzden olabilir yani hani nereye ne ilave edeceğimi göremiyor olabilirim, yani bazen bir ispat yapıyoruz bir yere birim eleman ilave ediyoruz ama bunun nerden geldiği hani nerden geliyor bu işlemimizi kolaylaştırması açısından geliyor ve birim elemanın özelliğinden geliyor ama ben onu nereye ilave edeceğimi çok örnek çözerek görebilirim buda işte hani birazda ezber olduğunu düşünüyorum hani ezber değil ya bu açık ve net ama ispatlar mantığa oturulmuş bir şeydir ama ben kendim olarak ezber olduğunu düşünüyorum birazda.*

Mülakatçı: *Yani ezber mi yapıyorsun?*

Berke: *Çoğunu diyebilirim mantığıma oturtabiliyorum ama ispat hani başlarken yani cümleler kullanmam bide şundan kaynaklanıyor olabilir uu üniversitede okuyoruz hocalarımızın nasıl bir ispat istediğinden kaynaklanıyor olabilir uu işte ben normal bir şekilde işlemsel olarak ispatlayabilirim ama bide bunun açıklamaları vardır, açıklamalarını yazmak hoşuma gitmediğinden dolayı yanlış ispat yapmış olabilirim işte*

yani yanlış olmasa da eksik hani biri baktığında bu ne yapmış diyebilir ama ispat doğrudur yani hocam böyle ondan pek hoşuma gitmiyor ispat yapmak. İşte yazıya dökmek ifade etmek biraz zor oluyor işte hani baktığınızda ya ben burada bunu kullanırsam buradan bu gelir şuradan şu gelir diyebiliyorsunuz ama şimdi onu gelirken işte nerden işte geçiyorsunuz ta baştaki konunun özelliğini yazmak zorunda kalıyorsunuz işte hani şu önceki gördüğümüz şu ispatlanmış şu teoremden dolayı şu gelmiştir demeniz falan gerekiyor oraya işte bu yazıya dökmek biraz zoruma gidiyor o yüzden.

Mülakatçı: Peki doğru bir başlangıç yapabilir misin demiştik ya bir ispata başlarken nasıl bir başlangıç yaparsın?

Berke: İşte bir kere verilen kümeyi ele alıyorsunuz işte size verilen önermedeki ifadeleri hipotezden yola çıkarak ispatlamaya çalışıyorsunuz. Önce verilenleri bir ele alıyorsunuz işte böyle olursa kabul edelim ki işte kabul edelim ki, kullandığımız ispat yöntemine de bağlı bu uu ispata başlamanız uu dediğim gibi hipotezden yola çıkarak başlamak mantıklı olur yani. Önce ispat yöntemini belirliyorsunuz önce ispat yöntemini sonra ya da önce çalışacağınız kümeyi teşkil ediyorsunuz ispat yaparken, sonra yönteminizi belirliyorsunuz, bu yönteme göre nasıl bir gidişat izleyeceğinizi buluyorsunuz diye düşünüyorum yani bende öyle yapıyorum hani yapabildiğim kadarıyla.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?

Berke: İspatı başlattınız yarıya getirdiniz... kendi görüşlerim olduğu için hani uu ben ispat yapmayı pek sevmiyorum hani belki getiremeyebilirim yani hani getirmeme gibi bi durumumda var. Yani hocam şöyle diyebiliriz belki hani aşına olduğum bir şeydir yapabilirim ama belki hiç görme... hiç görmediğim bir şeye belki bir kaç tane kelime ilave edebilirim hani devamına, şuradan şu gelebilir diyebilirim ama tam yapamayabilirim belki.

Mülakatçı: Sonuç kısmına kadar getirilen bir ispatta sonuca ulaşmada sorun yaşar mısın?

Berke: Sonuç kısmında yaşama şansım daha düşük çünkü ispatın baştaki kabulümüzle sonuç örtüşür örtüşmez işte buna göre bir sonuç çıkarabiliriz yani ispata siz nasıl

başladıysanız ben oradan bir şeyler yukardan aşağıya bir şeyler çekebilirim hani o daha kolayıma gelir.

Mülakatçı: *Yarıda bırakıldığında da bunu yapamaz mısın?*

Berke: *Ortada da hani diyorum ya hocam kullanmam gereken ifadeler işte belki başka bir ifadeyi orda kullanmam gerekebilir ben bunu göremeyebilirim, o olabilir. Ya ispatı başlattınız ispat yöntemine göre bir şeyler sürdürebilirim ne kadar doğru yapabilirim o biraz belli olmayabilir yani yapamayabilirim yani kesin olarak konuşamam yani yapamayabilirim yani. Bence ispatı yapabilmenin en mantıklı yolu fazla örnek çözerek neler kullanılabildiğini görmek, bunları gördüğümüz zaman diğer ispatlarda kullanabilme şansımız daha yüksek olur.*

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Berke: *Bence yeterli değil çünkü sadece teorik bilgiyi veriyorlar sadece teorik bilgiyi verebiliyorlar işte şuradan şu olduğunda bu ispat yöntemi budur, bu budur bir tane örnek ver geç yani hani bunu öğrenci göremeyebilir bence uygulamanın daha fazla yapılması lazım zamanın fazla ayrılması lazım.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Berke: *Daha farklı neler olabilir... Farklı olarak hani üniversitemizde bende aldığım dersler olarak söyleyeyim fazla uygulama yapılmıyor, uygulama fazla yapılabilir, u sonra... ben fazla uygulamadan anlarım ya o şekilde söyleyeyim, teoremin birde uygulamaya dökülmesi lazım. Ben öğretmen olursam da, burada onun için okuyoruz olursam da ben matematiği hani kavramsal bilgiyi verip hani bilgi işte şu şudur tanım budur, ben örneklerle ve örnekler üzerinde anlatmayı tercih ederim.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?*

Berke: *U hocam pek hani ilgi duymadığım bir konu hakkında hani fazla bir düşüncem olmadığı için bu konuda bir fikrim yok size söyleyebileceğim, eksik kaldığınız bi yön olarak hani.... ya hocam şu olabilir belki bu zamana kadar hani yaptığınız ispatlarda hani ne kadar başarılı oldunuz gibi olabilir belki.*

Mülakatçı: Ne kadar başarılı oldun?

Berke: Ben şunu söyleyeyim ne kadar başarılı oldum hani sınav olarak baktığımızda ispat sorularında %80 lik bir dilim verebilirim sınav olarak baktığımızda ama başarılı olduğumda bu da tabii hocaların soru stiline göre değişiyor hocanın soru stiline göre çalıştığımız için olabilir uı başarı konusunda da işte hocam genel anlamıyla başarılıydık hani bu zamana kadar yapabildiğimiz şeyl... öğrendiğimiz konularda uı öğrenmediğimiz önümüze bir öğrenmediğimiz ispat konulsa burada hani bir şeyler çabalayabiliriz ama hani tam olarak yapabileceğimi pek düşünmüyorum hani şu anda çünkü ya eksik yanlarımın olduğunu biliyorum bu konuda ve bayağında bir eksik yanlarım olabilir işte önünüze bir ispat koysanız, galiba siz sordunuz o soruyu işte ya oda güzel bir soruydu bence bir araştırma için güzel bir soru ya hocam eksik bir yanınızı hani fazla bir ilgi alanım olmadığı için göremiyorum şu anda, olursa fikirlerimi iletirim hocam. Hocam şey olabilir belki işte bu ispatlar bize verildiğinde işte ispatlar bize veriliyor fakat bunların hani biz üstünde uğraşmadığımız konu uı yani bu ispatlar üzerinde uğraşıp uğraşmayacağımız üzerine, ben öğretmen olacağım manasında ben ispat üzerinde uğraşmayacağım araştırma yani alanımızı belirlemede biraz daha farklı olabilir hani ben asistan olarak işte araştırma uı bilim adamı olarak düşünen kişiler ispat üzerine daha çok yoğunlaşmalıdır bence uı normal bir şeyde sadece ispatta nerden geldiğini görüp geçmesi bence daha mantıklıdır diye düşünüyorum, hani alanınıza göre ispatlar fazla mı ya da ispat yapmak mantıklı mı diye bir soru olabilir gibi düşünüyorum alanınızda ya bence şöyle de düşünebilirim biraz ters bir konu uı bölüm matematik bölümünün amacı bilim adamı yetiştirmektir bence orda ispatların daha fazla yapılması gerekebiliyor yani hani nerden geldiği kimin nasıl yaptığı siz nasıl yapabilirsiniz işte kullanılabilir bizde eğitimde ise uı bence ispatın hani o formülün ispatın önermenin nerden geldiği gösterilerek ya siz nerden geldiğini bilin işte ama üstünde fazla durulmaması gerektiğini düşünüyorum ki böyle olmuyor.

Berke ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Berke, matematiksel ispat yöntemlerini eksiksiz bir şekilde hatırlamıştır. Derslerde en çok olmayana ergi, çelişki ve tümevarım yöntemlerini kullandıklarını, deneme ve aksine örnek vererek ispat yöntemlerini genelde kullanmadıklarını, tümevarımın açık ve net olduğunu ve kendine kolay geldiğini ifade etmiştir. İspat

yöntemlerinin ispatın doğruluğunu ve konuların dayanak noktasını gösterdiğini, formüllerin çıkış noktasını açıkladığını düşünmektedir. Bir ispatın farklı ispat yöntemleriyle yapılabileceğini belirtmiştir. Matematiksel bir ispatın ispat yöntemi belirlenmeden yapılamayacağını, ispata doğru başlangıç yapabilmek için ispat yöntemini belirlemek gerektiğini söylemiştir. Matematiksel bir ispat yaparken bir ifadenin tekliğini soruyorsa çelişki yöntemini ya da doğrudan ispatı, tersi kabul edilebilecek bir örnek varsa dolaylı ispatı, dizinin genel terimi tarzındaki sorularda tümevarımı kullandığını açıklamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirebilmenin yollarının çok ispat yapmak, genellemelere gidilebilmek ve ispat yöntemlerini iyi bilmek olduğunu vurgulamıştır. İspat yaparken farklı konulardan yararlandığını ve çok kapsamlı düşünmek gerektiğini düşündüğü için ispat yöntemlerini kullanmayı çokta sevmediğini anlatmıştır. Bir ispata başlangıç yaparken, verilen kümeyi ele alıp hipotezden yola çıkarak ispat yöntemini belirledikten sonra yönteme göre bir gidişat belirleyebileceğini, yarıda bırakılıp tamamlanması istenen bir ispatta ise ispata aşınaysa devam ettirebileceğini, aşına değilse belki ancak birkaç kelime ilave edebileceğini, sonuç kısmına kadar getirilip bırakılmış bir ispatı o kısma kadar yazılmış ifadelerden faydalanarak sonuca ulaştırmasının daha kolay olacağını belirtmiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, derslerde sadece teorik bilginin verildiğini, teorik bilginin yanında çok sayıda uygulamaya yer verilmesi gerektiğini dile getirmiştir.

Berke ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Berke, matematiksel ispat yöntemlerini bilmektedir; fakat bu yöntemleri kullanmayı pek tercih etmemektedir, derslerin teorik bilgilerden çok uygulamaya dönük olması gerektiğini düşünen bir öğrencidir. İlkokulu birleştirilmiş sınıflarda okumasına rağmen başarılı bir öğrenci olması ve bu başarısını devam ettirebilmesi onun azimli bir öğrenci olduğunu göstermektedir; fakat ispat yaparken teferruat yazmayı sevmediği için ispata ve ispat yöntemlerine karşı olumsuz düşüncelere sahiptir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Eda ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Eda: Yani çeşitleriyle mi ilgili?

Mülakatçı: Evet.

Eda: Yani olmayana ergi uu dolaylı ispat, doğrudan ispat, aksini uu göstererek bir örnekle ispat vardı sanırım, başkada şu an aklıma gelmiyor.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır. Hatırladın mı?

Eda: Evet hatırladım şimdi hepsini hatırladım.

Mülakatçı: Bu yöntemler hakkında bildiklerini biraz anlatabilir misin?

Eda: Tümevarımla uu sanırım cebirde daha çok kullandık bunu uu toplam sembolü ve çarpım sembolü, öylemiydi, kullanılarak yaptık. Olmayana ergiyi genelde yani şu an aklıma gelenler olmayana ergiyi genelde düzlem geometride kullandık uu...

Mülakatçı: Nasıl kullanıyordunuz mesela hatırlıyor musun?

Eda: Teoreme göre aslında. Burada bu doğruyu kabul edelim geçsin ya da paralel olsun ya da... çok net hatırlayamıyorum şu anda ama, çelişkiyi, deneme yöntemini pek görmedim, aksine örnek vererek ispat yöntemi de hani çok böyle gördüğüm bir ispat örneği değil, çelişki yönteminin de açıkçası nasıl yapıldığını hatırlamadığım için bir şey söyleyemeyeceğim, doğrudan ispat(sessizlik).

Mülakatçı: Mesela tümevarımda nasıl bir yol izlediğimizi hatırlıyor musun?

Eda: $n=1$ için doğrudur, $n=k$ için doğru kabul ediyoruz $n=k+1$ içinde doğruluğunu gösterdiğimizde ispat tamamlanmış oluyor, bu şekilde hatırlıyorum.

Mülakatçı: Doğrudan ispatta da mesela ...

Eda: Direkt kabulden mi gidiyorduk (onaylandı), kabul edelim ki diye başladığımız ispatlar...

Mülakatçı: $p \Rightarrow q$ yu direkt ispatlamak.

Derslerinizde en çok hangi ispat yöntemini kullanıyorsunuz?

Eda: Dediğim gibi tümevarım, olmayana ergi uu yöntemini daha çok kullanıyoruz.

Mülakatçı: Hangi yöntemlere daha az yer veriyorsunuz?

Eda: Deneme yöntemi, aksine örnek vererek ispat yöntemi.

Mülakatçı: Peki sen ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanıyorsun?

Eda: Açıkçası ben şimdiye kadar kendim bilinçli olarak 1 ya da 2 ispat yapmışımdır hani uu hocaların gösterdiğinin dışında, oda sınavda karşıma geldi, ben sınavda karşıma geldiğinde (sessizlik) sanırım doğrudan ispat oldu benimki, doğrudan ispat yapmış oldum, sonucu doğru oldu, çünkü başka soru yapmamıştım hoca doğru kabul etmiş yani, kendi başıma yaptığım ispat bi tek o soruyu da hatırlamıyorum ispatı nasıl yaptığımı da hatırlamıyorum ama doğrudan ispat olması lazım, çünkü çelişki bulmadım hiç yani çelişkili bir şeyler yapmadım, kabulden yola çıkarak direkt ispatladım, öyle kendi başıma yaptığım ispatım yok yani, genelde gördüğümüz şeyleri... zaten ezber yapamam ben hani işte şu teoremi ezberliyim değil o teoremi anlarsam hani mantiken gerisini getiririm, cümleler kelimeler aynı manaya gelecek şekilde yazarım ama hani anlamazsam da hayatta onu ezberleyemem, anlamam gerekiyor, ama kendi başıma öyle hadi şunun ispatını bir yapayım diyip ispat yaptığım olmadı açıkçası.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Eda: Nasıl yani?

Mülakatçı: Mesela niçin gerekli, senin için anlamı ne?

Eda: İşimizi kolaylaştırmak için değil mi, evet. Her soruya da her ispat yöntemi gitmiyor zaten öyle hani az çok aklımda kalanlardan, uu teoreme göre yöntem belirleyebiliyoruz, kolaylık açısından geliyor aklıma, başka açıkçası bir şey gelmiyor.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?

Eda: Kullanılabileceğini düşünüyorum ama nasıl bir yol izlemeliyim onu bilemiyorum, ben kendi adıma söyleyebilir miyim, yani tek bir şeye bağlı kalınarak ispat edildiğini sanmıyorum, birçok yönden ispat edilebileceğini düşünüyorum ama ne yapmalıyım nerden başlamalıyım nasıl kabul etmeliyim ya da hipotez hüküm nedir bunlar genelde birbirine karışıyor açıkçası, bize bunların bilgisinin çok verildiğini ben düşünmüyorum, ezberci sistem dayatılıyor, bu şekilde gittiğini düşünüyorum ben kendi adıma.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Eda: (sessizlik) Belirleyemezsek zaten ispatı yapamayız (sessizlik).

Mülakatçı: Belirlemeden yapılamaz mı ispat?

Eda: Yani şöyle u evet bu teorem işte olmayana ergi yöntemiyle ispatlanırsa bizim için çok daha güzel bir yol izlenmiş olur dediğimiz bir teoremde ben hani bilmezsem eğer, gidip tümevarımı seçecek olursam zorlanabilirim ama teoreme baktığımda hangi yöntemin daha uygun olduğunu görebilmek çok önemli olsa gerek yani.

Mülakatçı: Ne açılardan önemli olduğunu düşünebiliriz peki?

Eda: Yani ispatın kolay yapılabilmesi açısından, daha anlaşılır olabilmesi açısından karşıdaki anlattığımız kişiye ifade edebilme açısından anlatabilme açısından açıklayıcı olabilme açısından olabilir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Eda: (sessizlik).

Mülakatçı: Mesela tümevarım ve tümdengelim açısından, doğrudan ve dolaylı ispat açısından düşünsen.

Eda: (sessizlik). Yani u teoremin içinde 'ise', 'gerek ve yeter şart' gibi kelimeler geçiyor zaten genelde u onlara bakılarak karar verilebilir sanırım. Diyorum ya açıkçası hani ben u ispat konusunda evet bu bu yoldan ispat edilir kesinlikle böyledir diyip hani teoreme bakıp bu direkt diyebilecek bir kapasitede olduğumu düşünmüyorum. Hangi teoremde hangi ispat kullanılacak işte bu ispatta... aslında benden ne istiyor ne oluyor hani zaten bunu ilk başta teoreme baktığımda ben anlayamıyorum, ne zaman ki ispatı

eğer anlarsam, işte bu buradan dolayıdır, bunun açıklaması şöyledir, daha sonra, teorem ispatlandıktan sonra aslında teoremin ne demek istediğini anlıyorum, ilk başta ben onu anlayamıyorum. Ben zaten mesela hoca yazdırıyor, buradan dolayı budur ben onu hemen yazarım buradan dolayı budur. Hani onu öyle bırakırsam sadece hocanın yazdığı gibi, hocanın kendi cümlelerini eğer ben oraya yazmazsam zaten o ispattan daha sonra ben hiçbir şey anlamıyorum. Öyle oluyor.

Mülakatçı: Mesela ilk baktığında tümevarımla mı tümdengelimle mi yapıldığını anlayabiliyor musun?

Eda: Yani şimdi u $n=1$ için n , k işte $k+1$, bunu gördüğümüzde zaten tamam bunu anlıyoruz bu tümevarım diyoruz.

Mülakatçı: Peki sen bir teorem gördüğünde mesela ben bunu tümevarımla yapabilirim diyebiliyor musun?

Eda: Tabi diyebildiklerimiz oluyor.

Mülakatçı: Mesela nasıl tip sorularda?

Eda: Genelde belirli bir n ye kadar giden sayılarda, yani işlemsel olarak gördüm şimdiye kadar onlarda gidiyor, oluyor yani ama tümdengelim...

Mülakatçı: Mesela tümdengelim alt başlıkları olarak düşünsek, doğrudan dolaylı.

Eda: Şunu diyebiliyorum aslında bir teorem gördüğüm zaman, aslında bu olmayana ergiden yapılırsa olabilir diye düşündüğüm oluyor e o zamanda dolaylı ispat oluyor, doğrudan ispatta dediğiniz gibi yani $p \Rightarrow q$ şeklinde, o da oluyor, aslında tam böyle incelersek oluyor yani şu anda onu farkettim, sayenizde.

Mülakatçı: Mesela nasıl sorular gördüğünde olmayana ergidir, çelişkidir vs. diyorsun?

Eda: (sessizlik)

Mülakatçı: Şöyle bir geçmişi yoklarsak

Eda: Sanki şeyde geçmişte hiçbir şey yokmuş gibi şu an her şey tertemiz. Olmayana ergi yöntemi... kabulden yola çıkıp tersini göstererek gidiyoruz ama şu an inanın aklıma hiçbir teorem gelmiyor.

Mülakatçı: Yani tersini kabul edebileceğin sorularda mı...

Eda: Evet evet. Aslında bunu böyle kabul edersem bunun böyle olmadığını hani göstermiş olurum, teoremlerle çelişki oluştururum ve olur, bu şekilde.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Eda: Ben bu bunu çok kendimde merak etmişim bu bir hocama sormuştum bana demişti ki bir kişinin kitabı var o kişinin kitabını al oku, o kitabı aldım ama okumak bir türlü nasip olmadı, bitirebilseydim bu soruya çok iyi cevap verirdim herhalde.

Mülakatçı: Senin fikrin ne?

Eda: Ya bu şey aslında kendimiz bilinçli olarak çalışsak evet aslında bu yani bide şöyle teoreme baktığımızda biz hani şey yapmıyoruz ispat yöntemi nedir bunun ki demiyoruz sadece onu işte anlayıp ezberleyip genel olarak genel kesim olarak geçiyoruz ama desek ki aaa aslında bu bu yoldan çözülmüş hani onu bir analiz etsek ne olduğunu anlarız ama analiz etmiyoruz işte biz. Niye böyle oluyor onu da bilmiyorum.

Mülakatçı: Yani ne yapmalıyız sence geliştirmek için?

Eda: Verilen bir ispatı diğer ispat yön... yani teoremi diğer ispat yöntemlerini de kullanarak çözmeye şey ispat etmeye çalışabiliriz, gelişmesine yardımcı olabilir, diğer ispat yöntemleriyle bu kendimiz yapamazsak bile daha önce çözülmüş, teoremler değişmez çünkü, daha önce hani internetten ya da kitaplardan bakarak nasıl ispatlandığına bakıp araştırıp anlamaya çalışabiliriz. İllaki bir, şey... analiz edilmiş olur yani, öyle olacağını düşünüyorum.

Mülakatçı: Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin? Ya da nasıl bir başlangıç yaparsın?

Eda: Bu konuda şüpheliyim. İspatı ilk elime aldığımda benden istenen şeyle ilgili bilgilerimi az çok hani neler biliyorum kendim gözden geçiririm ki ne yapayım nasıl yapayım bu aklıma hani tanımları ve diğer teoremleri getirerek işte bu buradan dolayı böyle olacak şekilde hani kullanabileceğim olursa eğer yapabilirim gibime geliyor ama çokta emin konuşmayayım. Bildiğimiz hani evet ispatını hani daha önceden bildiğimiz bu zaten teoremlerin hepsini kanıtlamış olduk kanıtlanmayan teorem yok defterlerimizde öğrendiklerimizde ama bu ve tanımlardan yola çıkarak kabullerle olabileceğini düşünüyorum.

Mülakatçı: İlk aldın kabullere baktın...

Eda: Evet evet...

Mülakatçı: Daha sonra ne yapıyoruz?

Eda: Bu buradan dolayı böyledir ama buraya kadar geliyi... hani buraya gelinceye kadar nasıl bir yöntem izlemeliyim onu düşünürüm elbette, illaki hani bir şeyi birbiriyle bağlantılı olarak sonuca ulaşmaya çalışırım.

Mülakatçı: Peki hangi ispat yöntemini kullanman gerektiğine hangi aşamada yer verirsin?

Eda: Açıkçası önce bir kabataslak yaparım onu daha sonra artık ne ise ona göre düzenlemeye.... sanırım büyük ihtimal düzenlerim, yani bakarım, çünkü bilinçli olarak çözdüğümü ben, ispat yaptığımı düşünmüyorum. İu bakarım evet bu ispat yöntemi yaptığım bir şey hani yaptığım ispat aslında bu ispat yöntemine göreysen u hani düşünürüm mesela neyden yaptım olmayana ergiden yaptım o zaman bunda şu şu yapıyordu deyip ona göre bir düzenleme yaparım yani ben kendim öyle yaparım, bilmiyorum doğru mu olur ama. Ama gerçekten yani siz böyle sordunuz ben artık daha dikkat ederim, işte çok önemli böyle olması ama işte olmuyor.

Ben zaten ispat nasıl söyleyeyim ispat yöntemlerini u hani detaylı olarak gerçekten işte tümevarımda şu yapılır mesela tümevarımı az çok biliyoruz hadi onda sorun yok tündengelim hani çeşitlerinde u hepsinin bir nasıl bir yol izlendiğini bilsek, aslında nasıl teoremlerde kullanıldığını bilsek hani bize bunun dersi verilse ben inanyorum başkalarını bilmem ama kendime inanyorum u önüme gelecek her teoremde illaki bir fikrim olur illaki yani, bu kadar aptal olduğumu düşünmüyorum çünkü. Ama yinede bizde de var yani, kendimizi de araştırabiliriz şimdi.

Mülakatçı: İspatı başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?

Eda: Tamamlayabilirim sanırım. Önceki kısımdan artık çeşidine göre bakarım u nasıl bir yol izlenmesi gerektiği zaten orda hani az çok şekillenmiş olur gibime geliyor gerisini de getiririm.

Mülakatçı: Sonuca ulaşabilir misin ya da sonuç kısmında bir sorun yaşar mısın?

Eda: Teoreme bağlı.

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi? Biraz cevap verdin ama daha ekleyebileceğin bir şey var mı? İspat yöntemlerini sanırım soyut matematik dersinde aldınız...*

Eda: *Ben soyut matematiği ii evet aldık biz soyut matematik dersini ama biz soyut matematik dersini ii ezber yaparak geçtik ii çok açıkçası kaliteli bir eğitim verildiğini düşünmüyorum, çünkü bir kitapta virgülüne kadar ne varsa her şeyin aynısı yazılıyor, başka üniversiteleri bilmiyorum ama buradaki hocamız öyle yaptı, o yüzden ii şimdi mesela düzlem geometride, özellikle düzlem geometride çünkü az çok cebir dersinde neyin ne olduğunu idrak edebiliyoruz çünkü hocamız söylüyor, ama mesela ben düzlem geometri dersinde ii sıkıntı yaşıyorum nerde ne yapacağımı bilmiyorum, ya da analiz derslerinde zaten öyle çok ahım şahım ispat hani çok fazla ispat yapılmıyor ama ondada yapılan ispatları işte %50 anlayabiliyorum. Ama gerçekten bunun 1. sınıfta evet eğitimi tam manasında almış olsaydık ben inanıyorum yani sadece kendim için değil diğer arkadaşlarımda yapardı, herkes bundan muzdarip çünkü, ezberle geç sistemi çok kötü bir sistem çünkü gerçekten ii anlayamazsak, anlayamadan hani ben gerçi anlamadan onu bana kimse ezberletemez, yani, bazı insanlarda vardır ki anlamadan virgülüne kadar ezberler işte o zaman bir adalet olduğunu düşünmüyorum, kendi adıma.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Eda: *Bence bir ders sadece ispatla ilgili bir ders olsa çok güzel olur. Yani ii sadece ben ii ispatı cebirde görmeyeyim ya da sadece ben ispatı ii geometride görmeyeyim ya da soyut matematikte görmeyeyim yani hepsini ii nasıl söyleyeyim ispat yöntemleri teknikleri adı altında bir ders olsa ve o derste her branştan farklı farklı ispat yöntemleri yani kullanılarak ispat yapılırsa çok güzel olur bence ufkumuz genişler gibime geliyor benim.*

Mülakatçı: *İleri sınıflarda da sorun yaşamazsınız...*

Eda: *Evet evet evet kesinlikle, açıkçası mesela ben yüksek lisans yapmayı hep düşündüm ama hep şu geliyor aklıma beni alsalar mesela sorsalar ispat yöntemi, ispat sorsalar acaba yapabilir miyim, tıkanıp kalır mıyım ve bu aklımdan çok geçti çünkü temel yok, temel olsa illaki gerisini getiririz ama temel olduğunu ben düşünmüyorum bu konuda, öyle.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?*

Eda: *Yoo bence sorularınız çok güzeldi, benim en azından genişledi biraz daha bakış açım, biraz daha dikkatli olurum bundan sonra, sorularınız çok çok güzeldi, hatta bu soruları bütün öğrencilere bile vermek gerekir yani ki idrak açılsın, öyle düşünüyorum. Çünkü şimdiye kadar hiç neyi ne yaptığımızı bilmeden yaptığımızın farkına vardım yani sorular sayesinde, gerçekten teşekkür ediyorum hocam.*

Eda ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Eda, matematiksel ispat yöntemleri olarak olmayana ergi, dolaylı ispat, doğrudan ispat ve aksine örnek vererek ispat yöntemlerini hatırlamıştır. Eda'ya hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlatmak için ispat yöntemleri bir şema halinde gösterildikten sonra Eda, deneme yöntemi, çelişki yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemlerini pek görmediğini, derslerinde en çok tümevarım ve olmayana ergi yöntemlerini kullandıklarını, deneme yöntemi ve aksine örnek verme yöntemlerine daha az yer verdiklerini, kendi kendine şu ana kadar sadece bir ispat yaptığını ve onu da doğrudan ispat yöntemini kullanarak yaptığını ifade etmiştir. Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığı ispat yöntemlerinin ispatı yaparken kolaylık sağladığını, bir ispatın birden fazla ispat yöntemi ile yapılabileceğini düşündüğünü; fakat nasıl yapılacağını bilmediğini belirtmiştir. İspat yöntemini belirlemeden ispat yapılamayacağını ve bu yöntemleri belirlemenin ispatın kolay yapılabilmesi, daha anlaşılır olabilmesi ve karşıdaki kişiye ifade edebilmesi açısından önemli olduğunu bildirmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken hangi yöntemin kullanılacağına kendisinin karar veremediğini, ispata baktıktan sonra teoremi anlayabildiğini, n'ye kadar giden sayılarda ya da işlemlerle ifadelerde tümevarımın, $p \Rightarrow q$ şeklinde yapılabilecek sorularda doğrudan ispatın, tersini yapabileceği sorularda olmayana ergi yönteminin kullanılmasının mantıklı olduğunu düşünmektedir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yollarının bilinçli çalışmak ve ispatları analiz etmek olduğunu vurgulamıştır. Bir ispata başlangıç yapması istendiğinde tanımlardan yola çıkıp kabullere bakacağını, ispatı kabataslak yaptıktan sonra ispat yöntemini düşüneceğini; yarıda bırakılan bir ispatı tamamlaması istendiğinde ilk kısımda hangi ispat yönteminin

kullanıldığına bakarak o ispat yöntemine göre ispatı devam ettirebileceğini beyan etmiştir. Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemlerini daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için ispat veya ispat yöntemleri üzerine bir ders olması gerektiğini dile getirmiştir.

Eda ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Eda, matematiksel ispat yöntemleri hakkında fikir sahibidir; fakat konuya çokta hakim değildir. Aslında ispat yöntemleri 1. sınıftan itibaren iyi bir şekilde anlatılsa Eda'nın ispatları yaparken ve ispat yöntemini belirlerken bir sorun yaşamayacağını düşünüyorum; çünkü olayların her zaman mantığını anlamaya çalışan ve ezber yapmaktan kaçınan bir öğrencidir. Eda'nın, ilkokuldan üniversiteye kadar matematik dersini sevmesi o dersin hocasını sevmesiyle doğru orantılı olarak gitmiştir, bu durumun üniversiteye de yansımıştır. Ders hocasını sevdiği ölçüde o derste verilen ispatları yapabilmektedir.

4.4. İkinci Sınıf Öğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Pınar ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?*

Pınar: *İu şey ispat çeşitlerini mi soruyorsunuz?*

Mülakatçı: *Evet.*

Pınar: *İu tümevarım..., olmayana ergi metoduyla daha çok ispatlarımızı yapıyoruz, sonra başka bir şey yok gibi şu an. Ya tümevarım var tümdengelim var, işte onu da kendi arasında uu olmayana ergi metoduyla vardı, başka gerçekten aklıma gelmiyor.*

Mülakatçı: *Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.*

Pınar: Zaten yanlış olduğu uu sürece bir tane aksine örnek verdiğimiz zaman ispatımızı tamamlıyorduk yanlış olma durumunda, işte olmayana ergi metoduyla yanlış kabul ediyorduk doğru olduğunu ispatlamaya çalışıyorduk ama şey deneme yöntemi onu hiç şey yapmadım ya da belki o bildiğimiz şu hani yerine koyup yazıyorduk ya o olabilir ama ben hiç böyle duymamıştım hani ispat çeşidi olduğunu, onu hani bir ispat yöntemi olarak bilmiyordum hatta o fazla tercih edilmiyordu hani çıkar mı çıkmaz mı biraz şey bir yöntem diye (deneme yöntemi izah edildi). Ha tamam verilen aralık için doğru olup olmadığını. Çelişki yöntemi duymamıştım gerçi (çelişki yöntemi izah edildi). Ama olmayana ergi yöntemine benziyor hani yanlış kabul edip doğruya gitme şeklinde, oda çelişki biraz (olmayana ergi ile çelişki yönteminin farkı izah edildi).

Mülakatçı: Doğrudan ispatta nasıl yapıyorduk?

Pınar: Doğrudan... aslında verilen verileri yani işleme koyup direkt sonucu elde ediyorduk, yani doğrudan ispatta fazla bir şey yoktu sanki. ... Ama gerçekten çelişki yöntemini hiç duymamıştım, daha hani bana sorsanız yine olmayana ergi yöntemi derim hani söylediğiniz şeyleri, bilmiyordum yani, öğrenmiş oldum.

Mülakatçı: Tümevarım-tümdengelimde sorun var mı?

Pınar: Parçadan bütüne, bütünden parçaya...

Mülakatçı: Derslerinizde hangi ispat yöntemine ne kadar sıklıkla yer veriyorsunuz?

Pınar: Daha çok geçen sene soyut matematik aldık, daha çok soyut matematikte kullandık biz bu ispat çeşitlerini, hatta soyut matematikte gördüm daha doğrusu şeylerde mesela analiz dersinde görüyoruz arada sırada bir ama şey böyle fazla şey değil çokça değil, geçen sene çok fazla gördük.

Mülakatçı: Mesela en fazla hangi yöntemi kullanıyorsunuz?

Pınar: En fazla mesela şeyde lineer cebirde işte bir soru yanlışsa eğer direkt aksine bir örnek vererek ispatı yapabiliyoruz, olmayana ergi metodu çok fazla kullanıyoruz, o yüzden ikisini biliyorum, bide dolaylı ispat direkt elde edilen veriler, üçünü fazla kullanıyoruz.

Mülakatçı: Dolaylı ispattan hangileri?

Pınar: Doğrudan ispatı kullanıyoruz işte, dolaylı ispatta da olmayana ergi metoduyla daha çok lineer dersinde aksine örnek vererek ispatı kullanıyoruz. Lineer dersinde çoğunlukla onu kullanıyoruz evet bir tane ters örnek verseniz soruyu kabul ediyor.

Mülakatçı: Peki kendin ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanıyorsun?

Pınar: Ben en şey olmayana ergi yöntemi, belki geçen seneden kalma bir şeydir, çünkü geçen sene çok fazla kullanıyorduk, şey lisede de mesela olmayana ergi yöntemi daha fazla böyle şey ben şey...

Mülakatçı: Lisede de mi kullanıyordunuz ispat yöntemlerini?

Pınar: Mesela ben şeye LYS ye hazırlanırken böyle hani hepsi formül ya aklımda tutmak için aralarında bir mantıksal bağ kurmaya çalışıyordum, böyle şey ispatlara falan baya bir şey yaparım hani, hatta kendim ispat yapardım hani şunu şöyle kullanırsam olur, böyle kullanırsam böyle olur şeklinde, kendim formül üretmeye çalışırdım.

Mülakatçı: Yani bunlar verilmiyordu da sen mi kendin yapıyordun?

Pınar: Hı hı evet evet öyleydi. Aslında bir şeyleri uydurmaya çalışıyordum çünkü hepsini... benim ezberim pek iyi değildir hatta hiç iyi değildir, çünkü LYS konuları da hep ezber bilirsiniz, o yüzden hani ya ben seviyorum ispatları...

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Pınar: Mesela bir soruya tek uygulamıyorsunuz onu hani bir şey mesela doğrudan ispatta verilen eldeleri bir tane soruya uyguluyorsunuz ya da şöyle diyeyim ya birkaç tane soru yöntemini elde edebiliyorsunuz hani ispat yöntemiyle, onu uyguladığınız zaman.(Açarsak) mesela sadece bir soruya odaklı kalmıyoruz aradaki mantığı buluyoruz ispatlarla. Hani mesela işte bir tane soruda çözdüğümüz bir formülü diğer soruda yapamıyoruz ama mantığını anladığımız zaman ya körü körüne gitmektense biraz daha şey uu soruları genelleştirebiliyoruz, bütün sorulara uygulama şansımız oluyor ispatta, yani sorunun şeyini biraz genişletiyoruz aslında soru sayısını, çözebileceğimiz soru sayısını daha fazla genişletiyoruz. Başkada aklıma bir şey gelmiyor açıkçası.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?

Pınar: Ya mesela kendim için söyleyeyim ben bir tanesini kullanabiliyorum ama hani birden fazla da keşke kullanabilsem diyeyim yani.

Mülakatçı: Peki kullanılabilir mi sence?

Pınar: Ya mesela şöyle örnek vereyim, olmayana ergi metoduyla aksine örnek vererek ispat yöntemi ikisi bir tanesinde olmaz, ya bir tanesini kullanacaksınız ya diğerini zaten yanlışsa direkt bunu (aksine örnek vererek ispat yöntemi) kullanmanız yeterli, öyle düşünüyorum yani, ikisinden birini kullanacağız. Ama hani çelişki yöntemiyle olmayana ergi yöntemi birlikte kullanılabilir yani çünkü ikisi de birbirine çok benziyor. Ya açıkçası kendim hiç kullanmadım öyle, bir tane ispat yeterli oluyor. Bide şöyle bir şey var, mesela hocalarımız daha çok uygulama üzerine, şimdi bizde ister istemez o yöne doğru kaydırıyoruz kendimizi, ispat çok az mesela ispatı geçen sene bir gördüm bu sene mesela şeyde analiz dersinde ilk dönem işte hocamız soruyordu işte ezberleyip girdik ona, hani mantığından çok çünkü onu soracak ben bunu soracağım diyor birazda hani hocanın şeyine yöneltmesine göre oluyor aslında açıkçası. Bu da benim ispatla ilgili pek bir bilgim bir şeyim yok açıkçası.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Pınar: Zaten çoğu sorunun çözümünün ana şeyi odur hani ispatı hangi ispatı yapacağımızı biliyorsak sorunun yarısını çözmüşüz demektir. Mesela o soruyu ya aksine örnek vererek çözeceğiz onu belirlediyseniz biliyoruz ki artık bu soruda bir yanlışlık var bunu aksine bir örnek vererek çözebileceğiz hani onu belirlediğimiz zaman sorunun gidişatını bulmuş oluyoruz hemen hemen hepsini çözmüş gibi bir şey oluyoruz, yanlış olduğunu kabul ediyoruz orda, öyle.

Mülakatçı: Peki soruya bakıldığında direkt yöntemine karar verilebilir mi?

Pınar: Bilmiyorum onu, hiç şey yapmadım. Şey mesela hani soruya baktım soruda bir şey bir yanlışlık var bir gidişat şeyi var hani hemen aksine bir örnek vererek ona bakıyorum doğru mudur değil midir mesela buna da, ama işte sorunun orijinal halinde bir şeyin uyumsuzluk yok mesela onda direkt işte olmayana ergi yöntemi kullanarak ya

da başka bir yöntem kullanarak ispat edebilirim. Aslında yani benim fikrimi soracak olursanız aksine örnek vermek bir yana diğerlerinin hepsi bir yana sanki. Çünkü o sadece yanlışlığını göstermek için tek bir örnekte veriliyor ya, hani diğerleri biraz daha böyle uzun işlemler, o sanki hepsine karşı bir şey gibi geliyor bana, o diğerleri hani birbirlerine benziyor sonuçta, hani hepsi bir şeye gitme ama hani orda anlıyorsun diyorsun ki bu soruda bir hata var bunu bir tane örnekle ben ispatlayabilirim aksine bir örnek vererek ispatlayabilirim ama diğerlerinde uzun uzun aşamalardan işte sonuca gidiyorsunuz, işte onların hepsi bir tarafa aksine örnek onların tam zıttı gibi, biraz daha kolay...

Mülakatçı: *Peki yöntem belirlemenin önemi olarak başka neler söyleyebilirsin?*

Pınar: *Önemi olarak... şu an keşke biraz hazırlansam diyorum ama... Başka ne önemi olabilir...*

Mülakatçı: *İspat yöntemi belirlemeden de ispat yapılamaz mı?*

Pınar: *Ya açıkça... yapılır, onu mesela ispata başladığımız zaman görürsünüz, hani bir yere kadar geldin bir yerden sonra işte bu yöntemi uygularsam daha çabuk sonuca giderim hani denir, o söylenebilir açıkçası, ispatın içeriğinde onu görebiliriz, hani biraz gittikten sonra sorunun çözümüne, biraz gittikten sonra içinde hani hangi ispatı uygulayabileceğimizi görebiliriz açıkçası.*

Mülakatçı: *Peki ispat yöntemini hiç belirlemeden yapılamaz mı ispat?*

Pınar: *Hangi ispatı kullanacağımızı hiç belirlemeden ispat yapalım... İki şey mesela ben lisedeyken yapıyordum ama bunların olduğunu bilmiyordum, hani olabiliyor açıkçası, gittiğiniz yol hani yaptığınız işlemler doğruysa hiç hani bilmeden de yapabilirsiniz ispatı. Sonuçta onlarda yapan insanların elinden çıkmış şeyler, isim almış şeyler diye düşünüyorum. Yani sonuçta bunu da yapan insan isimlendirmiş, hani farkında olmadan da birileri yapabilir aslında...*

Mülakatçı: *Peki yöntem hiç kullanmadan yapılamaz mı?*

Pınar: *Mesela biz ispat yaparken hüküm diyoruz hipotez diyoruz kabullerimiz oluyor dimi eldeki verilerimiz oluyor hani hiç bunları kullanmadan... zeki insan yapar, ne diyeyim, yapılır herhalde ya o kadar şey değil, ya sonuçta matematik ya bir yerden bir*

şeyini tutuyorsunuz hani olur gibime geliyor. Hiç yapmadım ama olur herhalde ama bugün gidip kesin bir şeyler yapmam lazım...

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?*

Pınar: *Nasıl karar veriyorum... Aslında elimdeki verilere daha çok bakarım hani ne verilmiş benden ne isteniyor ispat sırasında, zaten onları yazdığım zaman illaki karşıma bir şey çıkacak hani hangi yöntemi uygulayacağım, o şekilde devam edebilirim yani uygulayacağım şeye. Verileri toparlayarak, işte böyle bir başlangıç yaparak, hani zaten ortaya bir şey çıkacaktır hangi yolu kullanacağım, bu doğru mudur ya da ya zaten bir çelişki olduğu anlaşılır hani, o şekilde bulabilirim herhalde ispat yöntemini.*

Mülakatçı: *Mesela ispatı tümevarımla mı tümdengelimle mi yapacağına nasıl karar verirsin?*

Pınar: *Hı bütünden parçaya mı gideyim parçadan bütüne mi gideyim... Mesela nasıl bir örnek vereyim... Şu an cümlelerimi toparlayamıyorum, nasıl karar veririm... Keşke biraz hazırlansaydım...*

Mülakatçı: *Mesela genelden özele özelden genele dedin, bunu açabilirsin.*

Pınar: *Şey mesela ben özeli fazla hani özel fazla ya hocalarda hani onların şeyini de söyleyeyim fazla kullanmamızı istemiyorlar, daha çok genel ifadeleri uı genel olarak ispatını yapın işte, zaten genelden ispatını bulduğunuz zaman bir tane özelde yapsanız uyacaktır ya da özelden aslında özelden bulduğunuz zaman hep garanti olmaz gibime geliyor çünkü içinden bir tanesi hani o kadar özel yaptınız bir tane yapmadınız onun doğru olup olmama ihtimali olabilir ama genel ispat ettiniz bütün özeller ona uyacaktır.*

Mülakatçı: *Mesela tümevarım yöntemi nasıldı?*

Pınar: *Tümevarım... şey parçadan bütündü demi o, yani özelden genele demek deriz...*

Mülakatçı: *Soyut matematik dersinde öğrenmiş miydiniz tümevarımı-tümdengelimi?*

Pınar: *Ya onları böyle çok böyle üstünkörü geçmiştik gibi bir şey, sadece sorulara uyguluyorduk biraz hani pek fazla bir şey değil biraz böyle ezber gibi.*

Mülakatçı: *Mesela $n=1$ için doğru, $n=k$ için doğru kabul ettiğimizde $n=k+1$ için doğru çıkıyorsa doğrudur şeklinde hatırlıyor musun?*

Pınar: Evet bir kaç değer için yapıyorduk o şekilde ispatlıyorduk. Ya onu hatırlıyorum da hani, zaten üç şekli doğruysa diyorduk bu doğrudur diyorduk, hani bunda sağlar diyorduk. Bir kaç değerini kabul edip en sonunda n eşittir n artı k artı 1 , ya en son şekline gidiyorduk ondada şey $k=n$ şekline gidiyorduk hatta öyle hatırlıyorum, yanlış mı hatırlıyorum, $k=n$ şekline gidiyorduk, en son şekline gidiyorduk, onu da o şekilde ispatlıyorduk ama fazla diyecek bir şeyim yok gerçektende.

Mülakatçı: Peki doğrudan-dolaylı ispat açısından düşünsek.

Pınar: Mesela işte hani doğrudan ispat yapacağım hani eldeki veriler ona uygunsu doğrudan ispatı daha fazla tercih ederim, eğer yok hani...

Mülakatçı: Eldeki veriler nasıl olursa mesela?

Pınar: Ya beni direkt ispata götüreceksen hani bir çelişkiye düşürmeyecekse ama eğer önümde bir çelişki varsa dolaylı ispat daha mantıklı gelir. Yani direkt kullanabiliyorsam doğrudan ispatı kullanabilirim ama direkt kullanamıyorsam bir çelişki oluştu, hani çelişki dediğimde yani mesela hepsine uyar ama bir tanesine uymaz mesela, öyle bir düşünce girdiyse kafama direkt dolaylı ispat daha mantıklı gelir, yani kesin sonuca gitmek için. Mesela işte şeyde, biz bu sene analizde şey görüyoruz tekrarlı limitleri görüyoruz uyuyor mu uymuyor mu işte, sonra işte bir doğruyla yaklaşıyoruz ona, tekrarlı limitler eşit çıktı bir doğruyla yaklaşıyoruz ama mesela kutupsal koordinatları kullanıyoruz ya da epsilon tekniğini kullanıyoruz, epsilon tekniği niçin, sağlaması için hani o şekilde uı sonuca gidebiliyoruz. Mesela kesin doğru olması için epsilon tekniğini kullanıyorum ben, buda onun gibi bir şey aslında, kesinlik için dolaylı ispat, yani doğrudan ispat yapılabiliyorsa tabi, o şekilde. Bir çelişki oluştu hani o çelişkiyi kafamdan silmek istiyorsam da dolaylı ispat, hani mesela ben yaptım örnek veriyorum ya tekrarlı limitlerim doğru çıktı, bir tane doğruyla yaklaştım oda doğru çıktı ama hani diyorum ki bu kesin mi acaba mesela bu sene biz onu görüyoruz işte analiz dersinde hani diyorum bu kesin mi acaba kesin değilse şey uı epsilon tekniğini kullanıyorum ya da kutupsal koordinatları kullanıyorum, ikisinde de aynı şey çıktı mı tamam diyorum bu hani içimi rahatlatmak amacıyla bu doğrudur diyorum, işte dolaylı ispatta da yaptım hani bir çelişki oluştu hani içim tam rahat etmedi falan diye o şekilde dolaylı ispata dönebiliriz hani dolaylı ispat onun (doğrudan ispatın) sağlaması gibi bir şey oluyor aslında daha garanti.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Pınar: *İyi çok fazla soru çözmekten geçiyor o zaman daha fazla ispat, mesela bir veri var elinde hani bir örnek verilmiş onu ispatlaman isteniyor işte onu bir kaç yoldan ispatlamak önemli hani tek bir yola bağlı kalmaktansa bir kaç yoldan ispatlayarak ispat yöntemimizi geliştirebiliriz. İşte dediğim gibi soru çözmekten geçer, ispatların bir tanesini değil bir kaç tanesini kullanmaktan geçer, yani bir tane ispata uyduysa tamam budur demek değil aslında diğer ispatları da ona da uygulayarak hani diğer ispatları da öğrenmek için iyi olur aslında, bir taneye bağımlı kalmak değil, bu şekilde ispat yöntemlerimizi geliştirebiliriz aslında. Ya zaten bir sorunun bir tane tek ispat yöntemi yoktur ki bir kaç tane ispat yöntemi vardır ama nedense biz hep bir tanesini bulduk mu tamam diyoruz bir tane yeterli şeklinde ama bir kaç tane var.*

Mülakatçı: Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?

Pınar: *Ya onun kesin garantisini vermem ama ya yapabilirim herhalde, yani ne kullanılacak ne kullanılmayacak yani en azından eski... bilgilerimden yapabilirim gibime geliyor. Yani ne kadar çok ispatı görürsek göz o kadar aşına oluyor o kadar hani yapabilme şeyi olu... Ya geçen sene olsaydı daha çok ispatla iç içeydik yapma ihtimalim daha yüksek olurdu hani... hatırlarsam yaparım.*

Mülakatçı: Nasıl bir başlangıç yaparsın peki?

Pınar: *Mesela bu sene ispatları en fazla düzlem geometri dersinde görüyoruz, öncelikle hipotez ve hükmü yazmaya çalışıyorum. Sonra işte uu mesela düzlem geometriden örnek vereyim oradan devam edeyim... Hipotezimi alıyorum işte kanıtlamaya çalışıyorum hükmümü elde etmek istiyorum, işte hipotezimi kendime göre kabul ediyorum doğru olduğunu kabul ediyorum, sonra işte uu şekilse şekil üzerinde ben çizimlerimi yapıyorum, şunu buradan kabul edip şunu buradan kabul edip ama öncelikle bir hedef belirlemem lazım, hani mesela diyorum ki ben yüksekliğim ikizkenar üçgen..., hani yüksekliği iki eşit parçaya bölerse bunun ikizkenar üçgen olduğunu kabul edeceğim, ya iki açının uu eşit olduğunu iki kenarın eşit olduğunu kabul ederek işleme başlayacağım ya da işte yüksekliği kabul ederek, yani bir tanesini önce kendime belirleyeceğim ondan sonra ispata doğru gideceğim, çünkü hani dedik ya bir kaç şekilde yapılabilir, hangisini kabul ediyorsam onun üzerinde ispata devam etmem lazım.*

Mülakatçı: Yani önce yöntem mi belirliyorsun?

Pınar: Evet önce hı hı... Hangisini kabul ediyorsam ondan işte diğerine gitmeye çalışıyorum, (hipotezden hükme şeklinde).

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?

Pınar: İu sizin hangi yoldan gittiğinize bakarım önce, ne şekli uygulamaya çalıştınız, kafanızda ne vardı, neye göre yaptınız, ona bakarım önce, ya bende ona hani onun devamını getirmeye çalışırım, sizin fikrinize göre ama, hani çünkü siz onu başlatmışsınız bir şekilde, hani direkt bana verseniz ben kendi yolumu kendim bulurum, hani şu yoldan gideceğim, şunu kabul edeceğim falan, kabullerimi kendim seçerim ama kabulleri sizin seçtiğiniz için sizin mantığınızla devam etmeye çalışırım, hani o yüzden ilk başta sizin ne düşünmeye çalıştığınızı bulmam gerekiyor, en başa dönmem lazım. Hani sizin kabullerinizden kabul edeceğim, sizin o hani bakış açınızı aslında bir bakıma onu aramaya çalışacağım ondan sonra devam edeceğim sizin bıraktığınız yerden.

Mülakatçı: Sonuna kadar getirilen bir ispat o kısımda bırakılsa sonuca ulaşabilir misin?

Pınar: Artık o zaman şey mesela siz hipotezini aldınız hükme doğru gidiyoruz ya, siz hipotezini aldınız işte onu belirlemeye çalışırım, işte hipotez buysa hüküm budur diyorum mesela, iki kenar eşitse hani misal gerçi örneği tam oluşturamıyorum ama, ya kafamda var bir şeylerde örneğe dökebilsem sizin için daha iyi olacaktaki, işte siz hükmü kurdunuz, mesela ben o hükmü değil de siz kenar hükmünden yola çıkarak sonuca doğru gidiyorsunuz, yüksekliğe gidiyorsunuz diyelim bende işte onu belirlemeye çalışırım, siz kenardan başladıysanız hani ben yükseklikten bitiririm, ya da siz yükseklikten başladınız kenara gitmem lazım onu ona göre bende kenarda biterim hani, yani yine sizin yaptığınız mantığa geri dönmek gerekiyor bitirmek için. Ya her şey hipotez ve hükümde bitiyor benim gözümde.

Mülakatçı: Peki sonuca ulaşmakta sorun yaşar mısın?

Pınar: Ya hani belki benim kafamda başka bir şey vardır, ona belki biraz adapte olmam zor olur, hani sizin kafanızdaki fikre, onun dışında olmaz büyük ihtimalle çünkü sonuçta siz yükseklikten hani hep bu örneği veriyorum da, yükseklikten kenara gidiyorsunuz ben kenardan yüksekliğe gidiyorum, ya yapılan belki aradaki işlemler biraz farklıdır, ya

budur bir bakış açısidir sadece, hani sizin kolayınıza o öyle gelmiştir öyle yapmışsınız ben böyle yapmayacağım, ya zor olması bir o yönden ya başka bir zorluğu olmaz, sadece bakış açımızdandır ya da aradaki işlemlerden, yoksa farklı bir şey olmaz. Yine sizin u siz hangi yöntemi kullandınız, hatta sizin bakış açınız ne, neye göre ispat yaptınız ya bütün olay sizde biter yine...

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Pınar: *Yok bence hiç yeterli değil, çünkü biz daha çok uygulama üzerine gidiyoruz, gerçekten hele bu dönem görmeniz lazım, direkt yani şey uygulama, u şey analizin ilk dönemi yine biraz teorik kısımdı, bu dönem hiç yok, işte düzlem geometri hep ispat şeklinde gidiyor ama açıkçası ondan da pek bir şey anladığım söylenemez, çünkü ya temel olmadıktan sonra ilk başta, çünkü geçen sene biz bunun temelini gerçekten pek fazla oturtamamışız onu görüyorum. Çünkü yani ne yapsanız... tamam kavrayabiliyorsunuz hipotez buradan başladı hükme doğru gideceksiniz, aradaki aşamalar biraz şey oluyor, yani onu anlamada bir sorun yok ama işleme sokmakta biraz, buda hani bizim pek fazla ispat yapmadığımızın yani göstergesi olabilir. İşte tam oturtamadık (ispat yöntemlerini) işte süre pek fazla yoktu, bir tek zaten soyut matematikte gördük biliyorsunuzdur, oda zaten çok kısıtlı bir şey, çok kısıtlı bir süre. Ya hocalar her şeyi yetiştirme... birazda o var, ama aslında bir şey... ya ispat anladıktan sonra her yöntem kafanıza daha iyi yerleşir diye düşünüyorum ben, hani o süreyi biraz fazla tutsak zaten diğerini ben kendimde hani biraz çabayla anlayabilirim ama ispatı anlamadıktan sonra diğeri ezberden fazla bir şey olamaz, ama ispata oda ispata yerleşseydi ispat üzerinden olsaydı o zaman iyi olurdu diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Pınar: *U neler yapılabilir... Aslında hep diyorum temel biraz zayıf bende de biraz öyle u daha fazla... ya aslında mesela yapıldığı... yapılan her aşamayı anlatılması gerekiyor, hani şunu şu şekil şu yüzden kullandın bunu bu yüzden kullandın, ya o aşamaların hepsinin böyle tek tek anlatılması, sürenin uzun tutulması gerekiyor ispatta, sonra benim kendi kendime ispat yollarını u yani soru üzerinde görmem lazım, ya sadece bir kişi yani o anlattı tamam o kadar değil aslında, biraz insanda da bitiyor,*

kişinin kendisinde o isteğin olması lazım, öyle ya biraz kullanmak lazım ispatları, o şekilde yerleşir.

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musun? Bunlar nelerdir?*

Pınar: *Çok güzel sorulardı, kesinlikle ispat üzerine daha fazla çalışacağım yani, keşke daha fazla hazırlanıp gelseydim inşallah uu yani işinize yarar ama bence sorularınız çok iyi.*

Mesela şey olmuştu, geçen sene miydi bir anket yapılmıştı, sizce ispat olmalı mıdır diye, hani ben ilk soruyu öyle bekliyordum, sence ispat gerekli mi?, hayatta da hani kullanabileceğin bir şey mi?, çünkü üniversite hayata hazırlıktır artık, hani belki öyle bir şey ama diğer sorularınız hepsi çok iyiydi, şu an aklıma başkada bir şey gelmiyor.

Mülakatçı: *Ona yer verilmemesinin nedeni de görüşmenin ispat yöntemleriyle ilgili olmasıdır.*

Pınar: *Hani zaten direkt evet.*

Pınar ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Pınar, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tündengelim ve olmayana ergi yöntemlerini hatırlamıştır. Pınar'a hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlatmak için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Pınar deneme yöntemini ve çelişki yöntemini hiç duymadığını, çelişki yöntemini izah ettikten sonra bile çelişki yönteminin olmayana ergi yöntemine benzediğini düşündüğünü, derslerinde en çok doğrudan ispat, olmayana ergi ve aksine örnek verme yöntemlerini kullandıklarını, kendisi ispat yaparken ise daha çok olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiştir. Tümevarım yöntemini doğru olarak hatırlayamamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullandığı ispat yöntemlerinin ispatları genellemesine ve ispatların mantığını anlamasına yardımcı olduğunu düşünmüştür. Olmayana ergi yöntemi ile yaptığı bir ispatı aksine örnek vererek ispat yöntemi ile yapamayacağını; ama çelişki bulma yöntemi ile olmayana ergi yöntemlerinin birbirlerine çok benzediğini düşündüğü için aynı ispatta kullanılabileceklerini, aslında ispat ile ilgili pek bir bilgisi olmadığını, sınavlara girerken ispatları ezberleyip girdiklerini bildirmiştir. Matematiksel bir ispat

yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin ispatı yapmak için esas nokta olduğunu, onun sayesinde sorunun gidişatına karar verilebildiğini açıklamıştır; fakat daha sonrasında ispat yöntemini belirlemeden de ispat yapılabileceğini beyan etmiştir. Soruda bir yanlışlık gördüğünde aksine örnek verme yöntemini, uyumsuzluk yoksa olmayana ergi yöntemini veya başka bir yöntemi, çelişki olduğunda zaten belli olacağını, eldeki veriler direkt ispata götürürse, çelişkiye düşürmezse doğrudan ispatı, elinde bir çelişki varsa dolaylı ispatı kullanacağını, dolaylı ispatın doğrudan ispatın sağlaması gibi bir şey olduğunu ve daha garanti olduğunu, aksine örnek vererek ispat yönteminin bir yana diğer ispat yöntemlerinin bir yana olduğunu; çünkü aksine örnek verme yönteminde tek bir örnek yettiğini fakat diğerlerinin uzun işlemler gerektirdiğini ve birbirlerine benzediklerini ama aksine örnek vererek ispat yönteminin onlardan çok farklı olduğunu iddia etmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yollarının çok soru çözmekten ve bir teoremi farklı yollardan ispatlamaktan geçtiğini dile getirmiştir. Bir ispata başlangıç yapması istendiğinde hipotez ve hükmü yazıp, hipotezini doğru kabul edip, kabullerden yararlanarak başlangıç yapacağını, yarıda bırakılıp tamamlanması istenilen bir ispatta ise ispatın baş kısmındaki mantığa bakacağını, her şeyin hipotez ve hükümde bittiğini düşündüğünü belirtmiştir. İspat yöntemleri için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, derslerde daha çok uygulamaya yer verildiğini, ispat yöntemleri hakkında temelleri olmadığını, bu yöntemleri daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için ispatların yapım aşamasında her aşamanın anlatılması gerektiğini, sürenin uzun tutulması gerektiğini ve kişinin kendinin ispat yöntemlerini soru üzerinde görmesi gerektiğini düşünmüştür.

Pınar ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Pınar, matematiksel ispat yöntemleri hakkında yeterli bilgiye sahip değildir. Her ne kadar tanıtım formunda ezber yapmayı sevmediğini ve ezber yapamadığını söylese de mülakat esnasında ezber yaptığını dile getirmiştir. İspat yöntemleri hakkında tutarsız bilgiler vermektedir. İspat yöntemlerini düşünerek ispat yapmayan Pınar ispat yöntemlerini bilmenin önemini mülakatımız esnasında farketmiştir. Öğrenim hayatında çok başarılı bir öğrenci olması ve ezber yapmayı sevmediğini belirtmesi, Pınar'ın ispat yöntemlerini kullanırken ezberden kaçacağı düşüncesini oluşturmuştu; fakat mülakat esnasında alınan cevaplar beklentiler doğrultusunda değildi.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Erkan ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Erkan: *İki matematiksel ispat yöntemleri hakkında hocam çeşitleri hakkında mı? (onaylandı). Matematiksel ispat uı şey iki parçada inceliyorduk biz, tümevarımsal tımdengelimsel olarak, bide onları olmayana ergi, çelişki bulma gibi kendi basamakları arasında ilişkilendiriyorduk, bunların detaylarından bahsedeyim mi?(Evet). Tümevarımsal ispatları uı tümevarımsal ispatlarda şeye bakıyorduk belli bize verilen önerme 1 için sağlıyor mu ona bakıp herhangi bir k veyahutta n değeri için kabul edip n+1 için sağladığını gösterdiğimiz zaman bu tümevarımsal ispattı uı tımdengelimsel ispatta da uı olmayana ergi yani olmamış bir durumu varmış gibi kabul edip aslında onun olmayacağını matematiksel olarak gösteriyorduk, bide çelişki bulma uı bir durum yazıyorduk aynı hipotezden, tekrar başka bi durum yazıyorduk bu iki durumun birbiriyle çeliştiğinden dolayı aslında bu hipotezin yanlış olduğunu yanlışlamaya çalışmaya çalışıyorduk, yani benim bildiklerim bildiğim kadarıyla.*

Mülakatçı: Başka hangi yöntemler vardı hatırlıyor musun?

Erkan: *Başka hangi yöntemler vardı... benim bildiklerim bunlar şimdilik, başka yoktu herhalde ya.*

Mülakatçı: *Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tımdengelim olarak ikiye ayrılır. Tımdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.*

Mülakatçı: Bunlarda var mı sorunlu olduğun bilmiyorum dediğin?

Erkan: *Yok... yok onları... Zaten şu tümevarımsaldan bahsettik, doğrudan ispatta doğrudan ispatlamaya çalışıyoruz, dolaylı ispatta olmayana ergiden bahsettik, çelişki bulma yöntemi... aksine örnek vermede bu daha çok teoremlerin yanlışlamada*

kullanıyorduk ters örnek vermek hani söylediğimiz tersine en az bir örnek bulursak o yanlışlama yöntemi olarak kullanıyorduk onları.

Mülakatçı: *Derslerinizde hangi yönteme ne kadar sıklıkla yer veriyorsunuz?*

Erkan: *Şimdi hocam bu dersleri daha çok analiz derslerimizde biz şeyden bahsediyoruz doğrudan ispat veyahutta tümevarımsal ispat, bu ikisinden kullanıyoruz. Geometri derslerimizde daha çok olmayana ergi veyahutta işte varsa tektir cinsindeki teoremlerde daha çok şeylerden bahsediyoruz mesela iki tane olduğunu kabul edelim diyoruz bunların ikisinin birbirine eşit olduğunu gösteriyoruz aslında iki tane olduğunu kabul ettikten sonra olmayana ergi metodu kullanıyoruz geometride falan sık kullanıyoruz analiz derslerinde sık kullanıyoruz teorem ispatlarında başkada soyut matematik derslerinde biraz bahsetmiştik bu ispat yöntemlerinden kümelerde falan elemanı kabul edip onun olmadığını göstermede falan kullanmıştık, başka...*

Mülakatçı: *Yani hangi yöntemi daha sık kullanıyorsunuz?*

Erkan: *Ya tek bir yönteme bağlı kalmaktan ziyade mesela dersten derse aslında her dersin kendine has bir ispat metodu var gibi düşünüyorum ben, mesela analiz derslerinde veyahutta cebir derslerinde gösterirken aslında o ifadeyi alıp u tümevarım yöntemi veyahutta tümdengelim yöntemindeki o doğrudan ispattan u cebirsel işlemler yaparak biz aslında o teoremdaki verilen şeyi bulmaya çalışıyorduk ama geometride baktığımız zaman aslında u daha çok olmayana ergi kullanıyoruz u çelişki bulmaya baktığımızda yine analizde, cebirde çok fazla kullanıyoruz yani bunların hepsi tüm derslerde kullanılabilir mi bilmiyorum ama u daha çok ağırlıklı olduğu dersleri bu şekilde sınıflandırabilirim ben yani.*

Mülakatçı: *Kendin ispat yaparken daha çok hangi yöntemi kullanmayı tercih ediyorsun?*

Erkan: *Ben kendim yaptığım ispatlarda u şeye soru şeye teoremin veyahutta hipotezin köküne bakıyorum yani ne demeye çalışmış, ilk önce bunu algılamaya çalışıyorum, bide yapılan ispatlardan başka bir ispat yapabilir miyim veya başka bir yol başka bir sonuç çıkarabilir miyim buna bakıyorum ondan sonra o soru köküne göre mesela hangisini uygulayabilirim, varsa tektir tarzında şeyler var veyahutta işte orda bir eşitlik vermiş diğer tarafta başka bir eşitlik vermiş bu tarz ispatlar var mesela o iki tarafın birbirine eşit olduğunu göstermek için bir bu tarafı yazıp bide bu tarafı yazıp iki ifade birbirine*

eşitse eşitsizliğin geçişme özelliğinden dolayı u bu taraftaki ifade ve bu taraftaki ifade eşittir tarzında ispatlar falan oluyor genelde, benim tercih ettiğimse mesela buradan başladığım zaman u a eşittir a $a \dots$ orda bir ifade buldum bu taraftan başlayıp cebirsel işlemler sonucunda oradan en sonunda öbür ifadeyi yakalamak yani bize verilen işlemde ya yerine yazdık bu çıktı, ondan sonra tekrar bize verilen işlemde yerine yazdık bu çıktı o zaman a , b ye eşitse u c de b ye eşitse a ile c birbirine eşittirden ziyade mesela a dan başlayıp işlemleri yaparaktan c yi elde etmeye çalışmaya özen gösteriyorum, bide şeylerde normal olmayana ergiden devam ediyorum öbür türlüde, varsa tektir gibi ifadelerde de, iki tane kabul edelim, üç tane kabul edelim gibi bu şekilde şey yapıyorum.

Mülakatçı: Peki diyorsun ya a dan c ye ulaşmaya çalışıyorum, o hangi yönteme giriyor?

Erkan: Hangi yönteme giriyor... Yani mesela hocam bizde nerden örnek vereyim, sırasal izomorfizmalardan falan bahsediyorduk biz fonksiyonun birebirliğinden örtenliğinden mesela $f(x_1)=f(x_2)$ ise $x_1=x_2$ tarzındaki şeylerden bahsediyorduk orada mesela $f(x_1)=f(x_2)$ doğru kabul edip diğerini elde etmeye çalışıyorduk işte ancak ve ancak ifadeler varsa çift gerektirme hem o tarafı doğru kabul edip diğerini elde etmeye ondan sonrada öbür tarafı doğru kabul edip bu tarafı elde etme şeklinde çalışıyorum ona da doğrudan ispattır herhalde benim mantığıma göre, ismini bilmiyorum da.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığımız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Erkan: Vallaha şimdi hocam ne anlam ifade ediyor, ya matematikte aslında en çok sevdiğim yanı matematiğin söylediklerimizi yani ispat edebiliyoruz, teorem dediğimiz zaman teorem her yerde teoremdir u bizim burada da yanlışlayamıyoruz başka yerlerde de yanlışlanamıyor aynı şekilde kullanılıyor, o yüzden yani insanları günlük hayatta objektif tutar yani ispat yöntemleri, benim için ne anlam ifade ediyor, benim için aslında ispat önemlidir, aslında teoremlere baktığımız zaman kitaplarda bulunan sorularla kıyaslamaya çalıştığımız zaman aslında teoremlerin özel örneklerini görürüz mesela baktık bir tane teoreme u o teorem aslında soruya uyarladığımız zaman teorem sonsuz örnek tarafından sağlandığı için genel ispat yapıyoruz ama o ispatları basite

indirgediğimiz zaman sorunun çözümü oluyor, aslında ispatları teoremleri açısından önemli aslında matematik açısından da önemli, cebirsel işlem yapabilmeye falan soru çözümlerinde ispatlar önemli zaten ispatı bildikten sonra soru çözmek daha kolay oluyor algılanması basitleşiyor.

Mülakatçı: *İspat yöntemi olarak düşünürsek?*

Erkan: *İspat yöntemi olarak, ispat yöntemleri bizim için ne anlam ifade eder... Vallaha görüş belirtmeyeceğim bu konuda. İspat yöntemleri bilmiyorum ya...*

Mülakatçı: *Mesela niye gereklidir?*

Erkan: *İspat yöntemleri niye gereklidir... Yani şimdi hocam bu... Aslında ispat yöntemleri diye biz bunu düşündüğümüz zaman bunların hepsi bir düşünce tarzı, zamanla gelişmiş belki ilerleyen dönemde bizden sonraki dönemde de daha farklı metodlarda gelecek, bunların aslında baktığım zaman hepsi bizim için söylediğimiz u cümleleri matematiksel ifadeleri doğrulamaya yönelik düşünce tarzları, ya ispat yöntemleri deyince u bunların hepsinin belli bir mantıkta hareket ediyoruz ama aslında bunların hepsini ben tek bir çerçevede tek bir mantıktan hareket edildiğini düşünüyorum yani benim için yöntem deyince ya ayrı ayrı basamaklandırmak biraz garip gibi geliyor bana ispat yönteml... Bunların hepsinin aslında bence bir bütün olduğu ama o bütünün özelleşmiş kısımları olaraktan düşünüyorum ben ispat yöntemlerini.*

Mülakatçı: *İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?*

Erkan: *U her soruya uygulanabilir mi bilmiyorum ama hocam farklı yönlerden ispat uygulanabilir ya tek mantıkla ispatı olmayabilir mesela geometri sorularına bakıyoruz mesela geometrideki o teoremlere bakıyoruz farklı şekilde ispat edebiliyoruz mesela olmayana ergiden hareket edip oradan gösterebiliyoruz ondan sonra sentetik geometride vektörlerin yardımıyla ispatlarda bulunuyoruz ondan sonra işte diyoruz bu şu yayı görüyor işte bu da bu yayı görüyorsa bu ikisi birbirine eşittir eşitliğin geçişme özelliği falan deyip yani farklı yöntemler kullanılabilir bence. Aynı soru için farklı yöntemler kullanılabilir, zaten bu... basit manada düşünürsek bir sorunun birden farklı çözüm yolu varsa bir sorunun genel ifadesinin de birden farklı ispatlanabilme şekli vardır diye düşünüyorum yani.*

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Erkan: Hocam matematiksel bir ifadenin ispatı için aslında matematiksel bir ifadede ispat yapabilmek için önemli olan yakalamamız gereken düşüncedir belli bir noktada o düşünceyi yakaladığımız zaman geri kalan cebirsel işlemlerden hareket ederiz burada da ispat yöntemleri bizim o düşünceyi yakalayabilmemize fırsat verir ya o olanağı sağlıyor, aslında bizim gruplandırılmamızdaki sebeplerden bir tanesi de budur belki de, u mesela parçalara ayırıyoruz olmayana ergi, çelişki bulma tersine örnek verme falan bu tarz gruplamamızdaki sebepte o ya bence o başlangıç aşamasına nerden başlayacağımız konusunda bize fikir sahibi olmamızı sağlıyor.

Mülakatçı: İspat yöntemi belirlenmeden de ispat yapılabilir mi?

Erkan: Yöntemi belirlemeden ispat yapılabilir miyiz... İu yöntemin adını bilmeden yapabiliriz ama herhalde belirlemeden yapamayız, yani şu yöntemden yapılır bunun tek yolu budur tarzında bir şey değil de şu yöntemi kullanarakta işte bu düşünce tarzlarını elde ederim buradan bunları getiririm diyerekten devam edebiliriz yani belli bir çerçeveye bağlı kalaraktan hareket etmek bize daha kolaylık sağlıyor herhalde.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Erkan: İu şeye bakarım soruluş tarzı mesela ifadenin söyleniş tarzına bakarım neyi soruyor bana iki eşit... eğer iki ifadenin birbirine eşit olduğunu göstermemi istiyorsa u mutlaka bir işl... bazı işlem süreçlerinden sonra oradan birinden diğerini elde edebilirim o tarzda veyahutta mesela varsa tektir cinsinde veyahutta bunu sağlayan en az bir ve yalnız bir tarzında ifadeler varsa önce varlık sonra teklik tarzında düşünüp u iki tane olduğunu kabul edip bunların ikisinin birbirine çakışık olduğunu veyahutta birbirine eşit olduğunu göstererekten devam ederim yani.

Mülakatçı: Tümevarım-tümdengelim açısından düşünsek.

Erkan: Şimdi hocam soru verildiği zaman u ilk olarak şöyle bir bakarım yani acaba doğruluğu yanlışlığı zaten baktığımız zaman çoğu zaman sezgisel olarak hissede biliyoruz mesela u bir doğru parçasının orta noktası varsa tektir tarzında, bu tip ifadelerde iki tane olduğunu gösterip devam ederim ama bir eşitlik ifadesi falan

varsa soruluş tarzına göre oradan seçerim yani, nasıl seçerim... onu şu şekilde seçerim mesela eşitsizlik ifadeleri falan varsa veyahutta tümevarımsal bir ifadeden o eğer daha hangisi daha rahat olacaksa oradan seçerim yani baktığım zaman bunlar zaten belli oluyor.

Mülakatçı: Peki bunun belirleyicisi ne olur?

Erkan: Ya tümevarım ispatını kullanabilmem için benim iki tane eşitlik veyahutta bir ifadenin belli bir şeye eşit olduğunu söylemesi lazım bana, bir eşitlik vermiş bu eşitliği gösteriniz tarzında bir ifade varsa orda işte l için sağladığını gösterip k için kabul edip $k+1$ içinde bu eşitliği tekrar elde edebiliyorsak burada tümevarımsal ispatı kullanabiliriz uı mesela tümevarımsal ispat.. Ama varsa tektir tarzındaki ifadelerde kullanamayız tümevarımsal ispat, orda bence olmayana ergi daha mantıklı.

Mülakatçı: Doğrudan ve dolaylı ispat açısından düşünsek.

Erkan: Şimdi dolaylı ve doğrudan da şu şekilde baktığım zaman eğer doğrudan o ifadeyi elde edebiliyorsam sezgisel olarak uı mesela doğru parçasının orta noktası varsa tektir tarzında ifadeler burada bunu doğrudan cebirsel işlemlerle eğer bulabileceğime inanıyorsam oradan devam ederim ama bulamayacağıma inandığım zaman dolaylı yollardan gösteririm hani mesela her zaman baktığımızda bir şeyin uzakta olduğunu göremeyebiliriz ama o aslında uzaktır onun yakın olmadığını gösterirsek aslında onun uzak olduğu ortaya çıkar bu o şekil, bir şeyin doğru olduğunu ispatlayamıyorum ama her örnek için sağlıyor buna aksine bir örnek verdiğim zaman aslında o genel bir ifade olduğu için onu çürütüyorum o yüzden dolaylı ispatlarda daha çok aslında bir şeyin doğruluğu değil de yanlışlığı üzerine tartışılır o yüzden doğrudan ve dolaylıyı kullanırken aslında gerçekten doğru olduğunu düşündüğümüz sezgisel olarak bulduğumuz ifadeleri ispatlamak için uı doğrudan ispat metodunu kullanırım ben baktım uı aslında doğru değilse onu doğruymuş gibi kabul edip dolaylı ispat yöntemini kullanmaya özen gösteririm yani.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Erkan: Doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları daha çok ben şeylere bakarım mesela ispat... yapılmış ispatlara bakarım ne yapmış acaba başka bir şer var m... acaba başka yoldan yapabilir miyim acaba, zaten alternatif bir yol aradıkça bunları sürekli kullana

kullana artık görmeye başlarız baktığımız zaman acab... bu teoremi tek bir yoldan ispatı yoktu farklı yol... farklı ispat tarzları vardı, farklı yollardan ispatlamaya çalışarak bence geliştirilebilir, yani mevcut sistemdekine bağlı kalmayıp kendi düşüncelerimiz üzerine hareket edersek gelişir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: *Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Erkan: *Yani şimdi hocam onu algılama biçimime bağlı bir bakmam lazım soruya, bir görüp şey yapabilmem lazım.*

Mülakatçı: *Diyelim derslerde karşılaştığın bir ispat olsa buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Erkan: *Yani doğru başlatabilir misin derken neye göre doğru?*

Mülakatçı: *Nasıl başlatırsın mesela?*

Erkan: *Yani nasıl başlatırım, ispata başlamadan önce eldeki verilenleri kullanabilmek çok önemli zaten teoremlerde matematikte bu her zaman vardır bir şeyi doğru kabul edip ondan sonra... kabul edip öbürkünün de bu kabul çerçevesinde sağlandığını gösteririz onun için yani eldeki verilere göre başlatırım ispatı oda yani bilmiyorum mantıklı bir şekilde ilerler herhalde.*

Mülakatçı: *Yöntem belirlemeye hangi aşamada yer verirsin?*

Erkan: *Yönteme hangi aşamada karar veririm... Eldeki verilenleri inceleyip algıladıktan sonra yönteme karar vermek bence en mantıklısı çünkü o yöntem çerçevesinde artık işlemleri yapmak gerekiyor hani işte bir şeyleri işlemleri yaptıktan sonra aslında bu yöntem olmaz şu yöntemi kullanayım demek bence o başlangıç aşamasında insanları yanılsa götürür ama eldeki verilenleri analiz edip işte bunları ne şekilde kullanabilirim tarzında kendi kendine sorup buna da bir cevap bulduktan sonra oradan zaten çıkar hangi ispat metodunu kullanabileceğimiz az çok belli olur ondan sonra yönteme karar verip o yöntemin mantıksal çerçevesinde devam ettiririm işlemlerimi.*

Mülakatçı: *İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlayabilir misin?*

Erkan: *Tamamlarım hocam.*

Mülakatçı: *Nasıl tamamlarsın?*

Erkan: *İu nasıl tamamlarım... şimdi o sizin verdiğiniz ispat yarıda kesilmişse burada önemli olan işlemin devam edebilmesi için ön safhayı bir önce algılayıp analiz edip anlamak gerekiyor yani ön safhada yapılan işlemler önemli bizim için çünkü her basamak zincir şeklinde birbiri ile ilişkisel olarak devam edecek, burada ilk önce ne kullanılmış, verilenleri nasıl analiz etmiş, onu ne şekilde değerlendirmiş onları algılayıp ondan sonrada ne şekilde devam edilebilir tarzında düşünüp ondan sonra devam etmek gerekir bence.*

Mülakatçı: *Sonuca ulaşmada sorun yaşar mısın?*

Erkan: *Sonuca ulaşmada sorun yaşar mıyız... İu her zaman yaşamayız ya sonuca ulaşmada sorun yaşayacağımızı düşünmüyorum şöyle ki mesela belli bir noktaya geldikten sonra oradan iki farklı kola ayrılmış olabilir, ikimizde aynı ifadenin... ifadeyi... aynı şeyi ifade etmeye çalışmış olabiliriz ama farklı şeyleri kullanarak yapılmış olabilir, yani o yarıda kesildikten sonra benim yaptığım kısımla sizin yaptığınız kısmı karşılaştırdığımız zaman eğer ben mantıklı işlemler yaptıysam aynı sonuca ulaşabiliriz ama o son kısımdaki, safhadaki işlemler birbirinin aynısı olmayabilir zaten 6 farklı yolda buradan doğar.*

Mülakatçı: *Aynı yöntem seçildiği zaman aynı sonuca ulaşabilir misin?*

Erkan: *Hocam şimdi aynı yöntemi seçtiğimiz zaman aynı sonuca ulaşabiliriz ama aynı işlemleri yapmamış olabiliriz hani mesela bunu nasıl örneklendirebilirim siz şeyi kullanmış olabilirsiniz $u \leq x^2 + y^2$ tarzında bir eşitsizlik kullanmışsınızdır, ben farklı bir eşitsizlik kullanmışımdır ama ikisinin de aslında mantıksal olarak düşünce yapısı aynı olabilir ama cebirsel işlemleri birebir tutmayabilir.*

Mülakatçı: *Mesela sen ispatın için bir yöntem belirlemişsin ama ispata farklı bir yöntemle başlanılmış, bu durumda sorun yaşar mısın?*

Erkan: *Devam ettirme konusunda... o yine algılama biçimine özgü hocam, baktığımız zaman oraya kadar gelmiş ama oradan ilerisini göremiyorsak sorun yaşayabiliriz yani zaten ondan dolayı farklı farklı yollardan çözümler çıkmış gibi yani sorun yaşayabiliriz o noktada yani ondan sonra net olarak sonuca ulaşamayabiliriz.*

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Erkan: Bence yeterli değil hocam, ispat metodları hakkında biz tam bilgi sahibi değiliz bide bunları zaten etkilide kullanamıyoruz, teorem ispatlarında mesela biz hep ezbere kaçıyoruz, nedenini araştırmıyoruz, zaten hocalarımızda nedeni hakkında pek çok bilgi bize pek bilgi vermedikleri için ya bu neden böyle onu tam olarak girmiyoruz, mesela biz olmayana ergi metodu olmayan bir şeyi kabul edip yanlışlığını göstermeye çalışıyoruz biz bu düşünceye şey yapıyoruz işte önermeler zincirinden bahseder soyut matematikte tümevarımsal ispata baktığımız zaman önermeler zinciri işte $p_1 \rightarrow p_2$ den $p_1 \rightarrow p_2$ ve $p_2 \rightarrow p_3$... en son q ya bu şekilde gidiyorduk, mesela buna baktığımız zaman anlıyoruz ama burada aslında biz yorumlayamıyoruz burada ne demek istediğini göremiyoruz bu açıdan da bence önemlidir yani derslerde biraz daha fazla önem arzetsen daha iyi olur yani ispata bakış açımız zaten bizim ne kadar gelişirse o kadar yaratıcı düşünce hakim olmaya başlar ki yaratıcı düşünce ne zaman hakim olursa bir insanda o zaman tam anlamıyla zaten matematikten zevk almaya başlar, öyle.

Mülakatçı: Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?

Erkan: Bence neler yapılabilir... Hocam ilk önce algılama biçimi değişmeli yani ispatı herkes gereksiz teoremleri gereksiz uı işte ezberle ezberlediğimiz zaman olacak şeyler açısından düşünüyor ama aslında baktığımız zaman matematik zaten tanım ve teorem üzerine kurulu aslında bizim orda yaptığımız cebirsel işlemleri yapıyoruz ama bir çoğumuz bunun farkında değiliz bence şu anda bizim bu teoremlerin ne anlama geldiğini bilmeden bu ispatların ne şekilde algılanacağını anlamadan yaptığımız işlemlerin hepsi bence matematiksel bir ezberdir hani bir edebiyatçı nasıl şiir ezberliyorsa bizde o şekilde matematiği ezberliyoruz hani mesela o köklü sayılardan örnek verelim mesela $u = \sqrt{x^2}$ nin $|x|$ olarak dışarı çıkıyor bunu mesela sorsak herkes bilebilir ama neden öyle çıktığı konusunda kimse bilmiyor yani neye sebep bunlara sebep olan etken ne, teoremler mesela tamam yazıyoruz geçiyoruz defterlere yazıyoruz geçiyoruz ama bu teoremleri sorunun hangi basamağında kullanıyoruz neden kullanıyoruz nerelerinde kullanıyoruz yani aslında bu bize sorulmuş sorular o teoremlerin özelleştirilmiş bir hali mi veyahutta bu bizim yaptığımız çözümler aslında bu teoremin o özel durumuna ait bir ispatı mı bunları biz görmeye çalıştık ya bunları bize gösterdikten sonra bence biraz daha iyi olacağını düşünüyorum ben.

Mülakatçı: Yani sınavlarda anlamaktan ziyade ezber mi yapıyor?

Erkan: Ya bence ezber yapıldı.

Mülakatçı: Nereden geldiği anlatılmıyor mu?

Erkan: Anlatılsa da pek ilgi çekici olmuyor hocam , şöyle ki mesela iki gruba ayırılım öğrencileri birinde hesap boyutuyla ilgilensin matematiğin, bir diğer kısmı da şeyi de teori boyutuyla ilgilensin, teori boyutundaki ilgilenen öğrencilerle hesap boyutundaki ilgilenen öğrencileri çıkardığımız zaman bir anket yapalım, onlar matematiği daha eğlenceli bulacaktır hesap boyutuyla ilgilenenler ama bence eğlenceli kısmı daha çok teori kısmıdır hani mesela bunu nasıl örneklendirebilirim uu bize daha çok mesela Rieman toplamı belirli integralin vazgeçilmezlerindedir ama biz Rieman toplamını direkt temel integral kuralından a dan b ye ise integralini aldıktan sonra işte $f(b)-f(a)$ tarzında yapıyoruz, aslında o altındaki çizdiğimiz dikdörtgenler falan o teori mantığını birçok öğrenci kavrayamamıştır bence, zaten orayı kavradıktan sonra iş bitiyor diğer tarafta hesap boyutunda biz daha çok rahat etmemizi sağlıyor ama orayı kavrayamadıktan sonra artık ezbersel olarak şey yapıyor teoremi ezberliyor teoremden devam ediyor.

Mülakatçı: Peki sen nasıl yapıyorsun?

Erkan: Ben genelde şey yapmam ya nedenini bilmediğim hiçbir şeyi öğrenmeye çalışmam nedenini öğrenmem lazım önce neden öyle ne şekilde kullanırım nerde kullanırım bunlar benim için önemli, mesela uu diyelim teoremlerden mesela nasıl bir teorem... Rieman toplamı neden o Rieman toplamında limit sonsuza taşıdığımız zaman o toplamda o bölgenin altındaki alanı veriyor aslında bize, biz belirli integralde bu sonucu hesaplırsak aslında a dan b ye kadar olan kısımda eğrinin altındaki alanı verdiğini düşünürüz biz ama neden bunun nedenini öğrendikten sonra aslında bizim yaptığımız işlemler anlam kazanmaya başlıyor da benim içinde öyledir ben sebebini bilmediğim şeyleri zaten öğrenmekte zorluk yaşarım uu ezberleyemiyorum öyle bir eksik yanımda var ezber sıkıntım var bide şey yaparım basite indirgerim mesela hani nedir elipsin denklemini mesela bir sayfa işlemi vardır merkezin elips denklemlerini çıkarırız falan ama orda görmemiz gerekenler ne acaba biz ne yaparsak daha basite indirgeriz ben bunu nasıl kolay öğrenirim mesela elipsin uu tanım... burada da tanımların önemi ortaya çıkıyor mesela elipsin tanımından bahsederken biz farklı iki noktaya uzaklıkları

toplamı sabit olan noktalar kümesi olarak ifade ettik peki bundan sonra yapmamız gereken işlem ne, e o zaman elipsin denklemini ifade ederken o iki nokta arasındaki uzaklıkları sabit olup değişken bir nokta yapıp cebirsel işlemlerini yaptığımız zaman aslında elipsin denklemini elde edebiliriz yani ben bu şekilde yapıyorum daha çok nerden çıkıyor çıkış mantığı ne, zaten o çıkış mantığını kavradığın zaman o düşünce yapısı sende oluşmaya başladıktan sonra aslında o işi o formülü veyahutta elde edilmiş eşitliği denkleme ezberlemesi de daha kolay oluyor bence hem de daha anlam kazanmış oluyor yani neden bu bu şekilde yazılıyor cevabı hemen yukarıda yaptığın işlemlerden hemen aklına geliyor işte iki nokta arası uzaklıktan falan bu şekilde devam ediyor.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?

Erkan: Yani bunlara ilave edeceğimiz bir şeyler şimdilik görülüyor hocam şöyle bir düşündüm de yani öğrenciler ispata sıcak bakıyor mu tarzında bir soru... nasıl sevdirebilir dedik gerçi zaten. Ya ispat yöntemleriyle ilgili... den ziyade mesela bir ispat yapılırken hocayla öğrenci arasındaki iletişim sence etkili mi tarzında bir soru sorsaydınız biraz daha detaylı olurdu bence.

Mülakatçı: Peki sorulduğunu kabul edelim.

Erkan: Bence zaten en çok tuhafıma giden noktada bu bir teoremin ispatına başladığımız zaman aslında hocayla öğrencinin söyledikleri tamamen birbirinden farklı ya arada büyük bir iletişim kopukluğu var, bizim aslında bu kadar yadırgayarak baktığımız birçok buradaki hocalarımızın bile bir çoğu mesela ispatlardan korkar, çok detaya inmekten çekinirler sorduğun zaman bir şeyin ispatından ziyade neden ispatını yapayım ki zaten yapılmış işte al kullan falan tarzında şeylerle karşılaşyoruz yani ispat... bu da zaten şeyden kaynaklanıyor öğrenciyle öğretmen uı hoca arasındaki iletişim kopukluğundan kaynaklanıyor ispat noktasında çünkü hocalarda bazen tam anlamıyla nerden geldiğini kavrayamıyor uı öğrencide ondan dolayı oda kavrayamıyor öyle olunca tam algılanamadığı içinde oda ezber boyutuna kaçıyor ondan sonrada ispat sıkıcı gelmeye başlıyor.

Erkan ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Erkan, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim, olmayana ergi ve çelişki yöntemlerini hatırlamıştır. Erkan'a diğer ispat yöntemlerini de hatırlaması için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Erkan, analiz ve cebir derslerinde daha çok doğrudan ispat, tümevarım ve çelişki yöntemlerini, geometride daha çok olmayana ergi yöntemini kullandıklarını, kendisi ispat yaparken soru köküne bakarak ispat yöntemine karar verdiğini ya da farklı bir ispat yapıp yapamayacağına baktığını belirtmiştir. Her zaman ve her yerde değişmeyen doğrular olduğu için, ispat yöntemlerinin insanları günlük hayatta objektif tutacağını ve matematiksel ifadeleri doğrulamaya yönelik düşünce tarzları olduğunu ifade etmiştir. Bir ispata birden fazla ispat yöntemi ile yapılabileceğini vurgulamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin ispata başlangıç yapabilmemizi sağlaması açısından önemli olduğunu, ispat yöntemini belirlemeden ispat yapılamayacağını, ispat yöntemini belirlemenin ispatı yaparken bize kolaylık sağlayacağını düşünmüştür. Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağına ifadenin söyleyiş tarzına göre, sezgisel olarak karar verdiğini, tümevarımı uygulayabilmesi için iki eşitliğin olması veya ifadenin bir şeye eşit olması gerektiğini, varsa tektir tarzı sorularda tümevarım kullanamayacağını, bu tip sorularda olmayana ergi yönteminin daha mantıklı olacağını, cebirsel işlemlerle doğrudan bulunabilen sorularda doğrudan ispat, doğrudan ispatla bulamayacağını anladığı sorularda, doğru değilse doğruymuş gibi kabul edip dolaylı ispatı kullanabileceğini ifade etmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yollarının yapılmış ispatlara bakmak ve alternatif yollar aramak olduğunu iddia etmiştir. Bir ispata başlangıç yapması istendiğinde eldeki verileri inceleyip algıladıktan sonra yöneme karar vereceğini ve o yöntemin mantıksal çerçevesinde ispata devam edeceğini, yarıda bırakılmış bir ispatı tamamlaması istendiğinde ise ispatın başlangıç kısmını inceleyip analiz ettikten sonra o düşünce doğrultusunda gerisini getireceğini dile getirmiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, yöntemler hakkında tam bir bilgi sahibi olmadıklarını, yöntemleri etkili bir şekilde kullanamadıklarını, teorem ispatlarında ezberle kaçıldığını ve nedenlerin araştırılmadığını; öğrencilerin bu yöntemleri daha iyi anlayıp kullanabilmeleri için en başta ispata bakış açısının değiştirilmesi gerektiğini yani ezberden kaçınılıp mantığın kavratılması gerektiğini açıklamıştır.

Erkan ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Erkan ispat ve ispat yöntemlerinin gerekliliğiyle ilgili olumlu görüşlere sahiptir. İspat yapmak onun için vazgeçilmezdir, olayların her zaman nedenini merak etmektedir. ğrenim hayatı boyunca yaşadığı sorunlara rağmen başarılı ve azimlidir. Azmini ve başarısını ispat konusunda da göstermektedir. Araştırmacı ve sorgulayıcı bir ğrenci olan Erkan ezber yapmayan ve ispat yöntemlerinin öneminin farkında olan bir öğrencidir. İdeallerinden vazgeçmemektedir. 2. Sınıf ğrencisi olmasına rağmen kendini ispat konusunda çok geliştirmiş ve ispatı ve ispat yöntemlerini sadece okulda aldığı bir ders olarak görmemekte, günlük hayatta da kullanmaya çalışmaktadır.

4.5. Birinci Sınıf ğrencileri İçin Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ortaöğretim matematik ğretmenliği ğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Selim ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?*

Selim: *Matematiksel ispat yöntemleri uı hani lisede görülen konuların biraz daha hani niversite düzeyinde anlatılması şeklinde oluyor mesela uı lisede bizim gördüğümüz bize anlatılan hani ispat şekli oluyor ve bence ispat kişinin kafasında, hafızasında bir belirli bir şey bırakıyor yani hani o konuyla alakalı diye düşünüyorum yani.*

Mülakatçı: *Peki ispat yöntemleri nelerdir?*

Selim: *Olmayana ergi metodu vardı, tümevarım metodu vardı, tümdengelim şeklinde, onlar vardı.*

Mülakatçı: *Başka hatırladığın var mı?*

Selim: *şu an yok yani.*

Mülakatçı: *Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.*

Bunları hatırladın mı? Hiç bilmediğin var mı aralarında?

Selim: Yani yokta, hatırladığım çelişki uı değilinin 0 olduğunu uı terside dolayısıyla 1 oluyordu hani değilinin yanlış olduğunu ispatlarsak tersinde doğru olduğunu ispatlıyorduk çelişki yönteminde, olmayana ergi metodu da uı galiba hani önce varmış gibi kabul ediyoduk uı doğru olup olmadığını o şekilde ispatlıyorduk diye hatırlıyorum yani $p \Rightarrow q$ ise karşıt terside $q' \Rightarrow p'$ şeklinde gösteriyorduk.

Mülakatçı: Deneme yöntemini hatırlıyor musun?

Selim: Hayır onu hatırlamıyorum(deneme yöntemi izah edildi). Evet evet anladım tamam.

Mülakatçı: Aksine örnek vererek ispat yöntemini hatırlıyor musun?

Selim: İı hani ifadenin doğru olduğunu ispatlıyor muyduk, öylemiydi, onu da hatırlayamadım ama tam(aksine örnek verme yöntemi izah edildi). Evet evet hı hı anladım hocam.

Mülakatçı: Peki doğrudan ispatta nasıl yapılıyordu?

Selim: Bunu da hatırlayamadım ya. Bunları şeyde görmüştük hani şu, özellikle bu şemayı soyut matematikte görmüştük de oda biraz hani ezber tarzında anlatıldığı için çokta açıkçası kafamda bir şey kalmadı yani.

Mülakatçı: Bu şemayı görmüş müydünüz?

Selim: Hı hı gördük gördük şemayı gördük ama şu deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemini görmemiştik dolaylı ispatın altında ama diğerlerini gördük yani.

Mülakatçı: Peki bu yöntemleri kullanarak ispatlar yaptınız mı?

Selim: Yani yapmıştık, doğrudan ispatta yaptık, dolaylı ispatın olmayana ergi ve çelişki yönteminde de yaptık aynı şekilde, yani diğerlerinde yapmadık.

Mülakatçı: Tümevarım-tümdengelimde?

Selim: Tümevarımda da analizde yapmıştık galiba, onu da öyle hatırlıyorum.

Mülakatçı: Peki tümevarımın nasıl yapıldığı anlatıldı mı?

Selim: Mesela işte k için doğru olsun, işte pardon, 1 için doğruluğunu ispatlayalım $k+1$ içinde doğru olursa o zaman doğrudur şeklinde gösterildi.

Mülakatçı: Yani 1 için doğru, k için doğru, $k+1$ için doğruluğunu göstermek mi?

Selim: Yok, 1 için doğru olsun diyoruz, 1 için doğru oluyo zaten, mesela k için u doğru olsun diye biz kabul ediyoruz, 1 içinde doğru olduğunu gösteriyoruz, $k+1$ içinde eğer doğruysa ifadenin doğru olduğunu söylüyoruz.

Mülakatçı: (Doğrudan ispat izah edildi).

Selim: Hı hı anladım anladım hocam.

Mülakatçı: Peki derslerinizde en çok hangi yöntemi kullanıyorsunuz?

Selim: u daha çok u bu soyut matematikte olmayana ergi metodu kullanılıyor daha çok ama u sanırım hani tümevarım olarak görmedikte mesela trigonometrinin işte toplam formüllerini ispatlarken u galiba hani analizde tümevarım kullanılıyor diye düşünüyorum. Çünkü hani isim olarak görmedik analizde, tümevarımı gördük şöyle hani biraz önce dediğim gibi gördük işte k , 1 , $k+1$ şeklinde gördük ama soyutta genel anlamda olmayana ergi metodu ve çelişki yöntemi de kullanılıyor, genelliklede olmayana ergi metodu kullanılıyor.

Mülakatçı: Peki kendi başına hiç ispat yapıyor musun?

Selim: Yani hayır hiç yapmadım ama u sık sık tekrar ediyorum yani hani unutuluyor çünkü...

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Selim: u ispat yönteminin niye kullanıldığını mı soruyorsunuz?(hı hı evet). Ya hani başta da dediğim gibi hani ispat bence akılda kalması için kullanılıyor, çünkü diğer türlü matematik birazcık ezbere gidiyor, bu da çok hoş değil yani hani bir soru için doğru çıkabilir belki yaptığımız ama diğer soru için aynı çıkmayabilir yani doğru çıkmayabilir, o yüzden hani ispat yöntemleri bence u ifadenin akılda kalıcı olması için yapılıyor diye düşünüyorum.

Mülakatçı: İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa bir ispat için farklı yöntemlerde kullanılabilir mi?

Selim: Ya kullanılabilir çünkü matematikte hani bir sorunun birden fazla çözümü olduğu gibi hani birden çokta ispat kullanılabilir yani, öyle. Mesela trigonometride $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{x}$ in iki tane ispatı vardı, biri alandan gidiyoduk bide hani $\sin x > x$ den $\sin x < \tan x$ den şeklinde her tarafı x e bölüp o şekilde de yapılıyordu yani, iki tane ispatı vardı.

Mülakatçı: Orda farklı ispat yöntemleri mi kullanılıyordu?

Selim: Yani evet, biri alandan gidiyor biride diğer türlü gidiyor.

Mülakatçı: Mesela olmayana ergi yönteminin kullanıldığı bir ispatta çelişki yöntemi de kullanılabilir mi?

Selim: Kullanılabilir yani çünkü... kullanılabilir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki tümevarımla yapılan bir ispat tündengelimle yapılabilir mi?

Selim: Onu hiç bilmiyorum çünkü sadece tümevarım üzerinde gittikte hiç tündengelim kullanmadık yani, hani şunları(tümevarımın alt başlıkları) kullandıkta hani hiç karşılaştırmadım yani.

Mülakatçı: Mesela doğrudan ispat yöntemini kullanarak yaptığın bir ispatı dolaylı ispat yöntemiyle de yapabilir misin?

Selim: Bilmiyorum yani yapılabilir diyeceğimde çokta emin değilim aslında yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Selim: Bence şöyle bir şey uu mesela atıyorum tümevarım kullanacağınız bir yerde başka ispatı kullanırsanız hani bulamayabilirsiniz ya da işte düzlem geometride özellikle görüyorum ben bunu mesela bir formül var, menelaus teoremi var mesela orda atıyorum ilk önce x ve y yi buluyoruz ondan sonra x ve y yi belli sayılarla a ile b ile şeklinde çarpıyoruz, eğer hani bu çarpımı yapmasak belki de o menelaus teoremi ispatlanamayacak hani uu ispatını yapamayacağız yani.

Mülakatçı: Yani belirleyerek ispatın yapımını mı kolaylaştırıyoruz?

Selim: Yani evet evet, yani mesela orda a çarpı b yi, pardon ve b yi başka bir şey alsak, mesela $a/2$, $b/2$ şeklinde yani farklı şeyler alsak hani belli etmesek belki de farklı bir sonuç çıkacak ve aradığımız ispatı bulamayacağız, yani öyle düşünüyorum.

Mülakatçı: İspat yöntemi belirlemeden de ispat yapılamaz mı?

Selim: Ya yapılabilir ama hani uı tabi çok uzun zaman alır yani mesela uı menelaus teoremini ispatlayacaksınız, x ve y yi belirlediniz ama hangi sayıyla çarpacağınızı bilmiyorsunuz, hani bu $a/4$ e $b/2$ de olabilir, işte a ya $b/2$ de olabilir, yani bir sürü alternatif olduğu için hani tam bir ispat yapmak baya bir uzun sürer yani yapılabilir ama çok uzun sürer.

Mülakatçı: Yani yöntemi belirlemeden yapabiliriz ama çok uzun sürer öyle mi?

Selim: Evet ama uzun sürebilir yani.

Mülakatçı: Yani onun olmayana ergiyle mi çelişkiyle mi olduğunu belirlemek mi gerekiyor öncelikle?

Selim: Yani evet evet başta onu belirlemek daha iyi olur yani.

Mülakatçı: Mesela sen ispatlara baktığında diyor musun bu olmayana ergiyle yapılmış falan?

Selim: Yani hiç bilmiyorum öyle bir şey düşünmedim ama hani mesela soyut dersinde öyle bir şey düşünemiyorum çünkü biraz hani bana göre ezber anlatılıyor soyut, hani çokta sevmiyorum aslında matematikte ama hani analizde olsun hani diyorum ki tümevarım kullanıldığı için genel anlamda, hani bu da tümevarımdır şeklinde bir çıkarımda bulunuyorum yani.

Mülakatçı: Peki sınavlarda size sorulduğunda ezber mi oluyor yoksa mantığını kavrayarak mı yapıyorsunuz?

Selim: Ya bazıları ezber oluyor tabi, çünkü mesela uı sanırım şeydi bu türevde x^n nin türevinin ispatı vardı, bunun dört yolu var işte rasyonel sayı olması, reel sayı olması işte tamsayı olması falan şeklinde hani burada bazıları ezber oluyor da hani onun dışında trigonometride toplam formülünü ispatlarken çokta ezber gerekmiyor aslında çünkü bir a açısı alıyorsunuz bir b açısı, onun üzerine tekrar bir a açısı ve 4. bölgede bir a açısı alıyorsunuz ve oradan da ispatlanabiliyor yani, çünkü hani biliyorsunuz ama diğer türlü çok zor oluyor yani hani ezberlemek gerekiyor.

Mülakatçı: Peki direkt mi ezberliyorsun yoksa bir yerde mantığını kurmaya çalışıyor musun?

Selim: Ya mantık şöyle kavranıyor hani zaten o dediğim ispatın 4 tane bölümü var dediğim ispatın hani şöyle bir şey mesela 1. yi bilmeden 2. yi yapamıyorsun hani 1. yi mutlaka kavraman gerekiyor ki 2. ye geçebilesin ama bazı yerleri hani ezberlenmek zorunda kalınıyor yani.

Mülakatçı: Hani diyorsun ya dört farklı yolu var, o dört yolu da farklı yöntemlerle mi çözülüyor?

Selim: Hayır aynı yöntemle çözülüyor fakat şöyle aslında birbirinden türiyorlar mesela hani irrasyonel sayıdan bahsederken hani orda bi tamsayının da ispatını kullanıyorsunuz aslında hani tamsayıda nasıl yapılıyordu farklı, o şekilde oda kullanılıyor aslında yani, çokta farklı değil birbirinden ama mantık olarak biri rasyonel sayının ispatı biri de tamsayının ispatı, biraz farklı gibi gözükse de aynı yani birebir olmasa bile aynı birazcık.

Mülakatçı: Mesela genel olarak diyorsun ya bir soruda farklı ispat yöntemleri kullanabiliyorum, orda acaba aynı yöntemi kullanıp farklı yollardan mı gidiyorsun yoksa baştan yöntemi mi farklı seçiyorsun?

Selim: Yani mesela yine trigonometrideki o $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{x}$ i daha doğrusu limitler özür dilerim ona bakalım mesela hani aslında aynı yani birinde alan alıyorsun diğerinde de işte x e bölüyorsun tersini alıyorsun falan eşitliği değiştiriyorsun şeklinde oluyor ya hani aynı gibi gözüküyorda hani çokta şey değil yani ne bileyim farklı gibide gözüküyor çünkü mesela birinde alan alıyorsun hani mesela alan alırken sinüs teoremini kullanıyorsun uu çokta farklı değil yani.

Mülakatçı: Mesela o hangi yönteme girer?

Selim: Yine tümevarım diyeceğim yani, bilmiyorum yani hani yöntem olarak görmedik analizde hani sadece bu şemayı soyut matematikte gördüm yani.

Mülakatçı: Diğer derslerinizde hiç uygulamadınız mı?

Selim: Kullanıyoruz şöyle mesela düzlem geometride kullanılıyor olmayana ergi metodu, yani çelişki yöntemi de kullanıldığını görmedim düzlemde ama olmayana ergiyi kullanıyoruz.

Mülakatçı: Soruları çözerken hangi yöntemin kullanıldığı belirtilmiyor mu?

Selim: Ya oluyor tabi mesela işte burada olmayana ergi metodunu kullanıyoruz falan şeklinde oluyor ama hani yani bana sorarsanız düzlem olsun soyut olsun biraz ezber gibi geliyor o yüzden hani çokta akılda kalmıyor yani hani ezberlemek zorundasınız gibi oluyor o şekilde hani çokta kestiremiyorsunuz olmayana ergi mi kullanacağız çelişki mi kullanacağız veya başka bir yöntem mi kullanacağız diyemiyorsunuz yani.

Mülakatçı: Peki bunu diyebilmek için sence ne yapılmalı?

Selim: Bunu diyebilmek için bence hani mantıklı bir şekilde anlatılmalı diye düşünüyorum özellikle düzlem ve soyut matematik derslerinin, hani ezbere biniyor birazcık, mesela soyut matematik hocamız 11 kitap bazlı anlatıyor hani kitap olmasa da anlatamayacak falan hani unutuyor bazen kitaptan bakıyor hani anlattığı şeyde mesela bir şey soruyorsun işte kitabınızın şu sayfasında yazıyor falan şeklinde oluyor çok fazla açıklayamıyor hani bu belki giderilse akılda kalabilir ve hani diyebilirsiniz ki olmayana ergiden çözülüyor veya çelişki bulma metodundan çözülüyor diyebilirsiniz yani.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Selim: Ya hani çokta kestiremiyorum gerçekten, hani metod olarak değil de hani eğer gösterilen bir şeye mesela trigonometriden örnek verelim işte toplam çarpım verilmiyor hani o gösterildiği için hani direkt burada bu metod kullanılıyor şeklinde değil de hani burada böyle bir şey yapıyorduk işte a açısı alıyorduk b açısı alıyorduk şeklinde veya işte limitte bazı mesela limitin tanımındaki işte $\epsilon > 0$ falan şeklinde bu ifadelerde vardı yine ispata giriyor ya burada da hani şey olarak düşünmedim hiç, tümevarım mı kullanıyoruz tümdengelim mi diye düşünmedim hani nasıl öğretiliyse burada böyle yapıyorduk şeklinde düşündüm yani hepsini.

Mülakatçı: Yani direkt o soru üzerinde görüyorsun, onun dışına çıkılınca mesela hiç düşünüyör musun işte niye burada tümevarım kullanılmış, bu soru nasıl bir soru ki tümevarım kullanılmış?

Selim: Ya aslında dediğim gibi düşünemiyorum hani çok öyle anlatılmıyor yani o yüzden bende eksikte oluyor tabi yani hani düşünemiyorsunuz dediğiniz gibi hani o soru bazlı birazda öğrenmiş oluyorsunuz çok fazla soru görmediğiniz içinde başka bir soruda takılabiliyorsunuz yani.

Mülakatçı: Mesela sen sonradan baktığında muhakeme yapıyor musun bu neden doğrudan bu neden dolaylı ispat diye? Yani farklı bir soruda ben nasıl yaparım diye kurguluyor musun hiç?

Selim: Yani kurgulayamıyorum, ya kurgulamak isterim tabi hani çünkü çok farklı soru tipleri var hani sadece soyut matematiğe düzleme özgü sorular yok, onun dışında olimpiyat soruları olsun yani farklı bazı sorular var hani bunlar için gerçekten gerekiyor hani ispat yöntemi, bir şeyler hani kestirmek gerekiyor ama bunun içinde düzgünce bir şekilde anlatılması lazım hani ezber olmaması lazım.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

Selim: Bence hani matematiği ezberden çıkartıp biraz daha hani yöntemlerin mantığını kavramak yani mesela işte atıyorum olmayana ergi metodunu nasıl kullanırız ya da işte çelişki metodunda neyi nasıl yaparız falan şeklinde hani bunun mantığı kavranırsa yani ben eminim yapılabilir yani uı sorunun başında da kestirebiliriz işte bunu burada kullanıyoruz falan şeklinde olabilir yani, yani geliştirmekte bu şekilde olur yani.

Mülakatçı: Yani onların nasıl olduğunun gösterilmesi mi?

Selim: Evet evet ama hani mantık zincirinde olmalı hani çünkü diğer türlü mesela tahtaya yazıyorsunuz işte şu şuradan geldi falan diyorsunuz ama hani sizde tam emin olmadığınız için sizde ezberlediğiniz için dolayısıyla yani öğrencide ezberliyor yani, ezberlediği içinde sizin gösterdiğiniz soruyu belki yapıyor ama başka bir soruda takılıyor yani. Bence bu ispat yöntemlerini içeren matematik konuları gerçi hepsi içeriyor bu şekilde anlatılmamalı yani, mesela soyut matematik olsun düzlem geometri olsun hani birazcık şöyle oluyor belki dersi hani anlamak istiyorsunuz ama bir taraftan da dersi geçmek için çalışıyorsunuz aslında çünkü hani mantığı tam olarak kavratılmıyor, direkt ezber yapılıyor ya sizde sınava 1 hafta 2 hafta belki 3 hafta varken hani ezber olarak çalışıyorsunuz, hocanın verdiği sorulardan çalışıyorsunuz bundan dolayı da hani ders geçtikten sonra uı ileriki senede o soruyu unutuyorsunuz yani nasıl yapıldığını unutuyorsunuz hani dolaylı olarak da hep unutuluyor da hani birazcıkta kalıcı olması lazım diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki bize düşen bir görev var mı sence?

Selim: *Ya hani öğretmenlere düşen görev tabi hani birazcık matematiği ezberden çıkarmalarıdır diye düşünüyorum yani. Ya çünkü dediğim gibi soyut matematik hocası geliyor mesela elinde kitap var işte bir şeyler yazıyor ondan sonra unutup kitaptan bakıyor tekrar bir şeyler yazıyor, hani böyle olmamalı yani çünkü u karşınızdaki insan ezberlediği için ya da karşınızdaki insan tam mantığını kavratamadığı için sizde bir şey anlamıyorsunuz yani isterseniz 10 saat çalışın yinede olmuyor ama hani eğer gerçekten anlatılabilirse bu ispat yöntemleri gerçekten bir sorudan önce kestirebilirsiniz yani hani bu soru şöyle çözüyor falan şeklinde ona göre de soru daha kolay çıkar diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Hayatımızı kolaylaştırır mı yani?*

Selim: *Yani kolaylaştırır tabi kolaylaştırır çünkü u bence hani matematik ezber bir ders değil, ezber bir ders olmadığı içinde mantığı gerçekten kavratılmalı, onun için hani matematiğin bir yolu ispattır hani ispat içinde gerçekten doğru bir şekilde mantık zincirinde anlatılmalı ve bu anlatılanlarda hani eminim matematiği ezberden çıkartır yani, eğer mantık zincirinde anlatılırsa yoksa matematik yine ezber olur buda bir soruyu çözersiniz ama ikinci soruda takılırsınız yani.*

Mülakatçı: *Peki ispatların mantığı kavratılırken ispat yöntemlerinin de kavratılması önemli midir sence?*

Selim: *Yani mesela önemlidir tabi mesela olmayana ergi metodunu nerde kullanacağınızı bilemezseniz yapamazsınız yani dolayısıyla yani u önemlidir yani öyle diyeyim.*

Mülakatçı: *Sana bir ispat verilse buna doğru bir başlangıç yapabilir misin?*

Selim: *Yapabilir miyim u çokta emin değilim çünkü soyut ve düzlem geometri olursa çok zor ama hani analizde yapabilirim yani.*

Mülakatçı: *Peki ispata nasıl bir başlangıç yaparsın?*

Selim: *Ya mesela düzlemde olsa hani başlayacağım şey şudur işte atıyorum a, b, c bir nokta olsun üç nokta olsun veya doğrusal olmayan üç nokta olsun d bir doğru olsun şeklinde işte u bilmem şu teoreme göre bunlar bir düzlem oluştururlar falan şeklinde olabilir u soyutta işte u ne olabilir soyutta u soyutu bilmiyorum ama hani analizde de yine aynı şekilde u işte atıyorum bir fonksiyonun bir şeyini ispatlayacaksınız işte $f(x)$ a*

dan b ye bir fonksiyon olsun, sürekli bir fonksiyon olsun işte a , b kapalı aralığında bir fonksiyon olsun şeklinde başlanır diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Yani ilk olarak teoremdeki ifadeyi yorum olarak yazmak mı var?

Selim: Ya ilk yapacağım iş hani mesela atıyorum dediğim gibi mesela analizdesiniz ve fonksiyonla ilgili bir şey verildi önce fonksiyonun tanım aralığını belirliyorsunuz hani hangi fonksiyonu sizden istiyorsa onu belirliyorsunuz işte atıyorum süreksiz bir fonksiyon diyor o zaman süreksiz bir fonksiyona göre tanım aralığı belirliyorsunuz ona göre çalışıyorsunuz yoksa çıkmayabilir yani o ispat ya bunu belirliyorsunuz ondan sonra zaten hani işte atıyorum bu fonksiyon süreksizse işte şu şöyle oluyor falan şeklinde ispat devam ediyor yani.

Mülakatçı: Peki yöntemlere burada yer veriyor musun?

Selim: Ya açıkçası hani ispat yöntemleri adına hani tümevarımı kullanayım tündengelimi kullanayım demiyorum yani hiçbir zaman hani işte diyorum $f(x)$ fonksiyonu işte a dan b ye bir fonksiyon olsun işte $f(a)=b$ ise falan mesela bu şekilde kullanılıyor yani hani hiçbir zaman demedim ki işte tümevarımı kullanayım, tümevarımdan çözeyim falan diye bir şey düşünmedim yani açıkçası.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa nasıl tamamlarsın?

Selim: Nasıl tamamlarım... zaten hani yarıdan öncesi hani birazcık o soruyla alakalı olur ki buda hani eğer önceden o tip bir soruya bakmışsam ya da işte atıyorum nasıl çözüleceği hakkında bir bilgim varsa devam edebilirim ama onun dışında çok zor.

Mülakatçı: Sonuç kısmına kadar getirilse ispat sonuç kısmını nasıl yaparsın, nasıl yorumlarsın?

Selim: İu onu da şu şekilde olur mesela hani atıyorum bizim aradığımız şey atıyorum bir fonksiyonun işte kapalılık özelliği ya da başka bir şey tam şu an aklıma gelmiyor hani sizin yaptığınız adımlara bakarak sonuca ulaşmam gerekiyor zaten amacımda ispatlamak olduğuna göre hani şuradan şuradan dolayı şöyle olmuştur denebilir yani sonuç olarak.

Mülakatçı: Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?

Selim: *Uu yani analiz için yeterli diye düşünüyorum çünkü mesela bir ispat yaptıktan sonra onun üzerinde konuşuyoruz işte hani mesela uu özellikle trigonometride olsun, türevde olsun, limitte olsun bir ispat yapıyoruz bunun üzerinde konuşuyoruz işte şuradaki şu neden böyle falan bu şekilde konuşuluyor ama soyutta ya da düzlemde direkt yazılıp işte düzlemde iddia sebep şeklinde yapılıyor işte atıyorum teorem 1 den dolayı falan bu şekilde yazılıp geçiliyor hani çok fazla konuşulmuyor üzerinde çünkü sizin düzlemde bir şeyler anlamak için teorem 1 e bakmanız ya da teorem 1 i bilmeniz gerekiyor, soyuttaysa mesela yazıyor hoca tahtaya hani anlasanız da anlamasanız da o şekilde o ispat kapanıyor yani, ya bu şekilde oluyor.*

Mülakatçı: *Peki soyut matematik dersinde ispat yöntemleri sence yeterli anlatıldı mı?*

Selim: *Yani yeterince anlatılmadı çünkü mesela hepsiyle alakalı sadece 1 örnek çözüldü şöyle bir şey yapılmadı mesela işte olmayana ergi metodunu biz çelişki yönteminde kullandığımız gibi kullanabiliriz yani çelişki yöntemi kullanılan soruda olmayana ergi metodu da kullanılabilir mi, böyle bir soru işareti var hala hepimizin kafasında, hani bu sorulmadı mesela bu sorulsaydı belki ben diyecektim ki işte olmayana ergiyi kullandığımız yerde onu da kullanabiliriz diyecektim ama denemediğim için hani diyemedim. Hani bu yapılabilirdi. İşte tümevarım kullanıldığı yerde tümdengelim şu şekilde kullanılabilir işte dolaylı ispat veya doğrudan ispat birbirine dönüşümleri yapılabilirdi yani hani irdelenip tam olarak hafızaya oturtulabilirdi diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Bunun fayda getireceğini düşünüyor musun?*

Selim: *Hı hı ya düşünüyorum ama bu şekilde yapılırsa yoksa diğer türlü hani tahtaya yazıp işte hani hepsinden bir örnek yazıp uu bitirmek çokta mantıklı değil yani.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir? Aslında bir şeyler söyledin ama eklemek istediğin bir şeyler var mı?*

Selim: *Yani bence hani uu atıyorum bu mesela kağıtta yazılan ispat yöntemlerinden birbiri içerisinde hani şey yapılabilir uu birleştirilebilir işte orda onu kullanırken bunu bu şekilde orda kullanıyoruz şeklinde mesela tümevarım kullanıyorsunuz bir soruda aynı soruda işte dolaylı ispatın olmayana ergi metodunda şu şekilde kullanırız hani birbiriyle ilişkilendirilebilir hani uu diğer türlü olursa mesela bir soru için sadece bir yöntem bilirsiniz işte bu soru için sadece tümevarım kullanılıyormuş gibi o soruya*

bakarsınız ama öbür türlü olursa işte bu soru için tümevarım artı işte dolaylı ispatın olmayana ergi metodu da kullanılır ama olmayana ergi metodu tümevarımdan farklı olarak bu şekilde kullanılır şeklinde bir çıkarımda bulunulabilir yani ama hani dediğim gibi bir örnek yazılıp geçilmekle de anlaşılmaz yani hani uı örneklerle desteklenmeli diye düşünüyorum ispatlar.

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerinizi almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?*

Selim: *Yani farklı bir şeyler eklenebilir miydi mesela hani ispat yöntemleri nasıl kavratılabilir şeklinde bir soru olabilirdi en başından onu söyleyeyim.*

Mülakatçı: *"Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?" şeklinde yöneltile soru bu soruyu kapsamaz mı? Yoksa orda farklı bir şey denir miydi?*

Selim: *Ha olur evet evet olur. Mesela şöyle bir şey diyebilirdiniz hani 'Hiç ispat yöntemlerini birbiriyle ilişkilendirdiniz mi?' şeklinde bir şey olabilirdi. Hani uı dediğim gibi hani çok basit bir şeyler değil yani hani biraz eğer ilişkilendirmezseniz ezbere dayanıyo, ezbere dayanınca da hani bir yerden sonra unutuluyor çünkü bir sürü ispat var hani sadece bir derse özgü bir ispattan bahsetmiyoruz, bir sürü ispat var, o yüzden hani birbiriyle ilişkilendirilmeliydi mesela ben analizdeki bir ispatı işte soyutta da görüyorum mesela işte analizde de fonksiyon gördük, fonksiyonun birebir ve örtenliğini soyutta da gördüm ama farklı şekilde ispatlarda gördüm hani bunlar mesela ilişkilendirilebilirdi diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Peki sen hiç onları kendin düşündün mü mesela niye bu şekilde yapılmış?*

Selim: *Ya mesela analizde çoğu zaman düşünüyorum ama soyutta düşünme fırsatım olmuyor çünkü pek anlamıyorum ama analizde düşünüyorum yani mesela yine fonksiyonların birebirliği örtenliğiyle ilgili konuşalım ya mesela bir fonksiyonun tersi olması için birebir ve örten olması gerekiyor, mesela kendi kendime diyorum birebir olması için ne olacak fonksiyon işte uı tanım kümesindeki her eleman görüntü kümesinde farklı bir elemana gidecek uı örten olması içinde görüntü kümesinde boşta eleman kalmayacak, şimdi fonksiyonun tersini aldığınız zaman görüntü kümesiyle tanım kümesi yer değiştirecek uı yer değiştirdiği zaman mesela fonksiyonumuz örten olmasın*

o zaman görüntü kümesinde boşta eleman kalıyor e görüntü kümesi tanım kümesi olduğu içinde bu sefer tanım kümesinde boşta eleman kalıyor ve fonksiyon olmuyor, birebirlik içinde aynı şeyi söyleyelim mesela birebir olmasaydınız u görüntü kümesine iki elemanın gidecekti mesela tanım kümesindeki iki elemanın görüntüsü beş olacaktı atıyorum u bu seferde tersini düşündüğünüzde görüntü kümesindeki tek eleman tanım kümesinde iki elemana gitmiş olacak buda yine fonksiyonun tanımına ters düşecek yani hani birinci tanımı tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak ikinci tanımı da tanım kümesindeki her elemanın tek bir görüntüsü olacak şeklindeydi bu şekilde ilişkilendirebiliyorum yani.

Mülakatçı: *Mesela birinde olmayana ergi kullanılmış birinde çelişki diye düşünüyor musun?*

Selim: *Yani hiç öyle düşünmedim.*

Mülakatçı: *Peki bu görüşmeden sonra böyle düşünür müsün? Sana kolaylık sağlar mı?*

Selim: *Yani bu görüşmeden sonra düşünürüm, açıkçası hani hiç böyle düşünmemiştim ispat yöntemlerini hani yetersiz buluyordum anlatımını ama hiç böyle düşünmedim yani birbiriyle ilişkilendirmeyi çok düşünmedim. Analiz konusunda tamam hani düşününce tamam soyut olsun düzlem olsun orda hiç önemsemedim açıkçası işte olmayana ergi kullandığım yerde çelişki kullanabilir miyim falan diye hiç düşünmemiştim hani bundan sonra düşünürüm.*

Selim ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Selim, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim ve olmayana ergi yöntemlerini hatırlamıştır. Selim'e hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlatmak için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir ve daha sonrasında Selim, dolaylı ispatı hatırlayamadığını, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemini de daha önceden görmediğini, derslerinde en çok çelişki ve olmayana ergi yöntemlerinin kullanıldığını, tümevarımın da isim olarak söylenmese de analiz derslerinde kullanıldığını, kendi kendine hiç ispat yapmadığını, sadece yapılan ispatları tekrar ettiğini dile getirmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılan ispat yöntemlerinin akılda kalıcılığı ve ezberden kurtulmayı sağladığını, bir ispatın birden fazla ispat yöntemi ile yapılabileceğini vurgulamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirlemenin ispatı yapmada kolaylık sağlaması ve doğru

sonuca ulaşılması açısından önemli olduğunu belirtmiştir. İspat yöntemini belirlemeden de ispat yapılabileceğini; fakat bunun uzun zaman alacağını iddia etmiştir. Soyut matematikte ispatlara bakarken kendisinin ispat yöntemini düşünmediğini, çünkü genellikle ezber anlatıldığını; fakat analizde ispatları genelde tümevarımla yaptıkları için tümevarım mı yapılmış diye ispata baktığını, anladığı ispatların mantığını kurmaya çalıştığını fakat ispatı anlayamayınca ezber yaptığını söylemiştir. Matematiksel bir ispat yaparken hangi yöntemin kullanılacağını tam kestiremediğini, eğer önceden gösterilen bir ifadeyse aynı yoldan gittiğini; fakat ispat yöntemini düşünerek ispatı yapmadığını, öğretilen ispatları öğrendiklerini, farklı ispatlarda takıldıklarını beyan etmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmek için matematiğin ezberden çıkarılması, yöntemlerin mantığının kavratılması ve kalıcılığın sağlanması gerektiğini dile getirmiştir. Bir ispata başlangıç yapması istendiğinde soyut matematikte nasıl yapacağını bilmediğini, düzlem geometride önceki teoremlerden yararlanabileceğini, analizde verilenleri düzenleyerek tanım aralığı belirleyeceğini, bu aşamalarda ispat yöntemlerini düşünmeyeceğini; yarıda bırakılmış bir ispatı devam ettirmesi istendiğinde ise önceden karşılaştığı bir ispatsa başlangıç kısmını kontrol edip ispatı devam ettirebileceğini; fakat ilk defa karşılaştığı bir ispatsa devam ettiremeyeceğini düşündüğünü belirtmiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, sadece bu yöntemlerle ilgili birer soru çözüldüğünü; fakat mantık çerçevesinde karşılaştırma ve yorumlar yapılmadığını anlatmıştır. Bu yöntemlerin daha iyi anlaşılıp kullanılabilmesi için yöntemlerin birbirleriyle ilişkilendirilerek anlatılması ve örneklerle desteklenmesi gerektiğini düşünmüştür.

Selim ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

Selim, ispat yöntemleri ile ilgili yeterli bilgiye sahip değildir. Yöntemlerin çoğunu sadece isim olarak bilmektedir. İspatları yaparken ispat yöntemini düşünmemektedir. Selim'in meslek lisesi çıkışlı bir öğrenci olmasına ve orada matematiğe dair fazla bir şey öğrenmemesine rağmen okuduğu bölüme gelmesi onun başarısının bir göstergesidir. Onun ispat yöntemlerini yeterince bilmemesinin ve ispat yaparken kullanamamasının, henüz 1. sınıf olmasına ve ispatlarla ilgili yeterince tecrübe yaşamamasına bağlı olduğu düşünülmektedir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerinin alındığı bu çalışmada Zeynep ile yapılan klinik mülakat aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

Mülakatçı: Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?

Zeynep: Matematiksel ispat yöntemleri... doğrudan ispat, dolaylı ispat, tümdengelim, tümevarım ispat yöntemleri var ama bunların içeriğini dönecek olursak hani soru olmadan ben ispatlayamıyorum hani konuşma olarak ifade edemiyorum hani bu budur diye hani ispat yöntemini ama genel olarak hani bu ispat yöntemleri var, soru olduğu zaman sadece uygulayabilirim ama şu an sözel olarak size söyleyemiyorum.

Mülakatçı: Peki dolaylı ispat çeşitlerini hatırlıyor musun?

Zeynep: Dolaylı ispatlarda... tümdengelim tümevarım onda mıydı pek... (Sayılan dört yöntemin yeri söylendi) dolaylı olanda nasıl ayrılıyordu... bilmiyorum.

Mülakatçı: Aklına getiremediklerini hatırlaman adına seninle ispat yöntemlerini bir gözden geçirip görüşmemize öyle devam edelim istersen. İspat yöntemleri tümevarım ve tümdengelim olarak ikiye ayrılır. Tümdengelimde doğrudan ve dolaylı ispat olarak ikiye ayrılır. Dolaylı ispatta olmayana ergi yöntemi, çelişki yöntemi, deneme yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi olarak dörde ayrılır.

Zeynep: Şu ikisini zaten bizde görmüştük (dolaylı ispattan olmayana ergi ve çelişki yöntemi).

Mülakatçı: Diğer ikisini görmediniz mi?

Zeynep: Yok hayır, onu da soyut matematikte işte içeriğini en başta şey yaparken olmayana ergi ve çelişki yönteminden bahsetmiştik, hani çelişkide ters örnek veriyorduk hatta olmayana ergide direkt ifadeyi öyle. (Çelişki yöntemi ve aksine örnek vererek ispat yöntemi izah edildi). Biz onu (aksine örnek vererek ispatı) şeyde yapıyorduk çelişkide yapıyorduk. Hani ters bir örnek veriyorduk çelişiyordu diyorduk hani o zaman yanlıştır diyorduk hani artık neyi ispatlıyorsak... o şekilde yapmıştık.

Mülakatçı: Olmayana ergide nasıl yapıyordunuz?

Zeynep: Olmayana ergide p, q hani böyle direkt soyuttan gidiyorum... karışıyor ya. Olmayana ergi direkt aslında ifadelerden hani yola çıkıyorduk onda, bir şey söyleyemiyorum ya bilmiyorum...

Mülakatçı: Peki doğrudan ispatta nasıl yapıyordunuz?

Zeynep: Doğrudan ispat ya bilmiyorum ki keşke baksaydım ben bunlara. Doğrudan ispat... ya direkt ifadeyi ele alıyorsun hani doğrudan ispat... düşünüyorum hani şu an bir şey ispatlarım ama hani dediğim gibi hangisi hangi alt başlığa girer falan onlar hakkında pek bir şey söyleyemiyorum. (Doğrudan ispat izah edildi).

Mülakatçı: Tümevarımı hatırlıyor musun?

Zeynep: Tümevarımı hiç zaten bahsetmedi aslında böyle bir şey sadece ayrılıyor o kadar.

Mülakatçı: Tümevarım ve tümdengelim olarak ayrıldığı söylendi ama ne oldukları söylenmedi öyle mi?

Zeynep: Yok tümdengelimden direkt doğrudan ispat, zaten hani pek o kadar şey değil soyut matematik dersinin başında doğrudan ispat, olmayana ergi ve çelişki yöntemini sadece kullanmıştık o kadar yani.

Mülakatçı: Tümevarım ile ilgili hiç örnek çözüldü mi?

Zeynep: Hayır hayır çözmedik hiç oraya girmedik, sadece isim olarak.

Mülakatçı: Peki derslerinizde en çok hangi yöntemi kullanıyorsunuz?

Zeynep: Daha çok hangi... daha çok doğrudan ispatı kullanıyoruz, bir şeyi kullanarak hani sonucuna hani karşı taraftakinin nasıl diyeyim dedik ya hani alıyoruz $p \Rightarrow q$ ya hani ilerleterek doğru çözümü... hani en çok kullandığımız doğrudan ispat yani, hani çelişki yöntemi soyut matematik olarak düşününce daha çokta hani olmadığını hani görebiliyorsak hani anlayabiliyorsak bu olmuyor direkt çelişkiye hani ters örnek veriyoruz zıt örnek veriyoruz hani bu olmuyor diyoruz hani genelde doğrudan ispat ve çelişki yöntemi kullanılıyor diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Kendin ispat yapıyor musun?

Zeynep: Kendim ispat yapıyor muyum... Hani hocalar bize bıraktığı zaman hani bırakıyorlar bazen hani bununda ispatını siz yapın hani diğerine benziyor falan şeklinde o zaman yapıyoruz bizde.

Mülakatçı: Sen hangi yöntemi kullanmayı daha çok tercih ediyorsun?

Zeynep: Daha çok doğrudan ispat ama çelişki hani diyorsam ki bu kesinlikle yanlıştır diye hani görebiliyorsam onu direkt çelişki yani diyorum, ters örnekte verebiliyorum, öyle.

Mülakatçı: Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?

Zeynep: Nasıl yani? Doğruluk açısından mı?(olabilir). Bilmiyorum da yani bana ispat gerekli geliyor çünkü hani görünce diyorsun aaa bu buradan gelmiş diyebiliyorsun, bana göre ne bileyim mantıklı ispat, doğrudan ispat.

Mülakatçı: İspat yöntemleri mantıklı mı geliyor yani?

Zeynep: Yöntemlerinden ziyade ispat mantıklı geliyor sonuçta hani onun nerden geldiğini göste... hani biz lisede hani direkt yapıyorduk mesela örnek veriyorum integral olsun trigonometrik fonksiyonlar olsun ya da türev olsun direkt hani diyorduk bu bunun formülü ama biz buraya geldiğimizde hani onların nerden geldiğini nasıl geldiğini öğrendik, aslında bildiğimiz şeylerdi zaten o yüzden hani aslında zevkli buluyorum hani ispatı ama sırf analiz için düşünüyorum, analiz konusunda öyle yani mantıklı, gerekli.

Mülakatçı: İspat yöntemleri niçin gereklidir?

Zeynep: Bence niçin gerekiyor... ezberi ortadan kaldırmak için olabilir mi... olabilir diye düşünüyorum yani direkt hani ezberlemekten ziyade mesela ben kendi açımdan toplam, fark, çarpım şeyleri var trigonometride onları ben bilmezdim ezberlerdim hep ezberlerdim hep karıştırdım hani bir şeyler bulmaya çalışırdım ama buraya geldiğimizde hani hoca dedi ki bu buradan çıkıyor bu böyle oluyor şimdi hani önüme geldiği zaman hemen bir kenarda onu küçük bir şekilde yapıyorsun zaten işlem yeteneği hızlı olunca direkt geliyor mesela ben kendi açımdan düşününce hani öyle direkt bilmektense hani ispata dayalı bir şekilde çıkarmak her zaman daha iyi oluya diye düşünüyorum çünkü ezberlediğimi unutuyorum mesela onları ben hep ezberlerdim

fark formülleri toplam formülleri nasıl oluyor falan diye ama şu an çıkarılışlarını bildikten sonra hani daha iyi oluyor bence.

Mülakatçı: *Peki ispat yöntemlerini bilmek sence niçin gerekiyor?*

Zeynep: *İspat yöntemleri... e ispatı yapabilmek için gerekiyor... mu aslında düşünüyorum da hani ben bunları böyle başlık altında kullanıyor muyum kullanmıyorum hani direkt hani nasıl alıyorsam hani bir yerden başlıyorum hani onu devam ettirerek doğru sonuca ulaşıyorum, onu ispatlamaya çalışıyorum hani ben hep böyle yapıyorum ama hani bunları da bilmek gerçekten de gerekiyor yani diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Neden gerekiyor?*

Zeynep: *Neden gerekiyor... e bilmezsek yapabilir miyiz ki... yaparız. Neden gerekiyor... düşünüyorum neden gerekiyor, neden gerekiyor? Bilmiyorum da gerekiyor mu ya bunlar için düşünüyoruz değil mi bunları neden bilmek gerekiyor.*

Mülakatçı: *Yani... ispat yöntemleri genel olarak niçin gerekli, bizim için ne anlam ifade ediyorlar?*

Zeynep: *... İspata başlayabilmek için hani mantıklı matematiksel olarak düşünüldüğünde bunları bilmemiz gerekiyor ki hani bir yerden başlayalım yani sonuçta ispat yapacağız hani neyi yapacağız hangi yolu kullanacağız hani bunları bilirsek hani soruya uygun bir şekilde hangi yolu kullanabileceğimizi seçersek gereği de olur.*

Mülakatçı: *İspatların tek bir yöntemimi vardır yoksa birden fazla yöntemle bir ispat yapılabilir mi?*

Zeynep: *Farklı yollardan ispatlanır hep bir sorunun dediğimiz gibi bir ispatın 1. yolu var 2. yolu var hani isteyen mesela doğrudan kullanır dolaylı kullanır ... kullanabilir yani ama hani benim için hangisi kolayıma gelirse ilk başta hani ilk aklıma ne geliyorsa o şekilde yaparım ama yani herkes farklı yolla da ispatlayabilir kendine göre diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Yani her ispat yöntemini her soruda kullanabilir miyiz?*

Zeynep: *Her ispat yöntemi her soruda kullanılamayabilir, mesela çelişki yöntemi o ifade doğrudur hani ona sen zıt bir örnek veremezsin o yöntemi kullanamazsın mesela.*

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?

Zeynep: Neden önemlidir... ispata başlarken doğrudan dolaylı olduğunu hani bilerek ona göre başlamamız gerekiyor diyorsunuz... Aslında ben hani kendim hani direkt bilmeyerek de başlıyorum.

Mülakatçı: Nasıl karar veriyorsun mesela?

Zeynep: Nasıl karar veriyorum... ne bileyim hani bir kere soruyu alıyorum hani uğraşıyorum hani bu buradan oluyor diye başlıyorum ama hani hiç düşünmüyorum bu benim ispatladığım yol doğrudan mıdır dolaylı mıdır o şekilde hiç karar vermiyorum ama hani karar vermek gerekirse neden önemlidir belki kolaylaştırabilir mi hani o an mantığını bilirse doğrudan ispat böyle oluyor dolaylı ispat böyle oluyor belki daha kolay olabilir hani başlangıçta bunu belirlersek ama ben hiç belirlemek bilmiyorum yani belirlemiyorum hani direkt hani başlıyorum geliyorsa sonucu geliyor gelmiyorsa gelmiyor.

Mülakatçı: Mesela şu tip soruları teoremleri gördüğünde şu tip ispat yöntemini kullanayım diye aklına gelmiyor mu hiç?

Yani ben hiç hani şu ana kadar düşündüm hiç demedim ki hani bu soruyu ben hani gördüm dolaylı ispatla ispatlayayım demedim yani ya da doğrudan ispat yöntemiyle ispatlayayım demedim hani direkt hani aslında bunları hani biliyorsun hani ama ad olarak hiç düşünmüyorsun hani ispatladığım yol belki de doğrudan ya da dolaylı yöntem ama sen onu hani o anda dediğim gibi hiç onu o şekilde düşünmüyorum belki de doğrudan ispat yöntemiyle ispatlıyorum çoğunlukla genelde de öyle oluyor ama hiç hani onu düşünerek başlamıyorum ispat yöntemini isim olarak düşünerek başlamıyorum.

Mülakatçı: İspat yöntemini belirlemeden ispat yapabilir misin?

Zeynep: Bence yaparım.

Mülakatçı: Nasıl yaparsın mesela?

Zeynep: Nasıl yaparım herhangi bir... matematik alanında düşünüyorum ya ispat yöntemi belirlemeden zaten dedim az öncede dedim, dedim hani ispat yöntemi belirlemeden yapıyorum.

Mülakatçı: Ama aslında yine orda ispat yöntemini kullanıyorsun.

Zeynep: Ya kullanıyorsun ama dediğim gibi ismini kullanmıyorsun hani dediğim gibi hani ben başlıyorum hani bu ispat yöntemini kullanıyorum ama orada ki kullanıma hani baktığın zaman belki de büyük ihtimal doğrudan ispat yöntemidir ama ben hiç kullanmıyorum direkt başlıyorum.

Mülakatçı: Burada isim olarak kullanmasan da kullanıyorsun aslında hani hiç kullanmadan yapılamaz mı diye soruyorum?

Zeynep: İspat yapılabilir mi... düşünüyorum da hani ilk aklıma gelen deneme yanılma yöntemidir hani oda ispat yöntemleri arasına girdiğine göre yapılmaz herhalde onun dışında. Çünkü benim hani aklıma gelen hani direkt ters örnektir hani ispatta oda zaten çelişki yöntemi ya da aksine örnek vererek ispat yöntemi hani yöntemler arasında o zaman yapılmaz diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?

Tümevarım-tümdengelim veya dolaylı-doğrudan ispat açısından düşünürsek.

Zeynep: Nasıl karar veriyoruz... doğrudan ispat... nasıl karar veririz. Ben pek kullanmadığım için hani isim olarak... dolaylı ispat, doğrudan ispat... Ya karar vermekten ziyade hani bakıyorsun hani aslında mesela eşitlikler olsun hani çift taraflı oluyor bir taraf başlıyorsun bir tarafa ulaşıyorsun ya da diğer taraftan başlıyorsun diğer sonucu bulamıyorsun ne bileyim öyle başlıyorum. Ya mesela genelde hani eşitlikler oluyor iki taraftan hani bunların birbirine eşit ol... hani bir taraftan başlayarak diğerine ulaşmaya çalışıyorsun hani burada düşünüyorsun hani buradan başlasam mı daha kolay ulaşırm yoksa hani direkt hani ilerleterek mi ya da düşünüyorsun hani eşitlik bu hani örnek versen hani bir örnekte bulabilir misin onun çelişki olduğunu hani ters bir örnek bulabilir misin eşitliği bozacak yani o şekilde düşünürüm ama nasıl karar veririm bilmiyorum herhalde... aslında ya bir kaç yolla hani deneyebiliyorsun hani doğrudan ispat yanında büyük bir ihtimal çelişkiyi de devamlı kullanıyoruz kendim öyle düşünüyorum ama nasıl karar veririz ya soruya göre değişebilir bence karar verme. Hani kolaylıkla görülebilecek bir çelişki yaratan bir şey varsa direkt zaten onu kullanırım ama hani yok direkt doğrudan ispatla hani ulaşmaya çalışırım ona eğer çok hani görülebilecek bir şeyse hani hiç yapmadan direkt hani

derim bu buna hani örnek veriyor zıt bir örnek oluyorsa oluyordur olmuyorsa doğrudan ispata başvururum.

Mülakatçı: *Zaten tümevarımı görmedik dedin o zaman onu hiç düşünmüyorsun ispatları yaparken.*

Zeynep: *Evet hiç, ne olduğunu çünkü bilmiyorum tümevarım yönteminin ne olduğunu bilmiyorum açıklçası.*

Mülakatçı: *Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?*

Zeynep: *Aslında hani nasıl diyeyim uu sorularla herhalde çok ispatla çok uğraşmak mı gerekir hani geliştirmek için, sonuçta hani belli bir süreden sonra oturur zaten hani bu bu yöntemle buna baş... Hani soruyu gördüğünde aklına gelebilir hani bunu bunla yaparsam hani daha kolay bir şekilde çözüme ulaşırım, aslında bana kalırsa birçok hani soruyu ispatlamaktan geçebilir, daha fazla el alışkanlığı olur, öyle olmaz mı. işte dediğim gibi bence fazlaca ispatla uğraşmaktan geçebilir diye düşünüyorum. Bu yöntemlerin tam olarak ne olduğunu iyi bir şekilde pekiştirmek olabilir, başkada bilmiyorum.*

Mülakatçı: *Sana bir ispat verilse buna nasıl bir başlangıç yaparsın veya bir başlangıç yapabilir misin?*

Zeynep: *Önce şöyle bir bakarım, şöyle bir düşünürüm nasıl yapabilirim diye hani eğer başlangıç yapabilir miyim eğer şahsen her ispata başlangıç yapamıyorum ama hani sorusundan sorusuna göre de değişir yani, ispatına göre hani ama illaki muhtemelen belli bir başlangıç yaparım hani bir yere kadar ilerlerim büyük ihtimal orda kalırım ya da sonuna kadar gelirim ama hiç başlayamam der miyim hiç başlayamama durumumda olabilir yani.*

Mülakatçı: *Peki nasıl bir başlangıç yapıyorsun, ne düşünüyorsun ilk aşamada?*

Zeynep: *İlk aşamada ne düşünüyorum eğer geometri adına hani ispat yapacaksak hani teorem aksiyom falan direkt şekil üzerinde hani görmeye çalışıyoruz hani şekil üzerinden ilerleyerek hani çizgisiyle.... düzlem geometri falan o şekilde yapıyorum ama bir analiz olsun bir diğerleri olsun nasıl başlıyoruz ya ne bileyim hani ifadeyi alıp ifade üzerinde oynayarak aslında ilerliyoruz yani doğru sonuca bilmiyorum öyle yani.*

Mülakatçı: Yani ilk ifadeyi alıyorsun...

Zeynep: Evet eşitlik halindeyse mesela ona göre ilerleyerek.

Mülakatçı: Ondan sonra mesela hani ismini kullanmasan da ispat yöntemi mi belirleniyor yoksa...

Zeynep: Ya evet ismini kullanmasak da artık orda hani sen belli bir ispat yöntemi kullanmış oluyorsun aslında ama hani isim olarak belirlemiyorsun hani direkt ilerliyorsun ama orda baktığın zaman bu ya da doğrudandır büyük ihtimal dolaylıdır hani oluyor ama biz belirlemeden direkt olarak başlıyoruz zaten ama yani her soru için düşü... bilmiyorum ama yani illaki bir yerden başlanır yani ispata hani sonucu gelmese de başlanabilir diye düşünüyorum, en azından bir fikir sahibi hani o konuyla ilgili fikrimiz varsa hani bu buradan buna yakınlaşabilir hani bunu buradan buna yakın sayabiliriz hani buradan buna ulaşabiliriz diyerek başlayabilirim yani diye düşünüyorum.

Mülakatçı: İspat başlatılıp yarıda bırakılsa tamamlamada sorun yaşar mısın veya nasıl tamamlarsın, nasıl bir yol izlersin?

Zeynep: Tamamlamada sorun yaşar mıyım. Eğer hani tam aşına değilsem hani kullanmıyorsam yaşarım hani gelirim hani bilm... hani sonuçta o ispatın hani seni doğru sonuca ulaştıracağını bilmiyorsan hani gerçekten o ispat doğru mu onu da bilmiyorsun yarıya kadar geldin hani baktın yapamıyorsun bırakırım yani, sonucuna ulaşmaya hani çalışırım ama çalışamazsam bırakırım demek derim ki hani ispata doğru başlayamamışım...

Mülakatçı: Mesela başlatıldı, sen yarıdan devam edeceksin.

Zeynep: Ettirebilir miyim hani konu hani bildiğim aşikar olduğum bir konu olursa hani devamını getirebilirim hani, doğru başlanmış bir ifadenin gelebilir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Nasıl devam ettirirsin?

Zeynep: Takip ederim hani başka ne yapılmış hani neye göre yapılmış hani hangi adımlarda kullanılmış hani nerden nasıl geçmiş hani o zaten hani şey sıra halinde devam ederse zaten o şekilde yani üstteki basamakları takip ederek yapmaya çalışırım.

Mülakatçı: Peki orda yönteme dikkat eder misin?

Zeynep: *İı etmem, onlara pek etmiyorum. Sadece adımlarını izlerim nasıl yapmış nasıl gitmiş ama hiç düşünmem ki bu doğrudan ispat mıymış dolaylı yoldan ispat mıymış düşünmem şahsen.*

Mülakatçı: *Sonuca ulaşmada bir sorun yaşar mısın?*

Zeynep: *Dediğim gibi yaşayabilirimde yaşamayabilirimde yani o değişebilir sonuçta ama yarıya kadar ispatlanmış bir şeyi hani hakimsem hani yapabilirsem hani konuyla ilgili sonucu muhakkak getiririm çünkü belli bir kısmı başlanmış zaten iş başlamaktır derler her zaman başlanmış bir şeyinde devamı getirilebilir bence diye düşünüyorum sonuca ulaşılır diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Bu yöntemlerin anlatımı için ayrılan süre sence yeterli mi?*

Zeynep: *Mesela şunlar için düşünüyorum ifade halinde yazdık ondan sonra geçtik yani o kadar bence yeterli bir süre ayrılmıyor ispat yöntemlerine hani mesela belki de bende bu yüzden bilmiyorum hani aslında hani ben soruda kullanıyorum ama kullandığım dolaylı ispat mı doğrudan ispat mı olduğunu belki de o yüzden bilmiyoruzdur yani çünkü yeterince belli bir süre ayrılmıyor hem de hiç ayrılmıyor gibi bir şey yani, konu başlığı olarak veriliyor bu bu ispat yöntemi hadi bildik hadi geçelim öyle oluyor bence öyle oluyor yani bir ders saati boyunca bile ayrılmıyor sonuçta.*

Mülakatçı: *Soru çözümlerine?*

Zeynep: *Ya soru çözümlerine de sonuçta biz hani bir şey ispatlayacaksa onu ispatlıyoruz hani mesela hani bunlar başta bir kere anlatım olarak anlatılmıyor mesela sen soruya ispat yaparken bunu ispatlayın diyorsun hani hocalarımız mesela diyor hadi bunu ispatlayalım diyor nerden geliyor direkt ispatımızı yapıyoruz ama hani bu yöntemler ne, ne değil hani bunun açıklaması ne biz aslında burayı ispatlıyoruz ama hangi yöntemle aslında bunları pek bilmiyoruz. Çünkü konu anlatımı olarak hani mesela ispat budur hani bizim ispatladığımız yöntem bunun açıklaması budur şeklinde hani bu ispatı yapıyoruz ama bu ispatın bu olduğunu mesela budur diyemiyoruz yani çünkü yeterli bir şekilde şey yapılmıyor ispatlar anlatılmıyor.*

Mülakatçı: *Peki o konuda sorun yaşamıyor musun mesela hangi yöntemi kullandığını bilmeden işlemleri yapmada?*

Zeynep: *Yo çünkü ne bileyim sonuçta devamı şeklinde geliyor yani başladıktan sonra buradan başladıktan sonra... Çünkü ben hiçbir zaman şu ana kadar düşündüğümde hani doğrudan ispatla dolaylı ispatla ispatlayalım hani bu yöntemle ispatlayalım diye bir şey kullanmıyoruz ne bileyim yeterince bir aşinalık yok bence ispat yöntemleri bence pek bilinmiyor yani ispatlıyoruz ama neye göre ispatlıyoruz kime göre ispatlıyoruz aslında onlar pek bilinmiyor diye düşünüyorum.*

Mülakatçı: *Sizlerin bu yöntemleri daha iyi anlayabilmeniz ve daha iyi kullanabilmeniz için neler yapılabilir? Önerilerin nedir?*

Zeynep: *Nasıl bir öneri... bence hani bu ispat yöntemi ilk önce böyle bir hiç böyle buraya geldiğimizde bize sonuçta bizim işimiz ispat burada hani bir şeylerin mantığını öğrenmeye çalışıyoruz bu ispat yöntemlerinin bize bence çok iyi bir şekilde anlatılması lazım hani biz soruya başlamadan önce her şekilde tamam ben bu soruyu gördüm ispata başlayayım ama hangi ispatı kulla... hani onu kesin olarak kestirmemiz gerekiyor yani bunun içinde bunların en başından iyi bir şekilde anlatılması ve kafamıza oturması gerekiyor ki hani tamam herkes ispatlayabiliyor ama hangi yöntemle ispatlıyorsun neyle ispatlıyorsun hani bunları bilmemiz içinde bunların en başından hani daha hani okulumuzun en başından güzel bir şekilde anlatılması gerekiyor çünkü biz burada 5 seneyiz ve 5 sene boyunca ispatı kullanacağız ama neyin ne olduğunu bilmeden ispatı kullanıyoruz diyebilirim.*

Mülakatçı: *Matematiksel ispat yöntemleri hakkında sizlerin görüşlerini almak için hazırlanan bu sorular sence yeterli mi? Eklenmesi gereken ifadeler olduğunu düşünüyor musunuz? Bunlar nelerdir?*

Zeynep: *Ne olabilir başka, bence başka bir şey olamaz çünkü zaten belki bilmiyorum ama aslında herkes ispat yapıyor hani daha başka bir şey olacağını zannetmiyorum hani, ispatı önümüze verip hani onu çözmek gibi bir şey yok çünkü çoğu kişi çözer zaten bence sorular yeterli olabilir.*

Mülakatçı: *Eklemek istediğin bir şey var mı?*

Zeynep: *Yani sadece söyleyebileceğim hani bunları hani biliyoruz hani ispat yapıyoruz ama bunların neyin ne olduğunu bilmiyoruz bence bunların daha iyi bir şekilde kavranması lazım. İspat yapıyoruz ama neyi nere göre yapıyoruz onu bizde bilmiyoruz yani bunların bence en başından öğrenilmesi lazım başkada ispat hakkında pek bir şey*

söyleyemem. Ya öğrenci sıcak bakıyor mu hani biz kendi açımızdan hani böyle bizimde kolayımıza geliyor aslında ispat yapılmadan hani geçilsin falan ama hani ispat yapılıncaya hani diyorsun bu buradan geliyormuş benim hiç bilmediğim bir şey sonuçta ama hani yapılmaması da bazen öğrencinin kolayına geliyor bizim için hani bazı ispatlar oluyor baya baya sürüyor sonuçta hani hoca diyor ispatlayalım falan bizim dediğimizden dolayı tamam bir öncekine benziyor bunu yapmayalım falan, bazen bizim açımızdan şeyde olabiliyor sıkıcıda olabiliyor yani hani tamam sırf uzunluğundan hani yoruculuğundan kaçıp hani öğrenmeyelim biz bildiğimiz gibi işleyelim diyoruz da.

Mülakatçı: Peki hoca ispatları yaptıktan sonra ezber yoluna mı gidiyorsunuz yoksa mantık kurarak mı öğreniyorsunuz?

Zeynep: Ben kendi açımdan düşünürsem mantığını kavrayarak yapıyorum hani diyorum hani bu buradan gelmiş tamam hani başlıyorsun zaten o hani bir kere başladıktan sonra ama şöyle bir şeyde var hani onun hoca hiç ispatını yapmasaydı ben onu yapabilir miydim orayı bilmiyorum ama hoca bir kere göstermiş onun aşinalığı da var hani o ezber oluyor mu bilmiyorum ama hoca sayesinde nerden başlayacağını soruya biliyorsun ama ezberlemek mi oluyor onu bilmiyorum ama hani başladığı noktayı bildikten sonra hani gerisini hiç takip etmeden kendim yapabiliyorum ama başlangıç noktası hani gerekiyor hani hoca vermeden bilmiyorum ben başlayabilir miyim öyle düşünüyorum.

Mülakatçı: Aslında senin ki ezber olmuyor galiba, çünkü ezber dediğimiz aynen ezberleniyor ya, ne yapıldığını anlamadan.

Zeynep: Yok o şekilde yapmam, o sırf sınav mantığı oluyor hani ispatlar bize de soruluyor bazen hani dediğim gibi ... bu hani buradan geliyor mesela türevde mesela türevin limitle ilgili formülü var hani o şekilde biz türevlenmiş olduğunu kanıtlayabiliyorduk ispatlıyorduk hani ben diyorum ki bunu kullanarak ben bunun sonucuna ulaşabilirim tamam sonra bırakıyorum direkt onu alıyorum elime zaten formülle bazı şeyleri yerine koyunca direkt gerisi kendi geliyor hiç ezberlemeye falan gerek kalmıyor bence ama bir kere yeterince hani aklımda bulunması lazım ki bu buna nerden başlamıştık biz onu bildikten sonra gerisini ben ezberlemeye gerek duymuyorum mantıklı bir şekilde ilerleyebiliyorum, öyle.

Zeynep ile gerçekleştirilen klinik mülakat şu şekilde özetlenebilir,

Zeynep, matematiksel ispat yöntemleri olarak tümevarım, tümdengelim, doğrudan ispat ve dolaylı ispat yöntemlerini hatırlamıştır. Zeynep'e hatırlayamadığı ispat yöntemlerini hatırlatmak için ispat yöntemleri şema halinde gösterilmiştir. Zeynep, aksine örnek verme ve deneme yöntemlerini önceden görmediklerini, aksine örnek vermeyi çelişki yönteminde kullandıklarını, tümevarımı sadece isim olarak bildiklerini, derslerinde daha çok doğrudan ispat ve çelişki yöntemini kullandıklarını, kendisinin de daha çok doğrudan ispat ve çelişki yöntemini kullandığını belirtmiştir. Matematiksel ispat yöntemlerinin doğruluğu sağlamak, ezberi ortadan kaldırmak ve ispata uygun bir başlangıç yapabilmek için gerekli olduğunu düşünmektedir. Bir ispatın birbirinden farklı ispat yöntemleriyle yapılabileceğini; fakat her ispat yönteminin her soruda kullanılamayacağını iddia etmiştir. İspat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirlemenin çok önemli olmadığını, yöntemi belirlemeden de ispat yapılabileceğini, belirlemenin kolaylık sağlama açısından önemli olabileceğini fakat kendisinin belirleyerek yapmadığını açıklamıştır. Matematiksel bir ispat yaparken eğer çelişki direkt görülüyorsa zıt bir örnek verebileceğini, görülüyorsa doğrudan ispat yapabileceğini, tümevarımı bilmediği için ispatları yaparken hiç göz önüne almadığını beyan etmiştir. Matematiksel bir ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirebilmenin yollarının çok ispat yapmak ve ispat yöntemlerini tam olarak kavramak olduğunu vurgulamıştır. Verilen bir ispata başlangıç yapması istendiğinde ifadeyi alıp üzerinde oynamalar yapacağını fakat hangi ispat yöntemi ile yapacağını düşünmeyeceğini; yarıda bırakılıp tamamlanması istenen bir ispatta ise konuya aşına değilse belki de ispatı devam ettiremeyeceğini, aşına ise devam ettirebileceğini, devamını da üstteki basamakları kontrol ederek yapabileceğini söylemiştir. İspat yöntemlerinin anlatımı için ayrılan sürenin yeterli olmadığını, yöntemleri belki de o yüzden bilmediğini, konu başlığı olarak verilip geçildiğini, üzerinde durulmadığını, ispat yaparken de ispatın direkt yapılıp geçildiğini, hangi ispat yönteminin kullanıldığından ve ispatın nasıl yapıldığından bahsedilmediğini, neye göre ispat yapıldığından haberdar olmadıklarını ifade etmiştir. Bu yöntemlerin daha iyi anlaşılıp kullanılabilmesi için ispat yöntemlerinin üniversiteye başlanıldığında çok iyi bir şekilde anlatılması gerektiğini dile getirmiştir.

Zeynep ile gerçekleştirilen klinik mülakatla ilgili araştırmacı görüşleri aşağıdaki gibidir,

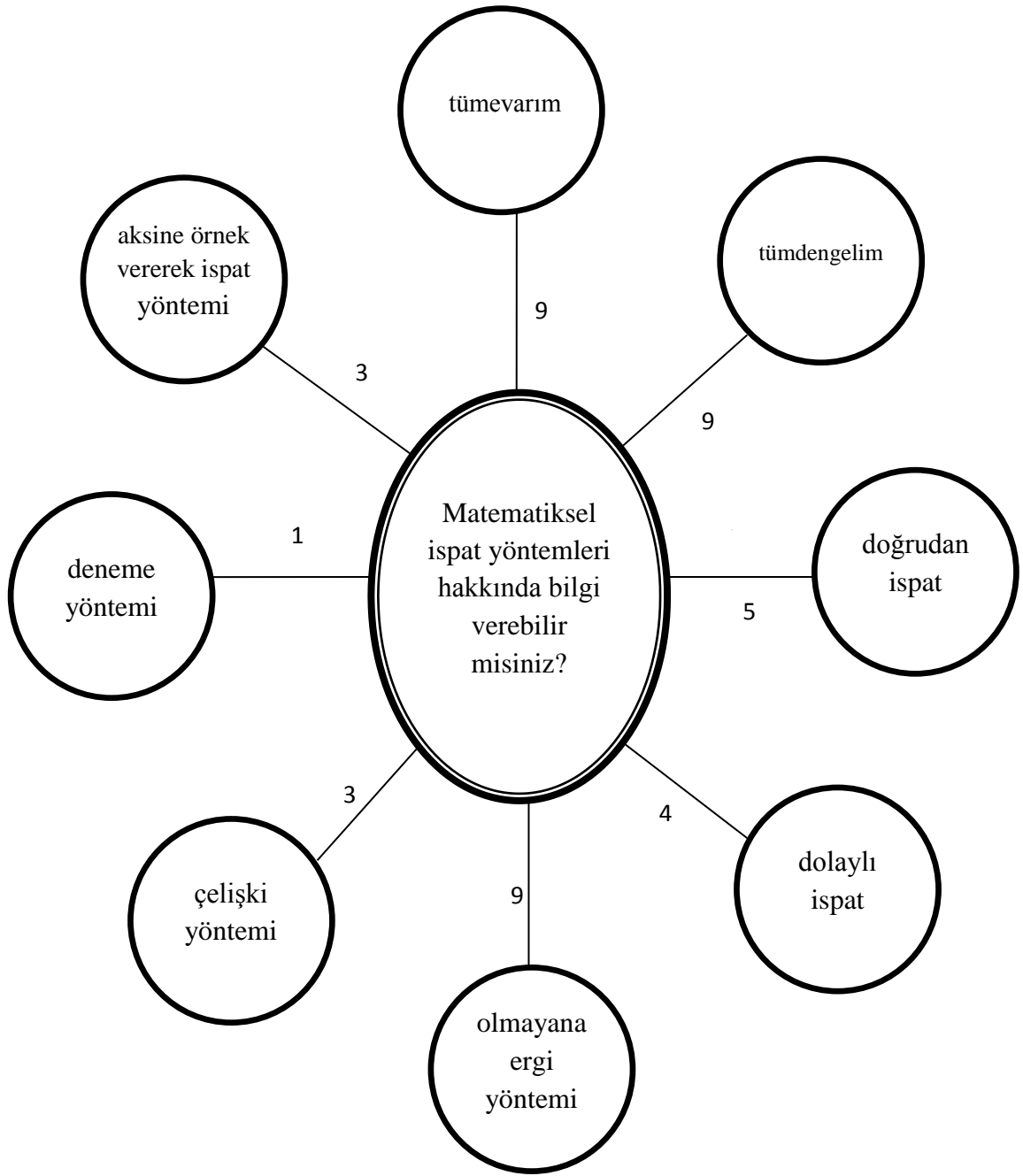
Zeynep, ispat yöntemleri hakkında yeterli bir bilgiye sahip değildir. İspat yöntemlerini bilmenin gerekli olduğu düşüncesine sahiptir; fakat ispat yöntemlerini tam olarak bilmediği için kullanamamaktadır ve bunun eksikliğini hissetmemektedir. Öğrenim hayatı başarılı geçen Zeynep'in ispat ve ispat yöntemlerine bakış açısının da olumlu olması beklenir; fakat ispat yöntemlerini bilmemesi onun ispat yaparken ispat yöntemini düşünmeye karşı önyargılı olmasını sağlamıştır. Belki daha ilerleyen sınıflarda bu yöntemleri anladıkça bakışı değişecektir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Araştırmanın bu bölümünde ortaöğretim matematik öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleriyle ilgili görüşlerinden elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

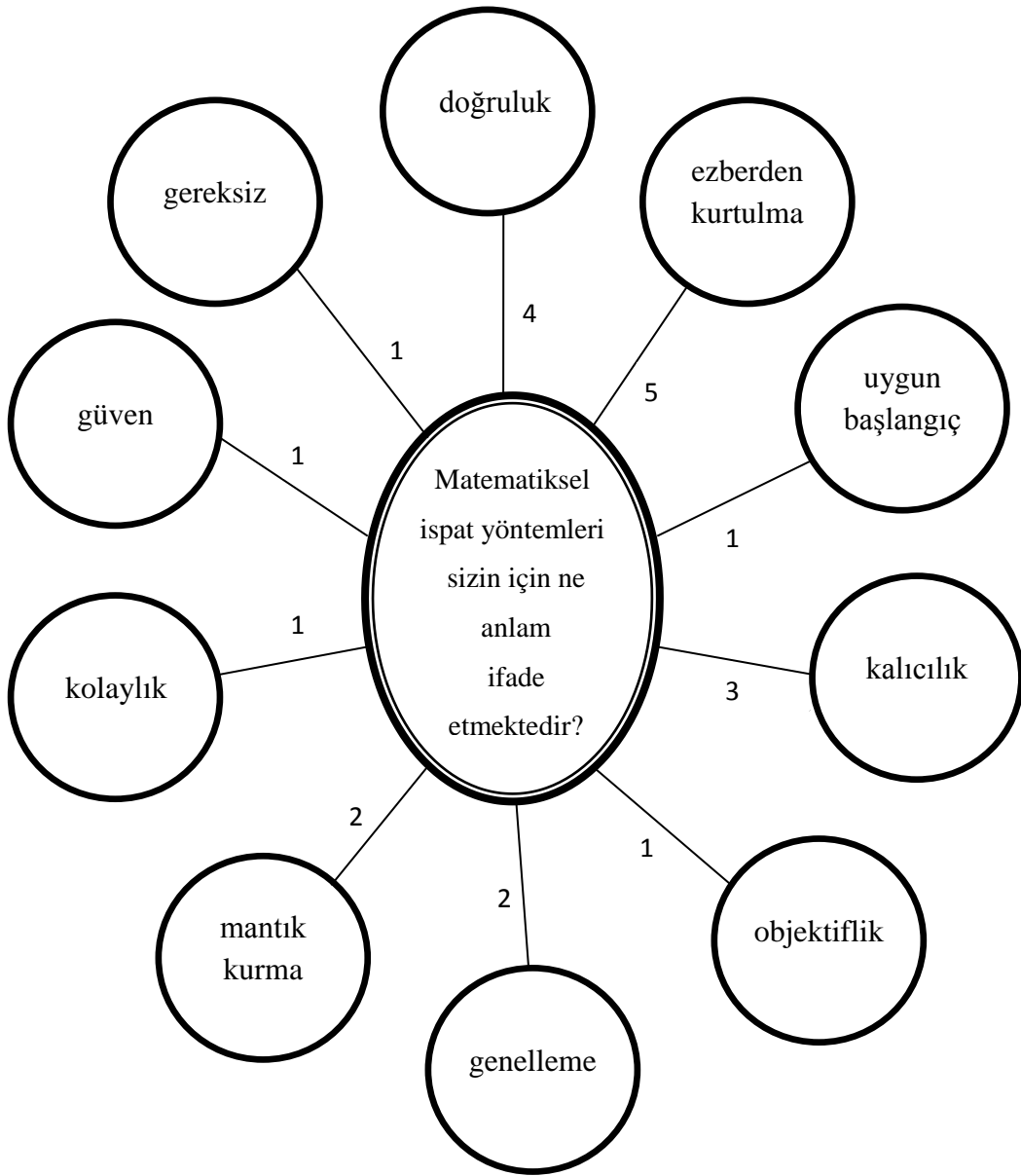
Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinden matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerini almak için onlara "Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?" şeklinde bir soru sorulmuştur. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar; tümevarım (Zeynep, Selim, Erkan, Pınar, Berke, Taner, Hümeysra, Gökhan, Canan), tümdengelim (Zeynep, Selim, Erkan, Pınar, Berke, Taner, Hümeysra, Gökhan, Canan), doğrudan ispat (Zeynep, Eda, Berke, Gökhan, Canan), dolaylı ispat (Zeynep, Eda, Berke, Canan), olmayana ergi yöntemi (Selim, Erkan, Pınar, Eda, Berke, Taner, Hümeysra, Gökhan, Canan), çelişki yöntemi (Erkan, Berke, Hümeysra), deneme yöntemi (Berke), aksine örnek vererek ispat yöntemi (Eda, Berke, Hümeysra) kategorileri altında toplanmıştır. Öğrencilerin genelde ispat yöntemlerini isim olarak hatırladıkları görülmüştür. Özellikle tümevarım, tümdengelim ve olmayana ergi yöntemleri hemen hemen bütün adaylar tarafından hatırlanmıştır. Deneme yöntemi ise sadece bir aday tarafından hatırlanmıştır. Fakat ispat yöntemlerinin içeriği öğrencilerin çoğu tarafından net bir şekilde hatırlanamamıştır. Bazı öğrenciler ispat yöntemlerini tanım olarak ifade edemeseler de işlemsel olarak yapabileceklerini ifade etmişlerdir. Buda Baker (1996) tarafından yapılan çalışmada tümevarım ile ilgili yer alan "Çoğu öğrencinin matematiksel tümevarımın kavramsal yönünden daha çok işlemsel yönüne odaklandığı belirlenmiştir." sonucu ile tutarlıdır. Aşağıdaki şema bu kategorileri ve kaç kişinin belirtilen kategoride olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.1 Öğrencilerin ispat yöntemleri hakkında verdikleri bilgi

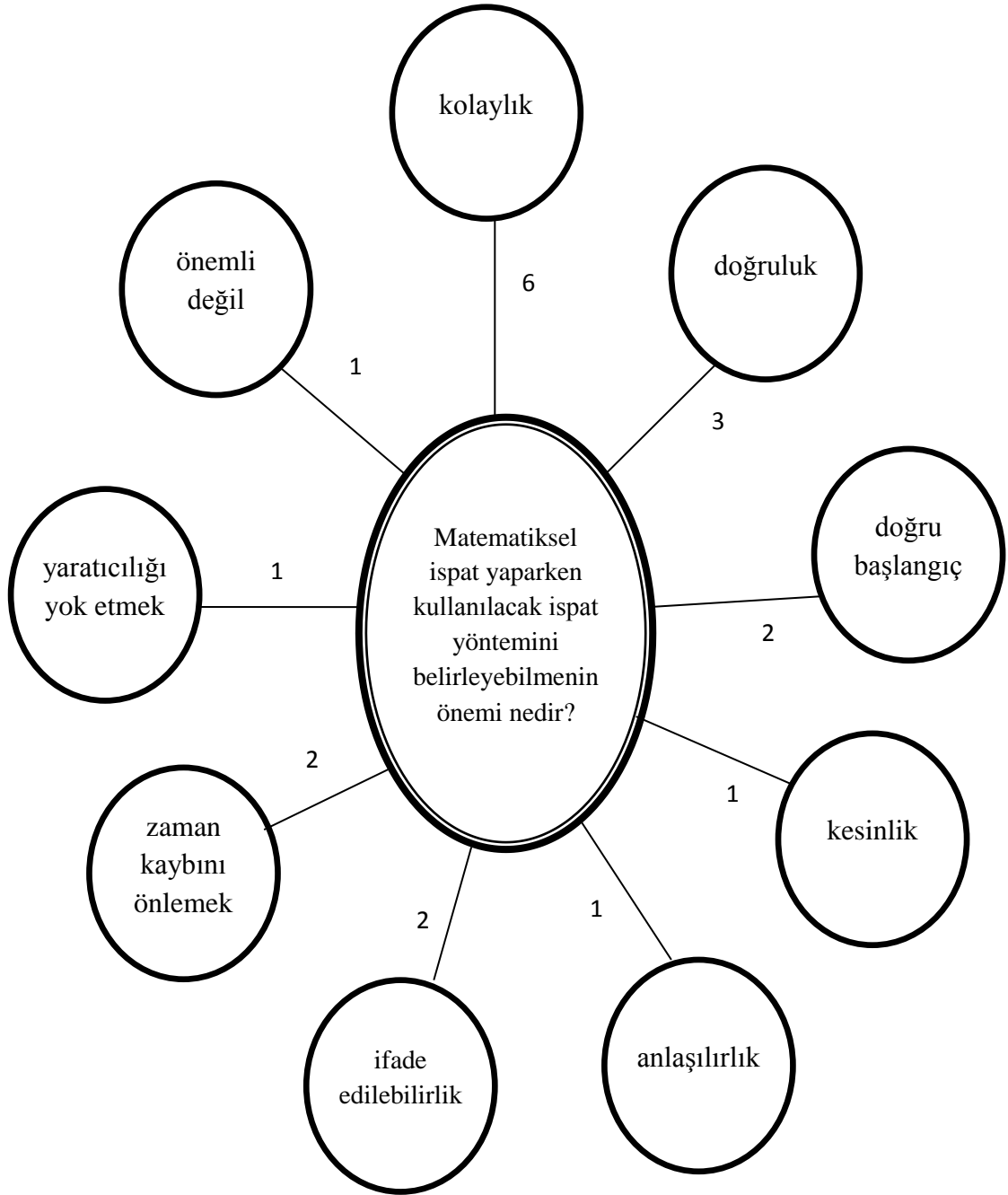
Öğrenciler için matematiksel ispat yöntemlerinin ne anlam ifade ettiğini öğrenmek için, onlara "Matematisel ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade ediyor?" şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar; doğruluk (Zeynep, Erkan, Berke, Gökhan), ezberden kurtulma (Zeynep, Selim, Berke, Taner, Hümeýra), uygun başlangıç (Zeynep), kalıcılık (Selim, Hümeýra, Gökhan), objektiflik (Erkan), genelleme (Pınar, Taner), mantık kurma (Pınar, Berke), kolaylık (Eda), güven

(Gökhan), gereksiz (Canan) kategorileri altında toplanmıştır. Canan dışında öğrenciler olumlu görüşlere sahiptir. Canan ise matematiksel ispat yöntemlerini bilmenin gereksiz olduğunu; çünkü öğretmen olduklarında bu yöntemleri kullanmayacaklarını belirtmiştir. Olumlu görüşe sahip öğrencilerin bu soruya verdikleri cevapların en çok ezberden kurtulma kategorisi altında toplandığı görülmektedir. Yani öğrenciler ispat yöntemlerini bilmenin ve kullanmanın onları ezber yapmaktan kurtaracağını düşünmektedirler. Aşağıdaki şema bu kategorileri ve kaç kişinin belirtilen kategoride olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.2 Öğrenciler için ispat yöntemlerinin ne anlam ifade ettiği

Matematiksel bir ispat yaparken kullandıkları ispat yöntemlerini belirleyebilmenin önemine yönelik görüşlerini belirleyebilmek için öğrencilere, "Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?" sorusu yöneltilmiştir. Öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplar; kolaylık (Zeynep, Selim, Erkan, Pınar, Eda, Gökhan), doğruluk (Selim, Berke, Taner), doğru başlangıç (Erkan, Berke), kesinlik (Pınar), anlaşılabilirlik (Eda), ifade edilebilirlik (Eda, Hümeysra), zaman kaybını önlemek (Hümeysra, Gökhan), yaratıcılığı yok etmek (Canan), önemli değil (Zeynep) kategorileri altında toplanmıştır. Öğrencilerin çoğunluğu matematiksel bir ispat yaparken ispat yöntemini belirleyebilmenin önemli olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir; fakat Canan ve Zeynep olumlu görüşe sahip değildir. Canan ispat yöntemlerini belirlemenin yaratıcılığı öldürdüğünü, Zeynep ise ispat yöntemini belirlemenin önemli olmadığını, yöntem belirlemeden de ispat yapabileceğini söylemiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğu matematiksel bir ispat yaparken ispat yöntemini belirlemenin ispat yaparken kolaylık sağlayacağını belirtmiştir. Aşağıdaki şema bu kategorileri ve kaç kişinin belirtilen kategoride olduğunu göstermektedir.

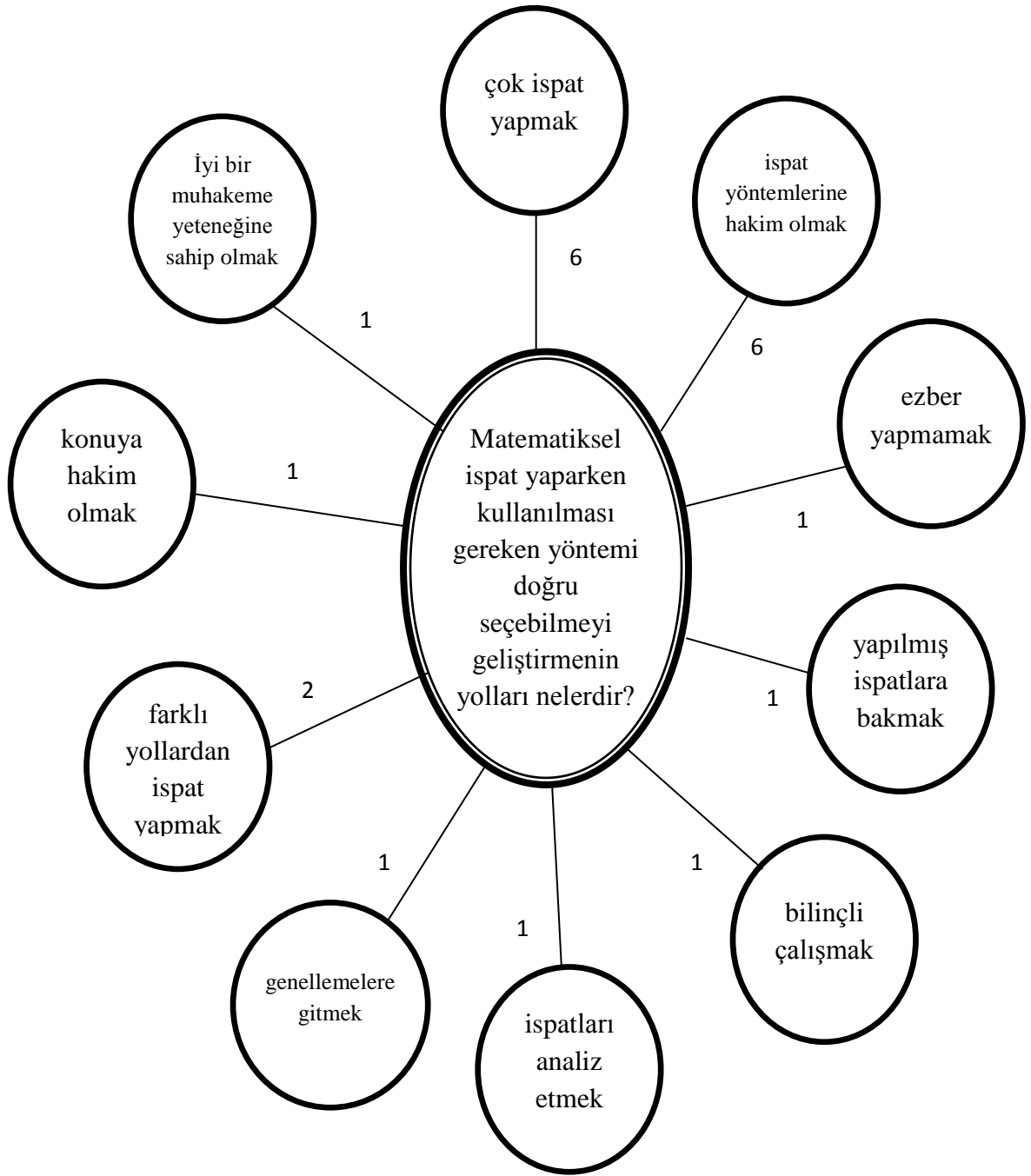


Şekil 5.3 Kullanılması gereken ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi

Öğrencilerin matematiksel bir ispat yaparken hangi yöntemi kullanacaklarına nasıl karar verdikleri yönündeki görüşlerini almak için öğrencilere, "Matematiksel bir ispat yaparken hangi yöntemin kullanılacağına nasıl karar verirsiniz?" sorusu yöneltilmiştir. Öğrenciler bu konuda fikir beyan etmeye çalışmışlardır; fakat Canan,

önceki ispatlarda gördüğü kalıp yargıları görünce aynı şekilde yapmaya çalıştığını ve bunu birazda ezber yaptığını; 1. sınıf öğrencileri olan Selim ve Zeynep ise ispatları yaparken ispat yöntemlerini çok düşünmediklerini söylemişlerdir. Öğrencilerin çoğu bu konuda yeterli bir görüşe sahip değildir. Öğrencilerin görüşleri, Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarındaki öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı bulgularıyla örtüşmektedir.

Matematiksel ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları hakkında öğrencilerin görüşlerini almak için öğrencilere, "Matematiksel ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?" sorusu yöneltilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar; çok ispat yapmak (Zeynep, Pınar, Berke, Taner, Hümeysra, Gökhan), ispat yöntemlerine hakim olmak (Zeynep, Selim, Berke, Hümeysra, Gökhan, Canan), ezber yapmamak (Selim), yapılmış ispatlara bakmak (Erkan), bilinçli çalışmak (Eda), ispatları analiz etmek (Eda), genellemelere gitmek (Berke), farklı yollardan ispat yapmak (Erkan, Pınar), konuya hakim olmak (Canan), iyi bir muhakeme yeteneğine sahip olmak (Canan) kategorileri altında toplanmıştır. Öğrencilerin çoğunluğu matematiksel ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin çok ispat yapmak ve ispat yöntemlerine hakim olmakla sağlanacağını düşünmektedir. Ayrıca öğrencilere sonda soru olarak sorulan "İspata doğru bir başlangıç nasıl yapabilirsiniz?" sorusuna öğrenciler genel olarak ispat yöntemini belirleyerek cevabını vermiştir. Bu sonuç Güler (2013), "Öğretmen adayları verilen bir ifadeyi ispatlayabilmek için nasıl bir yaklaşım izlemeleri gerektiğine genelde ispat yöntemine göre karar vermektedirler. Verilen ifadeye göre ispat yöntemine karar verdikten sonra ispatı oluşturduklarını ifade etmişlerdir." sonucu ile tutarlıdır. Aşağıdaki şema "Matematiksel ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?" sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardan oluşturulan kategorileri ve kaç kişinin belirtilen kategoride olduğunu göstermektedir:



Şekil 5.4 İspat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları

Öğrencilerin sınıf düzeylerine göre ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri incelendiğinde, genel olarak 5. sınıftaki öğrenciler ispat yöntemleri hakkında daha fazla görüş beyan edebilmekteyken, 1. sınıf öğrencilerinin ispat yöntemleri hakkındaki

görüşleri daha kısıtlıdır. Yani sınıf düzeyi düştükçe ispat yöntemleri hakkındaki farkındalıkta azalmaktadır. Fakat bunun istisnaları görülmektedir. Örneğin; 2. sınıf öğrencilerinden Erkan ispat yöntemleri hakkında çok geniş bir bilgiye sahipken, yine 2. sınıf öğrencisi olan Pınar çok kısıtlı bilgiye sahiptir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin çoğu ispat yöntemlerinin ispat yapmada önemli bir yere sahip olduğunu düşünmektedir. Bu yüzden, öğrencilerin ispat yöntemlerini kullanmanın gerekliliği ilgili görüşleri genelde olumlu yöndedir; fakat ispat yöntemlerini etkin bir şekilde kullanmakta sorun yaşamaktadırlar. Derslerde ispat yöntemlerine ayrılan sürenin yetersiz olduğunu düşünmektedirler. Ortaöğretim matematik öğretmeni olacak öğrencilerin matematiksel ispat yöntemleri hakkında yeterli bilgiye sahip olması, bu ispat yöntemlerini kullanabilmeleri ve bu yöntemler hakkında olumlu görüşe sahip olmaları önemlidir. Çünkü lise ve üniversite programında ispat yöntemleri yer almaktadır. Sürenin azlığı öğrencileri ispatların mantığını anlamadan ezberle yönelmektedir. O yüzden ispat yöntemlerine ayrılan sürenin artırılması gerekmektedir ya da öğrenciler ilk üniversiteye başladıklarında ispat yöntemleri adı altında bir ders almalıdırlar. Aynı zamanda ispat yapılırken öğrencilere, kullanılması gereken ispat yöntemi buluş yoluyla buldurularak ve ispat yöntemleri birbirleriyle karşılaştırmalı olarak öğretilerek derslerin ezberden çıkarılıp verimli hale getirilmesi gerekmektedir. Ayrıca ispat yöntemleri ile ilgili farklı çalışmalar yapılarak ispat yöntemlerini bilmenin ispat yapmadaki rolü ve önemi üniversite öğrencilerine kavratılmalıdır.

KAYNAKÇA

- Albayrak Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890.
- Almeida, D. (2003). “Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479–488.
- Altıparmak, K., ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*. 6 (1), 25-37.
- Baker, J. D. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical induction*. Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılığı, 4. Baskı, Ankara.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Coe, R., and Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41–54.
- Conradie, J., and Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 225-235.
- Corbin, J. M., and Strauss, A. C. (2007). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Çallıalp, F. (1999). Örnekler ile soyut matematik. Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.

- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof with sketchpad. *Pythagoras*, 24, 17–24
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109.
- Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 285–304.
- Dubinsky, E., and Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The generic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 55–92.
- Dunlap, H. D., Erdoğan, E. Ö., ve Kılıç, Ç. (2008). Matematiksel tümevarım: karşılaşılan kavram yanılgıları ve öğrenme güçlükleri. M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (s.291-328). Ankara. PegemA Yayıncılık.
- Frasier, B. J. (2010). *Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Massachusetts Lowell.
- Gentew, L. Y. H. (2005). *An evaluation of a teaching approach to improve students' understanding of mathematical induction*. Dissertation Presented A Part Fulfillment Of The Requirement Of The Degree Of Master Of Education The University Of Hong Kong.
- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J.Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III* (pp.284–307). AMS.
- Gökkurt, B., ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Journal of Research in Education and Teaching*, 1(4), 56-64.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

- Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Orta öğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219–236.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Hanna, G., and Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A.J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.877-908).
- Harel, G. (2002). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, and R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction* (pp.185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Harel, G., and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education, III* (pp.234-283). AMS.
- Heinze, A., and Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy.
- İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- İskenderoğlu, T. A., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenilirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.

- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.
- Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Knuth, E.J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 5(1), 61–88.
- Knuth, E. J. (2002c). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 379–405.
- Köğçe, D. (27-30 Haziran 2012). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri*, x. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Niğde.
- Lincoln, Y. S. and Guba E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Martin, G., and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41–51.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2005a). *İlköğretim Okulu Matematik Dersi 6-8 Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2005b). *Ortaöğretim (9–12). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013a). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8 Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013b). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9-12. Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Mingus, T. Y., and Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 8, 438–444.
- Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 14(1), 147–160.
- Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 253–268.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Öçal, M. F., ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 318–323.
- Özer, Ö., ve Arıkan, A. (2001). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. http://infobank.fedu.odtu.edu.tr/ufbmek-5/netscape/b_kitabi/PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf. adresinden 8 Temmuz 2013'te alınmıştır.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (16-18 Eylül 2002). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri, Ankara.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Recio, A. M., and Godino, J. D.(2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-89
- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 252-255.

- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 55–80.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., and Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Tall, D. (1979). *Qualitative thought processes in clinical interviews*. Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Warwick, England.
- Tall, D. (1998a, August) . *The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?* Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, USA.
- Tall, D. (1998b). The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world* (pp. 117-136).Chicago.
- Tall, D., and Barnard, T. (2003). *Cognitive units, connections and mathematical proof*. Paper given at 9th National Congress of AMESA.
- Tucker, T. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary Issues in Mathematics education*, 36, 31-35.
- Turner, J. W. (2010). A brief introduction to proofs. <http://persweb.wabash.edu/facstaff/turnerw/writing/proofs.pdf> adresinden 9 Temmuz 2013'te alınmıştır.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. IUMPST: The Journal. Vol 1 (Content Knowledge), [www.k-12prep.math.ttu.edu].
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.
- Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof, MAA Online: Research Sampler, http://www.maa.org/t_and_1/sampler/rs_8.html.

- Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th* (pp.14–18). Bergen, Norway.
- Weber, K (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F. Hitt, G. Harel and A. Selden (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, VI* (pp.197 -232). AMS.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Zaskis, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 429-439.

EKLER**EK 1. Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin Görüş Formu**

1. Matematiksel ispat yöntemleri hakkında bilgi verebilir misiniz?
2. Matematiksel bir ispatı yaparken kullandığınız matematiksel ispat yöntemleri sizin için ne anlam ifade etmektedir?
3. Matematiksel ispat yaparken kullanılacak ispat yöntemini belirleyebilmenin önemi nedir?
4. Matematiksel ispat yaparken hangi yöntemi kullanacağınıza nasıl karar verirsiniz?
5. Matematiksel ispat yaparken kullanılması gereken yöntemi doğru seçebilmeyi geliştirmenin yolları nelerdir?

EK 2. Kişi Tanıtım Formu**Kişi Tanıtım Formu**

Adı Soyadı:

Doğum Tarihi:

Sınıfı:

Memleketi:

Öğrenim Hayatınızda Başarınızı Kısaca Betimleyiniz:

Öğrenim Hayatınızda Matematik Başarınızı ve Matematiğe Karşı Tutumunuzu Kısaca Betimleyiniz:

Matematik Öğretmenliğini Seçim Amacınız:

İlgi Alanlarımız:

Matematikte İlgi Alanlarımız:

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. Lisans öğrenimini ise Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamlayarak, 2011 yılında mezun oldu. 2011-2012 Eğitim Öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.