**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

# İNTEGRALLERİN CESÀRO TOPLANABİLMESİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

**Duygu KEBAPCI**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. İbrahim ÇANAK**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Bilim Dalı Kodu : 403.03.01**
**Sunuş Tarihi : 27.08.2013**

**Bornova-İZMİR**

**2013**

Duygu KEBAPCI tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "İNTEGRALLERİN CESÀRO TOPLANABİLMESİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 27.08.2013 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:** **İmza**

**Jüri Başkanı : Doç. Dr. İbrahim ÇANAK**

**Raportör Üye :**

**Üye :**

# ÖZET


## İNTEGRALLERİN CESÀRO TOPLANABİLMESİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER


KEBAPCI, Duygu

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK
Ağustos 2013, 41 sayfa

Bu tez kapsamında integrallerin Cesàro toplanabilmesi için bazı Tauber tipi teoremlerin verilmesi amaçlanmıştır. Giriş bölümüyle birlikte üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde klasik Tauber teorisinin kısa bir özeti verilmiştir.

İkinci bölümde Cesàro toplanabilme metotu tanıtılıp, gerekli tanım ve gösterimler verilmiştir. Daha sonra ispatlarda kullanılacak Lemmalar ve ispatları verilmiştir.

Son bölümde ise Cesàro toplanabilme metotu için öncelikle yavaş salınımlığın Tauber tipi koşul olduğu bazı teoremler ve sonuçları ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Son olarak, salınım davranışlarının kontrol modülosu yardımıyla elde edilen bazı Tauber tipi teoremler ve ispatları verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Tauber teoremleri, Cesàro ortalaması, kontrol modülo, yavaş salınımlı diziler.

# ABSTRACT

## TAUBERIAN THEOREMS FOR CESÀRO SUMMABILITY OF INTEGRALS

KEBAPCI, Duygu

MSc in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim ÇANAK
August 2013, 41 pages

In this thesis, it is aimed to give some Tauberian theorems for Cesàro summability of integrals. With the introduction, the thesis consists of three chapters.

In the first chapter, a short summary of classical Tauberian theory is given.

In the second chapter, Cesàro summability is introduced and necessary definitions and notations are given. Later, lemmas used in the proofs and their proofs are given.

In the last chapter, some theorems and their corollaries are given together with their proofs for which slow oscillation is a Tauberian condition for Cesàro summability method. Finally, some Tauberian theorems and their proofs are given by means of control modulo of oscillatory behavior.

**Keywords:** Tauberian theorems, Cesàro mean, control modulo, slowly oscillating sequences.

**TEŞEKKÜR**

Bu tez hazırlama sürecinde çalışmalarımda bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım Doç. Dr. İbrahim ÇANAK'a, ayrıca benim için çok değerli olan görüş ve yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ERDEM'e ve Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER'e çok teşekkür ederim.

Beni daima destekleyen her zaman arkamda olduklarını hissettiren aileme ve tüm sevdiklerime yürekten teşekkür ederim.

Derslerden başlayıp savunma dahil her dönemde yanımda olan arkadaşım Ferhat HASEKİLER'e hiçbir zaman eksik etmediği desteğinden ve arkadaşlığından dolayı çok teşekkürler.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ....................................................................................................v

ABSTRACT ........................................................................................ vii

TEŞEKKÜR ........................................................................................ix

1. GİRİŞ ..................................................................................................1

1.Klasik Tauber Teorisinin Kısa Bir Özeti ...........................................1

2. TEMEL KAVRAMLAR ....................................................................4

2.1 Temel Tanım ve Gösterimler ............................................................4

2.1 Lemmalar ..........................................................................................8

3. İNTEGRALLERİN CESÀRO TOPLANABİLMESİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER. .....................................................................................16

3.1 Yavaş Salınımlığın Tauber Tipi Koşul Olduğu Bazı Teoremler ....................16

3.2 Salınım Davranışlarının Kontrol Modülosu Yardımıyla Elde Edilen Bazı Tauber Tipi Teoremler ..................................................................24

KAYNAKLAR DİZİNİ ..........................................................................39

ÖZGEÇMİŞ ...........................................................................................41

# 1. GİRİŞ

Matematikte ıraksak seri yakınsak olmayan sonsuz seri anlamına gelir. 1828 yılında Abel ıraksaklığa “şeytanın icadı” derken aslında çok da haksız sayılmazdı. Şimdi bu durumu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

şeklinde tanımlı Grandi Serisi ile açıklamaya çalışalım.

İlk olarak bu toplamı farklı gruplayarak,

$$s = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

$$s = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$$

şeklinde iki farklı toplam elde edilir. Bu, serinin yakınsak olmadığı anlamına gelir. Kısmi toplamlar dizisi düşünülürse, bu serinin kısmi toplamlar dizisinin 0 ile 1 arasında salınım yaptığı söylenebilir. Şimdi ise bunlardan farklı olarak,

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - s$$

elde edilir ve buradan da,

$$s = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

O halde buradan iki sonuç çıkarılır.

1. Bu serinin bir toplamı yoktur.

2. Bu serinin toplamı $\frac{1}{2}$ olmalıdır.

Her iki ifade de kanıtlanabilirdir. Fakat 18.yüzyılda matematikçiler arasında sert tartışmalara yol açan bu iki ifadeyi ispatlayabilmek için 19. yüzyılda bulunan Toplanabilme Teorisi kavramlarına gerek duyulmuştur.

Abel her ne kadar ıraksaklığa şeytanın icadı gözüyle baksa da daha sonraları ıraksaklığı kontrol etmenin yolunu keşfetmiş ve bu konuda çalışmalar yapmıştır. Abel Teoremi olarak bilinen teorem, bir serinin sonlu bir toplamı varsa, serinin Abel toplamının serinin toplamı ile aynı olduğunu ifade eder.

Daha sonra Tauber bu teoremin tersinin ne zaman gerçekleşeceğine dair çalışmalar yapmış, bu konuda ilk çalışmasını (1897) yılında ortaya koymuş ve bu sayede yeni bir araştırma alanı ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada ortaya koyduğu teoremlere literatürde Tauber'in birinci ve ikinci teoremi denir. Bu alanda ilk çalışma Tauber tarafından yapıldığı için bu çalışma alanına Toplanabilme Teorisi' nin yanı sıra Tauber teorisi de denilmektedir.

Toplanabilme metotlarından yakınsaklığa geçerken belli koşulların gerekli olduğu belirtilmişti. O halde herhangi bir metotla toplanabilme yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Daha genel olan bu metotlardan yakınsaklığa geçerken koyduğumuz koşullara Tauber koşulları, bu koşulları içeren teoremlere de Tauber teoremleri denir.

Bu alandaki ilk çalışma Tauber tarafından verildikten sonra çalışmalarda yakınsaklığın elde edilmesini sağlayacak daha zayıf koşullar bulmak amaçlanmıştır. Tauber den (1897) sonra Hardy (1910), Landau (1910), Littlewood (1911) gibi birçok bilim adamı bu konuda çalışmalar yapmıştır.

Karamata (1930) yaptığı çalışmada Abel ile $(C,1)$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Abel toplanabilir bir serinin kısmi toplamlar dizisi üzerine koşul koyarak serinin (C,1) toplanabilir olduğunu göstermiştir. Bu teorem literatürde Karamata'nın Temel Teoreminin sonucu olarak bilinir.

Bu çalışmalar yapılırken yakınsaklığa geçiş için yeni araçlara ihtiyaç duyulmuş ve bu araçlardan biri olan yavaş salınımlılık tanımı Schmidt (1924) tarafından verilmiştir. Daha sonra Stanojević (1998) bu tanımı daha işlevsel olarak kullanabilmek için yeniden ifade etmiştir. Stanojević (1998) verdiği yavaş salınımlılık tanımının (C,1) toplanabilme için bir Tauber koşulu olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Dik (2001) yavaş salınımlı bir dizinin aritmetik ortalamalarının da yavaş salınımlı olduğunu göstermiştir.

Toplanabilme Teorisinin temelleri seriler kullanılarak atılsa da benzer metotlar ıraksak integraller ile de tanımlanabilir. Örneğin $L$ sonlu bir sayı olmak üzere, herhangi bir $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ serisi için Cesàro toplanabilme metotu,

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i \to L$$

koşuluyla tanımlıyken, $s(x) = \int_0^x f(t)dt$ integrali için Cesàro toplanabilme metotu,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt \to L$$

koşulu ile tanımlıdır. Yani seriler ve integraller birbirine paralellik gösterir.

İntegraller ile ilgili çalışmalardan bahsedilecek olursa, Hardy (1949), Schmidt (1924) tarafından reel sayı dizileri için verilen yavaş azalanlık kavramının Cesàro toplanabilir integraller için Tauber koşulu olduğunu göstermiştir. Ayrıca reel sayı dizileri için benzer koşullar Landau (1910) tarafından verilmiştir. Móricz (1994) tarafından reel sayı dizilerinin $(C, 1)$ toplanabilir olması durumunda belli Tauber tipi koşullar verilmiş, daha sonra Móricz ve Stadtmüller (2001) tarafından ağırlıklı ortalamalar metotuyla toplanabilir diziler için Tauber tipi koşullar verilmiştir. Móricz (2004) tarafından R+ da ağırlıklı ortalamalar metotuyla toplanabilir integraller için gerek ve yeter Tauber tipi koşullar verilmiştir.

Son zamanlarda ise Çanak, İ. and Totur, Ü. (2010), Çanak, İ. and Totur, Ü. (2011), Çanak, İ. and Totur, Ü. (2012a), Çanak, İ. and Totur, Ü. (2012b), Çanak, İ. and Totur, Ü. (2013) yavaş salınımlılığın Tauber tipi koşul olduğu teoremler ile kontrol modülonun sınırlılığıyla ilgili bazı teoremler ve sonuçları ispatlarıyla birlikte vermişlerdir. Bölüm 3 te bu teoremler ve sonuçlarından bahsedilecektir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve gösterimlerin bir özeti verilecektir.

$f$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$s(x)=\int_0^x f(t)dt$$

şeklinde tanımlı olsun. $s(x)$ fonksiyonunun Cesàro ortalaması,

$$\sigma(x)=\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer sonlu bir $L$ sayısı için,

$$\lim_{x\to\infty}\sigma(x)=L \tag{2.1}$$

ise,

$$\int_0^x f(t)dt$$

integrali $L$ değerine Cesàro toplanabilirdir veya $(C,1)$ yakınsaktır denir.

Eğer,

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=L \tag{2.2}$$

limiti sağlanıyorsa, (2.1) limiti de sağlanır. Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani Cesàro toplanabilir olup, yakınsak olmayan integraller de vardır. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

**Örnek 2.1.1** $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \sin at\, dt\,,\ a > 0$

limiti mevcut değildir. Fakat $\frac{1}{a}$ ‘ ya Cesàro toplanabilirdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds\right)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\left(\int_0^t dt\right)ds \\
&= \int_0^x \left(1-\frac{t}{T}\right)f(t)dt
\end{aligned}$$

dir. Buradan da,

$$\lim_{x\to\infty} \sigma(x) = = \frac{1}{a}$$

olur. Yani;

$$\int_0^x \sin at\, dt$$

integralinin $\frac{1}{a}$ ‘ ya Cesàro toplanabilir olduğu elde edilir.

Yukarıdaki örnekten de görüleceği gibi, Cesàro toplanabilme yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Daha genel olan bir sınıftan daha dar olan bir sınıfa geçerken belli koşulların sağlanması gerekir. Yani eğer (2.1) eşitliği sağlandığında bazı özel koşullar koyarak (2.2) eşitliğini elde edilebilir. Burada daha genel olan Cesàro toplanabilmeden, yakınsaklığa geçerken (2.1) üzerine koyulan özel koşullara Tauber koşulları, bu koşulları içeren teoremlere de Tauber teoremleri denir.

$m \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $s(x) = \int_0^x f(t)dt$ integralinin m. mertebeden Cesàro ortalaması,

$$\sigma_m(s(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int\limits_0^x \sigma_{m-1}\big(s(t)\big)dt, & m \geq 1 \\ s(x), & m = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Literatürde Kronecker eşitliği olarak bilinen,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

bu eşitlik ispatlarda sıkça kullanılacaktır. Burada,

$$v(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x tf(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Daha genel ifade edersek, $m \geq 0$ olmak üzere;

$$v_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int\limits_0^x v_{m-1}(t)dt, & m \geq 1 \\ v(x), & m = 0 \end{cases}$$

dir.

$s(x) = \int_0^x f(t)dt$ integralinin salınım davranışlarının klasik kontrol modülosu;

$$\omega_0(x) = xf(x)$$

dir.

$m \geq 1$ olmak üzere salınım davranışlarının m. mertebeden genel kontrol modülosu ise;

$$\omega_m(x) = \omega_{m-1}(x) - \sigma(\omega_{m-1}(x))$$

şeklinde tanımlanır.

Diziler için klasik ve genel kontrol modülo tanımları Dik (2001) tarafından verilmiştir.

$s(x)=\int_0^x f(t)dt$ integralinin De La Vallée Poussin ortalaması;

$$\tau(x)=\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x} s(t)dt\,, \qquad \lambda>1$$

ve

$$\tau(x)=\frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x} s(t)dt\,, \qquad 0<\lambda<1$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer $s(x)=\int_0^x f(t)dt$ integrali için,

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{x\to\infty}\max_{x\le t\le\lambda x}|s(t)-s(x)|=0$$

veya

$$\lim_{\lambda\to 1^-}\limsup_{x\to\infty}\max_{\lambda x\le t\le x}|s(t)-s(x)|=0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $s(x)$ Stanojević (1998) anlamında yavaş salınımlıdır denir.

Tez boyunca sık kullanılan iki sembolden bahsedilecek olursa,

$$s(x)=o(1)$$

gösterimi $\lim\limits_{x\to\infty}s(x)=0$ olması,

$$s(x)=O(1)$$

gösterimi ise $s(x)$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında sınırlı olması anlamına gelir.

Her pozitif m tamsayısı ve negatif olmayan x ler için,

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)_m s(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1}\left(x\frac{d}{dx}s(x)\right) = x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} s(x)\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)_0 s(x) = s(x)$$

ve

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)_1 s(x) = x\frac{d}{dx}s(x)$$

dir.

## 2.2 Lemmalar

**Lemma 2.2.1.** Her $m \geq 1$ tamsayısı için,

$$x\frac{d}{dx}\left(\sigma_m(x)\right) = x\sigma_m'(x) = v_m(x)$$

dir.

**İspat:**

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \sigma_{m-1}(t)dt$$

olduğu bilinir. Her iki tarafın *x* değişkenine göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\sigma_m'(x) &= -\frac{1}{x^2}\int_0^x \sigma_{m-1}(t)dt + \frac{1}{x}\sigma_{m-1}(x)\\ &= \frac{1}{x}\left(\sigma_{m-1}(x) - \frac{1}{x}\int_0^x \sigma_{m-1}(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{x}(\sigma_{m-1}(x) - \sigma_m(x))\\ &= \frac{1}{x}v_m(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 2.2.2.** Her $m \geq 0$ tamsayısı için,

i) $xv'(x) = xf(x) - v(x)$

ii) $v_m(x) - v_{m+1}(x) = x\frac{d}{dx}\big(v_{m+1}(x)\big) = xv'_{m+1}(x)$

dir.

**İspat:**

i) $s'(x) = f(x)$ olduğunu ve Lemma 2.2.1 i kullanılırsa,

$$xv'(x) = x\big(s(x) - \sigma(x)\big)' = x(s'(x) - \sigma'(x))$$

$$= x\left(f(x) - \frac{1}{x}v(x)\right) = xf(x) - v(x)$$

elde edilir.

ii) $\sigma_m(x) - \sigma_{m+1}(x) = v_{m+1}(x)$ olduğu bilinir. Her iki tarafın

x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx}(\sigma_m(x)) - \frac{d}{dx}(\sigma_{m+1}(x)) = \frac{d}{dx}(v_{m+1}(x))$$

burada her iki taraf x ile çarpılırsa,

$$x\sigma_m'(x) - x\sigma_{m+1}'(x) = xv_{m+1}'(x)$$

olur. Lemma 2.2.1 den,

$$x\sigma_m'(x) = v_m(x)$$

$$x\sigma_{m+1}'(x) = v_{m+1}(x)$$

olduğundan

$$v_m(x) - v_{m+1}(x) = xv_{m+1}'(x)$$

elde edilir.

**Lemma 2.2.3.** $\sigma\big(xv'(x)\big) = xv_1'(x)$.

**İspat:** Lemma 2.2.2 (i) den

$$xv'(x) = xf(x) - v(x)$$

olduğu bilinir. Her iki tarafın Cesàro ortalamaları alınır ve Lemma 2.2.2 (ii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sigma\big(xv'(x)\big) &= \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt \\ &= v(x) - v_1(x) = xv_1'(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 2.2.4.** Her $m \geq 1$ tamsayısı için,

$$\omega_m(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)_m v_{m-1}(x)$$

dir.

**İspat:** İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.

$m = 1$ için,

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big)\\ &= xf(x) - v(x)\\ &= x\frac{d}{dx}v(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $m = 1$ için doğrudur.

$m = k$ için,

$$\omega_k(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)_k v_{k-1}(x)$$

doğru olduğu kabul edilsin.

Önce $m = k + 1$ için doğru olduğu gösterilecektir. Yukarıdaki eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}\omega_{k+1}(x) &= \omega_k(x) - \sigma\big(\omega_k(x)\big)\\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_k v_{k-1}(x) - \sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_k v_{k-1}(x)\right)\\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_k v_{k-1}(x) - \left(x\frac{d}{dx}\right)_k v_k(x)\\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_k \big(v_{k-1}(x) - v_k(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(x\frac{d}{dx}\right)_k \left(x\frac{d}{dx}v_k(x)\right)\\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_{k+1} v_k(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $m \geq 1$ tamsayısı için eşitlik sağlanmış olur.

**Lemma 2.2.5.**

i) $\lambda > 1$ için,

$$s(x) - \sigma(\lambda x) = \frac{1}{\lambda - 1}\big(\sigma(\lambda x) - \sigma(x)\big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x}\big(s(t) - s(x)\big)dt$$

ii) $0 < \lambda < 1$ için

$$s(x) - \sigma(\lambda x) = \frac{1}{1-\lambda}\big(\sigma(x) - \sigma(\lambda x)\big) - \frac{1}{x - \lambda x}\int_{\lambda x}^{x}\big(s(x) - s(t)\big)dt$$

dir.

**İspat:** i) De La Vallée Poussin ortalaması tanımından,

$$\begin{aligned}
\tau(s(x)) &= \frac{1}{\lambda x - x}\int_{x}^{\lambda x} s(t)dt \\
&= \frac{1}{x(\lambda - 1)}\left(\int_{0}^{\lambda x} s(t)dt - \int_{0}^{x} s(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{x(\lambda - 1)}\big(\lambda x\sigma(s(\lambda x)) - x\sigma(s(x))\big) \\
&= \frac{1}{(\lambda - 1)}\lambda\sigma(s(\lambda x)) - \frac{1}{(\lambda - 1)}\sigma(s(x)) \\
&= \left(1 + \frac{1}{(\lambda - 1)}\right)\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \frac{1}{(\lambda - 1)}\sigma\big(s(x)\big).
\end{aligned}$$

Buradan

$$\tau(x) - \sigma(s(\lambda x)) = \frac{1}{(\lambda - 1)}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big)$$

elde edilir.

$$s(x) = \tau(x) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_{x}^{\lambda x}(s(t) - s(x))dt$$

olduğu bilinir. Her iki tarafa $-\sigma(s(\lambda x))$ eklenirse,

$$s(x) - \sigma(s(\lambda x)) = (\tau(x) - \sigma(s(\lambda x))) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_{x}^{\lambda x}(s(t) - s(x))dt$$

elde edilir. Burada $\big(\tau(x) - \sigma(s(\lambda x))\big)$ yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

ii) $0 < \lambda < 1$ için

$$\tau(s(x)) = \frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x} s(t)dt$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\tau(s(x)) &= \frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x} s(t)dt \\
&= \frac{1}{x(1-\lambda)}\left(\int_{0}^{x} s(t)dt - \int_{0}^{\lambda x} s(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{x(1-\lambda)}\Big(x\sigma\big(s(x)\big) - \lambda x\sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{(1-\lambda)}\Big(\sigma\big(s(x)\big) - \lambda\sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{(1-\lambda)}\Big(\sigma\big(s(x)\big) - \sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big) + \sigma\big(s(\lambda x)\big)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\tau(s(x)) - \sigma\big(s(\lambda x)\big) = \frac{1}{(1-\lambda)}\Big(\sigma\big(s(x)\big) - \sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big)$$

dir. Ayrıca

$$s(x) = \tau(x) - \frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x}(s(x)-s(t))dt$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına $-\sigma\big(s(\lambda x)\big)$ eklenirse,

$$s(x) - \sigma\big(s(\lambda x)\big) = \Big(\tau(x) - \sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big) - \frac{1}{x-\lambda x}\int_{\lambda x}^{x}(s(x)-s(t))dt$$

elde edilir. Burada $\tau(x) - \sigma\big(s(\lambda x)\big)$ yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

**Lemma 2.2.6.** $\forall m \geq 1$ tamsayısı için

$$\omega_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$

dir. Burada

$$\binom{m-1}{j} = \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-j)}{j!}$$

dir.

**İspat:** İspatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.

$m = 1$ için,

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big)\\ &= x.f(x) - v(x)\\ &= x\frac{d}{dx}\big(v(x)\big)\\ &= \sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{0}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)\end{aligned}$$

olur. Yani $m = 1$ için doğrudur.

$m = k$ için,

$$\omega_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$

doğru olduğu kabul edilsin ve $m = k + 1$ için doğru olduğu gösterilsin. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_{k+1}(x) = \omega_k(x) - \sigma\big(\omega_k(x)\big)$$

dir. O halde $\omega_k(x)$ in tanımından,

$$\omega_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$
$$-\sigma\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_{j+1}(x)\big)$$

Burada toplamdaki ikinci terimde $j+1=i$ olacak şekilde düzenleme yapılırsa,

$$\omega_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i-1}x\frac{d}{dx}\big(v_i(x)\big)$$

olur. Burada düzenlemeler yapılırsa,

$$\omega_{k+1}(x) = (-1)^0\binom{k-1}{0}x\frac{d}{dx}\big(v(x)\big)+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j-1}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)+(-1)^k\binom{k-1}{k-1}x\frac{d}{dx}\big(v_k(x)\big)$$

ve burada $\binom{k-1}{j}+\binom{k-1}{j-1}=\binom{k}{j}$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\omega_{k+1}(x) = (-1)^0\binom{k-1}{0}x\frac{d}{dx}\big(v(x)\big)+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$
$$+(-1)^k\binom{k-1}{k-1}x\frac{d}{dx}\big(v_k(x)\big)$$
$$=(-1)^0\binom{k-1}{0}x\frac{d}{dx}\big(v(x)\big)+\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}x\frac{d}{dx}\big(v_j(x)\big)$$

elde edilir. Bu da eşitliğin $\forall m \geq 0$ tamsayısı için doğru olduğu gösterir.

# 3. İNTEGRALLERİN CESÀRO TOPLANABİLMESİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde Cesàro toplanabilir integraller için elde edilmiş bazı Tauber tipi teoremler ve ispatları verilecektir.

İlk olarak yavaş salınımlılığın Tauber koşulu olduğu teoremlerden ve sonuçlarından bahsedilecektir.

**Teorem 3.1.** $s(x)=\int_0^x f(t)dt$ integralinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter şart $v(x)=\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$ integralinin sınırlı ve yavaş salınımlı olmasıdır.

**İspat:** $s(x)=\int_0^x f(t)dt$ integralinin yavaş salınımlı olduğu kabul edilsin. İlk olarak

$$v(x)=O(1), \qquad x\to\infty$$

olduğu gösterilecektir.

$$\int_0^x uf(u)du=\int_{x/2}^{x} uf(u)du+\int_{x/4}^{x/2} uf(u)du+\cdots$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{x/2^{j+1}}^{x/2^j} uf(u)du$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$s'(u)=\left(\int_0^u f(t)dt\right)'=f(u)$$

olduğundan

$$\int_\alpha^\beta uf(u)du=\int_\alpha^\beta us'(u)du=u.s(u)|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta s(u)du$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} s(u)du + \beta.s(\beta) - \alpha.s(\alpha) - \alpha.s(\beta) + a.s(\beta)$$
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} s(u)du + (\beta - \alpha).s(\beta) + a.\big(s(\beta) - s(\alpha)\big)$$
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (s(u) - s(\beta))du + \alpha.\big(s(\beta) - s(\alpha)\big)$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha}^{\beta} uf(u)du\right| &\leq \left|\int_{\alpha}^{\beta} (s(u) - s(\beta))du\right| + \alpha|s(\beta) - s(\alpha)| \\ &\leq (\beta - \alpha).\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|s(x) - s(\beta)| + \alpha|s(\beta) - s(\alpha)| \\ &= \beta.\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|s(x) - s(\beta)| - \alpha.\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|s(x) - s(\beta)| \\ &\qquad + \alpha|s(\beta) - s(\alpha)| \\ &= \beta.\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|s(x) - s(\beta)| - \alpha.|s(\beta) - s(\alpha)| + \alpha|s(\beta) - s(\alpha)| \\ &= \beta.\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|s(x) - s(\beta)|\end{aligned}$$

Eğer $\beta = {}^{x}/_{2^j}$ ve $\frac{\beta}{\alpha} \leq 2$ seçersek,

$$\int_{0}^{x} uf(u)du \leq k.\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x}{2^j} = O(x), \qquad x \to \infty$$

elde edilir.

Şimdi $\sigma\big(s(x)\big)$ in yavaş salınımlı olduğunu gösterilsin.

$$\sigma'\big(s(x)\big) = \frac{v(x)}{x}$$

olduğu bilinir.

$$|\sigma(s(t)) - \sigma(s(x))| = \left|\int_{0}^{t} \sigma'(s(u))du - \int_{0}^{x} \sigma'(s(u))du\right|$$

$$= \left| \int_t^x \sigma'(s(u))du \right| = \left| \int_t^x f(u)du \right| \leq \left| \int_t^x \frac{c}{u} du \right| = c. \left| \int_t^x \frac{1}{u} du \right| = c. \log \frac{t}{x}$$

Her iki tarafın $x \leq t \leq \lambda x$ için maksimumuna geçersek,

$$\max_{x \leq t \leq \lambda x} \left| \sigma\big(s(t)\big) - \sigma\big(s(x)\big) \right| \leq \max_{x \leq t \leq \lambda x} c. \log \frac{t}{x} = c . \log \lambda$$

olur. Buradan her iki tarafın $\lambda \to 1^+$ için limiti alınırsa;

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{x \to \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} \left| \sigma\big(s(t)\big) - \sigma\big(s(x)\big) \right| = 0$$

olur. Bu da $\sigma\big(s(x)\big)$ in yavaş salınımlı olduğunu gösterir. Kronecker eşitliğinden,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

$s(x)$ ve $\sigma\big(s(x)\big)$ yavaş salınımlı olduğundan $v(x)$ de yavaş salınımlıdır.

Tersine $v(x)$ sınırlı ve yavaş salınımlı olsun. $v(x)$ in sınırlı olması $\sigma\big(s(x)\big)$ in yavaş salınımlı olmasını gerektirir. Kronecker eşitliğinden,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

$v(x)$ ve $\sigma\big(s(x)\big)$ yavaş salınımlı olduğundan $s(x)$ de yavaş salınımlıdır. O halde ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2.** $s(x)$ integrali $s$ ye Cesàro toplanabilir ve yavaş salınımlı ise

$$\lim_{x \to \infty} s(x) = s$$

dir.

**İspat:** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma(s(x))$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Kronecker eşitliğinden,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

$s(x)$ ve $\sigma\big(s(x)\big)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $v(x)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir.

Teorem 3.1 den $s(x)$ yavaş salınımlı olduğundan $v(x)$ de yavaş salınımlıdır.

Lemma 2.2.5 (i) $v(x)$ e uygulanırsa

$$v(x)-\sigma(v(\lambda x))=\frac{1}{\lambda-1}\big(\sigma(v(\lambda x))-\sigma(v(x))\big)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}(v(t)-v(x))dt$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınarak

$$\begin{aligned}|v(x)-\sigma(v(\lambda x))| &\le \frac{1}{\lambda-1}|\sigma(v(\lambda x))-\sigma(v(x))|+\frac{1}{\lambda x-x}\int_{x}^{\lambda x}|v(t)-v(x)|dt\\ &\le \frac{1}{\lambda-1}|\sigma(v(\lambda x))-\sigma(v(x))|+\max_{x\le t\le\lambda x}|v(t)-v(x)|\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\limsup_{x\to\infty}|v(x)-\sigma(v(\lambda x))|\le 0 \tag{3.1}$$

elde edilir. $v\big(f(x)\big)$, 0 a Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\sigma(v(f(\lambda x)))=o(1), \qquad x\to\infty$$

dir. O halde (3.1) eşitliğinden

$$v\big(f(\lambda x)\big)=o(1), \qquad x\to\infty$$

elde edilir. Ayrıca $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}\sigma(s(x))=s$$

olur. Kronecker eşitliğinden

$$\lim_{x\to\infty}s(x)=s$$

elde edilir.

**Sonuç 3.3.** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir ve

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{x\to\infty} \frac{p(\lambda x)}{p(x)} = 1$$

iken

$$p(x).f(x) = O(p'(x)), \qquad x \to \infty$$

ise

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

dir.

**İspat.** $x \le t \le \lambda x$ için

$$\begin{aligned} |s(t) - s(x)| &= \left| \int_0^t f(u)du - \int_0^x f(u)du \right| \\ &= \left| \int_t^x f(u)du \right| \le c. \int_t^x \frac{p'(u)}{p(u)} du \\ &= c. \log \frac{p(t)}{p(x)} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\max_{x\le t\le \lambda x} |s(t) - s(x)| \le c. \max_{x\le t\le \lambda x} \log \frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

dir. Buradan

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{x\to\infty} \max_{x\le t\le \lambda x} |s(t) - s(x)| = 0$$

elde edilir. O halde $s(x)$ yavaş salınımlıdır. Ayrıca $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Teorem 3.2 den

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

elde edilir.

**Sonuç 3.4.** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir ve

$$xf(x) = O(1), \qquad x \to \infty$$

ise

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

dir.

**İspat.** Sonuç 3.3 te $p(x) = x$ alınırsa ispat kolaylıkla elde edilir.

Son olarak $v(x)$ in yavaş salınımlılığının da Cesàro toplanabilir integraller için Tauber tipi koşul olduğu gösterilsin.

**Teorem 3.5.** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir ve $v(x)$ yavaş salınımlı ise

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

dir.

**İspat.** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma\big(s(x)\big)$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Kronecker eşitliğinden,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

$s(x)$ ve $\sigma\big(s(x)\big)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $v(x)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir.

Teorem 3.1 den $s(x)$ yavaş salınımlı olduğundan $v(x)$ de yavaş salınımlıdır.

Lemma 2.2.5 (i) yi $v(x)$ e uygularsak

$$
\begin{aligned}
&v\big(v(x)\big) - \sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big) - \sigma\big(v\big(v(x)\big)\big)\Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{\lambda x - x}\int_{x}^{\lambda x}\Big(v\big(v(t)\big) - v\big(v(x)\big)\Big)\,dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|v\big(v(x)\big) - \sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big)\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{\lambda - 1}\left|\sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big) - \sigma\Big(v\big(v(x)\big)\Big)\right| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\lambda x - x}\int_{x}^{\lambda x}\left|v\big(v(t)\big) - v\big(v(x)\big)\right|dt \\
&\qquad \le \frac{1}{\lambda - 1}\left|\sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big) - \sigma\Big(v\big(v(x)\big)\Big)\right| + \max_{x \le t \le \lambda x}\left|v\big(v(t)\big) - v\big(v(x)\big)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$
\limsup_{x\to\infty}\left|v\big(v(x)\big) - \sigma\Big(v\big(v(\lambda x)\big)\Big)\right| \le 0
$$

olur. Bu eşitsizlik

$$
v\big(v(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty
$$

olmasını gerektirir. Kronecker eşitliğinde $s(x) = v(x)$ alınırsa,

$$
v(x) - \sigma\big(v(x)\big) = v\big(v(x)\big)
$$

olur. Buradan,

$$
v(x) = o(1), \qquad x \to \infty
$$

elde edilir. Yine Kronecker eşitliğinden

$$
\lim_{x\to\infty} s(x) = s
$$

elde edilir. Bu da eşitliğin $\forall m \ge 0$ tamsayısı için doğru olduğunu gösterir.

Şimdi verilecek teorem literatürde Cesàro toplanabilme metotu için Hardy-Littlewood tipi Tauber teorem olarak bilinir.

**Teorem 3.6.** $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye Cesàro toplanabilir olsun. Eğer yeterli büyüklükte $x$ ler için,

$$\omega_0(x) \geq -C$$

olacak şekilde $C \geq 0$ varsa $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye yakınsar.

**İspat:** $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye Cesàro toplanabilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} \sigma\big(s(x)\big) = s$$

dir.

$$xf(x) = x\frac{d}{dx}s(x) \geq -C$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı var olduğunu varsayalım. Lemma 4 (i) den

$$\begin{aligned}
s(x) - \sigma\big(s(\lambda x)\big) &= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \big(s(t) - s(x)\big)dt \\
&= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \left(\int_x^t s'(z)dz\right)dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \left(\int_x^t \frac{c}{z}dz\right)dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \log\frac{t}{z}dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \frac{c.\log\lambda}{\lambda x - x}.(\lambda x - x) \\
&= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma\big(s(\lambda x)\big) - \sigma\big(s(x)\big)\Big) - \mathrm{c}.\log\lambda
\end{aligned}$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\limsup_{x\to\infty}\Big(s(x) - \sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big) \leq 0$$

elde edilir. Lemma 2.2.5 (ii) den benzer işlemlerle,

$$\limsup_{x\to\infty}\Big(s(x)-\sigma\big(s(\lambda x)\big)\Big)\geq 0$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{x\to\infty} s(x)=\lim_{x\to\infty}\sigma(x)=s$$

elde edilir.

**Teorem 3.7.** $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye Cesàro toplanabilir olsun. Eğer yeterli büyüklükte $x$ ler için,

$$\omega_m(x)\geq -C$$

olacak şekilde bir $C\geq 0$ sayısı ve $m\geq 0$ tamsayısı varsa, $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye yakınsar.

**İspat.** $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma\big(s(x)\big)$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Kronecker eşitliğinden,

$$s(x)-\sigma\big(s(x)\big)=v(x)$$

$s(x)$ ve $\sigma\big(s(x)\big)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $v(x)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} v_1(x)=0 \qquad (3.2)$$

dir. Ayrıca

$$\sigma\big(\omega_0(x)\big)=v(x)$$

olduğundan $\sigma\big(\omega_0(x)\big)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_1(x)=\omega_0(x)-\sigma\big(\omega_0(x)\big)$$

dir. Buradan her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma(\omega_1(x)) = \sigma(\omega_0(x)) - v_1(x)$$

olur. $\sigma(\omega_0(x))$ 0 a Cesàro toplanabilir olduğundan, bu eşitlikten $\sigma(\omega_1(x))$ de 0 a Cesàro toplanabilir olur.

Bu şekilde devam edilirse, $\sigma(\omega_{m-1}(x))$ in 0 a Cesàro toplanabilir olduğu elde edilir. Yeterince büyük $x$ ler için,

$$\omega_m(x) \geq -C$$

olacak şekilde $C \geq 0$ sayısı ile $m \geq 0$ tamsayısı var olsun.

$$\begin{aligned}
\omega_m(x) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_m v_{m-1}(x) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-1}(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-2}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma(\omega_{m-1}(x))\right) \geq -C
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.6 yı $\sigma(\omega_{m-1}(x))$ e uygulanırsa,

$$\sigma(\omega_{m-1}(x)) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir.

$$\omega_m(x) = \omega_{m-1}(x) - \sigma(\omega_{m-1}(x))$$

eşitliğinde

$$\sigma(\omega_{m-1}(x)) = o(1), \qquad x \to \infty$$

ve

$$\omega_m(x) \geq -C$$

olduğundan,

$$\omega_{m-1}(x) \geq -C_1$$

olacak şekilde $C_1 \geq 0$ vardır. Benzer işlemlerle,

$$\begin{aligned}
\omega_{m-1}(x) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-2}(x) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-2}(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-1}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma\big((\omega_{m-2}(x)\big)\right) \geq -C_1
\end{aligned}$$

olur ve Teorem 3.6 $\sigma\big(\omega_{m-2}(x)\big)$ e uygulanırsa,

$$\sigma\big(\omega_{m-2}(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\sigma\big(\omega_1(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty \tag{3.3}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) nin sağlandığı gösterilmişti. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_1(x) = \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big) = \omega_0(x) - v(x)$$

dir. Her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma\big(\omega_1(x)\big) = v(x) - v_1(x)$$

olur. Buradan (3.2) ve (3.3) eşitlikleri göz önünde bulundurularak,

$$v(x) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir. Son olarak $s(x)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\sigma\big(s(x)\big) \to s, \qquad x \to \infty$$

olur. Bu iki eşitlik göz önünde bulundurulursa,

$$s(x) - \sigma\big(s(x)\big) = v(x)$$

Kronecker eşitliğinden,

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

elde edilir.

**Teorem 3.8.** $\sigma\big(s(x)\big)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olsun. Eğer yeterince büyük $x$ ler için,

$$\omega_m(x) \geq -C$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı ve $m \geq 0$ tamsayısı varsa, $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye yakınsar.

**İspat.** $\sigma\big(s(x)\big)$, $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma(\sigma(s(x))) = \sigma_2(s(x))$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Kronecker eşitliğinden,

$$\sigma\big(s(x)\big) - \sigma_2(s(x)) = v_1(x)$$

$v_1(x)$ 0 a Cesàro toplanabilirdir. Bu durumda $v_2(x)$ de 0 a Cesàro toplanabilir olur. Ayrıca,

$$\sigma\big(\omega_0(x)\big) = v(x)$$

olduğundan $\sigma\big(\omega_0(x)\big)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_1(x) = \omega_0(x) - \sigma(\omega_0(x))$$

dır. Buradan her iki tarafın iki kez aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = v_1(x) - v_2(x)$$

olur ve bu eşitlikte $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ *0* a Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma_2\big(\omega_1(x)\big)$ de 0 a Cesàro toplanabilir olur. Bu şekilde devam edilirse, $\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)$ 0 a Cesàro toplanabilir elde edilir. Yeterince büyüklük $x$ ler için,

$$\omega_m(x) \geq -C$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı ve $m \geq 0$ tamsayısı var olsun.

$$\begin{aligned}
\sigma\big(\omega_m(x)\big) &= \sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_m v_{m-1}(x)\right)k \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_m(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-2}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\Big(\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)\Big) \geq -C
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.6 $\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)$ e uygulanırsa,

$$\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir. Ayrıca

$$\omega_m(x) \geq -C$$

olduğundan,

$$\sigma(\omega_m(x)) \geq -C$$

dir.

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big) = \sigma\big(\omega_{m-1}(x)\big) - \sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)$$

eşitliğinde

$$\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big) = o(1), \quad x \to \infty$$

ve

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big) \geq -C$$

olduğundan,

$$\sigma\big(\omega_{m-1}(x)\big) \geq -C_1$$

olacak şekilde $C_1 \geq 0$ vardır. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
\sigma\big(\omega_m(x)\big) &= \sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-1}(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_m(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-1}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\Big(\sigma_2\big(\omega_{m-2}(x)\big)\Big) \geq -C
\end{aligned}$$

olur ve Teorem 3.6 $\sigma_2\big(\omega_{m-2}(x)\big)$ e uygulanırsa,

$$\sigma_2\big(\omega_{m-2}(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty \tag{3.4}$$

elde edilir. Ayrıca $v_1(x)$ 0 a Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} v_2(x) = 0 \tag{3.5}$$

dir. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_1(x) = \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big) = \omega_0(x) - v(x)$$

dir. Her iki tarafın iki kez aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = v_1(x) - v_2(x)$$

olur. Buradan (3.4) ve (3.5) eşitlikleri göz önünde bulundurularak,

$$v_1(x) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir. Son olarak $\sigma\big(s(x)\big)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\sigma_1\big(s(x)\big) \to s, \qquad x \to \infty$$

olur. Bu iki eşitlik göz önünde bulundurulursa,

$$\sigma\big(s(x)\big) - \sigma_1\big(s(x)\big) = v_1(x)$$

Kronecker eşitliğinden,

$$\lim_{x\to\infty} \sigma\big(s(x)\big) = s$$

elde edilir. Bu da $s(x)$ in $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğunu gösterir. Bu durumda Teorem 3.7 nin koşulları sağlanmış olduğundan,

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = s$$

elde edilir.

**Teorem 3.9.** $\sigma\big(s(x)\big)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir olsun. Eğer yeterince büyüklük $x$ ler için,

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big) \geq -C$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı ve $m \geq 0$ tamsayısı varsa, $\int_0^x f(t)dt$ integrali $s$ ye yakınsar.

**İspat:** $\sigma\big(s(x)\big)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma\Big(\sigma\big(s(x)\big)\Big) = \sigma_2(s(x))$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde Kronecker eşitliğinden,

$$\sigma_1\big(s(x)\big) - \sigma_2\big(s(x)\big) = v_1(x)$$

$v_1(x)$ 0 a Cesàro toplanabilirdir. Bu durumda $v_2(x)$ de 0 a Cesàro toplanabilir olur. Ayrıca,

$$\sigma\big(\omega_0(x)\big) = v(x)$$

olduğundan $\sigma\big(\omega_0(x)\big)$ de 0 a Cesàro toplanabilirdir. Kontrol modülo tanımından,

$$\omega_1(x) = \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big)$$

dir. Buradan her iki tarafın iki kez aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = v_1(x) - v_2(x)$$

olur ve bu eşitlikte $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 0 a Cesàro toplanabilir olduğundan $\sigma_2\big(\omega_1(x)\big)$ de 0 a Cesàro toplanabilir olur. Bu şekilde devam edilirse, $\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)$ 0 a Cesàro toplanabilir elde edilir. Yeterince büyüklük $x$ ler için,

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big) \geq -C$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ ve $m \geq 0$ tamsayısı var olsun.

$$\begin{aligned}\sigma\big(\omega_m(x)\big) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)_m v_m(x)\\ &= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_m(x)\right)\\ &= x\frac{d}{dx}\Big(\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)\Big)\\ &\geq -C\end{aligned}$$

olur ve Teorem 3.6 $\sigma_2\big(\omega_{m-2}(x)\big)$ e uygulanırsa,

$$\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir.

$$\omega_m(x) = \omega_{m-1}(x) - \sigma\big(\omega_{m-1}(x)\big)$$

eşitliğinde her iki tarafın artimetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big) = \sigma\big(\omega_{m-1}(x)\big) - \sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)$$

olur. Burada

$$\sigma\big(\omega_{m-1}(x)\big) = o(1) \quad , \quad x \to \infty$$

ve

$$\sigma(\omega_m(x)) \geq -C$$

olduğundan,

$$\sigma(\omega_{m-1}(x)) \geq -C_1$$

olacak şekilde $C_1 \geq 0$ vardır.

Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
\sigma(\omega_{m-1}(x)) &= \sigma\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-1}(x)\right) \\
&= \sigma\left(x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-2}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-1}(x)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-2} v_{m-3}(x)\right)\right) \\
&= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2(\omega_{m-2}(x))\right) \\
&\geq -C
\end{aligned}$$

olur ve Teorem 3.6 $\sigma_2(\omega_{m-2}(x))$ e uygulanırsa,

$$\sigma_2(\omega_{m-2}(x)) = o(1), \quad x \to \infty$$

elde edilir. Kontrol modülo tanımının aritmetik ortalamasına geçilerek, benzer şekilde

$$\sigma(\omega_{m-1}(x)) = \sigma(\omega_{m-2}(x)) - \sigma_2(\omega_{m-2}(x))$$

eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\sigma(\omega_{m-2}(x)) \geq -C_2$$

olacak şekilde $C_2 \geq 0$ sayısı bulunabilir. Benzer işlemlerle devam edilirse,

$$\sigma(\omega_0(x)) = x\sigma'(s(x)) \geq -C_m$$

olacak şekilde $C_m \geq 0$ sayısı bulunabilir. Bu eşitsizlikten

$$\sigma'(s(x)) \geq -\frac{C_m}{x}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi $\sigma(s(x))$ e Lemma 2.2.5 (i) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma(s(x)) - \sigma_2(s(\lambda x)) &= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \Big(\sigma(s(t)) - \sigma(s(x))\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \left(\int_x^{t} \sigma'(s(z))dz\right) dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \left(\int_x^{t} \frac{C_m}{z}dz\right) dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) - \frac{1}{\lambda x - x}\int_x^{\lambda x} \log\left(\frac{t}{x}\right) dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) - C_m log\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafının $x \to \infty$ için üst limitini alarak,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty} \Big(\sigma(s(x)) - \sigma_2(s(\lambda x))\Big) \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda - 1}\limsup_{x\to\infty}\Big(\sigma_2(s(\lambda x)) - \sigma_2(s(x))\Big) + C_m log\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\limsup_{x\to\infty}\Big(\sigma(s(x)) - \sigma_2(s(\lambda x))\Big) \leq C_m log\lambda$$

bulunur. Burada eşitsizliğin her iki tarafının $\lambda \to 1^+$ için limiti alınırsa,

$$\limsup_{x\to\infty} \Big(\sigma(s(x)) - \sigma_2((\lambda x))\Big) \leq 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. Benzer işlemler Lemma 2.2.5 (ii) ye uygulanırsa,

$$\liminf_{x\to\infty}\Big(\sigma\big(s(x)\big)-\sigma_2\big(s(\lambda x)\big)\Big)\geq 0 \tag{3.7}$$

olur. (3.6) ve (3.7) eşitsizliklerinden

$$\lim_{x\to\infty}\sigma(s(x))=\lim_{x\to\infty}\sigma_2(s(x))$$

olur. Buradan da $s(x)$ in $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğu elde edilir. O halde Teorem 3.8. in koşulları sağlandığından,

$$\lim_{x\to\infty}s(x)=s$$

olur ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.10.** $[0,\infty)$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\int_0^x\frac{\gamma(t)}{t}dt \tag{3.8}$$

yavaş salınımlı olacak şekilde negatif olmayan $\gamma(t)$ fonksiyonu ve $m\geq 0$ tamsayısı, yeterince büyük $x$ ler için,

$$\omega_m(x)\geq-\gamma(x) \tag{3.9}$$

oluyorsa ve $v_1(x)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir ise $\int_0^x f(t)dt$ integrali yavaş salınımlıdır.

**İspat.** (3.8) koşulu kullanılırsa,

$$\sigma(\gamma(x))=O(1),\qquad x\to\infty$$

elde edilir. (3.9) koşulunda her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma\big(\omega_m(x)\big)\geq-\sigma\big(\gamma(x)\big)\geq-C_0$$

olacak şekilde $C_0>0$ vardır.

$$\omega_1(x) = \omega_0(x) - \sigma(\omega_0(x))$$
$$= \omega_0(x) - v(x)$$

dir. Buradan her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma(\omega_1(x)) = \sigma(\omega_0(x)) - v_1(x)$$

tekrar her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma_2(\omega_1(x)) = v_1(x) - v_2(x) \tag{3.10}$$

olur. $v_1(x)$ in $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğu bilindiğinden $v_2(x)$ de $s$ ye Cesàro toplanabilirdir. O halde (3.10) eşitliğinden $\sigma_2(\omega_1(x))$ 0 a Cesàro toplanabilirdir.

Benzer işlemlerle devam edilerek,

$\sigma_2(\omega_{m-1}(x))$ in 0 a Cesàro toplanabilir olduğu elde edilir.

$$\omega_m(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)_m v_{m-1}(x)$$

ve

$$\sigma(\omega_m(x)) \geq -C_0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\sigma(\omega_m(x)) &= x\frac{d}{dx}\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-1}(x)\right)\\ &= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2\left(\left(x\frac{d}{dx}\right)_{m-1} v_{m-2}(x)\right)\right)\\ &= x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2(\omega_{m-1}(x))\right)\\ &\geq -C_0\end{aligned}$$

$\sigma_2(\omega_{m-1}(x))$ 0 a Cesàro toplanabilirdir. $s'(x) = f(x)$ olduğundan,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sigma_2(\omega_{m-1}(x))\right)$$

olması durumunda

$$\omega_0(x) = x\frac{d}{dx}\left(\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big)\right) \geq -C_0$$

olur. O halde Teorem 3.6 dan

$$\sigma_2\big(\omega_{m-1}(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

dir. Benzer işlemlerle devam edilirse,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = o(1), \qquad x \to \infty$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \omega_0(x) - \sigma\big(\omega_0(x)\big) \\ &= \omega_0(x) - v(x) \end{aligned}$$

her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma\big(\omega_1(x)\big) = \sigma\big(\omega_0(x)\big) - v_1(x)$$

tekrar her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse,

$$\sigma_2\big(\omega_1(x)\big) = v_1(x) - v_2(x) \tag{3.11}$$

elde ederiz. $v_1(x)$ $s$ ye Cesàro toplanabilir olduğundan,

$$v_2(x) \to s, \quad x \to \infty$$

olur. (3.11) eşitliğinden

$$v_1(x) \to s, \quad x \to \infty$$

elde edilir. $\int_0^x \frac{\gamma(t)}{t}dt$ yavaş salınımlı olduğundan $\sigma\big(\gamma(x)\big) = O(1), \quad x \to \infty$ idi.

$$x\frac{d}{dx}v(x) \geq -(\gamma(x) + C)$$

olur.

Lemma 2.2.5 (i) $v(x)$ e uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
v(x)-v_1(\lambda x) &= \frac{1}{\lambda-1}\big(v_1(\lambda x)-v_1(x)\big)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x}(v(t)-v(x))dt\,k \\
&\leq \frac{1}{\lambda-1}\big(v_1(\lambda x)-v_1(x)\big)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x}\left(\int_x^t v'(z)dz\right)dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda-1}\big(v_1(\lambda x)-v_1(x)\big)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x}\left(\int_x^t \frac{(\gamma(z)+C)}{z}dz\right)dt
\end{aligned}
$$

$$
\leq \frac{1}{\lambda-1}\big(v_1(\lambda x)-v_1(x)\big)-\frac{1}{\lambda x-x}\int_x^{\lambda x}\left(\int_x^t \frac{\gamma(z)}{z}dz+C\log\frac{t}{x}\right)dt
$$

elde edilir. Buradan,

$$
|v(x)-v_1(\lambda x)| \leq \frac{1}{\lambda-1}|v_1(\lambda x)-v_1(x)|+\max_{x\leq t\leq \lambda x}\left|\int_x^t \frac{\gamma(z)}{z}dz\right|+c.\log\lambda
$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\limsup_{x\to\infty}(v(x)-v_1(\lambda x)) \leq 0
$$

olur. Lemma 2.2.5 (ii) den de benzer işlemlerle

$$
\liminf_{x\to\infty}\big(v(x)-v_1(\lambda x)\big) \geq 0
$$

olur. O halde buradan

$$
\lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v_1(\lambda x) = s
$$

elde edilir. Bu da $v(x)$ in yavaş salınımlı olmasını gerektirir. Buradan da $s(x)$ in yavaş salınımlı olduğu söylenebilir.

**Sonuç 3.11.** Reel bir $f(x)$ fonksiyonu için (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlayan negatif olmayan bir $M(x)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\sigma(s(x))$ $s$ ye Cesàro toplanabilir ise $s(x)$, s ye yakınsaktır.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

**Çanak, İ. and Totur, Ü.,** 2010, Tauberian conditions for Cesàro summability of integrals, Applied Mathematics Letters, 24, 891-896.

**Çanak, İ. and Totur, Ü.,** 2011, A Tauberian theorem for Cesàro summability of integrals, Applied Mathematics Letters, 24 (3), 391-395.

**Çanak, İ. And Totur, Ü.,** 2012a, One-sided Tauberian conditions for $(C,1)$ summability method of integrals, Mathematical and Computer Modelling, 55, 1813–1818.

**Çanak, İ. and Totur, Ü.,** 2012b, Alternative proofs of some classical type Tauberian theorems for the Cesàro summability of integrals, Mathematical and Computer Modelling, 55 (3), 1558-1561.

**Çanak, İ. and Totur, Ü.,** 2013, On Tauberian conditions for (C,1) summability of integrals, Revista de la Unión Matemática Argentina.

**Dik, M**, Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli, Math. Morav. 5, 57–94.

**Hardy, G. H.,** 1949, Divergent Series, Oxford University Press.

**Tauber, A.,** 1897, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatsh. Math. Phys., 8, 273–277.

**Karamata, J.,** 1930, Uber die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z., 32, 319–320.

**Landau, E.,** 1910, Über die Bedeutung einiger neuerer Grenzwertsatze der Herren Hardy und Axer. Prace Mat. Fiz., 21, 97–177.

**Littlewood, J. E., 1910,** The converse of Abel’s theorem on power series. Proc. London Math. Soc. 9, 2, 434–448.

**Mórıcz, F.,** 1994, Necessary and sufficient Tauberian conditions, under which convergence follows from summability $(C,1)$. Bull. London Math. Soc., (26): 288-294.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

**Móricz, F., Stadtmüller, U.,** 2001, Necessary and sufficient conditions under which convergence follows from summability by weighted means. Intern. J. Math. Sci., (27): 399-406.

**Móricz, F.** 2004, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over $R_+$. Math. Ineq. & Appl., Zagreb, (7), 87-93.

**Schmidt, R., 1924,** Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Z., 22(89-152).

**Stanojevic, C. V.,** 1998, Analysis of divergence: Control and management of divergent process. Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by İ. Çanak, University of Missouri-Rolla. Fall 1998.

# ÖZGEÇMİŞ

Duygu Kebapcı, 02.12.1988 tarihinde Afyonkarahisar'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2010 yılında Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Halen, Ege Üniversitesi Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini sürdürmektedir.

**Yayın:**

Çanak, İ., Hasekiler, F. and Kebapcı, D., 2011, Some Tauberian theorems for regularly generated sequences, Computers & Mathematics with Aplications Volume 62 Issue 12, P.4486-4491.